ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ВАСИЛИШИН СВІТЛАНА ІГОРІВНА

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

АЛГЕБРИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ, ПОРОДЖЕНІ ЗЛІЧЕННОЮ МНОЖИНОЮ ТВІРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

111 Математика
11 Математика та статистика
Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________________ С. І. Василишин

Науковий керівник
ЗАГОРОДНЮК АНДРІЙ ВАСИЛЬОВИЧ,
доктор фізико-математичних
наук, професор

ІВАНО-ФРАНКІВСЬК — 2023

АНОТАЦІЯ

Василишин С. І. Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, породжені зліченною множиною твірних елементів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2023 — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2023.

Дисертаційна робота виконана в рамках теорії аналітичних функцій на банахових просторах і присвячена дослідженню топологічних алгебр цілих функцій, породжених зліченними множинами поліномів на комплексних банахових просторах.

Теорія аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах є одним із основних розділів сучасного нелінійного функціонального аналізу. Відомо, що сукупності аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах у багатьох випадках утворюють алгебри, які можна певним природним чином топологізувати. У багатьох сучасних дослідженнях вивчаються топологічні алгебри аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах та спектри таких алгебр. Зокрема, даною тематикою займаються такі вчені як Р. Арон, П. Галіндо, Ж. Мухіка, М. Маестре, Д. Гарсіа, А. Загороднюк, Т. Василишин, В. Кравців, І. Чернега та ін.

Нехай X є комплексним банаховим простором і $H(X)$ є алгеброю усіх цілих функцій на просторі X. Дана алгебра є локально мультиплікативно опуклою (локально m-опуклою) відносно топології рівномірної збіжності на компактних підмножинах простору X. Відомо, що якщо простір X має базис Шаудера, то спектр алгебри $H(X)$ складається з функціоналів обчислення значень в точках. Як наслідок, кожний гомоморфізм алгебри $H(X)$ може бути зображений як оператор композиції з аналітичним відображенням. У застосуваннях часто потрібно мати справу з певними підалгебрами алгебри $H(X)$. Підалгебра $H_b(X)$ алгебри $H(X)$, яка складається з фун-

кцій обмежених на обмежених підмножинах простору X (функцій обмеженого типу), завжди є власною підалгеброю, якщо простір X є нескінченновимірним. Зауважимо, що природною топологією на алгебрі $H_b(X)$ є топологія рівномірної збіжності на обмежених підмножинах простору X. Ця топологія породжується зліченною системою норм, тому є метризовною. Алгебра $H_b(X)$ із даною топологією є алгеброю Фреше. Алгебра $H_b(X)$ досліджувалася багатьма авторами, зокрема Р. Ароном, Б. Коулом, Т. Гамеліном, П. Галіндо, Д. Гарсіа, М. Маестре, Т. Корном, Ж. Мухікою, А. Загороднюком та ін.

Спектр та гомоморфізми алгебри $H_b(X)$ можна повністю описати для певних банахових просторів (напр., якщо $X = c_0$ або X є простором Цірельсона), в той час як у загальному випадку спектр алгебри $H_b(X)$ може мати дуже складну структуру. Таким чином, є раціональним розглянути деякі менші підалгебри аналітичних функцій, щоб мати можливість отримати повний і точний опис їхніх гомоморфізмів. Зокрема, прикладом такої підалгебри є алгебра Фреше $H_{bs}(L_\infty)$ всіх цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі L_∞ всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0, 1]$, для якої в роботах Т. Василишина, П. Галіндо та А. Загороднюка здійснено повний опис спектра і зображено дану алгебру як алгебру аналітичних функцій на спектрі. Зауважимо, що для опису спектра алгебри $H_{bs}(L_\infty)$ суттєво використовувалася наявність зліченного алгебраїчного базису в алгебрі всіх неперервних симетричних поліномів на просторі L_∞, яка є щільною підалгеброю алгебри $H_{bs}(L_\infty)$. Іншими словами, використано той факт, що алгебра $H_{bs}(L_\infty)$ породжена зліченною множиною однорідних поліномів. Дана властивість є типовою і для багатьох інших алгебр аналітичних функцій, які є інваріантними (симетричними) відносно групи або напівгрупи операторів на комплексних банахових просторах. Зокрема, алгебри цілих симетричних (відносно групи перестановок базисних векторів) функцій обмеженого типу на комплексних банахових просторах ℓ_p також є породженими зліченними системами однорідних поліномів.

У роботах Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, А. Загороднюка, Д. Пінаско та І. Залдуендо досліджувалися алгебри симетричних аналітичних функцій на просторах ℓ_p. Ці дослідження були продовжені у роботах А. Загороднюка, П. Галіндо та І. Чернеги. Також результати у цьому напрямку для різних підалгебр були отримані у роботах Р. Арона, Ж. Фалько, Д. Гарсіа, М. Маестре, А. Загороднюка, Т. Василишина, І. Чернеги, В. Кравців, А. Бандури, Ф. Джавад.

Як було зазначено вище, у багатьох випадках алгебри симетричних аналітичних функцій відносно групи симетрій є породжені зліченною множиною однорідних поліномів. Тому є сенс вивчати алгебри, породжені послідовністю алгебраїчно незалежних поліномів (зліченно породжені алгебри) у загальному випадку. У дисертаційній роботі продовжено ці дослідження для довільних зліченно породжених алгебр аналітичних функцій на комплексних банахових просторах.

Основним завданням дисертаційного дослідження є вивчення властивостей алгебр цілих функцій, породжених зліченними множинами алгебраїчно незалежних поліномів на банахових просторах, зокрема опис спектрів таких алгебр та дослідження їх структури, встановлення умов за яких дані алгебри є ізоморфними.

Дисертація складається з анотації, вступу, п'яти розділів, висновків до розділів і загальних висновків, списку використаних джерел та одного додатку, який містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, встановлено зв'язок дослідження з науково-дослідними роботами та проєктами, сформульовано мету, задачі, об'єкт, предмет та методи дослідження, зазначено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, також зазначено, де опубліковано і де було апробовано результати дисертаційного дослідження.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертаційного дослідження та викладенню необхідного теоретичного матеріалу.

Другий розділ присвячено дослідженню властивостей топологічних алгебр аналітичних функцій, породжених зліченними множинами поліномів на комплексних банахових просторах.

У підрозділі 2.1 узагальнено теорему про обчислення радіус-функції лінійного функціонала для підалгебри алгебри Фреше всіх цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$ на комплексному банаховому просторі X, яка має наступну властивість: для кожної функції, яка належить цій підалгебрі, усі члени її ряду Тейлора теж належать підалгебрі.

У підрозділі 2.2 розглянуто підалгебру $H_{b\mathbb{P}}(X)$ алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$, породжену зліченною множиною алгебраїчно незалежних однорідних поліномів $\mathbb{P}$. Доведено, що дана алгебра є алгеброю Фреше і що кожен член розкладу у ряд Тейлора функції, що належить алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$, є алгебраїчною комбінацією елементів множини $\mathbb{P}$. Показано, що кожний нетривіальний неперервний лінійний мультиплікативний функціонал φ, що діє з алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ у множину $\mathbb{C}$, однозначно визначається послідовністю $(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n), \ldots)$ своїх значень на елементах множини $\mathbb{P}$. Таким чином, існує бієкція між спектром (множиною усіх нетривіальних неперервних лінійних мультиплікативних функціоналів) алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ і деякою множиною послідовностей комплексних чисел. Доведено верхню оцінку для послідовностей із цієї множини.

У підрозділі 2.3 розглянуто загальний клас алгебр, породжених послідовностями однорідних поліномів. Досліджено умови, за яких дві такі алгебри є ізоморфними та побудовано декілька прикладів різних зліченно породжених алгебр.

Третій розділ присвячено дослідженню спектрів алгебр цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченними множинами поліномів на деяких просторах послідовностей.

У підрозділі 3.1 описано спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу, породженої послідовністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі, який є замкненим підпростором простору ℓ_∞ усіх обмежених послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ комплексних чисел з нормою $\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ і містить простір c_{00} всіх фінітних послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ комплексних чисел.

Підрозділ 3.2 присвячено дослідженню спектра алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих аналітичних функцій обмеженого типу, породженої послідовністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі ℓ_1. У даному підрозділі також розглянуто пов'язану з описом спектра задачу продовження функцій із цієї алгебри на послідовності, які не належать простору ℓ_1. Також побудовано приклад функції, яка належить даній алгебрі і є добре визначеною на елементі $x_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$, але не може бути продовженою до аналітичної функції обмеженого типу на просторах ℓ_p, де $1 < p < \infty$.

У підрозділі 3.3 розглянуто деякі операції зсуву, які здійснюються на спектрі алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої послідовністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі ℓ_p, де $1 \leq p \leq \infty$.

Четвертий розділ присвячено дослідженню умов ізоморфізму топологічних алгебр цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченними множинами поліномів на комплексних банахових просторах.

У підрозділі 4.1 встановлено умови існування ізоморфізму алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених послідовностями неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів степеня n з одиничними нормами на комплексних банахових просторах.

У підрозділі 4.2 представлено деякі застосування для алгебр симетричних аналітичних функцій обмеженого типу. Зокрема, розглянуто алгебру $H_{bs}(L_\infty)$ цілих функцій обмеженого типу на L_∞, які є симетричними, тобто інваріантними відносно вимірних бієкцій відрізка $[0, 1]$, що зберігають міру, де L_∞ є комплексним банаховим простором усіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій x на відрізку $[0,1]$ з нормою $||x||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,1]}|x(t)|$. Ми доводимо, що алгебра $H_{bs}(L_\infty)$ є ізоморфною до алгебри усіх цілих функцій обмеженого типу, породженої деякою зліченною множиною однорідних поліномів на комплексному банаховому просторі ℓ_∞.

П'ятий розділ присвячено дослідженню алгебраїчних базисів алгебри поліномів, породженої зліченною множиною твірних елементів.

У підрозділі 5.1 розглянуто алгебру поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями елементів множини $\mathbb{P}$. Досліджено які алгебраїчні базиси існують у даній алгебрі і у якому вигляді їх можна подати.

У підрозділі 5.2 встановлено оцінку для коефіцієнтів функцій, що належать алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(\ell_p)$, де $1 \le p < \infty$, для певного виду поліномів $\mathbb{P}$. Також побудовано приклад зліченно породженої алгебри, у якій всі алгебраїчні базиси однорідних поліномів є еквівалентними.

Ключові слова: поліном на нескінченновимірному просторі, однорідний поліном, симетричний поліном, збіжність, рівномірна збіжність, аналітина функція кількох комплексних змінних, аналітична функція на банаховому просторі, симетрична аналітична функція на банаховому просторі, ціла функція, алгебра, алгебра Фреше, спектр алгебри, алгебраїчний базис, функція обмеженого типу, ізоморфізм алгебр.

ABSTRACT

Vasylyshyn S. I. Algebras of analytic functions on Banach spaces generated by a countable set of generating elements. — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Philosophy Doctor Degree in Mathematics, speciality 111 — Mathematics. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2023.

The thesis is fulfilled within the theory of analytic functions on Banach spaces and is devoted to the study of topological algebras of entire functions generated by countable sets of polynomials on complex Banach spaces.

The theory of analytic functions is one of the main sections of modern nonlinear functional analysis. It is known that in many cases the sets of analytic functions on infinite dimensional spaces have the structure of algebras. These algebras can be topologized in some natural way. In many modern investigations topological algebras of analytic functions and spectra of such algebras are studied. In particular, in this field work such scientists as R. Aron, P. Galindo, J. Mujica, M. Maestre, D. Garcia, A. Zagorodnyuk, T. Vasylyshyn, V. Kravtsiv, I. Chernega and others.

Let X be a complex Banach space and $H(X)$ be the algebra of all entire functions on the space X. This algebra is locally multiplicatively convex (locally m-convex) with respect to the topology of the uniform convergence on compact subsets of the space X. It is known that if the space X has a Schauder basis, the spectrum of the algebra $H(X)$ consists of the point evaluation functionals. Consequently, every homomorphism of the algebra $H(X)$ can be represented as a composition operator with an analytic map. In applications we often have to deal with some particular subalgebras of the algebra $H(X)$. The subalgebra $H_b(X)$ of the algebra $H(X)$ comprising of functions which are bounded on bounded subsets of the space X (functions of bounded type), is always the proper subalgebra if the space X is infinite dimensional. Note

that the natural topology on the algebra $H_b(X)$ is the topology of uniform convergence on the bounded subsets of the space X. This topology is generated by the countable set of norms, therefore it is metrizable. The algebra $H_b(X)$ endowed with this topology is the Fréchet algebra. The algebra $H_b(X)$ was studied by many authors, in particular, by R. Aron, B. Cole, T. Gamelin, P. Galindo, D. Garcia, M. Maestre, T. Carne, J. Mujica, A. Zagorodnyuk and others.

Spectrum and homomorphisms of the algebra $H_b(X)$ can be explicitly described for some special cases of Banach spaces (e.g. if $X = c_0$ or X is the Tsirelson space), while in the general case, the spectrum of the algebra $H_b(X)$ may have a very complicated structure. Thus, it is reasonable to consider some smaller subalgebras of analytic functions to get a chance for a complete and explicit description of their homomorphisms. In particular, the example of such subalgebra is the Fréchet algebra $H_{bs}(L_\infty)$ of all entire symmetric functions of bounded type on the complex Banach space L_∞ of all Lebesgue measurable essentially bounded functions on the segment $[0, 1]$. The spectrum of this algebra is described completely and this algebra is represented as the algebra of analytic functions on the spectrum by T. Vasylyshyn, P. Galindo and A. Zagorodnyuk. Note that the existence of the countable algebraic basis in the algebra of all continuous symmetric polynomials on the space L_∞, which is a dense subalgebra of the algebra $H_{bs}(L_\infty)$, played an important role in the description of the spectrum of the algebra $H_{bs}(L_\infty)$. In other words, it was used the fact that the algebra $H_{bs}(L_\infty)$ is generated by the countable set of homogeneous polynomials. This property is typical for many other algebras of analytic functions that are invariant (symmetric) with respect to the group or semigroup of operators on complex Banach spaces. In particular, the algebras of entire symmetric (with respect to the group of permutations of basis vectors) functions of bounded type on the complex Banach spaces ℓ_p are also generated by countable sets of homogeneous polynomials. Algebras of symmetric analytic functions on the spaces ℓ_p were investigated by R. Alencar, R. Aron, P. Galindo,

A. Zagorodnyuk, D. Pinasco and I. Zalduendo. These investigations were continued in the papers of A. Zagorodnyuk, P. Galindo and I. Chernega. Also results in this field for different subalgebras were obtained by R. Aron, J. Falcó, D. Garcia, M. Maestre, A. Zagorodnyuk, T. Vasylyshyn, I. Chernega, V. Kravtsiv, A. Bandura, F. Jawad.

As it was mentioned above, in many cases algebras of symmetric analytic functions with respect to a group of symmetry are generated by the countable set of homogeneous polynomials. Therefore it is reasonable to study algebras, generated by sequences of algebraically independent polynomials (countably generated algebras) in general case. In the thesis these investigations are continued for arbitrary countably generated algebras of analytic functions on complex Banach spaces.

The main task of the dissertation research is to study the properties of algebras of entire functions generated by countable sets of algebraically independent polynomials on Banach spaces, in particular, to describe spectra of such algebras and investigate their structures, to study conditions under which the given algebras are isomorphic.

The thesis consists of an abstract, introduction, five sections, conclusions for each section and general conclusions, bibliography, and appendix that contains the list of author's publications and information about the approbation of the results of research.

The introduction outlines relevance of the research topics, the connection of the thesis with research programs and projects, formulates the purpose, tasks, object, subject and methods of research, notes the scientific novelty and the practical significance of the obtained results, points out the personal contribution of the author and also where the results of the thesis have been published and discussed.

The first section is devoted to the literature review on the topic of the thesis and to the introduction of the necessary theoretical background.

The second section is devoted to the investigation of the properties of topological algebras of analytic functions generated by countable sets of polynomials on complex Banach spaces.

In the subsection 2.1 we generalise the theorem for computing the radius function of a linear functional on case of the subalgebra of the Fréchet algebra of entire functions of bounded type $H_b(X)$ on a complex Banach space X that has the following property: for every function belonging to this subalgebra each term of the Taylor series also belongs to the subalgebra.

In the subsection 2.2 we consider the subalgebra $H_{b\mathbb{P}}(X)$ of the Fréchet algebra of entire functions of bounded type $H_b(X)$ generated by the countable set of algebraically independent homogeneous polynomials $\mathbb{P}$. It is proved that the given algebra is the Fréchet algebra and that every term of the Taylor series expansion of entire function which belongs to the algebra $H_{b\mathbb{P}}(X)$, is an algebraic combination of the elements of the set $\mathbb{P}$. It is shown that every continuous linear multiplicative functional φ acting from $H_{b\mathbb{P}}(X)$ to $\mathbb{C}$ is uniquely determined by the sequence $(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n), \ldots)$ of its values on elements of $\mathbb{P}$. Consequently, there is a bijection between the spectrum (the set of all nontrivial continuous linear multiplicative functionals) of the algebra $H_{b\mathbb{P}}(X)$ and some set of sequences of complex numbers. We prove the upper estimate for sequences from this set.

In the subsection 2.3 we consider the general case of algebras, generated by sequences of homogeneous polynomials. We found some conditions when two such algebras are isomorphic and constructed a lot of examples of different countably generated algebras.

The third section is devoted to the study of spectra of algebras of entire functions of bounded type, generated by countable sets of polynomials on some sequence spaces.

In the subsection 3.1 we investigate the spectrum of the Fréchet algebra of all complex-valued entire analytic functions of bounded type generated by the sequence of polynomials of some special form on a complex Banach space that is a closed subspace of the space ℓ_∞ of all bounded sequences $x = (x_1, x_2, \ldots)$

of complex numbers with the norm $\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$ and contains the space c_{00} of all eventually zero sequences $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ of complex numbers.

The subsection 3.2 is devoted to the study of the spectrum of the Fréchet algebra of all complex-valued entire analytic functions of bounded type generated by the sequence of polynomials of some special form on the complex Banach space ℓ_1. In the given subsection it is also considered the problem of extension of the functions that are the elements of this algebra to the sequences that do not belong to the space ℓ_1, which is related to the problem of the description of the spectrum. It is also constructed an example of the function that belongs to the given algebra and is well defined on the element $x_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$, but cannot be extended to the analytic function of bounded type on the spaces ℓ_p, where $1 < p < \infty$.

The subsection 3.3 is devoted to the study of the shift type operations that can be performed on the spectrum of the Fréchet algebra of entire analytic functions of bounded type generated by the sequence of polynomials of some special form on the complex Banach space ℓ_p, where $1 \leq p \leq \infty$.

The fourth section is devoted to the investigation of conditions of an isomorphism of topological algebras of entire analytic functions of bounded type generated by the countable sets of polynomials on complex Banach spaces.

In the subsection 4.1 we investigate conditions of existence of the isomorphism of the Fréchet algebras of entire functions of bounded type generated by the sequences of continuous algebraically independent homogeneous polynomials of the degree n with norm one on complex Banach spaces.

In the subsection 4.2 we present some applications for algebras of symmetric analytic functions of bounded type. In particular, we consider the subalgebra $H_{bs}(L_\infty)$ of entire functions of bounded type on L_∞ which are symmetric, i.e. invariant with respect to measurable bijections of $[0, 1]$ that preserve the measure, where L_∞ is the complex Banach space of all Lebesgue measured essentially bounded complex-valued functions x on the segment $[0, 1]$ with the norm $||x||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,1]}|x(t)|$. We prove that $H_{bs}(L_\infty)$ is isomorphic to the algebra of all entire functions of bounded type, generated by a countable set of homogeneous polynomials on the complex Banach space ℓ_∞.

The fifth section is devoted to the investigation of the algebraic bases of the algebra of polynomials, generated by a countable set of generating elements.

In the subsection 5.1 we consider the countable set $\mathbb{P}$ of continuous algebraically independent complex-valued n-homogeneous polynomials with unit norms on a complex Banach space X and the algebra $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ of all polynomials which are algebraic combinations of elements of the set $\mathbb{P}$. We investigate what algebraic bases exist in the algebra $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ and in what form they can be represented.

In the subsection 5.2 we establish the estimate for the coefficients of functions that belong to the algebra $H_{b\mathbb{P}}(\ell_p)$ of entire functions of bounded type generated by the sequence of polynomials of some special form $\mathbb{P}$ on the complex Banach space ℓ_p of all sequences $x = (x_1, x_2, \ldots)$ of complex numbers for which the series $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ is convergent with the norm $\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{1/p}$, where $1 \leq p < \infty$. In this subsection we also construct a countably generated algebra, where all normalized algebraic bases of homogeneous polynomials are equivalent.

Key words: polynomial on infinite dimensional space, homogeneous polynomial, symmetric polynomial, convergence, uniform convergence, analytic function on several complex variables, analytic function on a Banach space, symmetric analytic function on a Banach space, entire function, algebra, Fréchet algebra, spectrum of an algebra, algebraic basis, function of a bounded type, isomorphism of algebras.

Список публікацій здобувача, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Halushchak S. I. Spectra of some algebras of entire functions of bounded type, generated by a sequence of polynomials // Carpathian Math. Publ.— 2019. — Vol. 11, № 2. — P. 311 – 320.
   DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.311-320
   URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85078306604&origin=resultslist
2. Halushchak S. I. Isomorphisms of some algebras of analytic functions of bounded type on Banach spaces // Mat. Stud. — 2021. — Vol. 56, Iss. 1. — P. 106 – 112.
   DOI: https://doi.org/10.30970/ms.56.1.107-112
   URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85120080599&origin=resultslist
3. Halushchak S. Algebras of analytic functions on Banach spaces, generated by countable sets of polynomials and their properties // AIP Conference Proceedings — 2022. — Vol. 2483, Article Number 030006.
   DOI: https://doi.org/10.1063/5.0117601
   URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85142505934&origin=resultslist
4. Vasylyshyn S. I. Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces and operations on spectra // Carpathian Math. Publ.— 2023. — Vol. 15, № 1. — P. 104 – 119.
   DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.104-119
   URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85163657874&origin=resultslist
5. Novosad Z., Vasylyshyn S., Zagorodnyuk A. Countably generated algebras of analytic functions on Banach spaces // Axioms. — 2023. — Vol. 12, Iss. 8. — Article Number 798, 21 p.
   DOI: https://doi.org/10.3390/axioms12080798

URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85169106693 &origin=resultslist

Список публікацій здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Галущак С. І. Про спектри алгебр аналітичних функцій на банаховому просторі, породжених зліченною множиною поліномів // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2017. — С. 63.
2. Halushchak S. Spectra of algebras of entire functions, generated by the sequence of polynomials on a Banach space // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September 2017): book of abstracts — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv. — 2017. — P. 24.
3. Halushchak S. Spectra of some algebras of entire functions of bounded type, generated by the sequence of polynomials on a Banach space // Conference on Non Linear Functional Analysis (Valencia, 17–20 October 2017): book of abstracts — Valencia: Universitat Politècnica de Valencia (Spain). — 2017. — P. 38.
4. Галущак С. І. Радіус-функція функціоналів на алгебрі $H_{\mathbb{P}}(X)$ // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2018. — С. 44.
5. Галущак С. І. Деякі властивості алгебр, породжених послідовністю поліномів на банаховому просторі // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки та математики"(Львів, 22–25 травня 2018 р.): збірник наукових праць — Львів: Інститут прикладних проблем механіки

і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. — 2018. — С. 53.

6. Галущак С. І. Про властивості алгебри Фреше, породженої послідовністю поліномів на банаховому просторі // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17 – 19 вересня 2018 р.): матеріали конференції — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2018. — С. 169.
7. Halushchak S. I. Properties of some algebras of entire functions of bounded type, generated by a countable set of polynomials on a Banach space // International Conference "Morse theory and its applications"dedicated to the memory and the 70th anniversary of Volodymyr Sharko (Kyiv, 25 – 28 September 2019): book of abstracts. — P. 15.
8. Halushchak S. I. On spectra of algebras of entire functions of bounded type, generated by sequences of polynomials on Banach spaces // International Conference "Infinite Dimensional Analysis and Topology"dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky (Ivano-Frankivsk, 16 – 19 October 2019): book of abstracts. — P. 19.
9. Halushchak S. On the isomorphism and some other properties of the Frechet algebras of entire functions of bounded type on Banach spaces // International Conference "11th International Skorobohatko Mathematical Conference"(Lviv, 26 – 30 October 2020): book of abstracts. — P. 39.
10. Halushchak S. Isomorphisms of some algebras of analytic functions of bounded type on Banach spaces // International online workshop on approximation theory (Ivano-Frankivsk, 19 – 21 March 2021): book of abstracts. — P. 17.
11. Halushchak S. Algebras of analytic functions on Banach spaces, generated by countable sets of polynomials and their properties // 5th International Conference of Mathematical Sciences (Istanbul, 23 – 27 June 2021): book of abstracts. — Istanbul: Maltepe University (Turkey). — 2021. — P. 54.

12. Vasylyshyn S. I. Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces // International Online Conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis"(Ivano-Frankivsk, 12 – 15 May 2022): book of abstracts. — P. 84 – 85.
13. Vasylyshyn S. Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces and operations on spectra // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023"(Львів, 23 – 25 травня 2023): матеріали конференції. — С. 298.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ 20

ВСТУП 22

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ 33

1.1. Огляд літератури 33

1.2. Попередні відомості 39

1.2.1. Поліноми 39

1.2.2. Аналітичні функції на банаховому просторі 40

1.2.3. Алгебри та їхні спектри 42

1.2.4. Алгебра $H_b(X)$ 44

1.2.4. Алгебра симетричних аналітичних функцій на банаховому просторі 46

1.2.5. Гіперфакторіал натурального числа 48

1.2.6. Гіперциклічний оператор 48

РОЗДІЛ 2. АЛГЕБРИ, ПОРОДЖЕНІ ЗЛІЧЕННИМИ МНОЖИНАМИ ПОЛІНОМІВ 50

2.1. Радіус-функція лінійного функціонала на підалгебрі алгебри $H_b(X)$ 50

2.2. Алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ та її властивості 54

2.3. Алгебри породжені послідовностями поліномів 59

2.4. Висновки до розділу 2 70

РОЗДІЛ 3. СПЕКТРИ АЛГЕБР ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ ПОЛІНОМІВ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ 71

3.1. Спектр алгебри $H_{b\mathbb{I}}(X)$, де $c_{00} \subset X \subset \ell_\infty$ 71

3.2. Спектр алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$ 79

3.3. Операції на спектрі алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \leq p \leq \infty$ 90

3.4. Висновки до розділу 3 99

РОЗДІЛ 4. ІЗОМОРФІЗМИ ДЕЯКИХ АЛГЕБР АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ТИПУ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ 100

4.1. Умови неперервності 100
4.2. Застосування для алгебр симетричних аналітичних функцій 105
4.3. Висновки до розділу 4 107
РОЗДІЛ 5. АЛГЕБРАЇЧНІ БАЗИСИ АЛГЕБРИ ПОЛІНОМІВ, ПОРОДЖЕНОЇ ЗЛІЧЕННОЮ МНОЖИНОЮ ТВІРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ 108
5.1. Алгебра $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ та її алгебраїчні базиси 108
5.2. Еквівалентність алгебраїчних базисів 121
5.3. Висновки до розділу 5 129
ВИСНОВКИ 130
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 133
ДОДАТКИ 145

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множини всіх натуральних, дійсних, комплексних чисел відповідно

$\mathbb{N}_0$ — множина всіх невід'ємних цілих чисел

$\mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$ — множини всіх додатних раціональних, дійсних чисел відповідно

$\mathbb{N}_0^n$ — n-тий декартовий степінь множини $\mathbb{N}_0$

$\mathbb{C}^\infty$ — множина всіх послідовностей комплексних чисел

$B(a, r)$ — відкрита куля банахового простору X із центром $a \in X$ і радіусом r, де $r \in \mathbb{R}^+$

$\bar{B}(a, r)$ — замкнена куля банахового простору X із центром $a \in X$ і радіусом r, де $r \in \mathbb{R}^+$

$H(n)$ — гіперфакторіал натурального числа n

$\mathbb{I}$ — зліченна множина поліномів $I_1^{(Y)}, I_2^{(Y)}, \ldots$ на лінійному просторі Y, такому що $c_{00} \subset Y \subset \ell_\infty$, які визначені формулою $I_n^{(Y)}(y) = y_n^n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $y = (y_1, y_2, \ldots) \in Y$

$\mathbb{P}$ — зліченна множина неперервних алгебраїчно незалежних комплекснозначних поліномів $P_1, P_2, \ldots$ на комплексному банаховому просторі X, таких що P_n є n-однорідним поліномом і $\|P_n\|_1 = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}_\mathbb{P}(X)$ — алгебра, що складається з усіх поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями елементів множини $\mathbb{P}$.

$H_b(X)$ —	алгебра Фреше всіх цілих комплекснозначних аналітичних функцій обмеженого типу (обмежених на обмежених множинах) на комплексному банаховому просторі X
$H_{b\mathbb{P}}(X)$ —	алгебра Фреше всіх цілих комплекснозначних аналітичних функцій обмеженого типу, породжена зліченною множиною поліномів $\mathbb{P}$ на комплексному банаховому просторі X
$H_{bs}(X)$ —	алгебра Фреше всіх симетричних цілих комплекснозначних аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X
$M_{b\mathbb{P}}(X)$ —	спектр алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$
δ_x —	функціонал обчислення значення в точці x
$\Gamma_{\mathbb{P}}$ —	відображення, яке діє з множини $M_{b\mathbb{P}}(X)$ у множину $\mathbb{C}^\infty$ і визначене формулою $\Gamma_{\mathbb{P}}(\varphi) = (\varphi(P_1), \varphi(P_2), \ldots)$ для кожного характера $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}(X)$, де $\mathbb{P} = (P_1, P_2, \ldots)$

ВСТУП

Актуальність теми. Теорія аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах є одним із основних розділів сучасного нелінійного функціонального аналізу. У багатьох сучасних дослідженнях вивчаються топологічні алгебри аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах та спектри таких алгебр. Зокрема, даною тематикою займаються такі зарубіжні та вітчизняні вчені як Р. Арон, П. Галіндо, Ж. Мухіка, М. Маестре, Д. Гарсіа, А. Загороднюк, Т. Василишин, В. Кравців, І. Чернега та ін.

Теорія диференціювання функцій від нескінченної кількості змінних розпочала свій розвиток наприкінці XIX — на початку XX століття завдяки роботам В. Вольтерра, М. Фреше, Г. фон Коха. Зокрема, М. Фреше ввів поняття похідної і полінома на нескінченновимірних просторах. Дослідження аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних були розпочаті Г. фон Кохом. Результати його роботи були узагальнені Д. Гільбертом. У другому десятилітті XX століття значний внесок в теорію було зроблено Р. Гато. У 1923 році Н. Вінер узагальнив велику кількість класичних результатів на випадок аналітичних функцій від однієї комплексної змінної зі значеннями у нескінченновимірних просторах. У 1931 році В. Богненблуст і Е. Хілле ввели покращену версію означення однорідного полінома. Р. С. Мартін у 1932 році використав підхід через степеневі ряди для розробки теорії аналітичних функцій на банахових просторах. Сучасне означення аналітичної функції на банаховому просторі було введено незалежно А. Е. Тейлором і А. М. Грейвсом. Також у 1930-х роках розвитком теорії аналітичних функцій на банахових просторах займалися А. Д. Міхал, А. Х. Кліфорд, І. Е. Хайберг, С. Банах, В. Орліч, С. Мазур.

Подальший розвиток теорії пов'язаний із дослідженнями М. А. Цорна, Ж. Себастьяо е Сілви, Г. Х. Бремермана, А. Дуаді., А. Картана, М. Ерве, П. Лелонга, Л. Нахбіна, А. Мартіна, К. Стейна.

Зауважимо, що сукупності аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах у багатьох випадках утворюють алгебри, які можна певним природним чином топологізувати.

Нехай X є комплексним банаховим простором і $H(X)$ є алгеброю усіх цілих функцій на просторі X. Дана алгебра є локально мультиплікативно опуклою (локально m-опуклою) відносно топології рівномірної збіжності на компактних підмножинах простору X. Відомо, якщо X має базис Шаудера, то спектр алгебри $H(X)$ складається з функціоналів обчислення значень в точках. Як наслідок, кожний гомоморфізм алгебри $H(X)$ може бути зображений як оператор композиції з аналітичним відображенням. У застосуваннях часто потрібно мати справу з певними підалгебрами алгебри $H(X)$. Підалгебра $H_b(X)$ алгебри $H(X)$, яка складається з функцій обмежених на обмежених підмножинах простору X (функцій обмеженого типу), і завжди є власною підалгеброю, якщо простір X є нескінченновимірним. Зауважимо, що природною топологією на алгебрі $H_b(X)$ є топологія рівномірної збіжності на обмежених підмножинах простору X. Ця топологія породжується зліченною системою норм, тому є метризовною. Алгебра $H_b(X)$ із даною топологією є алгеброю Фреше. Алгебра $H_b(X)$ досліджувалася багатьма авторами, зокрема Р. Ароном, Б. Коулом, Т. Гамеліном, П. Галіндо, Д. Гарсіа, М. Маестре, Т. Корном, Ж. Мухікою, А. Загороднюком та ін.

Спектр та гомоморфізми алгебри $H_b(X)$ можна повністю описати для певних банахових просторів (напр., якщо $X = c_0$ або X є простором Цірельсона), в той час як у загальному випадку спектр алгебри $H_b(X)$ може мати дуже складну структуру. Таким чином, є раціональним розглянути деякі менші підалгебри аналітичних функцій, щоб мати можливість отримати повний і точний опис їхніх гомоморфізмів. Зокрема, прикладом такої підалгебри є алгебра Фреше $H_{bs}(L_\infty)$ всіх цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі L_∞ всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0, 1]$, для якої в роботах Т. Василишина, П. Галіндо та А. Загороднюка здійснено повний опис спектра і зображено дану алгебру як алгебру аналітичних функцій на спектрі.

Зауважимо, що для опису спектра алгебри $H_{bs}(L_\infty)$ суттєво використовувалася наявність зліченного алгебраїчного базису в алгебрі всіх неперервних симетричних поліномів на просторі L_∞, яка є щільною підалгеброю алгебри $H_{bs}(L_\infty)$. Іншими словами, використано той факт, що алгебра $H_{bs}(L_\infty)$ породжена зліченною множиною однорідних поліномів. Дана властивість є типовою і для багатьох інших алгебр аналітичних функцій, які є інваріантними (симетричними) відносно групи або напівгрупи операторів на комплексних банахових просторах. Зокрема, алгебри цілих симетричних (відносно групи перестановок базисних векторів) функцій обмеженого типу на комплексних банахових просторах ℓ_p також є породженими зліченними системами однорідних поліномів.

У роботах Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, А. Загороднюка, Д. Пінаско та І. Залдуендо досліджувалися алгебри симетричних аналітичних функцій на просторах ℓ_p. Ці дослідження були продовжені у роботах А. Загороднюка, П. Галіндо та І. Чернеги. Також результати у цьому напрямку для різних підалгебр були отримані у роботах Р. Арона, Дж. Фалько, Д. Гарсіа, М. Маестре, А. Загороднюка, Т. Василишина, І. Чернеги, В. Кравців, А. Бандури, Ф. Джавад.

Як було зазначено вище, у багатьох випадках алгебри симетричних аналітичних функцій відносно групи симетрій є породжені зліченною множиною однорідних поліномів. Тому є сенс вивчати алгебри, породжені послідовністю алгебраїчно незалежних поліномів (зліченно породжені алгебри) у загальному випадку. У дисертаційній роботі продовжено ці дослідження для довільних зліченно породжених алгебр аналітичних функцій на комплексних банахових просторах. Зокрема, побудовано описи спектрів топологічних алгебр цілих функцій обмеженого типу, породжених послідовностями n-однорідних поліномів деякого спеціального вигляду на комплексних просторах, що є замкненими підпросторами простору ℓ_∞ і містять лінійний простір фінітних послідовностей c_{00} та на комплексному просторі ℓ_1. Також побудовано деякі операції на спектрах певних зліченно породжених алгебр аналітичних функцій на комплексних банахових просторах ℓ_p, де $1 \leq p \leq \infty$. Крім цього, у роботі описано умови за яких дві зліченно породжені алгебри є ізоморфними та представлено деякі застосування для алгебр симетричних аналітичних функцій обмеженого типу. Також побудовано зліченно породжену алгебру, у якій всі нормовані алгебраїчні базиси однорідних поліномів є еквівалентними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконувалося у рамках реалізації проєкту із виконання наукових досліджень і розробок "Симетрії в алгебраїчних та топологічних структурах на нескінченновимірних аналітичних многовидах та їх можливі застосування" (реєстраційний номер проєкту 2020.02/0025, 0120U103996), а також, у рамках науково-дослідної роботи "Дослідження симетричних функцій на деяких банахових просторах" (реєстраційний номер 0119U103204) за підтримки Гранту Президента України для молодих вчених.

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є вивчення властивостей алгебр цілих функцій, породжених зліченними множинами алгебраїчно незалежних поліномів на банахових просторах, опис спектрів та дослідження структури спектрів таких алгебр, встановлення умов за яких дані алгебри є ізоморфними, що передбачає вирішення таких задач:

- узагальнити теорему про обчислення радіус-функції функціонала на випадок підалгебр алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$, де X — комплексний банахів простір;

- дослідити які алгебраїчні базиси існують в алгебрі $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ усіх поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями неперервних алгебраїчно незалежних комплекснозначних n-однорідних поліномів норми 1 на просторі X, і в якому вигляді їх можна подати;

- довести, що підалгебра алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$, породжена зліченною множиною неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів, є алгеброю Фреше;

- дослідити загальний вигляд елементів алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів;

- встановити оцінку зверху для послідовності значень характерів зі спектру алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів, на множині цих поліномів;

- встановити оцінку для коефіцієнтів функцій, що належать алгебрі Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі ℓ_p усіх послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ комплексних чисел, для яких ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ збіжний з нормою $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$, де $1 \leq p < \infty$;

- побудувати приклад зліченно породженої алгебри, в якій усі нормовані алгебраїчні базиси однорідних поліномів є еквівалентними;

- довести, що кожну функцію, яка є елементом алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів залежних від скінченної кількості координат на комплексному банаховому просторі, що є замкненим підпростором простору ℓ_∞ усіх обмежених послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ комплексних чисел з нормою $\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ і містить лінійний простір c_{00} фінітних послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ комплексних чисел, можна єдиним чином аналітично продовжити на простір ℓ_∞;

- довести, що алгебра Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжена сукупністю поліномів залежних від скінченної кількості координат на комплексному банаховому просторі, що є замкненим підпростором простору ℓ_∞ і містить простір c_{00}, є ізометрично ізоморфною до алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів на просторі ℓ_∞;

- описати спектр алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі, що є замкненим підпростором простору ℓ_∞ і містить простір c_{00};

- дослідити спектр алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі ℓ_1;

- дослідити операції зсуву, які здійснюються на спектрах алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених сукупностями поліномів деякого спеціального вигляду на просторах ℓ_p, де $1 \leq p \leq \infty$;

- встановити умови ізоморфізму алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених послідовностями неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів на комплексних банахових просторах;

- побудувати ізоморфізм алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному банахововому просторі L_∞ усіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій x на відрізку $[0, 1]$ з нормою $||x||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,1]}|x(t)|$ та алгебри усіх цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною однорідних поліномів на комплексному банахововому просторі ℓ_∞.

Об'єктом дослідження є алгебри цілих функцій, породжені зліченними множинами алгебраїчно незалежних поліномів на банахових просторах, та спектри таких алгебр.

Предметом дослідження є властивості алгебр цілих функцій, породжених зліченними множинами алгебраїчно незалежних поліномів на банахових просторах, структури спектрів таких алгебр.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використано методи математичного аналізу, нескінченновимірного комплексного аналізу, теорії аналітичних функцій, теорії алгебр Фреше.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертаційної роботи є новими. У роботі вперше:

- узагальнено теорему про обчислення радіус-функції функціонала на випадок підалгебри алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$, де X — комплексний банахів простір, яка має наступну властивість: для кожної функції, яка належить цій підалгебрі, усі члени її ряду Тейлора теж належать підалгебрі;
- досліджено які алгебраїчні базиси існують в алгебрі $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ усіх поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями неперервних алгебраїчно незалежних комплекснозначних n-однорідних поліномів норми 1 на просторі X, і в якому вигляді їх можна подати;
- доведено, що підалгебра алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$, породжена зліченною множиною неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів, є алгеброю Фреше;
- встановлено загальний вигляд елементів алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів;
- встановлено оцінку зверху для послідовності значень характерів зі спектру алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів, на множині цих поліномів;
- встановлено оцінку для коефіцієнтів функцій, що належать алгебрам Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченними множинами неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів деякого спеціального вигляду на просторах ℓ_p, де $1 \leq p < \infty$;
- побудовано приклад зліченно породженої алгебри, в якій усі нормовані алгебраїчні базиси однорідних поліномів є еквівалентними;

- доведено, що кожну функцію, яка є елементом алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів залежних від скінченної кількості координат на комплексному банаховому просторі, що є замкненим підпростором простору ℓ_∞ і містить простір c_{00}, можна єдиним чином аналітично продовжити на простір ℓ_∞;

- доведено, що алгебра Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжена сукупністю поліномів залежних від скінченної кількості координат на комплексному банаховому просторі, що є замкненим підпростором простору ℓ_∞ і містить c_{00}, є ізометрично ізоморфною до алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів на просторі ℓ_∞;

- описано спектр алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі, що є замкненим підпростором простору ℓ_∞ і містить простір c_{00};

- досліджено спектр алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі ℓ_1;

- досліджено операції зсуву, які здійснюються на спектрах алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених сукупностями поліномів деякого спеціального вигляду на просторах ℓ_p, де $1 \leq p \leq \infty$;

- встановлено умови ізоморфізму алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених послідовностями неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів на комплексних банахових просторах;

- побудовано ізоморфізм алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному банахововому просторі L_∞ та алгебри усіх цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною однорідних поліномів на комплексному банахововому просторі ℓ_∞.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в теорії аналітичних функцій на банахових просторах, теорії алгебр Фреше, зокрема для дослідження алгебр симетричних аналітичних функцій на просторах ℓ_p, де $1 \leq p < +\infty$, та $L_\infty[a, b]$, теорії поліномів на банахових просторах.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації, що виносяться на захист, отримано авторкою самостійно. У роботі [80] А. В. Загороднюку належать постановка задач та аналіз отриманих результатів, З. Г. Новосад належать результати розділу 6.

Апробація результатів роботи. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на:

- Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.);
- Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125 річниці від дня народження Стефана Банаха (Львів, 18–23 вересня 2017 р.);
- Конференції з нелінійного функціонального аналізу (Валенсія, Іспанія, 17-20 жовтня 2017 р.);
- Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.);
- Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики"(Львів, 22–25 травня 2018 р.);
- Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях”

присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики (Чернівці, 17-19 вересня, 2018 р.);

- Міжнародній конференції "Теорія Морса та її застосування присвяченій пам'яті і 70 річниці з дня народження Володимира Шарка (Київ, 25 – 28 вересня 2019 р.);
- Міжнародній конференції "Нескінченновимірний аналіз і топологія присвяченій 70 річниці з дня народження професора Олега Лопушанського (Івано-Франківськ, 16 – 19 жовтня 2019 р.);
- Одинадцятій міжнародній математичній конференції імені В. Скоробогатька (Львів, 26 – 30 жовтня 2020 р.);
- Міжнародному онлайн-семінарі з теорії наближень (Івано-Франківськ, 19 – 21 березня 2021 р.);
- П'ятій міжнародній конференції математичних наук (Стамбул, Туреччина, 23 – 27 червня 2021 р.);
- Міжнародній онлайн-конференції "Сучасні тенденції абстрактного та прикладного аналізу"(Івано-Франківськ, 12 – 15 травня 2022 р.);
- Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023"(Львів, 23 – 25 травня 2023 р.).
- Звітних наукових конференціях викладачів, докторантів, аспірантів Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;
- Науковому семінарі відділу аналізу, геометрії та топології Інситуту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів).

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 18 друкованих працях, серед яких: 5 статей у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях [51–53,80,94], решта у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій [1–4, 49, 50, 54–58, 93, 95]; 5 статей опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection [51–53, 80, 94].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел і додатка. Повний обсяг роботи становить 149 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел займає 12 сторінок і містить 113 найменувань. Додаток займає 5 сторінок і містить список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі наведено необхідний теоретичний матеріал. Зроблено огляд результатів досліджень, які стосуються теми дисертації. Усі поняття і твердження, які не належать автору, наведено із зазначенням авторства і відповідного посилання на джерело.

1.1. Огляд літератури

Теорія диференціювання функцій від нескінченної кількості змінних розпочала свій розвиток наприкінці XIX — на початку XX століття завдяки роботам В. Вольтерра, М. Фреше, Г. фон Коха. Зокрема, поняття похідної і полінома на нескінченновимірних просторах було введено М. Фреше в роботах [35], [36]. Дослідження аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних були розпочаті Г. фон Кохом в роботі [66]. Результати даної роботи були узагальнені Д. Гільбертом. В другому десятилітті XX століття значний внесок в теорію було зроблено Р. Гато (див. [43–45]). У 1923 році Н. Вінер узагальнив велику кількість класичних результатів на випадок аналітичних функцій від однієї комплексної змінної зі значеннями у нескінченновимірних просторах. В 1931 році В. Богненблуст і Е. Хілле в роботі [19], присвяченій вивченню рядів Діріхле на нескінченновимірних просторах, ввели покращену версію означення однорідного полінома. Р. С. Мартін в 1932 році (див. [72]) використав підхід через степеневі ряди для розробки теорії аналітичних функцій на банахових просторах. Сучасне означення аналітичної функції на банаховому просторі було введено незалежно А. Е. Тейлором [89], [90] і А. М. Грейвсом [48]. Також у 1930-х роках розвитком теорії аналітичних функцій на банахових просторах займалися А. Д. Міхал, А. Х. Кліфорд, І. Е. Хайберг, С. Банах, В. Орліч, С. Мазур.

Подальший розвиток теорії пов'язаний із дослідженнями М. А. Цорна [111–113], Ж. Себастьяо е Сілви [85], [86], Г. Х. Бремермана, А. Дуаді.

Як зазначає Ш. Дінін у [31], дисертація А. Дуаді [33] привернула до теорії аналітичних функцій на банахових просторах увагу таких математиків як А. Картан, М. Ерве, Г. Х. Бремерман, П. Лелонг, Л. Нахбін, А. Мартіну, К. Стейн і стимулювала їх скеровувати їхніх учнів до вивчення нескінченновимірної аналітичності. Наслідком цього став бурхливий розвиток даної теорії.

Зауважимо, що сукупності аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах у багатьох випадках утворюють алгебри, які можна певним природним чином топологізувати. Найбільш відомими такими алгебрами є алгебра $H(X)$ всіх цілих функцій на банаховому просторі X і її підалгебра $H_b(X)$ всіх цілих функцій обмеженого типу (обмежених на обмежених множинах) на просторі X, яка, із топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах, має структуру алгебри Фреше. Вперше дані алгебри як топологічні векторні простори вивчалися у роботах [37], [65], [73].

Зазначимо, що функція $f((x_1, x_2, \ldots)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^n$, визначена на сепарабельному гільбертовому просторі, є цілою аналітичною функцією на всьому просторі, але є необмеженою на кожній кулі з центром у нулі і радіусом, більшим від 1. Таким чином, дана функція f належить алгебрі $H(\ell_2)$, але не належить алгебрі $H_b(\ell_2)$. Згідно з теоремою Джозефсона-Нізенцвейга існує $*$-слабко збіжна до нуля послідовність лінійних неперервних функціоналів з одиничними нормами на кожному нескінченновимірному банаховому просторі. На основі цієї теореми у роботі [64] побудовано приклад цілої аналітичної функції необмеженого типу на довільному нескінченновимірному банаховому просторі X. Тобто, побудовано елемент алгебри $H(X)$, який не належить алгебрі $H_b(X)$. Отже, у випадку нескінченновимірного банахового простору X алгебра $H(X)$ є строго ширшою від алгебри $H_b(X)$.

У 1941 році І. М. Гельфанд довів, що кожну напівпросту комутативну банахову алгебру можна подати у вигляді підалгебри алгебри неперервних функцій на її спектрі (множині максимальних ідеалів). Пізніше аналогічні результати було встановлено для алгебр Фреше. Тому для дослідження банахових алгебр і алгебр Фреше важливо знати структури спектрів цих алгебр. Відомо, що між множиною максимальних ідеалів і множиною неперервних лінійних мультиплікативних функціоналів (неперервних комплексних гомоморфізмів) існує взаємнооднозначна відповідність, яка полягає в тому, що ядро кожного характера є максимальним ідеалом і для кожного максимального ідеала існує характер, ядром якого є цей ідеал. Тому спектр алгебри ототожнюють із множиною характерів.

Спектри алгебр аналітичних функцій на банахових просторах почали активно досліджувати наприкінці 1980-х — на початку 1990-х років в роботах Р. Арона, Б. Коула, Т. Корна, Т. Гамеліна, П. Галіндо, Д. Гарсії, М. Маестре, Ж. Мухіки, П. Бістрьома, Х. Харамілло, М. Ліндстрьома та інших авторів (див. [9–11], [17], [20], [77]). Зокрема, в роботі Р. Арона, Б. Коула, Т. Гамеліна [9] досліджується спектр алгебри $H_b(X)$. В даній роботі показано, що для довільного лінійного мультиплікативного функціонала на алгебрі $H_b(X)$ існує напрямленість елементів простору X, збіжна до цього функціонала у слабко поліноміальній топології. В згаданому вище результаті не вимагається, щоб функціонал був неперервним. Зауважимо, що питання існування лінійного мультиплікативного розривного функціонала на алгебрі Фреше є відкритою проблемою, відомою як проблема Майкла (див. [32], [38], [74]). Також у роботах [9] і [10] показано, що спектр алгебри $H_b(X)$ збігається із другим спряженим простором до простору X у випадку, якщо алгебра всіх поліномів скінченного типу (тобто алгебра, породжена усіма лінійними неперервними функціоналами) є щільною в алгебрі $H_b(X)$. Зауважимо, що даний результат тісно пов'язаний із задачею продовження полінома на другий спряжений простір, якій, зокрема, присвячено роботи [7], [8], [30], [75], [110]. У випадку існування на просторі X полінома, що не є слабко неперервним на обмежених підмножинах простору X, як показано в роботі [11], існує елемент спектра алгебри $H_b(X)$, який не належить другому спряженому простору до простору X. Питання існування такого полінома пов'язане із питанням властивості апроксимації для спряженого простору до простору X (див. [15]). В роботі [78] встановлено деякі умови, за яких всі неперервні мультиплікативні лінійні функціонали алгебри аналітичних функцій обмеженого типу, заданих на фіксованій збалансованій відкритій підмножині банахового простору X є функціоналами обчислення значень у точках. А саме, якщо спряжений простір до простору X має властивість апроксимації, то згадана вище властивість виконується тоді і тільки тоді, коли простір X є рефлексивним і кожен неперервний поліном можна наблизити поліномами скінченного типу. Таким простором, наприклад, є простір Цірельсона (див. [92]). А. В. Загороднюк в роботах [107], [108] побудував послідовність спряжених банахових просторів до деяких підпросторів просторів поліномів таку, що кожен неперервний мультиплікативний лінійний функціонал на алгебрі $H_b(X)$ можна подати у вигляді послідовності елементів цих просторів.

Спектр алгебри $H_b(X)$ повністю описаний для певних банахових просторів (напр. якщо $X = c_0$ або якщо X є простором Цірельсона [18], [?], [78]), в той час, як у загальному випадку спектр алгебри $H_b(X)$ може мати дуже складну структуру (див. [9], [107]). Тому доцільно розглянути деякі менші підалгебри аналітичних функцій, для яких можна отримати повний і точний опис їхніх спектрів. Такими, наприклад, є деякі підалгебри алгебри $H_b(X)$, породжені зліченною множиною поліномів, типовими прикладами яких є алгебри аналітичних симетричних функцій.

Симетричні функції на банахових просторах вивчалися у роботах [6], [12], [14], [23], [26], [39–42], [47], [79]. Хоча поняття симетричної функції є досить загальним, та для різних класів банахових просторів існують деякі особливі природні групи симетрій. Наприклад, групи перестановок усіх координат (див. [6], [23], [26], [47], [79]) або блоків координат (див. [16], [69], [99]) є природніми групами симетрій на банахових просторах послідовностей із симетричними базисами. Типовими групами симетрій на переставно-інваріантних (див. [70, Означення 2.a.1, с. 117]) банахових просторах функцій (див. [39–41], [47], [79], [100]) і на декартових степенях цих просторів (див. [96–98], [101–105]) є групи операторів, які діють як композиції свого аргумента з деяким перетворенням області визначення цього аргумента, яке зберігає міру.

Вивчення симетричних поліномів на нескінченновимірних просторах почалося з роботи [79] (для класичних результатів у скінченновимірному випадку див., наприклад, [71, 106]). У роботі [79] автори розглянули симетричні неперервні поліноми на дійсних банахових просторах ℓ_p та $L_p[0,1]$, де $p \in [1, +\infty)$. Зокрема, у [79] автори побудували алгебраїчні базиси алгебр вищезгаданих поліномів. У роботі [47] було розглянуто симетричні неперервні поліноми на сепарабельних дійсних банахових просторах послідовностей із симетричним базисом (див. [70, Означення. 3.a.1, с. 113]) і на сепарабельних переставно-інваріантних дійсних банахових просторах функцій (див. [70, Означення 2.a.1, с. 117]). Топологічні алгебри симетричних голоморфних функцій на просторах ℓ_p вперше вивчали у роботі [6]. Симетричні поліноми і симетричні голоморфні функції обмеженого типу на банахових просторах послідовностей вивчали у роботах [23–26, 67–69, 99]. Симетричні голоморфні функції необмеженого типу на банахових просторах послідовностей вивчали у роботах [27, 59–61]. Симетричні поліноми і симетричні голоморфні функції на банахових просторах усіх вимірних за Лебегом функцій та на декартових степенях таких просторів вивчали у роботах [39, 41, 96, 97, 101]. У працях [12–14, 42] було застосовано найбільш загальний підхід до вивчення симетричних функцій.

Розглянемо приклад алгебри симетричних аналітичних функцій, для якої отримано повний опис спектра, досліджено аналітичну структуру на спектрі і отримано зображення алгебри у вигляді алгебри аналітичних функцій на спектрі. У роботі [39] було побудовано алгебраїчний базис алгебри симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі L_∞ усіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0, 1]$ і було описано спектр алгебри

Фреше $H_{bs}(L_\infty)$ симетричних аналітичних цілих функцій, які є обмеженими на обмежених множинах, на просторі L_∞. У роботі [41] було показано, що алгебра $H_{bs}(L_\infty)$ є ізоморфною до алгебри усіх аналітичних функцій на сильно спряженому просторі до топологічного векторного простору усіх цілих функцій на комплексному просторі $\mathbb{C}$. Також у роботі [41] було показано, що алгебра $H_{bs}(L_\infty)$ є тест алгеброю для відомої проблеми Майкла (див. [74]). У роботі [100] було показано, що алгебра $H_{bs}(L_\infty)$ є ізоморфною до алгебри симетричних цілих функцій на комплексному банаховому просторі усіх комплекснозначних інтегровних за Лебегом суттєво обмежених функцій на півосі.

1.2. Попередні відомості

Нехай X, E та F – комплексні банахові простори. Позначимо $\mathbb{N}$ множину всіх натуральних чисел і $\mathbb{N}_0$ множину $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Позначимо $\mathbb{Q}^+$ множину всіх додатних раціональних чисел і $\mathbb{C}$ множину всіх комплексних чисел. Позначимо $\mathbb{R}$ множину всіх дійсних чисел і $\mathbb{R}^+$ множину всіх додатних дійсних чисел. Позначимо ℓ_p, $1 \le p < \infty$, – комплексний банахів простір, що складається з усіх послідовностей комплексних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для яких виконується умова $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, з нормою $\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{1/p}$. Позначимо ℓ_∞ – комплексний банахів простір усіх обмежених послідовностей комплексних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$, з нормою $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Позначимо c_{00} – простір усіх фінітних послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ комплексних чисел з нормою $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Позначимо $B(a, r)$ і $\bar{B}(a, r)$ відповідно відкриту і замкнену кулі із центром $a \in X$ і радіусом r, де $r \in \mathbb{R}^+$.

1.2.1. Поліноми

Означення 1.1. *Відображення $A : X^n \to \mathbb{C}$, де $n \in \mathbb{N}$, яке є лінійним відносно кожного зі своїх n аргументів при інших $n - 1$ аргументах фіксованих, називають n-лінійною формою.*

Означення 1.2. *Для кожного $n \in \mathbb{N}$ відображення $P : X \to \mathbb{C}$ називають n-однорідним поліномом, якщо існує деяка n-лінійна форма $A_P : X^n \to \mathbb{C}$ звуження на діагональ якої дорівнює P, тобто*

$$P(x) = A_P(\underbrace{x, ..., x}_{n})$$

для кожного $x \in X$.

Позначимо $\mathcal{P}_a^n(X)$ лінійний простір усіх n-однорідних поліномів, які діють з простору X у простір $\mathbb{C}$. Також нехай $\mathcal{P}^0(X)$ є лінійним простором сталих функцій з X у $\mathbb{C}$. Для кожного $P \in \mathcal{P}_a^n(X)$ покладемо

$$\|P\|_1 = \sup\{|P(x)| : x \in X, \|x\| \le 1\}. \tag{1.1}$$

Відомо, що поліном $P \in \mathcal{P}_a^n(X)$ є неперервним тоді і лише тоді, коли $\|P\|_1 < \infty$. Позначимо $\mathcal{P}^n(X)$ нормований простір усіх неперервних n-однорідних поліномів, які діють з простору X у простір $\mathbb{C}$, із нормою (1.1). Зауважимо, що простір $\mathcal{P}^n(X)$ є банаховим простором.

Означення 1.3. *Відображення $P : X \to \mathbb{C}$ називають поліномом степеня щонайбільше n, де $n \in \mathbb{N}_0$, якщо для нього існують $P_0, P_1, \ldots, P_n$ такі, що*

$$P = P_0 + P_1 + ... + P_n,$$

де P_j є j-однорідним поліномом для кожного $j \in \{0, \ldots, n\}$.

1.2.2. Аналітичні функції на банаховому просторі

Означення 1.4. *Степеневим рядом у околі точки $a \in X$ називають ряд із відображень вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-a)$, де $P_0 \in \mathbb{C}$ і P_n є n-однорідним поліномом для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Означення 1.5. *Радіусом збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-a)$ називають супремум тих $r \in \mathbb{R}^+$, для яких ряд рівномірно збігається на кулі $\bar{B}(a,r)$.*

Згідно із [76, с. 27, теорема 4.3], радіус збіжності R степеневого ряду можна обчислити за формулою Коші-Адамара

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \|P_n\|_1^{1/n}.$$

Означення 1.6. *Нехай U – відкрита підмножина простору X. Відображення $f : U \to X$ називають аналітичним або голоморфним, якщо для кожного $a \in U$ існують куля $B(a,r) \subset U$ і послідовність поліномів $f_0, f_1, \ldots,$ де $f_0 \in \mathbb{C}$ і f_j є j-однорідним поліномом для кожного $j \in \mathbb{N}$, така, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x-a)$ збігається рівномірно до $f(x)$ для $x \in B(a,r)$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x-a)$ називають рядом Тейлора функції f у околі точки a. У випадку $U = X$ функцію f називають цілою.*

Згідно із [76, с. 47, наслідок 7.3], члени ряду Тейлора для цілої функції $f : X \to \mathbb{C}$ можна знайти за допомогою інтегральної формули Коші

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta x)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta, \tag{1.2}$$

де $r \in \mathbb{R}^+$.

Означення 1.7. *Нехай U – відкрита підмножина простору X, $f : U \to \mathbb{C}$ – аналітична функція і нехай $a \in U$. Радіусом обмеженості функції f у точці a називають супремум тих $r \in \mathbb{R}^+$, для яких $\bar{B}(a, r) \subset U$ і f – обмежена на $\bar{B}(a, r)$.*

Згідно із [76, с. 52, теорема 7.13], для цілої функції радіус обмеженості в нулі збігається із радіусом збіжності ряду Тейлора цієї функції.

Означення 1.8. *Функцію, для якої радіус обмеженості дорівнює нескінченності, називають функцією обмеженого типу. Іншими словами, функція обмеженого типу – це функція, яка є обмеженою на обмежених множинах.*

Означення 1.9. (Див. [76, с. 58, означення 8.1]) *Нехай U є відкритою підмножиною простору E. Відображення $f : U \to F$ називають G-голоморфним або G-аналітичним, якщо для всіх $a \in U$ і $b \in E$ відображення $\lambda \mapsto f(a + \lambda b)$ є голоморфним на відкритій множині $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in U\}$. Позначимо $H_G(U; F)$ — лінійний простір усіх G-голоморфних відображень, які діють з підмножини U у простір F.*

Твердження 1.1. (Див. [76, с. 61, твердження 8.6]) *Нехай U є відкритою підмножиною простору E і нехай $f \in H_G(U; F)$. Тоді відображення f є неперервним тоді і тільки тоді, коли f є локально обмеженим.*

Теорема 1.1. (Див. [76, с. 61, теорема 8.7]) *Нехай U є відкритою підмножиною простору E. Тоді для кожного відображення $f : U \to F$ наступні умови є еквівалентними:*

1. *f є голоморфним.*

2. *f є неперервним і G-голоморфним.*

3. *f є неперервним і $f|_{U \cap M}$ є голоморфним для кожного скінченновимірного підпростору $M \subset E$.*

1.2.3. Алгебри та їхні спектри

Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$.

Означення 1.10. *Лінійний простір A над полем $\mathbb{K}$ називають алгеброю, якщо в ньому введено ще одну алгебраїчну операцію — множення, яка задовольняє такі аксіоми:*

1. *$(xy)z = x(yz)$ для кожних $x, y, z \in A$.*

2. *$x(y + z) = xy + xz$; $(y + z)x = yx + zx$ для кожних $x, y, z \in A$.*

3. *$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ для кожних $x, y \in A$, $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Якщо існує елемент $e \in A$ такий, що $ex = xe = x$ для кожного $x \in A$, то елемент e називають одиницею алгебри A, а саму алгебру називають алгеброю з одиницею.

Якщо операція множення комутативна, тобто якщо $xy = yx$ для кожних $x, y \in A$, то алгебру A називають комутативною алгеброю.

Означення 1.11. *Топологічний лінійний простір A називають топологічною алгеброю, якщо він є алгеброю з одиницею і множення є сукупно неперервним.*

Означення 1.12. *Топологічну алгебру A називають локально мультиплікативно опуклою або локально m-опуклою алгеброю, якщо топологія на алгебрі A є породженою деякою сім'єю напівнорм $\{p_j : j \in J\}$, де J — деяка індексна множина, для яких виконуються такі дві умови:*

1. *$p_j(e) = 1$ для кожного $j \in J$.*

2. *$p_j(xy) \leq p_j(x)p_j(y)$ для кожних $x, y \in A$, $j \in J$.*

Означення 1.13. *Повну метризовну локально мультиплікативно опуклу топологічну алгебру називають алгеброю Фреше.*

Означення 1.14. *Відображення $F : A \to B$ називають гомоморфізмом з алгебри A в алгебру B, якщо виконуються умови:*

$$F(x + y) = F(x) + F(y), \tag{1.3}$$

$$F(\alpha x) = \alpha F(x), \tag{1.4}$$

$$F(xy) = F(x)F(y) \tag{1.5}$$

для довільних елементів $x, y \in A$ і $\alpha \in \mathbb{C}$.

Означення 1.15. *Алгебра Фреше $\mathcal{F}$ є функціонально неперервною, якщо кожний комплексний гомоморфізм на $\mathcal{F}$ є неперервним.*

Означення 1.16. *Дві алгебри, A і B називають ізоморфними, якщо існує взаємно однозначне відображення F, яке задовольняє умови* (1.3), (1.4), (1.5). *Якщо при цьому алгебри A і B є топологічними, а відображення F є неперервним, то алгебри A і B називають топологічно ізоморфними.*

Означення 1.17. *Дві алгебри Фреше A та B із зафіксованими на них метриками d_A і d_B відповідно називають ізометрично ізоморфними, якщо існує алгебраїчний ізоморфізм $F : A \leftrightarrow B$, який є ізометрією алгебр A та B як метричних просторів, тобто для кожних елементів $x, y \in A$ виконується рівність $d_A(x, y) = d_B(F(x), F(y))$.*

Означення 1.18. *Нехай A — топологічна алгебра над полем $\mathbb{K}$. Нетривіальний неперервний гомоморфізм $\varphi : A \to \mathbb{K}$ називають характером алгебри A. Множину всіх характерів алгебри A називають спектром алгебри A і позначають $M(A)$.*

Означення 1.19. *Алгебру A називають напівпростою, якщо комплексні гомоморфізми зі спектру $M(A)$ алгебри A відокремлюють її точки. Тобто алгебру A називають напівпростою, якщо для будь-яких різних* *елементів* $x, y \in A$ *існує комплексний гомоморфізм* $\varphi \in M(A)$ *такий, що виконуеться умова, що* $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Нехай A є алгеброю функцій, які діють з деякої множини T у множину $\mathbb{C}$.

Означення 1.20. *Сукупність елементів* $a_1, a_2, \ldots$ *алгебри* A *називають алгебраїчно незалежною, якщо для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *і для кожного полінома* $q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *з того, що*

$$q(a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)) = 0$$

для всіх $t \in T$ *випливає, що* $q \equiv 0$.

Означення 1.21. *Елемент* b *алгебри* A *називають алгебраїчною комбінацією елементів* $a_1, a_2, \ldots$ *алгебри* A*, якщо існують* $n \in \mathbb{N}$ *і поліном* $q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *такі, що*

$$b(t) = q(a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t))$$

для всіх $t \in T$.

Означення 1.22. *Скінченну або зліченну множину елементів* $\{a_i\} \subset A$ *називають алгебраїчним базисом алгебри* A *з одиницею* e*, якщо:*

1. *множина* $\{a_i\}$ *є алгебраїчно незалежною;*
2. *кожний елемент алгебри* A *можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації (скінченної суми скінченних добутків) елементів з множини* $\{a_i\}$ *та одиничного елемента* e.

1.2.4. Алгебра $H_b(X)$

Позначимо $H_b(X)$ алгебру усіх комплекснозначних цілих функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X. Топологію на алгебрі $H_b(X)$ вводять за допомогою системи норм

$$\|f\|_r = \sup_{\|x\| \leq r} |f(x)|,$$

де $r \in \mathbb{Q}^+$. Зауважимо, що $\|fg\|_r \leq \|f\|_r \|g\|_r$ і $\|1\|_r = 1$ для всіх $r \in \mathbb{Q}^+$. Згідно із [5, с. 147], топологію у зліченно-нормованому просторі можна задати за допомогою деякої метрики. А саме, запишемо елементи множини $\mathbb{Q}^+$ у вигляді послідовності $r_1, r_2, \ldots$ і задамо метрику на $H_b(X)$ формулою

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_{r_n}}{1 + \|f - g\|_{r_n}}. \tag{1.6}$$

Можна переконатися, що алгебра $H_b(X)$ є повною відносно цієї метрики. Отже, $H_b(X)$ є алгеброю Фреше.

Кожну функцію $f \in H_b(X)$ можна розкласти у ряд Тейлора

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \tag{1.7}$$

де $f_n \in \mathcal{P}^n(X)$ для $n \in \mathbb{N}_0$, і ряд (1.7) збігається рівномірно до функції f на кожній обмеженій підмножині простору X.

Із рівності (1.2) випливає наступна оцінка, яку називають оцінкою Коші:

$$\|f_n\|_1 \leq \|f\|_1 \tag{1.8}$$

для кожної функції $f \in H_b(X)$, де f_n — це n-тий член ряду Тейлора (1.7) для функції f.

Позначимо $H_b^*(X)$ — лінійний простір усіх лінійних неперервних функціоналів на алгебрі $H_b(X)$.

Означення 1.23. (Див. [9, с. 53]) *Радіус функцією $R(\varphi)$ функціонала $\varphi \in H_b^*(X)$ називають інфімум усіх $r \in \mathbb{R}^+$ таких, що φ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$.*

Таким чином,

$$0 \leq R(\varphi) < \infty.$$

Функції з простору $\mathcal{P}^n(X)$ є обмежені на обмежених підмножинах простору X, тому $\mathcal{P}^n(X) \subset H_b(X)$.

Нехай $\varphi \in H_b^*(X)$. Враховуючи неперервність функціонала φ, отримуємо

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(f_n). \tag{1.9}$$

Позначимо φ_n звуження функціонала $\varphi \in H_b^*(X)$ на простір $\mathcal{P}^n(X)$. Тоді функціонал φ_n є неперервним. Визначимо його норму на просторі $\mathcal{P}^n(X)$ наступним чином

$$\|\varphi_n\| = \sup\{|\varphi(P)| : P \in \mathcal{P}^n(X), \|P\| \leq 1\}.$$

Радіус функція може бути виражена у сенсі цих норм.

Теорема 1.2. (Див. [9, с. 54]) *Радіус функцію R на $H_b^*(X)$ можна обчислити за допомогою наступної формули:*

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Для кожного $x \in X$ позначимо $\delta_x \in M\big(H_b(X)\big)$ — функціонал обчислення значення функції у точці x :

$$\delta_x(f) = f(x),\ f \in H_b(X).$$

Відомо (див. [9, с. 53]), що

$$R(\delta_x) = \|x\|,\ x \in X.$$

Нехай $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ є множиною алгебраїчно незалежних неперервних поліномів на просторі X, таких, що P_n є n-однорідним поліномом і $\|P_n\|_1 = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Позначимо $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ алгебру, що складається з усіх поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями елементів множини $\mathbb{P}$. Позначимо $H_{b\mathbb{P}}(X)$ замикання алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ у метриці алгебри $H_b(X)$.

1.2.5. Алгебра симетричних аналітичних функцій на банаховому просторі

Нехай S є групою ізометрій на банаховому просторі X. Функцію $f\colon X \to \mathbb{C}$ називають S-*симетричною* (або просто *симетричною*), якщо

$$f(\sigma(x)) = f(x)$$

для всіх $\sigma \in S$ та $x \in X$. Нехай $\mathcal{P}_s(X)$ — алгебра усіх неперервних симетричних поліномів на просторі X і $H_{bs}(X)$ — її поповнення у метриці алгебри $H_b(X)$. У багатьох випадках алгебра $\mathcal{P}_s(X)$ має деякий алгебраїчний базис $\mathbb{P}$ і тому $H_{bs}(X) = H_{b\mathbb{P}}(X)$.

Позначимо L_∞ — комплексний банахів простір усіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій x на відрізку $[0,1]$ з нормою

$$||x||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,1]}|x(t)|.$$

У [39] доведено, що якщо S є групою усіх вимірних автоморфізмів відрізка $[0,1]$, які зберігають міру Лебега, то поліноми

$$R_n(x) = \int_{[0,1]} (x(t))^n dt, \quad x \in L_\infty$$

утворюють алгебраїчний базис в алгебрі симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(L_\infty)$. Тому кожну функцію $F \in H_{bs}(L_\infty)$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} R_1^{k_1}(x) R_2^{k_2}(x) \ldots R_n^{k_n}(x), \tag{1.10}$$

де $\alpha_{k_1\ldots k_n} \in \mathbb{C}$ і $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$.

Позначимо M_{bs} — спектр алгебри $H_{bs}(L_\infty)$. Відомо, що спектр M_{bs} алгебри $H_{bs}(L_\infty)$ збігається з множиною функціоналів обчислення значень функцій в точках і може бути описаний як множина послідовностей

$$\begin{aligned}\Lambda^\times &= \big\{\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \colon \xi_n = R_n(x),\, x \in L_\infty,\, n \in \mathbb{N}\big\}\\ &= \big\{\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty \colon \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^{1/n} < \infty\big\}.\end{aligned}$$

Множину $\Lambda^\times$ можна природним чином ідентифікувати з (DF)-простором $H'(\mathbb{C})_\beta$, сильно спряженим (див. [84, с. 179]) до простору Фреше $H(\mathbb{C})$ цілих функцій на $\mathbb{C}$. Згідно з [41], алгебра $H_{bs}(L_\infty)$ є ізоморфною до алгебри $H(H'(\mathbb{C})_\beta)$ усіх цілих функцій на $H'(\mathbb{C})_\beta$. Аналогічні результати можна отримати для деяких інших алгебр симетричних аналітичних функцій обмеженого типу [100].

1.2.6. Гіперфакторіал натурального числа

Означення 1.24. *Гіперфакторіалом натурального числа n називають добуток*

$$H(n) = 1^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot n^n. \tag{1.11}$$

Теорема 1.3. (Див. [46]) *Асимптотична швидкість росту гіперфакторіала є наступною:*

$$H(n) \sim An^{\frac{6n^2+6n+1}{12}} e^{\frac{-n^2}{4}},$$

де $A = 1,2824\ldots$ є сталою Глейшера-Кінкеліна.

1.2.7. Гіперциклічний оператор

Означення 1.25. *Нехай Y є лінійним простором Фреше. Неперервний лінійний оператор $T : Y \to Y$ називають гіперциклічним, якщо існує вектор $y_0 \in Y$, для якого орбіта під дією T,*

$$Orb(T, y_0) = \{y_0, Ty_0, T^2y_0, \ldots\},$$

є щільною в просторі Y. Кожен такий вектор y_0 називають гіперциклічним вектором оператора T.

Теорема 1.4. (Критерій гіперциклічності) *Нехай X є сепарабельним простором Фреше і $T : X \to X$ є лінійним, неперервним оператором. Припустимо, що існують X_0, Y_0 — щільні підмножини простору X, послідовність $\{n_k\}$ натуральних чисел, і послідовність відображень (можливо нелінійних, можливо не неперервних) $S_n : Y_0 \to X$, такі, що:*

1. *$T^{n_k}(x) \to 0$ для кожного $x \in X_0$ при $k \to \infty$.*

2. *$S_{n_k}(y) \to 0$ для кожного $y \in Y_0$ при $k \to \infty$.*

3. *$T^{n_k} \circ S_{n_k}(y) = y$ для кожного $y \in Y_0$.*

Тоді оператор T є гіперциклічним.

Кажуть, що оператор T задовольняє критерій гіперциклічності для цілої послідовності, якщо ми можемо покласти $n_k = k$.

Теорема 1.5. (Див. [26, с. 159, Теорема 3.2]) *Нехай X є комплексним банаховим простором і $\mathbb{P} = (P_1, P_2, \ldots)$ є послідовністю алгебраїчно незалежних неперервних комплекснозначних однорідних поліномів на просторі X таких, що P_n є n-однорідним поліномом для кожного $n \in \mathbb{N}$. Нехай $T : H_{b\mathbb{P}}(X) \to H_{b\mathbb{P}}(X)$ є неперервним гомоморфізмом, таким, що*

$$T(P_n) = P_n + a_n$$

для деякої ненульової послідовності комплексних чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тоді оператор T є гіперциклічним і задовольняє критерій гіперциклічності для цілої послідовності.

РОЗДІЛ 2. АЛГЕБРИ, ПОРОДЖЕНІ ЗЛІЧЕННИМИ МНОЖИНАМИ ПОЛІНОМІВ

Розділ присвячено дослідженню властивостей алгебр аналітичних функцій, породжених зліченними множинами поліномів на комплексних банахових просторах.

2.1. Радіус-функція лінійного функціонала на підалгебрі алгебри $H_b(X)$

У даному підрозділі ми узагальнюємо теорему про обчислення радіус-функції лінійного функціонала для підалгебр алгебри $H_b(X)$ на комплексному банаховому просторі X.

Нехай $H_b^{(0)}(X)$ є довільною підалгеброю алгебри $H_b(X)$, яка має наступну властивість: для кожної функції, яка належить цій підалгебрі, усі члени її ряду Тейлора теж належать підалгебрі.

Для кожного лінійного неперервного функціонала $\varphi \in \left(H_b^{(0)}(X)\right)^*$ існує число $r \in \mathbb{Q}^+$ таке, що функціонал φ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$, де $\left(H_b^{(0)}(X)\right)^*$ є простором всіх неперервних лінійних функціоналів на алгебрі $H_b^{(0)}(X)$.

Аналогічно до означення 1.23 визначимо радіус-функцію на просторі $\left(H_b^{(0)}(X)\right)^*$ наступним чином.

Означення 2.1. *Для $\varphi \in \left(H_b^{(0)}(X)\right)^*$ радіус-функцією $R(\varphi)$ будемо називати інфімум усіх $r > 0$ таких, що φ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$.*

Таким чином,

$$0 \le R(\varphi) < \infty.$$

Для $n \in \mathbb{N}_0$ позначимо $\widetilde{\mathcal{P}^n}(X) = \mathcal{P}^n(X) \bigcap H_b^{(0)}(X)$ — простір неперервних n-однорідних поліномів на просторі X, які належать алгебрі $H_b^{(0)}(X)$. Для кожного полінома $P \in \widetilde{\mathcal{P}^n}(X)$ покладемо

$$\|P\| = \|P\|_1 = \sup\{|P(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Кожну функцію $f \in H_b^{(0)}(X)$ можна розкласти у ряд Тейлора

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \tag{2.1}$$

де $f_n \in \mathcal{P}^n(X)$ для $n \in \mathbb{N}_0$, і ряд (2.1) збігається рівномірно до функції f на кожній обмеженій підмножині простору X. Згідно із припущенням стосовно алгебри $H_b^{(0)}(X)$, зробленим на початку даного підрозділу, кожен член ряду Тейлора f_n належить алгебрі $H_b^{(0)}(X)$. Тому $f_n \in \widetilde{\mathcal{P}^n}(X)$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$. Звідси також, внаслідок замкненості алгебри відносно додавання скінченної кількості елементів, випливає, що частинні суми ряду Тейлора (2.1) належать алгебрі $H_b^{(0)}(X)$, тобто

$$\sum_{n=0}^{m} f_n \in H_b^{(0)}(X)$$

для кожного $m \in \mathbb{N}_0$. Рівномірна збіжність ряду Тейлора (2.1) до функції f на обмежених підмножинах простору X означає, що послідовність частинних сум цього ряду збігається до функції f у сенсі топології на алгебрі $H_b^{(0)}(X)$, індукованої топологією алгебри $H_b(X)$, тобто

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} f_n = f. \tag{2.2}$$

Нехай $\varphi \in \left(H_b^{(0)}(X)\right)^*$. Згідно із рівністю (2.2), враховуючи неперервність функціонала φ, отримаємо, що

$$\varphi(f) = \lim_{m\to\infty} \varphi\left(\sum_{n=0}^{m} f_n\right). \tag{2.3}$$

Згідно із лінійністю функціонала φ,

$$\varphi\left(\sum_{n=0}^{m} f_n\right) = \sum_{n=0}^{m} \varphi(f_n) \tag{2.4}$$

для кожного $m \in \mathbb{N}_0$. Із рівностей (2.3) та (2.4) випливає наступна рівність:

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(f_n). \tag{2.5}$$

Позначимо φ_n — звуження функціонала φ на $\widetilde{\mathcal{P}^n}(X)$. Тоді функціонал φ_n є неперервним. Визначимо його норму на просторі $\widetilde{\mathcal{P}^n}(X)$ наступним чином

$$\|\varphi_n\| = \sup\{|\varphi(P)| : P \in \widetilde{\mathcal{P}^n}(X), \|P\| \leq 1\}.$$

Радіус-функція може бути виражена у сенсі цих норм. Доведемо аналог теореми 1.2.

Теорема 2.1. *Радіус-функцію R на просторі $\left(H_b^{(0)}(X)\right)^*$ можна обчислити за допомогою наступної формули*

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Доведення. Припустимо, що

$$0 < t < \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Тоді існує послідовність однорідних поліномів P_j степеня $n_j \to \infty$ така, що $\|P_j\| = 1$ і $|\varphi(P_j)| > t^{n_j}$. Якщо $0 < r < t$, то за однорідністю,

$$\|P_j\|_r = r^{n_j}.$$

Отже,

$$|\varphi(P_j)| > \left(\frac{t}{r}\right)^{n_j} \|P_j\|_r$$

і функціонал φ не є неперервним відносно норми рівномірної збіжності на кулі $\bar{B}(0, r)$. Звідси випливає, що $R(\varphi) \geq r$, і, враховуючи довільність вибору чисел r та t, ми отримуємо нерівність

$$R(\varphi) \geq \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Для того, щоб довести протилежну нерівність, нехай

$$s > \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Таким чином $\|\varphi_n\| \leq s^n$ для великих n. Тоді існує $c \geq 1$ таке, що

$$\|\varphi_n\| \leq cs^n, \ n \geq 0.$$

Нехай $r > s$ є довільним, і функція $f \in H_b^{(0)}(X)$ має розклад у ряд Тейлора (2.1). Тоді, використовуючи оцінку Коші (1.8), отримаємо, що

$$r^n \|f_n\| = \|f_n\|_r \leq \|f\|_r, \ n \geq 0.$$

Отже,

$$|\varphi(f_n)| \leq \|\varphi_n\| \|f_n\| \leq \frac{cs^n}{r^n} \|f\|_r.$$

Тому, враховуючи рівність (2.5) отримаємо, що

$$|\varphi(f)| \leq c\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{r^n}\Big) \|f\|_r.$$

Таким чином функціонал φ є неперервним відносно норми рівномірної збіжності на кулі $\bar{B}(0, r)$ і $R(\varphi) \leq r$. Оскільки числа s та r вибрані довільним чином, то

$$R(\varphi) \leq \limsup_{n \to \infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Отже, рівність

$$R(\varphi) = \limsup_{n \to \infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}$$

доведено. $\square$

2.2. Алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ та її властивості

Нехай $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots\}$ є послідовністю неперервних алгебраїчно незалежних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі X, таких, що P_n є n-однорідним поліномом і $\|P_n\|_1 = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Позначимо $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ алгебру, що складається з усіх поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями елементів множини $\mathbb{P}$. Позначимо $H_{b\mathbb{P}}(X)$ замикання алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ у метриці алгебри $H_b(X)$.

У даному підрозділі доведено, що алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є алгеброю Фреше, досліджено загальний вигляд елементів даної алгебри, а також встановлено оцінку зверху для послідовності значень характерів зі спектру алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ на множині поліномів $\mathbb{P}$.

Теорема 2.2. *Алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є алгеброю Фреше відносно метрики* (1.6).

Доведення. Достатньо довести, що для довільних функцій $f, g \in H_{b\mathbb{P}}(X)$ і скаляра $\lambda \in \mathbb{C}$ функції $f + g, \lambda f$ і fg будуть належати алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$. Оскільки алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є замиканням алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$, то для функцій $f, g \in H_{b\mathbb{P}}(X)$ існують послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ такі, що $a_n \to f$ і $b_n \to g$ при $n \to \infty$. Звідси випливає, що $\|f - a_n\|_r \to 0$ і $\|g - b_n\|_r \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного $r \in \mathbb{Q}^+$. Оскільки для кожного $r \in \mathbb{Q}^+$

$$\|f + g - (a_n + b_n)\|_r \leq \|f - a_n\|_r + \|g - b_n\|_r \to 0, \; n \to \infty,$$

і

$$\|\lambda f - \lambda a_n\|_r = |\lambda| \|f - a_n\|_r \to 0, \; n \to \infty,$$

то

$$a_n + b_n \to f + g, \; n \to \infty$$

і

$$\lambda a_n \to \lambda f, \; n \to \infty.$$

Отже, функції $f+g$ і λf належать алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$.

Тепер доведемо, що $fg \in H_{b\mathbb{P}}(X)$. Покажемо, що $a_n b_n \to fg$ при $n \to \infty$. Зауважимо, що для кожного $r \in \mathbb{Q}^+$

$$\begin{aligned}\|fg - a_n b_n\|_r &= \|fg - fb_n + fb_n - a_n b_n\|_r \le \\ &\le \|fg - fb_n\|_r + \|fb_n - a_n b_n\|_r \le \\ &\le \|f\|_r \|g - b_n\|_r + \|f - a_n\|_r \|b_n\|_r.\end{aligned}$$

Оскільки $\|b_n - g\|_r \to 0$ при $n \to \infty$, то існує номер $N \in \mathbb{N}$ такий, що при $n \ge N$ буде $\|b_n - g\|_r < 1$. Тому для $n \ge N$

$$\begin{aligned}\|b_n\|_r &= \|b_n - g + g\|_r \le \\ &\le \|b_n - g\|_r + \|g\|_r < \\ &< 1 + |g\|_r.\end{aligned}$$

Отже, для $n \ge N$

$$\|fg - a_n b_n\|_r \le \|f\|_r \|g - b_n\|_r + \|f - a_n\|_r (1 + \|g\|_r).$$

Оскільки $\|f - a_n\|_r \to 0$ і $\|g - b_n\|_r \to 0$ при $n \to \infty$, то $\|fg - a_n b_n\|_r \to 0$ при $n \to \infty$. Тому $a_n b_n \to fg$ при $n \to \infty$ і, отже, $fg \in H_{b\mathbb{P}}(X)$. Теорему доведено. $\square$

Теорема 2.3. *Кожен член ряду Тейлора функції $f \in H_{b\mathbb{P}}(X)$ можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементів множини $\mathbb{P}$. Як наслідок,*

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n} a_{k_1, k_2, \ldots, k_n} P_1(x)^{k_1} P_2(x)^{k_2} \cdots P_n(x)^{k_n}$$

для всіх $x \in X$.

Доведення. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і нехай поліном f_n – це n-тий член ряду Тейлора функції f. Доведемо, що поліном f_n можна єдиним чином подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $P_1, \ldots, P_n$.

Позначимо $\mathcal{P}^n_{\mathbb{P}_n}(X)$ простір усіх n-однорідних поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями поліномів $P_1, \ldots, P_n$. Зауважимо, що сукупність поліномів вигляду $P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots P_n^{k_n}$, де $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – цілі невід'ємні числа, для яких $k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n$, є базисом Гамеля простору $\mathcal{P}^n_{\mathbb{P}_n}(X)$. Оскільки таких поліномів є скінченна кількість, то простір $\mathcal{P}^n_{\mathbb{P}_n}(X)$ – скінченновимірний. Тому простір $\mathcal{P}^n_{\mathbb{P}_n}(X)$ – повний відносно кожної з норм. Зокрема, простір $\mathcal{P}^n_{\mathbb{P}_n}(X)$ – повний відносно норми $\|\cdot\|_1$.

Оскільки алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є замиканням алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$, то існує послідовність $\{a_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$, яка збігається до функції f відносно метрики (1.6). Нехай a_{ln} – це n-й член ряду Тейлора полінома a_l. Зауважимо, що $a_{ln}\in\mathcal{P}^n_{\mathbb{P}_n}(X)$ для кожного $l\in\mathbb{N}$. Покажемо, що послідовність $\{a_{ln}\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до полінома f_n відносно норми $\|\cdot\|_1$. Згідно з інтегральною формулою Коші (1.2), у якій візьмемо $r=1$,

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta x)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta$$

і

$$a_{ln}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{a_l(\zeta x)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

Тому

$$\begin{aligned}|f_n(x)-a_{ln}(x)|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta x)-a_l(\zeta x)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta\right|\le\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{|f(\zeta x)-a_l(\zeta x)|}{|\zeta|^{n+1}}\,d\zeta=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}|f(\zeta x)-a_l(\zeta x)|\,d\zeta.\end{aligned}$$

При $x\in X$ такому, що $\|x\|\le 1$ і $\zeta\in\mathbb{C}$ такому, що $|\zeta|=1$, буде $\|\zeta x\|\le 1$. Тому при $\|x\|\le 1$

$$|f(\zeta x)-a_l(\zeta x)|\le\|f-a_l\|_1.$$

Звідси,

$$\begin{aligned}\|f_n-a_{ln}\|_1&=\sup_{\|x\|\le 1}|f_n(x)-a_{ln}(x)|\le\\&\le\frac{1}{2\pi}\|f-a_l\|_1\int_{|\zeta|=1}d\zeta=\\&=\|f-a_l\|_1.\end{aligned}$$

Оскільки $a_l \to f$, то $\|f - a_l\|_1 \to 0$ при $l \to \infty$. Тому $\|f_n - a_{ln}\|_1 \to 0$ при $l \to \infty$. Отже, $a_{ln} \to f_n$ при $l \to \infty$ відносно норми $\|\cdot\|_1$. Оскільки простір $\mathcal{P}^n_{\mathbb{P}_n}(X)$ – повний відносно норми $\|\cdot\|_1$, то $f_n \in \mathcal{P}^n_{\mathbb{P}_n}(X)$. Отже, поліном f_n можна подати як алгебраїчну комбінацію поліномів $P_1, \dots, P_n$. Єдиність такого подання випливає із алгебраїчної незалежності поліномів $P_1, \dots, P_n$. Теорему доведено. □

Позначимо $M_{b\mathbb{P}}$ спектр алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$. Згідно з теоремою 2.3 кожну функцію $f \in H_{b\mathbb{P}}(X)$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} a_{k_1,k_2\ldots,k_n} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_n^{k_n},$$

де $a_{k_1,k_2\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$ і $k_1, k_2 \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Тому для кожного характера $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}$ згідно з неперервністю, лінійністю та мультиплікативністю виконується наступна рівність:

$$\varphi(f) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} a_{k_1,k_2\ldots,k_n} (\varphi(P_1))^{k_1} (\varphi(P_2))^{k_2} \cdots (\varphi(P_n))^{k_n}.$$

Таким чином бачимо, що характер φ повністю визначається своїми значеннями на поліномах P_j, де $j \in \mathbb{N}$. Отже, кожен характер $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}$ можна ідентифікувати з послідовністю $\{\varphi(P_j)\}_{j=1}^{\infty}$.

Теорема 2.4. *Для кожного характера $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}$ існує число $r \in \mathbb{Q}^+$ таке, що оцінка*

$$|\varphi(Q)| \le r^n \|Q\|_1$$

виконується для кожного n-однорідного полінома Q, який належить алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$.

Доведення. Кожен характер $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}$ є неперервним відносно норми рівномірної збіжності на деякій кулі простору X. Нехай характер φ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$, де $r \in \mathbb{Q}^+$. Оскільки норма кожного ненульового неперервного комплекснозначного гомоморфізму дорівнює одиниці, то оцінка

$$|\varphi(Q)| \le \|Q\|_r$$

виконується для всіх чисел $r > R(\varphi)$, де $R(\varphi)$ — радіус-функція характера φ і Q — n-однорідний поліном, який належить алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$. Отже,

$$|\varphi(Q)| \leq \sup_{\|x\| \leq r} |Q(x)|.$$

Зробимо заміну:

$$x = ry.$$

Таким чином, враховуючи, що Q є n-однорідним поліномом, отримаємо нерівність

$$|\varphi(Q)| \leq r^n \sup_{\|y\| \leq 1} |Q(y)|,$$

тобто

$$|\varphi(Q)| \leq r^n \|Q\|_1.$$

Теорему доведено. $\square$

Із даної теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.1. *Для кожного характера $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}$ існує число $r \in \mathbb{Q}^+$ таке, що оцінка*

$$|\varphi(P_n)| \leq r^n$$

виконується для кожного полінома P_n, який належить послідовності $\mathbb{P}$.

Отже, послідовність модулів значень характера на поліномах із послідовності $\mathbb{P}$ зростає не швидше, ніж деяка геометрична прогресія.

2.3. Алгебри породжені послідовностями поліномів

У даному підрозділі розглянуто загальний клас алгебр, породжених послідовністю однорідних поліномів. Досліджено умови, за яких дві такі алгебри є ізоморфними та побудовано декілька прикладів різних зліченно породжених алгебр.

Нехай $\mathbb{P} = \{P_n\}$ є послідовністю поліномів на комплексному банаховому просторі X. Надалі, у межах цього підрозділу ми будемо припускати, що кожний поліном P_n є або n-однорідним поліномом з одиничною нормою, або дорівнює нулю, і ненульові поліноми у цій послідовності є алгебраїчно незалежними. Розглянемо мінімальну алгебру з одиницею $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$, породжену поліномами $\mathbb{P}$. Ми позначаємо $H_{b\mathbb{P}}(X)$ — замикання алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ у метриці алгебри $H_b(X)$ і $H_{\mathbb{P}}(X)$ — алгебру усіх цілих функцій

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

на просторі X таку, що усі члени ряду Тейлора f_n належать алгебрі $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$. Алгебра $H_{\mathbb{P}}(X)$ є топологічною алгеброю відносно топології рівномірної збіжності на компактних підмножинах простору X. Нехай $\mathbb{Q} = \{Q_n\}$ є ще однією послідовністю алгебраїчно незалежних n-однорідних поліномів з одиничними нормами (або поліномів, що дорівнюють нулю) на комплексному банаховому просторі Y. У даному підрозділі розглянуто наступне питання:

- За яких умов алгебраїчний ізоморфізм

  $$J_0 = J_0^{PQ} \colon \mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X) \to \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}(Y),$$

  де

  $$J_0 \colon P_n \mapsto Q_n$$

  може бути продовжений до топологічного ізоморфізму

  $$J = J^{PQ} \colon H_{\mathbb{P}}(X) \to H_{\mathbb{Q}}(Y)$$

або до топологічного ізоморфізму

$$J_b = J_b^{PQ}\colon H_{b\mathbb{P}}(X) \to H_{b\mathbb{Q}}(Y)?$$

Легко бачити, що послідовність $\mathbb{P}$ є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ і якщо послідовність $\mathbb{Q}$ є ще одним алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$, то алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є ізоморфною до алгебри $H_{b\mathbb{Q}}(X)$. Проте, у цьому випадку, відображення J_0 необов'язково є неперервним. Наступний приклад показує, що відображення J_0 може бути розривним навіть якщо $Q_n = a_n P_n$ для деяких чисел a_n, таких, що $|a_n| = 1$.

Приклад 2.1. *Нехай $X = \ell_1$ і*

$$P_n(x) = F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$. Тоді алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X) = H_{bs}(\ell_1)$ є алгеброю симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_1 і послідовність поліномів $\{F_n\}$ утворює алгебраїчний базис в алгебрі всіх симетричних поліномів $\mathcal{P}_S(X) \subset H_{bs}(\ell_1)$ (див. [47]). У роботі [26] доведено, що відображення $F_n \mapsto aF_n$ може бути продовженим до неперервного гомоморфізму алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ тоді і тільки тоді, коли a є додатним цілим числом.

Проте, є цікаві та неочікувані приклади, де ізоморфізм J_0 є неперервним.

Приклад 2.2. *Нехай $X = L_\infty$,*

$$P_n(x) = R_n(x) := \int_{[0,1]} (x(t))^n dt$$

(див. [39]), і $Y = \ell_\infty$, і $Q_n(x) = I_n(x) = x_n^n$. У розділі 4 буде доведено, що відображення $R_n \mapsto I_n$ може бути продовженим до неперервного ізоморфізму з алгебри $H_{bs}(L_\infty)$ в алгебру $H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$.

Зауважимо, що з існування ізоморфізму між алгебрами $H_{b\mathbb{P}}(X)$ та $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$ не випливає існування ізоморфізму між алгебрами $H_{\mathbb{P}}(X)$ та $H_{\mathbb{Q}}(Y)$.

Приклад 2.3. *У розділі 3 буде доведено, що ізоморфізм J_0 може бути продовженим до неперервного ізоморфізму J_b між алгебрами $H_{b\mathbb{I}}(c_0)$ та $H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$, де $I_n(x) = x_n^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$. Але алгебра $H_{\mathbb{I}}(c_0)$ не є ізоморфною до алгебри $H_{\mathbb{I}}(\ell_\infty)$, бо алгебра $H_{\mathbb{I}}(c_0)$ містить нетривіальну функцію необмеженого типу, у той час як $H_{\mathbb{I}}(\ell_\infty) = H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$ [59].*

Означення 2.2. *Алгебраїчний базис $\mathbb{Q}$ алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ називають еквівалентним до алгебраїчного базису $\mathbb{P}$, якщо відображення J_b^{PQ} є ізоморфізмом алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ у себе.*

Оскільки послідовність поліномів $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ утворює алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ і алгебра $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ є щільною підалгеброю алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$, то кожний неперервний комплексний гомоморфізм φ на алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$ повністю визначається своїми значеннями на базисних поліномах $P_n \in \mathbb{P}(X)$. Таким чином, спектр $M_{b\mathbb{P}}(X)$ алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ можна ідентифікувати з множиною $\Gamma_{\mathbb{P}}(M_{b\mathbb{P}}(X))$, де

$$\Gamma_{\mathbb{P}}(\varphi) = (\varphi(P_1), \varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n), \ldots) \tag{2.6}$$

для $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}(X)$. Зокрема, для функціоналів обчислення значень δ_x, $x \in X$, можемо записати

$$\Gamma_{\mathbb{P}}(X) = \{\Gamma_{\mathbb{P}}(\delta_x) = \Gamma_{\mathbb{P}}(x) = (P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots) \colon x \in X\}.$$

Згідно із наслідком 2.1, для кожного характера $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}(X)$ існує число $r \in \mathbb{Q}^+$ таке, що оцінка

$$|\varphi(P_n)| \le r^n$$

виконується для кожного $n \in \mathbb{N}$. Дана властивість накладає обмеження на послідовності $\Gamma_{\mathbb{P}}(\varphi)$. А саме,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(P_n)|^{1/n} < \infty. \tag{2.7}$$

Часто замість відображення $\Gamma_{\mathbb{P}}$ зручно використовувати наступне багатозначне відображення, яке діє з простору X в простір ℓ_∞ і визначене формулою

$$\mathfrak{P}_{\mathbb{P}}(x) = \Big(P_1(x), (P_2(x))^{1/2}, \ldots, (P_n(x))^{1/n}, \ldots\Big),$$

де $a^{1/n}$ є багатозначною функцією кореня степеня n, $n \in \mathbb{N}$. У [59] досліджено, що коли $\mathfrak{P}_\mathbb{P}$ відображає кулю $B(0,r)$ простору X у кулю $B(0,r)$ простору ℓ_∞, де $r \geq 0$, і якщо послідовність z є в області значень відображення $\mathfrak{P}_\mathbb{P}(x)$, то $P_n(x) = I_n(z)$.

Теорема 2.5. *Припустимо, що $\mathfrak{P}_\mathbb{P}(X) = \ell_\infty$, тобто, відображення $\mathfrak{P}_\mathbb{P}$ є сюр'єкцією з простору X на простір ℓ_∞. Тоді спектр $M_{b\mathbb{P}}(X)$ алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ складається з функціоналів обчислення значень у точках.*

Доведення. Нехай $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}(X)$. Нехай послідовність комплексних чисел $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ така, що

$$\xi_n^n = \varphi(P_n)$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді, згідно із (2.7),

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty.$$

Отже, $\xi \in \ell_\infty$. Згідно із припущенням, відображення $\mathfrak{P}_\mathbb{P}$ є сюр'єкцією з простору X на простір ℓ_∞. Тому існує елемент $x \in X$ такий, що $\xi \in \mathfrak{P}_\mathbb{P}(x)$. Тоді

$$P_n(x) = \varphi(P_n)$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$, тобто

$$\delta_x(P_n) = \varphi(P_n)$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому, враховуючи, що кожен характер є цілковито визначеним своїми значеннями на послідовністю поліномів $\mathbb{P}$, отримуємо, що $\delta_x(f) = \varphi(f)$ для кожної функції $f \in H_{b\mathbb{P}}(X)$, тобто $\delta_x = \varphi$. Таким чином, характер φ є функціоналом обчислення значення в точці. Теорему доведено. $\square$

Твердження 2.1. *Якщо $\Gamma_\mathbb{P}(X) = \Gamma_\mathbb{Q}(Y)$, то відображення $J_0\colon P_n \mapsto Q_n$ може бути продовженим до алгебраїчного ізоморфізму J з алгебри $H_\mathbb{P}(X)$ в алгебру $H_\mathbb{Q}(Y)$.*

Доведення. Оскільки $\Gamma_{\mathbb{P}}(X) = \Gamma_{\mathbb{Q}}(Y)$, то для кожного елемента $y_0 \in Y$ існує елемент $x_0 \in X$ такий, що $\Gamma_{\mathbb{P}}(x_0) = \Gamma_{\mathbb{Q}}(y_0)$. Якщо

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in H_{\mathbb{P}}(X)$$

і

$$g = J(f) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n = \sum_{n=0}^{\infty} J_0(f_n),$$

то $g(y_0) = f(x_0)$. Отже, відображення g є добре визначеним на просторі Y. Зауважимо, що відображення g є G-аналітичним (тобто, звуження відображення g на будь-який скінченновимірний підпростір є аналітичним). Якщо відображення g не є неперервним, то однорідний поліном g_n є розривним. Але кожний поліном g_n є алгебраїчною комбінацією поліномів $Q_1, \ldots, Q_n$ і, отже, є неперервним. Таким чином, $g \in H_{\mathbb{Q}}(Y)$ і $J\big(H_{\mathbb{P}}(X)\big) \subset H_{\mathbb{Q}}(Y)$. З тої ж причини, $J^{-1}\big(H_{\mathbb{Q}}(Y)\big) \subset H_{\mathbb{P}}(X)$. Отже, відображення J є бієкцією. Лінійність та мультиплікативність відображення J можна легко перевірити. □

Наслідок 2.2. *Нехай $\Gamma_{\mathbb{P}}(X) = \Gamma_{\mathbb{Q}}(Y)$. Припустимо, що $H_{b\mathbb{P}}(X) = H_{\mathbb{P}}(X)$, і $H_{b\mathbb{Q}}(Y) = H_{\mathbb{Q}}(Y)$. Тоді $J_b = J$ є топологічним ізоморфізмом з алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ в алгебру $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$.*

Доведення. Згідно з твердженням 2.1, відображення J_b є алгебраїчним ізоморфізмом. Відомо (див., наприклад, [21, 29]), що існує єдина топологія Фреше на комутативній напівпростій алгебрі. Таким чином, кожний алгебраїчний ізоморфізм між комутативними напівпростими алгебрами Фреше є топологічним, тому що якщо ми маємо розривний алгебраїчний ізоморфізм, то прообрази відкритих множин відносно цього ізоморфізму дають нам іншу топологію Фреше. □

У [59] доведено, що $H_{b\mathbb{P}}(X) = H_{\mathbb{P}}(X)$ у випадку, коли $\mathfrak{P}_{\mathbb{P}}(X) = \ell_\infty$. Звідси випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.3. *Якщо $\mathfrak{P}_{\mathbb{P}}(X) = \mathfrak{P}_{\mathbb{Q}}(Y) = \ell_\infty$, то алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є ізоморфною до алгебри $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$.*

Підмножина $\Omega \subset X$ є $H_{b\mathbb{P}}(X)$-*обмеженою,* якщо кожна функція алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є обмеженою на множині Ω.

Твердження про те, що *кожна алгебра Фреше є функціонально неперервною* (див. означення 1.15 на с. 43) є відомою Проблемою Майкла, яка є відкритим питанням з 1952 року (див. [74]). Є багато результатів (див., наприклад, [29]) про класи алгебр Фреше, які є функціонально неперервними (наприклад, алгебри аналітичних функцій кількох змінних). З іншого боку, відомо (див. [76, с. 240]), що якщо X є нескінченновимірним банаховим простором з топологічним базисом, то алгебра $H_b(X)$ є так званою *тест алгеброю.* Тобто, якщо кожний комплексний гомоморфізм на алгебрі $H_b(X)$ є неперервним, то кожна алгебра Фреше є функціонально неперервною. У роботі [41] доведено, що зліченнопороджена алгебра $H_{bs}(L_\infty)$ є тест алгеброю.

Теорема 2.6. *Припустимо, що $\Gamma_{\mathbb{P}}(X) = \Gamma_{\mathbb{Q}}(Y)$ і для кожної обмеженої підмножини $W \subset Y$ існує $H_{b\mathbb{P}}(X)$-обмежена підмножина $\Omega \subset X$ така, що $\Gamma_{\mathbb{P}}(\Omega) \supset \Gamma_{\mathbb{Q}}(W)$. Тоді звуження J_b відображення J на алгебру $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є ін'єктивним алгебраїчним гомоморфізмом з алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ в алгебру $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$ зі щільною областю значень. Якщо алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є функціонально неперервною, то відображення J_b є неперервним.*

Доведення. Нехай $f \in H_{\mathbb{P}}(X)$ і $g = J(f)$. Нехай W є обмеженою підмножиною простору Y. Тоді

$$\sup_{y \in W} |g(y)| \leq \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty,$$

бо множина Ω є обмеженою. Таким чином, відображення g є обмеженого типу. Отже, відображення J_b є алгебраїчним гомоморфізмом з алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ в алгебру $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$. Область значень відображення J_b є щільною, тому що містить всі поліноми з алгебри $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$. Відомо, що кожний гомоморфізм з функціонально неперервної алгебри Фреше у напівпросту алгебру Фреше є неперервним (див. [29]). Оскільки алгебра $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$ є напівпростою алгеброю Фреше, то гомоморфізм J_b є неперервним, якщо алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є функціонально неперервною. Теорему доведено. $\square$

Наслідок 2.4. *Нехай* $\Gamma_{\mathbb{P}}(X) = \Gamma_{\mathbb{Q}}(Y)$. *Припустимо, що для кожної обмеженої підмножини* $W \subset Y$ *існує* $H_{b\mathbb{P}}(X)$*-обмежена підмножина* $\Omega \subset X$ *така, що* $\Gamma_{\mathbb{P}}(\Omega) \supset \Gamma_{\mathbb{Q}}(W)$ *і навпаки, для кожної обмеженої підмножини* $W' \subset X$ *існує* $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$*-обмежена підмножина* $\Omega' \subset Y$ *така, що* $\Gamma_{\mathbb{Q}}(\Omega') \supset \Gamma_{\mathbb{P}}(W')$. *Тоді відображення* J_b *є топологічним ізоморфізмом з алгебри* $H_{b\mathbb{P}}(X)$ *в алгебру* $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$.

Доведення. Згідно з теоремою 2.6, обидва відображення J_b^{PQ} та J_b^{QP} є добре визначеними та неперервними. Але $J_b^{QP} = \left(J_b^{PQ}\right)^{-1}$. Таким чином, відображення $J_b = J_b^{PQ}$ є ізоморфізмом. $\square$

Наступна теорема дає нам просту умову за якої алгебра $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є ізоморфною до алгебри $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$.

Теорема 2.7. *Нехай*

$$\Gamma_{\mathbb{P}}\big(M_{b\mathbb{P}}(X)\big) = \Gamma_{\mathbb{Q}}\big(M_{b\mathbb{Q}}(Y)\big).$$

Тоді відображення J_b *є топологічним ізоморфізмом з алгебри* $H_{b\mathbb{P}}(X)$ *в алгебру* $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$.

Доведення. Як у твердженні 2.1, для кожного характера $\theta \in M_{b\mathbb{Q}}(Y)$ існує характер $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}(X)$ такий, що $\Gamma_{\mathbb{P}}(\varphi) = \Gamma_{\mathbb{Q}}(\theta)$. Якщо

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in H_{b\mathbb{P}}(X)$$

і

$$g = J_b(f) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n = \sum_{n=0}^{\infty} J_0(f_n),$$

то $\widehat{g}(\theta) = \widehat{f}(\varphi)$. Отже, формальний ряд

$$\widehat{g} = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}_n$$

є добре визначеним на спектрі $M_{b\mathbb{Q}}(Y)$. Ми пишемо, що $\varphi = J_b^*(\theta)$.

Якщо відображення $J_b = J_b^{PQ}$ є добре визначеним на алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$ і сюр'єктивним, то воно є бієктивним і, отже, неперервним. Якщо відображення J_b є розривним, то воно не є визначеним (як гомоморфізм з алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ в алгебру $H_{b\mathbb{Q}}(Y)$), і тому існує функція $f \in H_{b\mathbb{P}}(X)$ така, що відображення $g = J_b(f)$ не є обмеженого типу.

Таким чином, радіус обмеженості формального ряду

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$$

дорівнює $r_0 < \infty$. Отже, існує обмежена послідовність $y_k \in Y$ така, що $r_0 < \|y_k\| < r_1 < \infty$ і множина

$$\left\{ \sum_{n=1}^{m} g_n(y_{k_i}) \colon m, i \in \mathbb{N} \right\}$$

є необмеженою для кожної підпослідовності (y_{k_i}) послідовності (y_k). З іншого боку, $R(\delta_{y_k}) < r_1$ і у зв'язку з компактністю, множина характерів $\{\delta_{y_k}\}$ містить граничну точку θ_0. Нехай $\varphi_0 = J_b^*(\theta_0)$. Як було зазначено вище,

$$\theta_0(g) = \varphi_0(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n(\varphi_0)$$

є добре визначеним. Але

$$\varphi_0(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_0(g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{g}_n(\theta_0)$$

і ряд праворуч розбіжний, оскільки за означенням граничної точки θ_0 існує підпослідовність (y_{k_i}) послідовності (y_k) така, що

$$\theta_0(g_n) = \lim_{i \to \infty} g_n(y_{k_i})$$

для кожного полінома g_n. Отримали суперечність. $\square$

Приклад 2.4. *Очевидно,*

$$\Gamma_{\mathbb{I}}(c_0) \neq \Gamma_{\mathbb{I}}(\ell_\infty),$$

але

$$\Gamma_{\mathbb{I}}\big(M_{b\mathbb{I}}(c_0)\big) = \Gamma_{\mathbb{I}}\big(M_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)\big) = \{(I_1(x), \ldots, I_n(x), \ldots) \colon x \in \ell_\infty\}$$

(див. розділ 3). Таким чином, згідно з теоремою 2.7, алгебра $H_{b\mathbb{I}}(c_0)$ є ізоморфною до алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$.

Приклад 2.5. *У роботі [63] показано, що відображення J_b^{TF} з алгебри суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу $H_{bsup}(\ell_1 \oplus \ell_1)$ на $\ell_1 \oplus \ell_1$ в алгебру симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_1, $J_b^{TF} \colon T_k \mapsto F_k$, $f \in \mathbb{N}$ є неперервним гомоморфізмом зі щільним образом і не є сюр'єктивним. Обернене відображення J_b^{FT} є визначеним на щільному підпросторі і є необмеженим. Таким чином, спектр $M_{bsup}(\ell_1 \oplus \ell_1)$ алгебри $H_{bsup}(\ell_1 \oplus \ell_1)$ є підмножиною множини $M_{bs}(\ell_1)$ у тому сенсі, що звуження кожного характера зі спектру $M_{bs}(\ell_1)$ на образ $H_{bsup}(\ell_1 \oplus \ell_1)$ під дією відображення J_b дає нам елемент множини $M_{bsup}(\ell_1 \oplus \ell_1)$. З іншого боку, з теореми 2.7 випливає, що*

$$\Gamma_{\mathbf{T}}\big(M_{bsup}(\ell_1 \oplus \ell_1)\big) \neq \Gamma_{\mathbb{F}}\big(M_{bs}(\ell_1)\big).$$

Властивості алгебр, породжених суперсиметричними поліномами на банахових просторах, і структури їх спектрів були розглянуті у [22, 28, 63]. Суперсиметричні поліноми кількох змінних та пов'язані алгебраїчні структури вивчали у [81, 87, 88].

Приклад 2.6. *Нехай $\mathfrak{B} \colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \to (x_2, x_3, \ldots)$ є оператором зворотного зсуву на просторі $X = \ell_p$ або на просторі $X = c_0$. Тоді для даної алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ оператор J_b^{PQ} є ізоморфізмом, де послідовність поліномів $\mathbb{Q}$ визначена формулою $Q_k = P_k \circ \mathfrak{B}$. Справді, легко перевірити, що $\Gamma_{\mathbb{P}}(X) = \Gamma_{\mathbb{Q}}(X)$ і оскільки оператор $\mathfrak{B}$ є обмеженим, то ми можемо застосувати наслідок 2.4.*

Приклад 2.7. *Нехай $H_{b\mathbb{P}}(X) = H_{b\mathbb{F}}(\ell_1) = H_{bs}(\ell_1)$ є алгеброю симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_1, і*

$$\widetilde{F}_k(x) = F_k\big(\mathfrak{B}^k(x)\big) = \sum_{n=k+1}^{\infty} x_n^k.$$

Для кожної послідовності $x \in \ell_1$ існує характер $\varphi_x \in M_{b\widetilde{\mathbb{F}}}(\ell_1)$ такий, що $\varphi_x\big(\widetilde{F}_k\big) = F_k(x)$ і є визначений наступним чином. Нехай

$$u_m = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, x_1, x_2, \ldots).$$

Покладемо

$$\varphi_x(g) = \lim_{m\to\infty} g(u_m), \quad g \in H_{b\widetilde{\mathbb{F}}}(\ell_1).$$

Оскільки послідовність u_m є обмеженою і відображення g є обмеженого типу, то границя формально існує через вільний ультрафільтр (див., напр., [82]). Але, очевидно, що

$$\lim_{m\to\infty} \widetilde{F}_k(u_m) = F_k(x),$$

де $k \in \mathbb{N}$. Таким чином, границя не залежить від ультрафільтра і

$$\varphi_x(g) = f(x)$$

для кожного відображення $g = J_b^{F\widetilde{F}}(f)$. Звідси випливає, що функція $J_b^{\widetilde{F}F}$ відображає алгебру $H_{b\widetilde{\mathbb{F}}}(\ell_1)$ в алгебру $H_{bs}(\ell_1)$. Зауважимо, що характери φ_x не є функціоналами обчислення значень в точках, вцілому. З іншого боку, згідно з [23,24] ми знаємо, що існує сім'я ψ_λ "виключних" характерів на алгебрі $H_{bs}(\ell_1)$, які не є функціоналами обчислення значень, таких що $\psi_\lambda(F_1) = \lambda \in \mathbb{C}$ і $\psi_\lambda(F_k) = 0$ для $k > 1$. Для виключного характера $\psi_\lambda \in M_{bs}(\ell_1)$ точка $y_\lambda = (0, \lambda, 0, \ldots)$ є такою, що $\psi_\lambda(f) = g(y_0)$, $g = J_b^{F\widetilde{F}}(f)$. Справді,

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_k(y_\lambda) &= \begin{cases} \lambda, & \text{якщо } k = 1, \\ 0, & \text{якщо } k > 1 \end{cases} \\ &= \psi_\lambda(F_k). \end{aligned}$$

Твердження 2.2. *Якщо $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ є вектором з простору ℓ_1 таким, що тільки скінченна кількість координат $y_{k_1}, \ldots, y_{k_m}$, $m \neq 0$, $k_j > 1$ не дорівнюють нулю. Тоді існує характер $\theta \in M_{bs}(\ell_1)$ такий, що $\theta(f) = g(y)$ для всіх відображень $g = J_b^{F\widetilde{F}}(f)$ (як у прикладі 2.7). Відображення $J_b^{\widetilde{F}F}$ не є сюр'єктивним.*

Доведення. Якщо такі вектор y і характер θ існують, то $\theta(F_k) \neq 0$ тільки для скінченного числа k, $k_1, \dots k_m$, $m \neq 0$, $k_j > 1$. Але це неможливо відповідно до [24]. Якщо відображення $J_b^{\widetilde{F}F}$ є сюр'єктивним, тоді воно є бієктивним, і $J_b^{F\widetilde{F}} = \left(J_b^{\widetilde{F}F}\right)^{-1}$. Таким чином,

$$f \mapsto J_b^{F\widetilde{F}}(f)(y)$$

є характером для кожної послідовності $y \in \ell_1$. Але це не так згідно з тим, що ми показали вище. $\square$

2.4. Висновки до розділу 2

Розділ присвячено дослідженню властивостей алгебр аналітичних функцій, породжених зліченними множинами поліномів на комплексних банахових просторах.

У підрозділі 2.1 узагальнено теорему про обчислення радіус-функції лінійного функціонала для підалгебри алгебри $H_b(X)$ всіх цілих функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X, яка має наступну властивість: для кожної функції, яка належить цій підалгебрі, усі члени її ряду Тейлора теж належать підалгебрі.

У підрозділі 2.2 розглянуто підалгебру $H_{b\mathbb{P}}(X)$ алгебри Фреше $H_b(X)$ всіх цілих функцій обмеженого типу, породжену зліченною множиною алгебраїчно незалежних однорідних поліномів $\mathbb{P}$. Доведено, що дана алгебра є алгеброю Фреше і що кожен член розкладу у ряд Тейлора функції, що належить алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$, є алгебраїчною комбінацією елементів множини $\mathbb{P}$. Показано, що кожний неперервний лінійний мультиплікативний функціонал, що діє з алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ у множину $\mathbb{C}$, однозначно визначається послідовністю своїх значень на елементах множини $\mathbb{P}$. Таким чином існує бієкція між спектром алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ і деякою множиною послідовностей комплексних чисел. Доведено верхню оцінку для послідовностей цієї множини.

У підрозділі 2.3 розглянуто загальний клас алгебр, породжених послідовністю однорідних поліномів. Досліджено умови, за яких дві такі алгебри є ізоморфними та побудовано декілька прикладів різних зліченно породжених алгебр.

Результати, наведені в даному розділі, опубліковано в таких працях: [2], [51], [80].

РОЗДІЛ 3. СПЕКТРИ АЛГЕБР ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ ПОЛІНОМІВ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Даний розділ присвячено дослідженню спектрів алгебр цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченними множинами поліномів на деяких просторах послідовностей.

3.1. Спектр алгебри $H_{b\mathbb{I}}(X)$, де $c_{00} \subset X \subset \ell_\infty$

У даному підрозділі розглянуто алгебру $H_{b\mathbb{P}}(X)$, де поліноми з множини $\mathbb{P}$ залежать тільки від скінченної кількості координат, та X є замкненим підпростором простору ℓ_∞, який містить простір c_{00}. Доведено, що кожну функцію, яка належить алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$ можна єдиним чином аналітично продовжити на ℓ_∞ і алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ та $H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ є ізометрично ізоморфними. Описано спектр алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ для випадку $\mathbb{P} = \mathbb{I}$, де поліноми $\mathbb{I}$ визначені формулою (3.5) (див. с. 76). Надалі ми будемо використовувати позначення $H_{b\mathbb{I}}(X)$ для даної алгебри та позначення $M_{b\mathbb{I}}(X)$ для її спектру.

Нехай X є замкненим підпростором простору ℓ_∞ таким, що X містить простір c_{00}, і $\mathbb{P}$ є послідовністю неперервних поліномів $P_1, \ldots, P_n, \ldots$ таких, що:

1. P_n є n-однорідним поліномом;
2. Поліноми $P_1, \ldots, P_n, \ldots$ є алгебраїчно незалежними;
3. Кожний поліном P_n залежить тільки від скінченної кількості координат.

Лема 3.1. *Визначимо відображення $J : H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty) \to H_{b\mathbb{P}}(X)$ за допомогою формули $J(g) = g|_X$, де $g \in H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$. Нехай $g_n \in H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ є n-однорідним поліномом. Тоді виконується наступна рівність:*

$$\|g_n\|_1 = \|J(g_n)\|_1.$$

Доведення. Згідно з твердженням 2.3 кожний член ряду Тейлора g_n може бути єдиним чином представлений у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $P_1, \ldots, P_n$. Оскільки у нашому випадку кожний поліном P_n залежить від скінченної кількості координат, то поліноми g_n залежать від скінченної кількості змінних. Позначимо $\kappa(j)$ — найбільший серед індексів елементів послідовності x, від яких залежить поліном P_j, де $j = \overline{1, n}$ і $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $\kappa(j) \in \mathbb{N}$. Також позначимо $\kappa_{max} = \max\{\kappa(j) : 1 \leq j \leq n\}$. Тоді можемо записати наступний ланцюг рівностей:

$$\|g_n\|_1 = \sup\{|g_n(x)| : x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in \ell_\infty,$$
$$x_m = 0\, \forall m > \kappa_{max}, m \in \mathbb{N}, \|x\| \leq 1\} =$$
$$= \sup\{|g_n(x)| : x \in c_{00}, \|x\| \leq 1\}.$$

Міркуючи аналогічно, одержимо наступний ланцюг рівностей для норм $J(g_n) \in H_{b\mathbb{P}}(X)$:

$$\|J(g_n)\|_1 = \sup\{|J(g_n(x))| : x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in X, \|x\| \leq 1\} =$$
$$= \sup\{|g_n(x)| : x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in X, \|x\| \leq 1\} =$$
$$= \sup\{|g_n(x)| : x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in X,$$
$$x_m = 0\, \forall m > \kappa_{max}, m \in \mathbb{N}, \|x\| \leq 1\} =$$
$$= \sup\{|g_n(x)| : x \in c_{00}, \|x\| \leq 1\}.$$

Таким чином рівність $\|g_n\|_1 = \|J(g_n)\|_1$ доведено. □

Теорема 3.1. *Кожна функція, яка належить алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$, може бути єдиним чином аналітично продовжена на простір ℓ_∞ і алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ та $H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ є ізометрично ізоморфними.*

Доведення. Розглянемо відображення $J : H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty) \to H_{b\mathbb{P}}(X)$ таке, що $J(f) = f|_X$ для кожної функції $f \in H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$. Легко перевірити, що J є гомоморфізмом з $H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ у $H_{b\mathbb{P}}(X)$.

Покажемо, що відображення J є бієкцією. Спершу доведемо, що для всіх $f_1, f_2 \in H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ якщо $J(f_1) = J(f_2)$, то $f_1 = f_2$, тобто, що відображення J є ін'єктивним. Розглянемо функцію $g \in H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ таку, що $g = f_1 - f_2$. Функція g має розклад у ряд Тейлора: $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$. Згідно з припущенням, $J(f_1) = J(f_2)$, і тому

$$J(g) = J(f_1 - f_2) = J(f_1) - J(f_2) = 0.$$

З іншого боку,

$$J(g) = J(\sum_{n=0}^{\infty} g_n) = \sum_{n=0}^{\infty} J(g_n)$$

і згідно з оцінкою Коші,

$$\|J(g_n)\|_1 \leq \|J(g)\|_1,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки $J(g) = 0$, то $\|J(g)\|_1 = 0$ і $\|J(g_n)\|_1 = 0$. Відповідно до леми 3.1, маємо, що

$$\|g_n\|_1 = \|J(g_n)\|_1.$$

Тому $\|g_n\|_1 = 0$ і звідси випливає, що $g_n(x) = 0$ для всіх $x \in \ell_\infty$.

Таким чином маємо наступні рівності:

$$f_1(x) - f_2(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = 0$$

для всіх $x \in \ell_\infty$. Звідси випливає, що $f_1 = f_2$. Отже, відображення J є ін'єктивним.

Тепер покажемо, що J є сюр'єктивним, тобто, що для кожної функції $h \in H_{b\mathbb{P}}(X)$ існує принаймні одна функція $\widetilde{h} \in H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ така, що $J(\widetilde{h}) = h$. Оскільки $h \in H_{b\mathbb{P}}(X)$, то функція h має зображення у вигляді ряду Тейлора $h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$ із радіусом збіжності

$$\rho_0(h) = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \|h_n\|_1^{\frac{1}{n}}} = \infty$$

для всіх $x \in X$. Покажемо, що остання рівність також виконується для всіх $x \in \ell_\infty$. Згідно з твердженням 2.3 кожен член h_n ряду Тейлора функції h

може бути єдиним чином зображений у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $P_1, \ldots, P_n$. Оскільки кожен поліном P_n залежить від скінченної кількості координат, то поліноми h_n залежать від скінченної кількості змінних. Позначимо $\kappa(j)$ — найбільший серед індексів елементів послідовності x, від яких залежить поліном P_j, де $j = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $\kappa(j) \in \mathbb{N}$. Також позначимо $\kappa_{max} = \max\{\kappa(j) : 1 \leq j \leq n\}$. Тоді правильним є наступний ланцюг рівностей:

$$\begin{aligned}
\|h_n\|_1 &= \sup\{|h_n(x)| : x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in X, \|x\| \leq 1\} = \\
&= \sup\{|h_n(x)| : x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in X, \\
&\qquad\qquad x_k = 0\ \forall k > \kappa_{max},\ k \in \mathbb{N}, \|x\| \leq 1\} = \\
&= \sup\{|h_n(x)| : x \in c_{00}, \|x\| \leq 1\} = \\
&= \sup\{|h_n(x)| : x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in \ell_\infty, \\
&\qquad\qquad x_k = 0\ \forall k > \kappa_{max},\ k \in \mathbb{N}, \|x\| \leq 1\} = \\
&= \sup\{|h_n(x)| : x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in \ell_\infty, \|x\| \leq 1\} = \\
&= \|\widetilde{h}_n\|_1.
\end{aligned}$$

Тому

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{h}_n\|_1^{\frac{1}{n}} = 0$$

і відповідно

$$\rho_0(\widetilde{h}) = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{h}_n\|_1^{\frac{1}{n}}} = \infty$$

для всіх $x \in \ell_\infty$. Отже, кожна функція $h \in H_{b\mathbb{P}}(X)$ може бути єдиним чином аналітично продовжена на ℓ_∞. Це продовження є шуканою функцією $\widetilde{h}$. Таким чином відображення J є сюр'єктивним.

Залишається довести, що дана функція J є ізометрією між алгебрами $H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ та $H_{b\mathbb{P}}(X)$. Для цього достатньо показати, що для всіх $h \in H_{b\mathbb{P}}(X)$, $\widetilde{h} \in H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ таких, що $J(\widetilde{h}) = h$, і $r \in \mathbb{Q}^+$ виконується наступна рівність:

$$\|J(\widetilde{h})\|_r = \|\widetilde{h}\|_r,$$

тобто

$$\|h\|_r = \|\widetilde{h}\|_r.$$

Нехай $h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$ і $\widetilde{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{h}_n$ є зображеннями у вигляді рядів Тейлора функцій $h \in H_{b\mathbb{P}}(X)$ та $\widetilde{h} \in H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ відповідно. Також нехай

$$S_{n+1} = h_0 + \ldots + h_n$$

і

$$\widetilde{S}_{n+1} = \widetilde{h}_0 + \ldots + \widetilde{h}_n$$

є частинними сумами заданих рядів Тейлора. Тоді виконуються наступні рівності:

$$\lim_{n\to\infty} \|h - S_{n+1}\|_r = 0, \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{h} - \widetilde{S}_{n+1}\|_r = 0. \tag{3.2}$$

Крім того, використовуючи неперервність норми, маємо наступні нерівності:

$$|\|h\|_r - \|S_{n+1}\|_r| \le \|h - S_{n+1}\|_r, \tag{3.3}$$

$$|\|\widetilde{h}\|_r - \|\widetilde{S}_{n+1}\|_r| \le \|\widetilde{h} - \widetilde{S}_{n+1}\|_r. \tag{3.4}$$

Взявши до уваги (3.1) та (3.3), отримаємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{n+1}\|_r = \|h\|_r.$$

Аналогічно, використовуючи (3.2) та (3.4), маємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{S}_{n+1}\|_r = \|\widetilde{h}\|_r.$$

Оскільки частинні суми S_{n+1} та $\widetilde{S}_{n+1}$ залежать від скінченної кількості змінних (члени рядів Тейлора h_n та $\widetilde{h}_n, n \in \mathbb{N}_0$ є алгебраїчними комбінаціями поліномів $P_1, \ldots, P_n$ і кожний поліном P_n залежить від скінченної кількості координат), то

$$\|S_{n+1}\|_r = \|\widetilde{S}_{n+1}\|_r.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{n+1}\|_r = \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{S}_{n+1}\|_r$$

і, отже,

$$\|h\|_r = \|\widetilde{h}\|_r.$$

Таким чином, відображення J є ізометрією і алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ та $H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ є ізометрично ізоморфними. □

Нехай $c_{00} \subset Y \subset \ell_\infty$ є довільним лінійним простором. Визначимо на просторі Y поліноми $\mathbb{I} = \{I_1^{(Y)}, I_2^{(Y)}, \ldots\}$ формулою

$$I_n^{(Y)}(y) = y_n^n \tag{3.5}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $y \in Y$. Для спрощення позначень поліноми $I_n^{(\ell_\infty)}$ будемо позначати $I_n^{(\infty)}$ і поліноми $I_n^{(\ell_p)}$ будемо позначати $I_n^{(p)}$.

Твердження 3.1. *Поліноми $I_1^{(Y)}, I_2^{(Y)}, \ldots$, визначені формулою* (3.5), *є алгебраїчно незалежними.*

Доведення. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Нехай $q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ є поліномом таким, що

$$q\big(I_1^{(Y)}(y), \ldots, I_n^{(Y)}(y)\big) = 0 \tag{3.6}$$

для всіх $y \in Y$. Оскільки q є поліномом, то існують скінченна множина $A \subset \mathbb{N}_0^n$ і комплексні числа α_k, де $k = (k_1, \ldots, k_n) \in A$, такі, що q можна подати у вигляді

$$q(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{k \in A} \alpha_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{k_n}, \tag{3.7}$$

де $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Беручи до уваги рівності (3.6) і (3.7) маємо, що

$$q\big(I_1^{(Y)}(y), \ldots, I_n^{(Y)}(y)\big) = \sum_{k \in A} \alpha_k y_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{nk_n} = 0$$

для всіх $y \in Y$. З цього випливає, що всі коефіцієнти α_k дорівнюють нулю, де $k \in A$. Тому, $q \equiv 0$ і поліноми $I_1^{(Y)}, I_2^{(Y)}, \ldots$ є алгебраїчно незалежними. Доведено. □

Таким чином, поліноми $I_n^{(Y)}$ задовольняють умови 1, 2, 3 на с. 71.

Теорема 3.2. *Нехай* $\mathbb{I} = \{I_1^{(\infty)}, I_2^{(\infty)}, \ldots\}$ *є послідовністю поліномів, визначених формулою* (3.5). *Тоді спектр* $M_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$ *алгебри* $H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$ *збігається з множиною усіх функціоналів обчислення значень функцій у точках простору* ℓ_∞.

Доведення. Нехай $\varphi \in M_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$ є характером, що належить спектру алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$. Позначимо δ_x — функціонал обчислення значення у точці $x \in \ell_\infty$. Покажемо, що $\varphi = \delta_x$ для деякого $x \in \ell_\infty$.

Кожний характер $\varphi \in M_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$ єдиним чином визначений послідовністю

$$\Big(\varphi(I_1^{(\infty)}), \varphi(I_2^{(\infty)}), \ldots, \varphi(I_n^{(\infty)}), \ldots\Big).$$

Покладемо

$$x = \Big(\varphi(I_1^{(\infty)}), \sqrt[2]{\varphi(I_2^{(\infty)})}, \ldots, \sqrt[n]{\varphi(I_n^{(\infty)})}, \ldots\Big).$$

Оскільки $\|I_n^{(\infty)}\| = 1, n \in \mathbb{N}$, то згідно з твердженням 2.4 послідовність

$$\Big(\varphi(I_1^{(\infty)}), \varphi(I_2^{(\infty)}), \ldots, \varphi(I_n^{(\infty)}), \ldots\Big)$$

росте не швидше ніж деяка геометрична прогресія. Таким чином, послідовність

$$x = \Big(\varphi(I_1^{(\infty)}), \sqrt[2]{\varphi(I_2^{(\infty)})}, \ldots, \sqrt[n]{\varphi(I_n^{(\infty)})}, \ldots\Big)$$

є обмеженою і, отже, $x \in \ell_\infty$.

Крім того, виконується наступний ланцюг рівностей:

$$\delta_x(I_n^{(\infty)}) = I_n^{(\infty)}(x) = x_n^n = \Big(\sqrt[n]{\varphi(I_n^{(\infty)})}\Big)^n = \varphi(I_n^{(\infty)}).$$

Отже, $\varphi = \delta_x$ і кожний характер $\varphi \in M_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$ є функціоналом обчислення у деякій точці простору ℓ_∞. Доведено. □

У теоремі 3.1 доведено, що алгебри $H_{b\mathbb{P}}(\ell_\infty)$ та $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є ізоморфними, де X є замкненим підпростором простору ℓ_∞, який містить простір c_{00}. З цього випливає, що спектри цих алгебр мають однакову структуру. Тому, поклавши $\mathbb{P} = \mathbb{I}$, можемо сформулювати наступну теорему.

Теорема 3.3. *Нехай поліноми* $I_n^{(X)}$ *визначені формулою* (3.5) *для кожного* $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$*, де* X *є замкненим підпростором простору* ℓ_∞ *таким, що* X *містить простір* c_{00}*. Тоді спектр* $M_{b\mathbb{I}}(X)$ *алгебри* $H_{b\mathbb{I}}(X)$ *збігається з множиною усіх функціоналів обчислення значень функцій у точках простору* ℓ_∞*.*

3.2. Спектр алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$

Нехай $\mathbb{I} = \{I_1^{(p)}, I_2^{(p)}, \ldots\}$ є множиною n-однорідних комплекснозначних поліномів на просторі ℓ_p, де $1 \le p \le +\infty$, визначених формулою (3.5).

У цьому підрозділі ми надаємо деяку інформацію про спектр алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ у випадку, коли $\mathbb{P} = \mathbb{I} = \{I_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ та $X = \ell_1$. Надалі ми будемо використовувати позначення $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$ для даної алгебри та $M_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$ для її спектру. Спектр $M_{b\mathbb{P}}$ алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ може бути описаний як множина послідовностей $\Gamma_{\mathbb{P}}(M_{b\mathbb{P}})$, де відображення $\Gamma_{\mathbb{P}}$ визначене формулою (2.6) для кожного характера $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}(X)$. Зауважимо, що для кожного $x \in \ell_1$ функціонал обчислення значення в точці δ_x, визначений формулою $\delta_x(f) = f(x)$ для кожного $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$, належить спектру $M_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$ алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$. Цікаво дослідити, чи існують інші характери зі спектру $M_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$.

Припустимо, що існує нетривіальний лінійний неперервний мультиплікативний функціонал $\phi : H_{b\mathbb{I}}(\ell_1) \to \mathbb{C}$, який не збігається з жодним характером δ_x, де $x \in \ell_1$. Розглянемо послідовність

$$x_\phi = \left(\phi(I_1^{(1)}), \sqrt{\phi(I_2^{(1)})}, \ldots, \sqrt[n]{\phi(I_n^{(1)})}, \ldots\right).$$

Зауважимо, що $x_\phi \notin \ell_1$. Інакше, якщо $x_\phi \in \ell_1$, то характер ϕ збігатиметься з функціоналом обчислення значення в точці δ_{x_ϕ}. Нехай $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$. Тоді

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \big(I_1^{(1)}(x)\big)^{k_1} \big(I_2^{(1)}(x)\big)^{k_2} \cdots \big(I_n^{(1)}(x)\big)^{k_n},$$

де $x \in \ell_1$, $a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$ і $k_1, k_2 \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \big(I_1^{(1)}(x_\phi)\big)^{k_1} \big(I_2^{(1)}(x_\phi)\big)^{k_2} \cdots \big(I_n^{(1)}(x_\phi)\big)^{k_n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \big(\phi(I_1^{(1)})\big)^{k_1} \big(\phi(I_2^{(1)})\big)^{k_2} \cdots \big(\phi(I_n^{(1)})\big)^{k_n} = \phi(f).$$

Тому функцію f можна природним чином продовжити на множину $\ell_1 \cup \{x_\phi\}$. Загалом, кожну функцію $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$ можна продовжити на кожну точку множини $\nu^{-1}(\Gamma_{\mathbb{P}}(M_{b\mathbb{I}}(\ell_1)))$, де відображення $\Gamma_{\mathbb{P}}$ визначене формулою (2.6) і відображення $\nu : \mathbb{C}^{\infty} \to \mathbb{C}^{\infty}$ визачене формулою

$$\nu((x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)) = (x_1, x_2^2, \ldots, x_n^n, \ldots), \tag{3.8}$$

де $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbb{C}^{\infty}$. Таким чином питання опису спектру алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$ є тісно пов'язаним із питанням продовження елементів цієї алгебри на множину, ширшу від ℓ_1.

У даному підрозділі ми досліджуємо, які точки не належать спектру $M_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$. Ми також будуємо приклад функції, яка належить алгебрі $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$ і є добре визначеною на елементі $x_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$, але не може бути продовженою до аналітичної функції обмеженого типу на просторах ℓ_p, де $1 < p < \infty$.

Твердження 3.2. *Поліноми* $I_1^{(p)}, I_2^{(p)}, \ldots,$ *визначені формулою* (3.5), *є неперервними.*

Доведення. Зауважимо, що

$$\begin{aligned}\|I_n^{(p)}\|_1 &= \sup\{|I_n^{(p)}(x)| : x \in \ell_p, \|x\| \le 1\} = \\ &= \sup\{|x_n|^n : x \in \ell_p, \|x\| \le 1\} = \\ &= 1 < \infty\end{aligned}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\|I_n^{(p)}\|_1 < \infty$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то поліноми $I_1^{(p)}, I_2^{(p)}, \ldots$ є неперервними. Доведено. □

Також зауважимо, що згідно з твердженням 3.1 поліноми $I_1^{(p)}, I_2^{(p)}, \ldots,$ визначені формулою (3.5), є алгебраїчно незалежними.

Теорема 3.4. *Для поліномів* $I_1^{(p)}, \ldots, I_n^{(p)}, \ldots,$ *визначених формулою* (3.5), *наступна рівність є правильною:*

$$\|I_1^{(p)} \cdot \ldots \cdot I_n^{(p)}\|_b = \sqrt[p]{\frac{H(n)}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}} b^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

для кожного $b > 0$ *і* $n \in \mathbb{N}$, *де* $H(n)$ *є гіперфакторіалом числа* n, *тобто,*

$$H(n) = 1^1 2^2 3^3 \dots n^n, \tag{3.9}$$

і норма досягається у точці

$$x = \left(\sqrt[p]{\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}}b, \sqrt[p]{\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}}b, \dots, \sqrt[p]{\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}}b, 0, \dots \right).$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Зауважимо, що згідно з принципом максимуму модуля (див, наприклад, [91, розділ 5]),

$$\begin{aligned} \|I_1^{(p)} \cdot \ldots \cdot I_n^{(p)}\|_b &= \sup_{\|x\| \le b} |I_1^{(p)}(x) \cdot \ldots \cdot I_n^{(p)}(x)| \\ &= \sup_{\|x\| \le b} |x_1 x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^n| \\ &= \sup_{\|x\| = b} |x_1 x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^n| \\ &= \sup_{\|x\| = b} |I_1^{(p)}(x) \cdot \ldots \cdot I_n^{(p)}(x)|, \end{aligned}$$

де $x \in \ell_p$, $1 \le p < \infty$. Легко бачити, що твердження є правильним для випадку $n = 1$. Справді,

$$\|I_1^{(p)}\|_b = \sup_{\|x\| = b} |x_1| = b$$

для $x = (b, 0, \ldots)$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $n \ge 2$. Припустимо, що твердження виконується для $n - 1$ змінних, тобто

$$\|I_1^{(p)} \cdot \ldots \cdot I_{n-1}^{(p)}\|_b = \sup_{\|x\| = b} |x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{n-1}| = \sqrt[p]{\frac{H(n-1)}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{3.10}$$

і норма досягається у точці

$$x = \left(\sqrt[p]{\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}}b, \sqrt[p]{\frac{2}{\frac{n(n-1)}{2}}}b, \dots, \sqrt[p]{\frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}}}b, 0, \dots \right).$$

Доведемо, що твердження є правильним для n змінних. Нехай $a = |x_n|$. Оскільки $\|x\| = b$ і $|x_n| \le \|x\|$, то звідси випливає, що $a \le b$. Таким чином, $a \in [0, b]$. Крім того, оскільки $|x_n| = a$ і для кожного

$$x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \in \ell_p$$

ми маємо, що

$$\|x\| = \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p} = b,$$

то

$$\sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_{n-1}|^p + a^p} = b$$

і тому,

$$|x_1|^p + \ldots + |x_{n-1}|^p = b^p - a^p$$

і, як наслідок,

$$\sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_{n-1}|^p} = \sqrt[p]{b^p - a^p}.$$

Тоді, використовуючи (3.10), маємо наступне:

$$\begin{aligned}\|I_1^{(p)} \cdot \ldots \cdot I_n^{(p)}\|_b &= \sup_{\|x\|=b} |x_1 \cdot \ldots \cdot x_n^n| \\ &= a^n \sup_{(|x_1|^p + \ldots + |x_{n-1}|^p)^{1/p} = (b^p - a^p)^{1/p}} |x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{n-1}| \\ &= a^n \sqrt[p]{\frac{H(n-1)}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}} (b^p - a^p)^{\frac{n(n-1)}{2p}}.\end{aligned}$$

Розглянемо функцію

$$f(a) = a^n \sqrt[p]{\frac{H(n-1)}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}} (b^p - a^p)^{\frac{n(n-1)}{2p}}.$$

Можна перевірити, що функція f досягає свого найбільшого значення на відрізку $[0, b]$ у точці $a_{max} = \sqrt[p]{\frac{2}{n+1}} b$.

Тоді

$$
\begin{aligned}
\|I_1^{(p)} \cdot \ldots \cdot I_n^{(p)}\|_b &= f(a_{max}) \\
&= \sqrt[p]{\left(\frac{2}{n+1}\right)^n b^n \sqrt[p]{\frac{H(n-1)}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}} \left(b^p - \frac{2}{n+1} b^p\right)^{\frac{n(n-1)}{2p}}}.
\end{aligned}
$$

Після спрощення останнього виразу ми отримаємо бажане:

$$
\|I_1^{(p)} \cdot \ldots \cdot I_n^{(p)}\|_b = \sqrt[p]{\frac{H(n)}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}} b^{\frac{n(n+1)}{2}}}.
$$

Доведено. □

Наслідок 3.1. *Для поліномів* $I_1^{(1)}, \ldots, I_n^{(1)}, \ldots$, *визначених формулою* (3.5), *наступна рівність є правильною:*

$$
\|I_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_n^{(1)}\|_1 = \frac{H(n)}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}.
$$

Наслідок 3.2. *Для поліномів* $I_1^{(p)}, \ldots, I_n^{(p)}, \ldots$, *визначених формулою* (3.5), *наступна рівність є правильною:*

$$
\|I_1^{(p)} \cdot \ldots \cdot I_n^{(p)}\|_1 = \sqrt[p]{\frac{H(n)}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}}.
$$

Твердження 3.3. *Послідовність* $(c, c, c, \ldots)$, *де* $c \in [1, +\infty)$, *не належить множині* $\nu^{-1}(\Gamma_{\mathbb{P}}(M_{b\mathbb{I}}(\ell_1)))$, *де відображення* $\Gamma_{\mathbb{P}}$ *визначене формулою* (2.6) *і відображення* ν *визначене формулою* (3.8).

Доведення. Розглянемо функцію

$$
f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{2}\right)^m I_1^{(1)}(x) I_2^{(1)}(x) \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}(x),
$$

$x \in \ell_1$. Зауважимо, що n-тий член ряду Тейлора функції f визначений формулою

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{m}{2}\right)^m I_1^{(1)}(x) \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}(x), & \text{якщо } n = \frac{m(m+1)}{2} \text{ для} \\ & \text{деякого } m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Згідно із Теоремою 1.3, асимптотична швидкість росту гіперфакторіала $H(m)$ є наступною:

$$H(m) \sim A m^{\frac{6m^2+6m+1}{12}} e^{\frac{-m^2}{4}}, \tag{3.11}$$

де $A = 1.2824\ldots$ є константою Глейшера-Кінкеліна. Взявши це до уваги, можна перевірити, що

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \|f_{\frac{m(m+1)}{2}}\|_1^{\frac{2}{m(m+1)}} &= \lim_{m\to\infty} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^m \|I_1^{(1)} I_2^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}\|_1\right)^{\frac{2}{m(m+1)}} \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^m \frac{H(m)}{\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}}}\right)^{\frac{2}{m(m+1)}} \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\left(\frac{m}{2}\right)^m \frac{A m^{\frac{6m^2+6m+1}{12}} e^{\frac{-m^2}{4}}}{\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}}}\right)^{\frac{2}{m(m+1)}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Тому радіус рівномірної збіжності функції f дорівнює нескінченності:

$$R(f) = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_1^{1/n}} = \infty.$$

І, отже, $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$. Далі доведемо, що задана функція f не є визначеною на послідовності $(c, c, c, \ldots)$, де $c \in [1; +\infty)$ є константою, тобто ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{2}\right)^m c^{\frac{m(m+1)}{2}} \tag{3.12}$$

розбіжний. Легко бачити, що

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\left(\frac{m}{2}\right)^m c^{\frac{m(m+1)}{2}}} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{2} c^{\frac{m+1}{2}} = \infty.$$

Тому за ознакою Коші ряд (3.12) не є збіжним. Доведено. $\square$

Теорема 3.5. *Нехай* $\left\{I_1^{(1)}, \ldots, I_m^{(1)}, \ldots\right\}$ *є множиною поліномів, визначених формулою* (3.5). *Тоді кожна функція* f *вигляду*

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha(m) I_1^{(1)}(x) \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}(x),$$

де $\alpha(m)$ *є деяким коефіцієнтом, залежним від* m, *така, що* $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$, *є добре визначеною на елементі* $x_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$.

Доведення. Нехай функція

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha(m) I_1^{(1)}(x) \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}(x),$$

де $\alpha(m)$ є деяким коефіцієнтом, залежним від m, належить алгебрі $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$. Зауважимо, що n-тий член ряду Тейлора функції f визначений формулою

$$f_n(x) = \begin{cases} \alpha(m) I_1^{(1)}(x) \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}(x), & \text{якщо } n = \frac{m(m+1)}{2} \text{ для} \\ & \text{деякого } m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Оскільки дана функція f належить алгебрі $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$, то радіус рівномірної збіжності функції f є рівним нескінченності:

$$R(f) = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_1^{1/n}} = \infty.$$

Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_1^{1/n} = 0$$

і, відповідно,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1^{1/n} = 0.$$

Таким чином, беручи до уваги (3.13), маємо, що

$$\lim_{m\to\infty} \left\|f_{\frac{m(m+1)}{2}}\right\|_1^{\frac{2}{m(m+1)}} = 0,$$

тобто,

$$\lim_{m\to\infty} \left\|\alpha(m) I_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}\right\|_1^{\frac{2}{m(m+1)}} = 0.$$

Зробимо заміну

$$\alpha(m) = \frac{\big(\varepsilon(m)\big)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\big\|I_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}\big\|_1}.$$

Тоді ми отримаємо наступне:

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{|\varepsilon(m)|^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\|I_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}\|_1} \|I_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}\|_1 \right)^{\frac{2}{m(m+1)}} = \lim_{m\to\infty} |\varepsilon(m)| = 0.$$

Тому $\lim_{m\to\infty} \varepsilon(m) = 0$. Остання рівність є необхідною та достатньою умовою того, що дана функція f належить алгебрі $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$.

Доведемо, що функція

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\big(\varepsilon(m)\big)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\|I_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}\|_1} I_1^{(1)}(x) \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}(x)$$

така, що $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$, є добре визначеною на елементі

$$x_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots).$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\big(\varepsilon(m)\big)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\|I_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}\|_1} 1 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{m^m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\big(\varepsilon(m)\big)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\|I_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}\|_1} \frac{1}{H(m)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\big(\varepsilon(m)\big)^{\frac{m(m+1)}{2}} \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{H^2(m)}. \end{aligned}$$

Отже, нам потрібно показати, що ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\big(\varepsilon(m)\big)^{\frac{m(m+1)}{2}} \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{H^2(m)} \tag{3.14}$$

є збіжним. Оскільки $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$, то звідси випливає, що

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon(m) = 0$$

і тому $|\varepsilon(m)| \leq \frac{1}{2}$ для великих m. Беручи до уваги цей факт і асимптотичну швидкість росту гіперфакторіала $H(m)$ (див. (3.11)), використаємо ознаку Коші. Тоді отримаємо наступне:

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{|\varepsilon(m)|^{\frac{m(m+1)}{2}}\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{H^2(m)}} &= \lim_{m\to\infty}\frac{|\varepsilon(m)|^{\frac{m+1}{2}}\left(m^2+m\right)^{\frac{m+1}{2}}e^{\frac{m}{2}}}{A^{\frac{2}{m}}2^{\frac{m+1}{2}}m^{\frac{12m^2+12m+2}{12m}}}\\ &\leq \lim_{m\to\infty}\frac{\left(m^2+m\right)^{\frac{m+1}{2}}e^{\frac{m}{2}}}{A^{\frac{2}{m}}2^{m+1}m^{\frac{12m^2+12m+2}{12m}}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{|\varepsilon(m)|^{\frac{m(m+1)}{2}}\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{H^2(m)}} \geq 0.$$

Тоді, згідно з теоремою про три послідовності,

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{|\varepsilon(m)|^{\frac{m(m+1)}{2}}\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{H^2(m)}} = 0.$$

Таким чином, згідно з ознакою Коші, ряд (3.14) є збіжним. Отже, функція

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\big(\varepsilon(m)\big)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\|I_1^{(1)}\cdot\ldots\cdot I_m^{(1)}\|_1}I_1^{(1)}(x)\cdot\ldots\cdot I_m^{(1)}(x),$$

така, що $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$, є добре визначеною на елементі

$$x_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots).$$

Залишилося замінити $\frac{\left(\varepsilon(m)\right)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\left\|I_1^{(1)}\cdot\ldots\cdot I_m^{(1)}\right\|_1}$ на $\alpha(m)$. Тоді отримаємо бажане: кожна функція

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\alpha(m)I_1^{(1)}(x)\cdot\ldots\cdot I_m^{(1)}(x),$$

що належить алгебрі $H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$, є добре визначеною на елементі x_0. Теорему доведено. $\square$

Приклад 3.1. *Функція $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$ вигляду*

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(H(m)\Big)^{1-\frac{1}{\log(\log m)}} I_1^{(1)}(x) I_2^{(1)}(x) \dots I_m^{(1)}(x),$$

де поліноми $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, \dots$ визначені формулою (3.5) і $H(m)$ є гіперфакторіалом числа $m \in \mathbb{N}$, визначеним формулою (3.9), не може бути продовженою до аналітичної функції обмеженого типу на просторі ℓ_p, де $1 < p < \infty$. Але функція f є добре визначеною на елементі $x_0 = (1, 1/2, \dots, 1/n, \dots)$.

Доведення. Спершу покажемо, що $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$. Для цього нам потрібно довести, що радіус рівномірної збіжності функції f дорівнює нескінченності, тобто, за формулою Коші-Адамара (див. [76, с. 27, теорема 4.3]),

$$R(f) = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_1^{1/n}} = \infty.$$

Зауважимо, що n-тий член ряду Тейлора функції f визначений формулою

$$f_n(x) = \begin{cases} \Big(H(m)\Big)^{1-\frac{1}{\log(\log m)}} I_1^{(1)}(x) \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)}(x), & \text{якщо } n = \frac{m(m+1)}{2} \text{ для} \\ & \text{деякого } m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \tag{3.15}$$

Взявши до уваги формулу (3.15) і Наслідок 1, маємо наступне:

$$\begin{aligned} \|f_{\frac{m(m+1)}{2}}\|_1^{\frac{2}{m(m+1)}} &= \left\| \Big(H(m)\Big)^{1-\frac{1}{\log(\log m)}} I_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)} \right\|_1 \\ &= \left(\Big(H(m)\Big)^{1-\frac{1}{\log(\log m)}} \left\| I_1^{(1)} \cdot \ldots \cdot I_m^{(1)} \right\|_1 \right)^{\frac{2}{m(m+1)}} \\ &= \left(\Big(H(m)\Big)^{1-\frac{1}{\log(\log m)}} \right)^{\frac{2}{m(m+1)}} \cdot \frac{\Big(H(m)\Big)^{\frac{2}{m(m+1)}}}{\frac{m(m+1)}{2}} \\ &= \frac{\Big(H(m)\Big)^{\left(2-\frac{1}{\log(\log m)}\right)\cdot\frac{2}{m(m+1)}}}{\frac{m(m+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Взявши до уваги асимптотичну швидкість росту гіперфакторіала $H(m)$ (див. (3.11)), можна перевірити, що

$$\lim_{m\to\infty} \|f_{\frac{m(m+1)}{2}}\|_1^{\frac{2}{m(m+1)}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\Big(H(m)\Big)^{\left(2-\frac{1}{\log(\log m)}\right)\cdot\frac{2}{m(m+1)}}}{\frac{m(m+1)}{2}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{2\Big(Am^{\frac{6m^2+6m+1}{12}}e^{\frac{-m^2}{4}}\Big)^{\frac{2}{m(m+1)}\left(2-\frac{1}{\log(\log m)}\right)}}{m(m+1)}$$

$$= 0.$$

Тому $R(f) = \infty$ і $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_1)$. Далі доведемо, що $f \notin H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $p > 1$, тобто, $R(f) \neq \infty$. Використовуючи наслідок 3.2, маємо наступне:

$$\|f_{\frac{m(m+1)}{2}}\|_1^{\frac{2}{m(m+1)}} = \left(\Big(H(m)\Big)^{1-\frac{1}{\log(\log m)}} \sqrt[p]{\frac{H(m)}{\Big(\frac{m(m+1)}{2}\Big)^{\frac{m(m+1)}{2}}}}\right)^{\frac{2}{m(m+1)}}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{p}}\Big(H(m)\Big)^{\frac{2}{m(m+1)}\left(1-\frac{1}{\log(\log m)}+\frac{1}{p}\right)}}{\Big(m(m+1)\Big)^{\frac{1}{p}}}.$$

Тоді можна перевірити, що

$$\lim_{m\to\infty} \|f_{\frac{m(m+1)}{2}}\|_1^{\frac{2}{m(m+1)}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{p}}\Big(H(m)\Big)^{\frac{2}{m(m+1)}\left(1-\frac{1}{\log(\log m)}+\frac{1}{p}\right)}}{\Big(m(m+1)\Big)^{\frac{1}{p}}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{p}}\Big(Am^{\frac{6m^2+6m+1}{12}}e^{\frac{-m^2}{4}}\Big)^{\frac{2}{m(m+1)}\left(1-\frac{1}{\log(\log m)}+\frac{1}{p}\right)}}{(m^2+m)^{\frac{1}{p}}}$$

$$= \infty.$$

Тому $R(f) = 0$ і $f \notin H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $p > 1$.

Крім того, згідно з твердженням 3.5, дана функція f є добре визначеною на елементі $x_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$. $\square$

3.3. Операції на спектрі алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le \infty$

Нехай $\mathbb{P} = \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ є множиною неперервних комплекснозначних n-однорідних алгебраїчно незалежних поліномів на просторі X, таких, що $\|P_n\|_1 = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки кожна функція $f \in H_{b\mathbb{P}}(X)$ може бути єдиним чином представлена у вигляді

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} P_1^{k_1}(x) P_2^{k_2}(x) \cdots P_n^{k_n}(x),$$

де $\alpha_{k_1\ldots k_n} \in \mathbb{C}$ і $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то кожний характер $\varphi \in M_{b\mathbb{P}}(X)$ є однозначно визначеним своїми значеннями на поліномах $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тому цікаво розглянути образ $\Gamma_{\mathbb{P}}(M_{b\mathbb{P}}(X))$ спектру $M_{b\mathbb{P}}(X)$ алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$, де відображення $\Gamma_{\mathbb{P}}$ визначене формулою (2.6). Також цікаво розглянути підмножину $\Gamma_{\mathbb{P}}(M_{b\mathbb{P}}^{(0)}(X))$ множини $\Gamma_{\mathbb{P}}(M_{b\mathbb{P}}(X))$, де

$$M_{b\mathbb{P}}^{(0)}(X) = \{\delta_x : x \in X\}. \tag{3.16}$$

У даному підрозділі ми показуємо, що $\Gamma_{\mathbb{P}}\big(M_{b\mathbb{P}}^{(0)}(X)\big)$ має структуру лінійного простору у випадку $X = \ell_p$, де $1 \le p \le +\infty$, і $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} = \{I_n^{(p)}\}_{n=1}^{\infty}$, де поліноми $I_1^{(p)}, I_2^{(p)}, \ldots$ визначені формулою (3.5).

Нехай $\mathbb{I} = \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. Як було зазначено вище, кожна функція $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le +\infty$, має наступний вигляд:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \big(I_1^{(p)}(x)\big)^{k_1} \big(I_2^{(p)}(x)\big)^{k_2} \cdots \big(I_n^{(p)}(x)\big)^{k_n},$$

де $\alpha_{k_1\ldots k_n} \in \mathbb{C}$ і $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Визначимо функції $J_\lambda(f) : \ell_p \to \mathbb{C}$ і $J_{+c}(f) : \ell_p \to \mathbb{C}$, наступними формулами:

$$J_\lambda(f)(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} (\lambda I_1^{(p)}(x))^{k_1} \cdots (\lambda I_n^{(p)}(x))^{k_n} \tag{3.17}$$

і

$$J_{+c}(f)(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} (I_1^{(p)}(x) + c_1)^{k_1} \cdots (I_n^{(p)}(x) + c_n)^{k_n} \tag{3.18}$$

для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ і $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\varphi(I_n^{(p)})\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$, де $\varphi = \delta_z \in M_{b\mathbb{I}}^{(0)}(\ell_p)$ і $z \in \ell_p$ є фіксованим елементом.

Теорема 3.6. *Функції $J_\lambda(f)$ і $J_{+c}(f)$, визначені формулами* (3.17) *і* (3.18) *відповідно, є цілими функціями обмеженого типу на просторі ℓ_p для кожної функції $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le +\infty$. Відображення $J_\lambda : f \mapsto J_\lambda(f)$ і $J_{+c} : f \mapsto J_{+c}(f)$ є гомоморфізмами з алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$ в себе.*

Доведення. Нехай $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, $1 \le p \le +\infty$. Спершу покажемо, що для кожної сталої $\lambda \in \mathbb{C}$ відображення J_λ є добре визначеним. Доведемо, що для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ і $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_p$ існує послідовність $y_x \in \ell_p$ така, що виконується рівність $I_n^{(p)}(y_x) = \lambda I_n^{(p)}(x)$. Досить розглянути послідовність

$$y_x = (\lambda x_1, \sqrt{\lambda}x_2, \ldots, \sqrt[n]{\lambda}x_n, \ldots).$$

Покажемо, що $y_x \in \ell_p$. У випадку $1 \le p < +\infty$ маємо, що

$$\begin{aligned}
\|y_x\|^p &= |\lambda x_1|^p + |\sqrt{\lambda}x_2|^p + \ldots + |\sqrt[n]{\lambda}x_n|^p + \ldots \\
&= |\lambda|^p|x_1|^p + |\sqrt{\lambda}|^p|x_2|^p + \ldots + |\sqrt[n]{\lambda}|^p|x_n|^p + \ldots \\
&\le \big(\max\{|\lambda|, 1\}\big)^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \\
&= \big(\max\{|\lambda|, 1\}\big)^p \|x\|^p < +\infty,
\end{aligned}$$

оскільки $x \in \ell_p$. Отже, $y_x \in \ell_p$. Крім того, $\|y_x\| \le \max\{|\lambda|, 1\}\|x\|$.

У випадку $p = \infty$ маємо, що

$$\begin{aligned}
\|y_x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(|\sqrt[n]{\lambda}||x_n|\Big) \le \\
\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\max\{|\lambda|, 1\}|x_n|\Big) = \\
= \max\{|\lambda|, 1\}\|x\| < \infty,
\end{aligned}$$

оскільки $x \in \ell_\infty$. Тому $y_x \in \ell_\infty$ і

$$\|y_x\| \le \max\{|\lambda|, 1\}\|x\|.$$

Виконання рівності $I_n^{(p)}(y_x) = \lambda I_n^{(p)}(x)$ є очевидним в обох випадках. Таким чином даний елемент $y_x \in \ell_p$, де $1 \le p \le +\infty$, є шуканим. Тоді, беручи до уваги, що функція $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$ є добре визначеною, маємо наступне:

$$\begin{aligned} J_\lambda(f)(x) &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} (\lambda I_1^{(p)}(x))^{k_1} \cdots (\lambda I_n^{(p)}(x))^{k_n} \\ &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \left(I_1^{(p)}(y_x)\right)^{k_1} \cdots \left(I_n^{(p)}(y_x)\right)^{k_n} \\ &= f(y_x) < \infty. \end{aligned}$$

Тому функція $J_\lambda(f)$ є добре визначеною.

Далі покажемо, що функція $J_\lambda(f) \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le +\infty$. Згідно з [76, розділ 8, твердження 8.6 і теорема 8.7] і беручи до уваги, що кожна функція обмеженого типу є локально обмеженою, достатньо показати, що $J_\lambda(f)$ є G-голоморфною функцією обмеженого типу.

Спершу покажемо, що функція $J_\lambda(f)$ є G-голоморфною. Згідно з означенням G-голоморфної функції, потрібно довести, що для всіх послідовностей $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ і сталої $\mu \in \mathbb{C}$ функція $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, визначена формулою

$$h(\mu) = J_\lambda(f)(a + \mu b),$$

є цілою на множині $\mathbb{C}$. Нехай $h_{m+1}(\mu)$ є $(m+1)$-шою частинною сумою ряду, що відповідає функції h. Очевидно, що $h_{m+1} \in H(\mathbb{C})$. Згідно із зазначеним вище, наступні рівності є правильними:

$$\begin{aligned} h(\mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} (\lambda I_1^{(p)}(a+\mu b))^{k_1} \cdots (\lambda I_n^{(p)}(a+\mu b))^{k_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \left(I_1^{(p)}(y_{a+\mu b})\right)^{k_1} \cdots \left(I_n^{(p)}(y_{a+\mu b})\right)^{k_n} \\ &= f(y_{a+\mu b}) \end{aligned}$$

і

$$
\begin{aligned}
h_{m+1}(\mu) &= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \big(\lambda I_1^{(p)}(a+\mu b)\big)^{k_1} \cdots \big(\lambda I_n^{(p)}(a+\mu b)\big)^{k_n} \\
&= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \big(I_1^{(p)}(y_{a+\mu b})\big)^{k_1} \cdots \big(I_n^{(p)}(y_{a+\mu b})\big)^{k_n} \\
&= f_{m+1}(y_{a+\mu b}).
\end{aligned}
$$

Покажемо, що послідовність частинних сум $\{h_{m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ ряду, що відповідає функції h, рівномірно збігається до функції h. Нехай $l \in \mathbb{N}$. Тоді, оскільки $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, то маємо наступне:

$$
\begin{aligned}
\|h - h_{m+1}\|_l &= \sup_{|\mu|\le l} |h(\mu) - h_{m+1}(\mu)| \\
&\le \sup_{\{y\in\ell_p : \|y\| \le \max\{|\lambda|,1\}(\|a\|+l\|b\|)\}} |f(y) - f_{m+1}(y)| \to 0,\ m \to \infty.
\end{aligned}
$$

Тому, оскільки простір $H(\mathbb{C})$ є повним і $h_{m+1} \in H(\mathbb{C})$, то $h \in H(\mathbb{C})$. І, отже, функція $J_\lambda(f)$ є G-голоморфною.

Далі покажемо, що функція $J_\lambda(f)$ є функцією обмеженого типу. Нехай S є довільною обмеженою множиною простору ℓ_p, тобто, існує куля $B(a,r)$, де $a \in \ell_p, r > 0$ така, що $S \subset B(a,r)$. Доведемо, що функція $J_\lambda(f)$ є обмеженою на множині S. Нехай s є довільним елементом множини S. Тоді $\|s\| \le r$. Оскільки $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, то маємо наступне:

$$
\begin{aligned}
|J_\lambda(f)(s)| &= |f(y_s)| \le \\
&\le \sup_{\{z\in\ell_p : \|z\| \le \|y_s\|\}} |f(z)| \le \\
&\le \sup_{\{z\in\ell_p : \|z\| \le r\max\{|\lambda|,1\}\}} |f(z)| = \\
&= \|f\|_{r\max\{|\lambda|,1\}} < \\
&< +\infty.
\end{aligned}
$$

Таким чином, $J_\lambda(f) \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$.

Легко перевірити, що дане відображення J_λ зберігає операції алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$.

Далі доведемо другу частину теореми. Аналогічно, нехай $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le +\infty$. Зафіксуємо $z \in \ell_p$ і позначимо $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел таку, що $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \big\{\varphi\big(I_n^{(p)}\big)\big\}_{n=1}^{\infty}$, де $\varphi = \delta_z \in M_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$.

Спершу покажемо, що для кожного $x \in \ell_p$, де $1 \le p \le +\infty$, і для даної послідовності $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ існує елемент $y_x \in \ell_p$ такий, що виконується рівність

$$I_n^{(p)}(y_x) = I_n^{(p)}(x) + c_n.$$

Розглянемо послідовність

$$y_x = \Big(x_1 + c_1, \sqrt{x_2^2 + c_2}, \ldots, \sqrt[n]{x_n^n + c_n}, \ldots\Big).$$

Очевидно, що для даної послідовності y_x виконується умова $I_n^{(p)}(y_x) = I_n^{(p)}(x) + c_n$. Покажемо, що $y_x \in \ell_p$, де $1 \le p \le +\infty$.

Спершу розглянемо випадок, коли $1 \le p < +\infty$. Легко бачити, що правильною є наступна оцінка:

$$\begin{aligned}
|\sqrt[n]{x_n^n + c_n}|^p &= \big(\sqrt[n]{|x_n^n + c_n|}\big)^p \le \big(\sqrt[n]{|x_n|^n + |c_n|}\big)^p \\
&= \big(\sqrt[n]{|x_n|^n + |z_n|^n}\big)^p \le \big(\sqrt[n]{(|x_n| + |z_n|)^n}\big)^p = (|x_n| + |z_n|)^p \\
&= \big(|x_n| + \sqrt[n]{|c_n|}\big)^p \le 2^p\big(\max\{|x_n|, \sqrt[n]{|c_n|}\}\big)^p \le 2^p\big(|x_n|^p + \sqrt[n]{|c_n|^p}\big).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt[n]{x_n^n + c_n}|^p &\le 2^p \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|x_n|^p + \sqrt[n]{|c_n|^p}\Big) \\
&= 2^p\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|c_n|^p}\Big) < \infty,
\end{aligned}$$

оскільки $x, z \in \ell_p$. Тому $y_x \in \ell_p$, $1 \le p < +\infty$. Крім того,

$$\|y_x\| \le 2\Bigg(\|x\| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|c_n|^p}\Big)^{\frac{1}{p}}\Bigg).$$

Позначимо $L = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|c_n|^p}\Big)^{\frac{1}{p}}$. Тоді

$$\|y_x\| \le 2\big(\|x\| + L\big).$$

Далі розглянемо випадок, коли $p = \infty$. Оскільки $x, z \in \ell_\infty$, наступна оцінка є правильною:

$$\begin{aligned}\|y_x\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sqrt[n]{x_n^n + c_n}| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|x_n^n + c_n|} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|x_n|^n + |c_n|} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|x_n|^n + |z_n|^n} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{(|x_n| + |z_n|)^n} = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|x_n| + |z_n|) \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n| \le \|x\| + \|z\| < \infty.\end{aligned}$$

Тому $y_x \in \ell_\infty$. Нехай

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Тоді

$$\|y_x\| \le \|x\| + M.$$

Легко бачити, що для даної послідовності c відображення J_{+c} є добре визначеним. Справді, беручи до уваги зазначене вище і, що функція $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le +\infty$, є добре визначеною, маємо потрібне:

$$\begin{aligned}J_{+c}(f)(x) &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \big(I_1^{(p)}(x) + c_1\big)^{k_1} \cdots \big(I_n^{(p)}(x) + c_n\big)^{k_n} \\ &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \big(I_1^{(p)}(y_x)\big)^{k_1} \cdots \big(I_n^{(p)}(y_x)\big)^{k_n} \\ &= f(y_x) < \infty.\end{aligned}$$

Тепер доведемо, що $J_{+c}(f) \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le +\infty$. Аналогічно, нам потрібно показати, що відображення $J_{+c}(f)$ є G-голоморфним і обмеженим на обмежених множинах. Спершу доведемо, що $J_{+c}(f)$ є G-голоморфною функцією. Нам потрібно показати, що для всіх послідовностей $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ і сталої $\mu \in \mathbb{C}$ функція $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, визначена формулою

$$h(\mu) = J_{+c}(f)(a + \mu b),$$

є цілою на множині $\mathbb{C}$, тобто, що $h \in H(\mathbb{C})$. Нехай $h_{m+1}(\mu)$ є $(m+1)$-шою частинною сумою ряду, що відповідає функції h. Очевидно, що $h_{m+1} \in$

$H(\mathbb{C})$. Згідно із зазначеним вище, наступні рівності є правильними:

$$\begin{aligned} h(\mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \big(I_1^{(p)}(a+\mu b)+c_1\big)^{k_1} \cdots \big(I_n^{(p)}(a+\mu b)+c_n\big)^{k_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \big(I_1^{(p)}(y_{a+\mu b})\big)^{k_1} \cdots \big(I_n^{(p)}(y_{a+\mu b})\big)^{k_n} \\ &= f(y_{a+\mu b}) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} h_{m+1}(\mu) &= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \big(I_1^{(p)}(a+\mu b)+c_1\big)^{k_1} \cdots \big(I_n^{(p)}(a+\mu b)+c_n\big)^{k_n} \\ &= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} \big(I_1^{(p)}(y_{a+\mu b})\big)^{k_1} \cdots \big(I_n^{(p)}(y_{a+\mu b})\big)^{k_n} \\ &= f_{m+1}(y_{a+\mu b}). \end{aligned}$$

Покажемо, що послідовність частинних сум $\{h_{m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ ряду, що відповідає функції h, рівномірно збігається до h.

Нехай $l \in \mathbb{N}$. Оскільки $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, тоді у випадку, коли $1 \le p < +\infty$, маємо, що

$$\begin{aligned} \|h - h_{m+1}\|_l &= \sup_{|\mu|\le l} |h(\mu) - h_{m+1}(\mu)| \\ &\le \sup_{\{y\in\ell_p : \|y\|\le 2(\|a\|+l\|b\|+L)\}} |f(y) - f_{m+1}(y)| \\ &= \|f - f_{m+1}\|_{2(\|a\|+l\|b\|+L)} \to 0,\ m\to\infty. \end{aligned}$$

І у випадку, коли $p = \infty$, оскільки $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$, маємо, що

$$\begin{aligned} \|h - h_{m+1}\|_l &= \sup_{|\mu|\le l} |h(\mu) - h_{m+1}(\mu)| \\ &\le \sup_{\{y\in\ell_\infty : \|y\|\le \|a\|+l\|b\|+M\}} |f(y) - f_{m+1}(y)| \\ &= \|f - f_{m+1}\|_{\|a\|+l\|b\|+M} \to 0, \text{при } m\to\infty. \end{aligned}$$

Тому, оскільки простір $H(\mathbb{C})$ є повним і $h_{m+1} \in H(\mathbb{C})$, то $h \in H(\mathbb{C})$ у всіх цих випадках. І тому функція $J_{+c}(f)$ є G-голоморфною для кожної функції $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le +\infty$.

Далі покажемо, що функція $J_{+c}(f)$ є функцією обмеженого типу. Нехай S є довільною обмеженою множиною простору ℓ_p, де $1 \le p \le +\infty$, тобто існує куля $B(a,r)$, де $a \in \ell_p$ і $r > 0$, така, що $S \subset B(a,r)$. Покажемо, що функція $J_{+c}(f)$ є обмеженою на множині S. Нехай s є довільним елементом множини S. Тоді $\|s\| \le r$.

Оскільки $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, то у випадку, коли $1 \le p < \infty$, наступна оцінка є правильною:

$$\begin{aligned} |J_{+c}(f)(s)| &= |f(y_s)| \le \\ &\le \sup_{\{z \in \ell_p : \|z\| \le \|y_s\|\}} |f(z)| \le \\ &\le \sup_{\{z \in \ell_p : \|z\| \le 2(r+L)\}} |f(z)| = \\ &= \|f\|_{2(r+L)} < +\infty. \end{aligned}$$

І у випадку, коли $p = \infty$, оскільки $f \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$, наступна оцінка є правильною:

$$\begin{aligned} |J_{+c}(f)(s)| &= |f(y_s)| \le \\ &\le \sup_{\{z \in \ell_\infty : \|z\| \le \|y_s\|\}} |f(z)| \\ &\le \sup_{\{z \in \ell_\infty : \|z\| \le r+M\}} |f(z)| \\ &= \|f\|_{r+M} < +\infty. \end{aligned}$$

Отже, $J_{+c}(f) \in H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le \infty$.

Також легко перевірити, що дане відображення J_{+c} зберігає операції алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le \infty$. □

З теореми 1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.3. *Для кожного характера $\varphi \in M_{b\mathbb{I}}(\ell_p)$, де $1 \le p \le \infty$, виконуються наступні рівності:*

$$\Big(\varphi \circ J_\lambda\big(I_1^{(p)}\big), \varphi \circ J_\lambda\big(I_2^{(p)}\big), \dots\Big) = \lambda\Big(\varphi\big(I_1^{(p)}\big), \varphi\big(I_2^{(p)}\big), \dots\Big), \tag{3.19}$$

$$\Big(\varphi \circ J_{+c}\big(I_1^{(p)}\big), \varphi \circ J_{+c}\big(I_2^{(p)}\big), \dots\Big) = \Big(\varphi\big(I_1^{(p)}\big) + c_1, \varphi\big(I_2^{(p)}\big) + c_2, \dots\Big). \tag{3.20}$$

Оскільки виконуються рівності (3.19) і (3.20), то, очевидно, що ми можемо виконувати операції множення на скаляр та додавання (зауважимо, що другий доданок має бути образом функціонала обчислення значення у точках простору ℓ_p) на множині $\Gamma_{\mathbb{P}}(M_{b\mathbb{I}}(\ell_p))$, де відображення $\Gamma_{\mathbb{P}}$ визначене формулою (2.6).

Наслідок 3.4. *Множина* $\Gamma_{\mathbb{P}}\big(M_{b\mathbb{I}}^{(0)}\big(X)\big)$, *де* $M_{b\mathbb{I}}^{(0)}(X)$ *визначено формулою* (3.16), *має структуру лінійного простору у випадку, коли* $X = \ell_p$, *де* $1 \leq p \leq +\infty$.

Враховуючи неперервність оператора J_{+c} і [26], маємо наступний наслідок.

Наслідок 3.5. *Оператор* J_{+c} *є гіперциклічним.*

3.4. Висновки до розділу 3

Розділ присвячено дослідженню спектрів алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченними множинами однорідних поліномів на деяких просторах послідовностей.

У підрозділі 3.1 описано спектр алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ для випадку $\mathbb{P} = \mathbb{I}$, де поліноми $\mathbb{I}$ визначені формулою (3.5) та X є замкненим підпростором простору ℓ_∞, який містить простір c_{00}.

У підрозділі 3.2 досліджено спектр алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ у випадку, коли $\mathbb{P} = \mathbb{I}$ та $X = \ell_1$. Встановлено які точки не належать спектру цієї алгебри. Побудовано приклад функції, яка належить даній алгебрі і є добре визначеною на елементі $x_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$, але не може бути продовженою до аналітичної функції обмеженого типу на просторах ℓ_p, де $1 < p < \infty$.

У підрозділі 3.3 розглянуто деякі операції зсуву, які здійснюються на спектрі $M_{b\mathbb{P}}$ алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ у випадку $\mathbb{P} = \mathbb{I}$ та $X = \ell_p$, де $p \geq 1$.

Результати, наведені в даному розділі, опубліковано в таких працях: [1], [3] – [4], [49] – [51], [53] – [55], [58], [93] – [95].

РОЗДІЛ 4. ІЗОМОРФІЗМИ ДЕЯКИХ АЛГЕБР АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ТИПУ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Розділ присвячено дослідженню умов ізоморфізму топологічних алгебр цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченними множинами поліномів на комплексних банахових просторах.

4.1. Умови неперервності

Нехай X та Y є комплексними банаховими просторами. Нехай $\mathbb{A} = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\mathbb{P} = \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ є послідовностями неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів степеня n з одиничними нормами на просторах X та Y відповідно. У даному підрозділі розглянуто алгебри Фреше $H_{b\mathbb{A}}(X)$ та $H_{b\mathbb{P}}(Y)$ цілих функцій обмеженого типу, породжені послідовностями поліномів $\mathbb{A}$ та $\mathbb{P}$ відповідно, і досліджено умови ізоморфізму даних алгебр.

Твердження 4.1. *Нехай X є комплексним банаховим простором. Тоді радіус-функція кожного функціонала обчислення значення функції в точці δ_x на алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є меншою за норму $\|x\|$ або дорівнює нормі $\|x\|$.*

Доведення. Оскільки простір однорідних поліномів $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(^nX)$ є підпростором простору усіх n-однорідних неперервних поліномів $\mathcal{P}(^nX)$, то норма звуження функціонала δ_x на простір $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(^nX)$ є меншою або дорівнює нормі звуження функціонала δ_x на простір $\mathcal{P}(^nX)$. Таким чином радіус-функція функціонала δ_x на алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(X)$ є меншою або дорівнює радіус-функції функціонала δ_x на алгебрі $H_b(X)$. Але згідно з [9], відомо, що радіус-функція функціонала δ_x на алгебрі $H_b(X)$ дорівнює $\|x\|$. □

Твердження 4.2. *Нехай Z є локально опуклим топологічним векторним простором і $H_0(Z)$ є підалгеброю $H(Z)$, яка розділяє точки простору Z. Припустимо, що спектри обох алгебр $H(Z)$ та $H_0(Z)$ складаються із функціоналів обчислення значень функцій δ_z, $z \in Z$. Нехай*

$A\colon H(Z) \to H_0(Z)$ є сюр'єктивним неперервним гомоморфізмом. Тоді існує аналітичне ін'єктивне відображення $\Phi\colon Z \to Z$ таке, що

$$A(f)(z) = f \circ \Phi(z)$$

для кожного $f \in H(Z)$ та $z \in Z$.

Доведення. Нехай A' є спряженим оператором

$$A'\colon H_0'(Z) \to H'(Z), \quad A'(\varphi)(f) = \varphi(A(f)),$$

де $\varphi \in H_0'(Z)$, $f \in H(Z)$. Позначимо $\widetilde{A'}$ — звуження оператора A' на підмножину мультиплікативних функціоналів у $H'(Z)$ вигляду δ_z, $z \in Z$, тобто на спектр $H_0(Z)$. Оскільки A є алгебраїчним гомоморфізмом, то $\widetilde{A'}$ відображає спектр алгебри $H_0(Z)$ у спектр алгебри $H(Z)$. Покладемо

$$\Phi(z) = y, \quad \text{де} \quad \delta_y = \widetilde{A'}(\delta_z).$$

Тоді для кожної функції $f \in H(Z)$, $f \circ \Phi = A(f) \in H_0(Z)$, тобто Φ є аналітичним відображенням за означенням. Щоб показати, що Φ є ін'єктивним, припустимо, що $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$. Тоді $A(f)(z_1) = A(f)(z_2)$ для кожної функції $f \in H(Z)$. Оскільки A є сюр'єктивним, то $g(z_1) = g(z_2)$ для кожного $g \in H_0$. Отже, $z_1 = z_2$. $\square$

Наслідок 4.1. *Нехай алгебри $H(Z)$ та $H_0(Z)$ є такими, як у твердженні 4.2 і A є топологічним ізоморфізмом алгебр. Тоді Φ є аналітичним автоморфізмом.*

Нехай $\mathbb{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ та $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ є послідовностями алгебраїчно незалежних поліномів на банахових просторах X та Y відповідно, $\|A_n\|_1 = \|P_n\|_1 = 1$, $\deg A_n = \deg P_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо наступний алгебраїчний ізоморфізм алгебр поліномів $\Theta\colon \mathcal{P}_{\mathbb{A}}(X) \to \mathcal{P}_{\mathbb{P}}(Y)$, визначений на алгебраїчному базисі $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(X)$ формулою $\Theta\colon A_n \mapsto P_n$. Тоді алгебраїчно спряжений оператор

$$\Theta^*\colon \mathcal{P}_{\mathbb{P}}^*(Y) \to \mathcal{P}_{\mathbb{A}}^*(X)$$

є визначений формулою

$$\Theta^*(\psi)(P) = (\psi \circ \Theta)(P), \quad \psi \in \mathcal{P}^*_{\mathbb{P}}(Y), \quad P \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}(X).$$

Тут $\mathcal{P}^*_{\mathbb{A}}(X)$ є простором усіх (необов'язково неперервних) лінійних функціоналів на $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(X)$. Позначимо $\widetilde{\Theta^*}$ — звуження Θ^* на спектр $M_{b\mathbb{P}}$ алгебри $H_{b\mathbb{P}}(Y)$.

Теорема 4.1. *Припустимо, що* $\widetilde{\Theta^*}$ *відображає* $M_{b\mathbb{P}}$ *у* $M_{b\mathbb{A}}$ *та існує функція* $K\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, *обмежена на кожному відрізку з множини* $[0,+\infty)$ *така, що*

$$R(\widetilde{\Theta^*}(\psi)) \le K\big(R(\psi)\big), \quad \psi \in M_{b\mathbb{P}}.$$

Тоді Θ *є неперервним гомоморфізмом, який можна продовжити до неперервного гомоморфізму (який ми будемо позначати тим самим символом* Θ*) з* $H_{b\mathbb{A}}(X)$ *у* $H_{b\mathbb{P}}(Y)$.

Доведення. Для кожного $y \in Y$ нехай $\psi_y = \widetilde{\Theta^*}(\delta_y) \in M_{b\mathbb{A}}$. Якщо $a \in H_{b\mathbb{A}}(X)$, то $a(x)$ можна подати у вигляді

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} A_1^{k_1}(x) A_2^{k_2}(x) \ldots A_n^{k_n}(x),$$

де $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ і $\alpha_{k_1\ldots k_n} \in \mathbb{C}$. Отже, ми можемо формально продовжити Θ на $H_{b\mathbb{A}}(X)$ наступним чином:

$$\Theta(a) = \Theta\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots A_n^{k_n}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} (\Theta(A_1))^{k_1} (\Theta(A_2))^{k_2} \ldots (\Theta(A_n))^{k_n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots P_n^{k_n}.$$

Покажемо, що $\Theta(a) \in H_{b\mathbb{P}}(Y)$. Для кожного $y \in Y$

$$\Theta(a)(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} P_1^{k_1}(y) \ldots P_n^{k_n}(y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} (\psi_y(A_1))^{k_1} \ldots (\psi_y A_n)^{k_n} = \psi_y(a).$$

Оскільки функція $a \in H_{b\mathbb{A}}(X)$ і $\psi_y \in M_{b\mathbb{A}}$, то відображення $\psi_y(a)$ є добре визначеним і тому функція $\Theta(a)(y)$ є також добре визначеною для всіх $y \in Y$.

Якщо $\|y\| \le r$, то

$$|\Theta(a)(y)| = \Big| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} P_1^{k_1}(y) \ldots P_n^{k_n}(y) \Big|$$

$$= |\psi_y(a)| \le \sup_{\{\psi \in M_{b\mathbb{A}}\colon R(\psi) \le K(\|y\|)\}} |\psi(a)| \le \sup_{\{\psi \in M_A\colon R(\psi) \le \sup_{[0,r]} K(\gamma)\}} |\psi(a)|$$

$$\le \|\psi\|_{\sup_{[0,r]} K(\gamma)} \|a\|_{\sup_{[0,r]} K(\gamma)} = \|a\|_{\sup_{[0,r]} K(\gamma)} < \infty,$$

оскільки функція a є обмеженого типу. Таким чином $\Theta(a)$ є обмеженою на обмежених підмножинах. Отже, якщо

$$a_{(m)} = a - \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1\ldots k_n} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots A_n^{k_n},$$

то

$$\big|\Theta\big(a_{(m)}\big)(y)\big| \le \big\|a_{(m)}\big\|_{\sup_{[0,r]} K(\gamma)} \to 0 \quad \text{as} \quad m \to \infty.$$

За означенням Θ відображає однорідні поліноми в однорідні поліноми. Тому $\Theta(a)$ можна наблизити поліномами $\Theta(a) - \Theta\big(a_{(m)}\big)$ рівномірно на обмежених підмножинах Y. Тому ми маємо, що для кожної функції $a \in H_{b\mathbb{A}}(X)$, $\Theta(a)$ є добре визначеною функцією на просторі Y, яка належить замиканню $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(Y)$ у $H_{b\mathbb{P}}(Y)$. Отже, $\Theta(a) \in H_{b\mathbb{P}}(Y)$.

Далі покажемо, що функція Θ є неперервною. Достатньо довести, що для всіх $r_1 > 0$ і $a \in H_{b\mathbb{A}}(X)$ існують $C > 0$ і $r_2 > 0$ такі, що виконується нерівність

$$\|\Theta(a)\|_{r_1} \le C\|a\|_{r_2}.$$

Маємо, що

$$\|\Theta(a)\|_{r_1} = \sup_{\{y \in Y\colon \|y\| \le r_1\}} |\Theta(a)(y)|$$

$$\leq \sup_{\{\psi \in M_{b\mathbb{A}}\colon R(\psi) \leq \max\{\sup_{[0,r_1]} K(\gamma), 1\}\}} |\psi(a)|$$

$$\leq \|\psi\|_{\max\{\sup_{[0,r_1]} K(\gamma),1\}} \|a\|_{\max\{\sup_{[0,r_1]} K(\gamma),1\}} = \|a\|_{\max\{\sup_{[0,r_1]} K(\gamma),1\}}.$$

Таким чином $C = 1$ і $r_2 = \max\{\sup_{[0,r_1]} K(\gamma), 1\}$ і тому Θ є неперервним. Доведено. □

Оскільки і $\mathbb{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$, і $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ є послідовностями алгебраїчно незалежних поліномів, то гомоморфізм Θ є ін'єктивним. Таким чином маємо наступний наслідок.

Наслідок 4.2. *Якщо відображення Θ є сюр'єктивним, то при виконанні умов теореми 4.1, Θ є топологічним ізоморфізмом.*

Доведення. Достатньо помітити, що відображення Θ^{-1} є неперервним згідно з теоремою про обернене відображення для просторів Фреше (див., наприклад, [83, наслідок 2.12]). □

4.2. Застосування для алгебр симетричних аналітичних функцій

У даному підрозділі розглянуто алгебру $H_{bs}(L_\infty)$ цілих функцій обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,1]$, які є симетричними, тобто інваріантними відносно вимірних бієкцій відрізка $[0,1]$, які зберігають міру. Доведено, що алгебра $H_{bs}(L_\infty)$ є ізоморфною до алгебри усіх цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною однорідних поліномів на комплексному банаховому просторі ℓ_∞.

Нехай S є групою ізометрій на банаховому просторі X. Функцію $f\colon X \to \mathbb{C}$ називають S-*симетричною* (або просто *симетричною*), якщо $f(\sigma(x)) = f(x)$ для всіх $\sigma \in S$ та $x \in X$. Позначимо $\mathcal{P}_s(X)$ — алгебра усіх симетричних поліномів на X і $H_{bs}(X)$ — її поповнення у $H_b(X)$. У багатьох випадках $\mathcal{P}_s(X)$ має алгебраїчний базис $\mathbb{P}$ і, отже, $H_{bs}(X) = H_{b\mathbb{P}}(X)$. У [39] доведено, що якщо S є групою усіх вимірних автоморфізмів відрізка $[0;1]$, які зберігають міру Лебега, то поліноми

$$R_n(x) = \int_{[0;1]} (x(t))^n dt, \quad x \in L_\infty[0;1]$$

утворюють алгебраїчний базис в алгебрі симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(L_\infty[0;1])$. Спектр $M_{bs}(L_\infty[0;1])$ алгебри $H_{bs}(L_\infty[0;1])$ збігається з множиною функціоналів обчислення значень функцій і може бути описаний як множина послідовностей

$$\Lambda^\times = \{\xi_n \colon \xi_n = R_n(x),\, x \in L_\infty[0;1],\, n \in \mathbb{N}\} = \{\xi_n \in \mathbb{C}\colon \sup_n |\xi_n|^{1/n} < \infty\}.$$

Множину $\Lambda^\times$ можна природним чином ідентифікувати з (DF)-простором $H'(\mathbb{C})_\beta$, сильним спряженим до простору Фреше $H(\mathbb{C})$ цілих функцій на множині $\mathbb{C}$. Згідно з [41], алгебра $H_{bs}(L_\infty[0;1])$ є ізоморфною до алгебри $H(H'(\mathbb{C})_\beta)$ усіх цілих функцій на $H'(\mathbb{C})_\beta$. Аналогічні результати можна одержати для деяких інших алгебр симетричних аналітичних функцій обмеженого типу [100].

Зауважимо, що множина послідовностей $\{\xi_n\colon \xi_n = I_n(y),\ y \in \ell_\infty,\ n \in \mathbb{N}\}$ збігається з множиною $\Lambda^\times$, визначеною вище. Отже, спектр алгебри $H_{bs}(L_\infty[0;1])$ збігається зі спектром алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$ як множина і якщо $\Theta\colon R_n \mapsto I_n$, то $\widetilde{\Theta^*}$ є бієкцією з $M_{b\mathbb{I}}$ на $M_{bs}(L_\infty[0;1])$. Таким чином, маємо наступний результат.

Теорема 4.2. *Існує топологічний ізоморфізм* $\Theta\colon H_{bs}(L_\infty[0;1]) \to H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$ *такий, що* $\Theta\colon R_n \mapsto I_n$.

Доведення. Спершу зауважимо, що спектри $M_{b\mathbb{I}}$ та $M_{bs}(L_\infty[0;1])$ складаються з функціоналів обчислення значень у точках. Також для кожного характера $\delta_y \in M_{b\mathbb{I}}$, $y \in \ell_\infty$, маємо, що $R(\delta_y) = \|y\|$. Справді, нехай y_n є таким, що $\|y\| - |y_n| \le \varepsilon$. Тоді

$$R(\delta_y) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{I}}(^n\ell_\infty),\, \|Q\| \le 1} |Q(y)|^{1/n} \ge |I_n(y)|^{1/n} = |y_n| \ge \|y\| - \varepsilon.$$

Оскільки це правильно для кожного $\varepsilon > 0$, $R(\delta_y) \ge \|y\|$. Але із твердження 4.1 маємо виконання оберненої нерівності.

Нехай $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell_\infty$ є довільним вектором. Тоді послідовність комплексних чисел $\xi = (\xi_1, \xi_2^2, \ldots, \xi_n^n, \ldots) = (y_1, y_2^2, \ldots, y_n^n, \ldots)$ задовольняє умову $\sup_n \sqrt[n]{|\xi_n|} < \infty$. Згідно з [39] існує елемент $x_\xi \in L_\infty[0,1]$ такий, що $R_n(x_\xi) = \xi_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $\|x_\xi\| \le \frac{2}{M} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\xi_n|}$, де

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1}\Big).$$

Зауважимо, що $0 < M < 1$. Тому $\widetilde{\Theta^*}(\delta_y) = x_\xi$ і, використовуючи Твердження 4.1 маємо, що

$$R(\delta_{x_\xi}) \le \|x_\xi\| \le \frac{2}{M} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|y_n|^n} = \frac{2\|y\|}{M} = K(\|y\|) = K(R(\delta_y)),$$

де $K(t) = 2t/M$. Таким чином ми можемо застосувати наслідок 4.2. $\square$

4.3. Висновки до розділу 4

Розділ присвячено дослідженню умов ізоморфізму топологічних алгебр цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченними множинами поліномів на комплексних банахових просторах.

У підрозділі 4.1 встановлено умови ізоморфізму алгебр Фреше $H_{b\mathbb{A}}(X)$ та $H_{b\mathbb{P}}(Y)$ цілих функцій обмеженого типу, породжених послідовностями неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів $\mathbb{A}$ і $\mathbb{P}$ на комплексних банахових просторах X та Y відповідно.

У підрозділі 4.2 представлено деякі застосування для алгебр симетричних аналітичних функцій обмеженого типу. Зокрема, доведено, що алгебра $H_{bs}(L_\infty)$ цілих симетричних функцій обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,1]$ є ізоморфною до алгебри усіх цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною однорідних поліномів на комплексному банаховому просторі ℓ_∞.

Результати, наведені в даному розділі, опубліковано в таких працях: [52] – [53], [56] – [58].

РОЗДІЛ 5. АЛГЕБРАЇЧНІ БАЗИСИ АЛГЕБРИ ПОЛІНОМІВ, ПОРОДЖЕНОЇ ЗЛІЧЕННОЮ МНОЖИНОЮ ТВІРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

5.1. Алгебра $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ та її алгебраїчні базиси

Позначимо $\mathbb{N}_0^n$ — декартовий добуток n множин $\mathbb{N}_0, \ldots, \mathbb{N}_0$, тобто $\mathbb{N}_0^n = \underbrace{\mathbb{N}_0 \times \ldots \times \mathbb{N}_0}_{n}$. Нехай $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots\}$ є множиною неперервних алгебраїчно незалежних комплекснозначних поліномів на просторі X таких, що P_n є n-однорідним поліномом і $\|P_n\|_1 = \sup\{|P_n(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ є алгеброю, що складається з усіх поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями елементів множини $\mathbb{P}$. Зауважимо, що множина $\mathbb{P}$ є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$. У даному підрозділі ми досліджуємо, які інші алгебраїчні базиси існують в алгебрі $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ і в якому вигляді їх можна подати.

Приклад 5.1. *Нехай $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ є алгеброю усіх неперервних симетричних поліномів на просторі ℓ_1. Поліноми на просторі ℓ_1 називають симетричними, якщо вони інваріантні відносно групи S_∞ усіх перестановок додатних цілих чисел $\mathbb{N}$, що діють на просторі ℓ_1 наступним чином:*

$$\sigma : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} e_n.$$

Доведено (див. [47]), що поліноми

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k,$$

$k \geq 1$, утворюють алгебраїчний базис в алгебрі $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Дані поліноми F_k називають степеневими симетричними поліномами. Існує також інший природній алгебраїчний базис $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$G_k(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k},$$

в алгебрі $\mathcal{P}_s(\ell_1)$, який називають базисом елементарних симетричних поліномів. Згідно з формулами Ньютона (див. [71]) існує наступний зв'язок між степеневими симетричними поліномами та елементарними симетричними поліномами:

$$nG_n = G_{n-1}F_1 - G_{n-2}F_2 + G_{n-3}F_3 - \ldots + (-1)^{n-2}G_1F_{n-1} + (-1)^{n-1}F_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Приклад 5.2. *Поліноми H_k такі, що*

$$H_k(x) = \sum_{i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k},$$

утворюють ще один важливий алгебраїчний базис в алгебрі $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Згідно з формулами Ньютона існує наступний зв'язок між поліномами H_k та елементарними симетричними поліномами G_k:

$$G_n = G_{n-1}H_1 - G_{n-2}H_2 + G_{n-3}H_3 - \ldots + (-1)^{n-2}G_1H_{n-1} + (-1)^{n-1}H_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 5.1. *Розглянемо множину поліномів $\mathbb{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ на просторі X таких, що поліноми $Q_1, Q_2, \ldots$ зображені у наступному вигляді:*

$$\begin{aligned} Q_1 &= a_{11}P_1, \\ Q_2 &= a_{21}Q_1P_1 + a_{22}P_2, \\ &\vdots \\ Q_n &= a_{n1}Q_{n-1}P_1 + a_{n2}Q_{n-2}P_2 + \ldots + a_{nn}P_n, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.1}$$

де $a_{ij} \in \mathbb{C}$ є деякими константами, $i = 1, 2, \ldots,$ $j = 1, 2, \ldots,$ $a_{ij} \neq 0$ коли $i = j$. Дана множина $\mathbb{Q}$ є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$.

Доведення. Спершу доведемо, що поліноми $Q_1, Q_2, \ldots$ є алгебраїчно незалежними. Нехай $n \in \mathbb{N}$ є довільним натуральним числом. Розглянемо довільний поліном $q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ такий, що $q(Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)) = 0$ для кожного елемента $x \in X$. Оскільки кожний поліном Q_n, $n \in \mathbb{N}$, може бути зображений у вигляді (5.1), то маємо наступне:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= a_{11}P_1,\\
Q_2 &= a_{21}a_{11}P_1^2 + a_{22}P_2,\\
Q_3 &= a_{31}a_{21}a_{11}P_1^3 + (a_{31}a_{22} + a_{32}a_{11})P_1P_2 + a_{33}P_3,\\
&\vdots\\
Q_n &= a_{n1}a_{n-1,1}\cdot\ldots\cdot a_{11}P_1^n + \ldots + a_{nn}P_n,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що $a_{nn} \neq 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді маємо, що

$$
\begin{aligned}
q(Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} \alpha_k Q_1^{k_1}(x)Q_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot Q_n^{k_n}(x) =\\
= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} \alpha_k \Big(a_{11}P_1(x)\Big)^{k_1}&\Big(a_{21}a_{11}P_1^2(x) + a_{22}P_2(x)\Big)^{k_2}\cdot\ldots\\
\cdot\Big(a_{n1}a_{n-1,1}\cdot\ldots\cdot a_{11}P_1^n(x) &+ \ldots + a_{nn}P_n(x)\Big)^{k_n} =\\
= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n}\Big(\alpha_k a_{11}^{k_1+k_2+\ldots+k_n}&a_{21}^{k_2+k_3+\ldots+k_n}\cdot\ldots\cdot a_{n1}^{k_n}P_1^{k_1+2k_2+\ldots+nk_n}(x)+\\
+\ldots+\alpha_k a_{11}^{k_1}a_{22}^{k_2}\cdot\ldots\cdot a_{nn}^{k_n}&P_1^{k_1}(x)P_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot P_n^{k_n}(x)\Big) = 0
\end{aligned}
$$

для кожного $x \in X$. Зауважимо, що

$$\Big|\{k \in \mathbb{N}_0^n :\, \alpha_k \neq 0\}\Big| < +\infty.$$

Ми отримали, що алгебраїчна комбінація поліномів $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ дорівнює нулю для кожного $x \in X$. Оскільки поліноми $P_1, P_2, \ldots, P_n$ є алгебраїчно незалежними, то останнє можливе тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$
\begin{cases}
\alpha_k a_{11}^{k_1+k_2+\ldots+k_n}a_{21}^{k_2+k_3+\ldots+k_n}\cdot\ldots\cdot a_{n1}^{k_n} = 0,\\
\qquad\vdots\\
\alpha_k a_{11}^{k_1}a_{22}^{k_2}\cdot\ldots\cdot a_{nn}^{k_n} = 0.
\end{cases}
$$

Оскільки $a_{nn} \neq 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то з останньої умови ми маємо, що $\alpha_k = 0$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0^n$. У підсумку, ми отримали наступне: для всіх

$n \in \mathbb{N}$ і $q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ якщо

$$q(Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \alpha_k Q_1^{k_1}(x) Q_2^{k_2}(x) \cdot \ldots \cdot Q_n^{k_n}(x) = 0$$

для кожного $x \in X$, то $\alpha_k = 0$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0^n$, тобто $q \equiv 0$. Це означає, що поліноми $Q_1, Q_2, \ldots$ є алгебраїчно незалежними.

Далі доведемо, що кожний поліном $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ є алгебраїчною комбінацією елементів множини $\mathbb{Q}$. Беручи до уваги рівності з умови теореми, легко бачити, що кожний елемент множини $\mathbb{P}$ є алгебраїчною комбінацією поліномів множини $\mathbb{Q}$. Наприклад,

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{a_{11}} Q_1, \\
P_2 &= \frac{1}{a_{22}} Q_2 - \frac{a_{21}}{a_{22} a_{11}} Q_1^2, \\
P_3 &= \frac{1}{a_{33}} Q_3 - \frac{a_{32}}{a_{33} a_{22}} Q_1 Q_2 - \frac{a_{31}}{a_{33} a_{11}} Q_2 Q_1 + \frac{a_{33} a_{21}}{a_{33} a_{22} a_{11}} Q_1^3
\end{aligned}$$

і далі аналогічно. Множина $\mathbb{P}$ є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$, тому кожний поліном $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ є алгебраїчною комбінацією елементів множини $\mathbb{P}$. Оскільки кожний елемент множини $\mathbb{P}$ є алгебраїчною комбінацією поліномів множини $\mathbb{Q}$, то кожний поліном $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ є алгебраїчною комбінацією елементів множини $\mathbb{Q}$ також. Таким чином дана множина $\mathbb{Q}$ є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$. $\square$

Нехай $\mathbb{G} = \{G_1, G_2, \ldots\}$ є довільним алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$. Оскільки множина $\mathbb{P}$ є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ також, то існують деякі комплексні сталі $c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}, c_{\underbrace{n-2\,10\ldots0}_{n}}, c_{\underbrace{n-3\,010\ldots0}_{n}}, \ldots, c_{\underbrace{0\ldots01}_{n}}, \ldots$ (кількість цих сталих дорівнює числу розбиттів числа $n \in \mathbb{N}$, яке ми позначаємо $p(n)$, і $c_{\underbrace{0\ldots01}_{n}} \neq 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$) такі, що кожний поліном

$G_n \in \mathbb{G}, n \in \mathbb{N}$, може бути зображений наступним чином:

$$
\begin{aligned}
&G_1 = c_1 P_1,\\
&G_2 = c_{20} P_1^2 + c_{01} P_2,\\
&G_3 = c_{300} P_1^3 + c_{110} P_1 P_2 + c_{001} P_3,\\
&G_4 = c_{4000} P_1^4 + c_{2100} P_1^2 P_2 + c_{1010} P_1 P_3 + c_{0001} P_4 + c_{0200} P_2^2,\\
&\quad\vdots\\
&G_n = c_{\underbrace{n0\,\ldots\,0}_{n}} P_1^n + c_{\underbrace{n\,-\,2\,10\,\ldots\,0}_{n}} P_1^{n-2} P_2 + c_{\underbrace{n\,-\,3\,010\,\ldots\,0}_{n}} P_1^{n-3} P_3 + \ldots + c_{\underbrace{0\,\ldots\,01}_{n}} P_n +\\
&\qquad + \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} c_{k_1\,k_2\ldots k_n} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_n^{k_n},
\end{aligned}
$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ і ми припускаємо, що перші n записаних вище доданків полінома G_n не належать сумі

$$\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} c_{k_1\,k_2\ldots k_n} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_n^{k_n},$$

тобто сума $\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} c_{k_1\,k_2\ldots k_n} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_n^{k_n}$ містить $p(n)-n$ доданків.

Теорема 5.2. *Нехай $\mathbb{G} = \{G_1, G_2, \ldots\}$ є розглянутим вище алгебраїчним базисом. Нехай коефіцієнти $c_{k_1\,k_2\ldots k_n}$ із суми*

$$\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} c_{k_1\,k_2\ldots k_n} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_n^{k_n}$$

є такими, що

$$
\begin{aligned}
c_{k_1\,k_2\ldots k_n} = {} & \frac{c_{\underbrace{n0\,\ldots\,0}_{n}}}{c_{\underbrace{n\,-\,1\,0\,\ldots\,0}_{n-1}}} c_{k_1-1\,k_2\ldots k_{n-1}} +\\
& + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{c_{\underbrace{n\,-\,j\,0\,\ldots\,0\,\underbrace{1}_{j}\,0\,\ldots\,0}_{n}} - \dfrac{c_{\underbrace{n0\,\ldots\,0}_{n}}}{c_{\underbrace{n\,-\,1\,0\,\ldots\,0}_{n-1}}} c_{\underbrace{n\,-\,(j\,+\,1)\,0\,\ldots\,0\,\underbrace{1}\,0\,\ldots\,0}_{n-1}}}{c_{\underbrace{n\,-\,j\,0\,\ldots\,0}_{n-j}}} c_{k_1\,k_2\ldots k_j-1\,k_{j+1}\ldots k_{n-j}}.
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що кожний коефіцієнт $c_{k_1\,k_2\ldots k_n}$ є сумою щонайбільше $n-1$ доданків.

Тоді існують деякі сталі $b_{nj} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, j = \overline{1,n}, b_{nn} \neq 0$ *такі, що кожний поліном* $G_n \in \mathbb{G}, n \in \mathbb{N}$ *з алгебраїчного базису* $\mathbb{G}$ *може бути зображений у наступному вигляді:*

$$
\begin{aligned}
&G_1 = b_{11}P_1,\\
&G_2 = b_{21}G_1P_1 + b_{22}P_2,\\
&\quad\vdots\\
&G_n = b_{n1}G_{n-1}P_1 + b_{n2}G_{n-2}P_2 + \ldots + b_{nn}P_n,
\end{aligned}
$$

більше того

$$
\begin{aligned}
&b_{n1} = \frac{c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}}{c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}},\\
&b_{nj} = \frac{c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n}} - b_{n1}c_{\underbrace{n-(j+1)\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n-1}}}{c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0}_{n-j}}}, j = \overline{2, n-1},\\
&b_{nn} = c_{\underbrace{0\ldots01}_{n}}.
\end{aligned}
$$

Доведення. Розглянемо суму

$$b_{n1}G_{n-1}P_1 + b_{n2}G_{n-2}P_2 + b_{n3}G_{n-3}P_3 + \ldots + b_{nj}G_{n-j}P_j + \ldots + b_{nn}P_n.$$

Беручи до уваги вирази для коефіцієнтів $b_{nj}, n \in \mathbb{N}, j = \overline{1,n}$ і що кожний поліном $G_k, k = \overline{1, n-1}$, є алгебраїчною комбінацією поліномів $P_1, P_2, \ldots, P_k$ (див. твердження теореми), маємо, що наступний ланцюг рівностей є правильним:

$$
\begin{aligned}
&b_{n1}G_{n-1}P_1 + b_{n2}G_{n-2}P_2 + b_{n3}G_{n-3}P_3 + \ldots + b_{nj}G_{n-j}P_j + \ldots + b_{nn}P_n =\\
&\quad = b_{n1}P_1(c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}P_1^{n-1} + c_{\underbrace{n-3\,10\ldots0}_{n-1}}P_1^{n-3}P_2 + c_{\underbrace{n-4\,010\ldots0}_{n-1}}P_1^{n-4}P_3 + \ldots +\\
&\quad + c_{\underbrace{n-(j+1)\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n-1}}P_1^{n-(j+1)}P_j + \ldots + c_{\underbrace{0\ldots01}_{n-1}}P_{n-1} +\\
&\quad + \sum_{r_1+2r_2+\ldots+(n-1)r_{n-1}=n-1} c_{r_1\,r_2\ldots r_{n-1}}P_1^{r_1}P_2^{r_2}\cdots P_{n-1}^{r_{n-1}}) +
\end{aligned}
$$

$$+ b_{n2}P_2(c_{\underbrace{n-2\,0\ldots0}_{n-2}}P_1^{n-2} + c_{\underbrace{n-4\,10\ldots0}_{n-2}}P_1^{n-4}P_2 + c_{\underbrace{n-5\,010\ldots0}_{n-2}}P_1^{n-5}P_3 + \ldots + c_{\underbrace{0\ldots01}_{n-2}}P_{n-2}+$$

$$+ \sum_{m_1+2m_2+\ldots+(n-2)m_{n-2}=n-2} c_{m_1\,m_2\ldots m_{n-2}}P_1^{m_1}P_2^{m_2}\cdots P_{n-2}^{m_{n-2}})+$$

$$+ b_{n3}P_3(c_{\underbrace{n-3\,0\ldots0}_{n-3}}P_1^{n-3} + c_{\underbrace{n-5\,10\ldots0}_{n-3}}P_1^{n-5}P_2 + c_{\underbrace{n-6\,010\ldots0}_{n-3}}P_1^{n-6}P_3+$$

$$+ \ldots + c_{\underbrace{0\ldots01}_{n-3}}P_{n-3} + \sum_{l_1+2l_2+\ldots+(n-3)l_{n-3}=n-3} c_{l_1\,l_2\ldots l_{n-3}}P_1^{l_1}P_2^{l_2}\cdots P_{n-3}^{l_{n-3}})+$$

$$+ \sum_{j=4}^{n-1} b_{nj}P_j(c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0}_{n-j}}P_1^{n-j} + c_{\underbrace{n-(j+2)\,10\ldots0}_{n-j}}P_1^{n-(j+2)}P_2 + c_{\underbrace{n-(j+3)\,010\ldots0}_{n-j}}P_1^{n-(j+3)}P_3+$$

$$+ \ldots + c_{\underbrace{0\ldots01}_{n-j}}P_{n-j} + \sum_{s_1+2s_2+\ldots+(n-j)s_{n-j}=n-j} c_{s_1\,s_2\ldots s_{n-j}}P_1^{s_1}P_2^{s_2}\cdots P_{n-j}^{s_{n-j}}) + b_{nn}P_n =$$

$$= b_{n1}c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}P_1^n + \Big(b_{n1}c_{\underbrace{n-3\,10\ldots0}_{n-1}} + b_{n2}c_{\underbrace{n-2\,0\ldots0}_{n-2}}\Big)P_1^{n-2}P_2+$$

$$+ \Big(b_{n1}c_{\underbrace{n-4\,010\ldots0}_{n-1}} + b_{n3}c_{\underbrace{n-3\,0\ldots0}_{n-3}}\Big)P_1^{n-3}P_3+$$

$$+ \sum_{j=4}^{n-1}\Big(b_{n1}c_{\underbrace{n-(j+1)\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n-1}} + b_{nj}c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0}_{n-j}}\Big)P_1^{n-j}P_j + b_{nn}P_n+$$

$$+ \Big(\sum_{r_1+2r_2+\ldots+(n-1)r_{n-1}=n-1} b_{n1}c_{r_1\,r_2\ldots r_{n-1}}P_1^{r_1+1}P_2^{r_2}\cdots P_{n-1}^{r_{n-1}}+$$

$$+ \sum_{m_1+2m_2+\ldots+(n-2)m_{n-2}=n-2} b_{n2}c_{m_1\,m_2\ldots m_{n-2}}P_1^{m_1}P_2^{m_2+1}\cdots P_{n-2}^{m_{n-2}}+$$

$$+ \sum_{l_1+2l_2+\ldots+(n-3)l_{n-3}=n-3} b_{n3}c_{l_1\,l_2\ldots l_{n-3}}P_1^{l_1}P_2^{l_2}P_3^{l_3+1}\cdots P_{n-3}^{l_{n-3}}+$$

$$+ \sum_{j=4}^{n-1}\sum_{s_1+2s_2+\ldots+(n-j)s_{n-j}=n-j} b_{nj}c_{s_1\,s_2\ldots s_{n-j}}P_1^{s_1}P_2^{s_2}\cdots P_{n-j}^{s_{n-j}+1}\Big)/=/$$

Очевидно, що поліноми записані в дужках, є поліномами степеня n і серед додатних цілих чисел $r_1,\ldots,r_{n-1}, m_1,\ldots,m_{n-2}, l_1,\ldots,l_{n-3},\ldots,s_1,\ldots,s_{n-j}$ є такі, що $r_1+1 = m_1 = l_1 = s_1$, $r_2 = m_2+1 = l_2 = s_2$, $r_3 = m_3 = l_3+1 = s_3,\ldots$, $r_{n-j} = m_{n-j} = l_{n-j} = s_{n-j}+1$. Розглянемо додатні цілі числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ такі, що $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$ і

$$
\begin{aligned}
k_1 &= r_1 + 1 = m_1 = l_1 = \ldots = s_1,\\
k_2 &= r_2 = m_2 + 1 = l_2 = \ldots = s_2,\\
k_3 &= r_3 = m_3 = l_3 + 1 = \ldots = s_3,\\
&\ldots,\\
k_{n-j} &= r_{n-j} = m_{n-j} = l_{n-j} = \ldots = s_{n-j} + 1,\\
&\ldots,\\
k_{n-1} &= r_{n-1},\\
k_n &= 0.
\end{aligned}
$$

Тому ми можемо продовжити наш ланцюг рівностей наступним чином:

$$
\begin{aligned}
/ = /&\frac{c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}}{c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}} c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}} P_1^n + \Bigg(\frac{c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}}{c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}} c_{\underbrace{n-3\,10\ldots0}_{n-1}} +\\
&+ \frac{c_{\underbrace{n-2\,10\ldots0}_{n}} - \frac{c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}}{c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}} c_{\underbrace{n-3\,10\ldots0}_{n-1}}}{c_{\underbrace{n-2\,0\ldots0}_{n-2}}} c_{\underbrace{n-2\,0\ldots0}_{n-2}} \Bigg) P_1^{n-2} P_2 +\\
&+ \Bigg(\frac{c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}}{c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}} c_{\underbrace{n-4\,010\ldots0}_{n-1}} + \frac{c_{\underbrace{n-3\,010\ldots0}_{n}} - \frac{c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}}{c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}} c_{\underbrace{n-4\,010\ldots0}_{n-1}}}{c_{\underbrace{n-3\,0\ldots0}_{n-3}}} c_{\underbrace{n-3\,0\ldots0}_{n-3}} \Bigg) P_1^{n-3} P_3 +\\
&+ \sum_{j=4}^{n-1} \Bigg(\frac{c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}}{c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}} c_{\underbrace{n-(j+1)\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n-1}} +\\
&+ \frac{c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n}} - \frac{c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}}{c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}} c_{\underbrace{n-(j+1)\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n-1}}}{c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0}_{n-j}}} c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0}_{n-j}} \Bigg) P_1^{n-j} P_j + c_{\underbrace{0\ldots01}_{n}} P_n +
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}\Big(b_{n1}c_{k_1-1\,k_2\ldots k_{n-1}}+\sum_{j=2}^{n-1}b_{nj}c_{k_1\,k_2\ldots\underbrace{k_j-1}_{j}\,k_{j+1}\ldots k_{n-j}}\Big)P_1^{k_1}P_2^{k_2}\cdots P_n^{k_n}=$$

$$=c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}P_1^n+c_{\underbrace{n-2\,1\,0\ldots0}_{n}}P_1^{n-2}P_2+c_{\underbrace{n-3\,0\,1\,0\ldots0}_{n}}P_1^{n-3}P_3+$$

$$+\sum_{j=4}^{n-1}c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0\underbrace{1}_{n-j}0\ldots0}_{n}}P_1^{n-j}P_j+c_{\underbrace{0\ldots01}_{n}}P_n+$$

$$+\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}\Big(\frac{c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}}{c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}}c_{k_1-1\,k_2\ldots k_{n-1}}+$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n}}-b_{n1}c_{\underbrace{n-(j+1)\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n-1}}}{c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0}_{n-j}}}c_{k_1\,k_2\ldots\underbrace{k_j-1}_{j}\,k_{j+1}\ldots k_{n-j}}\Big)P_1^{k_1}P_2^{k_2}\cdots P_n^{k_n}=$$

$$=c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}P_1^n+c_{\underbrace{n-2\,1\,0\ldots0}_{n}}P_1^{n-2}P_2+c_{\underbrace{n-3\,0\,1\,0\ldots0}_{n}}P_1^{n-3}P_3+$$

$$+\sum_{j=4}^{n-1}c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0\underbrace{1}_{n-j}0\ldots0}_{n}}P_1^{n-j}P_j+c_{\underbrace{0\ldots01}_{n}}P_n+$$

$$+\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}c_{k_1\,k_2\ldots k_n}P_1^{k_1}P_2^{k_2}\cdots P_n^{k_n}=G_n.$$

Таким чином ми отримали, що кожний поліном G_n з алгебраїчного базису $\mathbb{G}$ алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ може бути єдиним чином представлений у вигляді

$$G_n=b_{n1}G_{n-1}P_1+b_{n2}G_{n-2}P_2+\ldots+b_{nn}P_n,$$

де коефіцієнти $b_{n1},b_{n2},\ldots,b_{nn}$ можна знайти за формулами:

$$b_{n1}=\frac{c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}}}{c_{\underbrace{n-1\,0\ldots0}_{n-1}}},$$

$$b_{nj}=\frac{c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n}}-b_{n1}c_{\underbrace{n-(j+1)\,0\ldots0\underbrace{1}_{j}0\ldots0}_{n-1}}}{c_{\underbrace{n-j\,0\ldots0}_{n-j}}},\,j=\overline{2,n-1},$$

$$b_{nn}=c_{\underbrace{0\ldots01}_{n}}.$$

$\square$

Контрприклад 5.1. *Розглянемо множину поліномів* $\mathbb{G} = \{G_1, G_2, \ldots\}$ *таку, що*

$$G_1 = P_1,$$

$$G_2 = P_1^2 + P_2,$$

$$G_3 = P_1^3 + P_1P_2 + P_3,$$

$$G_4 = P_1^4 + P_2^2 + P_4,$$

$$\vdots$$

(**)

$$G_n = P_1^n + P_2P_{n-2} + P_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що дана множина $\mathbb{G}$ *є алгебраїчним базисом алгебри* $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$. *Спершу доведемо, що поліноми* $G_1, G_2, \ldots$ *є алгебраїчно незалежними. Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *є довільним натуральним числом. Розглянемо довільний поліном* $q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *такий, що* $q(G_1(x), G_2(x), \ldots, G_n(x)) = 0$ *для кожного* $x \in X$. *Тоді маємо наступне:*

$$q(G_1(x), G_2(x), \ldots, G_n(x)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \alpha_k G_1^{k_1}(x) G_2^{k_2}(x) \cdot \ldots \cdot G_n^{k_n}(x) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \alpha_k P_1^{k_1}(x)(P_1^2(x) + P_2(x))^{k_2} \cdot \ldots \cdot (P_1^n(x) + P_2(x)P_{n-2}(x) + P_n(x))^{k_n} =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} (\alpha_k P_1^{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n}(x) + \ldots + \alpha_k P_1^{k_1}(x) P_2^{k_2}(x) \cdot \ldots \cdot P_n^{k_n}(x)) = 0$$

для кожного $x \in X$. *Зауважимо, що* $\left|\{k \in \mathbb{N}_0^n : \alpha_k \neq 0\}\right| < +\infty$. *Ми отримали, що алгебраїчна комбінація поліномів* $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ *дорівнює нулю для кожного* $x \in X$. *Оскільки поліноми* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *є алгебраїчно незалежними, то останнє можливе тільки тоді, коли* $\alpha_k = 0$. *Отже, ми отримали, що для кожного числа* $n \in \mathbb{N}$ *і кожного полінома* $q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *якщо* $q(G_1(x), G_2(x), \ldots, G_n(x)) = 0$ *для кожного* $x \in X$, *то* $q \equiv 0$, *тобто поліноми* $G_1, G_2, \ldots$ *є алгебраїчно незалежними. Далі доведемо, що кожний поліном* $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ *є алгебраїчною комбінацією елементів множини* $\mathbb{G}$. *Беручи до уваги рівності (**), легко бачити, що кожний елемент множини* $\mathbb{P}$ *є алгебраїчною комбінацією поліномів множини* $\mathbb{G}$. *Наприклад,*

$$P_1 = G_1,$$

$$P_2 = G_2 - G_1^2,$$

$$P_3 = G_3 - G_1 G_2$$

і далі аналогічно. Множина $\mathbb{P}$ *є алгебраїчним базисом алгебри* $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$, *тому кожний поліном* $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ *є алгебраїчною комбінацією елементів множини* $\mathbb{P}$. *Оскільки кожний елемент множини* $\mathbb{P}$ *є алгебраїчною комбінацією поліномів множини* $\mathbb{G}$, *то кожний поліном* $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ *є алгебраїчною комбінацією елементів множини* $\mathbb{G}$ *також. Таким чином, дана множина* $\mathbb{G}$ *є алгебраїчним базисом алгебри* $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$.

Легко бачити, що для даного базису $\mathbb{G}$ *умови Теореми 5.2 не виконуються, тобто для кожного полінома* $G_n \in \mathbb{G}$,

$$G_n = c_{\underbrace{n0\ldots0}_{n}} P_1^n + c_{\underbrace{n-2\,1\,0\ldots0}_{n}} P_1^{n-2} P_2 + \ldots + c_{\underbrace{0\ldots01}_{n}} P_n +$$

$$+ \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} c_{k_1\,k_2\ldots k_n} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_n^{k_n},$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$, *коефіцієнти* $c_{k_1\,k_2\ldots k_n}$ *із суми*

$$\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} c_{k_1\,k_2\ldots k_n} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_n^{k_n}$$

є такими, що

$$c_{k_1\,k_2\ldots k_n} \neq \frac{c_{\underbrace{n0\,\ldots\,0}_{n}}}{c_{\underbrace{n\,-\,1\,0\,\ldots\,0}_{n-1}}} c_{k_1-1\,k_2\ldots k_{n-1}} +$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1} \frac{c_{\underbrace{n\,-\,j\,0\,\ldots\,0\,\underbrace{1}_{j}\,0\,\ldots\,0}_{n}} - \frac{c_{\underbrace{n0\,\ldots\,0}_{n}}}{c_{\underbrace{n\,-\,1\,0\,\ldots\,0}_{n-1}}} c_{\underbrace{n\,-\,(j\,+\,1)\,0\,\ldots\,0\,\underbrace{1}\,0\,\ldots\,0}_{n-1}}}{c_{\underbrace{n\,-\,j\,0\,\ldots\,0}_{n-j}}} c_{k_1\,k_2\ldots k_j-1\,k_{j+1}\ldots k_{n-j}}.$$

Наприклад, для полінома G_4 *ми бачимо, що* $c_{0200} = 1$, *але згідно з Теоремою 5.2 даний коефіцієнт повинен бути рівним* -1*:*

$$c_{0200} = \frac{c_{2100} - \frac{c_{4000}}{c_{300}} c_{110}}{c_{20}} c_{01} = \frac{0 - \frac{1}{1}1}{1} 1 = -1.$$

Покажемо, що поліном G_4 *не можна подати у вигляді*

$$G_4 = b_{41} G_3 P_1 + b_{42} G_2 P_2 + b_{43} G_1 P_3 + b_{44} P_4.$$

Оскільки кожний поліном G_n, $n \in \mathbb{N}$, *може бути представлений у вигляді* $(**)$, *то маємо наступне:*

$$b_{41}G_3P_1 + b_{42}G_2P_2 + b_{43}G_1P_3 + b_{44}P_4 = b_{41}P_1(P_1^3 + P_1P_2 + P_3) + b_{42}P_2(P_1^2 + P_2) +$$

$$+ b_{43}P_1P_3 + b_{44}P_4 = b_{41}P_1^4 + (b_{41} + b_{42})P_1^2P_2 + (b_{41} + b_{43})P_1P_3 + b_{44}P_4 + b_{42}P_2^2.$$

Тому рівність $G_4 = b_{41}G_3P_1 + b_{42}G_2P_2 + b_{43}G_1P_3 + b_{44}P_4$ *виконується тоді і тільки тоді, коли*

$$P_1^4 + P_2^2 + P_4 = b_{41}P_1^4 + (b_{41} + b_{42})P_1^2P_2 + (b_{41} + b_{43})P_1P_3 + b_{44}P_4 + b_{42}P_2^2,$$

тобто коли виконуються наступні рівності:

$$\begin{cases} b_{41} = 1, \\ b_{42} = -1, \\ b_{43} = -1, \\ b_{44} = 1, \\ b_{42} = 1. \end{cases}$$

Але ці рівності не можуть виконуватися, оскільки ми отримали суперечність $b_{42} = -1 = 1$. *Таким чином, поліном* G_4 *не може бути поданим у вигляді*

$$G_4 = b_{41}G_3P_1 + b_{42}G_2P_2 + b_{43}G_1P_3 + b_{44}P_4$$

і, отже, умови Теореми 5.2 про коефіцієнти поліномів G_n, $n \in \mathbb{N}$, *є необхідними.*

5.2. Еквівалентність алгебраїчних базисів

У даному підрозділі ми встановлюємо оцінку для коефіцієнтів функцій, що належать алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(\ell_p)$, де $1 \le p < \infty$, для певного виду поліномів $\mathbb{P}$. Ми також розглядаємо частковий випадок зліченно породженої алгебри, де усі нормовані алгебраїчні базиси однорідних поліномів є еквівалентними.

Спершу доведемо наступну допоміжну лему.

Лема 5.1. *Нехай $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ є поліномом від n, $n \in \mathbb{N}$, комплексних змінних:*

$$p(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{m_1=0}^{M_1} \ldots \sum_{m_n=0}^{M_n} \beta_{m_1,\ldots,m_n} z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}.$$

Тоді для всіх $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{N}_0$ таких, що $l_j \in \{0, \ldots, M_j\}$ для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$, і для кожного $r > 0$

$$|\beta_{l_1,\ldots,l_n}| \le \frac{1}{r^{l_1+\ldots+l_n}} \sup_{|z_1|\le r,\ldots,|z_n|\le r} |p(z_1, \ldots, z_n)|.$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції по n. У випадку $n = 1$ поліном p має вигляд

$$p(z_1) = \sum_{m_1=0}^{M_1} \beta_{m_1} z_1^{m_1}.$$

Згідно з оцінкою Коші, для всіх $l_1 \in \{0, \ldots, M_1\}$ та $r > 0$

$$\sup_{|z_1|\le r} |\beta_{l_1} z_1^{l_1}| \le \sup_{|z_1|\le r} |p(z_1)|.$$

Оскільки $\sup_{|z_1|\le r} |\beta_{l_1} z_1^{l_1}| = r^{l_1} |\beta_{l_1}|$, то

$$|\beta_{l_1}| \le \frac{1}{r^{l_1}} \sup_{|z_1|\le r} |p(z_1)|.$$

Це завершує доведення для випадку $n = 1$.

Припустимо, що для кожного $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ виконується твердження леми. Доведемо, що твердження леми правильне для $k = n$. Нехай

$l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}_0$ є такими, що $l_j \in \{0, \dots, M_j\}$ для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$. Для фіксованих $z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ функція $p_1(z_1) = p(z_1, z_2, \dots, z_n)$ є поліномом від однієї комплексної змінної. Зауважимо, що

$$p_1(z_1) = \sum_{m_1=0}^{M_1} \gamma_{m_1} z_1^{m_1}.$$

де

$$\gamma_{m_1} = \sum_{m_2=0}^{M_2} \dots \sum_{m_n=0}^{M_n} \beta_{m_1,m_2,\dots,m_n} z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n}$$

Оскільки твердження леми виконується для поліномів від однієї комплексної змінної, то для кожного $r > 0$

$$|\gamma_{l_1}| \le \frac{1}{r^{l_1}} \sup_{|z_1| \le r} |p_1(z_1)|,$$

тобто,

$$\left| \sum_{m_2=0}^{M_2} \dots \sum_{m_n=0}^{M_n} \beta_{l_1,m_2,\dots,m_n} z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n} \right| \le \frac{1}{r^{l_1}} \sup_{|z_1| \le r} |p(z_1, z_2, \dots, z_n)|. \tag{5.2}$$

Нехай поліном $q_{l_1} : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ є таким, що

$$q_{l_1}(z_2, \dots, z_n) = \sum_{m_2=0}^{M_2} \dots \sum_{m_n=0}^{M_n} \beta_{l_1,m_2,\dots,m_n} z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n}.$$

Згідно з припущенням індукції для кожного $r > 0$

$$|\beta_{l_1,l_2,\dots,l_n}| \le \frac{1}{r^{l_2+\dots+l_n}} \sup_{|z_2| \le r, \dots, |z_n| \le r} |q_{l_1}(z_2, \dots, z_n)|. \tag{5.3}$$

Беручи до уваги нерівності (5.2) та (5.3), маємо, що

$$\begin{aligned} |\beta_{l_1,l_2,\dots,l_n}| &\le \frac{1}{r^{l_2+\dots+l_n}} \sup_{|z_2| \le r, \dots, |z_n| \le r} \frac{1}{r^{l_1}} \sup_{|z_1| \le r} |p(z_1, z_2, \dots, z_n)| \\ &= \frac{1}{r^{l_1+l_2+\dots+l_n}} \sup_{|z_1| \le r, |z_2| \le r, \dots, |z_n| \le r} |p(z_1, z_2, \dots, z_n)|. \end{aligned}$$

Це завершує доведення леми. □

Нехай $\mathbb{P}$ є послідовністю n-однорідних алгебраїчно незалежних неперервних поліномів таких, що $P_n : \ell_p \to \mathbb{C}$ і поліном $P_n(x)$ не залежить від координат $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ і для кожної послідовності $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \in \ell_p$, $1 \leq p < \infty$.

Позначимо $H_{b\mathbb{P}}(\ell_p)$ алгебру Фреше усіх цілих функцій обмеженого типу на просторі ℓ_p, породжену послідовністю поліномів $\mathbb{P}$. Розглянемо функцію $f \in H_{b\mathbb{P}}(\ell_p)$. Тоді функція f може бути єдиним чином зображена у наступному вигляді:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} P_1^{k_1}(x) P_2^{k_2}(x) \cdots P_n^{k_n}(x)$$

для кожної послідовності $x \in \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, і для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, $a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$ та невід'ємних цілих чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Для кожної послідовності $x \in \ell_p$ позначимо f_n наступну суму

$$f_n(x) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} P_1^{k_1}(x) P_2^{k_2}(x) \cdots P_n^{k_n}(x).$$

Нехай $s > 0$. Нагадаємо, що

$$\|f_n\|_s = \sup_{\{x \in \ell_p : \|x\| \leq s\}} |f_n(x)|.$$

Лема 5.2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $1 \leq p < \infty$ є фіксованими числами. Нехай $r > 0$ та $s > 0$ є такими, що $r \leq \frac{s}{\sqrt[p]{n}}$. Тоді*

$$\sup_{\{x=(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots) \in \ell_p : |x_1| \leq r, \ldots, |x_n| \leq r\}} |f_n(x)| \leq \sup_{\{x=(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots) \in \ell_p : \|x\| \leq s\}} |f_n(x)|.$$

Доведення. Нехай послідовність $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \in \ell_p$ є такою, що $|x_k| \leq r$ для кожного числа $k = \overline{1, n}$. Оскільки $r \leq \frac{s}{\sqrt[p]{n}}$, то

$$\|x\| = \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p} \leq \sqrt[p]{nr^p} = r\sqrt[p]{n} \leq \frac{s}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{n} = s.$$

Тому

$$\{x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \in \ell_p : |x_1| \leq r, \ldots, |x_n| \leq r\} \subset$$
$$\subset \{x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \in \ell_p : \|x\| \leq s\}.$$

Таким чином маємо бажане:

$$\sup_{\{x=(x_1,\dots,x_n,0,\dots)\in\ell_p:|x_1|\le r,\dots,|x_n|\le r\}}|f_n(x)|\le\sup_{\{x=(x_1,\dots,x_n,0,\dots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}}|f_n(x)|.$$

□

Лема 5.3. *Нехай $n\in\mathbb{N}$ і $1\le p<\infty$ є фіксованими числами. Нехай $s>0$. Тоді*

$$\sup_{\{x=(x_1,\dots,x_n,0,\dots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}}|f_n(x)|=\|f_n\|_s.$$

Доведення. Зауважимо, що

$$\{x=(x_1,\dots,x_n,0,\dots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}\subset$$
$$\subset\{x=(x_1,\dots,x_n,\dots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}.$$

Тому

$$\sup_{\{x=(x_1,\dots,x_n,0,\dots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}}|f_n(x)|\le\sup_{\{x=(x_1,\dots,x_n,\dots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}}|f_n(x)|. \tag{5.4}$$

Тепер доведемо зворотну нерівність. Покажемо, що для кожної послідовності

$$z\in\{x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}$$

існує елемент

$$z_0\in\{x=(x_1,\dots,x_n,0,\dots):\|x\|\le s\}$$

такий, що

$$|f_n(z_0)|\ge|f_n(z)|.$$

Нехай послідовність $z=\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_p$ є такою, що $\|z\|\le s$. Розглянемо послідовність $y=(z_1,\dots,z_n,0,\dots)\in\ell_p$. Легко бачити, що $\|y\|\le\|z\|\le s$. Покладемо $\lambda=\frac{\|z\|}{\|y\|}$, тоді $\lambda\ge 1$. Нехай

$$z_0=\lambda y=(\lambda z_1,\dots,\lambda z_n,0,\dots).$$

Тоді

$$\begin{aligned}\|z_0\|&=\sqrt[p]{|\lambda z_1|^p+\ldots+|\lambda z_n|^p}=\\&=\sqrt[p]{|\lambda|^p(|z_1|^p+\ldots+|z_n|^p)}=\\&=|\lambda|\|y\|=\frac{\|z\|}{\|y\|}\|y\|=\|z\|\le s.\end{aligned}$$

Тому

$$z_0 \in \{x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \in \ell_p : \|x\| \le s\}.$$

Крім того,

$$f_n(z_0) = f_n(\lambda y) = \lambda^n f_n(y) = \lambda^n f_n(z).$$

Таким чином, оскільки $\lambda \ge 1$, то $|f_n(z_0)| \ge |f_n(z)|$. Тому елемент z_0 є шуканим і ми маємо, що

$$\sup_{\{x=(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}} |f_n(x)| \ge \sup_{\{x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}} |f_n(x)|. \tag{5.5}$$

Таким чином беручи до уваги рівності (5.4) та (5.5), маємо потрібну рівність:

$$\sup_{\{x=(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}} |f_n(x)| = \sup_{\{x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\in\ell_p:\|x\|\le s\}} |f_n(x)| = \|f_n\|_s.$$

Лему доведено. $\square$

Наслідок 5.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $1 \le p < \infty$ є фіксованими числами. Нехай $r > 0$ і $s > 0$ є такими, що $r \le \frac{s}{\sqrt[p]{n}}$. Із леми 5.2 та леми 5.3 випливає, що*

$$\sup_{\{x=(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots)\in\ell_p:|x_1|\le r,\ldots,|x_n|\le r\}} |f_n(x)| \le \|f_n\|_s.$$

Теорема 5.3. *Нехай $s > 0$. Нехай $\mathbb{P}$ є послідовністю n-однорідних алгебраїчно незалежних поліномів таких, що $P_n \colon \ell_p \to \mathbb{C}$ і поліном $P_n(x)$ не залежить від координат $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ і для кожної послідовності $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \in \ell_p$, де $1 \le p < \infty$. Тоді, для кожної функції $f \in H_{b\mathbb{P}}(\ell_p)$,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} P_1^{k_1}(x) P_2^{k_2}(x) \cdots P_n^{k_n}(x),$$

маємо, що

$$|a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}| \le \frac{1}{r^n} \|f_n\|_s, \tag{5.6}$$

де

$$\|f_n\|_s = \sup_{\{x\in\ell_p\colon \|x\|\le s\}} |f_n(x)|$$

і число $r > 0$ є таким, що

$$r \leq \frac{s}{\sqrt[p]{n}}.$$

Доведення. Нехай $n \in \mathbb{N}$ є фіксованим числом. Розглянемо лінійний оператор $\widehat{K_n} : \mathbb{C}^n \to \ell_p$ такий, що $\widehat{K_n}(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots)$ для кожної послідовності комплексних чисел $(z_1, \ldots, z_n)$. Розглянемо поліном $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ такий, що $g = f_n \circ \widehat{K_n}$, тобто

$$g(z_1, \ldots, z_n) = f_n(z) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} z_1^{k_1} z_2^{2k_2} \cdots z_n^{nk_n}$$

для кожної послідовності $z = (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots) \in \ell_p$.

Відповідно до леми 5.1, маємо, що для всіх невід'ємних цілих чисел $k_1, \ldots, k_n$ таких, що $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$ і для кожного числа $r > 0$ виконується наступна оцінка:

$$|a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}| \leq \frac{1}{r^{k_1+\ldots+nk_n}} \sup_{|z_1|\leq r,\ldots,|z_n|\leq r} |g(z_1, \ldots, z_n)|.$$

Тому

$$|a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z_1|\leq r,\ldots,|z_n|\leq r} |f_n(z)|.$$

Беручи до уваги наслідок 5.1, ми маємо, що для всіх чисел $r > 0$, $s > 0$ таких, що $r \leq \frac{s}{\sqrt[p]{n}}$, наступна нерівність є правильною:

$$|a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}| \leq \frac{1}{r^n} \|f_n\|_s. \tag{5.7}$$

Теорему доведено. $\square$

Наступна теорема показує, що для спеціального випадку алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$, усі нормовані базиси однорідних поліномів є еквівалентними.

Теорема 5.4. *Нехай $\mathbb{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots)$ є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$, $\mathfrak{P}_{\mathbb{P}}(X) = \ell_\infty$, і $\|Q_n\| = 1$ для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ (тобто, базис $\mathbb{Q}$ є нормованим). Тоді $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.*

Доведення. Оскільки $\mathbb{P}$ є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$, то базис $\mathbb{Q}$ може бути представлений через $\mathbb{P}$ наступним чином:

$$\begin{aligned}
Q_1(x) = &\ c_1 P_1(x),\\
Q_2(x) = &\ c_{20}(P_1(x))^2 + c_{01}P_2,\\
\dots &\\
Q_n(x) = &\ c_{n0\dots0}(P_1(x))^n + \dots + c_{k_1\dots k_n}(P_1(x))^{k_1}\cdots(P_n(x))^{k_n} + \dots + c_{0\dots01}P_n(x)\\
\dots &\ ,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

де $c_{\underbrace{0\dots01}_{n}} \neq 0$ і $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ для кожного числа $n \in \mathbb{N}$. Спершу розглянемо випадок, коли $X = \ell_\infty$ і $\mathbb{P} = \mathbb{I}$. Тоді з рівностей (5.8) випливає, що кожний поліном Q_n, $n \in \mathbb{N}$, може залежати тільки від координат $x_1, x_2, \dots, x_n$. Беручи до уваги, що $\|Q_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, і лему 5.1, маємо, що $|c_{k_1\dots k_n}| \le 1$. Таким чином, для кожної послідовності $x \in \ell_\infty$,

$$|Q_n(x)| \le \sum_{k_1+\dots+nk_n=n} |c_{k_1\dots k_n}|\|x\|^n \le \operatorname{part}(n)\|x\|^n,$$

де $\operatorname{part}(n)$ є числом розбиттів додатного цілого числа n. Добре відомо, що

$$\operatorname{part}(n) \sim \frac{\exp(\pi\sqrt{2n/3})}{4n\sqrt{3}}$$

і тому

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{part}(n)} = 1.$$

Отже,

$$\sqrt[n]{|Q_n(x)|} \le \|x\|,$$

тобто, $\big((Q_1(x))^{1/n}, \dots, (Q_n(x))^{1/n}, \dots\big) \in \ell_\infty$.

Навпаки, припустимо, що $z = (z_1, \dots z_n, \dots) \in \ell_\infty$. Покажемо, що існує послідовність $x \in \ell_\infty$ така, що $Q_n(x) = z_n^n$. Взявши обернене відображення до відображення (5.8) для $P_n = I_n$ і $z_n^n = Q_n(x)$ маємо, що

$$x_m^m = I_m(x) = \sum_{k_1+\dots+mk_m=m} a_{k_1\dots k_m} z_1^{k_1}\cdots z_m^{k_m}, \quad m = 1, \dots, n$$

для деяких сталих $a_{k_1\dots k_m}$. Використовуючи лему 5.1 і ті ж аргументи, що й вище, ми отримаємо, що $x \in \ell_\infty$. Таким чином, $\mathfrak{P}_{\mathbb{Q}}(\ell_\infty) = \ell_\infty$ і, отже, кожний алгебраїчний базис $\mathbb{Q}$ алгебри $H_{b\mathbb{I}}(\ell_\infty)$ є еквівалентний базису $\mathbb{I}$. Загальний випадок може бути отриманий, використовуючи наслідок 2.3. Теорему доведено. $\square$

5.3. Висновки до розділу 5

Розділ присвячено дослідженню алгебраїчних базисів алгебри поліномів, породженої зліченною множиною твірних елементів.

У підрозділі 5.1 розглянуто алгебру поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями елементів множини $\mathbb{P}$. Досліджено які алгебраїчні базиси існують у даній алгебрі і у якому вигляді їх можна подати.

У підрозділі 5.2 встановлено оцінку для коефіцієнтів функцій, що належать алгебрі $H_{b\mathbb{P}}(\ell_p)$, де $1 \leq p < \infty$, для певного виду поліномів $\mathbb{P}$. Також побудовано приклад зліченно породженої алгебри, у якій всі алгебраїчні базиси однорідних поліномів є еквівалентними.

Результати, наведені у даному розділі, опубліковано у праці [80].

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено вивченню властивостей алгебр цілих функцій, породжених зліченними множинами поліномів на комплексних банахових просторах. Зокрема, у роботі досліджено спектри алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених послідовностями $n-$однорідних поліномів деякого спеціального вигляду на комплексних просторах, досліджено умови ізоморфізму алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченними множинами поліномів на комплексних банахових просторах та представлено деякі застосування для алгебр симетричних аналітичних функцій обмеженого типу.

У роботі отримано такі наукові результати:

1. Узагальнено теорему про обчислення радіус-функції функціонала на випадок довільної підалгебри алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$, яка має наступну властивість: для кожної функції, яка належить підалгебрі, усі члени ряду Тейлора цієї функції теж належать підалгебрі;

2. Досліджено які алгебраїчні базиси існують в алгебрі $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}(X)$ усіх поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями неперервних алгебраїчно незалежних комплекснозначних n-однорідних поліномів норми 1 на просторі X, і в якому вигляді їх можна подати;

3. Доведено, що підалгебра алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$, породжена зліченною множиною неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів, є алгеброю Фреше;

4. Встановлено загальний вигляд елементів алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів;

5. Встановлено оцінку зверху для послідовності значень характерів зі спектру алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породже-

ної зліченною множиною неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів, на множині цих поліномів;

6. Встановлено оцінку для коефіцієнтів функцій, що належать алгебрам Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченними множинами неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів деякого спеціального вигляду на просторах ℓ_p, де $1 \leq p < \infty$;

7. Побудовано приклад зліченно породженої алгебри, в якій усі нормовані алгебраїчні базиси однорідних поліномів є еквівалентними;

8. Доведено, що кожну функцію, яка є елементом алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів залежних від скінченної кількості координат на комплексному банаховому просторі, що є замкненим підпростором простору ℓ_∞ і містить лінійний простір фінітних послідовностей c_{00}, можна єдиним чином аналітично продовжити на простір всіх обмежених комплекснозначних послідовностей ℓ_∞;

9. Доведено, що алгебра Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжена сукупністю поліномів залежних від скінченної кількості координат на комплексному банаховому просторі, що є замкненим підпростором простору ℓ_∞ і містить лінійний простір фінітних послідовностей c_{00}, є ізометрично ізоморфною до алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів на просторі ℓ_∞;

10. Описано спектр алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі, що є замкненим підпростором простору ℓ_∞ і містить лінійний простір фінітних послідовностей c_{00};

11. Досліджено спектр алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої сукупністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі ℓ_1;

12. Досліджено операції зсуву, які здійснюються на спектрах алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених сукупностями поліномів деякого спеціального вигляду на просторах ℓ_p, де $p \geq 1$;

13. Встановлено умови ізоморфізму алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених послідовностями неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів на комплексних банахових просторах;

14. Побудовано ізоморфізм алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному банахововому просторі $L_\infty[0,1]$ та алгебри усіх цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною однорідних поліномів на комплексному банахововому просторі ℓ_∞.

Результати дисертаційної роботи є внеском у теорію аналітичних функцій на банахових просторах і можуть бути використані при дослідженні алгебр симетричних аналітичних функцій на просторах ℓ_p, де $1 < p < +\infty$, та $L_\infty[a,b]$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Галущак С. І. Про спектри алгебр аналітичних функцій на банаховому просторі, породжених зліченною множиною поліномів // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2017. — С. 63.
2. Галущак С. І. Радіус-функція функціоналів на алгебрі $H_{\mathbb{P}}(X)$ // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2018. — С. 44.
3. Галущак С. І. Деякі властивості алгебр, породжених послідовністю поліномів на банаховому просторі // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки та математики"(Львів, 22–25 травня 2018 р.): збірник наукових праць — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. — 2018. — С. 53.
4. Галущак С. І. Про властивості алгебри Фреше, породженої послідовністю поліномів на банаховому просторі // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17 – 19 вересня 2018 р.): матеріали конференції — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2018. — С. 169.
5. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — Київ: Вища школа, 1974.

6. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. London Math. Soc. — 2003. — Vol. 35, Iss. 2. — P. 55–64.
7. Aron R. M., Berner P. D. A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings // Bull. Soc. Math. France — 1978. — Vol. 106. — P. 3–24.
8. Aron R. M., Boyd C., Choi Y.S. Unique Hahn-Banach Theorem for spaces of homogeneous polynomials // J. Austral. Math. Soc. — 2001. — Vol. 70. — P. 387–400.
9. Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. — 1991. — Vol. 415. — P. 51–93.
10. Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W. Weak-star continuous analytic functions // Can. J. Math. — 1995. — Vol. 47. — P. 673–683.
11. Aron R., Galindo P., García D., Maestre M. Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, Iss. 2. — P. 543–559.
12. Aron R., Galindo P., Pinasco D., Zalduendo I. Group-symmetric holomorphic functions on a Banach space // Bull. Lond. Math. Soc. — 2016. — Vol. 48, Iss. 5. — P. 779–796.
13. Aron R., Falcó J., Maestre M. Separation theorems for group invariant polynomials // The Journal of Geometric Analysis — 2018. — Vol. 28, Iss. 1. — P. 393–404.
14. Aron R., Falcó J., García D., Maestre M. Algebras of symmetric holomorphic functions of several complex variables // Revista Matemática Complutense — 2018. — Vol. 31, Iss. 3. — P. 651–672.
15. Aron R. M., Prolla J. B. Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces // J. Reine Angew. Math. — 1980. — Vol. 313. — P. 195–216.

16. Bandura A., Kravtsiv V., Vasylyshyn T. Algebraic Basis of the Algebra of All Symmetric Continuous Polynomials on the Cartesian Product of ℓ_p-Spaces. // Axioms. — 2022. — Vol. 11, Iss. 2, P. 41.
17. Biström P., Jaramillo J. A., Lindström M. Polynomial compactness in Banach spaces // Rocky Mont. J. Math. — 1998. — Vol. 28. — P. 1203–1225.
18. Bogdanowicz, W. On the weak continuity of the polynomial functionals on the space c_0. // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1957. — Vol. 21, P. 243–246.
19. Bohnenblust H. F., Hille E. On the absolute convergence of Dirichlet series // Ann. of Math. — 1931. — Vol. 32, Iss. 2. — P. 600–622.
20. Carne T. K., Cole B., Gamelin T. W. A uniform algebra of analytic functions on a Banach space // Trans. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 314. — P. 639–659.
21. Carpenter R.L. Uniqueness of topology for commutative semisimple F-algebras // Proc. Am. Math. Soc. — 1971. — Vol. 29. — P. 113–117.
22. Chernega I. V. A semiring in the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions in the space ℓ_1 // J. Math. Sci. — 2016. — Vol. 212. — P. 38–45.
23. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinb. Math. Soc. — 2012. — Vol. 55. — P. 125–142.
24. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 395. — P. 569–577.
25. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // Revista Matemática Complutense — 2014. — Vol. 27, Iss. 2. — P. 575–585.
26. Chernega I., Holubchak O., Novosad Z., Zagorodnyuk A. Continuity and hypercyclicity of composition operators on algebras of symmetric analytic

functions on Banach spaces // European Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 6. — P. 153–163.

27. Chernega I., Zagorodnyuk A. Unbounded symmetric analytic functions on ℓ_1 // Math. Scand. — 2018. — Vol. 122. — P. 84–90.
28. Chernega I., Zagorodnyuk A. Supersymmetric Polynomials and a Ring of Multisets of a Banach Algebra // Axioms. — 2022. — Vol. 11. — P. 511.
29. Dales H.G. Automatic continuity: A survey // Bull. Lond. Math. Soc. — 1978. — Vol. 10. — P. 129–183.
30. Davie A. M., Gamelin T. W. A theorem on polynomial-star approximation // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 106. — P. 351–356.
31. Dineen S. Complex analysis on infinite dimensional spaces. — Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.
32. Dixon P., Esterle J. Michael's problem and the Poincaré-Fatou-Bieberbach phenomenon // Bull. Amer. Math. Soc. — 1986. — Vol. 15. — P. 127–187.
33. Douady A. Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné // Ann. Inst. Fourier (Grenoble) — 1966. — Vol. 16, Iss. 1. — P. 1–95.
34. Falcó J., García D., Jung M., Maestre M. Group invariant separating polynomials on a Banach space // Publicacions Matemàtiques. — 2022. — Vol. 66, Iss. 1. — P. 207–233.
35. Fréchet M. Une définition fontionnelle des polynômes // Nouv. Ann. Math. — 1909. — Vol. 9. — P. 145–162.
36. Fréchet M. Sur les fonctionnelles continues // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1910. — Vol. 27, Iss. 3. — P. 193–216.
37. Galindo P., García D., Maestre M. Entire functions of bounded type on Fréchet spaces // Mathematische Nachrichten. — 1993. — Vol. 161. — P. 185–198.

38. Galindo P., García D., Maestre M., Mujica J. Extension of multilinear mappings on Banach spaces // Studia Math. — 1994. — Vol. 108. — P. 55–76.

39. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. The algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics — 2017. — Vol. 147, Iss. 4. — P. 743–761.

40. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Symmetric and finitely symmetric polynomials on the spaces ℓ_∞ and $L_\infty[0, +\infty)$ // Mathematische Nachrichten. — 2018. — Vol. 291 (11–12). — P. 1712–1726.

41. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Analytic structure on the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM. — 2020. — Vol. 114, Article number 56.

42. García D., Maestre M., Zalduendo I. The spectra of algebras of group-symmetric functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 2019. — Vol. 62, Iss. 3. — P. 609–623.

43. Gâteaux R. Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques // C. R. Acad. Sci. Paris: Sér. A — 1913. — Vol. 157. — P. 325–327.

44. Gâteaux R. Fonctions d'une infinité des variables indépendantes // Bull. Soc. Math. France — 1919. — Vol. 47. — P. 70–96.

45. Gâteaux R. Sur diverses questions de calcul functionnel // Bull. Soc. Math. France — 1922. — Vol. 50. — P. 1–37.

46. Glaisher J. W. L. On the Product $1^1.2^2.3^3...n^n$ // Messenger Math. — 1878. — Vol. 7. — P. 43–47.

47. González M., Gonzalo R., Jaramillo J. A. Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. — 1999. — Vol. 59, Iss. 2. — P. 681–697.

48. Graves L. M. Topics in the functional calculus, Part 1, The theory of functionals // Bull. Amer. Math. Soc. — 1935. — Vol. 41. — P. 641–662.

49. Halushchak S. Spectra of algebras of entire functions, generated by the sequence of polynomials on a Banach space // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125 th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September 2017): book of abstracts – Lviv: Ivan Franko National University of Lviv. – 2017. – P. 24.
50. Halushchak S. Spectra of some algebras of entire functions of bounded type, generated by the sequence of polynomials on a Banach space // Conference on Non Linear Functional Analysis (Valencia, 17–20 October 2017): book of abstracts – Valencia: Universitat Politècnica de Valencia (Spain). – 2017. – P. 38.
51. Halushchak S. I. Spectra of some algebras of entire functions of bounded type, generated by a sequence of polynomials // Carpathian Math. Publ. – 2019. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 311–320.
52. Halushchak S. I. Isomorphisms of some algebras of analytic functions of bounded type on Banach spaces // Mat. Stud. – 2021. – Vol. 56, Iss. 1. – P. 106 – 112.
53. Halushchak S. Algebras of Analytic Functions on Banach Spaces, Generated by Countable Sets of Polynomials and Their Properties // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2483, Article Number 030006.
54. Halushchak S. I. Properties of some algebras of entire functions of bounded type, generated by a countable set of polynomials on a Banach space // International Conference «Morse theory and its applications» dedicated to the memory and the 70th anniversary of Volodymyr Sharko (Kyiv, 25 – 28 September 2019): book of abstracts. – P. 15.
55. Halushchak S. I. On spectra of algebras of entire functions of bounded type, generated by sequences of polynomials on Banach spaces // International Conference "Infinite Dimensional Analysis and Topology"dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky (Ivano-Frankivsk, 16 – 19 October 2019): book of abstracts. – P. 19.

56. Halushchak S. On the isomorphism and some other properties of the Frechet algebras of entire functions of bounded type on Banach spaces // International Conference "11th International Skorobohatko Mathematical Conference"(Lviv, 26 – 30 October 2020): book of abstracts. — P. 39.
57. Halushchak S. Isomorphisms of some algebras of analytic functions of bounded type on Banach spaces // International online workshop on approximation theory (Ivano-Frankivsk, 19 – 21 March 2021): book of abstracts. — P. 17.
58. Halushchak S. Algebras of analytic functions on Banach spaces, generated by countable sets of polynomials and their properties // 5th International Conference of Mathematical Sciences (Istanbul, 23 – 27 June 2021): book of abstracts. — Istanbul: Maltepe University (Turkey). — 2021. — P. 54.
59. Hihliuk A., Zagorodnyuk A. Entire analytic functions of unbounded type on Banach spaces and their lineability // Axioms. — 2021. — Vol. 10. — P. 150.
60. Hihliuk A., Zagorodnyuk A. Algebras of entire functions containing functions of unbounded type on a Banach space // Carpathian Math. Publ. — 2021. — Vol. 13. — P. 426–432.
61. Hihliuk A., Zagorodnyuk A. Classes of entire analytic functions of unbounded type on Banach spaces // Axioms. — 2020. — Vol. 9. — P. 133.
62. Jawad F. Note on separately symmetric polynomials on the Cartesian product of ℓ_p. // Mat. Stud. — 2018. — Vol. 50, P. 204–210.
63. Jawad F., Zagorodnyuk A. Supersymmetric polynomials on the space of absolutely convergent series
Symmetry. — 2019. — Vol. 11. — P. 1111.
64. Josefson B. Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence // Ark. Mat. — 1975. — Vol. 13. — P. 79–89.

65. Khue N. V. On the extension of holomorphic functions on locally convex spaces with values in Fréchet spaces // Ann. Polon. Math. — 1984. — Vol. 44, Iss. 2. — P. 163–175.

66. von Koch H. Sur les système d'ordre infinie d'equations différentielles // Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Forhandlinger — 1899. — Vol. 61. — P. 395–411.

67. Kravtsiv V. Algebraic basis of the algebra of block-symmetric polynomials on $\ell_1 \oplus \ell_\infty$ // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, Iss. 1. — P. 89–95.

68. Kravtsiv V. Zeros of block-symmetric polynomials on Banach spaces // Mat. Stud. — 2020. — Vol. 53, Iss. 2. — P. 206–211.

69. Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. On algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Journal of Function Spaces — 2017. — Vol. 2017. — Article ID 4947925, 8 p.

70. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces, vol. II, Function Spaces. // Springer-Verlag. — 1979.

71. Macdonald I.G. Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials // University Lecture Series. — 1997. — Vol. 12, AMS,Providence, RI.

72. Martin R. S. Contributions to the theory of functionals. Ph. D. Thesis. — University of California, 1932.

73. Meise R., Vogt D. Holomorphic functions of uniformly bounded type on nuclear Fréchet spaces // Studia Math. — 1986. — Vol. 83. — P. 147–166.

74. Michael E. Locally Multiplicatively Convex Topological Algebras // American Mathematical Society: Providence, RI, USA. — 1952. — Volume 11, p. 82.

75. Moraes L. A., Extension of holomorphic mappings from E to E''. // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 118. — P. 455–461.

76. Mujica J. Complex analysis in Banach spaces // North Holland. — 1986.

77. Mujica J. Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 324. — P. 867–887.

78. Mujica J. Ideals of holomorphic functions on Tsirelson's space // Archiv der Mathematik — 2001. — Vol. 76. — P. 292–298.

79. Nemirovskii A. S., Semenov S. M. On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Mat. USSR Sbornik — 1973. — Vol. 21, Iss. 2. — P. 255–277.

80. Novosad Z., Vasylyshyn S., Zagorodnyuk A. Countably Generated Algebras of Analytic Functions on Banach Spaces // Axioms. — 2023. — Vol. 12, Iss. 8. — P. 798.

81. Olshanski G., Regev A., Vershik, A., Ivanov, V. Frobenius-Schur Functions // In: Joseph A., Melnikov A., Rentschler R. (eds) Studies in Memory of Issai Schur. Progress in Mathematics. — 2003. — Vol. 210, Birkhauser: Boston, MA, P. 251–299.

82. Protasov I. Combinatorics of Numbers // Mathematical Studies. Monograph Series. — 1997. — Vol. 2, P. 72.

83. Rudin W. Functional Analysis 2nd ed. // International series in pure and applied mathematics. — 1991.

84. Schaefer H. H. Topological vector spaces // The Macmillan Company, New York. — 1971.

85. Sebastião e Silva J. As funções analiticas e. a análise functional // Portugal. Math. — 1950. — Vol. 9. — P. 1–130.

86. Sebastião e Silva J. Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici // Portugal. Math. — 1953. — Vol. 12. — P. 1–46.

87. Sergeev A. N. On rings of supersymmetric polynomials // Journal of Algebra. — 2019. — Vol. 517, P. 336–364.

88. Stembridge J. R. A Characterization of Supersymmetric Polynomials // Journal of Algebra. — 1985. — Vol. 95, P. 439–444.

89. Taylor A. E. Analytic functions in general analysis // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 1937. — Vol. 6, Iss. 2. — P. 277–292.

90. Taylor A. E. On the properties of analytic functions in abstract spaces // Math. Ann. — 1938. — Vol. 115. — P. 466–484.

91. Titchmarsh E. C. The Theory of Functions (2nd ed.) // Oxford University Press. — 1939.
92. Tsirelson B. Not every Banach space contains an imbedding of ℓ_p or c_0 // Functional Anal. Appl. — 1974. — Vol. 8. — P. 138–141.
93. Vasylyshyn S. I. Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces // International Online Conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis"(Ivano-Frankivsk, 12 – 15 May 2022): book of abstracts. — P. 84 – 85.
94. Vasylyshyn S. I. Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces and operations on spectra // Carpathian Math. Publ.— 2023. — Vol. 15, Iss. 1. — P. 104 – 119.
95. Vasylyshyn S. Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces and operations on spectra // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023"(Львів, 23 – 25 травня 2023): матеріали конференції. — С. 298.
96. Vasylyshyn T. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of L_p on the semi-axis. Mat. Stud. — 2018. — Vol. 50, P. 93–104.
97. Vasylyshyn T. V. The algebra of symmetric polynomials on $(L^\infty)^n$. // Mat. Stud. — 2019. — Vol. 52, P. 71–85.
98. Vasylyshyn T. V. Point-evaluation functionals on algebras of symmetric functions on $(L_\infty)^2$ // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, No. 2. — P. 493–501.
99. Vasylyshyn T. V. Symmetric functions on spaces $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ and $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // Carpathian Math. Publ. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 5–16.
100. Vasylyshyn T. Algebras of entire symmetric functions on spaces of Lebesgue-measurable essentially bounded functions // J. Math. Sci. — 2020. — Iss. 246. — P. 264–276.
101. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on $(L_p)^n$. // Eur. J. Math. — 2020. — Vol. 6, P. 164–178.

102. Vasylyshyn T. Algebras of symmetric analytic functions on Cartesian powers of Lebesgue integrable in a power $p \in [1, +\infty)$ functions. // Carpathian Math. Publ. — 2021. — Vol. 13, P. 340–351.
103. Vasylyshyn T. Symmetric analytic functions on the Cartesian power of the complex Banach space of Lebesgue measurable essentially bounded functions on [0,1]. // J. Math. Anal. Appl. — 2022. — Vol. 509, P. 125977.
104. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Continuous symmetric 3-homogeneous polynomials on spaces of Lebesgue measurable essentially bounded functions.// Methods Funct. Anal. Topology. — 2018. — Vol. 24, P. 381–398.
105. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of the real Banach space $L_\infty[0, 1]$ // Mat. Stud. — 2020. — Vol. 53, № 2. — P. 192–205.
106. Weyl H. The classical Groups: Their Invariants and Representations. // Princeton University Press: Princenton, NJ, USA. — 1973.
107. Zagorodnyuk A. Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces. // Proc. Amer. Math.Soc. — 2006. — Vol. 134, P. 2559–2569.
108. Zagorodnyuk A. Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces // Function spaces, Contemp. Math. — 2007. — Vol. 435. — P. 381–394.
109. Zagorodnyuk A., Kravtsiv V. V. Spectra of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type.// Mat. Stud. — 2022. — Vol. 58, P. 69–81.
110. Zalduendo I. A canonical extension for analytic functions on Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1990. — Vol. 320. — P. 747–763.
111. Zorn M. A. Gâteaux differentiability and essential boundedness // Duke Math. J. — 1945. — Vol. 12. — P. 579–583.
112. Zorn M. A. Characterization of analytic functions in Banach spaces // Ann. of Math. — 1945. — Vol. 46. — P. 585–593.

113. Zorn M. A. Derivatives and Fréchet differentials // Bull. Amer. Math. Soc. — 1946. — Vol. 52. — P. 133–137.

ДОДАТОК А

Список публікацій за темою дисертації

1. Halushchak S. I. Spectra of some algebras of entire functions of bounded type, generated by a sequence of polynomials // Carpathian Math. Publ.— 2019. — Vol. 11, № 2. — P. 311 – 320.
   DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.311-320
   URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85078306604 &origin=resultslist
2. Halushchak S. I. Isomorphisms of some algebras of analytic functions of bounded type on Banach spaces // Mat. Stud. — 2021. — Vol. 56, Iss. 1. — P. 106 – 112.
   DOI: https://doi.org/10.30970/ms.56.1.107-112
   URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85120080599 &origin=resultslist
3. Halushchak S. Algebras of analytic functions on Banach spaces, generated by countable sets of polynomials and their properties // AIP Conference Proceedings — 2022. — Vol. 2483, Article Number 030006.
   DOI: https://doi.org/10.1063/5.0117601
   URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85142505934 &origin=resultslist
4. Vasylyshyn S. I. Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces and operations on spectra // Carpathian Math. Publ.— 2023. — Vol. 15, № 1. — P. 104 – 119.
   DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.104-119
   URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85163657874 &origin=resultslist
5. Novosad Z., Vasylyshyn S., Zagorodnyuk A. Countably generated algebras of analytic functions on Banach spaces // Axioms. — 2023. — Vol. 12, Iss. 8. — P. 798.

DOI: https://doi.org/10.3390/axioms12080798
URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85169106693&origin=resultslist

6. Галущак С. І. Про спектри алгебр аналітичних функцій на банаховому просторі, породжених зліченною множиною поліномів // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2017. — С. 63.
7. Halushchak S. Spectra of algebras of entire functions, generated by the sequence of polynomials on a Banach space // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September 2017): book of abstracts — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv. — 2017. — P. 24.
8. Halushchak S. Spectra of some algebras of entire functions of bounded type, generated by the sequence of polynomials on a Banach space // Conference on Non Linear Functional Analysis (Valencia, 17–20 October 2017): book of abstracts — Valencia: Universitat Politècnica de Valencia (Spain). — 2017. — P. 38.
9. Галущак С. І. Радіус-функція функціоналів на алгебрі $H_{\mathbb{P}}(X)$ // Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.): тези допов. — Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2018. — С. 44.
10. Галущак С. І. Деякі властивості алгебр, породжених послідовністю поліномів на банаховому просторі // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки та математики"(Львів, 22–25 травня 2018 р.): збірник наукових праць — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. — 2018. — С. 53.
11. Галущак С. І. Про властивості алгебри Фреше, породженої послідовністю поліномів на банаховому просторі // Міжнар. наук. конф. "Су-

часні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17 – 19 вересня 2018 р.): матеріали конференції — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2018. — С. 169.

12. Halushchak S. I. Properties of some algebras of entire functions of bounded type, generated by a countable set of polynomials on a Banach space // International Conference "Morse theory and its applications"dedicated to the memory and the 70th anniversary of Volodymyr Sharko (Kyiv, 25 – 28 September 2019): book of abstracts. — P. 15.
13. Halushchak S. I. On spectra of algebras of entire functions of bounded type, generated by sequences of polynomials on Banach spaces // International Conference "Infinite Dimensional Analysis and Topology"dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky (Ivano-Frankivsk, 16 – 19 October 2019): book of abstracts. — P. 19.
14. Halushchak S. On the isomorphism and some other properties of the Frechet algebras of entire functions of bounded type on Banach spaces // International Conference "11th International Skorobohatko Mathematical Conference"(Lviv, 26 – 30 October 2020): book of abstracts. — P. 39.
15. Halushchak S. Isomorphisms of some algebras of analytic functions of bounded type on Banach spaces // International online workshop on approximation theory (Ivano-Frankivsk, 19 – 21 March 2021): book of abstracts. — P. 17.
16. Halushchak S. Algebras of analytic functions on Banach spaces, generated by countable sets of polynomials and their properties // 5th International Conference of Mathematical Sciences (Istanbul, 23 – 27 June 2021): book of abstracts. — Istanbul: Maltepe University (Turkey). — 2021. — P. 54.
17. Vasylyshyn S. I. Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces // International Online Conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis"(Ivano-Frankivsk, 12 – 15 May 2022): book of abstracts. — P. 84 – 85.

18. Vasylyshyn S. Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces and operations on spectra // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023"(Львів, 23 – 25 травня 2023): матеріали конференції. — С. 298.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких конференціях і наукових семінарах:

1. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.);
2. Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125 річниці від дня народження Стефана Банаха (Львів, 18–23 вересня 2017 р.);
3. Конференції з нелінійного функціонального аналізу (Валенсія, Іспанія, 17-20 жовтня 2017 р.);
4. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.);
5. Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики"(Львів, 22–25 травня 2018 р.);
6. Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики (Чернівці, 17-19 вересня, 2018 р.);
7. Міжнародній конференції "Теорія Морса та її застосування присвяченій пам'яті і 70 річниці з дня народження Володимира Шарка (Київ, 25 – 28 вересня 2019 р.);
8. Міжнародній конференції "Нескінченновимірний аналіз і топологія присвяченій 70 річниці з дня народження професора Олега Лопушанського (Івано-Франківськ, 16 – 19 жовтня 2019 р.);

9. Одинадцятій міжнародній математичній конференції імені В. Скоробогатька (Львів, 26 – 30 жовтня 2020 р.);
10. Міжнародному онлайн-семінарі з теорії наближень (Івано-Франківськ, 19 – 21 березня 2021 р.);
11. П’ятій міжнародній конференції математичних наук (Стамбул, Туреччина, 23 – 27 червня 2021 р.);
12. Міжнародній онлайн-конференції "Сучасні тенденції абстрактного та прикладного аналізу"(Івано-Франківськ, 12 – 15 травня 2022 р.);
13. Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023"(Львів, 23 – 25 травня 2023 р.).
14. Звітних наукових конференціях викладачів, докторантів, аспірантів Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;
15. Науковому семінарі відділу аналізу, геометрії та топології Інситуту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів).