Федак І.В.

Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри

Навчальний посібник

для студентів спеціальності «Прикладна математика»

Частина 2

Інтеграл Лебега

Івано-Франківськ
2020

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73
Ф75

Рекомендовано вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» як навчальний посібник для студентів напряму підготовки "Прикладна математика"

Рецензенти:

Загороднюк А.В., зав. кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», доктор фізико-математичних наук, професор

Заторський Р.А., зав. кафедри диференціальних рівнянь та прикладної математики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», доктор фізико-математичних наук, професор

Федак І.В.

Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник.Ч.2. Інтеграл Лебега. – Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. – 56с.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми з дисципліни «Функціональний аналіз та теорія міри» для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «Прикладна математика» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Частина 2 містить основні поняття та теореми про властивості інтеграла Лебега, невизначеного інтеграла Лебега, інтегралів Лебега-Стільтьєса та Рімана-Стільтьєса, вправи для самостійного розв'язування.

Може бути використаний студентами напрямів підготовки «Математика», «Середня освіта (математика)», «Статистика» при вивченні дисциплін «Теорія міри та інтеграла Лебега», «Функціональний аналіз».

ЗМІСТ

Лекція №6.

Інтеграл Лебега та його основні властивості

6.1. Означення інтеграла Лебега по множині скінченної міри.
6.2. Основні властивості інтеграла Лебега.
6.3. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла.
6.4. Зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана.

6.1. ***Означення інтеграла Лебега по множині скінченної міри***

Нехай $f(x)-$ проста функція, визначена на вимірній множині A, яка набуває різні значення $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ на вимірних множинах $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ відповідно.

Таку функцію називають ***інтегровною за Лебегом*** на множині A, якщо ряд $\sum\limits_n y_n \mu(A_n)$ збігається абсолютно.

При цьому суму такого ряду називають ***інтегралом Лебега простої функції*** $f(x)$ ***по множині*** A і позначають $\int\limits_A f(x)d\mu.$

У випадку, коли проста функція набуває скінченну кількість різних значень, замість ряду матимемо скінченну кількість доданків.

Наприклад, для функції Діріхле $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \notin Q, \end{cases}$ отримуємо

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = 1 \cdot \mu([a,b] \cap Q) + 0 \cdot \mu([a,b] \setminus Q) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (b-a) = 0.$$

З означення інтеграла Лебега випливає, що разом з простою функцією $f(x)$ інтегровною за Лебегом буде і функція $|f(x)|$.

Відзначимо й інші ***властивості інтеграла Лебега від простих функцій***, які також легко отримати з його означення:

1. Якщо проста функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A, то при кожному k функція $kf(x)$ також інтегровна за Лебегом на цій множині, при цьому $\int\limits_A kf(x)d\mu = k\int\limits_A f(x)d\mu.$

- Нехай $f(x) = f_i,\ x \in F_i$. Тоді

$$\int_A kf(x)d\mu = \sum_i kf_i\mu(F_i) = k\sum_i f_i\mu(F_i) = k\int_A f(x)d\mu,$$

причому абсолютна збіжність ряду для $kf(x)$ випливає з абсолютної збіжності ряду для $f(x)$. ■

2. Якщо прості функції $f(x)$ та $g(x)$ інтегровні за Лебегом на множині A, то функція $f(x)+g(x)$ також інтегровна за Лебегом на цій множині, причому $\int_A (f(x)+g(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu.$

● Якщо $\int_A f(x)d\mu = \sum_i f_i\mu(F_i)$, $\int_A g(x)d\mu = \sum_j g_j\mu(G_j)$, то

$$\int_A (f(x)+g(x))d\mu = \sum_i\sum_j (f_i+g_j)\mu(F_i\cap G_j) = \sum_i f_i\mu(F_i) + \sum_j g_j\mu(G_j),$$

причому абсолютна збіжність ряду для $f(x)+g(x)$ та остання записана рівність випливають з абсолютної збіжності рядів для функцій $f(x)$ та $g(x)$ і рівностей

$$\mu(F_i) = \sum_j \mu(F_i\cap G_j), \quad \mu(G_j) = \sum_i \mu(F_i\cap G_j). \ ■$$

3. Якщо $f(x)$– проста обмежена функція на множині A скінченної міри така, що $|f(x)| \le M$ для всіх $x\in A$, то вона інтегровна за Лебегом на цій множині і $\left|\int_A f(x)d\mu\right| \le M\mu(A).$

● Справді,

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right| \le \left|\sum_i f_i\mu(F_i)\right| \le \sum_i |f_i|\mu(F_i) \le M\sum_i \mu(F_i) \le M\mu(A). \ ■$$

З врахуванням цих властивостей сформулюємо ***загальне означення інтеграла Лебега по множині скінченної міри***.

Довільна вимірна функція $f(x)$ називається ***інтегровною за Лебегом*** на множині A скінченної міри, якщо існує послідовність простих інтегровних за Лебегом на множині A функцій $f_n(x)$, яка рівномірно збігається до $f(x)$. При цьому покладають, що

$$\int_A f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\,d\mu.$$

Наприклад, для функції $f(x)=x$ розглянемо функції

$$f_n(x)=\frac{k}{n},\ x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,n-1,\ f_n(1)=1.$$

Оскільки при кожному $n\in N$ для всіх $x\in[0,1]$ виконується нерівність $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{1}{n}$, то ця послідовність простих функцій $f_n(x)$ збігається до функції $f(x)=x$ на відрізку $[0,1]$ рівномірно.

Крім того, $\int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)+1\cdot 0=\frac{n-1}{2n}$. Тому

$$\int_{[0,1]} x\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Обґрунтуємо ***коректність*** такого означення інтеграла Лебега:

1. Така границя існує.

● З рівномірної збіжності послідовності функцій $f_n(x)$ до функції $f(x)$ випливає, що при кожному $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $N=N(\varepsilon)$, що $\left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\varepsilon$ для всіх $n>N,\ m>N,\ x\in A$. Тоді на підставі властивостей інтеграла Лебега для простих функцій отримуємо нерівність $\left|\int_A f_n(x)\,d\mu-\int_A f_m(x)\,d\mu\right|\le\varepsilon\mu(A)$.

Отже, послідовність інтегралів $\int_A f_n(x)\,d\mu$ задовольняє критерій Коші збіжності числових послідовностей. ■

2. Ця границя не залежить від вибору простих функцій $f_n(x)$.

● Вибравши ще одну послідовність простих функцій, для якої послідовність інтегралів збігається до іншої границі, ми могли б, чергуючи елементи таких послідовностей, отримати третю послідовність, для якої послідовність вказаних інтегралів не мала би границі. А це суперечить доведеному вище. ■

3. Якщо $f(x)-$ проста функція, то дане означення співпадає з означенням інтеграла Лебега для простих функцій.

● Достатньо покласти $f_n(x)=f(x)$ при кожному $n\in N$. ■

6.2. ***Основні властивості інтеграла Лебега***

Безпосередньо з означення граничним переходом з врахуванням властивостей інтеграла Лебега для простих функцій отримуємо такі властивості інтеграла Лебега на множині скінченної міри:

1. Для кожної множини A скінченної міри $\int\limits_A 1\cdot d\mu=\mu(A)$.

2. Для кожної сталої k та інтегровної за Лебегом на A функції $f(x)$ виконується рівність $\int\limits_A kf(x)d\mu=k\int\limits_A f(x)d\mu$.

При $k=0$ звідси як наслідок отримуємо, що $\int\limits_A 0\cdot d\mu=0$.

3. Для інтегровних за Лебегом на A функцій $f(x)$ та $g(x)$

$$\int\limits_A (f(x)+g(x))d\mu=\int\limits_A f(x)d\mu+\int\limits_A g(x)d\mu.$$

4. Якщо $f(x)-$ така обмежена функція на множині A скінченної міри, що $|f(x)|\le M$ для всіх $x\in A$, то вона інтегровна за Лебегом на цій множині.

5. Якщо на множині A скінченної міри $f(x)\ge 0$ і функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на A, то $\int\limits_A f(x)d\mu\ge 0$.

6. Якщо на множині A скінченної міри $f(x)\ge g(x)$ і функції $f(x)$ та $g(x)$ інтегровні за Лебегом на A, то $\int\limits_A f(x)d\mu\ge\int\limits_A g(x)d\mu$.

7. Якщо на множині A скінченної міри $m\le f(x)\le M$, то така вимірна функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на A і

$$m\mu(A)\le\int\limits_A f(x)d\mu\le M\mu(A).$$

8. Якщо $\mu(A)=0$, то $\int\limits_A f(x)d\mu=0$.

9. Якщо на множині A скінченної міри функції $f(x)$ та $g(x)$ еквівалентні ($f(x)\sim g(x)$, якщо $\mu\{x: f(x)\neq g(x)\}=0$) і одна з цих функцій інтегровна на A за Лебегом, то й друга функція буде інтегровною за Лебегом, причому $\int\limits_A f(x)d\mu=\int\limits_A g(x)d\mu$.

10. Якщо функція $\varphi(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A скінченної міри і $|f(x)|\leq\varphi(x)$ майже скрізь на A, то $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A.

11. Функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A скінченної міри тоді і тільки тоді, коли інтегровною за Лебегом на цій множині є функція $|f(x)|$.

Наведемо без доведення і такі дві теореми про властивості інтеграла Лебега:

Теорема 1. ($\sigma-$адитивність інтеграла Лебега). Якщо функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A скінченної міри і $A=\bigcup\limits_n A_n$, де A_n- вимірні множини, які попарно не перетинаються, то функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на кожній з множин A_n і $\int\limits_A f(x)d\mu=\sum\limits_n\int\limits_{A_n} f(x)d\mu$, причому ряд у правій частині цієї рівності збігається абсолютно.

Навпаки, нехай функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на кожній з вимірних множин A_n, які попарно не перетинаються, і $A=\bigcup\limits_n A_n-$ множина скінченної міри. Тоді у разі інтегровності функція $f(x)$ за Лебегом на множині A, такою ж виявиться і функція $|f(x)|$. При цьому на підставі теореми 1 отримаємо, що $\int\limits_A|f(x)|d\mu=\sum\limits_n\int\limits_{A_n}|f(x)|d\mu$.

Збіжність ряду у правій частині останньої рівності є необхідною і достатньою умовою інтегровності за Лебегом функції $f(x)$ на множині A.

Теорема 2. (Абсолютна неперервність інтеграла Лебега). Якщо функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A скінченної міри, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $\left|\int\limits_{A_\delta} f(x)\,d\mu\right| < \varepsilon$ для всякої вимірної множини $A_\delta \subset A$ такої, що $\mu(A_\delta) < \delta$.

До основних властивостей віднесемо і ***нерівність Чебишова***: Якщо функція $\varphi(x) \ge 0$ інтегровна за Лебегом на множині A скінченної міри і число $c > 0$, то $\mu\{x : x \in A, \varphi(x) \ge c\} \le \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu$.

● Справді, якщо $A' = \{x : x \in A, \varphi(x) \ge c\}$, то

$$\int\limits_A \varphi(x)d\mu = \int\limits_{A'} \varphi(x)d\mu + \int\limits_{A\backslash A'} \varphi(x)d\mu \ge \int\limits_{A'} \varphi(x)d\mu \ge c\mu(A').$$

Отже, $\mu(A') \le \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu$. ■

Наслідок. Якщо $\int\limits_A |f(x)|d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ майже скрізь на A.

● Справді, на підставі нерівності Чебишова

$$\mu\left\{x : x \in A, |f(x)| \ge \frac{1}{n}\right\} \le n\int\limits_A |f(x)|d\mu = 0$$

при кожному $n \in N$. Тому з півадитивності міри Лебега отримуємо

$$\mu\{x : x \in A, f(x) \ne 0\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left\{x : x \in A, |f(x)| \ge \frac{1}{n}\right\} = 0. \blacksquare$$

5.3. ***Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла***

З основними властивостями інтеграла Лебега тісно пов’язані й питання про граничний перехід під знаком інтеграла та про почленне інтегрування функціональних рядів. У наступних теоремах наведені достатні умови для цього.

Теорема Лебега. Якщо послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ збігається на множині A скінченної міри до функції $f(x)$ і $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ при кожному $n \in N,$ де $\varphi(x)-$ інтегровна за Лебегом на множині A функція, то функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A і $\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu.$

● З нерівності $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ випливає, що також $|f(x)| \le \varphi(x).$ Отже, на підставі властивості 10 інтеграла Лебега функція $f(x)$ та всі функції $f_n(x)$ інтегровні за Лебегом на множині A.

Нехай $A_k = \{x : k-1 \le \varphi(x) < k\},\ B_N = \bigcup_{k>N} A_k.$

Внаслідок $\sigma-$адитивності $\int_A \varphi(x)d\mu = \sum_k \int_{A_k} \varphi(x)d\mu.$ Тому для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N,$ що $\int_{B_n} \varphi(x)d\mu = \sum_{k>N} \int_{A_k} \varphi(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{5}.$

Крім того, на множині $A \setminus B_N$ виконується нерівність $\varphi(x) < N.$ Цю множину за теоремою Єгорова можна подати у вигляді $C \bigcup D,$ де $\mu(D) < \frac{\varepsilon}{5N},$ а на множині C послідовність функцій $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ рівномірно. Вибравши N так, щоб при $n > N$ виконувалася нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{5\mu(C)},$ отримаємо, що

$$\left|\int_A f_n(x)d\mu - \int_A f(x)d\mu\right| \le \left|\int_{B_N} f_n(x)d\mu - \int_{B_N} f(x)d\mu\right| +$$

$$+\left|\int_C f_n(x)d\mu - \int_C f(x)d\mu\right| + \left|\int_D f_n(x)d\mu - \int_D f(x)d\mu\right| \le$$

$$\le \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5\mu(C)} \cdot \mu(C) + \frac{2\varepsilon}{5N} \cdot N = \varepsilon.$$

Число $\varepsilon > 0$ можна вибрати довільно, то теорема доведена. ■

Умови цієї теореми можна послабити, вимагаючи збіжності послідовності функцій $f_n(x)$ до функції $f(x)$ та виконання нерівностей $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ лише майже скрізь.

Наслідок. Якщо послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ збігається майже скрізь на множині A скінченної міри до функції $f(x)$ і майже скрізь на A при кожному $n \in N$ виконується нерівність $|f_n(x)| \le M$, то функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A і

$$\int_A f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\,d\mu.$$

Теорема Леві. Нехай на множині A скінченної міри задана послідовність функцій $f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots$, причому функції $f_n(x)$ інтегровні за Лебегом на множині A, а їх інтеграли обмежені в сукупності: $\int_A f_n(x)\,d\mu \le K$. Тоді майже скрізь на множині A існує скінченна границя $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, причому функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A і $\int_A f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\,d\mu$.

Наслідок. Якщо $\varphi_n(x) \ge 0$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\int_A \varphi_n(x)\,d\mu < \infty$, то майже скрізь на множині A скінченної міри ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ збіжний і

$$\int_A\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\right)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A \varphi_n(x)\,d\mu.$$

Теорема Фату. Якщо послідовність невід'ємних інтегровних за Лебегом на множині A функцій $f_n(x)$ майже скрізь на множині A збігається до функції $f(x)$, а їх інтеграли обмежені в сукупності: $\int_A f_n(x)\,d\mu \le K$, то функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A і $\int_A f(x)\,d\mu \le K$.

6.4. ***Зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана***

Аналізуючи властивості інтеграла Лебега, можна помітити, що частина з них мають аналоги й для інтеграла Рімана. Але, як показує приклад функції Діріхле, існують навіть обмежені не інтегровні за Ріманом функції, які інтегровні за Лебегом. Доведемо, що навпаки бути не може

Теорема. Якщо існує інтеграл $I = \int_a^b f(x)dx$, то функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ за Лебегом, причому $\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = I.$

● Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ на 2^n частин точками

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a), \quad k = 0,1,\ldots,2^n.$$

і запишемо суми Дарбу $S_n = \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk} \cdot \frac{b-a}{2^n}$ та $s_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_{nk} \cdot \frac{b-a}{2^n}$, які відповідають такому розбиттю. Тут M_{nk} та m_{nk} – відповідно точні верхня та нижня грані функції $f(x)$ на відрізках $[x_{k-1}, x_k]$. При цьому означенням інтеграла Рімана $I = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Покладемо $\overline{f}_n(x) = M_{nk},\ x \in [x_{k-1}, x_k)$, $\underline{f}_n(x) = m_{nk},\ x \in [x_{k-1}, x_k)$, $\overline{f}_n(b) = \underline{f}_n(b) = f(b)$.

Оскільки послідовність функцій $\underline{f}_n(x)$ не спадає, а послідовність функцій $\overline{f}_n(x)$ не зростає і, крім того,

$$\int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n(x)d\mu = s_n \le I, \qquad \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n(x)d\mu = S_n \ge I,$$

то на підставі теореми Леві майже скрізь на відрізку $[a,b]$ існують скінченні границі $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n(x) \ge f(x)$ та $\underline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f}_n(x) \le f(x)$.

При цьому

$$\int\limits_{[a,b]} \underline{f}(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} s_n = I,$$

$$\int\limits_{[a,b]} \overline{f}(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} S_n = I.$$

Тому майже скрізь на відрізку $[a,b]$

$$\int\limits_{[a,b]} \left|\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right| d\mu = \int\limits_{[a,b]} \left(\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right) d\mu = 0.$$

Отже, за наслідком з нерівності Чебишова майже скрізь на цьому відрізку $\overline{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$. Тому також $\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = I.$ ■

Доведена теорема дає спосіб практичного обчислення інтеграла Лебега у випадку інтегровності функції $f(x)$ за Ріманом:

$$\int\limits_{[a;b]} f(x)d\mu = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

З курсу математичного аналізу відомі такі ***класи інтегровних за Ріманом на відрізку*** $[a,b]$ ***функцій***: 1) неперервні функції, 2) обмежені монотонні функції, 3) обмежені функції зі скінченною кількістю точок розриву.

У загальному вигляді ***умова інтегровності за Ріманом*** може бути сформульована так: для того, щоб обмежена на відрізку $[a,b]$ функція була інтегровна за Ріманом на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб міра множини точок розриву такої функції на відрізку $[a,b]$ дорівнювала нулю.

Якщо ж функція $f(x)$ не інтегровна за Ріманом, то для обчислення інтеграла Лебега на допомогу може прийти властивість 9 цього інтеграла. Суть такого способу обчислення інтеграла Лебега полягає в тому, що при існуванні еквівалентної до $f(x)$ функції $g(x)$, інтегровної за Ріманом, виконується рівність

$$\int\limits_{[a;b]} f(x)d\mu = \int\limits_{[a;b]} g(x)d\mu = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Проілюструємо обчислення інтеграла Лебега зведенням його до інтеграла Рімана на конкретних ***прикладах***.

1. Обчисліть інтеграл Лебега функції $f(x)=\begin{cases}4x, & x\le 1,\\ 3x^2, & x>1,\end{cases}$ на відрізку $[0;2]$.

● Функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[0;2]$: $0\le f(x)\le 12$, і має на цьому відрізку лише одну точку розриву $x=1$. Тому вона інтегровна на $[0;2]$ за Ріманом, а значить, і за Лебегом. При цьому

$$\int\limits_{[0,2]} f(x)d\mu=\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^1 4xdx+\int\limits_1^2 3x^2dx=2x^2\Big|_0^1+x^3\Big|_1^2=9. \ \blacksquare$$

2. Обчисліть інтеграл Лебега функції $f(x)=\begin{cases}4x, & x\in Q,\\ 3x^2, & x\notin Q,\end{cases}$ на відрізку $[0;2]$.

●. Функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[0;2]$, але має на цьому відрізку розриви у кожній його точці, крім точок $x=0$ та $x=\dfrac{4}{3}$. Тому $f(x)$ не інтегровна за Ріманом на відрізку $[0;2]$. Але еквівалентна до неї неперервна функція $g(x)=3x^2$ є інтегровною на відрізку $[0;2]$ за Ріманом. Тому функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом. При цьому

$$\int\limits_{[0,2]} f(x)d\mu=\int\limits_{[0,2]} g(x)d\mu=\int\limits_0^2 g(x)dx=\int\limits_0^2 3x^2dx=x^3\Big|_0^2=8. \ \blacksquare$$

Вправи до лекції №6

1. $f(x)=1$ у точках канторової множини, а у точках інтервалів, які викидалися при побудові цієї множини, дорівнює довжині відповідного інтервалу. Доведіть, ця функція є простою і обчисліть її інтеграл Лебега на відрізку $[0;1]$.
2. Доведіть, що функція $f(x)=\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$ є простою та інтегровною за Лебегом на відрізку $[0,1]$ і обчисліть $\int\limits_{[0,1]} f(x)d\mu$.

3. Обчисліть за означенням інтеграла Лебега $\int\limits_{[0;1]} |3x-2| \, d\mu.$

4. Для довільних інтегровних за Лебегом на множині скінченної міри функцій $f(x)$ та $g(x)$ обґрунтуйте рівність:

$$\int\limits_A (f(x)+g(x))d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu + \int\limits_A g(x)d\mu.$$

5. Проаналізуйте, аналоги яких основних властивостей інтеграла Лебега не є характерними для інтеграла Рімана.

6. Доведіть, що з нерівності $|f(x)| \le \varphi(x)$ та інтегровності функції $\varphi(x)$ за Лебегом на множині A скінченної міри випливає інтегровність за Лебегом на A вимірної функції $f(x)$.

7. Функція $f(x)$ є інтегровною за Лебегом на множині E, причому $\int\limits_A f(x)\,d\mu = 0$ для кожної вимірної множини $A \subset E$. Доведіть або спростуйте наступні твердження: а). $f(x)=0$ скрізь на E; б). $f(x)=0$ майже скрізь на E.

8. Обґрунтуйте наслідки з теорем Лебега та Леві.

9. Для послідовностей функцій $f_n(x)$ перевірте виконання умов теорем Лебега, Леві та Фату на відрізку $[0;1]$ і порівняйте $\int\limits_{[0;1]} f(x)\,d\mu$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0;1]} f_n(x)\,d\mu$, якщо:

а) $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{2^n}, & x \in [0,2] \setminus Q, \\ nx, & x \in [0,2] \cap Q. \end{cases}$ б) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right), \\ \dfrac{nx}{n^2+1}, & x \notin \left[0, \dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$

10. Доведіть, що функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на відрізку $[0;1]$, і обчисліть $\int\limits_{[0;1]} f(x)\,d\mu,$ якщо:

а) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}, x\in(0;1),\\ \cos 2x\cdot\cos^2 x, x\in\{0;1\}.\end{cases}$$

б) $$f(x)=\begin{cases}\arcsin x+\arccos x, x\in[0,1]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right\},\\ \arcsin x-\arccos x, \qquad x\in\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right\}.\end{cases}$$

в) $$f(x)=\begin{cases}x\sqrt{3-2x^2}, x\in[0;1]\setminus\left\{\dfrac{1}{n}\right\},\\ \sqrt{3+2x^2}, x\in[0;1]\cap\left\{\dfrac{1}{n}\right\},\end{cases}\quad n\in N.$$

г) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^4+1}, x\in\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\\ \dfrac{x^3}{x^4+1}, x\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};1\right].\end{cases}$$

д) $$f(x)=\begin{cases}\sqrt[5]{(8-3x)^6}, x\in\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right),\\ x+1, x\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

е) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}, x\in[0;1]\cap Q,\\ \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, x\in[0;1]\setminus Q.\end{cases}$$

Лекція №7.

Інші властивості інтеграла Лебега

7.1. Інтеграл Лебега як границя інтегральної суми.
7.2. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри.
7.3. Збіжність в середньому, її зв’язок з іншими видами збіжності.
7.4. Теорема Фубіні.

7.1. ***Інтеграл Лебега як границя інтегральної суми***

Встановлений зв’язок між інтегралами Рімана та Лебега наштовхує на думку, що й інтеграл Лебега можна подати у вигляді границі інтегральної суми.

Розглянемо спочатку таку обмежену вимірну функцію $f(x)$, визначену на множині A скінченної міри, що $c < f(x) < d$.

Розіб’ємо відрізок $[c,d]$ на частини точками

$$y_0 = c < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = d.$$

Позначимо $A_k = \{x : x \in A,\ y_k \le f(x) < y_{k+1}\},\ k = 0,1,\ldots,n-1.$

Такі множини вимірні, попарно не перетинаються і, крім того,

$$A = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k, \quad \mu(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A_k).$$

Назвемо числа $s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k \mu(A_k)$ та $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \mu(A_k)$ ***нижньою*** та ***верхньою сумами Лебега***, які відповідають даному розбиттю відрізка $[c,d]$ на частини.

Покладаючи $\lambda = \max(y_{k+1} - y_k)$, будемо мати таку нерівність: $0 \le S - s \le \lambda \mu(A)$.

При додаванні нових точок поділу нижня сума Лебега не зменшується, а верхня – не збільшується. Звідси як наслідок дістаємо, що будь-яка з верхніх сум Лебега не менша будь-якої нижньої суми, зокрема, і такої, що відповідає іншому розбиттю. Отже, існують точні грані таких сум по всіх можливих розбиттях відрізка $[c,d]$ на частини: $\bar{s} = \sup\{s\}$ та $\underline{S} = \inf\{S\}$, причому $s \le \bar{s} \le \underline{S} \le S$.

Тому $0 \le \underline{S} - \overline{s} \le \lambda\mu(A)$. А оскільки $\lambda > 0$ можна взяти довільне, то $\underline{S} = \overline{s}$.

Спільне значення цих точних граней називають ***інтегралом Лебега*** функції $f(x)$ на множині A і позначають $\int\limits_A f(x)d\mu$.

Безпосередньо з означення випливає, що кожна обмежена вимірна на множині скінченної міри функція є на цій множині інтегровною за Лебегом. Також $\int\limits_A f(x)d\mu = \lim\limits_{\lambda\to 0} s = \lim\limits_{\lambda\to 0} S$. Іншими словами, інтеграл Лебега є границею інтегральних сум Лебега.

Відзначимо, що за таким означенням ми прийдемо до того ж значення інтеграла Лебега, яке ми отримали вище. Адже, розглядаючи при кожному $n \in N$ функцію $f_n(x)$, яка набуває значень y_k на множинах A_k відповідно, ми отримаємо послідовність простих інтегровних за Лебегом на множині A функцій, яка рівномірно збігається до функції $f(x)$ при $\lambda \to 0$. При цьому послідовність інтегралів $\int\limits_A f_n(x)d\mu = s$ збігається до інтеграла $\int\limits_A f(x)d\mu$.

Якщо ж вимірна функція $f(x) \ge 0$ не обмежена зверху, то розглянемо послідовність функцій $f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \le n, \\ n, & f(x) > n. \end{cases}$

Кожна з цих функцій вимірна і обмежена, а отже, інтегровна за Лебегом. Крім того, $f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots$ Тому також

$$\int\limits_A f_1(x)d\mu \le \int\limits_A f_2(x)d\mu \le \ldots \le \int\limits_A f_n(x)d\mu \le \ldots,$$

звідки випливає існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)d\mu$.

Якщо така границя є скінченною, то ***не обмежену зверху*** функцію $f(x) \ge 0$ називають інтегровною за Лебегом на множині A і покладають $\int\limits_A f(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)d\mu$.

А якщо $f(x)-$ довільна вимірна необмежена функція, то представимо її у вигляді $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$, де

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\ge 0,\\ 0, & f(x)<0,\end{cases} \qquad f_-(x)=\begin{cases} 0, & f(x)\ge 0,\\ -f(x), & f(x)<0.\end{cases}$$

При цьому функцію $f(x)$ вважають ***інтегровною за Лебегом*** на множині A, якщо інтегровними за Лебегом на цій множині є кожна з функцій $f_+(x)\ge 0$ та $f_-(x)\ge 0$, і покладають

$$\int_A f(x)d\mu=\int_A f_+(x)d\mu-\int_A f_-(x)d\mu.$$

Зауважимо, що на підставі рівності $|f(x)|=f_+(x)+f_-(x)$ функція $f(x)$ буде інтегровною за Лебегом на множині A тоді і тільки тоді, коли інтегровною за Лебегом на цій множині є функція $|f(x)|$. Зрозуміло, що при цьому $\int_A |f(x)|d\mu=\int_A f_+(x)d\mu+\int_A f_-(x)d\mu.$

7.2. ***Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри***

Вивчаючи властивості інтеграла Лебега, ми досі вважали, що мова йде про множини скінченної міри. Поширимо тепер поняття інтегровності за Лебегом і на множини нескінченної міри.

Оскільки міра Лебега є $\sigma-$скінченною, то кожна така множина може бути подана у вигляді $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\ \mu(A_n)<\infty.$ Якщо при цьому $A_1\subset A_2\subset\ldots\subset A_n\subset\ldots,$ то послідовність множин A_n називається ***вичерпною послідовністю*** для множини A.

Вимірна функція $f(x)$, визначена на множині A нескінченної міри, називається ***інтегровною за Лебегом*** на цій множині, якщо вона інтегровна за Лебегом на кожній вимірній скінченної міри підмножині множини A і для кожної вичерпної послідовності (A_n) границя $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)d\mu$ є скінченною і не залежить від вибору цієї послідовності.

Таку границю називають ***інтегралом Лебега функції*** $f(x)$ ***по множині*** A ***нескінченної міри*** і позначають $\int\limits_A f(x)d\mu.$

Розглянемо ***приклад*** обчислення такого інтеграла. Нехай

$$A=[1,+\infty),\ f(x)=\frac{1}{x^2},\ \ A_n=[a_n,b_n],\ a_n\to 1,\ b_n\to+\infty.$$

Оскільки функція $f(x)$ як неперервна є інтегровною за Лебегом на довільній вимірній підмножині скінченної міри, то

$$\int\limits_{[1,+\infty)}\frac{1}{x^2}d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{[a_n,b_n]}\frac{1}{x^2}d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{a_n}^{b_n}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right)=1.$$

Порівнюючи інтеграли Рімана та Лебега по нескінченному проміжку, відзначимо, що інтеграл Рімана в такому разі слід розуміти лише в невласному сенсі. Якщо такий інтеграл збігається абсолютно, то інтеграл Лебега теж існуватиме і дорівнюватиме відповідному невласному інтегралу Рімана.

Якщо ж невласний інтеграл Рімана не є абсолютно збіжним, то інтеграл Лебега по такій множині нескінченної міри не існує. Це пов'язано з тим, що разом з функцією $f(x)$ інтегровною за Лебегом має бути і функція $|f(x)|$.

Більшість властивостей інтеграла Лебега на множині скінченної міри, залишаються справедливими і для інтегралів Лебега по множинах нескінченної міри. Але, наприклад, на множині нескінченної міри не будуть виконуватися перша, четверта та сьома з основних властивостей інтеграла Лебега, які є справедливими для множин скінченної міри.

7.3. ***Збіжність в середньому, її зв'язок з іншими видами збіжності***

Розглянемо послідовність інтегровних за Лебегом на множині A функцій $f_n(x)$. Кажуть, що така послідовність ***збігається в середньому*** до функції $f(x)$ на множині A, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \left| f_n(x) - f(x) \right| d\mu = 0.$$

При цьому функція $f(x) = f_n(x) - \left(f_n(x) - f(x) \right)$ також буде інтегровною за Лебегом на множині A.

Встановимо ***зв'язок*** збіжності в середньому з іншими видами збіжності функціональних послідовностей.

Теорема 1. Якщо послідовність інтегровних за Лебегом на множині A скінченної міри функцій $f_n(x)$ збігається рівномірно на множині A до функції $f(x)$, то вона збігається на цій множині до функції $f(x)$ і в середньому.

● З рівномірної збіжності випливає існування для кожного $\varepsilon > 0$ такого числа N, що $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$ для всіх $n > N$, $x \in A$. Тоді $\int_A \left| f_n(x) - f(x) \right| d\mu \le \varepsilon\mu(A)$, звідки внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ та скінченності міри $\mu(A)$ і випливає збіжність в середньому. ■

Обернене твердження неправильне. Навіть більше, із збіжності в середньому не випливає збіжності хоч в одній точці множини A.

Відзначимо також, що умова рівномірної збіжності тут є ***суттєвою***. Наприклад, послідовність функцій

$$f_n(x) = \begin{cases} n, \ x \in \left(0, \dfrac{1}{n} \right), \\ 0, \ x \notin \left(0, \dfrac{1}{n} \right), \end{cases}$$

збігається до функції $f(x) = 0$ у кожній точці множини $A = (0,1]$. Але $\int_A \left| f_n(x) - f(x) \right| d\mu = 1$ при кожному $n \in N$.

Але ця умова ***не є необхідною***, бо, покладаючи у попередньому прикладі $f_n(x) = 1$, $x \in \left(0, \dfrac{1}{n} \right)$, отримаємо послідовність, яка збігається на множині $A = (0,1]$ до функції $f(x) = 0$ в середньому, але не збігається рівномірно.

Проте на множині нескінченної міри з рівномірної збіжності не випливає збіжності в середньому.

Наприклад, послідовність функцій $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & |x|\le n,\\ 0, & |x|>n,\end{cases}$ збігається рівномірно до функції $f(x)=0$ на всій числовій прямій, але не збігається в середньому.

Теорема 2. Якщо послідовність інтегровних за Лебегом на множині A скінченної міри функцій $f_n(x)$ збігається на множині A до функції $f(x)$ в середньому, то вона збігається на цій множині до функції $f(x)$ і за мірою.

● З нерівності $\int\limits_A |f_n(x)-f(x)|d\mu<\varepsilon$, справедливої для всіх $n>N(\varepsilon)$, та нерівності Чебишова для таких n при кожному $\sigma>0$ отримуємо нерівність

$$\mu\{x:x\in A,|f_n(x)-f(x)|\ge\sigma\}\le\frac{1}{\sigma}\int\limits_A|f_n(x)-f(x)|d\mu\le\frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

А оскільки $\varepsilon>0$ можна вибрати довільно, то звідси й випливає збіжність $f_n(x)$ до $f(x)$ за мірою. ■

Твердження теореми 2 залишиться правильним і для множин нескінченної міри. Але обернене до неї твердження неправильне.

Теорема 3. Якщо послідовність інтегровних за Лебегом на множині A скінченної міри функцій $f_n(x)$ збігається на множині A до функції $f(x)$ в середньому, то з неї можна вибрати підпослідовність, яка збігається на цій множині до функції $f(x)$ майже скрізь.

● На підставі теореми 2 така послідовність буде збігатися на множині A до функції $f(x)$ за мірою. А отже, за теоремою Ріса з неї можна вибрати збіжну до $f(x)$ майже скрізь на множині A підпослідовність. ■

7.4. ***Теорема Фубіні***

Розглянемо тепер питання, пов'язані зі зведенням інтеграла Лебега до повторних інтегралів.

Як відомо, що площа квадрованої фігури A, обмеженої лініями $x=a,\ x=b,\ y=\varphi(x),\ y=\psi(x),\ a\le x\le b,$ визначається за формулою $S(A)=\int\limits_a^b\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|dx.$ Введемо позначення

$$A_x=\{y:(x,y)\in A\},\quad x-\text{фіксоване},$$
$$A_y=\{x:(x,y)\in A\},\quad y-\text{фіксоване}.$$

Оскільки при цьому маємо $\mu_y(A_x)=\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|,\ x\in[a,b],$ та $\mu_y(A_x)=\mu_y(\varnothing)=0,\ x\notin[a,b],$ то отримуємо, що

$$\mu(A)=\int\limits_a^b\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|dx=\int\limits_{[a,b]}\mu_y(A_x)d\mu_x=\int\limits_X\mu_y(A_x)d\mu_x,$$

де $X-$ вся числова пряма OX.

Аналогічно, приходимо до рівності $\mu(A)=\int\limits_Y\mu_x(A_y)d\mu_y,$ де $Y-$ вся числова пряма OY.

У загальному випадку справедливе наступне твердження.

Теорема. Якщо $\sigma-$адитивні міри μ_x та μ_y, визначені на $\sigma-$алгебрах підмножин X та Y відповідно, є повними, а міра $\mu=\mu_x\otimes\mu_y,$ то для довільної $\mu-$вимірної множини $A\in X\times Y$ виконується рівність $\mu(A)=\int\limits_X\mu_y(A_x)d\mu_x=\int\limits_Y\mu_x(A_y)d\mu_y.$

При цьому множини X та Y не обов'язково є числовими прямими OX та OY.

З даної теореми отримуємо такий важливий ***наслідок:*** якщо $f(x)-$ невід'ємна інтегровна за Лебегом на μ_x-вимірній множині M функція, і $A=\{(x,y):x\in M,0\le y\le f(x)\}$, то $\mu(A)=\int\limits_M f(x)d\mu_x.$

Теорема Фубіні. Якщо повні міри μ_x та μ_y визначені на $\sigma-$алгебрах є $\sigma-$адитивними, міра $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$, а функція $f(x,y)$ інтегровна за мірою μ на множині $A \subset X \times Y$, то

$$\int_A f(x,y) d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x,y) d\mu_y \right) d\mu_x = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x,y) d\mu_x \right) d\mu_y.$$

● Розглянемо прямий добуток $U = X \times Y \times Z$, де $Z-$ числова пряма, $\mu_u = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu_z$.

Якщо $f(x,y) \geq 0$, то візьмемо таку множину $W \subset U$, що

$$W = \{(x,y,z) : (x,y) \in A, 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

За наслідком з попередньої теореми $\mu_u(W) = \int_A f(x,y) d\mu$.

Позначимо $\lambda = \mu_y \otimes \mu_z$, де $\mu_z -$ лінійна міра Лебега на Z, та $W_x = \{(y,z) : (x,y,z) \in W\}$, де x фіксоване. Тоді за попередньою теоремою будемо мати $\mu_u(W) = \int_X \lambda(W_x) d\mu_x$, причому за наслідком з цієї теореми $\lambda(W_x) = \int_{A_x} f(x,y) d\mu_y$.

З трьох останніх рівностей для мір $\mu_u(W)$ та $\lambda(W_x)$ випливає, що

$$\int_A f(x,y) d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x,y) d\mu_y \right) d\mu_x.$$

Аналогічно доводимо, що

$$\int_A f(x,y) d\mu = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x,y) d\mu_x \right) d\mu_y.$$

Загальний випадок зводиться до доведеного з врахуванням рівності $f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$, в якій

$$f_+(x,y) = \frac{1}{2}\left(\left| f(x,y) \right| + f(x,y)\right), \; f_-(x,y) = \frac{1}{2}\left(\left| f(x,y) \right| - f(x,y)\right). \; \blacksquare$$

Доведена теорема дає змогу зводити кратні інтеграли Лебега до повторних. При цьому самі простори X та Y не обов'язково мають бути одновимірними, а міри μ_x, μ_y – лінійними.

Зауваження 1. Твердження теореми Фубіні автоматично включає в себе існування обох інтегралів $\int\limits_{A_x} f(x,y)\,d\mu_y$ та $\int\limits_{A_y} f(x,y)\,d\mu_x$ при майже всіх x та y відповідно.

Зауваження 2. Рівність повторних інтегралів не випливає з існування інтегралів $\int\limits_X \left(\int\limits_{A_x} f(x,y)\,d\mu_y \right) d\mu_x$ та $\int\limits_Y \left(\int\limits_{A_y} f(x,y)\,d\mu_x \right) d\mu_y$.

Зауваження 3. З існування та рівності повторних інтегралів не випливає інтегровності функції $f(x,y)$ на множині A за мірою μ.

Зауваження 4. Якщо існує хоч один з повторних інтегралів $\int\limits_X \left(\int\limits_{A_x} |f(x,y)|\,d\mu_y \right) d\mu_x$ чи $\int\limits_Y \left(\int\limits_{A_y} |f(x,y)|\,d\mu_x \right) d\mu_y$, то функція $f(x,y)$ інтегровна на множині A за мірою μ.

Вправи до лекції №7

1. Доведіть, що в означенні інтеграла Лебега як границі інтегральної суми його значення не залежить від вибору чисел c та d.
2. За аналогією з означенням інтеграла Лебега від функції, не обмеженої зверху, запропонуйте подібне означення для функції, яка не є обмеженою лише знизу.
3. Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не є інтегровною за Лебегом на множині $[0;+\infty)$.
4. Обчисліть: $\int\limits_{[1;+\infty)} \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}\,d\mu$.

5. Обґрунтуйте, що послідовність функцій $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & |x|\le n,\\ 0, & |x|>n,\end{cases}$ збігається рівномірно до функції $f(x)=0$ на всій числовій прямій, але не збігається в середньому.
6. Доведіть, що із збіжності послідовності в середньому випливає її збіжність до тієї ж границі за мірою і на множині нескінченної міри.
7. Дослідіть послідовності функцій $f_n(x)$ на збіжність майже скрізь та в середньому до функції $f(x)=0$ на відрізку $[0;2]$, якщо:

   а) $f_n(x)=\begin{cases}\frac{x^n}{2^n}, & x\in[0,2]\setminus Q,\\ nx, & x\in[0,2]\cap Q.\end{cases}$ б) $f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right),\\ \frac{nx}{n^2+1}, & x\notin\left[0,\frac{1}{n}\right).\end{cases}$

8. Для $X=Y=[0,1]$, $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f(0,0)=0$, доведіть, що значення повторних інтегралів є різними.
9. Для $X=Y=[-1,1]$, $f(x,y)=\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f(0,0)=0$, доведіть рівність повторних інтегралів функції $f(x,y)$ та обґрунтуйте, що інтеграл Лебега такої функції на множині $A=X\times Y$ не існує.
10. Доведіть існування та обчисліть інтеграли $\int\limits_E f(x,y)\,d\mu$, якщо E – одиничний квадрат, μ – плоска міра Лебега:

   а) $f(x,y)=\begin{cases} y\cos x, x+y\in N,\\ xy, x+y\notin N.\end{cases}$ б) $f(x,y)=\begin{cases} e^{2x-y}, \frac{y}{x}\in N,\\ \frac{y}{x^2+1}, \frac{y}{x}\notin N.\end{cases}$

   в) $f(x,y)=\begin{cases} e^{x+2y}, x^2+y\in Q,\\ \sqrt{xy}, x^2+y\notin Q.\end{cases}$ г) $f(x,y)=\begin{cases} e^{xy}, xy\in Q,\\ e^{x-y}, xy\notin Q.\end{cases}$

Лекція №8.

Невизначений інтеграл Лебега та узагальнення поняття інтеграла

8.1. Невизначений інтеграл Лебега та монотонні функції.
8.2. Абсолютно неперервні функції, їх зв'язок з невизначеним інтегралом Лебега.
8.3. Знакозмінні міри. Теорема Радона-Нікодима.
8.4. Міри та інтеграл Лебега-Стільтьєса.

8.1. *Невизначений інтеграл Лебега та монотонні функції*

Розглянемо функцію множини вигляду $\Phi(A)=\int\limits_A f(x)d\mu.$

Якщо $f(x)-$ довільна інтегровна на деякому просторі X за $\sigma-$адитивною мірою μ функція, то функція $\Phi(A)$ визначена для всіх вимірних множин $A\subset X.$ Її називають ***невизначеним інтегралом Лебега функції*** $f(x)$.

Нехай тепер $X-$ відрізок числової прямої, $A=[a,x]\subset X,$ $\mu-$ лінійна міра Лебега. Якщо $f(x)-$ довільна інтегровна за Лебегом на множині X функція, то функція $\Phi(A)$ набуває вигляду $\Phi(A)=\int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu=F(x)$ і є функцією однієї незалежної змінної x. Зокрема, якщо $f(x)$ на відрізку X інтегровна за Ріманом, то $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt.$

Враховуючи відомі властивості інтеграла Рімана як функції верхньої межі, поставимо питання про виконання для інтегровних за Лебегом на множині X функцій $f(x)$ наступних рівностей:

1. $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu=f(x),$
2. $\int\limits_{[a,b]} f'(t)d\mu=f(b)-f(a).$

Зрозуміло, що перша з цих рівностей справедлива для кожної неперервної, а друга – для кожної неперервно диференційовної функції $f(x)$, оскільки за виконання таких умов вони були справедливими для відповідних інтегралів Рімана.

Звісно, не можна очікувати виконання цих рівностей для довільних інтегровних за Лебегом функцій. Але, як ***доведено Лебегом***, для кожної інтегровної за Лебегом на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ майже скрізь на ньому $\frac{d}{dx}\int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu = f(x).$

Проте, хоч функція $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ 1, & x\in[1,2],\end{cases}$ майже скрізь (крім точки $x=1$) на відрізку $[0,2]$ має навіть інтегровну за Лебегом похідну $f'(x)=0,$ вона не задовольняє рівність 2.

Розглянемо й дещо складніший приклад:

$$f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x^2},\ x\neq 0,\ \ f(0)=0.$$

На відрізку $[0,1]$ ця функція неперервна, а отже, інтегровна за Лебегом. Крім того, скрізь на цьому відрізку вона має скінченну похідну

$$f'(x)=2x\left(\cos\frac{\pi}{x^2}+\frac{\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x^2}\right),\ x\neq 0,\ \ f'(0)=0.$$

Припустивши для $f(x)$ виконання рівності 2, ми отримали би

$$\int\limits_{[\alpha_n,\beta_n]} f'(t)d\mu=\beta_n^2\cos\frac{\pi}{\beta_n^2}-\alpha_n^2\cos\frac{\pi}{\alpha_n^2}$$

для всіх відрізків $[\alpha_n,\beta_n]\subset[0,1].$

Для $\alpha_n=\sqrt{\frac{2}{4n+1}},\ \beta_n=\sqrt{\frac{1}{2n}},$ будемо мати $\int\limits_{[\alpha_n,\beta_n]} f'(t)d\mu=\frac{1}{2n}.$

Позначимо $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\beta_n]\subset[0,1].$

Такі відрізки не перетинаються, тому $\int\limits_A |f'(t)| d\mu \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty.$ Отже, функція $f'(x)$ не може бути інтегровною за Лебегом на відрізку $[0,1]$.

Тому поставимо завдання – визначити класи таких функцій, для яких ці рівності будуть справедливими.

Зауваживши, що у випадку $f(x) \ge 0$ функція $F(x)$ є монотонно неспадною, представимо цю функцію у загальному випадку у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій

$$F(x) = \int\limits_{[a,x]} f_+(t) d\mu - \int\limits_{[a,x]} f_-(t) d\mu,$$

де $f_+(x) = \frac{1}{2}\left(|f(x)| + f(x)\right), \quad f_-(x) = \frac{1}{2}\left(|f(x)| - f(x)\right).$

Таким чином, для вивчення властивостей невизначеного інтеграла Лебега на числовій прямій є необхідність детальніше зупинитися на аналізі властивостей монотонних функцій.

Спочатку нагадаємо декілька означень.

Функція $f(x)$, визначена на деякому відрізку числової прямої, називається ***монотонно неспадною***, якщо для будь-яких $x_1 < x_2$ з цього відрізка виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$. Аналогічно визначають ***монотонно незростаючу*** функцію, вимагаючи виконання протилежної нерівності $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Позначимо $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x).$

Якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то кажуть, що функція $f(x)$ ***неперервна зліва*** в точці x_0. А якщо $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то $f(x)$ в даній точці буде ***неперервною справа***.

Якщо ж обидві ці рівності виконані одночасно, то функцію $f(x)$ називають ***неперервною в точці*** x_0.

На кінцях відрізка мова може йтиме лише про односторонню неперервність.

Якщо границі $f(x_0-0)$ та $f(x_0+0)$ скінченні і рівні між собою, але не дорівнюють $f(x_0)$, то кажуть, що у точці x_0 функція $f(x)$ має ***усувний розрив***.

Якщо ж такі границі скінченні, але не рівні між собою, то у точці x_0 функція $f(x)$ має ***неусувний розрив першого роду***.

Різницю $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ називають ***стрибком*** функції $f(x)$ в точці x_0. Можуть розглядатися також стрибки функції $f(x)$ в точці x_0 лише зліва чи лише справа, які відповідно дорівнюють $f(x_0)-f(x_0-0)$ та $f(x_0+0)-f(x_0)$.

Якщо ж хоч одна з таких границь не існує або є нескінченною, то говорять, що у точці x_0 функція $f(x)$ має ***розрив другого роду***.

Встановимо деякі ***властивості монотонних функцій***:

1. Монотонно неспадна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ є обмеженою і вимірною, отже, інтегровною на ньому за Лебегом.

● З монотонності функції $f(x)$ випливає нерівність $f(a)\le f(x)\le f(b)$ для всіх $x\in[a,b]$.

Розглянемо тепер множину $M[f<c]=\{x: f(x)<c\}$. Якщо вона не порожня, то позначимо $d=\sup\limits_{x\in M[f<c]}\{x\}$.

З монотонності функції $f(x)$ отримуємо, що при цьому $M[f<c]$ буде або відрізком $[a,d]$, або проміжком $[a,d)$. Тому функція $f(x)$ вимірна.

Вона інтегровна на $[a,b]$ за Лебегом як і кожна вимірна обмежена на такому відрізку функція. ■

2. Монотонно неспадна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ може мати на цьому відрізку лише розриви першого роду.

● Якщо $x_0\ne a,$ то на відрізку $[a,x_0]$ монотонно неспадна і обмежена зверху числом $f(x_0)$. А отже, за відомою теоремою з математичного аналізу існує скінченна границя $f(x_0-0)$. Аналогічно встановлюємо існування скінченної границі $f(x_0+0)$, якщо $x_0 \neq b$. У такому разі враховуємо, що на відрізку $[x_0, b]$ функція $f(x)$ монотонно неспадна і обмежена числом $f(x_0)$ знизу. ■

3. Множина точок розриву монотонно неспадної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ не більш як зліченна.

● Нехай $A-$ множина точок розриву монотонно неспадної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$. Розглянемо множини

$$A_n = \left\{ x_0 : x_0 \in (a,b), f(x_0+0) - f(x_0-0) > \frac{1}{n} \right\}, \ n \in N.$$

Оскільки сума стрибків монотонно неспадної функції не перевищує $f(b)-f(a)$, то кожна з множин A_n є скінченною. Тому множина $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \{a,b\}$ не більш як зліченна. ■

Серед монотонно неспадних функцій виділимо функції стрибків.

Нехай на відрізку $[a,b]$ задана скінченна або зліченна множина точок $\{x_n\}$ і кожній точці x_n цієї множини поставлене у відповідність додатне число h_n, причому $\sum_n h_n < \infty$. Функцію $h(x) = \sum_{x_n < x} h_n$ називають ***функцією стрибків***.

Зрозуміло, що така функція є монотонно неспадною на відрізку $[a,b]$, причому $h(a)=0$. Крім того, для кожної точки $x \in (a,b]$

$$h(x-0) = \lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{x_n < x-\varepsilon} h_n = \sum_{x_n < x} h_n = h(x),$$

бо кожне $x_n < x$ при достатньо малому $\varepsilon > 0$ задовольняє також нерівність $x_n < x - \varepsilon$. Тому $h(x)$ у кожній такій точці є неперервною зліва. Аналогічно доводимо неперервність справа для всіх точок $x \neq x_n$. Якщо ж $x = x_k \neq b$ при деякому k, то отримуємо $h(x_k+0) - h(x_k) = \sum_{x_n \leq x_k} h_n - \sum_{x_n < x_k} h_n = h_k.$

У загальному випадку функції стрибків можуть мати доволі складну структуру. Але, якщо ж елементи множини $\{x_n\}$ утворюють монотонно зростаючу послідовність, то як окремий випадок функцій стрибків отримаємо так звані ***східчасті функції***.

Відзначимо, що кожну монотонно неспадну неперервну зліва на відрізку $[a,b]$ функцію $f(x)$ можна подати як суму неперервної монотонно неспадної функції та функції стрибків.

Також, як доведено Лебегом, кожна монотонна на відрізку $[a,b]$ функція майже скрізь на ньому має скінченну похідну

Обґрунтуємо й таку важливу в теорії інтегрування теорему.

Теорема про інтегровність похідної монотонної функції. Похідна $f'(x)$ монотонно неспадної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ інтегровна за Лебегом на цьому відрізку і

$$\int\limits_{[a,b]} f'(t)d\mu \le f(b)-f(a).$$

● Розглянемо функції $\varphi_n(x)=\dfrac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}},\ n\in N.$

Щоб вони були визначені на всьому відрізку $[a,b]$, домовимося вважати, що $f(x)=f(b)$ при $x>b.$ Із монотонності, а отже, і інтегровності функції $f(x)$, випливає інтегровність за Лебегом кожної з функцій $\varphi_n(x)$ на відрізку $[a,b]$. При цьому отримуємо

$$\int\limits_{[a,b]} \varphi_n(t)d\mu = n\int\limits_{[a,b]} f\left(t+\frac{1}{n}\right)d\mu - n\int\limits_{[a,b]} f(t)d\mu =$$

$$= n\int\limits_{\left[b,b+\frac{1}{n}\right]} f(t)d\mu - n\int\limits_{\left[a,a+\frac{1}{n}\right]} f(t)d\mu \le f(b)-f(a+0)\le f(b)-f(a).$$

Оскільки $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ майже скрізь на відрізку $[a,b]$, то за теоремою Фату отримуємо як інтегровність функції $f'(x)$ на цьому відрізку, так і нерівність

$$\int\limits_{[a,b]} f'(t)\,d\mu \le f(b) - f(a). \ \blacksquare$$

8.2. ***Абсолютно неперервні функції та їх зв'язок з невизначеним інтегралом Лебега***

Перед тим, як перейти до питання, для якого класу функцій у доведеній вище нерівності досягатиметься рівність, розглянемо приклад неперервної монотонно неспадної функції, для якої доведена нерівність буде строгою.

Для введення такої функції $f(x)$ на відрізку $[0,1]$ покладемо $f(0)=0,\quad f(1)=1.$ Далі розбиваємо відрізок $[0,1]$ на три рівні частини і задаємо $f(x)=\frac{1}{2}$ для $x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right].$

Інтервали, які залишилися, знову ділимо на три рівні за довжиною частини, з яких середня є відрізком, а дві крайні – інтервалами. На кожному із середніх відрізків задаємо значення функції $f(x)$ як середнє арифметичне значень цієї функції у найближчих зліва та справа до кінців цього відрізка точках, в яких $f(x)$ уже визначена. Наприклад,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\ x\in\left[\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right],$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4},\ x\in\left[\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right].$$

Продовжимо такий процес до нескінченності. Крім того, у точках x канторової множини, які не є кінцями жодного з середніх відрізків, визначимо $f(x)$ як границі $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n),$ де $(x_n)-$ послідовності точок поділу, які збігаються до $x.$

У результаті отримаємо неперервну монотонно неспадну функцію, похідна якої $f'(x)$ майже скрізь на відрізку $[0,1]$ дорівнює нулю. Отже, $\int\limits_{[0,1]} f'(t)\,d\mu = 0 < 1 = f(1) - f(0).$

Графік такої функції $f(x)$ називають ***канторовими сходами***.

Звідси випливає, що пошук класу функцій, для яких виконується рівність $\int\limits_{[a,b]} f'(t)\,d\mu = f(b) - f(a)$, слід продовжити.

Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a,b]$, називається ***абсолютно неперервною*** на цьому відрізку, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої скінченної системи інтервалів (a_k, b_k), $k = 1,\dots,n$, з цього відрізка, які попарно не перетинаються і мають суму довжин, меншу за δ, виконується нерівність $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

З цього означення випливає, що кожна абсолютно неперервна функція на відрізку $[a,b]$ є на ньому рівномірно неперервною.

Покажемо, що обернене твердження неправильне.

● Функція «канторові сходи», будучи неперервною на відрізку $[0,1]$, за теоремою Кантора є на ньому рівномірно неперервною. Оскільки ж при кожному $\delta > 0$ канторову множину можна покрити інтервалами (a_k, b_k), $k = 1,\dots,n$, сума довжин яких менша за δ, і для кожного такого покриття виконується рівність $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 1$, то ця функція не є абсолютно неперервною на $[0,1]$. ■

Важливим прикладом абсолютно неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій є функції, які мають на інтервалі (a,b) обмежену похідну: $|f'(x)| \le M$.

● За теоремою Лагранжа про скінченні прирости маємо

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} |f'(\xi_k)|(b_k - a_k) \le M\delta, \ \ \xi_k \in (a_k, b_k).$$

Тому достатньо вибрати таке $\delta > 0$, що $M\delta < \varepsilon$. ■

Наведемо дві ***властивості*** абсолютно неперервних функцій, які пропонуємо читачам обґрунтувати самостійно.

1. Якщо $f(x)$ – абсолютно неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, то при кожному c функція $cf(x)$ теж абсолютно неперервна на цьому відрізку.

2. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ абсолютно неперервні на відрізку $[a,b]$, то функція $f(x)+g(x)$ теж абсолютно неперервна на цьому відрізку.

Відзначимо також, що кожну абсолютно неперервну на відрізку $[a,b]$ функцію $f(x)$ можна подати як різницю двох абсолютно неперервних монотонно неспадних функцій. Тому кожна така функція майже скрізь на $[a,b]$ має скінченну похідну.

Повернемося до невизначеного інтеграла Лебега – функції $F(x)=\int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu,\ x\in[a,b]$.

Нехай $((a_k,b_k))$ – довільна система інтервалів цього відрізка, які попарно не перетинаються. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\left|F(b_k)-F(a_k)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{(a_k,b_k)} f(t)d\mu\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{(a_k,b_k)}\left|f(t)\right|d\mu=\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k)}\left|f(t)\right|d\mu.$$

Внаслідок абсолютної неперервності інтеграла Лебега останній інтеграл прямує до нуля, якщо сума довжин інтервалів (a_k,b_k) прямує до нуля. Отже, невизначений інтеграл Лебега є абсолютно неперервною на відрізку $[a,b]$ функцією для будь-якої інтегровної на ньому за Лебегом функції $f(x)$.

Для доведення наступної теореми Лебега скористаємося ***лемою***: Якщо похідна абсолютно неперервної монотонно неспадної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ майже скрізь на цьому відрізку дорівнює нулю, то ця функція стала.

Теорема Лебега. Похідна $f'(x)$ абсолютно неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ інтегровна за Лебегом на цьому відрізку і для кожного $x \in [a,b]$ виконується рівність

$$\int\limits_{[a,x]} f'(t)\,d\mu = f(x) - f(a).$$

● Для доведення теореми досить обмежитися випадком, коли $f(x)$ є монотонно неспадною. Похідна $f'(x)$ такої функції буде інтегровною за Лебегом на відрізку $[a,b]$.

Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - \int\limits_{[a,x]} f'(t)\,d\mu.$

Вона абсолютно неперервна на відрізку $[a,b]$ як різниця двох абсолютно неперервних функцій. Крім того, при $x'' > x'$ за властивістю інтеграла Лебега від похідної монотонно неспадної функції $g(x'') - g(x') = f(x'') - f(x') - \int\limits_{[x',x'']} f'(t)\,d\mu \geq 0.$

Отже, функція $g(x)$ монотонно неспадна на $[a,b]$. Оскільки також майже скрізь на цьому відрізку $g'(x) = 0,$ то за доведеною вище лемою $g(x) = const.$ Але $g(a) = f(a),$ то для всіх $x \in [a,b]$ маємо рівність $g(x) = f(x) - \int\limits_{[a,x]} f'(t)\,d\mu = f(a),$ з якої і випливає твердження теореми. ■

Зрозуміло, що при цьому також $\int\limits_{[a,b]} f'(t)\,d\mu = f(b) - f(a).$

Наслідок. Абсолютно неперервні функції, і тільки вони, відновлюються за своєю похідною операцією інтегрування з точністю до сталого доданка.

Остання отримана нами рівність є ***аналогом формули Ньютона-Лейбніца***. Наведемо без доведення ще й наступні дві теореми, які є аналогами класичних теорем про ***інтегрування частинами*** та ***заміною змінних***:

Теорема 1. Нехай $f(x)$ та $g(x)-$інтегровні за Лебегом функції на відрізку $[a,b]$, а $F(x)$ та $G(x)-$ їх невизначені інтеграли. Тоді функції $F(x)g(x)$ та $G(x)f(x)$ теж інтегровні на $[a,b]$ за Лебегом, причому

$$\int\limits_{[a,b]} F(x)g(x)d\mu + \int\limits_{[a,b]} G(x)f(x)d\mu = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Теорема 2. Якщо $\varphi(t)-$ монотонно неспадна абсолютно неперервна на відрізку $[\alpha,\beta]$ функція, а функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на відрізку $[a,b]=[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$, то функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ інтегровна за Лебегом на $[\alpha,\beta]$, причому

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(t))\varphi'(t)d\mu.$$

8.3. ***Знакозмінні міри. Теорема Радона-Нікодима***

Повернемося ще раз до функції $\Phi(A)=\int\limits_A f(x)d\mu$. Якщо $f(x)-$ довільна невід'ємна інтегровна на просторі X за $\sigma-$адитивною мірою μ функція, то така функція множини $\Phi(A)$ визначена для всіх вимірних множин $A\subset X$, теж є невід'ємною та $\sigma-$адитивною.

Іншими словами, ця функція є $\sigma-$адитивною мірою, визначеною на тій же $\sigma-$алгебрі, що й міра μ. При цьому з умови $\mu(A)=0$ випливає, що й $\Phi(A)=0$, тобто міра $\Phi(A)$ також буде повною. При цьому міру $\mu(A)$ отримуємо, покладаючи $f(x)\equiv 1$. Якщо ж умову $f(x)\geq 0$ не накладати, то ми отримаємо $\sigma-$адитивну функцію множини $\Phi(A)$, яка може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

Всяку $\sigma-$адитивну функцію множини, визначену на деякій $\sigma-$алгебрі підмножин простору X, називають ***знакозмінною мірою***, або ж ***зарядом***. Таким чином, поняття заряду є природним узагальненням поняття $\sigma-$адитивної міри.

Прикладом такого заряду є, зокрема, функція $\Phi(A)$, де $f(x)-$ довільна інтегровна на просторі X за мірою μ функція.

Якщо на одній і тій же $\sigma-$алгебрі підмножин простору X визначені дві $\sigma-$адитивні міри μ_1 та μ_2, то функція $\varphi(A)=\mu_1(A)-\mu_2(A)$ є зарядом, визначеним на цій же $\sigma-$алгебрі підмножин. І, навпаки, кожний заряд може бути поданий у вигляді різниці двох $\sigma-$адитивних мір.

Для записаного вище заряду $\Phi(A)$ таке представлення можна записати у вигляді $\Phi(A)=\int\limits_A f_+(x)d\mu-\int\limits_A f_-(x)d\mu=\Phi_+(A)-\Phi_-(A)$.

Розглянемо тепер довільні заряди Φ. Кажуть, що заряд Φ ***зосереджений на вимірній множині*** A_0, якщо $\Phi(A)=0$ для кожної вимірної множини $A\subset X\setminus A_0$. При цьому множина A_0 називається ***носієм заряду*** Φ.

Заряд Φ називається ***дискретним***, якщо він зосереджений на скінченній або зліченній множині $\{a_n\}$. При цьому для кожної множини $A\subset X$ отримуємо $\Phi(A)=\sum\limits_{a_n\in A}\Phi(a_n)$.

Заряд Φ називається ***сингулярним***, якщо він зосереджений на множині міри нуль. Заряд Φ називається ***неперервним***, якщо $\Phi(A)=0$ для кожної одноточкової множини A.

І, нарешті, заряд Φ називається ***абсолютно неперервним*** відносно міри μ, якщо $\Phi(A)=0$ для кожної множини A, міра якої $\mu(A)=0$.

Заряд, який є одночасно дискретним і неперервним, або сингулярним і абсолютно неперервним, може бути лише нульовим.

Прикладом абсолютно неперервного заряду є заряд $\Phi(A)=\int\limits_A f(x)d\mu$, що випливає з абсолютної неперервності інтеграла Лебега. Цим і вичерпуються всі абсолютно неперервні заряди.

Іншими словами, справедлива наступна теорема.

Теорема Радона-Нікодима. Нехай $\mu-$ деяка скінченна $\sigma-$адитивна міра, визначена на $\sigma-$алгебрі підмножин простору X, а $\Phi-$ заряд, визначений на тій же $\sigma-$алгебрі і абсолютно неперервний відносно міри μ. Тоді існує така інтегровна за мірою μ на просторі X функція $f(x)$, що $\Phi(A)=\int\limits_A f(x)d\mu$ для кожної вимірної множини $A\subset X$, і ця функція визначається з точністю до $\mu-$еквівалентності. При цьому функцію $f(x)$ називають ***похідною заряду*** Φ.

Отже, з цієї точки зору абсолютно неперервні заряди можна трактувати як узагальнення поняття невизначеного інтеграла Лебега.

Наведемо також приклад заряду, який не є абсолютно неперервним. Для цього будемо розглядати лінійну міру Лебега μ на відрізку $[0,1]$ і визначимо функцію множини $\varphi(A)=\begin{cases}1, & 0\in A,\\ 0, & 0\notin A.\end{cases}$

Така функція є $\sigma-$адитивною мірою, а отже, зарядом. При цьому для множини $A=\{0\}$ маємо $\mu(A)=0$, але $\varphi(A)=1$. Тому такий заряд не є абсолютно неперервним. Більше того, він навіть не є неперервним.

8.4. ***Міри та інтеграл Лебега-Стільтьєса***

Як узагальнення лінійної міри Лебега розглянемо лінійні міри Лебега-Стільтьєса.

Нехай $F(x)-$ довільна монотонно неспадна неперервна зліва на відрізку $[a,b]$ функція. Визначимо міру m_F на проміжках цього відрізка рівностями:

$$m_F(\alpha,\beta)=F(\beta)-F(\alpha+0),\qquad m_F[\alpha,\beta]=F(\beta+0)-F(\alpha),$$
$$m_F(\alpha,\beta]=F(\beta+0)-F(\alpha+0),\qquad m_F[\alpha,\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Застосувавши до m_F лебегове продовження міри, отримаємо міру μ_F, яку називають ***мірою Лебега-Стільтьєса***.

Для $F(x)=x$ ця міра співпадає з лінійною мірою Лебега.

Відзначимо, що міра Лебега-Стільтьєса не обов'язково буде неперервною. Наприклад, якщо x_0 – точка розриву функції $F(x)$ зі стрибком h_0, то $\mu_F(x_0)=h_0>0.$

Якщо $F(x)=h(x)-$ функція стрибків з точками розриву $x_1, x_2, \ldots$ та відповідними стрибками у них $h_1, h_2, \ldots,$ то кожна підмножина A відрізка $[a,b]$ вимірна за мірою μ_F, причому $\mu_F(A)=\sum\limits_{x_n \in A} h_n.$

Зрозуміло, що така міра є дискретною мірою.

Якщо $F(x)-$ абсолютно неперервна функція, то для кожного інтервалу (α,β) на підставі теореми Лебега

$$\mu_F(\alpha,\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\int\limits_{(\alpha,\beta)} F'(x)d\mu.$$

А оскільки лебегове продовження $\sigma-$адитивної міри однозначно визначається своїми значеннями на півкільці всіх проміжків відрізка $[a,b],$ то $\mu_F(A)=\int\limits_A F'(x)d\mu$ для кожної вимірної за Лебегом множини A. Очевидно, що така міра є абсолютно неперервною.

Зауважимо, що існують також неперервні функції $F(x)$, які не є абсолютно неперервними. Наприклад, функція «канторові сходи». Якщо похідна такої неперервної функції майже скрізь на відрізку $[a,b]$ дорівнює нулю, то цю функцію називають ***сингулярною***. Відповідно міра μ_F, породжена такою функцією, називається ***сингулярною мірою***. Така міра зосереджена на тій множині, де $F'(x)$ не існує, або відмінна від нуля.

Відзначимо також, що кожну монотонно неспадну неперервну на відрізку $[a,b]$ функцію $F(x)$ можна подати як суму абсолютно неперервної і сингулярної функцій, монотонно неспадних на цьому відрізку.

● Справді, функція $\chi(x)=F(x)-\int\limits_{[a,x]} F'(t)d\mu$ неперервна і монотонно неспадна, а її похідна $\chi'(x)$ майже скрізь на відрізку $[a,b]$

дорівнює нулю. Крім того, функція $\psi(x)=\int\limits_{[a,x]} F'(t)\,d\mu$ монотонно неспадна і абсолютно неперервна на $[a,b]$. Отже, отримуємо шукане представлення $F(x)=\psi(x)+\chi(x)$. ■

Таким чином, кожну монотонно неспадну неперервну зліва на відрізку $[a,b]$ функцію можна подати як суму монотонно неспадних функцій стрибків та абсолютно неперервної і сингулярної функцій.

Враховуючи сказане, приходимо до ***висновку:*** кожну міру Лебега-Стільтьєса можна подати як суму дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної мір.

Маючи міру μ_F, так само, як вводилось поняття інтегровності за Лебегом, вводять поняття інтегровності за мірою μ_F. Такий ***інтеграл Лебега-Стільтьєса*** позначають $\int\limits_{[a,b]} f(x)\,d\mu_F$.

Якщо $F(x)=h(x)-$ функція стрибків з точками розриву $x_1,x_2,\ldots$ та відповідними стрибками у цих точках $h_1,h_2,\ldots,$ то

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_F=\sum_{x_n\in[a,b]} f(x_n)h_n.$$

Якщо $F(x)-$ абсолютно неперервна функція, то

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_F=\int\limits_{[a,b]} f(x)F'(x)\,d\mu.$$

Якщо ж $F(x)$ містить і сингулярну частину, то подібне зведення до сум чи звичайних інтегралів Лебега не можливе.

Розглянемо ***приклад*** обчислення інтеграла Лебега-Стільтьєса.

Нехай $f(x)=2x+3,\qquad F(x)=\begin{cases}-x^2, & x\in[-1,0],\\ x+2, & x\in(0,1].\end{cases}$

Оскільки $F(x)=\varphi(x)+h(x)$, де функції

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^2, & x\in[-1,0],\\ x, & x\in(0,1],\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0],\\ 2, & x\in(0,1],\end{cases}$$

монотонно неспадні на відрізку $[-1,1]$, причому функція $\varphi(x)$ абсолютно неперервна, а $h(x)-$ функція стрибків з єдиним розривом у точці $x_1=0$ та стрибком $h_1=2$, то

$$\int\limits_{[-1,1]} f(x)d\mu_F=\int\limits_{[-1,1]} f(x)\varphi'(x)d\mu+f(x_1)h_1=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}(2x+3)(-2x)dx+\int\limits_{0}^{1}(2x+3)dx+3\cdot 2=11\frac{2}{3}.$$

Функції $\varphi(x)$ та $h(x)$ тут можна було явно і не знаходити, а обчислити шуканий інтеграл безпосередньо за формулою

$$\int\limits_{[-1,1]} f(x)d\mu_F=\int\limits_{[-1,1]} f(x)F'(x)d\mu+f(x_1)h_1,\quad h_1=F(x_1+0)-F(x_1).$$

Поняття інтеграла Лебега-Стільтьєса можна узагальнити, перейшовши до довільних неперервних зліва функцій $\Phi(x)$, які представляється у вигляді різниці $\Phi_1(x)-\Phi_2(x)$, покладаючи

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_\Phi=\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_{\Phi_1}-\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_{\Phi_2}.$$

Величина такого інтеграла не залежить від того, різницею яких монотонно неспадних неперервних зліва функцій є функція $\Phi(x)$.

Якщо $\Phi(x)$ не містить сингулярної складової, то такий інтеграл можна обчислити й за формулою

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_\Phi=\int\limits_{[a,b]} f(x)\Phi'(x)d\mu+\sum_{x_n\in[a,b]} f(x_n)h_n.$$

Вправи до лекції №8

1. Для функцій $f(x)$, заданих на відрізку $[a,b]$, знайдіть їх невизначені інтеграли Лебега $F(x)=\int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu$, якщо:

а). $f(x)=\begin{cases}2x+3, x\in[-3,1),\\ 6, x=1,\\ 1-2x, x\in(1,2].\end{cases}$ б). $f(x)=\begin{cases}4+3x, x\in[-2,0],\\ x^2+2, x\in(0,2),\\ -3, x=2.\end{cases}$

2. Обґрунтуйте неперервність похідної функції

$$f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x^2},\ x\neq 0,\ \ f(0)=0..$$

3. Доведіть, що для $f(x)\geq 0$ функція $F(x)=\int\limits_{[a;x]} f(t)\,d\mu$ є монотонно неспадною функцією.

4. Нехай $\{x_n\}$ – множина всіх раціональних чисел відрізка $[a,b]$, $h_n=\frac{1}{2^n}$, $h(x)$ – функція стрибків. Дослідіть цю функцію на неперервність.

5. Множиною точок розриву монотонно неспадної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ є множина $\{x_n\}$. Нехай h_n – стрибки функції $f(x)$ у точках x_n, $h(x)=\sum\limits_{x_n<x} h_n$, $\varphi(x)=f(x)-h(x)$. Доведіть, що функція $\varphi(x)$ є неперервною та монотонно неспадною на $[a,b]$.

6. Подайте функцію $f(x)=\begin{cases}-x^2,\ x\in[-1,0],\\ x+2,\ x\in(0,1],\end{cases}$ у вигляді суми неперервної функції та функції стрибків.

7. Доведіть, що добуток абсолютно неперервної функції на сталу та сума двох абсолютно неперервних функцій є абсолютно неперервними функціями.

8. Скористайтеся формулами інтегрування частинами та заміни змінної для обчислення інтегралів Лебега:

а) $\int\limits_{[0;\pi]} x\sin x\,d\mu$; б) $\int\limits_{[0;a]} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,d\mu,\ a>0$.

9. Нехай $X=[0;10)$, G – півкільце всіх проміжків $[a,b)\in X$, $a\leq b$, $m_F[a,b)=F(b)-F(a)$, μ_F – лебегове продовження міри m_F. Виясніть, чи є вимірними за мірою μ_F множини A, B, C, D. У випадку вимірності знайдіть міри таких множин, якщо:

$$F(x)=\begin{cases}-1, & x\le -2,\\ 2, & -2<x\le 1,\\ 4, & x>1,\end{cases}$$

$$A=[0;15],\ \ C=Q\cap[1;3],$$
$$B=[-1;6],\ \ D=[1;3]\setminus Q.$$

10. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{[0;3)} f(x)\,dF(x)$, якщо:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le \frac{3}{2},\\ 4x^2-5, & x>\frac{3}{2},\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0\le x\le 1,\\ 2x, & 1<x\le 2,\\ 3-2x, & 2<x<3.\end{cases}$$

Додаток

Функції з обмеженою зміною та інтеграл Рімана-Стільтьєса

Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a,b]$, називається ***функцією з обмеженою зміною***, якщо існує така стала C, що для будь-якого розбиття цього відрізка точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ виконується нерівність $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\le C.$

Точна верхня грань таких сум по всіх скінченних розбиттях відрізка $[a,b]$ називається ***повною зміною*** (***варіацією***) функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається $V_a^b[f]$.

Для функцій, визначених на всій числовій прямій, повну зміну можна визначити як границю $V_{-\infty}^{+\infty}[f]=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}V_a^b[f]$, а для функції, визначеної на інтервалі (a,b),– як $V_{a+0}^{b-0}[f]=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}V_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}[f]$.

Якщо такі границі є скінченними, то $f(x)$ є функцією з обмеженою зміною на відповідних проміжках $(-\infty,+\infty)$ та (a,b).

Аналогічно можна визначити повні зміни $V_{a+0}^{b}[f]=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}V_{a+\varepsilon}^{b}[f]$ та $V_a^{b-0}[f]=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}V_a^{b-\varepsilon}[f]$ функції $f(x)$ на проміжках $(a,b]$ та $[a,b)$ відповідно.

Кожна функція з обмеженою зміною є обмеженою. Але, як показує наступний приклад, не всяка обмежена на відрізку $[a,b]$ функція має на цьому відрізку обмежену зміну.

Розглянемо важливі ***приклади*** функцій з обмеженою зміною:

1. Якщо $f(x)-$ монотонно неспадна на відрізку $[a,b]$ функція, то її повна зміна на цьому відрізку визначається рівністю

$$V_a^b[f]=\sup\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=\sup\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)=$$
$$=\sup\left(f(x_n)-f(x_0)\right)=f(b)-f(a).$$

Аналогічно для монотонно незростаючої на відрізку $[a,b]$ функції отримуємо $V_a^b[f]=f(a)-f(b)$.

2. Нехай $f(x)$ має на інтервалі (a,b) обмежену похідну: $|f'(x)|\le M$. Тоді за теоремою Лагранжа про скінченні прирости

$$V_a^b[f]=\sup\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=\sup\sum_{k=1}^{n}\left|f'(\xi_k)\right|(x_k-x_{k-1})\le$$

$$\le M\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=M(b-a),\quad \xi_k\in(x_{k-1},x_k).$$

Відзначимо такі ***властивості функцій з обмеженою зміною***:

1. Безпосередньо з означення випливає, що $V_a^b[f]\ge 0$ для довільної функції $f(x)$, причому $V_a^b[f]=0$ тільки для $f(x)=const$.

2. Якщо $f(x)-$ функція з обмеженою зміною на відрізку $[a,b]$, то при кожному $\alpha\in R$ функція $\alpha f(x)$ також має обмежену зміну на цьому відрізку, причому $V_a^b[\alpha f]=|\alpha|\cdot V_a^b[f]$.

3. Якщо $f(x)$ та $g(x)-$ функції з обмеженою зміною на відрізку $[a,b]$, то функція $f(x)+g(x)$ також має обмежену зміну на цьому відрізку, причому $V_a^b[f+g]\le V_a^b[f]+V_a^b[g]$.

4. Якщо $f(x)-$ функція з обмеженою зміною на відрізку $[a,b]$ і $a<c<b$, то $V_a^b[f]=V_a^c[f]+V_c^b[f]$.

● Для доведення зауважимо, що для довільного розбиття відрізка $[a,b]$ сума $\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$ може лише збільшитися при додаванні нової точки поділу $c=x_m$.

Справді, якщо $x_{k-1}<c<x_k$, то

$$\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\le\left|f(x_k)-f(c)\right|+\left|f(c)-f(x_{k-1})\right|,$$

а всі інші доданки не змінюються. А якщо $c=x_m$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=\sum_{k=1}^{m}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\le V_a^c[f]+V_c^b[f].$$

Звідси випливає, що $V_a^b[f]\le V_a^c[f]+V_c^b[f]$.

З іншого боку, вибираючи весь час $c=x_m$, ми для кожного $\varepsilon>0$ можемо побудувати такі розбиття відрізків $[a,c]$ та $[c,b]$, що

$$\sum_{k=1}^{m}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\ge V_a^c[f]-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{k=m+1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\ge V_c^b[f]-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, також $\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\ge V_a^c[f]+V_c^b[f]-\varepsilon.$

Звідси внаслідок довільності вибору $\varepsilon>0$, приходимо до нерівності $V_a^b[f]\ge V_a^c[f]+V_c^b[f]$, з якої з врахуванням доведеної вище протилежної нерівності випливає потрібна рівність. ■

Властивість 4 може бути використана для практичного обчислення повної зміни функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Для цього достатньо розбити даний відрізок на проміжки монотонності цієї функції і додати повні зміни функції $f(x)$ на таких проміжках.

Наприклад, знайдемо на відрізку $[-2,2]$ повну зміну функції

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2, & -2\le x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-2, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

На відрізку $[-2,0]$ вона зростає, а на відрізку $[0,1]-$ спадає. У точці $x=1$ функція $f(x)$ має розрив справа I роду зі стрибком $f(1+0)-f(1)=-1$, а далі на проміжку $(1,2]$ вона зростає. Отже,

$$V_{-2}^{2}[f]=V_{-2}^{0}[f]+V_{0}^{1}[f]+V_{1}^{1+0}[f]+V_{1+0}^{2}[f]=$$
$$=\big(f(0)-f(-2)\big)+\big(f(0)-f(1)\big)+\big(f(1)-f(1+0)\big)+$$
$$+\big(f(2)-f(1+0)\big)=\big(2-(-2)\big)+(2-0)+\big(0-(-1)\big)+\big(0-(-1)\big)=8.$$

Тут через $V_1^{1+0}\left[f\right]$ умовно позначена повна зміна, тобто стрибок, функції $f\left(x\right)$ на виродженому проміжку $\left[1;1+0\right)$. Для наочності рекомендуємо читачам намалювати графік даної функції.

Відзначимо ще й таку особливість повної зміни функції. Нехай $f\left(x\right)-$ довільна неперервна зліва функція з обмеженою зміною на всій числовій прямій. Домовимося вважати, що повна зміна такої функції на порожній множині дорівнює нулю, і визначимо функцію $m_f\left(A\right)$ на півкільці G всіх проміжків числової прямої як повну зміну функції $f\left(x\right)$ на відповідному проміжку. З властивостей 1 та 4 випливає, що функція $m_f\left(A\right)$ є ***мірою***. Така міра є $\sigma-$адитивною.

Розглянемо також для функції $f\left(x\right)$ з обмеженою зміною на відрізку $\left[a;b\right]$ функцію $v\left(x\right)=V_a^x\left[f\right]$, $x\in\left[a;b\right]$, яку надалі будемо називати ***варіаційною функцією*** функції $f\left(x\right)$.

Проаналізуємо ***приклад*** знаходження такої функції для

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2-x^2, & -2\le x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-2, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

● Оскільки на відрізку $\left[-2,0\right]$ функція $f\left(x\right)$ зростає, то на цьому відрізку $v\left(x\right)=V_{-2}^x\left[f\right]=f\left(x\right)-f\left(-2\right)=2-x^2-\left(-2\right)=4-x^2$.

На інтервалі $\left(0,1\right)$ функція $f\left(x\right)$ спадає. Відповідно знаходимо

$$v\left(x\right)=V_{-2}^x\left[f\right]=V_{-2}^0\left[f\right]+V_0^x\left[f\right]=v\left(0\right)+\left(f\left(0\right)-f\left(x\right)\right)=$$
$$=4+\left(2-\left(2-x^2\right)\right)=4+x^2.$$

Окремо виділимо точку $x=1$, у якій функція $f\left(x\right)$ має розрив зліва. Оскільки $f\left(x\right)$ спадає на всьому відрізку $\left[0,1\right]$, то

$$v\left(1\right)=V_{-2}^1\left[f\right]=V_{-2}^0\left[f\right]+V_0^1\left[f\right]=v\left(0\right)+\left(f\left(0\right)-f\left(1\right)\right)=4+\left(2-0\right)=6.$$

І, нарешті, на проміжку $\left(1,2\right]$ отримуємо

$$v(x)=V_{-2}^{x}[f]=V_{-2}^{1}[f]+V_{1}^{1+0}[f]+V_{1+0}^{x}[f]=v(1)+\big(f(1)-f(1+0)\big)+$$
$$+\big(f(x)-f(1+0)\big)=6+\big(0-(-1)\big)+\big(x-2-(-1)\big)=x+6. \ \blacksquare$$

Наведемо ***основні властивості функції*** $v(x)$ на відрізку $[a;b]$:

1. Функція $v(x)$ невід'ємна, причому завжди $v(a)=0$.

2. Функція $v(x)$ монотонно неспадна.

3. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x^* зліва чи справа, то і $v(x)$ неперервна у цій точці зліва чи справа відповідно.

4. Функція $\varphi(x)=v(x)-f(x)$ монотонно неспадна.

З цих властивостей випливає такий важливий ***висновок:*** кожну функцію з обмеженою зміною можна подати як різницю двох монотонно неспадних функцій: $f(x)=v(x)-\varphi(x)$.

Навпаки, кожна функція, яку можна подати як різницю двох монотонно неспадних на відрізку $[a,b]$ функцій, має на цьому відрізку обмежену зміну.

З отриманого представлення функції $f(x)$ та теореми Лебега про диференціювання монотонних функцій випливає такий ***наслідок:*** кожна функція з обмеженою зміною на відрізку $[a,b]$ майже скрізь на цьому відрізку має скінченну похідну. При цьому $|f'(x)|=v'(x)$ майже скрізь на відрізку $[a,b]$.

Встановимо також зв'язок між функціями з обмеженою зміною та абсолютно неперервними функціями.

Теорема 1. Якщо $f(x)-$ абсолютно неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, то вона має на цьому відрізку обмежену зміну.

● Безпосередньо з означень абсолютно неперервної функції та функції з обмеженою зміною випливає, що для кожного $\varepsilon>0$ можна вибрати $\delta>0$ так, що повна зміна функції $f(x)$ на відрізку з довжиною, меншою за δ, не перевищуватиме ε. Оскільки відрізок $[a,b]$ можна розбити на скінченну кількість відрізків з довжинами, меншими за $\delta,$ то і повна зміна функції $f(x)$ на всьому відрізку $[a,b]$ теж буде скінченною. ■

Теорема 2. Варіаційна функція абсолютно неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ є абсолютно неперервною на цьому відрізку функцією.

● Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta > 0$ так, щоб виконувалася нерівність $\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon$ при $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta.$

Розглянемо суму $\sum_{k=1}^{n} \left| v(b_k) - v(a_k) \right| = \sum_{k=1}^{n} V_{a_k}^{b_k}[f],$ яка є точною верхньою гранню чисел $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} \left| f(x_{k,i}) - f(x_{k,i-1}) \right|$ по всіх скінченних розбиттях $a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \ldots < x_{k,m_k} = b_k$ відрізків $[a_k, b_k],\ k = 1,\ldots,n,$ відповідно. А оскільки сума довжин всіх таких інтервалів $(x_{k,i-1}, x_{k,i})$ менша за $\delta,$ то кожне з цих чисел не перевищує $\varepsilon.$

Тому $\sum_{k=1}^{n} \left| v(b_k) - v(a_k) \right| \le \varepsilon,$ що означає абсолютну неперервність функції $v(x).$ А за властивостями абсолютно неперервних функцій й функція $\varphi(x) = v(x) - f(x)$ також буде абсолютно неперервною. ■

Використовуючи функції з обмеженою зміною введемо також поняття інтеграла Рімана-Стільтьєса, який є узагальненням інтеграла Рімана та окремим випадком інтеграла Лебега-Стільтьєса.

Нехай $\Phi(x)$ – неперервна зліва функція з обмеженою зміною, визначена на проміжку $[a,b).$ Точку b не включаємо тому, що окремо взяті точки можуть мати ненульову міру $\mu_\Phi.$

Розглянемо розбиття $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ цього проміжку на частини $[x_{k-1}, x_k),\ k = 1,\ldots,n,$ і виберемо на кожній з таких частин довільним чином точку ξ_k відповідно.

Складемо суму $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\big).$

Якщо при $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$ ці суми мають скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття проміжку $[a,b)$ на частини, ні від вибору точок ξ_k на цих частинах, то таку границю називають ***інтегралом Рімана-Стільтьєса*** функції $f(x)$ відносно функції $\Phi(x)$ по проміжку $[a,b)$ і позначають $\int_a^b f(x)d\Phi(x)$.

Для $\Phi(x)=x$ інтеграл Рімана-Стільтьєса по проміжку $[a,b)$ співпадає з відповідним інтегралом Рімана по відрізку $[a,b]$.

А якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то для кожної неперервної зліва функції $\Phi(x)$ з обмеженою зміною інтеграл Рімана-Стільтьєса функції $f(x)$ відносно функції $\Phi(x)$ по проміжку $[a,b)$ існує і дорівнює відповідному інтегралу Лебега-Стільтьєса.

Отже, інтеграли Рімана-Стільтьєса від неперервних функцій $f(x)$ можна обчислювати за тими ж формулами, що й відповідні інтеграли Лебега-Стільтьєса.

Справедлива й така формула ***інтегрування частинами***:

$$\int_a^b f(x)dg(x)+\int_a^b g(x)df(x)=f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

за умови існування хоч одного з інтегралів у лівій частині рівності.

Відзначимо також рівність $\int_a^b f(x)d\Phi_1(x)=\int_a^b f(x)d\Phi_2(x)$ для довільної неперервної функції $f(x)$ і функцій з обмеженими змінами $\Phi_1(x)$ та $\Phi_2(x)$, які відрізняються значеннями лише у скінченній чи зліченній кількості точок проміжку $[a,b)$. Так само, для неперервної функції $f(x)$ величина інтеграла Рімана-Стільтьєса не залежить від значень, які набуває функція $\Phi(x)$ у своїх точках розриву.

Окремо виділимо наступну важливу властивість інтеграла Рімана-Стільтьєса:

Теорема про середнє. $\left|\int_a^b f(x)d\Phi(x)\right| \le \max\left|f(x)\right| \cdot V_a^{b-0}[\Phi].$

● При кожному розбитті проміжку $[a,b)$ виконується нерівність

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left(\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k)\right| \cdot \left|\left(\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right)\right| \le$$

$$\le \max\left|f(x)\right| \cdot \sum_{k=1}^{n}\left|\left(\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right)\right| \le \max\left|f(x)\right| \cdot V_a^{b-0}[\Phi]. \ \blacksquare$$

Скористаємося цією теоремою для обґрунтування граничного переходу під знаком інтегралів Стільтьєса відносно послідовності функцій $\Phi_n(x)$.

Теорема Хеллі. Нехай функції $\Phi_n(x)$ з обмеженою зміною на відрізку $[a,b]$ збігаються у кожній точці цього відрізка до функції $\Phi(x)$, причому повні зміни цих функцій обмежені в сукупності:

$$V_a^b[\Phi_n] \le C,\ n = 1,2,...$$

Тоді функція $\Phi(x)$ також має обмежену зміну, і для кожної неперервної на $[a,b]$ функції $f(x)$ справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)d\Phi_n(x).$$

● Насамперед зауважимо, що для кожного розбиття відрізка $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$ виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left|\Phi_n(x_k)-\Phi_n(x_{k-1})\right| \le C.$$

Тому також $V_a^b[\Phi] \le C.$

Нехай $f(x)-$ східчаста функція, яка набуває значень y_k на проміжках $[x_{k-1},x_k),\ k=1,...,m.$ Тоді

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k\left(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} y_k\left(\Phi_n(x_k) - \Phi_n(x_{k-1})\right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)d\Phi_n(x).$$

Якщо ж $f(x)-$ довільна неперервна функція, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує така східчаста функція $f_\varepsilon(x)$, що $\left|f(x) - f_\varepsilon(x)\right| < \varepsilon$ для всіх $x \in [a,b]$. Тоді

$$\left|\int_a^b f(x)d\Phi(x) - \int_a^b f(x)d\Phi_n(x)\right| \le \left|\int_a^b f(x)d\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x)d\Phi(x)\right| +$$

$$+\left|\int_a^b f_\varepsilon(x)d\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x)d\Phi_n(x)\right| + \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)d\Phi_n(x) - \int_a^b f(x)d\Phi_n(x)\right|.$$

У цій нерівності перший і третій доданки справа внаслідок теореми про середнє не перевищують εC, а другий доданок на підставі доведеної вище рівності для східчастих функцій прямує до нуля при $n \to \infty$. Оскільки ж $\varepsilon > 0$ можна вибрати довільно, то теорема доведена. ■

Ця теорема є правильною і для інтегралів Лебега-Стільтьєса.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Доведіть наступні властивості функцій з обмеженою зміною на відрізку $[a;b]$:

   а). $V_a^b[\alpha f] = |\alpha| \cdot V_a^b[f]$; б). $V_a^b[f+g] \le V_a^b[f] + V_a^b[g]$.

2. Для функції $f(x)$ з обмеженою зміною на відрізку $[a,b]$ обґрунтуйте рівність $V_a^b[f] = V_a^c[f] + V_c^b[f]$, де $a < c < b$.

3. Доведіть неперервність функції $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x},\ x \ne 0,\ f(0) = 0$, на відрізку $\left[0; \dfrac{2}{\pi}\right]$ та, розбивши цей відрізок на n частин точками

$$0 < \frac{2}{(2n-1)\pi} < \frac{2}{(2n-3)\pi} < \ldots < \frac{2}{3\pi} < \frac{2}{\pi},$$

покажіть, що на ньому варіація функції $f(x)$ є нескінченною.

4. Намалюйте графіки функцій $f(x)$ та, скориставшись ними, знайдіть варіації цих функцій на їх областях визначення, якщо:

а). $f(x)=\begin{cases} -3, & x=-3, \\ 1+x, & x\in(-3;-1), \\ x^2-1, & x\in[-1;1]. \end{cases}$ б). $f(x)=\begin{cases} 2-x^2, & x\in(-2;1), \\ 5, & x=1, \\ 3-2x, & x\in(1;3]. \end{cases}$

5. Обґрунтуйте невід'ємність на монотонність варіаційної функції $v(x)$ на відрізку $[a;b]$.

6. Знайдіть варіаційні функції $v(x)$ та намалюйте графіки функцій $f(x)$ та $v(x)$, якщо:

а). $f(x)=\begin{cases} -1, & x=-3, \\ 1-x, & x\in(-3;-1), \\ x^2-2, & x\in[-1;1]. \end{cases}$ б). $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x\in(-2;1), \\ 2, & x=1, \\ 1+2x, & x\in(1;3]. \end{cases}$

7. Доведіть, що функція $\varphi(x)=v(x)-f(x)$ є монотонно неспадною.

8. Обґрунтуйте, що кожну абсолютно неперервну функцію можна подати як різницю монотонно неспадних абсолютно неперервних функцій.

9. Для функцій із вправи 6 знайдіть функцію $\varphi(x)=v(x)-f(x)$ та намалюйте її графік.

10. Обчисліть $\int\limits_0^2 x d\Phi(x)$, якщо $\Phi(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x\in[0;1], \\ x+\sqrt{x}, & x\in(1;2). \end{cases}$.

Типові завдання для контрольної роботи №1
з функціонального аналізу та теорії міри

1. Обґрунтувати вимірність та знайти плоску міру Лебега множини, обмеженої заданими неперервними лініями.
2. Намалювати графік та дослідити за означенням на вимірність задану кількома аналітичними виразами функцію.
3. Обґрунтувати інтегровність за Лебегом заданої на множині скінченної міри функції та обчислити її інтеграл Лебега по цій множині зведенням до інтегрування за Ріманом.
4. Для заданої кількома аналітичними виразами функції знайти її варіаційну функцію та побудувати графіки обох таких функцій.

Варіант №__

1. Обґрунтувати вимірність та знайти плоску міру Лебега множини, обмеженої лініями $y = 2 - x - x^2$ та $y = x - 1$.
2. Намалювати графік та дослідити за означенням на вимірність функцію $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, x \in (-2;1), \\ -1, \quad x = 1, \\ 3 - x, x \in (1;3]. \end{cases}$.
3. Обґрунтувати інтегровність за Лебегом та обчислити інтеграл Лебега по відрізку $[0;1]$ функції

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}, x \in [0,1] \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{4n} \right\}, \\ \sin^7 x, x \in \left\{ \dfrac{\pi}{4n} \right\}, \end{cases} n \in N. .$$

4. Для функції із завдання 2 знайти її варіаційну функцію та побудувати графік знайденої функції.

Список рекомендованої літератури

1. *Дороговцев А.Я., Константинов О.Ю., Курченко О.О., Івасишен С.Д.* Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу «Теорія міри та інтеграла» для студентів спеціальності «математика». – К.: КДУ, 1991. – 76с.
2. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
3. *Маслюченко В.К.* Елементи теорії множин: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 132с.
4. *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Філіпчук О.І.* Задачі та теореми загальної теорії функцій: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2006. – 80с.
5. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480с.
6. *Очан Ю.С.* Сборник задач по функциональному анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
7. *Федак І.В.* Елементи теорії міри та інтеграла Лебега. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 168с.
8. *Федак І.В.* Функціональний аналіз. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 120с.
9. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 290с.
10. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.* Интеграл, мера, производная. – М.: Наука, 1967. – 220с.