

МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ОСОБИН НА ПРОБНИХ ПЛОЩАХ: 4. РОЗПОДІЛ ОСОБИН СОСНИ КЕДРОВОЇ ЄВРОПЕЙСЬКОЇ (PINUS SEMBRA L.) ТА ЯЛИНИ ЗВИЧАЙНОЇ (PICEA ABIES) ЗА НОРМАЛЬНИМ ЗАКОНОМ ГАУССА

О.Г. Сіренко¹, О.В. Кузишин², Л.Я. Мідак²

¹Національний ботанічний сад ім. М.М. Гришка Національної Академії Наук України,
вул. Тимірязєвська, 1, Київ, 01014, Україна

²Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76025, Україна

Вступ

Приведені статистичні характеристики просторового розподілу особин *Pinus cembra* L. та *Picea abies* на пробних площах, закладених за двома схемами для чорнично-зеленомохової (асоціація I) та сфатнової (асоціація II) структур. Виявлені кореляційні зв'язки між параметрами просторового розподілу особин. Обґрунтовано надійність визначення закону просторового розподілу особин за показником ступеня просторової агрегації та інших показників. Показана можливість опису просторового розподілу особин за нормальним законом Гаусса.

Ключові слова: *Pinus cembra* L., кедр, *Picea abies*, ялина, пробна площа, елементарна комірочка, асоціація, особина, середнє арифметичне, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, ступінь просторової агрегації, початковий момент, центральний момент, показник асиметрії, показник ексцесу, вибіркова сукупність, генеральна сукупність, коефіцієнт кореляції, нормальний розподіл Гаусса.

Sirenko O.H., Kuzyshyn O.V. The models of species' distribution on the test area: distribution of *Pinus cembra* L. and *Picea abies* species by normal Gauss law. Statistic characteristics of steric distribution of cedar and spruce on the test areas are illustrated. The correlation relation of steric distribution of species has been found. The reliability of determining the law of steric distribution of species with the degree of steric aggregation has been proved. Possibility of description of steric distribution of species with normal Gauss law is shown.

Key words: spruce, test area, elementary unit, association, species, average, variance, root-mean-square deviation, variation coefficient, degree of steric aggregation, initial moment, central moment, asymmetry factor, excess factor, random set, correlation coefficient, normal Gauss distribution.

Вступ

У роботі [1] проаналізовані методи оцінки просторового розподілу особин дерев на пробних площах за [2-6] і показані недоліки таких оцінок. У [7] запропоновано дві схеми об'єднання вихідних пробних площ та процедуру оцінки розподілу особин сосни кедрової європейської (*Pinus cembra* L.) та ялини звичайної (*Picea abies*) на цих площах, яка полягає у:

- розрахунках числових статистичних характеристик особин ялини та кедрового розподілу на сукупних пробних площах;
- доведенні методами дисперсійного аналізу нульової гіпотези статистичної рівності ряду генеральних дисперсій за кожною схемою та асоціацією за ознакою ряду сукупних пробних площ за оцінками – вибірковими дисперсіями за допомогою критерію Фішера, Кохрана та Бартлета;
- пошуку кореляційних зв'язків між числовими статистичними характеристиками розподілу за допомогою кореляційного та регресійного аналізів;
- доведенні методами дисперсійного аналізу нульової гіпотези про статистичну рівність ряду генеральних середніх за кожною схемою та асоціацією за ознакою ряду сукупних пробних площ та побудові довірчих інтервалів для генеральних дисперсій та математичних сподівань;
- побудові довірчих інтервалів для генерального показника просторової агрегації особин кедрової ялини.

У роботі [7] доведено, що ряд генеральних дисперсій рівний, що дозволило авторам в роботі [8] знайти лінійні кореляційні зв'язки між числовими статистичними характеристиками і виявити хибність умови, що висунута до можливості застосування показника просторової агрегації особин, а саме: лінійна залежність дисперсії, відповідно і показника $\frac{\sigma^2}{\mu}$ (оцінка за $\frac{S^2}{\bar{x}}$), від середньої або величини пробної площі.

Для реалізації процедури дисперсійного аналізу в перевірці нульової гіпотези H_0 про статистичну рівність ряду математичних сподівань (генеральних середніх) та порівняльного аналізу необхідно довести

підпорядкування емпіричного розподілу особин кедрів та ялини на сукупних пробних площах (кожного рядка табл. 1-6 [7]) теоретичному нормальному закону Гауса.

І. Експериментальна частина

Об'єкт дослідження: сосна кедрова європейська (*Pinus cembra* L.) альпійсько-карпатського виду (далі кедр) та ялина звичайна (*Picea abies*) (далі ялина).

1.1. Осереднення розподілу кількості особин за емпіричними даними теоретичними ймовірними законами розподілу випадкової величини:

а) Пуассона [9-11]: ймовірність появи x -незалежних подій в інтервалі t зі сталою інтенсивністю λ :

$$f(x, \lambda) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} \exp(-\lambda t), \quad (1)$$

де $x = 0, 1, 2, \dots$; з параметрами: $\mu = \lambda t, \sigma^2 = \lambda t, A_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda t}}; E_x = \frac{1}{\lambda t}$.

б) Гауса [4, 5, 10, 17]:

Щільність ймовірності розподілу особин за нормальним законом розподілу Гауса (н.з.р.):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2)$$

з параметрами $\mu_x, \sigma_x^2, A_s = 0, E_x = 0$, а при нормуванні випадкової величини X щільність ймовірностей нормованого нормального розподілу:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad (3)$$

з параметрами $\mu_z = 0, \sigma_z^2 = 1$, де $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ – нормована змінна, оцінкою якої є $z = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$.

$$\Phi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \text{ – функція Лапласа [12-14].} \quad (5)$$

в) Перевірку узгодженості результатів н.з.р. здійснювали за:

$$\bullet \text{ нерівностями } |a_s| \leq S_{a_s}; |e_x| \leq S_{e_x}, \quad (6)$$

де a_s – показник асиметрії розподілу S_{a_s} – його середнє квадратичне відхилення [12]; e_x – показник ексцесу розподілу [12]; S_{e_x} – його середнє квадратичне відхилення.

Якщо (6) виконуються, то приймають H_0 про узгодження результатів експерименту з теоретичним законом Гауса. Якщо (6) не виконуються, то перевіряють виконання нерівностей:

$$|a_s| \leq 3S_{a_s}; |e_x| \leq 5S_{e_x}. \quad (7)$$

Якщо (7) виконуються, то є підстави перевірити підпорядкування емпіричних даних н.з.р. за критерієм ω^2 (для $N < 100$) [12]. Розраховували $\left(N\omega^2\right)_p$ за [12]:

$$\left(N\omega^2\right)_p = \frac{1}{12N} + \sum_{i=1}^N [P(x_i) - w(x_i)]^2, \quad (8)$$

де $p(x_i) = P(-\infty < X < x_i) = P(-\infty < Z < z_i) = 0,5 + \Phi(z_i)$ – теоретична ймовірність попадання випадкової величини X (Z) на i -місце варіаційного ряду; $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$; $w(x_i) = \frac{i-0,5}{N}$ – емпірична функція розподілу

(9)

(накопичена частота – частота попадання x_i на i -місце у варіаційному ряді).

За нерівністю $\left(N\omega^2\right)_p \leq Z_\alpha(\alpha)$ [12] визначали рівень значущості прийняття H_0 .

ІІ. Результати та обговорення

2.1. З цією метою розраховували вибіркові початкові h_1, h_2, h_3, h_4 та центральні m_1, m_2, m_3, m_4 моменти k -порядку за формулами [7, 12], за якими визначали вибіркові показники асиметрії розподілу a_s ($3a_s$), та показники ексцесу (стрімкості) розподілу e_x ($5e_x$) [7, 12]. Результати розрахунків зведені в табл. 1. Показники a_s (та $3a_s$) та e_x (та $5e_x$) порівнювали за абсолютною величиною з відповідними їх середніми квадратичними відхиленнями S_{a_s} і S_{e_x} , розрахованими за формулами [7, 12].

2.2. Введемо у науковий обіг математичних методів у біології означення ступеня відмінності показників асиметрії та ексцесу від відповідних їм середніх квадратичних відхилень. Що рівнозначно

Таблиця 1. Перевірка підпорядкування емпіричного розподілу особин кедра та ялини на сукупних пробних площах за схемами 1 і 2 (рис. 1 [7]) теоретичному нормальному закону розподілу Гаусса.

k	F, м ²	N	m ₂	m ₃	m ₄	as	ex	S _{as}	3S _{as}	S _{ex}	5S _{ex}	ξ ₁	ξ ₂	ξ ₃	ξ ₄	(Nσ ²) _p	ξ _α , де α:			α _{max} , %	
																	0,01	0,05	0,30		
Кедр, схема 1, асоціація I (чорнично-зеленомохова структура)																					
1	625	4	6,688	4,212	78,02	0,244	-1,256	0,717	2,151	0,582	2,91	2,94	8,85	0,46	2,32	0,0236	31,5	19,6	7,81	77,17	
2	1250	4	2,75	2,25	12,313	0,493	-1,372	0,717	2,151	0,582	2,91	1,45	4,36	0,42	2,12	0,0556	13,4	8,30	3,31	63,72	
3	1875	4	2,75	2,25	12,313	0,493	-1,372	0,717	2,151	0,582	2,91	1,45	4,36	0,42	2,12	0,0556	13,4	8,30	3,31	63,72	
4	2500	4	2,75	-2,25	12,313	-0,493	-1,372	0,717	2,151	0,582	2,91	1,45	4,36	0,42	2,12	0,0556	13,4	8,30	3,31	63,72	
5	3125	4	38,25	-105	2837,1	-0,444	-1,061	0,717	2,151	0,582	2,91	1,62	4,85	0,55	2,74	0,0320	23,2	14,4	5,76	73,39	
6	3750	4	77	288,0	9401	0,426	-1,414	0,717	2,151	0,582	2,91	1,68	5,05	0,41	2,06	0,0422	17,6	10,9	4,36	69,04	
7	4375	4	24,18	113,9	1257,1	0,958	-0,851	0,717	2,151	0,582	2,91	0,75	2,25	0,68	3,42	0,0860	8,65	5,37	2,14	53,12	
8	5000	4	41,94	58,594	2277,8	0,216	-1,71	0,717	2,151	0,582	2,91	3,33	9,97	0,34	1,71	0,0609	12,2	7,58	3,03	61,73	
9	5625	4	72,75	12,75	5437,3	0,021	-1,973	0,717	2,151	0,582	2,91	35,0	105	0,30	1,48	0,0828	8,98	5,58	2,23	54,15	
Кедр, схема 1, асоціація II (сфагнова структура)																					
1	625	4	14,25	60	467,1	1,115	-0,7	0,717	2,151	0,582	2,91	0,64	1,93	0,83	4,16	0,1243	5,98	3,71	1,48	42,24	
2	1250	4	11,188	41,344	286,7	1,105	-0,71	0,717	2,151	0,582	2,91	0,65	1,95	0,82	4,10	0,1200	6,20	3,85	1,54	43,34	
3	1875	4	36,188	227,91	2938,6	1,047	-0,76	0,717	2,151	0,582	2,91	0,69	2,06	0,77	3,85	0,0958	7,76	4,82	1,92	50,10	
Кедр, схема 2, асоціація I (чорнично-зеленомохова структура)																					
1	625	4	6,688	4,219	78,020	0,244	-1,256	0,717	2,151	0,582	2,91	2,940	8,82	0,464	2,318	0,0236	31,5	19,6	7,81	77,17	
2	1250	8	15,688	-0,4688	426,395	-0,008	-1,267	0,651	1,954	0,907	4,53	86,34	259	0,715	3,577	0,0299	24,9	15,4	6,16	74,32	
3	1875	12	16,139	35,093	520,081	0,541	-1,003	0,582	1,745	0,917	4,583	1,075	3,23	0,914	4,568	0,0782	9,51	5,90	2,36	55,66	
4	2500	16	12,984	21,715	382,077	0,464	-0,734	0,528	1,584	0,882	4,412	1,137	3,41	1,202	6,012	0,0606	12,3	7,61	3,04	61,84	
5	3125	20	28,39	126,28 2	2272,38	0,835	-0,181	0,486	1,457	0,841	4,206	0,582	1,75	4,657	23,28	0,1097	6,78	4,21	1,68	46,10	
6	3750	24	28,306	90,009	1919,55	0,598	-0,604	0,452	1,356	0,802	4,008	0,757	2,27	1,327	6,633	0,1000	7,44	4,61	1,84	48,85	
7	4375	28	27,034	81,005	1752,39	0,576	-0,602	0,425	1,274	0,765	3,827	0,737	2,21	1,27	6,353	0,1118	6,65	4,13	1,65	45,52	
8	5000	32	30,312	123,07	2333,66	0,738	-0,460	0,401	1,204	0,733	3,664	0,544	1,63	1,593	7,963	0,1680	4,43	2,75	1,10	32,52	
9	5625	36	28,145	125,63 6	2214,59	0,841	-0,204	0,382	1,145	0,704	3,518	0,453	1,36	3,44	17,22	0,1969	3,78	2,34	0,94	27,35	

Продовження табл. 1.

k	F, м ²	N	m ₂	m ₃	m ₄	as	ex	S _{as}	3S _{as}	S _{ex}	5S _{ex}	ξ ₁	ξ ₂	ξ ₃	ξ ₄	(Nω ²) _p	ξ _{доп} , де α:			α _{max} , %	
																	0,01	0,05	0,30		
1	625	4	14,25	60	467,063	1,115	-0,70	0,717	2,151	0,582	2,91	0,643	1,93	0,831	4,157	0,1243	5,98	3,71	1,48	42,24	
2	1250	8	13,109	78,457	802,167	1,653	1,668	0,651	1,954	0,907	4,53	0,394	1,18	0,5447	2,718	0,1325	5,61	3,48	1,39	40,22	
3	1875	12	11,74	64,335	692,878	1,599	2,025	0,582	1,745	0,917	4,583	0,364	1,09	0,453	2,264	0,1202	6,19	3,84	1,53	43,29	
Кедр, схема 2, асоціація I (т.в.ч.)																					
1	625	4	32,75	24,75	1377,3	0,132	-1,716	0,717	2,151	0,582	2,91	5,431	16,3	0,33	1,70	0,0443	16,8	10,4	4,16	68,18	
2	1250	8	45,23	217,93	4183,3	0,716	-0,956	0,651	1,954	0,907	4,53	0,909	2,73	0,95	4,74	0,0594	12,5	7,77	3,10	62,29	
3	1875	12	46,06	73,741	3498,1	0,236	-1,351	0,582	1,745	0,917	4,583	2,466	7,40	0,68	3,39	0,0633	11,7	7,29	2,91	60,85	
4	2500	16	38,53	91,241	2936,9	0,382	-1,022	0,528	1,584	0,882	4,412	1,382	4,15	0,86	4,32	0,0533	13,9	8,66	3,46	64,60	
5	3125	20	41,65	120,6	3373,6	0,449	-1,055	0,486	1,457	0,841	4,206	1,083	3,25	0,80	3,99	0,0805	9,24	5,73	2,29	54,90	
6	3750	24	37,87	66,193	2756,5	0,284	-1,078	0,452	1,356	0,802	4,008	1,592	4,78	0,74	3,72	0,0644	11,5	7,16	2,86	60,45	
7	4375	28	32,98	39,792	2330,4	0,210	-0,857	0,425	1,274	0,765	3,827	2,020	6,06	0,89	4,46	0,0373	19,9	12,4	4,94	71,10	
8	5000	32	28,30	139,74	1097,1	0,928	-1,63	0,401	1,204	0,733	3,664	0,432	1,30	0,45	2,25	0,0540	13,8	8,54	3,41	64,33	
9	5625	36	30,41	157,98	1461,9	0,942	-1,419	0,381	1,144	0,703	3,517	0,405	1,22	0,50	2,48	0,0916	8,12	5,04	2,01	51,37	
10	10000	64	35,81	7,493	2270,4	0,035	-1,229	0,295	0,884	0,563	2,813	8,426	25,3	0,46	2,29	0,1841	4,04	2,51	1,00	29,53	
11	40000	256	33,93	3,590	2137,5	0,018	-1,143	0,152	0,455	0,230	1,499	8,346	25,0	0,26	1,31	0,3989	1,86	1,16	0,46	8,17	
Ялина, схема 1, асоціація I (чорнично-зеленомохова структура)																					
1	625	4	3,25	0	19,5625	0	-1,1479	0,717	2,151	0,582	2,91	∞	∞	0,507	2,54	0,0229	32,5	20,1	8,05	77,5	
2	1250	4	26,5	-81	1244,5	-0,5938	-1,2278	0,717	2,151	0,582	2,91	1,208	3,62	0,474	2,37	0,0464	16,0	9,94	3,97	67,33	
3	1875	4	30,688	-58,781	1692,02	-0,3458	-1,2033	0,717	2,151	0,582	2,91	2,074	6,22	0,484	2,42	0,0257	28,9	18,0	7,17	76,21	
4	2500	4	20,188	-23,91	564,582	-0,2636	-1,6146	0,717	2,151	0,582	2,91	2,721	8,16	0,36	1,8	0,0449	16,6	10,3	4,10	67,94	
5	3125	4	0,6875	0,2813	0,76953	0,4934	-1,3719	0,717	2,151	0,582	2,91	1,454	4,36	0,42	2,12	0,0556	13,4	8,30	3,31	63,72	
6	3750	4	11,5	-13,5	224,5	-0,3462	-1,3025	0,717	2,151	0,582	2,91	2,072	6,21	0,45	2,23	0,0277	26,8	16,7	6,65	75,30	
7	4375	4	9,1875	-5,1563	133,957	-0,1852	-1,4130	0,717	2,151	0,582	2,91	3,873	11,6	0,41	2,06	0,0259	28,7	17,8	7,12	76,12	
8	5000	4	29	-144	1817	-0,9221	-0,839	0,717	2,151	0,582	2,91	0,778	2,33	0,69	3,47	0,0701	10,6	6,58	2,63	58,43	
9	5625	4	40,25	-216	3496,06	-0,8459	-0,842	0,717	2,151	0,582	2,91	0,848	2,54	0,69	3,46	0,0688	10,8	6,71	2,68	58,88	
Ялина, схема 1, асоціація II (сфагнова структура)																					
1	625	4	4,5	0	40,5	0	-1	0,717	2,151	0,582	2,91	∞	∞	0,582	2,91	0,0525	14,2	8,79	3,51	64,92	
2	1250	4	3,5	-4,5	24,5	-0,687	-1	0,717	2,151	0,582	2,91	1,044	3,13	0,582	2,91	0,0436	17,1	10,6	4,23	68,47	
3	1875	4	3,688	7,0313	30,395	0,993	-0,765	0,717	2,151	0,582	2,91	0,722	2,17	0,761	3,805	0,0985	7,5	4,68	1,87	49,29	

Продовження табл. 1.

k	F, м ²	N	m ₂	m ₃	m ₄	a _s	e _x	S _{as}	3S _{as}	S _{ex}	5S _{ex}	ξ ₁	ξ ₂	ξ ₃	ξ ₄	(Nω ²) _p	ξ _{св} де α:			α _{max} , %
																	0,01	0,05	0,30	
Ялина, схема 2, асоціація I (чорнично-зеленомохова структура)																				
1	625	4	3,25	0	19,5625	0	-1,148	0,717	2,151	0,582	2,91	∞	∞	0,507	2,54	0,0229	32,5	20,1	8,05	77,50
2	1250	8	9,25	0,75	178,75	0,0267	-0,911	0,6513	1,954	0,907	4,533	24,43	73,3	0,995	4,977	0,0243	30,6	19,0	7,58	76,85
3	1875	12	7,91	7,9572	145,552	0,3577	-0,674	0,5818	1,745	0,917	4,583	1,626	4,88	1,361	6,80	0,0242	30,7	19,1	7,62	76,90
4	2500	16	6,621	4,211	109,292	0,2472	-0,507	0,5279	1,5836	0,882	4,412	2,135	6,41	1,740	8,70	0,0350	21,2	13,2	5,27	72,08
5	3125	20	20,928	108,83	1751,09	1,1368	0,998	0,4858	1,4575	0,841	4,206	0,427	1,28	0,8426	4,213	0,0982	7,57	4,70	1,88	49,38
6	3750	24	19,389	80,093	1386,35	0,938	0,6878	0,4522	1,3565	0,802	4,008	0,482	1,45	1,1654	5,827	0,0850	8,75	5,43	2,17	53,44
7	4375	28	18,820	63,162	1187,37	0,7736	0,352	0,425	1,274	0,765	3,827	0,549	1,65	2,1725	10,86	0,0797	9,33	5,79	2,31	55,16
8	5000	32	19,25	58,828	1201,17	0,6965	0,2415	0,4013	1,2039	0,733	3,663	0,576	1,73	3,0344	15,17	0,0740	10,0	6,24	2,49	57,08
9	5625	36	18,293	66,988	1171,62	0,8562	0,501	0,3815	1,1445	0,704	3,518	0,446	1,34	1,4039	7,019	0,1149	6,47	4,02	1,60	44,69
Ялина, схема 2, асоціація II (сфagnoва структура)																				
1	625	4	4,5	0	40,5	0	-1	0,717	2,151	0,582	2,91	∞	∞	0,582	2,91	0,0525	14,2	8,79	3,51	64,92
2	1250	8	4,438	6,094	50,926	0,652	-0,414	0,651	1,954	0,907	4,533	0,999	3,0	2,19	11,0	0,0393	18,9	11,7	4,69	70,25
3	1875	12	5,5767	2,1887	83,621	0,166	-0,311	0,582	1,745	0,917	4,583	3,500	10,5	2,95	14,7	0,0358	20,8	12,9	5,15	71,74
Ялина, схема 2, асоціація I (т.в.ч.)																				
1	625	4	32,75	24,75	1377,3	0,132	-1,716	0,717	2,151	0,582	2,91	5,431	16,3	0,34	1,7	0,0443	16,8	10,4	4,16	68,18
2	1250	8	48,86	213,55	4787,0	0,6253	-0,995	0,651	1,954	0,907	4,53	1,042	3,12	0,91	4,56	0,0824	9,02	5,60	2,24	54,28
3	1875	12	51,58	168,69	4766,2	0,455	-1,208	0,582	1,745	0,917	4,583	1,277	3,83	0,76	3,8	0,0742	10,0	6,22	2,48	57,01
4	2500	16	53,15	143,34	4888,7	0,37	-1,27	0,528	1,584	0,882	4,412	1,427	4,28	0,7	3,5	0,0836	8,89	5,52	2,20	53,89
5	3125	20	48,26	161,14	4560,8	0,481	-1,042	0,486	1,457	0,841	4,206	1,011	3,03	0,807	4,04	0,0867	8,58	5,32	2,13	52,90
6	3750	24	50,0	123,61	4565,5	0,353	-1,17	0,452	1,356	0,802	4,008	1,29	3,88	0,683	3,41	0,0883	8,42	5,23	2,09	52,40
7	4375	28	49,88	88,64	4507,6	0,252	-1,188	0,425	1,274	0,765	3,827	1,687	5,06	0,644	3,22	0,0873	8,52	5,29	2,11	52,71
8	5000	32	47,21	74,685	4321,5	0,23	-1,061	0,401	1,204	0,733	3,664	1,743	5,23	0,691	3,45	0,0580	12,8	7,96	3,18	62,81
9	5625	36	48,05	55,74	4280,1	0,167	-1,146	0,381	1,144	0,705	3,517	2,28	6,84	0,614	3,07	0,0636	11,7	7,25	2,90	60,74
10	10000	64	44,5	-3,734	3491,5	-0,013	-1,237	0,295	0,884	0,563	2,813	23,42	70,3	0,455	2,27	0,1586	4,69	2,91	1,16	34,40
11	40000	256	39,67	-3,186	2931,1	-0,013	-1,138	0,151	0,455	0,30	1,499	11,89	35,7	0,26	1,32	0,4002	1,86	1,15	0,46	8,10

оцінці відповідності (невідповідності) емпіричного розподілу теоретичному розподілу за нормальним законом Гаусса за критеріями as та ex :

$$\xi_1 = \frac{S_{as}}{|as|}; \xi_2 = \frac{3S_{as}}{|as|}; \xi_3 = \frac{S_{ex}}{|ex|}; \xi_4 = \frac{5S_{ex}}{|ex|}. \quad (10)$$

Зворотні величини будуть відповідати ступеню невідповідності розподілу:

$$\xi_1 = \frac{|as|}{S_{as}}; \xi_2 = \frac{|as|}{3S_{as}}; \xi_3 = \frac{|ex|}{S_{ex}}; \xi_4 = \frac{|ex|}{5S_{ex}}.$$

Якщо $\xi_1 \geq 1$ та $\xi_3 \geq 1$, то емпіричні дані розподілу особин кедр та ялини не суперечать теоретичному нормальному розподілу Гаусса. Як видно з табл. 1,

- $\xi_1 > 1$ (окрім: для $k = 7$ кедр, схеми 1, асоціації I; $k = 1 - 3$ кедр, схеми 1 і схеми 2, асоціації II; $k = 5 - 9$ кедр та ялини, схеми 2, асоціації I; $k = 2, 8, 9$ кедр, схеми 1, асоціації I (т.в.ч.); $k = 8, 9$ ялини, схеми 1, асоціації I; $k = 3$ та 2 схеми 1 і схеми 2 відповідно, асоціації II);
- $\xi_2 > 1$ для всіх випадків;
- $\xi_3 > 1$ (окрім: $k = 4 - 9$ кедр, схеми 2, асоціації I; $k = 3, 4, 6 - 9$ ялини, схеми 2, асоціації I; $k = 2, 3$ ялини, схеми 2, асоціації II);
- $\xi_4 > 1$ для всіх випадків.

2.3. З цих даних витікає, що $|as| > \sigma_{as}$, $|ex| > \sigma_{ex}$, що не дає підстави за цими показниками однозначно стверджувати про підпорядкування емпіричного розподілу теоретичному нормальному розподілу Гаусса. Так як $\xi_2 > 1$ і $\xi_4 > 1$ для всіх випадків, тобто $|as| < 3S_{as}$ та $|ex| < 5S_{ex}$, то це підпорядкування можливе – необхідна перевірка за більш точним та надійним критерієм ω^2 [12]. Для цього розраховували $(N\omega^2)_p$ за формулою [12]. Результати розрахунків $(N\omega^2)_p$ зведені в табл. 1.

2.4. Складемо нерівність $(N\omega^2)_p \leq Z_\alpha$, яка буде підтверджувати підпорядкування емпіричного розподілу теоретичному нормальному розподілу Гаусса з різним рівнем значущості α . За [12, табл. 11] критичні значення критерію $(\omega^2)_{кр} = Z_\alpha$ дорівнюють:

$\alpha = 0,01$	$Z_{0,01} = 0,7435$
$\alpha = 0,05$	$Z_{0,05} = 0,4614$
$\alpha = 0,10$	$Z_{0,1} = 0,3473$
$\alpha = 0,20$	$Z_{0,2} = 0,2412$
$\alpha = 0,30$	$Z_{0,3} = 0,1843$
$\alpha = 0,40$	$Z_{0,4} = 0,1467$
$\alpha = 0,50$	$Z_{0,5} = 0,1184$

Як видно з табл. 1, порівняння $(N\omega^2)_p$ з вищими величинами Z_α привело до таких нерівностей:

- $(N\omega^2)_p < Z_{0,01} < Z_{0,05}$ – для всіх випадків;
- $(N\omega^2)_p < Z_{0,1} < Z_{0,2}$ – для більшості випадків, окрім математичних моделей особин ялини та кедр $k = 11$ ($F = 40.000 \text{ м}^2$), схеми 2, асоціації I (т.в.ч.);
- $(N\omega^2)_p < Z_{0,3}$ – для більшості випадків, окрім $k = 9$ ($F = 5625 \text{ м}^2$) особин кедр, схеми 2, асоціації I та $k = 11$ ($F = 40.000 \text{ м}^2$) математичних моделей за таблицею випадкових чисел особин кедр та ялини, схеми 2, асоціації I;
- $(N\omega^2)_p < Z_{0,4}$ – для більшості випадків, окрім $k = 8$ ($F = 5000 \text{ м}^2$) і $k = 9$ ($F = 5625 \text{ м}^2$) особин кедр, схеми 2, асоціації I та особин кедр, схеми 2, асоціації I та $k = 10$ ($F = 10.000 \text{ м}^2$) і $k = 11$ ($F = 40.000 \text{ м}^2$) математичних моделей за таблицею випадкових чисел особин кедр та ялини, схеми 2, асоціації I;
- $(N\omega^2)_p < Z_{0,5}$ – для більшості випадків, окрім $k = 1$ ($F = 625 \text{ м}^2$) і $k = 2$ ($F = 1250 \text{ м}^2$) особин кедр, схеми 12, асоціації II; $k = 8$ ($F = 5000 \text{ м}^2$) і $k = 9$ ($F = 5625 \text{ м}^2$) – особин кедр, схеми 2, асоціації I; $k = 10$ ($F = 10.000 \text{ м}^2$) і $k = 11$ ($F = 40.000 \text{ м}^2$) математичних моделей за таблицею випадкових чисел особин кедр та ялини, схеми 2, асоціації I.

2.5. Введемо у науковий обіг у математичні методи в біології означення ступеня відповідності (невідповідності) емпіричного розподілу особин (експериментальних даних) теоретичному розподілу нормального закону Гаусса за критерієм ω^2 та χ^2 :

$$\xi_\alpha = \frac{\omega_{кр}^2}{(N\omega^2)_p} = \frac{Z_\alpha}{(N\omega^2)_p} \quad (\text{ступінь невідповідності } \xi_\alpha = \frac{(N\omega^2)_p}{Z_\alpha}), \quad (11)$$

де $Z_\alpha = \omega_{кр}^2$ – критичне значення критерію ω^2 для рівня значущості α за [12].

$(N\omega^2)_p$ – добуток розрахункового значення ω^2 на обсяг виборки (число варіантів у варіаційному ряду результатів експерименту) за [12].

$$\xi_\alpha = \frac{\chi_{Г}^2}{\chi_p^2} = \frac{\chi_\alpha^2}{\chi_p^2} \quad (\text{ступінь невідповідності } \xi_\alpha = \frac{\chi_p^2}{\chi_{Г}^2} = \frac{\chi_p^2}{\chi_\alpha^2}),$$

де χ_p^2 – розрахункове значення χ^2 -квдрат за [12];

$\chi_T^2 = \chi_\alpha^2 \{ \alpha; f = e - 3 \}$ – критичне (табличне) значення критерію Пірсона, вибраного з таблиць [14-16] для рівня значущості α і числа ступенів вільностей $f = e - 3$, де e – число інтервалів у варіаційному ряду після об'єднання варіантів.

Як видно з табл. 1, $\xi_{0,01} > 1$; $\xi_{0,05} > 1$, а також $\xi_{0,3} \geq 1$ [окрім $k = 9$ ($F = 5625 \text{ м}^2$) особин кедра, схеми 2, асоціації I ($\xi_{0,3} = 0,94$); $k = 11$ ($F = 40.000 \text{ м}^2$) математичної моделі за таблицею випадкових чисел для схеми 2, асоціації I особин кедра та ялини ($\xi_{0,3} = 0,46$)]. Ступінь відповідності ξ_α зменшується із збільшенням α за логарифмічним законом (рис. 1 а), при цьому рівняння математичних моделей такі:

особин кедра ($F = 5625 \text{ м}^2$, схеми 1, асоціації I, екс.)

$$\xi_\alpha = -2,0198 \ln \alpha - 0,2374 \quad (R^2 = 0,9971) \quad (\text{крива 1});$$

особин кедра ($F = 5625 \text{ м}^2$, схеми 2, асоціації I, екс.)

$$\xi_\alpha = -0,8484 \ln \alpha - 0,0996 \quad (R^2 = 0,9971) \quad (\text{крива 2});$$

математична модель особин кедра ($F = 5625 \text{ м}^2$, схеми 2, асоціації I, т.в.ч.)

$$\xi_\alpha = -1,8247 \ln \alpha - 0,2125 \quad (R^2 = 0,9971) \quad (\text{крива 3}).$$

Як видно із цих результатів, ступінь апроксимації емпіричних даних залежності $\xi_\alpha = f(\ln \alpha)$ високий: $R = 99,85\%$. Ці дані підтверджують вищі дані про підпорядкування емпіричного розподілу особин кедра й ялини кожного ряду сукупних пробних площ нормальному закону Гауса із рівнем значущості α .

2.6. Для визначення максимального рівня значущості цього підпорядкування за табличними даними табл. 11 [12] побудували залежність $Z_\alpha = f(\ln \alpha)$ (рис. 1 б), що дозволило за співвідношенням $Z_\alpha / (N\omega^2)_p = 1$ для умов $Z_\alpha = (N\omega^2)_p$, знайти α_{\max} (табл. 1), використовуючи апроксимуючий поліном з високим рівнем апроксимації: $Z_\alpha = -0,1672 \ln \alpha - 0,0197$ ($R^2 = 0,9971$).

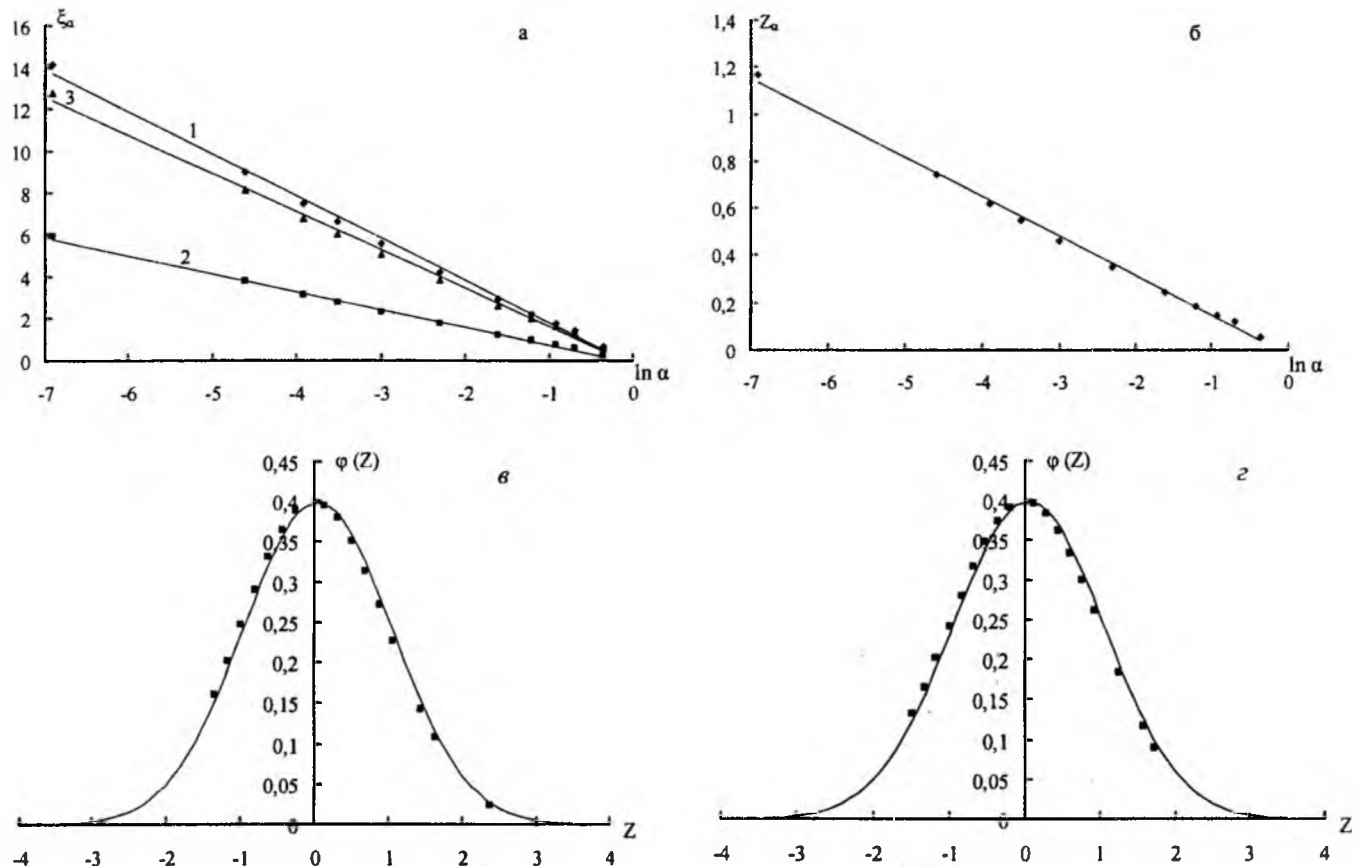


Рис. 1. Графічні залежності, які ілюструють (а, в, г) або є допоміжними (б) при перевірці підпорядкування емпіричного розподілу особин кедра на сукупних пробних площах теоретичному нормальному закону розподілу Гауса:

а) залежність ступеня наближеності ξ_α емпіричного розподілу особин кедра чорнично-зеленомохової структури (асоціації I) від логарифму рівня значущості α . На сукупній пробній площі $F = 5625 \text{ м}^2$ ($k = 9$) за схемою: 1 (1) (екс.); 2 (екс.) (2) та 2 (т.в.ч.) (3);

б) залежність критичного значення $\omega_{кр}^2 = Z_\alpha$ від логарифму рівня значущості α (табличні дані [12, табл. 11]);

в, г) нормований нормальний розподіл особин кедра чорнично-зеленомохової структури (асоціації I) на сукупній пробній площі $F = 5625 \text{ м}^2$ ($k = 9$) за схемою 2: в – експеримент (емпіричні дані); г – математична модель за таблицею випадкових чисел (т.в.ч.). Тут лінії – щільність ймовірності нормованого нормального розподілу Гауса, точки – експериментальні (в) та розрахункові за математичною моделлю дані.

Як видно з табл. 1, емпіричний просторовий розподіл числа особин кедрів і ялини кожного ряду (табл. 1) підпорядкований нормальному закону розподілу Гаусса з високим рівнем значущості $\alpha = 0,402 - 0,775$ для більшості розподілів, середнім рівнем значущості $\alpha = 0,29 - 0,34$ для особин кедрів асоціації I за схемою 2 (екс.) для $k = 8$ ($F = 5000 \text{ м}^2$) та $k = 9$ ($F = 5625 \text{ м}^2$) та математичних моделей за таблицею випадкових чисел особин кедрів та ялини асоціації I за схемою 2 для $k = 10$ ($F = 10.000 \text{ м}^2$) та низьким рівнем значущості $\alpha = 0,081 - 0,082$ для математичних моделей за таблицею випадкових чисел особин кедрів та ялини асоціації I за схемою 2 для $k = 11$ ($F = 40.000 \text{ м}^2$). В останньому випадку критерій ω^2 , хоча і не відкидає гіпотезу нормального розподілу особин кедрів на сукупній площі $F = 40.000 \text{ м}^2$ математичної моделі кедрів й ялини, але рівень значущості виявився низьким, але достатньо надійним.

На рис. 1 в, з приведені криві, що відповідають теоретичному нормованому нормальному розподілу Гаусса особин кедрів асоціації I за схемою 2 на сукупних пробних площах $F = 5625 \text{ м}^2$ ($k = 9$) для експерименту (в) та математичної моделі за таблицею випадкових чисел (з) (темні точки – емпіричний розподіл). Як видно з рис. 1 в, з, теоретична крива нормованого нормального розподілу щільно накриває точки емпіричного розподілу.

Аналогічні залежності отримані для всіх рядків табл. 1.

Висновки

1. Вперше у науковий обіг математичних методів у біології введено означення ступеня відповідності (невідповідності) вибіркового (емпіричного) розподілу теоретичному розподілу за нормальним законом Гаусса за критеріями асиметрії (a_s) та ексцесу (e_x) та їх середніми квадратичними відхиленнями (S_{a_s} , S_{e_x}).
2. Вперше у науковий обіг математичних методів у біології введено означення ступеня відповідності (невідповідності) вибіркового (емпіричного) розподілу теоретичному розподілу за нормальним законом Гаусса за критеріями омега-квадрат (ω^2) та хі-квадрат (χ^2) Пірсона.
3. Показано, що емпіричний (вибірково) просторовий розподіл числа особин кедрів та ялини чорнично-зеленомохової та сфагнової структур для схем об'єднання вихідних пробних площ за схемою 1 і 2 та розподіл чисел – аналогів особин в математичній моделі, що створена за таблицею випадкових чисел, за кожною системою спостережень (пробною площею), підпорядкований теоретичному нормальному закону розподілу Гаусса з рівнем значущості від $\alpha = 0,01$ до $\alpha = 0,77$ за критерієм ω^2 .

Література

1. Сіренко О. Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 1. Постановка завдання / О. Г. Сіренко, О. В. Кузишин // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Серія Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І. Я., 2008. – Вип. X. – С. 86-95: іл. 4. – Бібліогр.: с. 94 – 95 (16 назв).
2. Жилияев Г. Г. Структура популяцій рідкісних видів флори Карпат / Г. Г. Жилияев, Ю. Й. Кобів, М. М. Мамчур. – К.: Наукова думка, 1998. – с. 101-119: іл.
3. Анализ структуры древесных ценозов / А. И. Бузыкин, В. Л. Гавриков, О. П. Секретенко, Р. Г. Хлебопрос; Под ред. Д. М. Киреева. – Новосибирск: Наука. 1985. – 95 с.: ил.
4. Злобин Ю. А. Принципы и методы изучения ценологических популяций растений / Ю. А. Злобин. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1989. – 148 с.: ил.
5. Дідух Я. П. Популяційна екологія / Я. П. Дідух. – К.: Фітосоціоцентр, 1998. – 192 с.: іл., табл.
6. Гиляров А. М. Популяционная экология / А. М. Гиляров. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1990. – 192 с.: ил., табл.
7. Сіренко О. Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 2. Статистичні характеристики. Дисперсійний аналіз (статистична рівність ряду генеральних дисперсій) / О. Г. Сіренко, О. В. Кузишин // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Серія Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І. Я., 2008. – Вип. X. – С. 95 – 113: іл. 1, табл. 6. – Бібліогр.: с. 112 – 113 (34 назви).
8. Сіренко О. Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 3. Статистичні характеристики. Кореляційний та регресійний аналізи / О. Г. Сіренко, О. В. Кузишин, Л. Я. Мідак // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Серія Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І. Я., 2008. – Вип. XI. – С. 76-89: іл. 4, табл. 7. – Бібліогр.: 89 с. (15 назв).
9. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. 2 изд. – К.: Техніка, 1977. – 768 с.: ил., табл. – Библиогр. после гл. – Предмет. указат.: с. 752-764.
10. Корн Г. Справочник математика для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Пер. с 2^{го} амер. издания И. Г. Арамановича, А. М. Березмана, И. А. Вайнштейна и др. / Под общ. ред. И. Г. Арамановича. – М.: Наука, 1978. – 832 с.: ил., табл. – Библиогр. к гл.: с. 796-800 (183 назви). – Указат. обознач.: с. 801-803. – Предмет. указат.: с. 804-831.
11. Неділько С. А. Математичні методи в хімії: підручник [для студ. хім. спеціал. вищ. навч. закладів] / Сергій Неділько; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 1 / 11-1536 від 13.04.2004 р.]. – К.: Либідь, 2005. – 256 с.: іл. – Завдання для самостійн. роботи та бібліогр. в кінці розд. – ISBN 966 – 06 – 03843.

12. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний / Михаил Никитович Степнов. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 назв.).
13. Венецкий И.Г. Теория вероятностей и математическая статистика / И.Г. Венецкий, Г.С. Кильдишев. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Статистика, 1975. – 264 с.: ил., табл. – Приложения: с. 255-264 (9 табл.).
14. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник для самост. вивчення дисц. [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / А.Б. Волощенко, І.А. Джалладова; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 14 / 18.2-613 від 22.03.2002 р.]. – К.: Київ. Нац. економ. ун-т, 2003. – 256 с.: ил., табл. – Приклади розв. завдань і вправи для самост. розв'язання в кінці розд. – Блочно-модул. контроль: с. 183 – 203 (9 варіантів). – Відповіді: с. 204 – 216. – Библиогр.: с. 217 (18 назв.). – Додатки: с. 218 – 254 (8 табл.). – ISBN 966 – 574 – 459– 3.
15. Бендат Дж.С. Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В. Матушевского, В.Е. Привальского; под ред. И.Н. Коваленко. – М.: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод за изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).
16. Зажигаев Л.С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л.С. Зажигаев, А.А. Кишьян, Ю.И. Романиков. – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.: ил., табл. – Приложение: с. 144-229 (16 табл.). – Библиогр.: с. 230-231.

Стаття поступила до редакції 2.07.2008 р.; прийнята до друку 15.07.2008 р.

Сіренко О.Г. – провідний інженер відділу природної флори;

Кузишин О.В. – асистент кафедри теоретичної і прикладної хімії, магістр.

Мідак Л.Я. – кандидат хімічних наук, доцент кафедри теоретичної і прикладної хімії.

Рецензент: кандидат хімічних наук Татарчук Т.Р., доцент кафедри теоретичної і прикладної хімії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

УДК 62.50; 57.087.1

МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ОСОБИН НА ПРОБНИХ ПЛОЩАХ: 5. СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ: СТАТИСТИЧНА РІВНІСТЬ РЯДУ МАТЕМАТИЧНИХ СПОДІВАНЬ ОСОБИН СОСНИ КЕДРОВОЇ ЄВРОПЕЙСЬКОЇ (*PINUS CEMBRA L.*) ТА ЯЛИНИ ЗВИЧАЙНОЇ (*PICEA ABIES*)

О.Г. Сіренко¹, О.В. Кузишин²

¹Національний ботанічний сад ім. М.М. Гришка Національної Академії Наук України,
вул. Тімірязєвська, 1, Київ, 01014, Україна

²Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76025, Україна

*Приведені статистичні характеристики просторового розподілу особин *Pinus cembra L.* та *Picea abies* на пробних площах, закладених за двома схемами для чорнично-зеленомохової (асоціація I) та сфатнової (асоціація II) структур. Виявлені кореляційні зв'язки між параметрами просторового розподілу особин. Обґрунтовано надійність визначення закону просторового розподілу особин за показником ступеня просторової агрегації та інших показників. Показана можливість опису просторового розподілу особин за нормальним законом Гаусса.*

Ключові слова: *Pinus cembra L.*, кедр, *Picea abies*, ялина, пробна площа, елементарна комірка, асоціація, особина, середнє арифметичне, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, ступінь просторової агрегації, початковий момент, центральний момент, показник асиметрії, показник ексцесу, вибіркова сукупність, генеральна сукупність, коефіцієнт кореляції, нормальний розподіл Гаусса.

*Sirenko O.H., Kuzyshyn O.V. The models of species' distribution on the test area: statistic characteristics, dispersive analysis of general average of *Pinus cembra L.* and *Picea abies* species. Statistic characteristics of steric distribution of cedar and spruce on the test areas are illustrated. The correlation relation of steric distribution of species has been found. The reliability of determining the law of steric distribution of species with the degree of steric aggregation has been proved. Possibility of description of steric distribution of species with normal Gauss law is shown.*

Key words: *Pinus cembra L.*, cedar, *Picea abies*, spruce, test area, elementary unit, association, species, average, variance, root-mean-square deviation, variation coefficient, degree of steric aggregation, initial moment, central moment, asymmetry factor, excess factor, random set, correlation coefficient, normal Gauss distribution.