

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДИФІКАЦІЇ МОДЕЛІ БЛЕКА-ШОУЛЗА

**БУРТНЯК І. В.**

*кандидат економічних наук*

**МАЛИЦЬКА Г. П.**

*кандидат фізико-математичних наук*

**ІВАНО-ФРАНКІВСЬК**

**Вступ.** Видатна робота Блека і Шоулза [1] та одночасне відкриття Чикагської опціонної біржі в квітні 1973 р. відкрили нову еру в фінансовій математиці. Формула Блека-Шоулза широко використовується трейдерами для встановлення ціни звичайних опціонів при мінімальних ризиках. Проте особливо після ринкової кризи 1987 і появи потужних комп'ютерів та нових математичних технологій, багато зусиль віддано для створення нових моделей та для дослідження цінової інтерпретації.

Зокрема це видно з досліджень волатильності, яка закладена в обмінах та не є сталою і проявляє себе через випадкові успіхи. У відомій статті Рубінштейна [1] доведено, що короткочасні грошові вкладення є ціннішими відносно інших вкладень, які передбачали Блек і Шоулз, і що вирашна ціна є статистично істотною та може змінюватися через деякий час.

Специфікація волатильності як стохастичного процесу є природною, це можна пояснити на значній кількості емпіричних даних, які обґрунтовують властивості розподілів, які виступають при трансформації витрат. Наприклад, спостережуване співвідношення

між величиною волатильності і активом може бути пояснене рівнем залежності волатильності згідно з моделлю (CEV) варіації сталої еластичності, чи моделлю Кокса і Росса [3]. Стохастична волатильність може також виникнути ендогенно за допомогою рівноваги, яка моделює поведінку учасників ринку.

Більш загальні стохастичні моделі волатильності запропоновані Хулом і Вайтом [4], вони побудовані на ідеї, що коректна специфікація волатильності може мати загальне і аналітичне трактування. Дуже часто використання правдоподібних параметрів, аналогічно, як при від'ємній кореляції між волатильністю і ціною, на практиці не відповідає фактичним цінам опціонів. При емпіричній верифікації відбувається пошук структурних параметрів за допомогою відбору істотно різних часових рядів для проведення оцінки.

В цьому сенсі фактично, в науковій літературі постає все більше претензій до складу моделі. Ми будемо встановлювати структуру моделі волатильності перед дослідженням значень установлених цін опціонів.

Узагальнені процеси з умовною гетероскедастичністю (GARCH) використовують граничні дискретні проміжки часу для моделювання стохастичної волатильності [5]. За припущеннями на користь інвестора, одержуємо єдині ціни опціонів, це можна зробити тоді, коли володіємо інформацією про близькі часові проміжки, тобто без неперервної часової структури неможливо визначити точну стратегію повторення.

При виборі моделі встановлення цін потрібно врахувати теоретичну загальність і склад структури

волатильності та здатність ефективно і точно оцінювати параметри. Для першого твердження наукова література досягла певних результатів, піднімаючи нові важливі проблеми і розробляючи різні підходи [6]. Застосовуючи швидко середню зміну волатильності, запропонували ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих ринкових параметрів. Основною їхньої ідеєю – є удосконалення моделі Блека-Шоулза, яка відображає вплив стохастичної волатильності на похідні ціни.

**Постановка завдання.** В 1998 році Гобсон і Роджерс [6], (надалі HR) конкретизували локальну волатильність за допомогою навантажених моментів минулих повернень. Позначимо  $Z_t = \ln(e^{-rt} P_t)$  логарифм від дисконтованої зміни ціни та визначимо розгалужену функцію порядку  $m$

$$S_t^{(m)} = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} (Z_t - Z_{t-u})^m du \quad (1)$$

де параметр описує вагу історичних спостережень. Ціни акцій задовольняють стохастичне диференціальне рівняння

$$dZ_t = \sigma(t, Z_t, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}) dB_t + \mu(t, Z_t, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}) dt$$

для деяких гладких функцій  $\sigma(\cdot) > 0$  і  $\mu(\cdot)$ .

Оскільки  $\sigma(\cdot)$  може також залежати від  $P_t$ , то модель включає частинний випадок, коли волатильність є детермінованою функцією ціни. Ця гіпотеза зберігають повноту та дозволяють привілейовану незалежну установку ціни опціону. Ця особливість має перевагу над повністю стохастичними процесами волатильності, де розгляд арбітражу не достатній, щоб визначити ризикову премію. Надалі, ми припускаємо, що миттєва волатильність – це функція першого порядкового відгалуження  $S_t = S_t^{(1)}$ , тому що таке препущення дає можливість одержати коректну постановку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння Колмогорова (HRPDE) і розв'язати її з максимальною точністю це і є модель Гобсона-Роджерса, вона має потенціал, щоб пояснити відхилення волатильності, наші дослідження свідчать, що зокрема відгалуження функції вищого порядку істотно не покращують результатів.

Використовуючи рівняння, ми розкладаємо  $S_t$  як відхилення поточної ціни від експоненціально зваженої середньої величини минулих цін.

$$S_t = Z_t - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} Z_{t-u} du \quad (2)$$

Параметр визначає часовий горизонт «рухомих часових вікон» інтегралу справа, для більших значень цього параметра  $S_t$  більш залежні від недавнього минулого, тоді як для менших значень –  $S_t$  майже співпадають з приростами зміни цін. В цьому випадку рівень залежності волатильності більш узгоджений.

Щоб побудувати основну модель, яка використовується для обчислювальних процедур, розглянемо нейтральну міру ризику  $\bar{P}$  і  $\bar{P}$ -броунівський рух  $B_t$ . Нехай  $e^{-rt} P_t$  буде  $\bar{P}$  – мартингал, який є розв'язком стохастичного рівняння  $d\bar{P}_t = \sigma \bar{P}_t dB_t$ .

Таким чином, за формулою Іто

$$dZ_t = \sigma d\bar{B}_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \quad (3)$$

Після заміни  $u = t - s$  рівняння приймає вигляд

$$S_t = Z_t - \lambda e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda s} Z_s ds,$$

і ми можемо легко обчислити диференціал

$$dS_t = dZ_t - \lambda S_t dt \quad (4)$$

HR знайшли загальну формулу для диференціала функцій вищих порядкових відгалужень і довели, що  $(Z_t, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)})$  утворює Марківський процес.

Зробивши заміну  $U = Z - S$ , і позначивши  $f(t, U_t, Z_t)$  ціну в час  $t < T$ , одержимо що, вартість можливої претензії має вигляд

$$f(t, U_T, Z_T) = q(Z_T), \quad (5)$$

у час  $T$ . Використовуючи стандартні аргументи, ми одержуємо HR PDE

$$f_t + \lambda(Z - U)f_U - \frac{1}{2} \sigma(Z - U)^2 (f_{ZZ} - f_Z) = 0, \quad (6)$$

з граничною умовою (5). Рівняння (6) є ультрапараболічним стохастичним рівнянням типу Колмогорова.

Волатильність змінюється через певний час: пояснення цього є ключовою проблемою в теорії фінансів, в літературі запропоновані різні спроби моделювання цього процесу (див. [7]).

Залежність між волатильністю та минулими поверненнями є інтуїтивною. У роботах [8–9] запропоновано пов'язати поверхню волатильності з минулими змінами в порядковому рівні, тоді як, на практиці, як правило, фахівці, використовують експоненціальне навантаження (зваження), перемішаючи середні величини, щоб передбачати волатильність. Крім того, ця гіпотеза вводить ефект скупчення волатильності. Залежно від значень  $\lambda$ , великі зміни в ціні змушують відгалуження (1) істотно змінюватися протягом певного періоду. Особливості динаміки волатильності, такі як локальна сталість і залежність волатильності від нещодавно спостережуваної волатильності, пояснюються її природою [10–11].

**Результати.** Ми провели простий аналіз, використовуючи значення величини індексу ПФТС, за період з січня 2006 р. по грудень 2010 р. Обчислимо значення функції  $S$ :

$$\bar{S}_t = \sum_{i=0}^M \frac{w_i}{W} (Z_t - Z_{t-i}), \quad (7)$$

де  $w_i = e^{-\lambda i \Delta t}$  – вагові коефіцієнти, а  $W$  – їхня сума. Як відповідну оцінку волатильності візьмемо

$$\bar{\sigma}_t = \sqrt{k \sum_{i=1}^M \frac{w_i}{W} (Z_{t-i+1} - Z_{t-i} - \bar{\mu}_t)^2}, \quad (8)$$

де  $\bar{\mu}_t = \ln \frac{M-t}{t}$  – ваговий коефіцієнт,

$k = W^2 / \sum \left( \frac{W^2}{M} - w_i^2 \right)$  – це коректувальний коефіцієнт для неупередженої оцінки  $\sigma^2$ . Всі оцінки

обчислені щодня, ми розглядаємо 122 операційних дні та маємо на увазі одиницю часу  $\Delta t = 1/122$ .

Взявши  $M = 1224$ , ми динамічно обчислюємо оцінку, засновану на 1224 історичних спостереженнях за кожним з операційних днів. Завдяки специфічним конструкціям (7) і (8), заснованих на такій же кількості минулої інформації, обчислення успішно виконуються.

На рис. 1 видно взаємовідношення між нашою оцінкою (7) та волатильністю (8) для різних значень  $\lambda$ . Кожен випадок ілюструє криву, одержану, наближенням волатильності  $\bar{\sigma}_t$  за допомогою полінома другого порядку  $a\bar{S}^2 + b\bar{S} + c$ .

На рис. 2 наведено зв'язок між оцінкою (7) та волатильністю  $\bar{\sigma}_t$ , обчисленої за допомогою частки квадратних тричленів  $\sigma(S) = \frac{1 + aS + bS^2}{c + dS + eS^2}$ .

В табл. 1 наведені параметри для різних видів моделей, при відповідних значеннях, обчислені за допомогою методу найменших квадратів. Обширні дослідження доводять, що найефективнішою специфікацією для функції волатильності є

$$\sigma(S) = \frac{1 + aS + bS^2}{c + dS + eS^2} \text{ та } \sigma(S) = aS^2 + bS + c.$$

Це в значній мірі скорочує зусилля, залучені на проблему оптимізації.

**Висновок.** Дане якісне дослідження забезпечує емпіричну очевидність на користь наших припущень і допомагає нам у виділенні відповідної функції волатильності. Доведено залежність волатильності від розгалужених функцій  $S$  першого порядку на прикладі індексу ПФТС. Встановлено на основі емпіричних даних, що найкраще функцію волатильності наближає квадратична регресія, а особливо – частка квадратних тричленів. ■

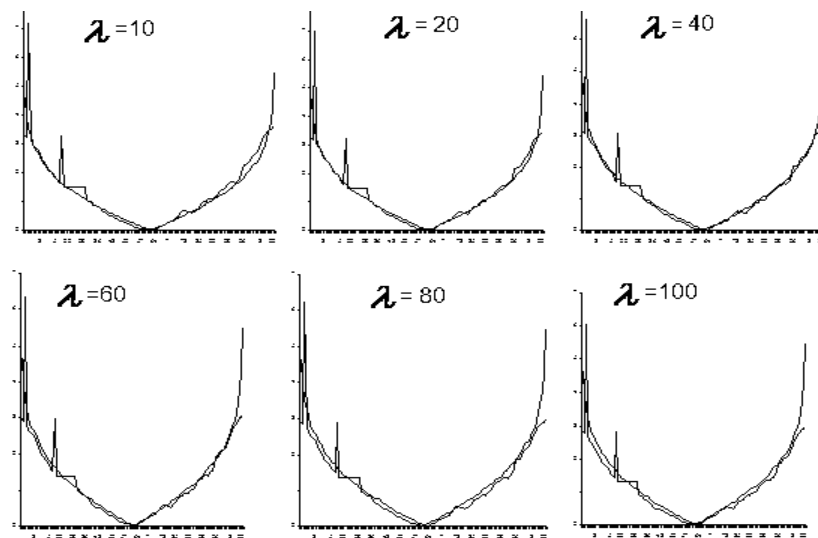


Рис. 1. Квадратичний тренд при різних значеннях

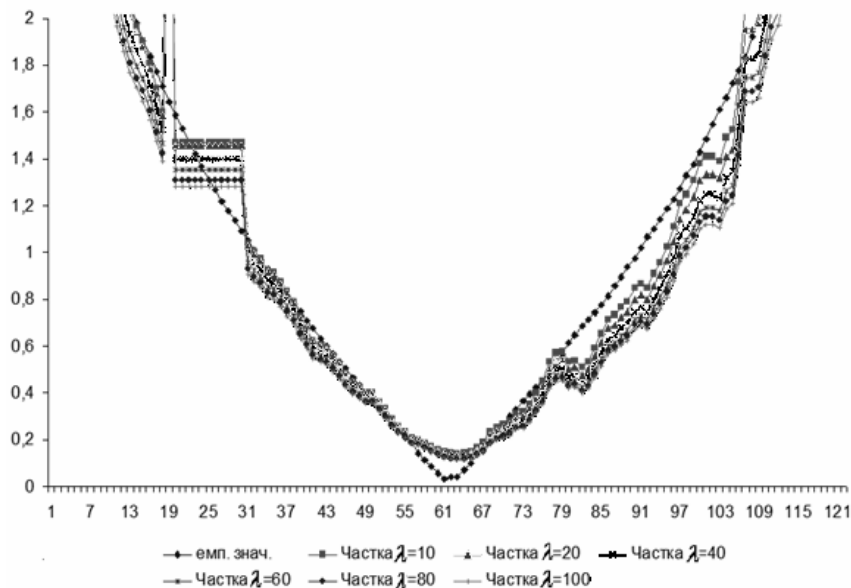


Рис. 2. Тренд волатильності, як частки двох многочленів

Параметри для різних видів моделей

$\lambda$	10	20	40	60	80	100
Коеф.	$\sigma(S) = \frac{1 + aS + bS^2}{c + dS + eS^2}$					
c	0,278	0,282	0,295	0,306	0,315	0,323
d	-0,035	-0,035	-0,036	-0,038	-0,039	-0,04
e	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003
a	0,241	0,24	0,239	0,238	0,238	0,238
b	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015
	$\sigma(S) = aS + b$					
a	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006	-0,005	-0,005
b	1,268	1,227	1,165	1,118	1,083	1,056
	$\sigma(S) = aS^2 + bS + c$					
c	3,298	3,233	3,09	2,974	2,894	2,813
b	0,881	0,857	0,816	0,774	0,76	0,74
a	0,059	0,057	0,054	0,051	0,05	0,049
	$\sigma(S) = \sqrt{a + bS^2}$					
a	268,37	263,143	251,614	242,365	235,146	229,463
b	-1,772	-1,727	-1,646	-1,584	-1,536	-1,499

## ЛІТЕРАТУРА

- Black F., and M. Scholes**, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
- Rubinstein M.**, 1985, Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from august 23, 1976 august 31, 1978, *The Journal of Finance* 11, 455-480.
- Platen, E., and M. Schweizer**, 1998, On feedback effects from hedging derivatives, *Mathematical Finance* 8, 67-84.
- Hull J., and A. White**, 1987, The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance* 42, 281-300.
- Буртняк І. В., Малицька Г. П.** Дослідження взаємодії між фондовими індексами на основі моделей ARCH // Вісник Східноукраїнського нац. у-ту ім. В. Даля.- 2009.- №12. – С. 102–110.
- Hobson D. G., L. C. G. Rogers**, 1998, Complete models with stochastic volatility, *Mathematical Finance* 8, 27-48.
- Schwert G. W.**, 1989, Why does volatility change over time?, *The Journal of Finance* 44, 1115-1153.
- Duan J. C.**, 1995, The GARCH option pricing model, *Mathematical Finance* 5, 13-32.
- Corradi V.**, 2000, Reconsidering the continuous time limit of the GARCH(1,1) process, *Journal of Econometrics* 96, 145-153.
- Chernov M., A. R. Gallant E. Ghysels, and G. Tauchen**, 2003, Alternative models for stock price dynamics.
- Tompkins R. G.**, 2001, Stock index futures markets: Stochastic volatility models and smiles, *Journal of Future Markets* 21, 43-78.