УДК 336.71

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО ОЦІНЮВАННЯ ОПЦІОНІВ НА БАЗІ МОДЕЛІ CEV

© 2016 БУРТНЯК І. В., МАЛИЦЬКА Г. П.

УДК 336.71

Буртняк І. В., Малицька Г. П. Системний підхід до оцінювання опціонів на базі моделі CEV

Метою статті є дослідження похідних активів за допомогою інструментів спектрального аналізу, сингулярної та регулярної теорії збурень. Використовуючи нейтральну за ризиком оцінку, отримуємо задачу Коші, яка дозволяє обчислити наближену ціну похідних активів та їхню волатильність на основі рівняння дифузії. До загальної дифузії додаємо два фактори швидко та повільно змінних чинників нелокальної волатильності, отримуємо модель з багатовимірною стохастичною волатильністю. Комбінуючи методи зі спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, можна обчислити ціну похідних активів як розвинення за власними функціями і власними значеннями лінійних операторів та розв'язання рівняння Пуассона. Перспективами подальших досліджень у даному напрямі є вдосконалення спектральної теорії та поширення результатів статті на випадки, коли рівняння, з якого знаходяться власні значення, не має дискретного спектру, а також коли стохастична волатильність залежить від чотирьох і більше неоднорідних факторів, які присутні на фондових ринках.

Ключові слова: *стохастична волатильність, локальна волатильність, спектральна теорія, сингулярна теорія збурень, регулярна теорія збурень.*

Рис.: *1.* ***Формул:*** *3.* ***Бібл.:*** *12.*

Буртняк Іван Володимирович *– кандидат економічних наук, доцент кафедри економічної кібернетики, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника (вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76018, Україна)*

E-mail: *bvanya@meta.ua*

Малицька Ганна Петрівна *– кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного та функціонального аналізу, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника (вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76018, Україна)*

УДК 336.71

Буртняк И. В., Малицкая А. П. Системный подход к оценке опционов на базе модели CEV

Целью статьи является исследование производных активов с помощью инструментов спектрального анализа, сингулярной и регулярной теории возмущений. Используя нейтральную по риску оценку, получаем задачу Коши, которая позволяет вычислить приближенную цену производных активов и их волатильность на основе уравнения диффузии. В общей диффузии добавляем два быстро и медленно меняющихся фактора нелокальной волатильности, получаем модель с многомерной стохастической волатильностью. Комбинируя методы спектральной теории сингулярных и регулярных возмущений, можно вычислить цену производных активов как разложение по собственным функциям и собственным значениям линейных операторов и решение уравнения Пуассона. Перспективами дальнейших исследований в данном направлении является совершенствование спектральной теории и распространение результатов статьи на случаи, когда уравнение, из которого находятся собственные значения, не имеет дискретного спектра, а также когда стохастическая волатильность зависит от четырех и более неоднородных факторов, которые присутствуют на фондовых рынках.

Ключевые слова: *стохастическая волатильность, локальная волатильность, спектральная теория, сингулярная теория возмущений, регулярная теория возмущений.*

Рис.: *1.* ***Формул:*** *3.* ***Библ.:*** *12.*

Буртняк Иван Владимирович *– кандидат экономических наук, доцент кафедры экономической кибернетики, Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника (ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск, 76018, Украина)*

E-mail: *bvanya@meta.ua*

Малицкая Анна Петровна *– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и функционального анализа, Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника (ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск, 76018, Украина)*

UDC 336.71

Burtnyak I. V., Malytska A. P. A Systematic Approach to the Evaluation of Options Based on the CEV-Model

The article is concerned with studying the derivative assets, using tools for spectral analysis, as well as of the singular and regular perturbation theory. Using the risk-neutral valuation, we obtain the Cauchy task, allowing to calculate an approximate price of derivative assets and their volatility based on a diffusion equation. In the overall diffusion we add two quickly and slowly changing factors of the nonlocal volatility to obtain a model with the multivariate stochastic volatility. Combining the methods of spectral theory of singular and regular perturbations, one can calculate the price of derivative assets as degradation by native functions and the own values of linear operators and solution of the Poisson equation. Prospects for further research in this direction will be improvement of spectral theory and dissemination of the results of the publication on the cases when the equation, from which the eigenvalues are found, has no discrete spectrum, as well as when the stochastic volatility depends on four or more disparate factors that are present in the stock markets.

Keywords: *stochastic volatility, local volatility, spectral theory, singular perturbation theory, regular perturbation theory.*

Fig.: *1.* ***Formulae:*** *3.* ***Bibl.:*** *12.*

Burtnyak Ivan V. *– PhD (Economics), Associate Professor of the Department of Economic Cybernetics, Precarpathian National University named after V. Stefanyk (57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine)*

E-mail: *bvanya@meta.ua*

Malytska Anna P. *– PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Mathematical and Functional Analysis, Precarpathian National University named after V. Stefanyk (57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine)*

Спектральну теорію економісти почали широко використовувати в другій половині 20 століття, особливо широке застосування вона одержала у фінансовій математиці для аналізу моделей дифузії на базі розвинення за власними функціями і власними значеннями лінійних операторів. Багато проблем, пов'язаних з оцінкою похідних активів, було вирішено аналітично за допомогою методів спектральної теорії. Наприклад, для знаходження ціни європейського опціону за допомогою моделі Блека–Шоулза [1]. Серед наукових проблем, які можна вирішити шляхом застосування спектральних методів: прогнозування цін опціонів [2], знаходження відсоткової ставки на цінні папери [3], моделювання волатильності фінансових активів [4].

Спектральні методи є потужним інструментом для аналітичного ціноутворення похідних активів, а саме:

опціонів, відсоткової ставки, моделювання волатильності і кредитних ризиків [5]. Як спектральна теорія, так і стохастичні моделі волатильності стали незамінним інструментом у фінансовій математиці. Це пов'язано з тим, що ціни двобар'єрного опціону підпорядковуються броунівському руху і корелюють з волатильністю [6]. Стохастична волатильність, зокрема волатильність активу, лежить в основі похідної та контролюється нелокальною дифузією.

У даній статті ми продовжуємо тематику робіт [7–9], поширюючи її на теорію моделі CEV (*constant elasticity of variance model*), яка розроблена Джоном Коксом в 1975 р., застосовуючи методику [1–4].

Комбінуючи методи зі спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, можна наближено обчислити ціну вибору як розвинення за власними функціями, хоча працюватимемо з інфінітезимальними генераторами тривимірної дифузії.

Розглянемо спочатку одновимірну дифузію

$$dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)dW_t,$$

в якій є можливість проявляти кіллінг (стрибок дефолту) на швидкості $h(X_t) \geq 0$, W_t – геометричний броунівський рух, X завжди строго додатній. До загальної дифузії додаємо два фактори нелокальної волатильності: $a(X_t) \to a(X_t)\, f(Y_t, Z_t)$. Перший фактор Y – це фактор швидко мінливих чинників. Другий фактор Z змінюється повільно. Таким чином, наша модель є багатовимірною стохастичною волатильною моделлю [9].

Використовуємо такі оператори збурень:

$$\mathfrak{L}_Z^{\delta} = \delta\left(\frac{1}{2}g^2(z)\partial_{zz}^2 + c(z)\partial_z\right),$$

$$\mathfrak{L}_Y^{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{2}\beta^2(y)\partial_{yy}^2 + \alpha(y)\partial_y\right),$$

де $\epsilon > 0$ і $\frac{1}{\delta} > 0$. Вважатимемо, що $\epsilon << 1$ і $\delta << 1$, внутрішня шкала часу Y є малою, а внутрішня шкала часу Z велика. Зауважимо, що $\mathfrak{L}_Y^{\epsilon}$ і $\mathfrak{L}_Z^{\delta}$ мають форму

$$L = \frac{1}{2}a^2(x)\partial_{xx}^2 + b(x)\partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2), \qquad (1)$$

Нехай потрібно виплатити дивіденди по активу $S_t = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} X_t$, $S > 0$. тоді простором станів X буде e_1, $e_2 = (0, \infty)$. Розглянемо багатовимірний дифузійний процес на кілінгу (скачку дефолту) сталої варіативної моделі. Зокрема, $\widetilde{\mathbb{P}}$ динаміка X дефолту задається як

$$dX_t = (\mu + cX_t^{2\eta})X_t dt + (f(Y_t, Z_t)X_t^{\eta}) \times$$
$$\times X_t d\widetilde{W}_t^x,\ h(X_t) = \mu + cX_t^{2\eta}.$$

Для спрощення обчислень вважатимемо, що безризикова відсоткова ставка $r = 0$, $\mu > 0$, $c > 0$, Y і Z є швидко і повільно змінні фактори волатильності, які визначаються системою стохастичних рівнянь [9].

У нашому дослідженні дефолт може відбутися одним із двох способів, коли X виходить за інтервал I, або у випадковий час τ_h, ($h(X_t) \geq 0$ стохастична величина, так званий рівень небезпеки). Математично час дефолту τ можна виразити таким чином:

$$\begin{cases} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin I\}, \\ \tau_h = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t h(X_s)ds \geq \varepsilon\},\ \varepsilon \sim Exp(1),\ \varepsilon(X, Y, Z). \end{cases}$$

Волатильність X включає в себе місцеву компоненту X_t^{η} і нелокальну компоненту багатовимірності $f(Y_t, Z_t)$. Припускаємо, що $\eta < 0$, тобто місцева компонента волатильності X_t^{η} збільшується при зменшенні X_t, а це означає що ціни і волатильність мають від'ємну кореляцію. Стохастичний рівень небезпеки $h(X_t)$ зростає, при спаданні X. Обчислимо наближену ціну європейського опціону пут для активу S. Ціну європейського опціону можна знайти за формулою (2):

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2}\partial_{xx}^2 + (\mu + cx^{2\eta})x\partial_x - (\mu + cx^{2\eta}), \qquad \textbf{(2)}$$

де $\mathfrak{L}_2$ – нескінченно малий генератор, кінець інтервалу тобто точка $e_2 = \infty$ є природною границею. Однак класифікація точки $e_1 = 0$ залежить від вартості η і $c/\bar{\sigma}^2$. Тому проводять таку класифікацію:

1) $c/\bar{\sigma}^2 \geq 1/2$, $\eta < 0$, $e_1 = 0$ – тривіальний випадок;

2) $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$, $\eta \in [c/\bar{\sigma}^2 - 1/2, 0)$, $e_1 = 0$ – це число відіграє роль початкового моменту;

3) $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$, $\eta < c/\bar{\sigma}^2 - 1/2$, $e_1 = 0$ – при такій умові початок інтервалу є сталим.

Якщо параметри (с, $\bar{\sigma}$, η) задовольняють $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$, а $\eta \in [c/\bar{\sigma}^2 - 1/2, 0)$, $e_1 = 0$, то e_1 вважають кілінговою межею. Щоб обчислити наближену ціну європейського опціону, треба знайти власні функції $\{\psi_n\}$, власні значення $\{\lambda_n\}$оператора $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$. Зазначимо, що $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, поданий у (2), має вигляд інфінітезимального генератора одновимірної дифузії (1) з волатильністю $\bar{\sigma}a(x)$, відхиленням $(b(x) - \widetilde{(f\Omega)}\, a(x))$ і кілінгом $k(x)$, dom($\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$) включає граничні умови, які повинні бути накладені на кінцях e_1 та e_2 рівняння $-\langle \mathfrak{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n$, $\psi_n \in dom(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle)$, на інтервалі $(0, \infty)$ з $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, записаного у вигляді (2) тобто:

$$\lim_{x \searrow 0} \psi_n = 0, \text{ якщо } \frac{c}{\bar{\partial}^2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Результати. Розв'язок має вигляд [11]:

$$\psi_n = A^{\frac{v}{2}}\sqrt{\frac{(n-1)!\,\mu}{\Gamma(v+n)}}\, x\exp(-Ax^{-2\eta}) \times$$
$$\times L_{n-1}^{(v)}(Ax^{-2\eta}),\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$A = \frac{\mu}{\bar{\sigma}^2|\eta|},\ \lambda_n = 2\mu|\eta|(n+v),\ v = \frac{1 + 2\left(\frac{2}{\bar{\sigma}^2}\right)}{2|\eta|},$$

де $L_n^{(v)} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n+v}{n-i}\frac{x_i}{i!}$ є узагальненими поліномами Лагерра. При асимптотичному дослідженні ми розглядаємо задачі

$$(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle)u_{0,0} = 0,\ u_{0,0}(0, x, z) = H(x),$$

$$(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle)u_{1,0} = \mathcal{A}u_{0,0},\ u_{1,0}(0, x, z) = 0,$$

$$(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) u_{0,1} = \mathcal{B}\partial_z u_{0,0},\ u_{0,1}(0,x,z) = 0,$$

де $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ мають вигляд

$$\mathcal{A} = -v_3 x^{\eta+1}\partial_x x^{2\eta+2}\partial^2_{xx} - v_2 x^{2\eta+2}\partial^2_{xx},$$

$$\mathcal{B} = -v_1 x^{\eta+1}\partial_x - v_0.$$

$$\mathcal{A}u_{0,0} = \sum_n c_n\,(\mathcal{A}\psi_n)T_n = \sum_n\sum_k c_n\mathcal{A}_{k,n}\psi_k T_n$$

$$\mathcal{B}\partial_z u_{0,0} = \sum_n c_n(\mathcal{B}\partial_z\psi_n)T_n + \sum_n(\partial_z c_n)(\mathcal{B}\psi_n)T_n + c_n(\mathcal{B}\psi_n)(\partial_z T_n) =$$
$$= \sum_n\sum_k c_n\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n}\psi_k T_n + \sum_n\sum_k(\partial_z c_n)\mathcal{B}_{k,n}\psi_k T_n -$$
$$-\sum_n\sum_k c_n\mathcal{B}_{k,n}\psi_k(\partial_z\lambda_n)tT_n.$$

Аналітичні вирази для $\mathcal{A}_{k,n}, \mathcal{B}_{k,n}$ і $\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n}$ можна отримати, зробивши заміну змінних [10] $Ax^{-2\eta} \to y$, використовуючи $\partial_y L_n^{\upsilon}(y) = -L_{n-1}^{(\upsilon+1)}(y)$ і $\int_0^\infty y^\alpha e^{-y}L_n^{(\alpha)} \times (y)L_m^{(\alpha)}(y)dy = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{nm}$,

де δ_{nm} – символ Кронекера. Формули для визначення $\mathcal{A}_{k,n}, \mathcal{B}_{k,n}$ і $\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n}$ мають вигляд [9]:

$$\mathcal{A}_{k,n} = -\vartheta_3\left\{\sum_{m=0}^{3\wedge n}\binom{3}{m}\left(\frac{-1}{\kappa}\right)^{3-m}\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)^m \times\right.$$
$$\left.\times\ \frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-m)!\,\mathcal{N}_{n-m}}\delta_{k,n-m}\right\} -$$
$$-(\vartheta_2 + \mathfrak{U}_2)\left\{\sum_{m=0}^{3\wedge n}\binom{2}{m}\left(\frac{-1}{\kappa}\right)^{2-m}\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)^m \times\right.$$
$$\left.\times\ \frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-m)!\,\mathcal{N}_{n-m}}\delta_{k,n-m}\right\} -$$
$$-\mathfrak{U}_1\left\{\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)\frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-1)!\,\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}\right\},$$

$$\mathcal{B}_{k,n} = -\vartheta_1\left\{\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \times\right.$$
$$\left.\times\frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-1)!\,\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}\right\} - \vartheta_0\delta_{k,n},$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n} = -\vartheta_1\bar{\sigma}'\left\{\left[\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}}\right)\right]\delta_{k,n} +\right.$$
$$+\left[\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)\left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}}\right)\right] \times$$
$$\times\frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-1)!\,\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1} +$$
$$+\left[\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)\left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-2)!\,\mathcal{N}_{n-2}}\delta_{k,n-2} +$$
$$\left.+\left[\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)\left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right)\right]\frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-3)!\,\mathcal{N}_{n-3}}\delta_{k,n-3}\right\} -$$
$$-\vartheta_0\bar{\sigma}'\left\{\left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}}\right)\delta_{k,n}\right.$$
$$+\left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-1)!\,\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1} +$$
$$\left.+\left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right)\frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-2)!\,\mathcal{N}_{n-2}}\delta_{k,n-2}\right\} -$$
$$-\vartheta_1\overline{f\Omega}'\left\{\left(\frac{1}{\kappa^3}\right)\delta_{k,n} + \left(\frac{-4}{\bar{\sigma}\kappa^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-1)!\,\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{4}{\bar{\sigma}^2}\right)\frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-2)!\,\mathcal{N}_{n-2}}\delta_{k,n-2}\right\} -$$
$$-\vartheta_0\overline{f\Omega}'\left\{\left(\frac{-1}{\kappa^2}\right)\delta_{k,n} + \left(\frac{2}{\bar{\sigma}\sqrt{\kappa}}\right)\right.$$
$$\left.\times\frac{n!\,\mathcal{N}_n}{(n-1)!\,\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}\right\}.$$

$$c_n = (\psi_n, 1) = \frac{2}{\bar{\sigma}}\sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}\mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4}.$$

Знайдемо власні значення рівняння:

$$-\langle \mathfrak{L}_2 \rangle\ \psi_n = \lambda_n\,\psi_n,\ \psi_n \in \mathrm{dom}(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle),$$

і припустимо, що $H \in \mathcal{H}$. Тоді розв'язок $u_{0,0}$ дається у вигляді:

$$u_{0,0} = \sum_n c_n\psi_n T_n,\ c_n = (\psi_n, H),\ T_n = e^{-t\lambda n}.$$

Визначимо

$$\mathcal{A}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{A}\psi_n),\ U_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

Тоді можемо знайти $u_{1,0}$:

$$u_{1,0} = \sum_n\sum_{k\neq n} c_n A_{k,n}\,\psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n\mathcal{A}_{n,n}\psi_n tT_n.$$

Визначимо

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{B}\partial_Z\psi_n),\ \mathcal{B}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{B}\psi_n),$$
$$V_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{(\lambda_k - \lambda_n)^2} + \frac{tT_n}{\lambda_k - \lambda_n}$$

тепер $u_{0,1}$ набуде вигляду:

$$u_{0,1} = \sum_n\sum_{k\neq n} c_n\,\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n}\psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n\widetilde{\mathcal{B}}_{n,n}\psi_n tT_n +$$
$$+\sum_n\sum_{k\neq n}(\partial_z c_n)\,\mathcal{B}_{k,n}\psi_k U_{k,n} - \sum_n(\partial_z c_n)\mathcal{B}_{n,n}\psi_n tT_n +$$
$$+\sum_n\sum_{k\neq n} c_n\,\mathcal{B}_{k,n}\psi_k(\partial_z\lambda_n)V_{k,n} - \sum_n c_n\mathcal{B}_{n,n}\psi_n(\partial_z\lambda_n)\frac{1}{2}t^2T_n.$$

Звернемо увагу на те, що $u_{0,1}$ є лінійним в $(v_1\bar{\sigma}', v_1\overline{f\Omega}', v_0\overline{f\Omega}')$, а для фіксованих (t, x, y, z) існує стала C така, що для будь-якого $\epsilon \le 1, \delta \le 1$ маємо:

$$\left|u^{\epsilon,\delta} - \left(u_{0,0} + \sqrt{\epsilon}u_{1,0} + \sqrt{\delta}u_{0,1}\right)\right| \le C(\epsilon + \delta).$$

Виграш європейського опціону з ціною виконання $K > 0$ можна розкласти таким чином [11]:

$$(K - S_t)^+ = (K - X_t)^+\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} + K\left(1 - \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right). \quad (3)$$

Перший доданок у правій частині (3) є прибутком опціону, поданого до дефолту в момент часу t. Другий член – це прибуток опціону, поданого після дефолту, який відбувається в момент часу t. Таким чином, вартість опціону з ціною виконання K позначається як $u^{\epsilon,\delta}(t,x;K)$ і може бути виражена у вигляді суми:

$$u^{\epsilon,\delta}(t,x;K) = u_o^{\epsilon,\delta}(t,x;K) + u_D^{\epsilon,\delta}(t,x;K),$$

де

$$\begin{aligned} & u_o^{\epsilon,\delta}(t,x;K) = \widetilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}\left[(K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right], \\ & u_D^{\epsilon,\delta}(t,x;K), = K - K\widetilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}\left[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right] \\ & = K - K\int_0^\infty \widetilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}\left[\delta_{x'}(X_t)\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right]d\,x' = \\ & = K - K\int_0^\infty u_1^{\epsilon,\delta}(t,x;x')dx', \\ & u_1^{\epsilon,\delta}(t,x;x') = \widetilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}\left[\delta_{x'}(X_t)\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right], \\ & 1 \notin L^2(\mathbb{R}^+, \mathfrak{m}) \end{aligned}$$

ми використовували, що $1 = \int_0^\infty \delta_{x'}(X_t)dx'$ на множині $\{\tau > T\}$.

Оскільки функції виграшу

$$H_0(x) = (K - x)^+ \text{ і } H_1(x) = \delta_{x'}(x)$$

належать $L^2(\mathbb{R}^+, \mathfrak{m})$, ми можемо обчислити:

$$c_{0,n} = (\psi_n(\cdot), (k - \cdot)^+),\ c_{1,n} = (\psi_n, \delta_{x'}).$$

Вирази для $c_{0,n}$ та $c_{1,n}$ можна знайти з [12]:

$$c_{0,n} = \frac{A^{\frac{v}{2}+1} K^{\frac{2C}{\bar{\sigma}^2}+1-2\eta}\sqrt{\Gamma(v+n)}}{\Gamma(v+n)\sqrt{\mu(n-1)!}} \times$$

$$\times\left[\frac{|\eta|}{\frac{c}{\bar{\sigma}^2}+|\eta|}\,{}_2F_2\left(\begin{matrix}1-n\ \dfrac{\frac{c}{\bar{\sigma}^2}}{|\eta|}+1 \\ ;\ AK^{-2\eta} \\ v+1\ \dfrac{\frac{c}{\bar{\sigma}^2}}{|\eta|}+2\end{matrix}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma(v+1)(n-1)!}{\Gamma(v+n+1)} L_{n-1}^{(v+1)}\left(AK^{-2\eta}\right)\right],$$

$$c_{1,n} = \psi_n(x')m(x'),$$

де ${}_2F_2(\alpha,\beta,\gamma,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) \times \beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n$ – узагальнена гіпергеометрична функція.

Орієнтовну вартість європейського опціону тепер можна обчислити за допомогою теорем 1, 2 і 3 [9].

Для європейського варіанта волатильність опціону $I^{\epsilon,\delta}$ з ціною $u^{\epsilon,\delta}(t,x;K)$ визначається з використанням

$$u^{\epsilon,\delta}(t,x;K) = u^{BS}\left(t,x,I^{\epsilon,\delta};K\right),$$

де $u^{BS}\left(t,x,I^{\epsilon,\delta};K\right)$ – ціна Блека–Шоулза з волатильністю $I^{\epsilon,\delta}$.

Результати обчислень цін європейських опціонів наведемо на *рис. 1*.

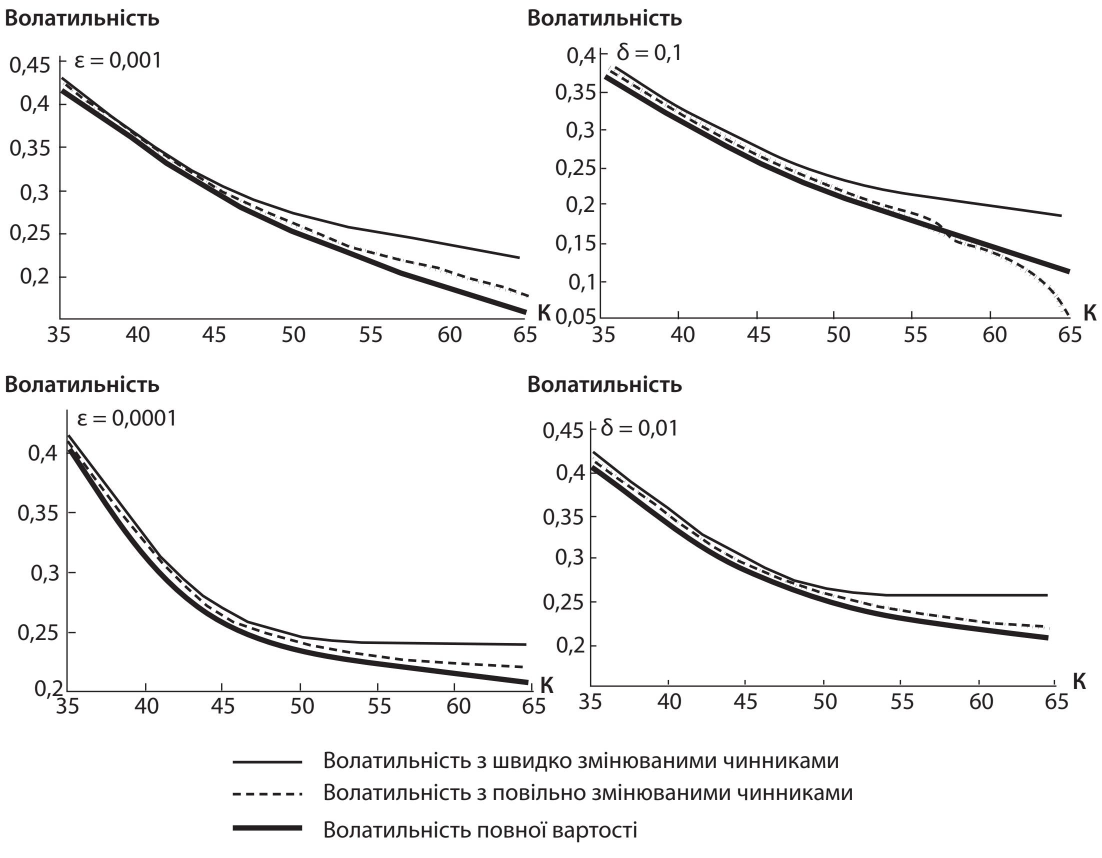

Рис.1. Динаміка волатильності цін європейських опціонів

На лівій стороні рис. 1 побудовано волатильність, яка залежить від ціни $u_{0,0} + \sqrt{\epsilon} u_{1,0}$ опціону для моделі, яка має тільки швидкозмінювані чинники волатильності. Динаміка Y і функція волатильності f задаються формулою

$$dY_t = \left(-\frac{1}{\epsilon} Y_t - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \beta \mathrm{Erf}(Y_t) \right) dt + \beta d\widetilde{W}_t^y,$$

$$f(Y_t) = \frac{\sigma \exp(Y_t)}{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)}, \ \mathrm{Erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

Для порівняння побудовано волатильність повної вартості u^{ϵ} і u^{δ}. На правій стороні рис. 1 наведено волатильність, викликану наближеною ціною $u_{0,0} + \sqrt{\delta} u_{1,0}$ опціону для моделі, яка має тільки повільно мінливий фактор волатильності. Динаміка Z і функція волатильності f задаються формулою

$$dZ_t = (-\delta Z_t - \sqrt{\delta}\, g \mathrm{Er} f(Z_t)) dt + g d\tilde{W}_t^z,$$

$$f(Z_t) - \frac{\sigma \exp(Z_t)}{\exp(Z)}.$$

Для порівняння, побудовано волатильність повної вартості u^{δ} і $u_{0,0}$. Як і слід було очікувати, при ϵ і δ, які прямують до нуля, волатильність прямує до ціни волатильності, імплікованою повною ціною.

ВИСНОВКИ

У статті застосовано методику знаходження ціни для похідних активів, які задовольняють модель CEV з волатильністю, що степенево зростає по основній змінній процесу і залежить від повільно та швидко змінюваних факторів. Сильними сторонами даної методики ціноутворення є комбінування методів спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, за допомогою яких обчислюється ціна активу зведенням до розв'язання рівняння методом знаходження власних значень, власних функцій та розв'язання відповідного рівняння Пуассона, зокрема знаходження резольвенти у відповідному Гільбертовому просторі. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. Lewis A. Applications of Eigenfunction Expansions in Continuous-Time Finance. *Mathematical Finance*. 1998. No. 8. P. 349–383.

2. Goldstein R. S., Keirstead W. P. On the Term Structure of Interest Rates in the Presence of Reflecting and Absorbing Boundaries. *SSRN eLibrary*. 1997. URL: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=19840

3. Pelsser A. Pricing Double Barrier Options Using Laplace Transforms. *Finance and Stochastics*. 2000. No. 4. P. 95–104.

4. Davydov D., Linetsky V. Structuring, Pricing and Hedging Double-Barrier Step Options. *Journal of Computational Finance*. 2001. No. 5. P. 55–88.

5. Fouque J., Papanicolaou G., Sircar R. Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

6. Gatheral J. The Volatility Surface: a Practitioner's Guide. John Wiley and Sons, Inc., 2011. 208 p.

7. Буртняк І. В., Малицька Г. П. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС. *Бізнес Інформ*. 2012. № 3. С. 48–50.

8. Буртняк І. В., Малицька Г. П. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу. *Бізнес Інформ*. 2013. № 4. С. 152–158.

9. Буртняк І. В., Малицька Г. П. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу. *Проблеми економіки*. 2014. № 2. С. 349–356.

10. Cox J. Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions/Unpublished draft, Stanford University, 1975.

11. Linetsky V. Lookback Options and Siffusion Hitting Times: A Spectral Expansion Approach. *Finance and Stochastics.* 2004. Vol. 8, No. 3. P. 373–398.

12. Lorig M. Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: An Eigenfunction Expansion Approach/Princeton University – Department of Operations Research & Financial Engineering (ORFE), 2012.

REFERENCES

Burtniak, I. V., and Malytska, H. P. "Model shliakhozalezhnoi volatylnosti dlia indeksu PFTS" [The model of path-depended volatility for the index PFTS]. *Biznes Inform*, no. 3 (2012): 48-50.

Burtniak, I. V., and Malytska, H. P. "Obchyslennia tsin optsioniv metodamy spektralnoho analizu" [Calculation of option prices methods of spectral analysis]. *Biznes Inform*, no. 4 (2013): 152-158.

Burtniak, I. V., and Malytska, H. P. "Doslidzhennia protsesu Ornshteina-Ulenbeka metodamy spektralnoho analizu" [The study of the process Ornstein-Uhlenbeck methods of spectral analysis]. *Problemy ekonomiky*, no. 2 (2014): 349-356.

Cox, J. *Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions*: Unpublished draft, Stanford University, 1975.

Davydov, D., and Linetsky, V. "Structuring, Pricing and Hedging Double-Barrier Step Options". *Journal of Computational Finance*, no. 5 (2001): 55-88.

Fouque, J., Papanicolaou, G., and Sircar, R. *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Goldstein, R. S., and Keirstead, W. P. "On the Term Structure of Interest Rates in the Presence of Reflecting and Absorbing Boundaries". https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=19840

Gatheral, J. *The Volatility Surface: a Practitioner's Guide*: John Wiley and Sons, Inc., 2011.

Lewis, A. "Applications of Eigenfunction Expansions in Continuous-Time Finance". *Mathematical Finance*, no. 8 (1998): 349-383.

Linetsky, V. "Lookback Options and Siffusion Hitting Times: A Spectral Expansion Approach". *Finance and Stochastics.* Vol. 8, no. 3 (2004): 373-398.

Lorig, M. *Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: An Eigenfunction Expansion Approach*: Princeton University – Department of Operations Research & Financial Engineering (ORFE), 2012.

Pelsser, A. "Pricing Double Barrier Options Using Laplace Transforms". *Finance and Stochastics*, no. 4 (2000): 95-104.