

МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ОСОБИН НА ПРОБНИХ ПЛОЩАХ: 3. СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ ТА РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗИ

О.Г. Сіренко¹, О.В. Кузишин², Л.Я. Мідак²

¹Національний ботанічний сад ім. М.М. Гришка Національної Академії Наук України,
вул. Тімірязєвська, 1, Київ, 01014, Україна

²Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76025, Україна

Вступ

Приведені статистичні характеристики просторового розподілу ялини особин *Pinus cembra* L. та *Picea abies* на пробних площах, закладених за двома схемами для чорнично-зеленомохової (асоціація I) та сфатнової (асоціація II) структур. Виявлені кореляційні зв'язки між параметрами просторового розподілу особин. Обґрунтовано надійність визначення закону просторового розподілу особин за показником ступеня просторової агрегації та інших показників. Показана можливість опису просторового розподілу особин за нормальним законом Гаусса.

Ключові слова: *Pinus cembra* L., кедр, *Picea abies*, ялина, пробна площа, елементарна комірочка, асоціація, особина, середнє арифметичне, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, ступінь просторової агрегації, початковий момент, центральний момент, показник асиметрії, показник ексцесу, вибіркова сукупність, генеральна сукупність, коефіцієнт кореляції, нормальний розподіл Гаусса.

Sirenko O.H., Kuzyshyn O.V. The models of species' distribution on the test area: statistic characteristics, correlative and regressive analysis. Statistic characteristics of steric distribution of cedar and spruce on the test areas are illustrated. The correlation relation of steric distribution of species has been found. The reliability of determining the law of steric distribution of species with the degree of steric aggregation has been proved. Possibility of description of steric distribution of species with normal Gauss law is shown.

Key words: *Pinus cembra* L., cedar, *Picea abies*, spruce, test area, elementary unit, association, species, average, variance, root-mean-square deviation, variation coefficient, degree of steric aggregation, initial moment, central moment, asymmetry factor, excess factor, random set, correlation coefficient, normal Gauss distribution.

Вступ

Відомо [1-5], що за показники ступеня просторового розподілу особин на пробних площах приймають:

- показники подібності популяцій [1];
- показники фенетичної подібності [1];
- показники радіальної функції [2], за допомогою яких визначають моделі випадкового, групового та рівномірного (регулярного) розподілів на колівій пробній площі;
- показник ступеня просторової агрегації особин ξ на квадратній пробній площі як відношення дисперсії до середньої величини, при цьому при дійсно випадковому просторовому розподілі цей розподіл визначається за законом Пуассона для дискретних випадкових величин, коли дисперсія чисельно дорівнює середньому, а показник $\xi=1$, відхилення ξ від 1 приводить до моделі регулярного (рівномірного) ($\xi < 1$), або групового (плямистого, агрегаційного, контагіозного) ($\xi > 1$) розподілів [4,5].

Недоліки застосування показників радіальних функцій та ступеня просторової агрегації ξ особин на пробних площах для визначення моделей розподілу проаналізовані в [6], принаймні правдивість показника ξ у визначенні моделі просторового розподілу особин визначається лінійною залежністю дисперсії особин від величини пробної площі або середньої особин та оцінки за вибіркоvim показником генерального показника.

Мета роботи в цілому полягала в тому, щоби за результатами дисперсійного аналізу виявити зв'язок між параметрами просторового розподілу особин на пробних площах, придатність показника ступеня просторової агрегації особин ξ для визначення моделі просторового розподілу особин ялини та кедрю та використання моделі нормального розподілу Гаусса для опису цього розподілу.

У [7] приведені результати розрахунків числових статистичних характеристик просторового розподілу особин ялини та кедрю на сукупних пробних площах, закладених за схемами 1 і 2 для асоціацій I і II [7, табл. 1-4], а результати розрахунків статистичних характеристик сукупних пробних площ для ялини та кедрю, утворених за схемою 2 за таблицею випадкових чисел від 0 до 22 (для ялини) та 1-21 (для кедрю) для

моделі асоціації I, зведені в табл. 5 і 6 [7]. Ці результати були використані в роботі для кореляційного та регресійного аналізів. У роботі [7] за критеріями Фішера, Кохрана та Бартлета показано, що ряди вибірових дисперсій особин кедр та ялини на сукупних пробних площах однорідні, а відповідні ряди генеральних дисперсій рівні, що дозволяє обгрунтовано проводити подальший статистичний аналіз.

Мета цієї частини роботи полягала в установленні щільності лінійного і нелінійного зв'язків за допомогою кореляційного та регресійного аналізів між вибіровими числовими характеристиками $[S, S^2, \left(\frac{S}{\bar{x}}\right), \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right), \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2]$ просторового розподілу особин ялини звичайної (далі ялини) та сосни кедрової європейської (далі кедр) асоціації I на сукупних пробних площах, закладених за схемами 1 і 2 (рис. 1 [7]) та за таблицею випадкових чисел та розмірами пробних площ F і середньою \bar{x} , між числовими характеристиками \bar{x} , $S, S^2, \left(\frac{S}{\bar{x}}\right), \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right), \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2$ двох схем 1 і 2 (рис. 1 [7]), особин ялини та кедр, схемою 2 дослідів та схемою 2 моделі випадкових чисел, двох математичних моделей (ялини та кедр) за таблицею випадкових чисел, двох асоціацій I і II (чорнично-зеленомохової та сфагнової структури), де S – середнє квадратичне відхилення; S^2 – дисперсія; \bar{x} – середнє арифметичне.

I. Експериментальна частина

1. Кореляційний аналіз

1.1. За результатами [7] шукали лінійний кореляційний зв'язок між величинами:

а) $S^2 \sim F; S \sim F; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right) \sim F; \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right) \sim F; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2 \sim F$ (табл. 1); б) $S^2 \sim \lg F; S^2 \sim \ln F; S \sim \lg F; S \sim \ln F; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right) \sim \lg F; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right) \sim \ln F; \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right) \sim \lg F; \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right) \sim \ln F; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2 \sim \lg F; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2 \sim \ln F$ (табл. 1); в) $\bar{x} \sim S^2; \bar{x} \sim S; \bar{x} \sim \left(\frac{S}{\bar{x}}\right); \bar{x} \sim \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right); \bar{x} \sim \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2$ (табл. 1); г) $\bar{x}_1 \sim \bar{x}_2; S_1^2 \sim S_2^2; S_1 \sim S_2; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_1 \sim \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_2; \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right)_1 \sim \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right)_2; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_1^2 \sim \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_2^2$ (табл. 3), де індекси 1 і 2 – номери схем об'єднання вихідних базових пробних площ (рис. 1 [7]); г) $\bar{x}_я \sim \bar{x}_к; S_я^2 \sim S_к^2; S_я \sim S_к; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_я \sim \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_к; \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right)_я \sim \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right)_к; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_я^2 \sim \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_к^2$ (табл. 4), де індекси я – ялина, к – кедр; д) $\bar{x}_I \sim \bar{x}_{II}; S_I^2 \sim S_{II}^2; S_I \sim S_{II}; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_I \sim \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_{II}; \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right)_I \sim \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right)_{II}; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_I^2 \sim \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)_{II}^2$ (табл. 5), де I – асоціація I (чорнично-зеленомохова структура); II – асоціація II (сфагнова структура).

Кореляційний аналіз (процедура розрахунків):

1.2. Вибірковий коефіцієнт кореляції r між випадковими величинами x і y розраховували за [8, 9]:

$$r = \frac{m_{1/1}}{S_x \cdot S_y} \quad (1)$$

$$\text{де } m_{1/1} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] = \frac{1}{k-1} \left[\sum_{i=1}^k (x_i y_i) - k \bar{x} \bar{y} \right] \quad (2)$$

вибірковий змішаний центральний момент другого порядку:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{k-1} \left[\sum_{i=1}^k (x_i^2) - k \bar{x}^2 \right]} \quad (3)$$

вибіркове середнє квадратичне відхилення для випадкової величини x ;

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{k-1} \left[\sum_{i=1}^k (y_i^2) - k \bar{y}^2 \right]} \quad (4)$$

вибіркове середнє квадратичне відхилення для випадкової величини y .

У кінцевому вигляді формула для розрахунку вибіркового коефіцієнта кореляції набула вигляду:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i y_i) - k\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^k (x_i^2) - k\bar{x}^2 \right] \left[\sum_{i=1}^k (y_i^2) - k\bar{y}^2 \right]}} \quad (5)$$

За вибіркоким коефіцієнтом кореляції r давали оцінку генеральному коефіцієнту кореляції ρ , визначену за [8-10]:

$$r \rightarrow \rho = \frac{M_{1/1}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (6)$$

де $M_{1/1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) \varphi(x, y) dx dy$ – генеральний змішаний центральний момент другого порядку; μ_x, μ_y

– математичні сподівання для випадкових величин x і y відповідно, визначених за [8]; σ_x, σ_y – генеральні середні квадратичні відхилення для випадкових величин x і y відповідно, визначених за [8]; $\varphi(x, y)$ – щільність двомірного розподілу x і y [8].

1.3. Так як обсяг виборок був обмежений ($N < 40-60$), то розподіл вибіркового коефіцієнта кореляції r буде суттєво відрізнятися від нормального закону розподілу Гаусса [8], то для перевірки нульової гіпотези рівності нулю генерального коефіцієнта кореляції $H_0: \rho = 0$ про відсутність лінійної кореляції між x і y і побудови довірчих інтервалів для генерального коефіцієнта кореляції ρ використали перетворення Фішера [8]:

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}. \quad (7)$$

Тут за [8] розподіл випадкової величини z добре осереднюється нормальним законом Гаусса з математичним сподіванням [8]:

$$\mu_z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(k-1)} \quad (8)$$

та середнім квадратичним відхиленням [8]:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{k-3}}. \quad (9)$$

1.4. Межі довірчого інтервалу для коефіцієнта кореляції при обмеженому обсязі вибірки визначала за перетворенням Фішера, будуючи спочатку довірчі інтервали для μ_z , визначаючи довірчу ймовірність [8]:

$$P \left[\left(Z - Z_T \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2} \right\} \right) \sigma_z < \mu_z < \left(Z + Z_T \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2} \right\} \right) \sigma_z \right] = 1 - \alpha, \quad (10)$$

$$\text{тобто } P \left[Z_1 < \mu_z < Z_2 \right] = 1 - \alpha, \text{ де } Z_1 = Z - Z_T \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2} \right\} \sigma_z; Z_2 = Z + Z_T \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2} \right\} \sigma_z, \quad (11)$$

а потім довірчі інтервали для ρ , визначаючи довірчу ймовірність [8]:

$$P \left[r_1 < \rho < r_2 \right] = 1 - \alpha, \quad (12)$$

$$\text{де } r_1 = \frac{\exp(2Z_1) - 1}{\exp(2Z_1) + 1}; r_2 = \frac{\exp(2Z_2) - 1}{\exp(2Z_2) + 1}. \quad (13)$$

1.5. Для порівняння двох вибірових коефіцієнтів кореляції висували нульову гіпотезу $H_0: \rho_1 = \rho_2$ про статистичну рівність генеральних коефіцієнтів кореляції для двох виборок. Перевірка H_0 полягала у розрахунку Z_1 і Z_2 за [8]:

$$Z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_1}{1-r_1}; Z_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_2}{1-r_2}; \quad (14)$$

та розрахунку:

$$Z_p = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\frac{1}{k_1 - 3} + \frac{1}{k_2 - 3}}} \right|. \quad (15)$$

При виконанні нерівності $|Z_p| < Z_T \left\{ p = 1 - \frac{\alpha}{2} \right\}$, що знайдена для ймовірності $p = (1 - \alpha/2)$, гіпотезу H_0 про рівність коефіцієнтів кореляції приймають з ймовірністю $P = 1 - \alpha$, а при виконанні нерівності $|Z_p| \geq Z_T \left\{ p = 1 - \frac{\alpha}{2} \right\}$ гіпотезу H_0 відкидають з $\alpha = 1 - P$, тобто між генеральними коефіцієнтами ρ_1 і ρ_2 , які оцінюють за r_1 і r_2 , існує суттєва статистична різниця.

1.6. При обсязі виборки $N > 40-60$ та $\rho \neq 1$ (а в окремих випадках і для $N < 40-60$), враховуючи, що розподіл вибіркового коефіцієнта кореляції підпорядкований нормальному закону розподілу Гаусса [8] з параметрами: $\mu_r = \rho$;

$$\sigma_r = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{N-1}}. \quad (16)$$

Тоді величина [8]

$$z = \frac{r-\rho}{\sigma_r} = \frac{r-\rho}{1-\rho^2} \sqrt{N-1} \quad (17)$$

розподілена нормально з параметрами: $\mu_r = 0$; $\sigma_r^2 = 1$. Замінивши в (16) σ_r на S_r , отримаємо вибіркоче середнє квадратичне відхилення [8]:

$$S_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{N-1}}, \quad (18)$$

тоді отримаємо за [8] t-розподіл Стьюдента. Перевірка $H_0: \rho = 0$ зводиться до розрахунку:

$$t_p = \frac{r}{1-r^2} \sqrt{N-2}. \quad (19)$$

Якщо $|t_p| \leq t_{\alpha} = t_{\alpha} \{ \alpha, f = N - 2 \}$ [10-12], то $H_0: \rho = 0$ приймають з

$P = 1 - \alpha$ (відсутня лінійна кореляція), а якщо $|t_p| > t_{\alpha}$, то $H_0: \rho = 0$ відкидають з $P = 1 - \alpha$ (тобто лінійна кореляція є). Довірча ймовірність та довірчий інтервал для генерального коефіцієнта кореляції будуть такі:

$$P[r - t_{\alpha} \{ \alpha, f = N - 2 \} \cdot S_r < \rho < r + t_{\alpha} \{ \alpha, f = N - 2 \} \cdot S_r] = 1 - \alpha \quad (20)$$

2. Регресійний аналіз

2.1. Рівняння зв'язку між випадковими величинами x і y знаходили за:

а) результатами кореляційного аналізу (лінійний зв'язок) [8]:

$$y = \bar{y} + r \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x}), \quad \text{або} \quad (21)$$

$$x = \bar{x} + r \frac{S_x}{S_y} (y - \bar{y}); \quad (22)$$

б) методом найменших квадратів (МНК): виходячи з квадратів відхилень експериментальних даних від розрахованих за моделлю для i -тої точки [13]:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min, \quad (23)$$

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i, \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^N [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2 \rightarrow \min. \quad (25)$$

Знайдемо мінімум функції:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial b_0} = 0; \\ \frac{\partial y}{\partial b_1} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Тоді отримаємо нормальну систему лінійних рівнянь [13]:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N [y_i - (b_0 + b_1 x_i)] = 0; \\ \sum_{i=1}^N [y_i x_i - (b_0 + b_1 x_i) x_i] = 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^N y_i = b_0 N + b_1 \sum_{i=1}^N x_i; \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i = b_0 \sum_{i=1}^N x_i + b_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{cases} \quad (27)$$

Звідки коефіцієнти рівняння [13]:

$$b_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N y_i & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix}}; \quad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N y_i x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix}} \quad (28)$$

МНК застосовували і для нелінійних рівнянь, попередньо провівши лінеаризацію.

2.2. Ступінь наближеності математичної моделі до емпіричних результатів (адекватності моделі) визначали за:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{ад}}{SS_{\{y\}}}, \text{ або } R = \sqrt{1 - \frac{S_{ад}^2}{S_{\{y\}}^2}}. \quad (29)$$

Дисперсію адекватності розраховували за формулою [14]:

$$S_{ад}^2 = \frac{SS_{ад}}{f_{ад}} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - \lambda}, \quad (30)$$

де $SS_{ад}$ – сума дисперсій адекватності; $f_{ад}$ – число ступенів вільностей при розрахунку дисперсії адекватності; y_i – експериментальний результат для i -тої точки; \hat{y}_i – значення y , що розраховано за рівнянням моделі для i -ї точки; λ – число коефіцієнтів у рівнянні моделі.

Дисперсію відновлення розраховували за формулою [14]:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N - 1} = \frac{SS_{\{y\}}}{f_{\{y\}}}, \quad (31)$$

де \bar{y} – середній результат; $f_{\{y\}}$ – число ступенів вільностей при розрахунку дисперсії відновлення; $SS_{\{y\}}$ – сума дисперсій відновлення.

Тут $0 \leq R^2 \leq 1$, $0 \leq R \leq 1$, чим ближче R^2 , R до 1, тим міцніший лінійний або нелінійний зв'язок.

II. Результати та обговорення

1. У табл. 1 приведені результати розрахунків коефіцієнта кореляції між числовими статистичними характеристиками розподілу особин ялини (табл. 1, 2, 5 [7]) та кедра (табл. 3, 4, 6 [7]) на сукупних пробних площах, що закладені для асоціації I, та розмірами пробних площ F і середнім числа особин \bar{x} для схеми 1 (дослід), схеми 2 (дослід) та схеми 2 (за таблицею випадкових чисел). У табл. 1 приведені також результати розрахунку вибіркової випадкової величини z [8]. Перевіряли нульову гіпотезу ($H_0: \rho = 0$) про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції, порівнюючи значення розрахункової величини перетворення Фішера $|z|$ з теоретичним співвідношенням $(z_p \cdot \sigma_z) = (z_T \{1 - \frac{\alpha}{2}\} \cdot \sigma_z)$ для довірчої ймовірності $P = 1 - \alpha$ (рівня значущості при прийнятті рішення відносно H_0 $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$). Квантиль нормованого нормального розподілу $(z_T \{1 - \frac{\alpha}{2}\} = z_p)$ знаходили для ймовірностей $P = 1 - \alpha/2 = 0,995$ та $P = 0,975$ за [8, табл. I] та [15, табл. II]. Якщо виявилось, що виконуються умови: $|z| \leq (z_T \{1 - \frac{\alpha}{2}\} \cdot \sigma_z)$, то $H_0: \rho = 0$ приймали (відсутній лінійний кореляційний зв'язок) з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$ (з ймовірністю $P=0,99$ та $P=0,95$); якщо виявилось, що виконувалися умови: $|z| > (z_T \{1 - \frac{\alpha}{2}\} \cdot \sigma_z)$, то $H_0: \rho = 0$ відкидали (є надійний лінійний кореляційний зв'язок) з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$ (з ймовірністю $P=0,99$ та $P=0,95$).

2. Введемо у науковий обіг математичних методів у біології означення ступеня нелінійності (ступеня лінійності) кореляційного зв'язку за показником Фішера z за співвідношеннями:

$$\xi_{\alpha} = \frac{(z_T \sigma_z)}{|z|} = \frac{(z_{\alpha} \sigma_z)}{|z|}; \left(\xi_{\alpha} = \frac{|z|}{(z_T \sigma_z)} = \frac{|z|}{(z_{\alpha} \sigma_z)} \right). \quad (32)$$

3. Для надійності висновків при прийнятті або відкиданні H_0 при малих обсягах вибірки та особливо для асоціації II ($k = 3$) перевірку $H_0: \rho = 0$ на основі даних вибірки здійснювали також за теоретичним критичним значенням коефіцієнта кореляції (нижньої межі довірчої ділянки), перевіряючи для $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$ (ймовірностей $P=0,99$ та $P=0,95$) за [13, табл. 2.1] виконання умов: якщо $|r| \leq r_{кр.} \left\{ p = 1 - \frac{\alpha}{2}; f = k - 2 \right\} = r_{\alpha}$, то нульову гіпотезу H_0 приймали (відсутній лінійний кореляційний зв'язок) з $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$; якщо $|r| > r_{кр.} \left\{ p = 1 - \frac{\alpha}{2}; f = k - 2 \right\} = r_{\alpha}$, то H_0 відкидали (є надійний лінійний кореляційний зв'язок) з $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$.

4. Введемо у науковий обіг математичних методів у біології означення ступеня нелінійності (ступеня лінійності) кореляційного зв'язку за показником критичного значення коефіцієнта кореляції за співвідношеннями:

$$\xi_{\alpha} = \frac{r_{кр}}{|r|} = \frac{r_{\alpha}}{|r|}; \left(\xi_{\alpha} = \frac{|r|}{r_{кр}} = \frac{|r|}{r_{\alpha}} \right) \quad (33)$$

Введемо у науковий обіг математичних методів в біології означення ступеня нелінійності (ступеня лінійності) кореляційного зв'язку за критерієм Стьюдента за співвідношеннями:

$$\xi_{\alpha} = \frac{t_{\alpha}}{|t_p|} = \frac{t_T}{|t_p|}; \left(\xi_{\alpha} = \frac{|t_p|}{t_{\alpha}} = \frac{|t_p|}{t_T} \right) \quad (34)$$

Таблиця 1. Коефіцієнти кореляцій між числовими статистичними характеристиками просторового розподілу особин ялини та кедра на сукупних пробних площах, що закладені для асоціації I за схемою 1 і 2, та розмірами пробних площ і середньої кількості особин на площі.

Кореляційний зв'язок між величинами	Схема 1 (дослід)				Схема 2 (дослід)				Схема 2 (математична модель; за таблицею випадкових чисел)			
	r	z	$\xi_{0,01}$	$\xi_{0,05}$	r	z	$\xi_{0,01}$	$\xi_{0,05}$	r	z	$\xi_{0,01}$	$\xi_{0,05}$
Ялина (асоціація I)												
$S^2 \sim F$	0,348	0,363	2,90	2,20	0,810	1,127	1,07	1,41	-0,685	-0,838	1,09	1,21
$S \sim F$	0,314	0,325	3,24	2,46	0,816	1,145	1,09	1,43	-0,699	-0,865	1,05	1,25
$(S/\bar{x}) \sim F$	-0,820	-1,157	1,10	1,45	0,535	0,597	1,76	1,34	-0,762	-1,001	1,10	1,44
$(S^2/\bar{x}) \sim F$	-0,563	-0,637	1,65	1,26	0,756	0,987	1,07	1,23	-0,754	-0,982	1,08	1,42
$(S/\bar{x})^2 \sim F$	-0,816	-1,145	1,09	1,43	0,516	0,571	1,84	1,40	-0,709	-0,885	1,03	1,28
$S^2 \sim \lg F, \ln F$	0,317	0,328	3,21	2,44	0,830	1,188	1,13	1,49	-0,529	-0,589	1,55	1,18
$S \sim \lg F, \ln F$	0,297	0,306	3,44	2,61	0,849	1,253	1,19	1,57	-0,533	-0,594	1,54	1,17
$(S/\bar{x}) \sim \lg F, \ln F$	-0,828	-1,181	1,12	1,48	0,686	0,840	1,25	1,05	-0,872	-1,341	1,47	1,94
$(S^2/\bar{x}) \sim \lg F, \ln F$	-0,494	-0,541	1,95	1,48	0,816	1,145	1,09	1,43	-0,798	-1,093	1,20	1,58
$(S/\bar{x})^2 \sim \lg F, \ln F$	-0,815	-1,142	1,08	1,43	0,660	0,793	1,33	1,01	-0,845	-1,238	1,36	1,79
$\bar{x} \sim S^2$	0,259	0,265	3,97	3,02	0,951	1,842	1,75	2,30	-0,560	-0,633	1,44	1,09
$\bar{x} \sim S$	0,230	0,234	4,50	3,42	0,941	1,747	1,70	2,18	-0,563	-0,637	1,43	1,09
$\bar{x} \sim (S/\bar{x})$	-0,838	-1,214	1,15	1,52	0,542	0,607	1,73	1,32	-0,952	-1,853	2,03	2,67
$\bar{x} \sim (S^2/\bar{x})$	-0,615	-0,717	1,47	1,12	0,869	1,329	1,26	1,66	-0,877	-1,363	1,49	1,97
$\bar{x} \sim (S/\bar{x})^2$	-0,818	-1,151	1,09	1,44	0,540	0,604	1,74	1,33	-0,942	-1,756	1,93	2,53
Кедр (асоціація I)												
$S^2 \sim F$	0,768	1,015	1,04	1,27	0,858	1,286	1,22	1,61	-0,518	-0,574	1,59	1,21
$S \sim F$	0,807	1,118	1,06	1,40	0,851	1,260	1,20	1,58	-0,532	-0,593	1,54	1,17
$(S/\bar{x}) \sim F$	-0,392	-0,414	2,54	1,93	0,637	0,753	1,40	1,06	-0,611	-0,711	1,28	1,03
$(S^2/\bar{x}) \sim F$	0,446	0,480	2,19	1,67	0,816	1,145	1,09	1,43	-0,579	-0,661	1,34	1,05
$(S/\bar{x})^2 \sim F$	-0,459	-0,496	2,12	1,61	0,639	0,756	1,39	1,06	-0,562	-0,636	1,43	1,09
$S^2 \sim \lg F, \ln F$	0,701	0,869	1,21	1,09	0,879	1,371	1,30	1,71	-0,727	-0,922	1,01	1,33
$S \sim \lg F, \ln F$	0,732	0,933	1,13	1,17	0,888	1,412	1,34	1,77	-0,737	-0,944	1,04	1,36
$(S/\bar{x}) \sim \lg F, \ln F$	-0,549	-0,617	1,71	1,30	0,810	1,127	1,07	1,41	-0,876	-1,358	1,49	1,96
$(S^2/\bar{x}) \sim \lg F, \ln F$	0,373	0,392	2,68	2,04	0,906	1,505	1,43	1,88	-0,840	-1,221	1,34	1,76
$(S/\bar{x})^2 \sim \lg F, \ln F$	-0,626	-0,735	1,43	1,09	0,802	1,104	1,05	1,38	-0,844	-1,235	1,35	1,78
$\bar{x} \sim S^2$	0,803	1,107	1,05	1,38	0,099	0,099	10,6	8,08	-0,666	-0,804	1,13	1,16
$\bar{x} \sim S$	0,851	1,260	1,20	1,58	0,035	0,035	30,1	22,9	-0,673	-0,816	1,12	1,18
$\bar{x} \sim (S/\bar{x})$	-0,288	-0,296	3,56	2,70	-0,602	-0,696	1,51	1,15	-0,938	-1,721	1,89	2,48
$\bar{x} \sim (S^2/\bar{x})$	0,515	0,570	1,85	1,40	-0,210	-0,213	4,94	3,76	-0,875	-1,354	1,48	1,95
$\bar{x} \sim (S/\bar{x})^2$	-0,361	-0,378	2,79	2,12	-0,574	-0,653	1,61	1,23	-0,924	-1,616	1,77	2,33

5. Табличні значення z_p та розрахункові σ_z та ($z_p \sigma_z$) дорівнювали:

а) для асоціації I за схемою 1 і 2 (експеримент = екс.) (табл. 1; 3; 4): $k = 9$, $\sigma_z = 0,4082$; $z_{0,995} = 2,58$; $z_{0,975} = 1,96$; для $\alpha = 0,01$ ($z_{0,995} \cdot \sigma_z$) = 1,053;

для $\alpha = 0,05$ ($z_{0,975} \cdot \sigma_z$) = 0,800; $k = 9$, $f = 7$; для $\alpha = 0,01$; $r_{кр.} = r_{0,01} = 0,800$; для $\alpha = 0,05$ $r_{кр.} = r_{0,05} = 0,666$.

б) для асоціації I за схемою 2 (за таблицею випадкових чисел = т.в.ч.) (табл. 1; 5): $k = 11$, $\sigma_z = 0,3536$; $z_{0,995} = 2,58$; $z_{0,975} = 1,96$; для $\alpha = 0,01$ ($z_{0,995} \cdot \sigma_z$) = 0,912; для $\alpha = 0,05$ ($z_{0,975} \cdot \sigma_z$) = 0,693; $k = 11$, $f = 9$; для $\alpha = 0,01$ $r_{кр.} = r_{0,01} = 0,740$; для $\alpha = 0,05$ $r_{кр.} = r_{0,05} = 0,602$.

6. У табл. 1, 3 – 5 жирним шрифтом показані: значущі коефіцієнти кореляції з $\alpha = 0,01$ та 0,05 або лише з $\alpha = 0,05$ і відповідні розрахункові z та ступені лінійності кореляційних зв'язків з $\alpha = 0,01$ і 0,05, або лише з $\alpha = 0,05$; нежирним шрифтом показані незначущі коефіцієнти кореляції з $\alpha = 0,01$ і 0,05 або лише з $\alpha = 0,01$ і відповідні

розрахункові з та ступені нелінійності кореляційних зв'язків з $\alpha=0,01$ і $0,05$, або лише з $\alpha=0,01$. Є статистичні підстави перевірки значущості r за $r_{кр}$, якщо ступінь нелінійності за z : $\xi_{0,05} \leq 1,10$ при $\xi_{0,01} > 1(\rho=0)$ та $\xi_{0,05} > 1(\rho=0)$, а також $\xi_{0,01} \leq 1,10$ при $\xi_{0,01} > 1(\rho=0)$, $\xi_{0,05} > 1(\rho \neq 0)$ та при ступені лінійності $\xi_{0,01} \leq 1,05$ при $\xi_{0,01} > 1(\rho \neq 0)$ і $\xi_{0,05} > 1(\rho \neq 0)$. Ця перевірка привела до таких результатів (табл. 2): статистичні висновки співпадають при оцінках значущості коефіцієнтів кореляції за z та $r_{кр}$, окрім зв'язків для кедр: $S^2 \sim \bar{x}$ (схема 1, асоціація I); $(S/\bar{x})^2 \sim \lg F$, $\ln F$ (схема 2, асоціація I); $S^2 \sim \lg F$, $\ln F$ (схема 2, асоціація I т.в.ч.); $S \sim \lg F$, $\ln F$ (схема 2, асоціація I т.в.ч.) – за z є лінійний зв'язок для $\alpha=0,01$ і $\alpha=0,05$; за $r_{кр}$ – він відсутній для $\alpha=0,01$ і існує для $\alpha=0,05$.

Таблиця 2. Перевірка значущості коефіцієнтів кореляції та ступеня нелінійності (лінійності) за z та $r_{кр}$ (за результатами табл. 1) для асоціації I.

Особина	Схема	Кореляційний зв'язок	z	$(z_p \cdot \sigma_z)$	ξ_α	ξ_α	Статистичний висновок	r	$r_{кр}$	ξ_r	ξ_r	Статистичний висновок	Приймання (+) або відкидання (-) H_0	
													$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$
кедр	1	$(S/\bar{x})^2 \sim \lg F$	0,735	0,80	1,09	0,92	$\rho=0$	0,626	0,666	1,06	0,94	$\rho=0$	+	+
кедр	1	$S^2 \sim \bar{x}$	1,107	1,053	0,95	1,05	$\rho \neq 0$	0,803	0,80	1,00	1,00	$\rho=0$	Z: - $r_{кр}$: +	Z: - $r_{кр}$: -
ялина	2	$(S^2/\bar{x}) \sim F$	0,987	1,053	1,07	0,94	$\rho=0$	0,756	0,80	1,06	0,95	$\rho=0$	+	-
ялина	2	$(S/\bar{x}) \sim \lg F$	0,840	0,80	0,95	1,05	$\rho \neq 0$	0,686	0,666	0,97	1,03	$\rho \neq 0$	+	-
ялина	2	$(S/\bar{x})^2 \sim \lg F$	0,793	0,80	1,01	0,99	$\rho=0$	0,660	0,666	1,01	0,99	$\rho=0$	+	+
кедр	2	$(S/\bar{x}) \sim F$	0,753	0,80	1,06	0,94	$\rho=0$	0,637	0,666	1,05	0,96	$\rho=0$	+	+
кедр	2	$(S/\bar{x})^2 \sim F$	0,756	0,80	1,06	0,95	$\rho=0$	0,639	0,666	1,04	0,96	$\rho=0$	+	+
кедр	2	$(S/\bar{x})^2 \sim \lg F$	1,104	1,053	0,95	1,05	$\rho \neq 0$	0,802	0,80	1,0	1,0	$\rho=0$	Z: - $r_{кр}$: +	Z: - $r_{кр}$: -
ялина (т.в.ч.)	2	$S^2 \sim F$	0,838	0,912	1,09	0,92	$\rho=0$	0,685	0,74	1,08	0,93	$\rho=0$	+	-
ялина (т.в.ч.)	2	$S \sim F$	0,865	0,912	1,05	0,95	$\rho=0$	0,699	0,74	1,06	0,94	$\rho=0$	+	-
ялина (т.в.ч.)	2	$(S/\bar{x})^2 \sim F$	0,885	0,912	1,03	0,97	$\rho=0$	0,709	0,74	1,04	0,96	$\rho=0$	+	-
ялина (т.в.ч.)	2	$S^2 \sim \bar{x}$	0,633	0,693	1,09	0,91	$\rho=0$	0,56	0,602	1,08	0,93	$\rho=0$	+	+
ялина (т.в.ч.)	2	$S \sim \bar{x}$	0,637	0,693	1,09	0,92	$\rho=0$	0,563	0,602	1,07	0,94	$\rho=0$	+	+
кедр (т.в.ч.)	2	$(S/\bar{x}) \sim F$	0,711	0,693	0,97	1,03	$\rho \neq 0$	0,611	0,602	0,99	1,02	$\rho \neq 0$	+	-
кедр (т.в.ч.)	2	$(S^2/\bar{x}) \sim F$	0,661	0,693	1,05	0,95	$\rho=0$	0,579	0,602	1,04	0,96	$\rho=0$	+	+
кедр (т.в.ч.)	2	$(S/\bar{x})^2 \sim F$	0,636	0,693	1,09	0,92	$\rho=0$	0,562	0,602	1,07	0,93	$\rho=0$	+	+
кедр (т.в.ч.)	2	$S^2 \sim \lg F$	0,922	0,912	0,99	1,01	$\rho \neq 0$	0,727	0,74	1,02	0,98	$\rho=0$	Z: - $r_{кр}$: +	Z: - $r_{кр}$: -
кедр (т.в.ч.)	2	$S \sim \lg F$	0,944	0,912	0,97	1,04	$\rho \neq 0$	0,737	0,74	1,0	1,0	$\rho=0$	Z: - $r_{кр}$: +	Z: - $r_{кр}$: -

7. Порівнюючи $|z|$ з $(z_p \cdot \sigma_z)$ та $|r|$ з $r_{кр}$ для $\alpha = 0,01$ і $\alpha = 0,05$ (табл. 1), можна зробити такі висновки:

1) при об'єднанні вихідних пробних площ, закладених за схемою 1 для асоціації I:

а) для особин ялини спостерігається тісний лінійний кореляційний зв'язок (із значущим коефіцієнтом кореляції в межах $|r| = 0,815 - 0,838$ зі ступенем лінійності $\xi_\alpha = 1,09 - 1,15$ для $\alpha=0,01$ та $\xi_\alpha = 1,43 - 1,52$ для $\alpha=0,05$ для таких числових статистичних характеристик розподілу:

$\left(\frac{S}{\bar{x}}\right) \sim F, \lg F, \ln F, \bar{x}; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2 \sim F, \lg F, \ln F, \bar{x}$; при цьому із зростанням $F, \lg F, \ln F, \bar{x}$ числові характеристики $\left(\frac{S}{\bar{x}}\right)$ та $\left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2$ зменшуються (r має знак «мінус»); для решти числових характеристик коефіцієнти кореляції незначущі $\xi_\alpha = 1,47 - 4,50$ для $\alpha=0,01$ та $\xi_\alpha = 1,12 - 3,42$ для $\alpha=0,05$, разом з тим можна відзначити, що показник просторової агрегації особин $\left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right)$ зменшується із зростанням сукупної пробної

Таблиця 3. Коефіцієнти кореляції між числовими статистичними характеристиками розподілу особин ялини та кедр між схемами об'єднання вихідних базових пробних площ 1 і 2, закладених для асоціації I.

Кореляційний зв'язок між величинами	r	Z	$\xi_{0,01}$	$\xi_{0,05}$	r	Z	$\xi_{0,01}$	$\xi_{0,05}$
	Схема 1 ~ 2 (дослід)				Схема 1 ~ 2 (дослід)			
	Ялина (дослід)				Кедр (дослід)			
	$\bar{x}_1 \sim \bar{x}_2$	0,904	1,494	1,42	1,87	0,189	0,191	5,51
$S^2_1 \sim S^2_2$	-0,042	-0,042	25,1	19,1	0,784	1,056	1,0	1,32
$S_1 \sim S_2$	-0,030	-0,030	35,1	26,7	0,814	1,139	1,08	1,42
$(S/\bar{x})_1 \sim (S/\bar{x})_2$	-0,477	-0,519	2,03	1,54	-0,714	-0,895	1,18	1,12
$(S^2/\bar{x})_1 \sim (S^2/\bar{x})_2$	-0,486	-0,531	1,98	1,51	0,409	0,434	2,43	1,84
$(S/\bar{x})_1^2 \sim (S/\bar{x})_2^2$	-0,373	-0,392	2,69	2,04	-0,760	-0,996	1,06	1,25

площі $F, \lg F, \ln F$ та \bar{x} . У зв'язку з тим, що спостерігається нелінійний зв'язок між $S^2 \sim F$ ($r=0,348$) з високим ступенем нелінійності $\xi_Z=2,9$ і $\xi_r=2,3$ ($\alpha=0,01$) та $\xi_Z=2,2$ і $\xi_r=1,91$ ($\alpha=0,05$) та $S^2 \sim \bar{x}$ ($r=0,259$) з високим ступенем нелінійності $\xi_Z=3,97$ і $\xi_r=3,99$ ($\alpha=0,01$) та $\xi_Z=3,02$ і $\xi_r=2,57$ ($\alpha=0,05$), то застосування вибіркового показника просторової агрегації ξ особин ялини асоціації I за схемою 1 для оцінки генерального показника E для цього випадку є ненадійним.

б) для особин кедр спостерігається тісний лінійний кореляційний зв'язок із значущим коефіцієнтом кореляції в межах $0,701 - 0,851$ зі ступенем лінійності за z_α : $\xi_\alpha=1,09 - 1,20$ для $\alpha=0,01$ та $\xi_\alpha = 1,09 - 1,58$ для $\alpha=0,05$ для таких числових статистичних характеристик розподілу: $S \sim F, \bar{x}$ (з $\alpha = 0,01$ та $\alpha=0,05$); $\lg F, \ln F$ (з $\alpha=0,05$); $S^2 \sim F, \lg F, \ln F$ (з $\alpha=0,05$), \bar{x} (з $\alpha=0,01$ та $\alpha=0,05$), при цьому із зростанням $F, \lg F, \ln F, \bar{x}$ числові характеристики S та S^2 теж зростають (r має знак «плюс»); для решти числових характеристик коефіцієнти кореляції незначущі, змінюються в межах $|r|$ від $0,288 - 0,626$ при ступені нелінійності за z_α : $\xi_\alpha = 1,04 - 3,56$ для $\alpha=0,01$ та $\xi_\alpha = 1,09 - 2,70$ для $\alpha=0,05$. Тут лінійний зв'язок між $S^2 \sim F$ та $S^2 \sim \bar{x}$ доволі щільний $r=0,768$ та $r = 0,803$

відповідно, дисперсія S^2 зростає із збільшенням сукупної пробної площі та середнього, тому $\left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right)$ буде надійною оцінкою σ^2/μ .

2) при об'єднанні вихідних пробних площ, закладених за схемою 2 для асоціації I:

а) для особин ялини спостерігається тісний лінійний кореляційний зв'язок зі значущими коефіцієнтами кореляції між такими величинами: $S^2 \sim F, \lg F, \ln F, \bar{x}$; $S \sim F, \lg F, \ln F, \bar{x}$; $\left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right) \sim \lg F, \ln F, \bar{x}$ (з $\alpha=0,01$ та $0,05$) та $\left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right) \sim F$; $\left(\frac{S}{\bar{x}}\right) \sim \lg F, \ln F$ (з $\alpha=0,05$), при цьому всі величини зростають із зростанням $F, \lg F, \ln F, \bar{x}$, а коефіцієнти кореляції змінюються в межах $|r| = 0,686 - 0,951$ зі ступенем лінійності за z_α : $\xi_\alpha = 1,07 - 1,75$ для $\alpha=0,01$ та $\xi_\alpha = 1,05 - 2,30$ для $\alpha=0,05$. Так як зв'язок $S^2 \sim F, S^2 \sim \bar{x}$ має значущий позитивний коефіцієнт кореляції з $\alpha=0,01$ та $0,05$, то вибіркового показника $\xi = S^2/\bar{x}$ буде надійною оцінкою генерального показника $E = \sigma^2/\mu$.

б) для особин кедр спостерігається тісний лінійний кореляційний зв'язок зі значущими коефіцієнтами кореляції з $\alpha=0,01$ та $0,05$ між такими величинами: $S^2 \sim F, \lg F, \ln F$; $S \sim F, \lg F, \ln F$; $\left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right) \sim F, \lg F,$

$\ln F; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right) \sim \lg F, \ln F; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2 \sim \lg F, \ln F$, при цьому всі величини зростають із збільшенням $F, \lg F, \ln F$, а коефіцієнти кореляції змінюються в межах $|r|=0,802 - 0,906$ зі ступенем лінійності $\xi_{\alpha}=1,05 - 1,43$ для $\alpha=0,01$ та $\xi_{\alpha}=1,38 - 1,88$ для $\alpha=0,05$. Тут S^2 зростає із збільшенням сукупної площі F (зв'язок $S^2 \sim F$ має високий коефіцієнт кореляції), але $S^2 \sim \bar{x}$ має $|r|=0,099$, що відбиває особливості схеми 2. Для решти величин спостерігається нелінійний зв'язок: $|r|$ змінюється в межах $0,099 - 0,639$.

3) для математичної моделі асоціації I за схемою 2, створеною за таблицею випадкових чисел:

а) для особин ялини (числа 0 – 22) спостерігається тісний лінійний зв'язок зі значущими

коефіцієнтами кореляції між такими величинами: $\left(\frac{S}{\bar{x}}\right) \sim F, \lg F, \ln F, \bar{x}; \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right) \sim F, \lg F, \ln F, \bar{x}; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2 \sim F, \lg F, \ln F, \bar{x}$ (з $\alpha=0,01$ та $0,05$); $S^2 \sim F, S \sim F$ (з $\alpha=0,05$), при цьому всі величини зменшуються із збільшенням $F, \lg F, \ln F, \bar{x}$, а коефіцієнти кореляції змінюються в межах $|r|=0,685 - 0,952$ зі ступенем лінійності $\xi_{\alpha}=1,08 - 2,03$ для $\alpha=0,01$ та $\xi_{\alpha}=1,21 - 2,67$ для $\alpha=0,05$. Тут дисперсія S^2 зменшується лінійно із зростанням сукупної площі F і нелінійно – зі збільшенням середньої \bar{x} , тому висновки про можливість застосування вибіркового показника просторової агрегації для виявлення характеру розподілу особин у разі зростання дисперсії S^2 при зростанні середньої \bar{x} не є обґрунтованими – все визначає схема об'єднання вихідних площ. Для решти величин ($S^2 \sim F, \lg F, \ln F; S \sim F, \lg F, \ln F; S^2 \sim \bar{x}; S \sim \bar{x}$) спостерігається нелінійний зв'язок: $|r|$ змінюється в межах $0,529 - 0,563$ (тут ступінь нелінійності за z_{α} $\xi_{\alpha}=1,09 - 1,55$). Коефіцієнти кореляції для всіх величин є від'ємними.

Таблиця 4. Коефіцієнти кореляції між числовими статистичними характеристиками розподілу між особинами ялини та кедра для двох схем об'єднання вихідних базових пробних площ 1 та 2, закладених для асоціації I.

Кореляційний зв'язок між величинами	r	Z	$\xi_{0,01}$	$\xi_{0,05}$	r	Z	$\xi_{0,01}$	$\xi_{0,05}$
	Ялина ~ Кедр				Ялина ~ Кедр			
	Схема 1 (дослід)				Схема 2 (дослід)			
$\bar{x}_y \sim \bar{x}_k$	0,998	3,453	3,28	4,32	0,354	0,370	2,85	2,16
$S_y^2 \sim S_k^2$	0,122	0,123	8,56	6,5	0,986	2,477	2,35	3,10
$S_y \sim S_k$	-0,022	-0,022	47,9	36,4	0,989	2,599	2,47	3,25
$(S/\bar{x})_y \sim (S/\bar{x})_k$	0,110	0,110	9,57	7,27	0,906	1,505	1,43	1,88
$(S^2/\bar{x})_y \sim (S^2/\bar{x})_k$	-0,663	-0,798	1,32	1,0	0,948	1,812	1,72	2,27
$(S/\bar{x})_y^2 \sim (S/\bar{x})_k^2$	0,166	0,168	6,27	4,76	0,884	1,394	1,32	1,74

Таблиця 5. Коефіцієнти кореляції між числовими статистичними характеристиками розподілу особин між ялиною (0-22) та кедром (0-21) за схемою об'єднання пробних площ 2 (за таблицею випадкових чисел; математичні моделі асоціації I).

Кореляційний зв'язок між величинами	r	Z	$\xi_{0,01}$	$\xi_{0,05}$	Статистичний висновок
$\bar{x}_y \sim \bar{x}_k$	0,930	1,658	1,82	2,39	$\rho \neq 0$
$S_y^2 \sim S_k^2$	0,583	0,667	1,37	1,04	$\rho = 0$
$S_y \sim S_k$	0,577	0,658	1,39	1,05	$\rho = 0$
$(S/\bar{x})_y \sim (S/\bar{x})_k$	0,911	1,533	1,68	2,21	$\rho \neq 0$
$(S^2/\bar{x})_y \sim (S^2/\bar{x})_k$	0,848	1,249	1,37	1,80	$\rho \neq 0$
$(S/\bar{x})_y^2 \sim (S/\bar{x})_k^2$	0,908	1,516	1,66	2,19	$\rho \neq 0$

б) для особин кедра (1 – 21) спостерігається тісний лінійний зв'язок зі значущими коефіцієнтами кореляції з $\alpha=0,01$ та $0,05$ між такими величинами: $S^2 \sim \lg F, \ln F; S \sim \lg F, \ln F; \left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right) \sim \lg F, \ln F, \bar{x}; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right) \sim \lg F,$

$\ln F, \bar{x}; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2 \sim \lg F, \ln F, \bar{x}$ (з $\alpha=0,01$ та $0,05$); $S^2 \sim \bar{x}; S \sim \bar{x}; \left(\frac{S}{\bar{x}}\right) \sim F$ (з $\alpha=0,05$), при цьому всі величини зменшуються при зростанні $F, \lg F, \ln F, \bar{x}$, а коефіцієнти кореляції знаходяться в межах $|r|=0,611 - 0,938$ зі ступенем лінійності $\xi_{\alpha}=1,01 - 1,89$ для $\alpha=0,01$ та $\xi_{\alpha}=1,03 - 2,48$ для $\alpha=0,05$. Тут дисперсія S^2 зменшується

нелінійно із збільшенням F та лінійно із збільшенням \bar{x} . Для решти величин ($S^2 \sim F$; $S \sim F$; $\left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right) \sim F$; $\left(\frac{S}{\bar{x}}\right) \sim F$) спостерігається нелінійний зв'язок: $|r|$ змінюється в межах 0,518 – 0,579 (тут ступінь нелінійності за z_α : $\xi_\alpha = 1,05 - 1,59$). Коефіцієнти кореляції для всіх величин є від'ємними.

8. У табл. 3 приведені коефіцієнти кореляції між \bar{x} , S^2 , S , $\left(\frac{S}{\bar{x}}\right)$, $\left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right)$, $\left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2$ для двох схем

об'єднання пробних площ, закладених для асоціації I для особин ялини і кедра окремо. Як видно з табл. 3, для особин ялин лінійний зв'язок спостерігається для величин $\bar{x}_1 \sim \bar{x}_2$ ($\xi_{0,01}=1,42$; $\xi_{0,05}=1,87$) з $\alpha=0,01$ і $\alpha=0,05$, для решти числових характеристик – нелінійна кореляція. Для особин кедра лінійний зв'язок спостерігається $S_1 \sim S_2$ з $\alpha=0,01$ і $\alpha=0,05$ та $S^2_1 \sim S^2_2$, $(S/\bar{x})_1 \sim (S/\bar{x})_2$, $(S/\bar{x})^2_1 \sim (S/\bar{x})^2_2$ з $\alpha=0,05$.

9. У табл. 4 дана оцінка лінійної кореляції між числовими характеристиками розподілу особин ялини і кедра окремо для схеми 1 і 2. Як видно з табл. 4, для схеми 1 спостерігається лише щільний зв'язок ($\xi_{0,01}=3,28$; $\xi_{0,05}=4,32$) між середніми ялини і кедра. Для схеми 2 навпаки, окрім зв'язку $\bar{x}_я \sim \bar{x}_к$, решта величин мають щільний лінійний зв'язок зі ступенем лінійності $\xi_{0,01}=1,32 - 2,47$ та $\xi_{0,05}=1,74 - 3,25$.

10. У табл. 5 дана оцінка лінійної кореляції між числовими характеристиками математичних моделей особин ялини і кедра, створених за таблицею випадкових чисел. Як видно з табл. 5, лише між дисперсіями та середніми квадратичними відхиленнями розподілу особин ялини і кедра існують нелінійні зв'язки зі ступенем нелінійності $\xi_{0,01}=1,37 - 1,39$ та $\xi_{0,05}=1,04 - 1,05$, між рештою числових характеристик спостерігається щільний лінійний зв'язок зі ступенем лінійності $\xi_{0,01}=1,37 - 1,82$ та $\xi_{0,05}=1,80 - 2,39$.

11. Порівняємо два вибіркових коефіцієнта кореляції числових характеристик S^2 та $\left(\frac{S^2}{\bar{x}}\right)$ особин

ялини і кедра асоціації I за схемою 2 дослідів та за таблицею випадкових чисел з метою перевірки нульової гіпотези про статистичну несуттєву різницю між ними, тобто рівність генеральних коефіцієнтів кореляції $H_0: \rho_1 = \rho_2$ (табл. 6).

Введемо в науковий обіг математичних методів у біології означення ступеня нерівності (рівності) двох коефіцієнтів кореляції:

$$\xi_\alpha = \frac{|z_p|}{z_{(1-\alpha/2)}}; \left(\xi_\alpha = \frac{z_{(1-\alpha/2)}}{|z_p|} \right). \quad (35)$$

Як видно з табл. 6, у якій $|z_p|$ розрахований за [8], а табличне значення квантилей нормованого нормального розподілу $Z(1 - \alpha/2)$ знайдені за [8, табл. 1] для ймовірності $P=1 - \alpha$, ($\alpha=0,01$, $P=0,99$; $\alpha=0,05$, $P=0,95$): $z_{(1-\alpha/2)}=z_{0,995}=2,58$ ($\alpha=0,01$); $z_{(1-\alpha/2)}=z_{0,975}=1,96$ ($\alpha=0,05$), для особин ялини для всіх розглянутих кореляційних зв'язків $S^2 \sim F$, $S^2 \sim \bar{x}$, $\frac{S^2}{\bar{x}} \sim F$, $\frac{S^2}{\bar{x}} \sim \bar{x}$ $|z_p| > z_{0,995}$ ($P=0,99$) та $|z_p| > z_{0,975}$ ($P=0,95$), що привело до статистичних висновків: генеральний коефіцієнт за дослідом ρ_d більше генерального коефіцієнта за таблицею випадкових чисел (т.в.ч.) ρ_b з $\alpha=0,01$ і $\alpha=0,05$; для особин кедра для кореляційних зв'язків $S^2 \sim F$, $\frac{S^2}{\bar{x}} \sim F$ $|z_p| > z_{0,995}$ ($P=0,99$) та $|z_p| > z_{0,975}$ ($P=0,95$), що підтверджує суттєву статистичну різницю між генеральними коефіцієнтами кореляції $\rho_d > \rho_b$ з $\alpha=0,01$ і $\alpha=0,05$, у той же час для зв'язку $S^2 \sim \bar{x}$ між генеральними коефіцієнтами кореляції не виявлено статистичної різниці $\rho_d = \rho_b$ з $\alpha=0,01$ і $\alpha=0,05$, аналогічно для зв'язку $\frac{S^2}{\bar{x}} \sim \bar{x}$ $\rho_d = \rho_b$ з $\alpha=0,01$, але $\rho_d < \rho_b$ з $\alpha=0,05$.

2. Регресійний аналіз

На рис. 1 – 4 приведені залежності вибіркової дисперсії S^2_i від вибіркової середньої \bar{X}_i (рис. 1) та сукупної пробної площі F_i (рис. 2), вибіркового показника ступеня просторової агрегації $\xi_{ii} = S^2_i / \bar{X}_i$ від вибіркової середньої \bar{X}_i (рис. 3) та сукупної пробної площі F_i для особин ялини і кедра чорнично-зеленомохової структури (асоціації I) на пробних площах, закладених за схемою 1 і 2, для дослідів (екс.) та математичної моделі за таблицею випадкових чисел (т.в.ч.). У табл. 7 приведена оцінка адекватності лінійних моделей за вибірковим коефіцієнтом кореляції r та коефіцієнтом апроксимації R^2 зв'язків вибіркових характеристик $S^2_i \sim \bar{X}_i$, $S^2_i \sim F_i$, $\xi_{ii} \sim F_i$, $\xi_{ii} \sim \bar{X}_i$.

Введемо у науковий обіг у математичні методи в біології означення ступеня добротності лінійної (або нелінійної) моделі, як відношення показника (індекса) адекватності R^2 (або R) до коефіцієнта кореляції:

$$\Delta = \frac{R^2}{|r|} \text{ (або } \frac{R}{|r|} \text{)}. \quad (36)$$

Таблиця 6. Порівняння двох коефіцієнтів кореляції.

Кореляційний зв'язок	r (табл. 5.28)		z (табл. 5.28)		z _p	ξ _{0,99}	ξ _{0,95}	Статистичний висновок
	Схема 2 (дослід)	Схема 2 (т.в.ч.)	Схема 2 (дослід)	Схема 2 (т.в.ч.)				
Ялина								
S ² ~ F	0,810	-0,685	1,127	-0,838	3,638	1,41	1,86	ρ _д > ρ _к
S ² ~ \bar{X}	0,951	-0,560	1,842	-0,633	4,583	1,78	2,34	ρ _д > ρ _к
(S ² / \bar{X})~F	0,756	-0,754	0,987	-0,982	3,646	1,41	1,86	ρ _д > ρ _к
(S ² / \bar{X})~ \bar{X}	0,869	-0,877	1,329	-1,363	4,985	1,93	2,54	ρ _д > ρ _к
Кедр								
S ² ~ F	0,858	-0,518	1,286	-0,574	3,444	1,34	1,76	ρ _д > ρ _к
S ² ~ \bar{X}	0,099	-0,666	0,099	-0,804	1,672	0,65	0,85	ρ _д = ρ _к
(S ² / \bar{X})~F	0,816	-0,579	1,145	-0,661	3,344	1,30	1,71	ρ _д > ρ _к
(S ² / \bar{X})~ \bar{X}	-0,210	-0,875	-0,213	-1,354	2,113	0,82	1,08	ρ _д = ρ _к (P=0,99) ρ _д < ρ _к (P=0,95)

Таблиця 7. Адекватність лінійних моделей зв'язків вибірових характеристик розподілу особин ялини і кедра: дисперсії S²_i та середньої \bar{X} _i або розміру пробної площі F_i, показника ступеня просторової агрегації S²/ \bar{X} _i та \bar{X} _i або F_i.

Рис.	Зв'язок	Особина	Схема	Реалізація	r	R ²	Δ
5.29	S ² _i ~ \bar{X} _i	ялина	1	екс.	0,259	0,067	0,26
	S ² _i ~ \bar{X} _i	кедр	1	екс.	0,803	0,645	0,80
	S ² _i ~ \bar{X} _i	ялина	2	екс.	0,951	0,905	0,95
	S ² _i ~ \bar{X} _i	кедр	2	екс.	0,099	0,010	0,10
	S ² _i ~ \bar{X} _i	ялина	2	т.в.ч.	-0,560	0,390	0,63
	S ² _i ~ \bar{X} _i	кедр	2	т.в.ч.	-0,666	0,460	0,69
5.30	S ² _i ~ F _i	ялина	1	екс.	0,348	0,121	0,35
	S ² _i ~ F _i	ялина	2	екс.	0,810	0,656	0,81
	S ² _i ~ F _i	ялина	2	т.в.ч.	-0,685	0,550	0,80
	S ² _i ~ F _i	кедр	1	екс.	0,768	0,590	0,77
	S ² _i ~ F _i	кедр	2	екс.	0,858	0,736	0,86
	S ² _i ~ F _i	кедр	2	т.в.ч.	-0,518	0,576	1,11
5.31	ξ _{ii} ~ \bar{X} _i	ялина	1	екс.	-0,615	0,378	0,61
	ξ _{ii} ~ \bar{X} _i	кедр	1	екс.	0,515	0,266	0,52
	ξ _{ii} ~ \bar{X} _i	ялина	2	екс.	0,869	0,754	0,87
	ξ _{ii} ~ \bar{X} _i	кедр	2	екс.	-0,210	0,044	0,21
	ξ _{ii} ~ \bar{X} _i	ялина	2	т.в.ч.	-0,877	0,487	0,56
	ξ _{ii} ~ \bar{X} _i	кедр	2	т.в.ч.	-0,875	0,679	0,78
5.32	ξ _{ii} ~ F _i	ялина	1	екс.	-0,563	0,318	0,56
	ξ _{ii} ~ F _i	ялина	2	екс.	0,756	0,572	0,76
	ξ _{ii} ~ F _i	ялина	2	т.в.ч.	-0,754	0,538	0,71
	ξ _{ii} ~ F _i	кедр	1	екс.	0,446	0,199	0,45
	ξ _{ii} ~ F _i	кедр	2	екс.	-0,816	0,665	0,81
	ξ _{ii} ~ F _i	кедр	2	т.в.ч.	-0,579	0,711	1,23

Значення цього показника приведені в табл. 7. Якщо Δ→1 або Δ>1, то модель високодобротна. Як видно з табл. 7, моделі що отримані за характеристиками схеми 1 поступаються за ступенем добротності моделям, що отримані за характеристиками за схемою 2 (виключно лише для кедр для S²_i, ξ_{ii} ~ \bar{X} _i); найбільший ступінь добротності мають лінійні моделі, що отримані за таблицею випадкових чисел.

Як видно з рис. 1 – 4 для залежностей вибірових характеристик спостерігаються такі закономірності:

1) адекватність лінійної моделі для особин ялини (екс.) мала і висока для особин кедр (екс.) за схемою 1, при цьому S²_i значно зростає із збільшенням \bar{X} _i для особин кедр і мало зростає для ялини (рис. 1а; табл. 7);

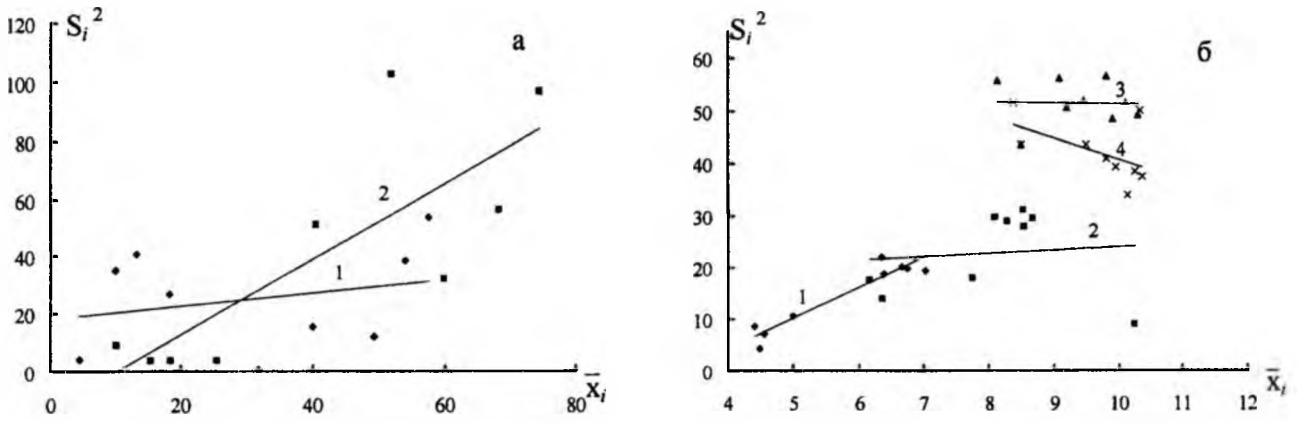


Рис. 1. Залежність вибіркової дисперсії S_i^2 (од.²) від вибіркової середньої \bar{X}_i (од.) для особин чорнично-зеленомохової структури (асоціації I) на пробних площах F_i (м²), закладених за схемою 1 (а) і 2 (б): 1 – ялина (екс.); 2 – кедр (екс.); 3 – ялина (т.в.ч.); 4 – кедр (т.в.ч.)

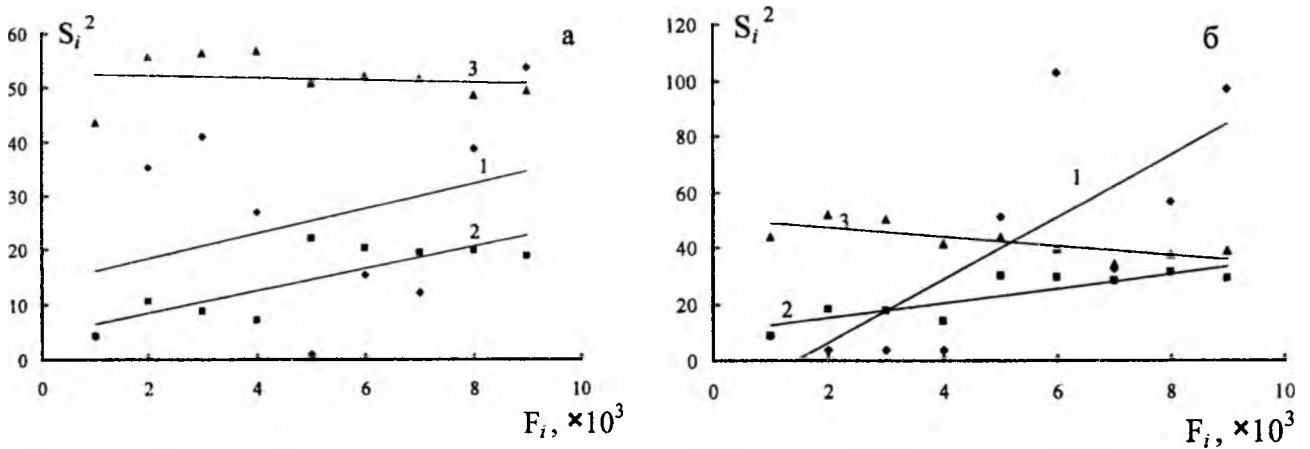


Рис. 2. Залежність вибіркової дисперсії S_i^2 (од.²) особин ялини (а) та кедра (б) чорнично-зеленомохової структури (асоціації I) від розміру сукупної пробної площі F_i (м²), закладеної за схемою: 1 – 1; 2,3 – 2; 1,2 – экс.; 3 – т.в.ч.

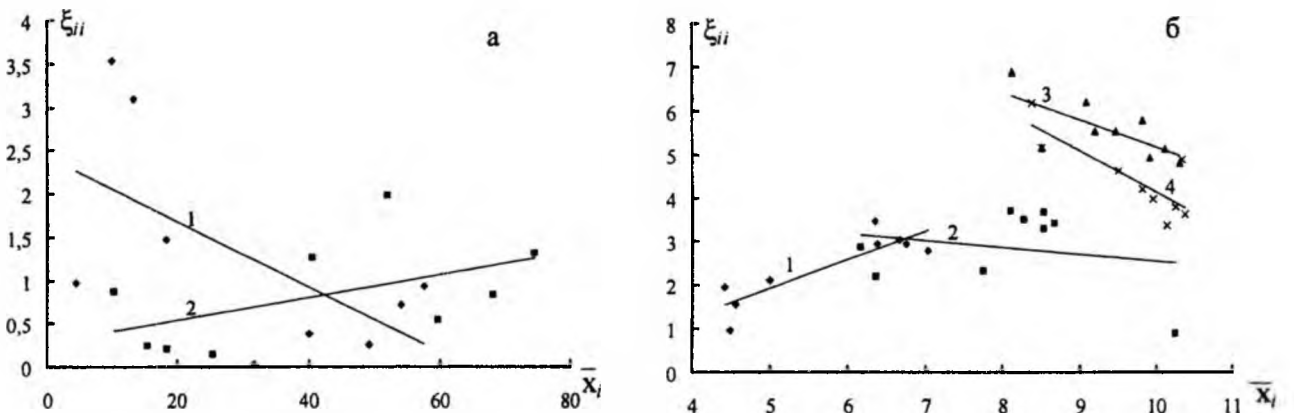


Рис. 3. Залежність вибіркового показника ступеня просторової агрегації ξ_{ii} (од.) від вибіркової середньої \bar{X}_i (од.) особин чорнично-зеленомохової структури (асоціації I) на сукупних пробних площах F_i (м²), закладених за схемою 1 (а) і 2 (б): 1 – ялина (екс.); 2 – кедр (екс.); 3 – ялина (т.в.ч.); 4 – кедр (т.в.ч.)

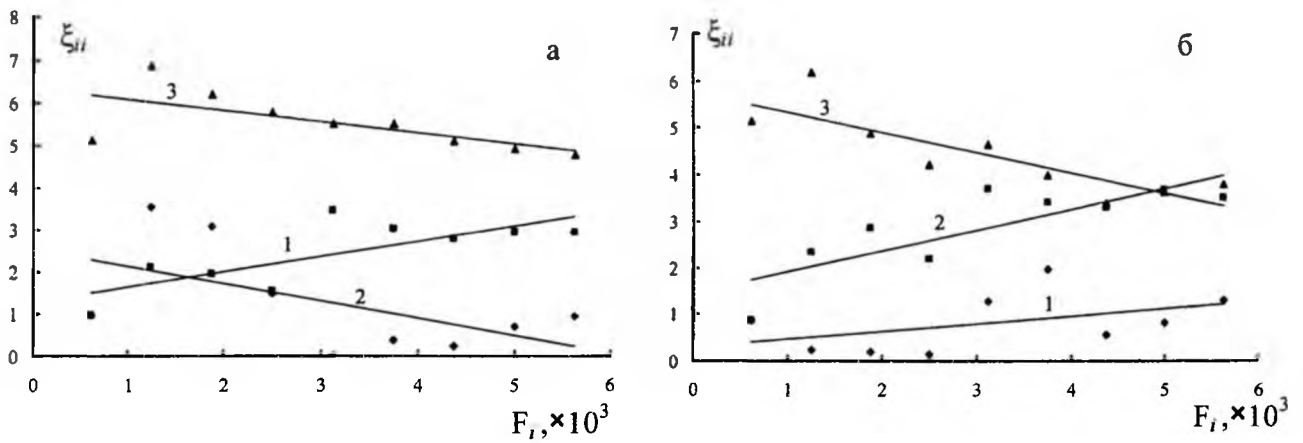


Рис. 4. Залежність вибіркового показника ступеня просторової агрегації ξ_{ii} (од.) особин ялини (а) та кедра (б) чорнично-зеленомохової структури (асоціації I) від розміру сукупної пробної площі F_i (m^2), закладеної за схемою: 1 – 1; 2,3 – 2; 1,2 – екс.; 3 – т.в.ч.

2) адекватність лінійної моделі особин ялини (екс.) висока, а для особин кедра (екс.) мала за схемою 2, при цьому S^2 відчутно зростає із збільшенням середньої \bar{x} , числа особин ялини (екс.) і мало зростає для особин кедра (екс.), а для математичної моделі розподілу особин кедра та ялини адекватність лінійної моделі зв'язку $S^2_i \sim \bar{x}_i$ близька до нижньої межі значущості, при цьому дисперсія S^2_i зменшується із зростанням середнього числа особин \bar{x}_i (рис. 1б; табл. 7);

3) адекватність лінійної моделі зв'язку $S^2_i \sim F_i$ для особин ялини (екс.) мала за схемою 1 (рис.2а, крива 1), а для особин ялини за схемою 2 (екс. та т.в.ч.) (рис.2а, крива 2,3) та особин кедра (екс. та т.в.ч.) (рис. 2 б, криві 1 – 3) достатньо висока, при цьому для ялини та кедра (схема 1 і 2, екс.) дисперсія S^2_i зростає із збільшенням розмірів пробної площі F_i і зменшується (схема 2, т.в.ч.) для математичної моделі за таблицею випадкових чисел (рис. 2б; табл. 7);

4) адекватність лінійної моделі зв'язку $\xi_{ii} \sim \bar{x}_i$ мала для особин ялини (екс.) і кедра (екс.) за схемою 1 та кедра за схемою 2, але висока для ялини (екс. та т.в.ч.) та кедра (т.в.ч.) за схемою 2 (рис. 3; табл. 7), при цьому показник ступня просторової агрегації ξ_{ii} зростає із збільшенням середньої числа особин \bar{x}_i кедра (екс.) за схемою 1 та ялини (екс.) за схемою 2, для решти випадків ξ_{ii} зменшується із зростанням \bar{x}_i для ялини (екс.), кедра (екс.), ялини (т.в.ч.) і кедра (т.в.ч.) (рис.3 а, б; табл. 7);

5) адекватність лінійної моделі зв'язку $\xi_{ii} \sim F_i$ мала для особин ялини (екс.) і кедра (екс.) за схемою 1 і достатньо велика для особин ялини (екс. та т.в.ч.) та кедра (екс. та т.в.ч.) за схемою 2 (рис. 4 а, б; табл. 7), при цьому показник просторової агрегації ξ_{ii} зростає із збільшенням сукупної пробної площі F_i для особин ялини (екс.) та кедра (екс.) за схемою 2 та для особин кедра (екс.) за схемою 1 і зменшується для особин ялини (екс.) за схемою 1 та для особин кедра і ялини за схемою 2, т.в.ч. (рис. 4; табл. 7).

Висновки

1. Розраховані коефіцієнти кореляції та ступені їх значущості між вибірковими характеристиками просторового розподілу особин ялини звичайної та сосни кедрової європейської та дана оцінка відповідних генеральних коефіцієнтів кореляції. Показано, що ступінь лінійності або нелінійності кореляційних зв'язків залежать від типу особин, схем усукуплення пробних площ чи створених математичних моделей за таблицею випадкових чисел та типу асоціацій особин.
2. Вперше у науковий обіг математичних методів у біології введено означення ступеня лінійності або нелінійності кореляційного зв'язку за функцією перетворення Фішера, критичним значенням коефіцієнта кореляції та критерію Стьюдента, що дало можливість обґрунтовано приймати або відкидати з рівнем значущості $\alpha = 1\%$ та $\alpha = 5\%$ нульової гіпотези про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції за його вибірковим значенням.
3. Вперше у науковий обіг математичних методів у біології введено означення ступеня рівності або нерівності двох коефіцієнтів кореляції за допомогою функції перетворення Фішера, що дало можливість обґрунтовано приймати або відкидати з рівнем значущості $\alpha = 1\%$ та $\alpha = 5\%$ нульової гіпотези про рівність двох генеральних коефіцієнтів кореляції за їх вибірковими значеннями.
4. Вперше у науковий обіг математичних методів у біології введено означення ступеня добротності лінійної або нелінійної моделей як співвідношення показника (індексу) адекватності або його квадратичного значення до коефіцієнта кореляції, що дало можливість порівняти за допомогою регресійного аналізу дві або кілька лінійних або нелінійних моделей. Добротність лінійних або нелінійних моделей визначається типом особин, схемами усукуплення пробних площ чи створених математичних моделей за таблицею випадкових чисел та типом асоціацій особин.

5. Показано, що вибіркові дисперсії та показники просторової агрегації особин ялини звичайної та сосни кедрової європейської можуть зростати або зменшуватися із збільшенням величин середньої особин та пробних площ, тому вимоги про можливість застосування показника просторової агрегації лише у разі зростання вибіркової дисперсії при збільшенні вибіркової середньої особин на пробній площі чи розмірів пробної площі не є обов'язковими і залежать від схеми об'єднання особин, принаймні для схеми 2, як експериментальної, так і математичної моделі, це в явній формі підтверджується.

Література

1. Жилияев Г.Г. Структура популяцій рідкісних видів флори Карпат / Г.Г. Жилияев, Ю.Й. Кобів, М.М. Мамчур. – К.: Наукова думка, 1998. – с.101-119: іл.
2. Анализ структуры древесных ценозов / А.И. Бузыкин, В.Л. Гавриков, О.П. Секретенко, Р.Г. Хлебопрос; Под ред. Д.М. Киреева. – Новосибирск: Наука. 1985. – 95 с.: ил.
3. Злобин Ю.А. Принципы и методы изучения ценологических популяций растений / Ю.А. Злобин. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1989. – 148с.: ил.
4. Дідух Я.П. Популяційна екологія / Я.П. Дідух. – К.: Фітосоціоцентр, 1998. – 192 с.: іл., табл.
5. Гиляров А.М. Популяционная экология / А.М. Гиляров. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1990. – 192 с.: ил., табл.
6. Сіренко О. Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 1. Постановка завдання / О. Г.Сіренко, О.В.Кузишин // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаніка. Серія Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавель Третяк І.Я., 2008. – Вип. X. – С. 86-95: іл. 4. – Бібліогр.: с. 94 – 95 (16 назв).
7. Сіренко О. Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 2. Статистичні характеристики. Дисперсійний аналіз (статистична рівність ряду генеральних дисперсій) / О. Г.Сіренко, О.В.Кузишин // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаніка. Серія Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавель Третяк І.Я., 2008. – Вип. X. – С. 95 – 113: іл. 1, табл. 6. – Бібліогр.: с. 112 – 113 (34 назви).
8. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний / Михаил Никитович Степнов. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 назв.).
9. Нелинейная корреляция и регрессия / С.Н. Воловельская, А.И. Жилин, С.А. Кулиш, В.Б. Сивый. – К.: Техніка, 1971. – 130 с.
10. Зажигаев Л.С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л.С. Зажигаев, А.А. Кишьян, Ю.И. Романиков. – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.: ил., табл. – Приложение: с. 144-229 (16 табл.). – Библиогр.: с. 230-231.
11. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник для самост. вивчення дисц. [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / А.Б. Волощенко, І.А. Джалладова; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 14 / 18.2-613 від 22.03.2002 р.] – К.: Київ. Нац. економ. ун-т, 2003. – 256 с.: іл., табл. – Приклади розв. завдань і вправи для самост. розв'язання в кінці розд. – Блочно-модул. контроль: с. 183 – 203 (9 варіантів). – Відповіді: с. 204 – 216. – Бібліогр.: с. 217 (18 назв.). – Додатки: с. 218 – 254 (8 табл.). – ISBN 966 – 574 – 459– 3.
12. Бендат Дж.С. Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В. Матушевского, В.Е. Привальского; под ред. И.Н. Коваленко. – М.: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод за изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).
13. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – 2-е изд., перераб. и допол. – М.: Наука, 1976. – 280 с.: ил., табл. – Библиогр. в конце гл.
14. Тихомиров В.Б. Планирование и анализ эксперимента / Владислав Борисович Тихомиров. – М.: Легкая индустрия, 1974. – 264 с.: ил., табл. – Приложение: с. 255-257 (4 табл.). – Библиогр.: с. 258-261 (99 наименов.).
15. Смирнов Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1965. – Табл. II.

Стаття поступила до редакції 2.07.2008 р.; прийнята до друку 15.07.2008 р.

Сіренко О.Г. – провідний інженер відділу природної флори;

Кузишин О.В. – асистент кафедри теоретичної і прикладної хімії, магістр.

Мідак Л.Я. – кандидат хімічних наук, доцент кафедри теоретичної і прикладної хімії.

Рецензент: кандидат хімічних наук Татарчук Т.Р., доцент кафедри теоретичної і прикладної хімії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаніка.