Федак І.В.

Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри

Навчальний посібник

для студентів спеціальності «Прикладна математика»

Частина 1

Вимірні множини та вимірні функції

Івано-Франківськ

2020

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73
Ф75

Рекомендовано вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» як навчальний посібник для студентів напряму підготовки "Прикладна математика"

Рецензенти:

Загороднюк А.В., зав. кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», доктор фізико-математичних наук, професор

Заторський Р.А., зав. кафедри диференціальних рівнянь та прикладної математики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», доктор фізико-математичних наук, професор

Федак І.В.

Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч.1. Вимірні множини та вимірні функції. – Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. – 52с.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми з дисципліни «Функціональний аналіз та теорія міри» для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «Прикладна математика» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Частина 1 містить основні поняття та теореми про множини, їх міри та вимірні функції, вправи для самостійного розв'язування.

Може бути використаний студентами напрямів підготовки «Математика», «Середня освіта (математика)», «Статистика» при вивченні дисциплін «Теорія міри та інтеграла Лебега», «Функціональний аналіз».

ЗМІСТ

Лекція №1.

Множини та їх потужності. Системи множин

1.1 Множини та операції над ними.
1.2. Зліченні та незліченні множини. Потужність множини.
1.3. Канторова множина та її властивості.
1.4. Поняття про системи множин.

1.1. *Множини та операції над ними*

Поняття множини – одне з основних у математиці. Воно настільки загальне, що не можна дати йому означення, яке не зводилось би до заміни слова «множина» його синонімом.

Як правило, множини позначають великими, а їх елементи – малими буквами латинського алфавіту. Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A. Якщо ж елемент a не належить множині A, то записують $a \notin A$.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається ***порожньою*** і позначається символом $\varnothing$.

Якщо всі елементи множини A є також елементами множини B, то множина A називається ***підмножиною*** множини B, і записується $A \subset B$, або ж $B \supset A$. Якщо ж, крім $A \subset B$, також $B \subset A$, то множини A та B ***рівні***: $A = B$.

Якщо A та B – дві довільні множини, то їх ***об'єднанням*** називається множина $A \bigcup B$, яка складається з усіх елементів, які належать хоч одній з множин A та B: $A \bigcup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Перетином множин A та B називається множина $A \bigcap B$, яка складається з усіх елементів, які входять у кожну з множин A та B: $A \bigcap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Аналогічно визначаються також операції об'єднання та перетину нескінченної кількості множин.

Безпосередньо з означення випливає, що операції об'єднання та перетину множин ***комутативні*** та ***асоціативні***:

$$A \bigcup B = B \bigcup A, \ (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C),$$
$$A \bigcap B = B \bigcap A, \ (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C).$$

Крім того, вони ***дистрибутивні*** одна відносно одної:

$$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C),$$
$$(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C).$$

$$\bullet \quad x\in(A\bigcup B)\bigcap C\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge x\in C\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\in C)\Leftrightarrow x\in(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C),$$
$$x\in(A\bigcap B)\bigcup C\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee x\in C\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in B\vee x\in C)\Leftrightarrow x\in(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C).\ \blacksquare$$

Різницею множин A та B називається множина $A\setminus B,$ яка складається з усіх елементів множини $A,$ які не належать множині B: $A\setminus B=\{x:x\in A\wedge x\notin B\}.$ Якщо $A\subset B,$ то $A\setminus B=\varnothing.$

У теорії міри важливу роль відіграє й ***симетрична різниця*** множин $A\vartriangle B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A),$ яку ще можна записати у вигляді: $A\vartriangle B=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B).$

Таким чином, симетрична різниця двох множин складається із всіх елементів їх об'єднання, які не належать перетину цих множин.

У багатьох задачах математики доводиться розглядати підмножини однієї і тієї ж множини S. Різницю $S\setminus A$ називають ***доповненням*** множини A і позначають $CA,$ або $\overline{A}.$

Для об'єднань та перетинів довільної кількості множин A_α справедливі наступні рівності $\overline{\bigcup\limits_\alpha A_\alpha}=\bigcap\limits_\alpha\overline{A_\alpha}$ та $\overline{\bigcap\limits_\alpha A_\alpha}=\bigcup\limits_\alpha\overline{A_\alpha}.$

$$\bullet \quad x\in\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}\Leftrightarrow x\notin\bigcup_\alpha A_\alpha\Leftrightarrow\forall\alpha\ \ x\notin A_\alpha\Leftrightarrow\forall\alpha\ \ x\in\overline{A_\alpha}\Leftrightarrow x\in\bigcap_\alpha\overline{A_\alpha}\ ;$$
$$x\in\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha}\Leftrightarrow x\notin\bigcap_\alpha A_\alpha\Leftrightarrow\exists\alpha:x\notin A_\alpha\Leftrightarrow\exists\alpha:x\in\overline{A_\alpha}\Leftrightarrow x\in\bigcup_\alpha\overline{A_\alpha}.\ \blacksquare$$

Ці рівності лежать в основі ***принципу двоїстості:*** з будь якої теореми, яка стосується підмножин фіксованої множини, можна отримати двоїсту теорему, замінивши всі множини їх доповненнями, об'єднання множин – перетинами, а перетини – об'єднаннями.

У теорії інтегрування велике значення має ще одна операція – ***прямий добуток*** множин: $A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}.$

Прямий добуток множин $A_1, A_2, ..., A_n$ визначають як

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}.$$

У випадку, коли $A_1 = A_2 = ... = A_n = A,$ прямий добуток таких множин позначають A^n.

1.2. ***Зліченні та незліченні множини. Потужність множини***

За кількістю елементів множини поділяються на ***скінченні*** та ***нескінченні*** множини. Вилучаючи по одному елементи скінченної множини, ми на деякому кроці отримаємо порожню множину. А для нескінченної множини ми у такий спосіб на жодному кроці не зможемо отримати порожньої множини.

Серед нескінченних множин важливу роль відіграють ***зліченні*** множини, тобто множини, між елементами яких і елементами множини натуральних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність – бієкцію. Іншими словами, множина називається ***зліченною***, якщо її елементи можна виписати у вигляді нескінченної послідовності: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Найпростішим прикладом зліченної множини є множина натуральних чисел. Зліченними є також множини парних та непарних натуральних чисел, множина цілих чисел. Наприклад, всі цілі числа можна виписати у такій послідовності: $0, 1, -1, 2, -2, ..., n, -n, ...$

Зліченною є й ***множина раціональних чисел***.

● Кожне раціональне число записується у вигляді нескоротного дробу $\frac{p}{q}$, $p \in Z$, $q \in N$. Назвемо висотою такого дробу суму $|p| + q$. Оскільки дробів із кожною конкретною висотою є скінченна кількість, то всі такі дроби можна виписати у нескінченну послідовність за зростанням їхньої висоти. ■

Теорема. Об’єднання довільної скінченної або зліченної кількості зліченних множин є зліченною множиною.

● Зауважимо, що таке об’єднання є нескінченною множиною, і випишемо елементи цього об’єднання у вигляді нескінченної таблиці:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Тут у першому рядку записані всі елементи першої множини, у другому – другої, і так далі. Елементи цієї таблиці випишемо за зростанням суми їх індексів у наступному порядку: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, \ldots,$ причому елементи, які повторюються, повторно записувати не будемо. Інакше, виписуємо їх по діагоналях таблиці, перпендикулярних до головної діагоналі. Оскільки на кожній такій діагоналі знаходиться скінченна кількість елементів, то при цьому кожен елемент об'єднання множин отримає свій номер. ■

Проте існують нескінченні множини, які не є зліченними. Їх називають ***незліченними*** множинами. Важливим прикладом незліченної множини є ***множина дійсних чисел відрізка*** $[0;1]$.

● Припустивши, що множина дійсних чисел такого відрізка – зліченна, випишемо їх всіх у вигляді послідовності нескінченних десяткових дробів:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots, \\ \alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots, \\ \alpha_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

де через a_{kn} позначені відповідні десяткові цифри чисел α_k. Розглянемо тепер число $\beta = 0, b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots,$ в якому жодна з цифр b_n не є ні нулем, ні дев'яткою, і, крім того, $b_n \neq a_{nn}$ для всіх $n \in N$. Зрозуміло, що $\beta -$ дійсне число з відрізка $[0;1]$, яке не співпадає з жодним із чисел α_n. А це суперечить тому, що всі дійсні числа цього відрізка були виписані. Отримана суперечність доводить незліченність множини таких чисел. ■

Незліченною є і ***множина ірраціональних чисел*** відрізка $[0;1]$.

● Припустивши протилежне, ми отримали би, що її об'єднання зі зліченною множиною раціональних чисел цього відрізка мало би бути зліченною множиною. А це суперечить незліченності множини всіх дійсних чисел відрізка $[0;1]$. ■

Дві множини A та B, між елементами яких можна встановити взаємно однозначну відповідність, називаються ***еквівалентними***: $A \sim B$. Про такі множини кажуть, що вони мають ***однакову потужність*** і записують $p(A)=p(B)$.

Якщо ж множина A містить підмножину $A_1 \sim B$, а множина B не містить підмножини $B_1 \sim A$, то вважають, що ***потужність множини*** A ***більша за потужність множини*** B, і записують $p(A)>p(B)$, або ж $p(B)<p(A)$.

Зауважимо, що якщо при цьому і у множині B знайшлася б підмножина $B_1 \sim A$, то множини A та B були би еквівалентними.

Звідси випливає такий важливий ***висновок*****:** Якщо $A \subset B \subset C$ і $p(A)=p(C)=p$, то і $p(B)=p$.

Дві скінченні множини еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову кількість елементів. Тому потужністю таких множин вважають кількість їх елементів.

Будь-які дві зліченні множини еквівалентні між собою, бо кожна з них еквівалентна множині натуральних чисел. Отже, всі зліченні множини мають однакову потужність.

Потужність нескінченної множини більша за потужність скінченної множини, а потужність незліченної множини більша за потужність зліченної множини.

Потужність множини всіх точок відрізка $[0;1]$ називають ***потужністю континууму*** і позначають буквою c.

Об'єднання довільної скінченної або зліченної кількості множин потужності континууму також має потужність континууму.

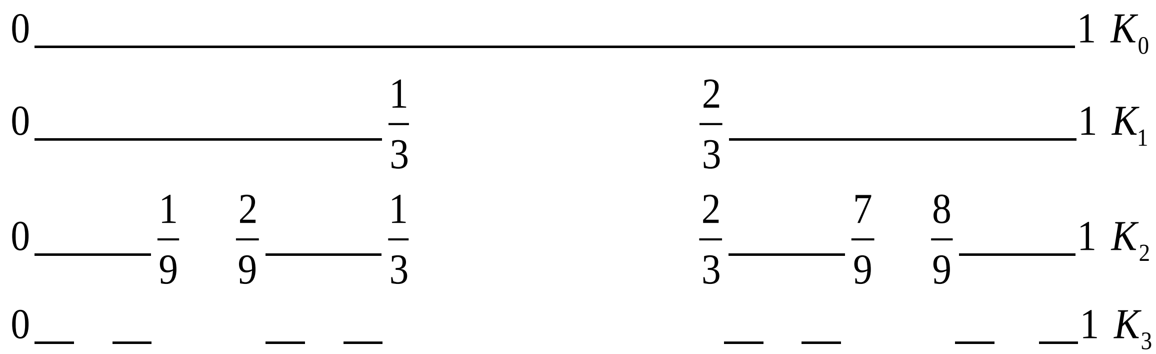
Проте існують множини й більшої потужності.

Справедлива наступна ***теорема***: потужність множини M всіх підмножин множини M більша, ніж потужність множини M. Символічно записують $p\left(M\right)=2^{p(M)}$.

Для зліченних множин $p\left(M\right)=c$, а потужність $f=2^{c}$ всіх підмножин відрізка $\left[0;1\right]$ називають ***потужністю гіперконтинууму***.

1.3. ***Канторова множина та її властивості***

Розглянемо на числовій прямій множину $K_0=\left[0;1\right]$. Поділимо цей відрізок на три рівні частини і вилучимо з нього середній інтервал $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. У результаті отримаємо множину K_1, яка складається з двох відрізків. Кожен з них знову ділимо на три рівні частини і вилучаємо середні інтервали, отримуючи таким чином множину K_2, яка складається вже з чотирьох відрізків. За аналогічним принципом дістаємо з множини K_2 множину K_3:



Продовжуючи цей процес до нескінченності, отримаємо вкладені одна в одну множини $K_n,\ n\in Z_+$. Множина $K=\bigcap_{n=0}^{\infty}K_n$ називається ***канторовою множиною***.

Представляючи числа відрізка $\left[0;1\right]$ у трійковій системі числення, отримаємо, що кожному елементу $x\in K$ у цій системі взаємно однозначно відповідає число $\alpha=0,a_1a_2...a_n...$, в якому a_n набувають лише значень 0 або 2. Замінивши у ньому всі двійки одиницями, отримаємо двійковий запис деякого числа $\beta=0,b_1b_2...b_n...$ з відрізка

$[0;1]$. Отже, існує бієкція між точками множини K і всіма точками відрізка $[0;1]$. Це означає, що канторова множина є незліченною.

Зауважимо, що при цьому сума довжин інтервалів, які викидалися при побудові канторової множини, дорівнює

$$\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+\ldots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots=1.$$

1.4. ***Поняття про системи множин***

Множини, елементи яких є також множинами, називаються ***системами множин***. Прикладом системи множин є, зокрема, множина всіх підмножин заданої множини.

Для позначення систем множин часто використовують великі букви готичного алфавіту. Ми надалі такі системи множин будемо позначати великими латинськими буквами з хвилькою над ними.

У теорії міри надзвичайно важливу роль відіграють кільця, півкільця та алгебри множин.

Непорожню систему множин K називають ***кільцем множин***, якщо разом з множинами A та B вона містить їх перетин $A\bigcap B$ та симетричну різницю $A\vartriangle B$.

Безпосередньо з означення випливає, що кільце множин містить також об’єднання та різницю таких множин, бо

$$A\bigcup B=(A\vartriangle B)\vartriangle(A\bigcap B),\qquad A\setminus B=A\vartriangle(A\bigcap B).$$

Крім того, разом з множинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ до кільця множин будуть належати і множини $C=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ та $D=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

Отже, кільце множин є замкнутим відносно операцій скінченого числа об’єднань та перетинів, різниці та симетричної різниці множин. Також воно містить порожню множину, як різницю $A\setminus A$.

Якщо ж разом з послідовністю множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ до кільця належать також множини $C=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ чи $D=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, то таке кільце називається $\sigma-$***кільцем*** чи $\delta-$***кільцем*** відповідно.

Множина E називається ***одиницею системи множин***, якщо для будь-якої множини A цієї системи виконується рівність $A \bigcap E = A$. Це означає, що одиниця системи множин містить як підмножини всі множини цієї системи.

Кільце множин з одиницею називається ***алгеброю множин***. А $\sigma-$кільця та $\delta-$кільця з одиницею називаються ***$\sigma-$алгебрами*** та ***$\delta-$алгебрами множин*** відповідно.

Внаслідок рівностей $\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha}$ та $\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$ кожна $\sigma-$алгебра є $\delta-$алгеброю, а кожна $\delta-$алгебра є $\sigma-$алгеброю.

Що ж стосується кілець, то кожне $\sigma-$кільце є $\delta-$кільцем, але не кожне $\delta-$кільце є $\sigma-$кільцем.

Найпростішим прикладом алгебри множин є система $A = \{\varnothing, A\}$ з одиницею $E = A$. Алгебру множин утворює і множина всіх підмножин заданої множини M. Її одиницею є сама множина M.

А ось система всіх обмежених підмножин числової прямої утворює кільце множин без одиниці.

Безпосередньо з означення кільця множин випливає, що перетин будь-якої кількості кілець множин є кільцем множин.

Розглядаючи перетин всіх кілець множин, які містять деяку задану систему множин G, отримаємо кільце $K(G)$, яке називають ***мінімальним кільцем, породженим системою*** G. Аналогічно отримуємо і ***мінімальну алгебру*** $A(G)$, ***породжену системою*** G.

Множини, які належать мінімальній $\sigma-$алгебрі над сукупністю всіх проміжків числової прямої, називають ***борелівськими***.

Система множин G називається ***півкільцем множин***, якщо вона містить порожню множину, замкнута відносно утворення перетинів і з належності множин A та A_1 до G та включення $A_1 \subset A$ випливає можливість представлення множини A у вигляді $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, де A_i – попарно неперетинні множини із G, перша з яких співпадає з A_1.

Кожне кільце множин є півкільцем, бо із включення $A_1 \subset A$ випливає представлення $A = A_1 \bigcup A_2$, де $A_2 = A \setminus A_1$. Прикладом півкільця множин, яке не є кільцем, є сукупність всіх інтервалів (a,b), відрізків $[a,b]$, пів сегментів $[a,b)$ та $(a,b]$ числової прямої, включаючи порожні інтервали (a,a) та одноточкові множини $[a,a]$.

Справедливе наступне важливе в теорії міри твердження.

Теорема. Мінімальне кільце $K(G)$, породжене півкільцем G, складається із тих множин A, які допускають скінченні розклади

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \text{ де } A_i \in G.$$

Прямим добутком систем множин $G_1, G_2, ..., G_n$ називають систему множин

$$\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n = \left\{ A_1 \times A_2 \times ... \times A_n : A_1 \in G_1, A_2 \in G_2, ..., A_n \in G_n \right\}.$$

Відзначимо, що прямий добуток півкілець множин теж є півкільцем множин. Але прямий добуток кілець чи алгебр множин не завжди є кільцем чи алгеброю множин відповідно.

Вправи до лекції №1

1. Обґрунтуйте рівності множин:
   а) $(A \bigcup B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcup (B \setminus C)$;
   б) $(A \bigcap B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcap (B \setminus C)$;
   в) $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$;
   г) $A \setminus (B \bigcap C) = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$;
   д) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \bigcup C)$;
   е) $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$.
2. Доведіть, що зліченними є такі множини:
   а) множина всіх інтервалів на числовій прямій з раціональними кінцями;
   б) множина всіх многочленів із раціональними коефіцієнтами.

3. Встановіть бієкцію між множинами $A=[a,b]$ та $B=[c,d]$:

   а) з допомогою неперервної функції;

   б) геометрично.

4. Обґрунтуйте, що $[a,b]\sim(a,b)$ та встановіть бієкцію між цими множинами.

5. Встановіть бієкцію між множинами:

   а) $A=[0,\pi)$, $B=[0,+\infty)$;

   б) $A=(-\infty,+\infty)$, $B=[0;1]$;

   в) $A=[0,+\infty)$, $B=(-\infty,+\infty)$;

   г) $A=[1,3]$, $B=[2,4]\cup[5,6]$.

6. Перевірте, чи належить число $x=\frac{1}{4}$ до канторової множини K.

7. Доведіть, що якщо $p(A)=n$, то потужність множини всіх підмножин множини A дорівнює 2^n.

8. Доведіть, що об'єднання довільної скінченної або зліченної кількості множин потужності континууму також має потужність континууму.

9. Наведіть приклади:

   а) півкільця підмножин множини $X=\{1,2,3\}$, яке не є кільцем;

   б) двох кілець множин, об'єднання яких не є кільцем.

10. Опишіть всі алгебри множин, які можна отримати з елементів множини всіх підмножин множини $X=\{1,2,3\}$.

Лекція №2.

Множини у метричних просторах

2.1. Означення та приклади метричних просторів.
2.2. Класифікація точок множини. Сепарабельні простори.
2.3. Відкриті і замкнені множини та їх властивості.
2.4. Топологічні простори. Компактність.

2.1. ***Означення та приклади метричних просторів***

Нехай X – множина елементів довільної природи. Якщо для будь-яких елементів x та y цієї множини визначена дійсна функція $\rho(x,y)$, яка задовольняє аксіоми:

1) $\rho(x,y)\geq 0$, причому $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2) ***аксіома симетрії*** $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) ***нерівність трикутника*** $\rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$,

то пару (X,ρ) називають ***метричним простором***, а функцію $\rho(x,y)$ – ***метрикою*** або ***відстанню***.

Найпростішим прикладом метричного простору є множина елементів довільної природи з метрикою $\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$ Його називають ***простором ізольованих точок***.

Розглянемо інші основні ***приклади метричних просторів***:

1. R^1. $X=R,\ \rho(x,y)=|x-y|$.

2. R^n. $X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\},\ \rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$.

3. R_1^n. $X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\},\ \rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$.

4. R_0^n. $X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\},\ \rho(x,y)=\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k-y_k|$.

5. R_p^n. $X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\},\ \rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p\geq 1$.

6. $C[a,b]$. X – множина неперервних на $[a,b]$ функцій,

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

7. $C_2[a,b]$. $X-$ множина неперервних на $[a,b]$ функцій,

$$\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}.$$

8. $C_1[a,b]$. $X-$ множина неперервних на $[a,b]$ функцій,

$$\rho(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt.$$

9. $C_p[a,b]$. $X-$ множина неперервних на $[a,b]$ функцій,

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1.$$

10. l_2. $X=\{(x_1,x_2,...,x_k,...)\}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^{\ 2}<\infty$, $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2}$.

11. l_1. $X=\{(x_1,x_2,...,x_k,...)\}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty$, $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|$.

12. l_p. $X=\{(x_1,x_2,...,x_k,...)\}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$,

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1.$$

13. m. $X=\{(x_1,x_2,...,x_k,...)\}$, $\sup\limits_{k\in N}|x_k|<\infty$, $\rho(x,y)=\sup\limits_{k\in N}|x_k-y_k|$.

Обґрунтуємо виконання аксіом відстані у деяких із них.

1. Простір R^1.

● Виконання перших двох аксіом відстані очевидне, а третю отримуємо з нерівності: $|x-z|=|(x-y)+(y-z)|\le|x-y|+|y-z|$. ■

2. Простір R^n.

● Виконання перших двох аксіом також очевидне, а для доведення третьої позначимо $x_k-y_k=a_k$ та $y_k-z_k=b_k$. Тоді $x_k-z_k=a_k+b_k$, і нерівність трикутника набуває вигляду

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}.$$

Після піднесення до квадрату вона зводиться до відомої ***нерівності Коші-Буняковського*** $\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2,$ яка випливає з недодатності дискримінанта квадратичної функції

$$f(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\lambda+b_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\lambda^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\cdot\lambda+\sum_{k=1}^{n}b_k^2,$$

що при всіх $\lambda\in R$ набуває лише невід'ємних значень. А якщо всі $a_k=0,$ то така нерівність перетворюється в очевидну рівність. ■

3. Простір $C[a,b]$.

● Існування максимуму $\max\limits_{t\in[a,b]}\left|x(t)-y(t)\right|$ та виконання перших двох аксіом відстані випливають з властивостей неперервних функцій. А оскільки при кожному $t\in[a,b]$ виконується нерівність $\left|x(t)-z(t)\right|\le\left|x(t)-y(t)\right|+\left|y(t)-z(t)\right|\le\rho(x,y)+\rho(y,z),$ то перейдемо в ній до максимуму і отримуємо також виконання третьої аксіоми. ■

2.2. ***Класифікація точок множини. Сепарабельні простори***

Замкненою кулею $K[x_0,r]$ з ***центром*** x_0 і ***радіусом*** r у метричному просторі (X,ρ) називають множину точок $x\in X,$ які задовольняють нерівність $\rho(x,x_0)\le r.$

Відкритою кулею $K(x_0,r)$ з ***центром*** x_0 і ***радіусом*** r у метричному просторі (X,ρ) називають множину точок $x\in X,$ які задовольняють нерівність $\rho(x,x_0)<r.$

Відкрита куля радіуса ε з центром у точці x_0 називається $\varepsilon-$***околом*** точки x_0 і позначається $O_\varepsilon(x_0).$

Нехай тепер M – довільна множина метричного простору $(X,\rho).$

Точка x_0 називається ***внутрішньою точкою*** множини $M,$ якщо існує такий окіл цієї точки, який повністю входить у множину $M.$

Точка x_0 називається ***ізольованою точкою*** множини M, якщо існує такий окіл цієї точки, в якому немає інших точок з множини M, крім точки x_0.

Цілком зрозуміло, що як ізольована, так і внутрішня точка множини належать цій множині.

Точка x_0 називається ***точкою дотику*** множини M, якщо у кожному околі цієї точки є хоч один елемент з множини M. Усі точки множини M є її точками дотику, але можуть існувати точки дотику, які не належать до цієї множини.

Сукупність усіх точок дотику множини M називається ***замиканням*** цієї множини і позначається $\left[M\right]$.

Наприклад, замиканням множини раціональних чисел у просторі R^1 є множина всіх дійсних чисел.

Точка x_0 називається ***граничною точкою*** множини M, якщо у кожному околі цієї точки є хоч один елемент з множини M, відмінний від x_0. Зрозуміло, що при цьому в кожному такому околі буде знаходитися безліч елементів з даної множини, хоч сама точка x_0 не обов’язково повинна належати до M. Очевидно, що всяка гранична точка множини є точкою дотику, але не всяка точка дотику є граничною.

Точка x_0 називається ***границею послідовності*** $\left(x_n\right)$ точок метричного простору $\left(X,\rho\right)$, якщо у кожному околі точки x_0 містяться всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера. З використанням математичної символіки це означення можна записати так: $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists N=N\left(\varepsilon\right):\ \forall n>N\ \ \rho\left(x_n,x_0\right)<\varepsilon.$

Для того, щоб точка x_0 була точкою дотику множини M, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність $\left(x_n\right)$ точок множини M, яка збігається до x_0. А для того, щоб вона x_0 була граничною точкою множини M, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність $\left(x_n\right)$ різних точок множини M, яка збігається до x_0.

Множина A називається ***щільною*** у множині B, якщо $[A] \supset B$, ***скрізь щільною*** у метричному просторі (X, ρ), якщо $[A] = X$.

Наприклад, за теоремою Дедекінда такою є множина раціональних чисел у просторі R^1.

Метричні простори, в яких існує зліченна скрізь щільна множина, називаються ***сепарабельними*** метричними просторами.

Зокрема, зі зліченності множини раціональних чисел випливає сепарабельність простору R^1.

У просторах R_p^n, $p \geq 1$, $p = 0$, зліченні скрізь щільні множини утворюють елементи $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ з раціональними координатами.

У просторах $C[a,b]$ та $C_p[a,b]$, $p \geq 1$, такі множини складаються з многочленів із раціональними коефіцієнтами.

У просторах l_p, $p \geq 1$, ними є сукупності послідовностей $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$, у кожній з яких всі елементи раціональні і лише скінченна кількість таких елементів відмінна від нуля.

Тому кожен з цих просторів є сепарабельним. Але, наприклад, простір m обмежених послідовностей не є сепарабельним.

● Справді, розглянемо у цьому просторі лише послідовності, що складаються з нулів та одиниць. Вони утворюють незліченну множину, рівну за потужністю множині дійсних чисел відрізка $[0;1]$, записаних у двійковій системі числення. Відстань між довільними двома такими послідовностями дорівнює 1. Оточимо кожну точку цієї множини замкненою кулею радіуса $r < 0,5$. Оскільки такі кулі не перетинаються, то у кожній з них має бути принаймні по одному елементу скрізь щільної в m множини. Отже, жодна скрізь щільна множина у цьому просторі не є зліченною. ■

2.3. ***Відкриті і замкнені множини та їх властивості***

Множина M, яка співпадає зі своїм замиканням, називається ***замкненою***. Безпосередньо з властивостей замикання випливає, що замикання будь-якої множини є замкнена множина.

У довільному метричному просторі (X,ρ) множини $\varnothing$ та X замкнені. Замкненими у ньому будуть і всі множини зі скінченною кількістю елементів та замкнені кулі цього простору.

У просторі R^1 замкненими множинами є, зокрема, будь-які відрізки та об'єднання скінченної кількості відрізків.

Доведемо більш загальні властивості замкнених множин.

Теорема 1. Перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкнена множина.

● Нехай $F=\bigcap_{\alpha}F_{\alpha}$ – перетин замкнених множин F_{α}. Якщо x_0 – точка дотику множини F, то у будь-якому околі цієї точки є хоч одна точка з множини F, яка за означенням перетину належатиме тоді кожній з множин F_{α}. Отже, точка x_0 – є точкою дотику для всіх множин F_{α}. А оскільки вони замкнені, то x_0 належатиме кожній з цих множин, а значить $x_0\in F$. Звідси випливає, що F містить всі свої точки дотику і є замкненою.

Нехай тепер $F=\bigcup_{k=1}^{n}F_k$ – об'єднання скінченної кількості замкнених множин. Якщо точка $x_0\notin F$, то вона не належить жодній з множин F_k, $k=\overline{1,n}$. А оскільки ці множини замкнені, то вона не є точкою дотику для жодної з них. Тому для кожного k існує такий окіл $O_{\varepsilon_k}(x_0)$, в якому немає інших точок з множини F_k. Зі скінченної кількості таких околів виберемо найменший, в якому не виявиться жодної точки з множини F. Тому x_0 не є точкою дотику для F. Отже, F містить всі свої точки дотику і є замкненою. ■

Зауважимо, що об'єднання нескінченної кількості замкнених множин не обов'язково замкнена множина.

Множина M, всі точки якої є внутрішніми, називається ***відкритою***. У довільному метричному просторі (X,ρ) множини $\varnothing$ та X відкриті. Крім них, інших множин, які би одночасно були і відкритими, і замкненими, не існує.

Відкритими множинами є і всі відкриті кулі довільного метричного простору. А у просторі R^1 кожна не порожня відкрита множина є об'єднанням скінченної або зліченної кількості інтервалів, які попарно не перетинаються.

Звідси, зокрема, випливає, що кожна не порожня відкрита множина на числовій прямій має потужність континууму.

Розглянемо ще один важливий ***клас відкритих множин***: Нехай $f(x)$ – неперервна функція, яка набуває дійсних значень. Тоді при кожному $c \in R$ множина $M = \{x : f(x) < c\}$ відкрита.

● Справді, якщо $x_0 \in M$, то $f(x_0) < c$. Тоді з неперервності функції $f(x)$ випливає існування такого околу $O_\varepsilon(x_0)$, що для всіх $x \in O_\varepsilon(x_0)$ виконується нерівність $f(x) < c$. А отже, $O_\varepsilon(x_0) \subset M$. Тому ця множина відкрита. ■

Теорема 2. Для того, щоб множина M була відкрита, необхідно і достатньо, щоб її доповнення $X \setminus M$ було замкненою множиною.

● Якщо M – відкрита множина, то кожна її точка x має окіл, який повністю належить до M, а отже, не містить точок із $X \setminus M$. Тому кожна з таких точок x не є точкою дотику для $X \setminus M$. Отже, $X \setminus M$ містить всі свої точки дотику і є замкненою. Навпаки, якщо $X \setminus M$ замкнена, то жодна точка із M не є її точкою дотику, а отже, має окіл, який повністю належить до M. Тому всі точки множини M внутрішні, і ця множина є відкритою. ■

Звідси, зокрема, випливає ***наслідок***: кожна замкнена множина у просторі R^1 утворюється викиданням із числової прямої скінченної або зліченної кількості інтервалів, які попарно не перетинаються.

Ще один важливий наслідок з теорем 1 та 2 отримуємо на основі принципу двоїстості:

Теорема 3. Об'єднання будь-якої кількості та перетин скінченного числа відкритих множин є відкрита множина.

Зауважимо, що перетин нескінченної кількості відкритих множин не обов'язково буде відкритою множиною.

Далі розглянемо важливе узагальнення метричних просторів.

2.4. *Топологічні простори. Компактність*

Нехай X – множина елементів довільної природи. Виділимо систему τ її підмножин, які будемо називати ***відкритими множинами***, так, щоб виконувалися умови:

1) $X \in \tau, \varnothing \in \tau$;

2) Об'єднання будь-якої кількості та перетин скінченного числа множин із τ належать до τ.

Систему множин τ називають ***топологією***, а пару (X,τ) – ***топологічним простором***.

Доповнення до відкритих множин топологічного простору називають ***замкненими множинами***. Зокрема, з принципу двоїстості випливатимуть такі властивості: 1) множини X та $\varnothing$ замкнені; 2) перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкнена множина.

Кожен метричний простір є топологічним простором. Але існують топологічні простори, які не є метричними. Наприклад, якщо $X = \{a,b\}$, а система τ складається з множин $X, \varnothing, \{a\}$. Такий топологічний простір часто називають ***зв'язною двоточкою***.

Околом точки x_0 топологічного простору (X,τ) називають всяку відкриту множину, яка містить цю точку.

Якщо в кожному околі точки x_0 є принаймні одна точка множини M, відмінна від x_0, то x_0 називають ***граничною точкою*** цієї множини. На відміну від метричних просторів, тут не завжди в околах граничної точки буде знаходитися безліч точок множини M.

Відповідно, точка x_0 називається ***точкою дотику*** множини M, якщо кожен її окіл містить хоч одну точку з цієї множини. Сукупність усіх точок дотику множини M, так само як і в метричних просторах, називають ***замиканням*** множини M.

Множина M називається ***скрізь щільною*** у топологічному просторі (X,τ), якщо $[M] = X$. Так само, як і метричні простори, топологічні простори, які містять зліченну скрізь щільну множину, називаються ***сепарабельними топологічними просторами***.

З відкритими множинами пов'язане й поняття компактності. Тут важливу роль відіграє ***лема Гейне-Бореля:*** З будь-якого покриття відрізка $[a,b]$ інтервалами можна вибрати скінченне підпокриття.

Відзначимо, що у ній інтервали можна замінити довільними відкритими множинами.

Множина M метричного простору (X,ρ) називається ***компактною***, якщо із всякого її покриття відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття.

Зокрема, якщо з кожного покриття множини X відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття, то такий метричний простір називають ***компактним***.

Таким чином, лема Гейне-Бореля стверджує, що у просторі R^1 відрізок – компактна множина. Зауважимо, що справедливим буде і загальніше твердження: у просторі R^n всяка замкнена обмежена множина є компактною. Також у компактному просторі всяка нескінченна множина має принаймні одну граничну точку.

Множина M метричного простору (X,ρ) називається ***передкомпактною*** множиною, якщо множина $[M]$ є компактною.

У просторі R^n передкомпактність множини рівносильна її обмеженості. А у просторі l_2 обмеженості уже буде замало.

Сім'я Φ функцій φ, визначених на відрізку $[a,b]$, називається ***рівномірно обмеженою***, якщо існує таке число K, що $|\varphi(x)| \le K$ для всіх $x \in [a,b]$ і всіх $\varphi \in \Phi$.

Сім'я $\Phi = \{\varphi\}$ називається ***одностайно неперервною*** на відрізку $[a,b]$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $\varphi \in \Phi$, і всіх $x_1, x_2 \in [a,b]$, таких що $\rho(x_1, x_2) < \delta$, $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$.

Теорема Арцела. Для того, щоб сім'я функцій $\Phi = \{\varphi\}$ була передкомпактною у просторі $C[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб вона була рівномірно обмеженою і одностайно неперервною на $[a,b]$.

Вправи до лекції №2

1. Перевірте виконання аксіом відстані у просторі ізольованих точок та у метричних просторах R_1^n, R_0^n, $C_1[0;1]$, $C_2[0;1]$, l_1, l_2, m.
2. Чи можна на числовій прямій задати відстань формулою: а) $\rho(x,y)=\sqrt{x-y}$, б) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$?
3. Охарактеризуйте околи точок у метричних просторах: R^1 , R^2, R_1^2, R_0^2, $C[a,b]$.
4. Знайдіть границі послідовності $x_n(t)=t^n$ у метричних просторах $C[0;1]$, $C_1[0;1]$ та $C_2[0;1]$.
5. Доведіть, що кожна точка інтервалу (a,b) числової прямої є внутрішньою.
6. Проведіть у просторі R^1 класифікацію точок множини $M=[-2,0)\bigcup\left\{\frac{(-1)^n n+2}{2n-1}\right\}$, $n\in N$.
7. Функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій. Доведіть, що: множина $\{x: f(x)\le 3\}$ замкнена.
8. Наведіть приклад нескінченної кількості замкнених множин, об’єднання яких не є замкненою множиною.
9. Опишіть усі можливі топології, які можна задати на множині $X=\{a,b,c\}$.
10. Наведіть у просторі l_2 приклад обмеженої множини, яка не є передкомпактною множиною.

Лекція №3.
Квадровані фігури та загальне означення міри

3.1. Міри прямокутника та елементарної множини.
3.2. Зовнішня міра множини та міра Жордана.
3.3. Загальне означення міри. Приклади мір.
3.4. «Важка» та «легка» задачі теорії міри.

3.1. *Міри прямокутника та елементарної множини*

Міра множини є природним узагальненням довжини відрізка, площі плоскої фігури, об'єму просторового тіла.

Під ***прямокутником*** P на площині будемо розуміти множину точок (x, y) цієї площини, координата x яких задовольняє одну з нерівностей першого, а координата y – одну з нерівностей другого стовпчика:

$$\begin{array}{ll} a \le x \le b, & c \le y \le d, \\ a < x \le b, & c < y \le d, \\ a \le x < b, & c \le y < d, \\ a < x < b, & c < y < d, \end{array}$$

де $a \le b,\ c \le d$ – довільні дійсні числа.

Якщо $a < b, c < d,$ то у результаті ми отримаємо звичайний прямокутник, сторони якого паралельні до координатних осей. При цьому, у залежності від вибору нерівностей, одна, дві, три, або і всі чотири його сторони даному прямокутнику можуть не належати.

Якщо $a = b$ чи $c = d,$ то матимемо прямокутники, вироджені у відрізки, інтервали, або пів сегменти, паралельні до однієї з осей координат, чи в точку $(a, c),$ або, навіть, у порожню множину.

Сукупність всіх таких прямокутників на площині утворює півкільце множин. ***Міру*** $m(P)$ на цьому півкільці за аналогією з площею визначимо формулою $m(P) = (b - a)(d - c).$

Зрозуміло, що при цьому кожен прямокутник P матиме міру, ця міра дорівнюватиме його площі та буде невід'ємною ($m(P) = 0$ тільки для вироджених прямокутників).

Крім того, якщо $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, де прямокутники P_i попарно не перетинаються, то $m(P) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i)$. Така властивість називається ***адитивністю міри*** m.

Наше завдання – поширити поняття міри, зберігаючи властивості невід'ємності та адитивності, на ширший клас множин, ніж прямокутники.

Плоска множина A називається ***елементарною***, якщо її можна хоч одним способом подати у вигляді об'єднання скінченної кількості прямокутників, які попарно не перетинаються: $A = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$.

Таким чином, сукупність елементарних множин є ***мінімальним кільцем***, породженим півкільцем прямокутників.

Міру m' елементарної множини A визначають за формулою $m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i)$. Зокрема, якщо $A = P$, то $m'(P) = m(P)$. Тому міру m' називають ***продовженням міри*** m.

Безпосередньо з означення випливає, що міра $m'(A)$ ***невід'ємна***. Крім того, вона ***адитивна***, тобто, якщо елементарна множина $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, де елементарні множини A_i попарно не перетинаються, то

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m'(A_i).$$

Справедлива також наступна ***теорема:*** Нехай A – елементарна множина, а $\{A_n\}$ – така скінченна або зліченна система елементарних множин, що $A \subset \bigcup_n A_n$. Тоді $m'(A) \le \sum_n m'(A_n)$.

● Якщо $A = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$, де прямокутники P_i попарно не перетинаються між собою, то кожен з прямокутників P_i замінимо замкненим прямокутником, який міститься всередині нього, так, щоб його площа була більша за $m(P_i)-\frac{\varepsilon}{2k}$, де $\varepsilon-$ довільне наперед задане додатне число.

Об'єднання таких прямокутників дасть нам замкнену елементарну множину $B\subset A$, міра якої $m'(B)>m'(A)-\frac{\varepsilon}{2}$.

Міркуючи аналогічно, кожну елементарну множину A_n замінимо відкритою елементарною множиною $C_n\supset A_n$ так, щоб виконувалися нерівності $m'(C_n)<m'(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Зрозуміло, що при цьому $B\subset\bigcup_n C_n$.

Оскільки множина B компактна, то з її покриття відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що його утворюють перші s множин C_n, бо в іншому разі ми би їх просто занумерували у потрібному нам порядку. Оскільки об'єднання таких s множин складається зі скінченного числа прямокутників і покриває елементарну множину B, то $m'(B)\le\sum_{n=1}^{s}m'(C_n)$.

З врахуванням невід'ємності міри m' звідси отримуємо, що

$$m'(A)<m'(B)+\frac{\varepsilon}{2}\le\sum_{n=1}^{s}m'(C_n)+\frac{\varepsilon}{2}\le\sum_n m'(C_n)+\frac{\varepsilon}{2}\le$$

$$\le\sum_n\left(m'(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)+\frac{\varepsilon}{2}=\sum_n m'(A_n)+\sum_n\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+\frac{\varepsilon}{2}\le\sum_n m'(A_n)+\varepsilon.$$

Внаслідок довільності $\varepsilon>0$, твердження теореми доведене. ■

Така властивість міри елементарних множин називається ***півадитивністю міри*** m'. Зауважимо, що при цьому множини A_n могли і попарно перетинатися між собою.

Якщо ж $A-$ така елементарна множина, що $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, де A_n- елементарні множини, які попарно не перетинаються, то внаслідок адитивності міри m' при кожному фіксованому N маємо нерівність:

$$m'(A)\geq m'\left(\bigcup_{n=1}^{N}A_n\right)=\sum_{n=1}^{N}m'(A_n).$$

Перейшовши в ній до границі при $N\to\infty$, отримаємо, що

$$m'(A)\geq\sum_{n=1}^{\infty}m'(A_n).$$

А оскільки з півадитивності міри m' випливає і виконання протилежної нерівності $m'(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m'(A_n)$, то $m'(A)=\sum_{n=1}^{\infty}m'(A_n)$.

Доведена властивість міри зліченного об’єднання елементарних множин, які попарно не перетинаються, називається ***зліченною адитивністю***, або ***$\sigma-$адитивністю міри елементарних множин.***

3.2. ***Зовнішня міра множини та міра Жордана***

Елементарні множини не вичерпують всіх множин на площині. Тому природним є дальше розширення поняття міри. Щоб при цьому зразу не мати справи з множинами нескінченної міри, спочатку обмежимось підмножинами A одиничного квадрата

$$E=\{(x,y):0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}.$$

Зовнішньою мірою множини A називається число

$$\mu^*(A)=\inf_{A\subset\bigcup_k P_k}\left\{\sum_k m(P_k)\right\},$$

де $\{P_k\}-$ довільні скінченні чи зліченні системи прямокутників, об’єднання яких покривають множину A.

Зокрема, якщо $A=\bigcup_{i=1}^{n}P_i\ -$ елементарна множина, то

$$\mu^*(A)=\sum_{i=1}^{n}m(P_i)=m'(A).$$

Отже, зовнішня міра μ^* є продовженням міри m'.

Як і міра m', зовнішня міра μ^* володіє властивістю ***півадитивності міри***, тобто із включення $A\subset\bigcup_n A_n$ випливає нерівність $\mu^*(A) \le \sum_n \mu^*(A_n)$. Звідси отримуємо такий ***наслідок***: якщо $A \subset B$, то $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

Важливим у теорії міри є й така властивість зовнішньої міри.

Лема. $\left|\mu^*(A) - \mu^*(B)\right| \le \mu^*(A \vartriangle B)$ для довільних множин A та B.

● Із включень $A \subset B \bigcup (A \vartriangle B)$ та $B \subset A \bigcup (A \vartriangle B)$ отримуємо нерівності $\mu^*(A) \le \mu^*(B) + \mu^*(A \vartriangle B)$ та $\mu^*(B) \le \mu^*(A) + \mu^*(A \vartriangle B)$, з яких і випливає твердження леми. ■

Але, хоч зовнішню міру має будь-яка підмножина квадрата E, ця міра на сукупності всіх таких підмножин не є адитивною. Тому розглянемо інший підхід до встановлення міри таких множин.

Його суть полягає в тому, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ знайти елементарні множини B' та B'', які задовольняють умови: $B' \subset A \subset B''$, $m'(B'' \setminus B') < \varepsilon$. Якщо це можливо, то множину A називають ***вимірною за Жорданом***.

Для плоских множин їх вимірність за Жорданом рівносильна квадрованості даної множини.

До означення вимірності за Жорданом можна підійти ще й так. Визначимо два числа $\overline{\mu}(A) = \inf\limits_{A \subset B} \{m'(B)\}$ та $\underline{\mu}(A) = \sup\limits_{B \subset A} \{m'(B)\}$, де в обох випадках B – елементарні множини. Ці числа називають відповідно ***зовнішньою*** та ***внутрішньою мірами Жордана*** множини A. Для них завжди виконується нерівність $\underline{\mu}(A) \le \overline{\mu}(A)$.

Ті множини A, для яких у ній набувається рівність, називаються ***вимірними за Жорданом***, а спільне значення таких мір називають ***мірою Жордана*** $m^*(A)$ множини A.

Міра m^* є продовженням міри m'. При цьому $m^*(A) = \mu^*(A)$. Але, на відміну від міри μ^*, міра m^* є навіть $\sigma-$адитивною.

Сукупність K^* вимірних за Жорданом плоских множин утворює кільце множин. Вона визначена на класі всіх квадрованих фігур.

3.3. ***Загальне означення міри. Приклади мір***

При побудові плоскої міри ми суттєво використовували лише такі властивості площі, як ***невід'ємність*** та ***адитивність***. То ж покладемо саме ці дві властивості в основу ***загального означення міри***.

Функція множини $m(A)$ називається ***мірою***, якщо вона:

1) визначена на півкільці множин G_m;

2) набуває дійсних невід'ємних значень;

3) є адитивною функцією множини.

Остання вимога означає, що якщо $A \in G_m$, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, де множини $A_i \in G_m$, $i = \overline{1,n}$, попарно не перетинаються, то $m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$.

Звідси випливає, що $m(\varnothing) = 0$, оскільки $\varnothing = \varnothing \bigcup \varnothing$.

Прикладом такої міри є побудована нами вище плоска міра m, визначена на півкільці прямокутників. Аналогічно у довільному просторі R^n можна побудувати $n-$вимірну міру, яка буде аналогом об'єму $n-$вимірного паралелепіпеда.

Якщо ж розглядати півкільце всіх відрізків $[a,b]$, інтервалів (a,b), півсегментів $[a,b)$ та $(a,b]$ числової прямої, де $a \le b$, то отримаємо лінійну міру $m(A) = b - a$, як аналог довжини відрізка.

Зауважимо, що на даному півкільці множин міру можна було би визначити і, наприклад, з допомогою функції $F(x) = x^2$, покладаючи для кожного такого проміжку $m_F(A) = b^2 - a^2$.

Прикладом міри дещо іншої природи є так звана ***ймовірностна міра***. Нехай $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}-$ довільна зліченна множина, і числа $p_n > 0$ такі, що $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. При цьому для будь-якої підмножини A множини X покладають $m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$.

Усі міри, наведені у даних прикладах, є не лише адитивними, а й $\sigma-$***адитивними***, тобто, якщо $A \in G_m$, $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, де множини $A_i \in G_m, i \in N,$ попарно не перетинаються, то $m(A)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i).$

Розглянемо також приклад адитивної міри, яка не є $\sigma-$адитивною. Нехай $X-$ множина раціональних чисел відрізка $[0,1]$, а G_m складається з перетинів множини X з довільними відрізками $[a,b]$, інтервалами (a,b), півсегментами $[a,b)$ та $(a,b]$, де $a \le b,$ з відрізка $[0,1]$. Для кожної множини $A \in G_m$ визначимо $m(A)=b-a.$ Така міра не є $\sigma-$адитивною, бо $m(X)=1.$ Але, якщо б міра m була $\sigma-$адитивною, то $m(X)$ як міра об'єднання зліченного числа одноточкових множин міри нуль мала би дорівнювати нулю.

Міра $m,$ визначена на півкільці G_m, природним чином поширюється до міри $m',$ визначеної на мінімальному кільці $K(G_m)$: якщо $A \in K(G_m),$ $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i,$ де множини $A_i \in G_m, i=\overline{1,n},$ попарно не перетинаються, то $m'(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i).$

Встановлення вимірності за Жорданом у загальному випадку полягає в тому, щоб для кожного $\varepsilon>0$ знайти такі дві множини B' та B'', належні до $K(G_m)$, для яких $B' \subset A \subset B'',$ $m'(B'' \setminus B')<\varepsilon.$

Спільне значення чисел $\overline{\mu}(A)=\inf\limits_{A\subset B} m'(B),$ $B \in K(G_m),$ та $\underline{\mu}(A)=\sup\limits_{B\subset A} m'(B),$ $B \in K(G_m),$ вважають мірою Жордана множини $A.$

3.4. ***«Важка» та «легка» задачі теорії міри***

Оскільки навіть на площині квадровані фігури не охоплюють всіх плоских множин, то виникає питання про пошук деякої універсальної міри, за якою будуть вимірними всі множини заданого простору X .

Розрізняють так звані ***«важку»*** та ***«легку» задачі теорії вимірювань***. Їх суть полягає в тому, щоб кожній обмеженій множині A поставити у відповідність невід'ємне число $\mu(A)$ так, що $\mu(E)=1$ і міри конгруентних множин були рівними. Крім того, у важкій задачі теорії вимірювань вимагають, щоб функція μ була $\sigma-$адитивною, а в легкій задачі – лише адитивною.

Доведемо, що перша з них у загальному випадку не має розв'язку.

● Нехай X – коло, довжина якого дорівнює 1. Визначимо на ньому $\sigma-$адитивну міру μ, відштовхуючись від лінійної міри m довжини дуги. При цьому $\mu(X)=1.$

Виберемо довільне ірраціональне число α і віднесемо до одного класу ті точки, які переходять одна в одну при повороті на кут $n\pi\alpha,\ n\in Z.$ Кожен такий клас буде зліченною множиною.

Утворимо множину A_0, вибравши довільно по одному представнику з кожного класу, і доведемо, що множина A_0 не вимірна за Лебегом.

Нехай множини $A_n,\ n\in Z,$ утворені з A_0 поворотом на кути $n\pi\alpha$ відповідно. Ці множини попарно не перетинаються, а їх об'єднанням є множина X. Якщо б множина A_0 була вимірною за Лебегом і мала міру $\mu(A_0)$, то і всі множини $A_n,\ n\in Z,$ були би вимірними за Лебегом, причому $\mu(A_n)=\mu(A_0)$ при кожному $n\in Z.$ Але тоді, на основі $\sigma-$адитивності міри, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu(A_n)=1,$ що не можливо ні при $\mu(A_0)=0,$ ні при $\mu(A_0)>0.$ ■

Що ж стосується легкої задачі теорії вимірювань, то справедливі наступні теореми.

Теорема Банаха. Легка задача теорії вимірювань має розв'язки на прямій та на площині, але ці розв'язки не є єдиними.

Теорема Хаусдорфа. У просторах $R^n,\ n\geq 3,$ легка задача теорії вимірювань розв'язків не має.

Звернемо увагу читачів і на такий факт: площа, а значить, і міра прямокутника дорівнює добутку його лінійних вимірів. А оскільки півкільце прямокутників на площині є прямим добутком півкілець відрізків на прямих, то плоску міру m, визначену на цьому півкільці, можна трактувати як добуток лінійних мір m_x та m_y, визначених на півкільцях відрізків на осях OX та OY відповідно. Подібну ситуацію маємо і при обчисленні об’єму прямокутного паралелепіпеда.

У загальному випадку поняття ***добутку мір*** вводиться так:

Нехай на півкільцях $G_1, G_2, ..., G_n$ задано міри $m_1, m_2, ..., m_n$ відповідно. Тоді на півкільці $G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ добуток цих мір – міру $m = m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$ визначають за формулою

$$m(A) = m_1(A_1) \times m_2(A_2) \times ... \times m_n(A_n),$$

де $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, $A_k \in G_k$, $k = 1, 2, ..., n.$

У випадку $\sigma -$адитивності мір $m_k(A_k)$, $k = 1, 2, ..., n$, міра $m(A)$ також буде $\sigma -$адитивною.

Вправи до лекції №3

1. Доведіть, що сукупність прямокутників на площині утворює півкільце множин, яке не є кільцем.
2. Обґрунтуйте, що сукупність елементарних множин на площині утворює кільце множин.
3. Доведіть, що міра m', визначена на кільці елементарних множин є адитивною.
4. Обґрунтуйте рівності:
   а) $m'(A \setminus B) = m'(A) - m'(A \cap B)$;
   б) $m'(A \cup B) = m'(A) + m'(B) - m'(A \cap B)$;
   в) $m'(A \triangle B) = m'(A) + m'(B) - 2m'(A \cap B)$.
   г) $m'(A \triangle B) = m'(A \cup B) - m'(A \cap B)$.
   д) $m'((A \triangle B) \triangle B) = m'(A)$.
5. Доведіть півадитивність зовнішньої міри μ^*.

6. Множина точок на площині обмежена лініями: $y=0$, $y=2$, $y=x-1$, $x=0$. Знайдіть плоску міру Жордана цієї множини.
7. Знайдіть плоску міру Жордана множини, обмеженої лініями $y=x-1$ та $y=-x^2-x+2$.
8. Доведіть, що сукупність всіх проміжків вигляду (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ та $(a,b]$ числової прямої, включаючи і порожні інтервали (a,a) та одноточкові множини $[a,a]$, утворює півкільце множин, яке не є кільцем.
9. На півкільці множин, описаних у вправі 8, міру $m_F(A)=b^2-a^2$ визначили за допомогою функції $F(x)=x^2$. Обґрунтуйте адитивність такої міри.
10. Доведіть, що ймовірностна міра є $\sigma-$адитивною.

Лекція №4.

Множини, вимірні за Лебегом

4.1. Міра Лебега. $\sigma-$алгебра вимірних за Лебегом множин.
4.2. $\sigma-$адитивність та неперервність міри Лебега.
4.3. Загальний підхід до продовження міри за Лебегом.
4.4. Поняття про $\sigma-$скінченні міри.

4.1. *Міра Лебега. $\sigma-$алгебра вимірних за Лебегом множин*

Розглянемо тепер продовження міри m' на ширший клас множин, ніж квадровані фігури.

Множина A називається ***вимірною за Лебегом***, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує така елементарна множина B, що $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

Функція $\mu(A) = \mu^*(A)$, визначена на сукупності вимірних за Лебегом множин, називається ***мірою Лебега***.

Поклавши $B = \varnothing$, отримуємо, що всяка множина, зовнішня міра якої дорівнює нулю, вимірна за Лебегом. Така властивість називається ***повнотою міри Лебега***.

Вимірною за Лебегом буде і всяка елементарна множина A (досить взяти $B = A$), і її міра Лебега $\mu(A) = m'(A)$. Отже, міра Лебега μ є ***продовженням міри*** m'.

Оскільки $A \triangle B'' \subset B'' \setminus B'$, то всяка вимірна за Жорданом множина буде вимірною і за Лебегом. При цьому $\mu(A) = m^*(A)$.

Таким чином, міра Лебега є й продовженням міри Жордана.

Зауважимо також, що з рівності $(E \setminus A) \triangle (E \setminus B) = A \triangle B$ випливає, що разом з $A \subset E$ вимірною за Лебегом буде і множина $\overline{A} = E \setminus A$.

Крім того, разом з вимірними за Лебегом множинами A_1 та A_2 вимірною за Лебегом є і множина $A = A_1 \cup A_2$.

● Справді, при кожному $\varepsilon > 0$ знайдуться такі елементарні множини B_1 та B_2, що $\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\mu^*(A_2 \triangle B_2) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Оскільки ж $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, то маємо

$$\mu^*\left((A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)\right) \le \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon.$$

Але множина $B_1 \bigcup B_2$ елементарна, тому $A = A_1 \bigcup A_2$ – вимірна. ■

Звідси випливає, що разом із множинами A_1 та A_2 вимірними за Лебегом будуть і множини:

$$A_1 \bigcap A_2 = \overline{\overline{A_1} \bigcup \overline{A_2}}, \quad A_1 \setminus A_2 = A_1 \bigcap \overline{A_2}, \quad A_1 \vartriangle A_2 = \left(A_1 \setminus A_2\right) \bigcup \left(A_2 \setminus A_1\right).$$

За індукцією доводиться, що й об'єднання та перетини довільної скінченної кількості вимірних за Лебегом множин є вимірними за Лебегом множинами.

Теорема (адитивність міри Лебега). Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ – вимірні за Лебегом множини, які попарно не перетинаються, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(A_i\right).$$

● Доведення достатньо провести для двох множин A_1 та A_2. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдуться такі елементарні множини B_1 та B_2, що

$$\mu^*\left(A_1 \vartriangle B_1\right) < \varepsilon, \quad \mu^*\left(A_2 \vartriangle B_2\right) < \varepsilon.$$

Оскільки множини A_1 та A_2 не перетинаються, то

$$B_1 \bigcap B_2 \subset \left(A_1 \vartriangle B_1\right) \bigcup \left(A_2 \vartriangle B_2\right).$$

Звідси отримуємо, що $\mu^*\left(B_1 \bigcap B_2\right) < 2\varepsilon.$

Позначимо $A = A_1 \bigcup A_2$, $B = B_1 \bigcup B_2$. Тоді із включення

$$\left(A_1 \bigcup A_2\right) \vartriangle \left(B_1 \bigcup B_2\right) \subset \left(A_1 \vartriangle B_1\right) \bigcup \left(A_2 \vartriangle B_2\right)$$

отримаємо, що також $\mu^*\left(A \vartriangle B\right) < 2\varepsilon.$

Врахувавши ці нерівності, доведену вище лему та адитивність міри $\mu^* = m'$ у класі елементарних множин, будемо мати:

$$\mu^*\left(A\right) \geq \mu^*\left(B\right) - \mu^*\left(A \vartriangle B\right) > \mu^*\left(B\right) - 2\varepsilon =$$

$$= \mu^*\left(B_1\right) + \mu^*\left(B_2\right) - \mu^*\left(B_1 \bigcap B_2\right) - 2\varepsilon >$$

$$> \left(\mu^*\left(A_1\right) - \mu^*\left(A_1 \vartriangle B_1\right)\right) + \left(\mu^*\left(A_2\right) - \mu^*\left(A_2 \vartriangle B_2\right)\right) - 4\varepsilon >$$

$$> \mu^*\left(A_1\right) + \mu^*\left(A_2\right) - 6\varepsilon.$$

А оскільки $\varepsilon > 0$ можна вибрати як завгодно малим, то

$$\mu^*\left(A\right) \geq \mu^*\left(A_1\right) + \mu^*\left(A_2\right).$$

Крім того, з півадитивності міри μ^* випливає і виконання протилежної нерівності $\mu^*(A) \le \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$.

Таким чином, остаточно отримуємо $\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. То ж залишилось в останній рівності μ^* замінити на μ ■

У загальному випадку справджується рівність

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2),$$

яку пропонуємо читачам обґрунтувати самостійно.

Також з адитивності міри Лебега отримуємо $\mu(E \setminus A) = 1 - \mu(A)$.

Відзначимо, що й зліченні об'єднання та перетини вимірних за Лебегом множин також будуть вимірними за Лебегом. Таким чином, сукупність усіх вимірних за Лебегом підмножин одиничного квадрата утворює $\sigma -$ ***алгебру множин***.

Звідси, зокрема, випливають такі наслідки:

Наслідок 1. Кожна відкрита підмножина одиничного квадрата E вимірна за Лебегом.

Наслідок 2. Кожна замкнена підмножина одиничного квадрата E вимірна за Лебегом.

Наслідок 3. Всі множини, які можна отримати із відкритих та замкнених підмножин одиничного квадрата E з допомогою скінченного або зліченного числа операцій об'єднання та перетину, є вимірними за Лебегом.

Проте лише такими множинами вимірні підмножини одиничного квадрата E не вичерпуються.

Зауважимо, що до поняття вимірності за Лебегом можна підійти і по-іншому: множина $A \subset E$ називається ***вимірною за Лебегом***, якщо $\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = m'(E)$.

Величину $\mu_*(A) = m'(E) - \mu^*(E \setminus A)$ називають ***внутрішньою мірою*** множини $A \subset E$. Таким чином, для вимірності за Лебегом множини $A \subset E$ необхідно і достатньо, щоб її зовнішня та внутрішня міри співпадали: $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

У загальному випадку для довільної множини $A \subset E$ виконується нерівність $\mu_*(A) \le \mu^*(A)$, яка випливає із включення $E \subset A \bigcup (E \setminus A)$ та півадитивності міри μ^*.

4.2. $\sigma-$***адитивність та неперервність міри Лебега***

Нехай $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, де $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ – зліченна система вимірних за Лебегом підмножин множини E, які попарно не перетинаються.

Тоді при кожному скінченному N виконується нерівність $\sum\limits_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n\right) \le \mu(A)$. Отже, також і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu(A)$.

А оскільки із півадитивності випливає протилежна нерівність $\mu(A) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, то остаточно отримуємо $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Таким чином, міра Лебега на $\sigma-$алгебрі вимірних підмножин одиничного квадрата E є $\sigma-$***адитивною мірою***.

Із $\sigma-$адитивності міри Лебега випливає її ***неперервність***, яка сформульована у наступній теоремі.

Теорема. Якщо $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots -$ послідовність вимірних за Лебегом множин і $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\mu(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

● Нехай $A = \varnothing$. Оскільки

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \bigcup (A_2 \setminus A_3) \bigcup \ldots,$$
$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \bigcup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \bigcup \ldots,$$

і множини, які входять у записані об’єднання, попарно не перетинаються, то на підставі $\sigma-$адитивності міри Лебега

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}), \qquad \mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}),$$

причому ряд у правій частині першої з цих рівностей збіжний. А отже, його залишок $\mu(A_n) \to 0 = \mu(\varnothing)$ при $n \to \infty$. Загальний випадок зводиться до доведеного заміною множин A_n множинами $A_n \setminus A$. ■

У двоїстій формі цю властивість можна сформулювати ще й так: якщо $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots -$ послідовність вимірних за Лебегом підмножин одиничного квадрата E і $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

3.3. ***Загальний підхід до продовження міри за Лебегом***

Нехай $\sigma-$адитивна міра m визначена на півкільці G_m з одиницею E, а міра m' – її продовження на мінімальне кільце $K\left(G_m\right)$.

За аналогією з плоскими множинами, назвемо ***зовнішньою мірою множини*** $A \subset E$ число $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset \bigcup\limits_n B_n} \sum\limits_n m(B_n),\ B_n \in G_m$.

Можна було також покласти $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset \bigcup\limits_n B_n} \sum\limits_n m'(B_n),\ B_n \in K\left(G_m\right)$.

Як і для плоских множин, міра $\mu^*(A)$ буде півадитивною, але не буде адитивною на сукупності всіх підмножин одиниці E.

У зв'язку з цим назвемо множину $A \subset E$ ***вимірною за Лебегом***, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $B \in K\left(G_m\right)$, що $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

Функція μ^*, яку розглядають лише на вимірних за Лебегом множинах, називається ***мірою Лебега*** і позначається буквою μ.

Безпосередньо з означення випливає, що кожна множина $A \in K\left(G_m\right)$ вимірна за Лебегом, причому $\mu(A) = m'(A)$. Тому міра μ є ***продовженням міри*** m'. Зрозуміло також, що $\mu(A) = m(A)$, якщо $A \in G_m$.

Крім того, вимірною за Лебегом буде і кожна множина, зовнішня міра якої дорівнює нулю. Отже, міра Лебега є ***повною мірою***.

Міркуючи аналогічно, як при доведенні властивостей плоскої міри Лебега, і замінюючи при цьому елементарні множини множинами $B \in K\left(G_m\right)$, встановимо також, що сукупність вимірних за Лебегом підмножин множини E є $\sigma-$***алгеброю*** множин з одиницею E і на ній міра Лебега є $\sigma-$***адитивною*** та ***неперервною***.

У випадку, коли міра m була визначена на півкільці G_m без одиниці, зовнішню міру визначають лише для тих множин, для яких існують скінченні або зліченні покриття множинами $B_n \in G_m$ із скінченними сумами $\sum_n m(B_n)$. Залишаючи при цьому означення міри Лебега без змін, отримаємо, що вона також буде ***повною***, ***σ – адитивною*** та ***неперервною***. Але сукупність вимірних за Лебегом множин буде утворювати лише ***δ – кільце***. Нескінченні об'єднання вимірних за Лебегом множин належатимуть до цього кільця тоді і тільки тоді, коли міри Лебега будь-яких скінченних об'єднань цих множин обмежені зверху однією і тією ж сталою. При цьому для довільної фіксованої вимірної за Лебегом множини сукупність вимірних за Лебегом її підмножин є ***σ – алгеброю***.

Повертаючись до питання про добуток σ – адитивних мір $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, відзначимо, що для таких мір, визначених на σ – алгебрах множин, під їх добутком μ розуміють лебегове продовження добутку $\mu_1 \times \mu_2 \times ... \times \mu_n$ і записують $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes ... \otimes \mu_n$. Зокрема, для міри Лебега на площині отримаємо $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$.

4.4. *Поняття про σ – скінченні міри*

σ – адитивну міру, визначену у довільному просторі X, називають ***σ – скінченною***, якщо X можна подати у вигляді об'єднання $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ зліченного числа множин X_n скінченної міри, які попарно не перетинаються, але не можна подати як об'єднання скінченного числа таких множин.

Зокрема, з представлення площини у вигляді об'єднання

$$X = \bigcup_{n,k=-\infty}^{\infty} E_{nk},\ E_{nk} = \{(x, y) : n \le x < n+1, k \le y < k+1\}$$

отримуємо σ – скінченність плоскої міри Лебега.

Нехай $A \subset X$ – довільна плоска множина. Позначимо

$$A_{nk} = A \bigcap E_{nk} \subset E_{nk}.$$

Кожна з множин E_{nk} є напіввідкритим квадратом зі стороною 1. Тому міри їх підмножин можна визначити аналогічно до того, як ми визначали міри підмножин одиничного квадрата E.

Множину $A \subset X$ називають ***вимірною за Лебегом***, якщо вимірними за Лебегом є всі множини A_{nk}. При цьому покладають

$$\mu(A) = \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} \mu(A_{nk}).$$

Зауважимо, що такі суми можуть виявитися як скінченними, так і нескінченними. Разом з ними множини матимуть скінченні або нескінченні міри відповідно. Зокрема, нескінченною буде міра всієї площини X.

У загальному випадку, розглядають множини $A_n = A \bigcap X_n$, $n \in N$. Якщо кожна з них є вимірною, то й множину $A \subset X$ вважають вимірною і покладають $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Система A таких вимірних множин A є ***$\sigma-$алгеброю множин***, яку називають ***прямою сумою*** $\sigma-$алгебр вимірних за Лебегом підмножин кожної з множин X_n.

При цьому:

1) $\sigma-$алгебра A та міра μ не залежать від представлення $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ як об'єднання вимірних множин X_n, які попарно не перетинаються;

2) міра μ є $\sigma-$адитивною на A;

3) сукупність $\mu-$вимірних множин A, для яких $\mu(A) < \infty$, співпадає з тим $\delta-$кільцем, на якому $\mu(A) = \mu(A)$.

Вправи до лекції №4

1. Доведіть, що міра Лебега є півадитивною мірою.
2. Обґрунтуйте, що об'єднання та перетини скінченної кількості вимірних за Лебегом множин – вимірні за Лебегом множини.

3. $\mu(A_n)=\dfrac{n-1}{n!}$, $n\in N$. Доведіть, що $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le 1$.

4. Доведіть, що якщо множина $A\subset E$ вимірна за Лебегом, то

$$\mu^*(A)+\mu^*(E\setminus A)=m'(E).$$

5. Доведіть, що міра Лебега довільної скінченної або зліченної множини дорівнює нулю.

6. Доведіть, що кожна вимірна за Лебегом множина з додатною лінійною мірою має потужність континууму.

7. Враховуючи неперервність міри Лебега, обґрунтуйте, що лінійна міра Лебега канторової множини дорівнює нулю.

8. Над кожним інтервалом, який викидався при побудові канторової множини, побудували півкруги, діаметри яких дорівнюють довжинам відповідних інтервалів. Обчисліть плоску міру Лебега отриманої при цьому множини.

9. На відрізку $[0;1]$ побудуйте множину A, що є об'єднанням зліченної кількості відрізків $[a_n,b_n]$, які попарно не перетинаються, і має лінійну міру Лебега $\mu(A)=0,6$.

10. $\sigma-$адитивна міра μ визначена на $\sigma-$алгебрі множин A. Множини $A_n\in A$, $n\in N$, попарно не перетинаються. Обчислити $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$, якщо: а) $\mu(A_n)=\dfrac{1}{n(n+2)}$; б) $\mu(A_n)=\dfrac{1}{2n(2n+1)}$.

Лекція №5.

Вимірні функції та їх властивості

5.1. Означення та приклади вимірних функцій.
5.2. Арифметичні дії над вимірними функціями.
5.3. Послідовності вимірних функцій.
5.4. Збіжність за мірою, її зв'язок зі збіжністю майже скрізь

5.1. ***Означення та приклади вимірних функцій***.

Функцію $f(x)$ вважають ***визначеною*** на множині $A\subset X$, якщо кожному $x\in A$ поставлено у відповідність число $f(x)$. При цьому $f(x)$ може набувати і нескінченних значень $+\infty$ та $-\infty$.

Функція $f(x)$, визначена на вимірній множині $A\subset X$, називається ***вимірною*** на цій множині, якщо при кожному скінченному значенні c вимірними є множини

$$M[f<c]=\{x:x\in A, f(x)<c\}.$$

Безпосередньо з означення випливає, що функція, визначена на невимірній множині, є ***невимірною***. Крім того, з повноти міри Лебега отримуємо вимірність всякої функції, визначеної на множині міри 0.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ вимірна, то при кожному значенні c множини $M[f\ge c]$, $M[f\le c]$, $M[f>c]$, $M[f=c]$ вимірні.

● Твердження теореми послідовно отримуємо із рівностей:

$$M[f\ge c]=A\setminus M[f<c],\qquad M[f\le c]=\bigcap_{n=1}^{\infty}M\left[f<c+\frac{1}{n}\right],$$

$$M[f>c]=A\setminus M[f\le c],\qquad M[f=c]=M[f\le c]\setminus M[f<c].\ \blacksquare$$

Зауваження 1. Якщо множина A вимірна, і хоч одна з множин $M[f\ge c]$, $M[f\le c]$, $M[f>c]$ при кожному значенні c буде вимірною, то функція $f(x)$ вимірна. Таким чином, в основу означення вимірної функції можна було покласти вимірність будь-якої з чотирьох множин $M[f<c]$, $M[f\ge c]$, $M[f\le c]$, $M[f>c]$ при кожному значенні c.

Зауваження 2. З вимірності при кожному значенні c множини $M\left[f=c\right]$ вимірність функції $f\left(x\right)$ не випливає, але, якщо функція $f\left(x\right)$ набуває не більш як зліченну кількість значень y_n, і при кожному n множини $M\left[f=y_n\right]$ вимірні, то функція $f\left(x\right)$ вимірна. Така функція називається ***простою***.

Розглянемо конкретні приклади вимірних функцій, визначених на вимірних множинах A:

1. $f\left(x\right)=const.$

● Множина $M\left[f<c\right]=\begin{cases}\varnothing, \ c\le const,\\ A, \ c>const,\end{cases}$ вимірна при кожному c. Тому й функція $f\left(x\right)=const$ вимірна. ■

2. $f\left(x\right)=\begin{cases}0, \ x\in B\subset A,\\ 1, \ x\in A\setminus B.\end{cases}$

● Тут $M\left[f<c\right]=\begin{cases}\varnothing, \ c\le 0,\\ B, \ 0<c\le 1,\\ A, \ c>1.\end{cases}$ Отже, дана функція вимірна тоді і тільки тоді, коли вимірною є множина B. ■

3. $f\left(x\right)=\begin{cases}2-x^2, & -2\le x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-2, & 1<x\le 2.\end{cases}$

● Дана функція визначена на вимірній за Лебегом множині $A=\left[-2;2\right]$. Послідовно знаходимо:

$$M\left[f<c\right]=\varnothing, \ c\le -2;$$

$$M\left[f<c\right]=\left[-2;-\sqrt{2-c}\right), \ -2<c\le -1;$$

$$M\left[f<c\right]=\left[-2;-\sqrt{2-c}\right)\cup\left(1;c+2\right), \ -1<c\le 0;$$

$$M\left[f<c\right]=\left[-2;-\sqrt{2-c}\right)\cup\left[1;2\right], \ 0<c\le 1;$$

$$M\left[f<c\right]=\left[-2;-\sqrt{2-c}\right)\cup\left(\sqrt{2-c};2\right], \ 1<c\le 2;$$

$$M\left[f<c\right]=\left[-2;2\right],\ c>2.$$

Оскільки в усіх з можливих випадків для чисел c ми отримали вимірні множини, то функція $f\left(x\right)$ вимірна. ■

5.2. ***Арифметичні дії над вимірними функціями***.

Розглянемо ***властивості вимірних функцій***, пов'язані з арифметичними діями над такими функціями:

1. Якщо $f\left(x\right)-$ вимірна функція, то при кожному $a\in R$ функція $f\left(x\right)+a$ теж вимірна.

● Справді, множини $M\left[f+a<c\right]=M\left[f<c-a\right]$ вимірні при всіх дійсних c та a. ■

2. Якщо $f\left(x\right)-$ вимірна функція, то при кожному $k\in R$ функція $kf\left(x\right)$ теж вимірна.

● Множини

$$M\left[kf<c\right]=\begin{cases} M\left[f<\dfrac{c}{k}\right],\ k>0, \\ M\left[0\cdot f<c\right], k=0, \\ M\left[f>\dfrac{c}{k}\right],\ k<0, \end{cases}$$

вимірні при кожному дійсному c та k. ■

Для доведення вимірності різниці та суми вимірних функцій нам потрібна ще й наступна властивість таких функцій.

3. Якщо функції $f\left(x\right)$ та $\varphi\left(x\right)$ вимірні, то множина $M\left[f<\varphi\right]$ вимірна.

● Випишемо всі раціональні числа у вигляді послідовності $\left(r_n\right)$. Тоді множина $M\left[f<\varphi\right]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(M\left[f<r_n\right]\cap M\left[\varphi>r_n\right]\right)$ вимірна як об'єднання перетинів вимірних множин. ■

4. Якщо функції $f\left(x\right)$ та $g\left(x\right)$ вимірні, то функція $f\left(x\right)-g\left(x\right)$ вимірна.

● За властивістю 3 множина $M\left[f-g<c\right]=M\left[f<g+c\right]$ вимірна при кожному c, бо функція $\varphi(x)=g(x)+c$ вимірна. ■

5. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ вимірні, то функція $f(x)+g(x)$ вимірна.

● Це випливає з властивостей 2 та 4 і рівності

$$f(x)+g(x)=f(x)-(-g(x)).\ \blacksquare$$

6. Якщо $f(x)-$ вимірна функція, то функція $\left|f(x)\right|$ теж вимірна.

● Справді, множини $M\left[|f|<c\right]=\begin{cases}\varnothing, & c\le 0,\\ M\left[f<c\right]\cap M\left[f>-c\right], & c>0,\end{cases}$

вимірні при кожному дійсному c. ■

7. Якщо $f(x)-$ вимірна функція, то функція $f^2(x)$ теж вимірна.

● Множини $M\left[f^2<c\right]=\begin{cases}\varnothing, & c\le 0,\\ M\left[f<\sqrt{c}\right]\cap M\left[f>-\sqrt{c}\right], & c>0,\end{cases}$

вимірні при кожному дійсному c. ■

8. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ вимірні, то функція $f(x)\cdot g(x)$ вимірна.

● За властивостями 2, 4, 5, 7 її вимірність випливає з рівності

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\left[\left(f(x)+g(x)\right)^2-\left(f(x)-g(x)\right)^2\right]\ \blacksquare$$

9. Якщо $f(x)-$ вимірна функція і $f(x)\ne 0$, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ теж вимірна.

● Для $f(x)\ne 0$ при кожному дійсному c вимірними є множини

$$M\left[\frac{1}{f}<c\right]=\begin{cases}M\left[f<0\right]\cap M\left[f>\dfrac{1}{c}\right], & c<0,\\ M\left[f<0\right], & c=0,\\ M\left[f<0\right]\cup M\left[f>\dfrac{1}{c}\right], & c>0,\end{cases}\quad\blacksquare$$

10. Якщо $f(x)$ та $g(x)$ – вимірні функції і $g(x) \neq 0$, то функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ теж вимірна.

● За властивостями 8 та 9 це випливає з рівності

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}. \ \blacksquare$$

5.3. ***Послідовності вимірних функцій***

Розглянемо ще одну важливу властивість вимірних функцій, пов'язану з граничним переходом.

Теорема. Якщо послідовність вимірних на множині A функцій $f_n(x)$ при кожному $x \in A$ збігається до функції $f(x)$, то функція $f(x)$ вимірна.

● Справедливість твердження цієї теореми випливає з рівності

$$M[f < c] = \{x : f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \left\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}.$$

Отже, $M[f < c]$ як об'єднання перетинів вимірних множин буде вимірною множиною при кожному c. Тому функція $f(x)$ вимірна. ■

Зауважимо, що умови даної теореми можуть бути дещо послаблені. Назвемо послідовність функцій $f_n(x)$ ***збіжною майже скрізь*** на множині A до функції $f(x)$, якщо міра множини тих $x \in A$, для яких $f_n(x)$ не збігається до $f(x)$, дорівнює нулю.

Отже, отримуємо такий ***наслідок***: нехай послідовність вимірних на множині A функцій $f_n(x)$ майже скрізь на A збігається до функції $f(x)$. Тоді функція $f(x)$ є вимірною.

● Справді, на множині $A_0 \subset A$, на якій $f_n(x)$ не збігається до $f(x)$, функція $f(x)$ вимірна, як і всяка функція на множині міри нуль. А на $A \setminus A_0$ вимірність $f(x)$ випливає з доведеної теореми. Тому $f(x)$ вимірна на всій множині A. ■

Зауважимо також, що всі визначені і неперервні на відрізку функції є вимірними.

● Якщо $f(x)-$ неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, то за теоремою Кантора вона буде також рівномірно неперервною на цьому відрізку. Тому при кожному $n \in N$ відрізок $[a,b]$ можна розбити на менші відрізки $[x_k, x_{k+1}]$ так, щоб коливання функції на кожній з частинок було меншим за $\frac{1}{n}$. Визначимо функції $f_n(x)$, покладаючи їх на $[x_k, x_{k+1})$ рівними найменшим значенням функції $f(x)$ на кожному з таких відрізків відповідно та $f_n(b) = f(b)$. Очевидно, що функції $f_n(x)$ є вимірними, бо всі вони набувають скінченну кількість значень, кожне на вимірній множині. Крім того, послідовність таких функцій збігається до функції $f(x)$, причому навіть рівномірно. ■

Доведемо й таку важливу ***теорему***: кожну вимірну функцію можна подати як границю рівномірно збіжної послідовності вимірних функцій, які набувають не більше як зліченну кількість різних значень.

● Справді, якщо $f(x)-$ довільна вимірна на множині A функція, то при всіх $m \in Z,\ n \in N$ будуть вимірними множини

$$A_{nm} = \left\{ x : \frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n} \right\}.$$

При цьому $A = \bigcup\limits_m A_{nm}$ при кожному фіксованому $n \in N$. Тому, покладаючи $f_n(x) = \frac{m}{n},\ x \in A_{nm}$, отримаємо шукану послідовність простих функцій, яка рівномірно збігається на A до функції $f(x)$. ■

Звідси як ***наслідок*** отримуємо наступне твердження: для того, щоб функція $f(x)$ була вимірною, необхідно і достатньо, щоб її можна було подати як границю рівномірно збіжної послідовності простих функцій.

Справедливими є й такі дві теореми:

Теорема Лузіна. Для того, щоб функція $f(x)$ була вимірною на відрізку $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувала така неперервна на $[a,b]$ функція $g(x)$, що

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

Теорема Єгорова. Якщо послідовність вимірних на множині A скінченної міри функцій $f_n(x)$ майже скрізь на A збігається до функції $f(x)$, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує така вимірна множина $A_\varepsilon \subset A$, на якій ця послідовність збігається до $f(x)$ рівномірно, і

$$\mu(A_\varepsilon) > \mu(A) - \varepsilon.$$

5.4. ***Збіжність за мірою, її зв'язок зі збіжністю майже скрізь***

Послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ ***збігається за мірою*** до функції $f(x)$, якщо при кожному $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0.$$

Справедлива наступна т***еорема Лебега:*** Якщо послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ збігається майже скрізь на множині A скінченної міри до функції $f(x)$, то вона збігається до цієї функції і за мірою.

Покажемо, що обернене до неї твердження неправильне.

● Розглянемо при кожному натуральному k функції

$$\varphi_{k1}(x), \varphi_{k2}(x), \ldots, \varphi_{kk}(x),$$

визначені на множині $A = (0,1]$ так, що:

$$\varphi_{ki}(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \left(\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right], \\ 0, \ \ x \notin \left(\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right]. \end{cases}$$

Пронумерувавши ці функції підряд за зростанням k, а при однакових k – за зростанням i, отримаємо деяку послідовність функцій $f_n(x)$. Зауваживши, що $\mu\{x:\varphi_{ki}(x)\neq 0\}=\dfrac{1}{k}\to 0,\ k\to\infty,$ отримаємо, що $f_n(x)$ збігається за мірою до функції $f(x)\equiv 0.$

Але, яке б $x_0\in(0;1]$ ми не взяли, при кожному $k\in N$ знайдеться таке i, що $x_0\in\left(\dfrac{i-1}{k};\dfrac{i}{k}\right],$ тобто $\varphi_{ki}(x_0)=1.$ Тому послідовність функцій $f_n(x)$ не збігається до $f(x)$ у жодній точці з $(0;1].$ ■

Наведений приклад свідчить, що із збіжності за мірою може не випливати навіть збіжності принаймні в одній точці множини A.

Проте справедлива наступна ***теорема Ріса:*** Якщо послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ на множині A скінченної міри збігається за мірою до функції $f(x),$ то з неї можна вибрати підпослідовність функцій $f_{n_k}(x),$ яка збігається на цій множині до функції $f(x)$ майже скрізь.

Як ***наслідок*** з теореми Ріса отримуємо: границя збіжної за мірою послідовності вимірних функцій є вимірною функцією.

Повертаючись до розглянутого вище прикладу, зауважимо, що, обмежуючись у ньому лише функціями $\varphi_{11}(x),\varphi_{21}(x),...,\varphi_{k1}(x),...,$ ми виділимо підпослідовність заданої послідовності, яка збігається до $f(x)\equiv 0$ у кожній точці множини $A=(0;1].$

Вправи до лекції №5

1. Обґрунтуйте твердження: якщо множина A вимірна, і хоч одна з множин $M[f\geq c],\ M[f\leq c],\ M[f>c]$ при кожному значенні c буде вимірною, то функція $f(x)$ вимірна на множині A.
2. Доведіть, що з вимірності при кожному значенні c множин $M[f=c]$ не випливає вимірність функції $f(x).$
3. Доведіть, що для вимірності функції $f(x),$ яка визначена на вимірній множині, достатньо, щоб при кожному значенні c множини $M[f=c]$ були вимірними.

4. Намалюйте графік функції $f\left(x\right)$ і доведіть за означенням її вимірність на своїй області визначення, якщо:

а) $f(x)=\begin{cases}1-x,\ x\in\left[-2;-1\right),\\ 0,\quad x=-1,\\ x^2,\ x\in\left(-1;2\right].\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x+2,\ x\in\left[-1;1\right),\\ 0,\ x=1,\\ 3-x,\ x\in\left(1;2\right].\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}-3,\quad x=-3,\\ 1+x,\ x\in\left(-3;-1\right),\\ x^2-1,\ x\in\left[-1;1\right].\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}2-x^2,\ x\in\left(-2;1\right),\\ 5,\quad x=1,\\ x+2,\ x\in\left(1;2\right).\end{cases}$

д). $f(x)=\begin{cases}2+x^2, x\in\left(-2;1\right),\\ 2,\quad x=1,\\ 3-2x, x\in\left(1;3\right].\end{cases}$ е). $f(x)=\begin{cases}1+3x, x\in\left(-2;-1\right],\\ x^2+3, x\in\left(-1;2\right),\\ 3,\quad x=2.\end{cases}$

5. Обґрунтуйте наступні твердження про вимірні функції:
   а) Якщо функція $f\left(x\right)$ вимірна, то функція $f^n\left(x\right), n\in N,$ теж вимірна.
   б) Якщо $f\left(x\right)-$ невід’ємна вимірна функція, то функція $\sqrt[n]{f\left(x\right)}, n\in N,$ теж вимірна.
   в) Функція $f\left(x\right)$ може бути і невимірною, якщо функція $f^2\left(x\right)$ вимірна.
6. На відрізку $\left[0;1\right]$ задана послідовність функцій $f_n\left(x\right)=x^n$.
   а) До якої функції збігається ця послідовність?
   б) Доведіть, що така збіжність не є рівномірною.
   в) Дослідіть цю послідовність на збіжність до функції $f\left(x\right)=0$ за мірою та майже скрізь.
7. Доведіть, що на відрізку $\left[0;1\right]$ послідовність функцій $f_n\left(x\right)=x^n-x^{n+1}$ збігається рівномірно до функції $f\left(x\right)=0.$
8. Доведіть, що функція $f\left(x\right)$ визначена на вимірній множині, є вимірною тоді і тільки тоді, коли при всіх $a,b\in R,\ a<b,$ вимірними є множини: а) $M\left[a<f<b\right]$; б) $M\left[a\le f\le b\right]$.

9. Доведіть, що функція $f(x)$ визначена на вимірній множині, є вимірна тоді і тільки тоді, коли при всіх $c \in Q$ вимірними є множини $M[f \le c]$.

10. Нехай μ – лінійна міра Лебега. Перевірте, чи на множині $A=[0,2]$ послідовність функцій $f_n(x)$ збігається $f(x)=0$: а) за мірою, б) майже скрізь. Знайдіть хоч одну множину $A_0 \subset A$, $\mu(A_0)>1{,}95$, на якій ця послідовність збігається до функції $f(x)$ рівномірно, якщо:

а). $f_n(x)=\cos^n \pi x.$ б). $f_n(x)=\sin^n \pi x.$

в). $f_n(x)=e^{n(x-2)}.$ г). $f_n(x)=e^{-n\left|x^2-1\right|}.$

д). $f_n(x)=\sin^n \dfrac{2}{x+1}.$ е). $f_n(x)=\cos^n \dfrac{1}{x+2}.$

Список рекомендованої літератури

1. *Дороговцев А.Я., Константинов О.Ю., Курченко О.О., Івасишен С.Д.* Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу «Теорія міри та інтеграла» для студентів спеціальності «математика». – К.: КДУ, 1991. – 76с.
2. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
3. *Маслюченко В.К.* Елементи теорії множин: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 132с.
4. *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Філіпчук О.І.* Задачі та теореми загальної теорії функцій: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2006. – 80с.
5. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480с.
6. *Очан Ю.С.* Сборник задач по функциональному анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
7. *Федак І.В*. Елементи теорії міри та інтеграла Лебега. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 168с.
8. *Федак І.В*. Функціональний аналіз. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 120с.
9. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 290с.
10. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.* Интеграл, мера, производная. – М.: Наука, 1967. – 220с.