

МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ОСОБИН НА ПРОБНИХ ПЛОЩАХ: 6. СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАДІЙ РОЗВИТКУ СОСНИ КЕДРОВОЇ ЄВРОПЕЙСЬКОЇ (*PINUS CEMBRA* L.)

О.Г. Сіренко¹, О.В. Кузишин²

¹Національний ботанічний сад ім. М.М. Гришка Національної Академії Наук України,
вул. Тімірязєвська, 1, Київ, 01014, Україна

²Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76025, Україна

Приведені статистичні характеристики стадій розвитку сосни кедрової європейської. Виявлені кореляційні зв'язки між параметрами просторового розподілу особин сосни кедрової європейської. Обґрунтовано надійність визначення закону просторового розподілу особин за показником ступеня просторової агрегації та інших показників. Показана можливість опису просторового розподілу особин за нормальним законом Гаусса.

Ключові слова: *Pinus cembra*, кедр, пробна площа, елементарна комірка, асоціація, особина, середнє арифметичне, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, ступінь просторової агрегації, початковий момент, центральний момент, показник асиметрії, показник ексцесу, вибіркочна сукупність, генеральна сукупність, коефіцієнт кореляції, нормальний розподіл Гаусса.

Sirenko O.H., Kuzyshyn O.V. The models of species' distribution on the test area: statistic characteristics of growth phases of *Pinus cembra*. *Statistic characteristics of steric distribution of cedar on the test areas are illustrated. The correlation relation of steric distribution of species has been found. The reliability of determining the law of steric distribution of species with the degree of steric aggregation has been proved. Possibility of description of steric distribution of species with normal Gauss law is shown.*

Key words: *Pinus cembra*, cedar, test area, elementary unit, association, species, average, variance, root-mean-square deviation, variation coefficient, degree of steric aggregation, initial moment, central moment, asymmetry factor, excess factor, random set, correlation coefficient, normal Gauss distribution.

Вступ

У роботі [1] приведені методи і процедури творення сукупних пробних площ, закладених за схемою 1 (коли площі об'єднують, а число елементарних комірок лишається сталим ($N = 4$) при зростанні їх розмірів) та схемою 2 (коли площі об'єднують так, що N зростає від 4 до 36 (асоціація I), від 4 до 12 (асоціація II) або від 4 до 256 (математична модель випадкових чисел) при сталому розмірі елементарної комірки (12,5 м × 12,5 м)), для для особин сосни кедрової європейської (*Pinus cembra*) двох ценотичних умов – асоціації I (чорнично-зеленомохової структури) та асоціації II (сфагнової структури). У [1] за результатами досліджень розраховані вибіркочні числові характеристики розподілу особин ялини та кедра на пробних площах, закладених для двох ценотичних структур та двох схем усукуплення площ та за таблицею випадкових чисел. Перевірка нульової гіпотези ($H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_i^2 = \dots = \sigma_k^2$) про рівність ряду генеральних дисперсій особин ялини та кедра за оцінками вибіркочних дисперсій $S_1^2, S_2^2, \dots, S_i^2, \dots, S_k^2$ відповідно, що здійснена за допомогою критеріїв Фішера, Кохрана і Бартлета для двох рівнів значущості $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$, привела до ствердження, що з ймовірністю $P = 0,99$ та $P = 0,95$ ряди генеральних дисперсій для схем 1 і 2 об'єднання сукупних площ, асоціацій I і II та за таблицею випадкових чисел статистично рівні.

У роботі [2] методами дисперсійного аналізу досліджується рівність ряду генеральних середніх (математичних сподівань) за нульовою гіпотезою $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i = \dots = \mu_k$ за оцінками вибіркочних середніх $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_k$ відповідно. Для перевірки нульової гіпотези H_0 розраховано міжрядкові дисперсії S_1^2 , внутрішні (залишкові) дисперсії S_2^2 та повні (сумарні) дисперсії S_3^2 та за допомогою критерію

Фішера $F_p = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ та порівняння його з табличним значенням F_α стверджували рівність ряду генеральних

середніх з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$. У роботі [2] за критерієм Стьюдента t_α розраховані довірчі інтервали та вказана довірча ймовірність $P = 0,99$ та $P = 0,95$ для математичного сподівання та за Z_α та χ_α^2 розраховані довірчі інтервали та вказана довірча ймовірність $p = 0,99$ та $P = 0,95$ для генеральної дисперсії. За цими довірчими інтервалами побудовані довірчі інтервали та вказана довірча ймовірність $P = 0,99$ та

$p = 0,95$ для генерального показника просторової агрегації як відношення довірчих інтервалів генеральної дисперсії та математичного сподівання. Показано, що розподіл особин ялини та кедря носить контагіозний характер, при цьому у науковий обіг у математичні методи в біології введено поняття ступеня контагіозності розподілу особин як відношення генерального показника просторової агрегації для пробних площ до цього ж показника для математичної моделі: $\zeta = \frac{E}{E_m}$. За середніми значеннями цієї характеристики для асоціації I

показано, що для особин кедря $\bar{\zeta} = 54,02\%$ (для схеми 1) та $\bar{\zeta} = 100,54\%$ (для схеми 2), а для особин ялини $\bar{\zeta} = 46,29\%$ (для схеми 1) та $\bar{\zeta} = 69,23\%$ (для схеми 2).

Аналіз цих результатів привів авторів роботи [2] до висновку, що для схеми I асоціацій I і II результати за контагіозністю високо надійні, але мало точні, при цьому для асоціації I результати \sim у 2 рази точніші, ніж для асоціації II, для особин ялини результати \sim у 2 рази точніші, ніж для кедря; для схеми 2 асоціації I для особин кедря та ялини отримали високо надійні високоточні результати за контагіозністю, а для асоціації II результати високо надійні, але малоточні і для особин ялини результати \sim у 2 рази точніші, ніж для кедря.

У роботі [3] установлені лінійні кореляційні зв'язки: між числовими вибірковими характеристиками розподілу особин ялини та кедря асоціації I за схемами 1 і 2 та за таблицею випадкових чисел та розмірами пробних площ і середнього розподілу; між числовими характеристиками двох схем 1 і 2 особин ялини та кедря; за схемою 2 дослідів та схемою 2 моделі випадкових чисел; двох математичних моделей (ялини та кедря) за таблицею випадкових чисел; двох асоціацій I і II, а також досліджена модель Гаусса нормального закону розподілу особин ялини та кедря.

У роботі [4] за допомогою показників асиметрії та ексцесу, їх середніх квадратичних відхилень, а також за критерієм ω^2 доведено підпорядкування емпіричного розподілу особин кедря і ялини асоціацій I і II, закладених на узагальнених пробних площах теоретичному закону розподілу Гаусса.

Загальна мета роботи полягала в тому, щоби за результатами статистичного аналізу виявити зв'язок між параметрами просторового розподілу особин на пробних площах, придатність показника ступеня просторової агрегації особин ξ для визначення моделі просторового розподілу особин ялини та кедря та використання моделі нормального розподілу Гаусса для опису цього розподілу.

Мета цієї частини роботи полягала в дисперсійному та кореляційному аналізі зі статистичної рівності ряду генеральних дисперсій та генеральних середніх розподілу особин кедря за стадіями розвитку, розподілених на сукупних пробних площах, закладених за схемою I та знаходження довірчих інтервалів для генерального показника ступеня просторової агрегації особин за стадіями розвитку особин кедря.

I. Експериментальна частина

Об'єкт дослідження: сосна кедрова європейська (*Pinus cembra*) альпійсько-карпатського виду (далі кедр). Стадії розвитку кедря (*a*): *j* – ювенільна; *im* (*im*₁, *im*₂) – іматурна (іматурна 1, іматурна 2); *v* (*v*₁, *v*₂) – віргінільна (віргінільна 1, віргінільна 2); *g* (*g*₁, *g*₂, *g*₃) – генеративна (генеративна 1, генеративна 2, генеративна 3); *S* – сенільна; *ks* – квазісенільна.

Пробна площа. Досліджували кедровососново-ялиновий ліс. Сукупні пробні площі були закладені в однакових центичних умовах – чорнично-зеленомохової (асоціації I) та сфагнової (асоціації II) структури, що часто зустрічається при аналізі результатів експериментів, за двома схемами [7]:

- **схема 1:** коли площі об'єднують, а число елементарних комірок лишається сталим ($N=4$) при зростанні їх розмірів;
- **схема 2:** коли площі об'єднують так, що кількість елементарних комірок N зростає від 4 до 36 або від 4 до 12 (а при утворенні пробних площ за таблицею випадкових чисел від 4 до 256) при сталому розмірі елементарної комірки ($12,5 \times 12,5$ м).

Вихідна базова пробна площа $F_1 = 25 \text{ м} \times 25 \text{ м} = 625 \text{ м}^2$, яка мала 4 елементарні комірки розміром $F_0 = 12,5 \text{ м} \times 12,5 \text{ м} = 156,25 \text{ м}^2$, у якій за результатами досліджень попадала певна кількість особин кедря кожної з двох центичних структур. Розміри сукупних пробних площ зростали: від $F_1 = 625 \text{ м}^2$ до $F_9 = 5625 \text{ м}^2$ (9 об'єднань) для асоціації I; від $F_1 = 625 \text{ м}^2$ до $F_3 = 1875 \text{ м}^2$ (3 об'єднання) для асоціації II.

Статистичний аналіз за стадіями розвитку кедря виконаний для особин, що були розташовані на таких базових сукупних площах: $F = 5625 \text{ м}^2$ (для асоціації I) та $F_3 = 1875 \text{ м}^2$ (для асоціації II), які після об'єднання мали 4 елементарні площі (дисперсійний аналіз) та 1 суцільну площу (кореляційний аналіз).

II. Результати та обговорення

Результати розрахунків числових статистичних характеристик сукупних особин кедря, закладених на пробних площах за схемою I для асоціацій I і II за стадіями розвитку, зведені в табл. 1.

1. Дисперсійний аналіз: статистична рівність ряду генеральних дисперсій.

Перевірка нульової гіпотези $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_i^2 = \dots = \sigma_k^2$ про рівність ряду генеральних дисперсій особин кедря за стадіями розвитку за оцінками вибіркових дисперсій $S_1^2, S_2^2, \dots, S_i^2, \dots, S_k^2$ відповідно за критеріями Фішера [5], Кохрана [5-7] і Бартлета [5] дала такі результати (табл. 2). Тут ступені вільності при виборі табличних значень критеріїв для рівнів значущості $\alpha=0,01$ і $\alpha=0,05$ були такі:

Таблиця 1. Вибіркові характеристики та довірчі інтервали для генеральних середніх за стадіями розвитку особин кедр на пробних площах, закладених за схемою 1 (рис. 1 [1]).

a_i	\bar{x}_i [од.]	S_i^2 [од. ²]	S_i [од.]	γ_i %	Довірчі інтервали для генеральної середньої з довірчою ймовірністю	
					$P = 0,99$	$P = 0,95$
Асоціація I (чорнично-зеленомохова структура)						
j	6,50	11,67	3,416	52,55	$3,964 < \mu_j < 9,036$	$4,651 < \mu_j < 8,349$
im	18,25	54,25	7,366	40,36	$15,714 < \mu_{im} < 20,786$	$16,401 < \mu_{im} < 20,099$
v	29,25	16,25	4,031	13,78	$26,714 < \mu_v < 31,786$	$27,401 < \mu_v < 31,099$
q	15,25	25,58	5,058	33,17	$12,714 < \mu_q < 17,786$	$13,401 < \mu_q < 17,099$
s	2,75	0,92	0,957	34,80	$0,214 < \mu_s < 5,286$	$0,901 < \mu_s < 4,599$
ks	3,50	3,0	1,732	49,49	$0,964 < \mu_{ks} < 6,036$	$1,651 < \mu_{ks} < 5,349$
за Z_{α} :					$P[8,9860 < \sigma^2 < 46,4267]$	$P[10,4538 < \sigma^2 < 36,1305]$
за χ_{α}^2 :					$P[9,0151 < \sigma^2 < 53,5144]$	$P[10,6248 < \sigma^2 < 40,7047]$
Асоціація II (сфагнова структура)						
j	1,50	0,33	0,575	38,33	$0,733 < \mu < 4,600$	$1,242 < \mu < 4,091$
im	4,75	20,25	4,500	94,74		
v	6,25	24,92	4,992	79,87		
q	2,50	3,00	1,732	69,28		
s	0,75	0,516	0,718	95,73		
ks	0,25	0,25	0,500	200,0		
за Z_{α} :					$P[5,550 < \sigma^2 < 28,672]$	$P[6,456 < \sigma^2 < 22,313]$
за χ_{α}^2 :					$P[5,915 < \sigma^2 < 28,222]$	$P[6,863 < \sigma^2 < 22,355]$

Таблиця 2. Результати перевірки нульової гіпотези про статистичну рівність ряду генеральних дисперсій за стадіями розвитку особин кедр чорнично-зеленомохової (асоціація I) та сфагнової (асоціація II) структур на пробних площах, закладених за схемою 1.

Розрахункові і табличні дані	Чорнично-зеленомохова структура	Сфагнова структура
F_p	27,125	99,68
$F_{0,01}$	29,46	29,46
$F_{0,05}$	9,28	9,28
$\xi_{0,01} (\xi_{0,01})$	1,09 (0,92)	0,30 (3,38)
$\xi_{0,05} (\xi_{0,05})$	0,34 (2,92)	0,09 (10,74)
$H_0 (\alpha=0,01)$	+	-
$H_0 (\alpha=0,05)$	-	-
G_p	0,4812	0,5058
$G_{0,01}$	0,5705	0,5705
$G_{0,05}$	0,4874	0,4874
$\xi_{0,01} (\xi_{0,01})$	1,19 (0,84)	1,13 (0,89)
$\xi_{0,05} (\xi_{0,05})$	1,01 (0,99)	0,96 (1,04)
$H_0 (\alpha=0,01)$	+	+
$H_0 (\alpha=0,05)$	+	-
χ_p^2	8,8385	22,4631
$\chi_{0,01}^2$	15,09	15,09
$\chi_{0,05}^2$	11,07	11,07
$\xi_{0,01} (\xi_{0,01})$	1,71 (0,59)	0,67 (1,49)
$\xi_{0,05} (\xi_{0,05})$	1,25 (0,80)	0,49 (2,03)
$H_0 (\alpha=0,01)$	+	-
$H_0 (\alpha=0,05)$	+	-
Статистичний висновок	ряд дисперсій рівний	ряд дисперсій нерівний

- $F_{\alpha} \{ \alpha; f_{im} = 3; f_s = 3 \}, k=6$ (асоціація I);
- $F_{\alpha} \{ \alpha; f_v = 3; f_{ks} = 3 \}, k=6$ (асоціація II);
- $G_{\alpha} \{ \alpha; k=6; N_i = 4 \}, k=6$ (асоціація I і II);
- $\chi^2_{\alpha} \{ \alpha; f_1=5 \}, k=6, N_i = 4, f_1=5, f_2=18, f_3=3, c=0,4906$ (асоціація I і II), $S^2=18,7917$ од.² (асоціація I), $S^2=8,2115$ од.² (асоціація II).

У табл. 2: ξ_{α} – ступінь статистичної рівності ($\dot{\xi}_{\alpha}$ – ступінь статистичної нерівності) ряду генеральних дисперсій. У зв'язку із наведеними розрахунками (табл. 2) у визначенні H_0 за критеріями Фішера, Кохрана і Бартлета гіпотезу H_0 про рівність ряду дисперсій для кедр асоціації II відкидаємо з $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$ (дисперсії за стадіями розвитку суттєво нерівні), а для кедр асоціації I за схемою 1 за стадіями розвитку особин кедр генеральні дисперсії рівні з $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$. Тут середні значення ступеня рівності $\bar{\xi}_{\alpha}$ (ступеня нерівності $\dot{\xi}_{\alpha}$) ряду генеральних дисперсій за стадіями розвитку особин кедр за двома точними критеріями G_{α} та χ^2_{α} складає: $\bar{\xi}_{0,01} = 1,45$ та $\bar{\xi}_{0,05} = 1,13$ (для чорнично-зеленомохової структури) і $\bar{\xi}_{0,01} = 1,19$ та $\bar{\xi}_{0,05} = 1,54$ (для сфагнової структури).

2. Дисперсійний аналіз: статистична рівність ряду генеральних середніх (математичних сподівань).

Перевірка нульової гіпотези H_0 про рівність ряду генеральних середніх (математичних сподівань) особин кедр за стадіями розвитку: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i = \dots = \mu_k$, які оцінені за рядом вибірових середніх арифметичних: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_k$ відповідно, дала такі результати. За [2, 5] розраховували статистичні характеристики, що пов'язані із перевіркою H_0 та порівняльного аналізу: загальну середню особин; середню особин i -тої стадії розвитку; кількість особин j -тої пробної площі для i -стадії розвитку; дисперсію особин між рядами стадій розвитку; дисперсію особин внутрішню (залишкову) – в середині k -стадій розвитку; повну (загальну, сумарну) дисперсію особин для k -стадій розвитку (табл. 3).

Таблиця 3. Розрахункові статистичні характеристики, що пов'язані з перевіркою нульової гіпотези про рівність ряду генеральних середніх та порівняльного аналізу за стадіями розвитку кедр.

Особина	Кедр	
	I	
Схема	I	II
Асоціація	I	II
N	24	24
N_i	4	4
f_1	5	5
f_2	18	18
f_3	23	23
S_1^2 , од. ²	426,5666	22,4667
S_2^2 , од. ²	18,6111	8,2778
S_3^2 , од. ²	107,2971	11,3623
\bar{X} , од.	12,592	2,667
$F_p = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	22,920	2,714
$F_{0,01} \{f_1, f_2\}$	4,25	4,25
$F_{0,05} \{f_1, f_2\}$	2,77	2,77
$\dot{\xi}_{0,01}$	5,39	0,64
$\dot{\xi}_{0,05}$	8,27	0,98
$\xi_{0,01}$	0,19	1,57
$\xi_{0,05}$	0,12	1,02
Кількість генеральних сукупностей з н.з.р.	$k=6$	$k=6$
Оцінка σ^2	S_2^2	S_3^2
Оцінка μ_i	\bar{X}_i	\bar{X}
S_{μ}^2 , од. ²	84,991	2,956
Прийняття H_0	-	+

Як видно з табл. 3, (для асоціації I) маємо нерівності $F_p > F_{0,01}$ та $F_p > F_{0,05}$, що дає підстави відкинути нульову гіпотезу про рівність ряду генеральних середніх H_0 з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$, тобто генеральні середні ($k=6$) особин кедра асоціації I на пробній площі, закладеній за схемою 1 за стадіями розвитку, статистично суттєво відрізняються. Таким чином, за [5] тут маємо $k = 6$ нормально розподілених генеральних сукупностей особин кедра асоціації I на площі $F = 5625 \text{ м}^2$, закладеній за схемою 1 за стадіями розвитку, із загальною дисперсією σ^2 , оцінкою якої є величина вибіркової дисперсії $S_2^2 = 18,6111 \text{ од.}^2$, та із різними генеральними середніми μ , (μ_1, \dots, μ_6), оцінками яких є вибіркові середні \bar{x} , ($\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_6$) (табл. 1) з довірчою ймовірністю $P = 1 - \alpha$ (надійність результату) та довірчими інтервалами (точність результату). За [1, 2] розрахуємо довірчі інтервали (вираз у квадратних дужках) для генеральної дисперсії σ^2 та ряду генеральних середніх μ , з довірчою ймовірністю $P=0,99$ та $P = 0,95$ (табл. 1) з табличними значеннями:

• дисперсія σ^2

а) за Z_α : $Z_1 \{N = 24; P = 0,99\} = 0,7139$; $Z_2 \{N = 24; P = 0,95\} = 1,6227$ (для $\alpha = 0,01$);

$Z_1 \{N = 24; P = 0,95\} = 0,7700$; $Z_2 \{N = 24; P = 0,95\} = 1,4315$ (для $\alpha = 0,05$) [6, 8];

б) за χ_α^2 [17]: $\chi_{0,01}^2 = \chi_T^2 \{f_2 = 18; \alpha/2 = 0,005\} = 37,16$; $\chi_{0,99}^2 = \chi_T^2 \{f_2 = 18; 1 - \alpha/2 = 0,995\} = 6,26$ (для $\alpha = 0,01$); $\chi_{0,05}^2 = \chi_T^2 \{f_2 = 18; \alpha/2 = 0,005\} = 31,53$; $\chi_{0,95}^2 = \chi_T^2 \{f_2 = 18; 1 - \alpha/2 = 0,995\} = 8,23$ (для $\alpha = 0,05$) [6, 8, 9].

• математичні сподівання μ :

$t_{0,01} = t_T \{ \alpha/2 = 0,005; f_2 = 18 \} = 2,88$ (для $\alpha=0,01$); $t_{0,05} = t_T \{ \alpha/2 = 0,025; f_2 = 18 \} = 2,10$ (для $\alpha=0,05$) [6, 8, 9].

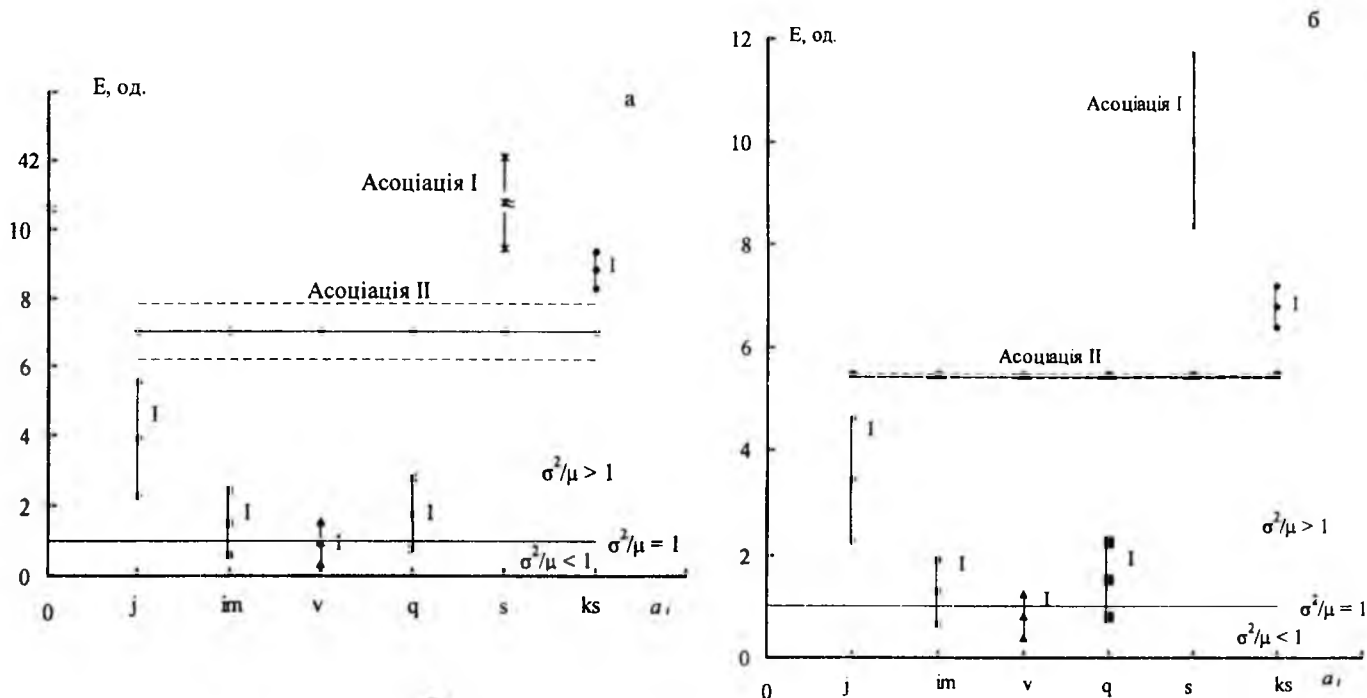


Рис. 1. Довірчі інтервали (\bar{x}) та їх центри (\bullet) для генерального показника просторової агрегації особин кедра за стадіями розвитку на сукупній пробній площі $F_9 = 5625 \text{ м}^2$ (асоціація I) та $F_3 = 1875 \text{ м}^2$ (асоціація II), закладеній за схемою 1 ($N_i = 4$ елементарних комірок) при розрахунках довірчих інтервалів математичного сподівання μ за t-критерієм для довірчої ймовірності $P = 0,99$ та $P = 0,95$ та довірчих інтервалів для усередненої генеральної дисперсії σ^2 за ($Z_\alpha + \chi_\alpha^2$) - критеріями для довірчої ймовірності $P = 0,99$ (а) та $P = 0,95$ (б).

Як видно з табл. 3, для асоціації II маємо нерівності $F_p < F_{0,01}$ і $F_p < F_{0,05}$, що дає підставу прийняти H_0 з $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$, і ствердити, що ряди генеральних середніх особин кедра асоціації II, закладених за схемою 1 за стадіями розвитку, статистично рівні. Таким чином, всі результати належать (табл. 1) одній нормально розподіленій генеральній сукупності особин кедра асоціації II на сукупній пробній площі, закладеній за схемою 1 за стадіями розвитку, із загальною дисперсією σ^2 , оцінкою якої є величина вибіркової дисперсії $S_3^2 = 11,3623 \text{ од.}^2$, та генеральною середньою μ , оцінкою якої є вибіркова загальна середня $\bar{x} = 2,667 \text{ од.}$ Розрахували довірчі інтервали для генеральної дисперсії σ^2 та генеральної середньої μ з довірчою ймовірністю $P = 0,99$ та $P = 0,95$ (табл. 1) за табличними значеннями:

• дисперсія σ^2

а) за Z_α (див. дані для асоціації I)

б) за χ_α^2 : $\chi_\alpha^2 = \chi_T^2 \{f_3; \alpha/2\}$; $\chi_{0,01}^2 = \chi_T^2 \{f_3 = 23; \alpha/2 = 0,005\} = 44,18$;

$\chi_T^2 \{f_3 = 23; 1 - \alpha/2 = 0,995\} = 9,26$ (для $\alpha = 0,01$); $\chi_\alpha^2 = \chi_{0,05}^2 = \chi_T^2 \{f_3 = 23; \alpha/2 = 0,005\} = 38,08$; $\chi_{1-\alpha}^2 = \chi_{0,95}^2 = \chi_T^2 \{f_3 = 23; 1 - \alpha/2 = 0,975\} = 11,69$ (для $\alpha = 0,05$) [6, 8, 9].

• математичне сподівання μ :

$t_T \{ \alpha/2 = 0,005; f_3 = 23 \} = 2,81$ (для $\alpha = 0,01$); $t_T \{ \alpha/2 = 0,025; f_3 = 23 \} = 2,07$ (для $\alpha = 0,05$) [6, 8, 9].

У табл. 3: ξ_α – ступінь статистичної рівності (ξ_α – ступінь статистичної нерівності) ряду математичних сподівань (генеральних середніх); S_μ^2 – статистична оцінка дисперсії ряду генеральних середніх. Як видно з табл. 3, ступінь статистичної нерівності (рівності) ряду генеральних середніх за стадіями розвитку особин кедр складає: ступінь нерівності $\xi_{0,01} = 5,39$ і $\xi_{0,05} = 8,27$ (для чорнично-зеленомохової структури) при оцінці дисперсії середніх $S_\mu^2 = 84,991$ та ступінь рівності $\xi_{0,01} = 1,57$ і $\xi_{0,05} = 1,02$ (для сфагнової структури) при оцінці дисперсії середніх $S_\mu^2 = 2,956$.

У табл. 4 приведені значення вибіркового показника просторової агрегації особин кедр асоціації I і II (за схемою 1) за стадіями розвитку $S_i^2 (\xi_{ii})$ та за $S_j^2 (\xi_j)$ та довірчі інтервали для генерального показника ступеня просторової агрегації особин кедр для стадій розвитку E_i . Як видно з табл. 4, для j, s, ks – стадій розвитку кедр асоціації I довірчий інтервал E_i накриває лише контагіозну ділянку, а для im, v, q – випадкову, рівномірну та контагіозну ділянки.

За даними табл. 4 на рис. 1 приведена діаграма для довірчих інтервалів \bar{E}_i та їх центрів (\bullet) для генерального показника просторової агрегації E особин кедр за стадіями розвитку на сукупній пробній площі $F_9 = 5625 \text{ м}^2$ (асоціація I) та $F_3 = 1875 \text{ м}^2$ (асоціація II), закладеної за схемою 1 (з $N_i = 4$ елементарних комірок), при розрахунку довірчих інтервалів для генеральної дисперсії σ^2 за $(Z_\alpha + \chi_\alpha^2)$ для довірчої ймовірності $P = 0,99$ (а) та $P = 0,95$ (б). Як видно з рис. 1, за ступенем контагіозності для асоціації I можна утворити мажорантний ряд за стадіями розвитку кедр: 1) $\zeta_v < \zeta_{im} < \zeta_q < \zeta_j < \zeta_{ks} < \zeta_s$, при цьому центри (\bar{E}_i) , верхні (E_{max}) та нижні (E_{min}) границі довірчих інтервалів генерального показника просторової агрегації мають такі нерівності: 2) $\bar{E}_s, \bar{E}_{ks}, \bar{E}_j \gg 1$; $E_{s(max)}, E_{s(min)}, E_{ks(max)}, E_{ks(min)}, E_{j(max)}, E_{j(min)} \gg 1$, що вказує на чистий сильноконтагіозний характер розподілу особин кедр асоціації I s, ks, j -стадій розвитку; 3) $\bar{E}_{im}, \bar{E}_q > 1$; $E_{im(max)}, E_{q(max)} > 1$; $E_{im(min)}, E_{q(min)} < 1$, що вказує на слабкоконтагіозний характер розподілу особин кедр асоціації I im, q -стадій розвитку із зсувом до рівномірного розподілу; 4) $\bar{E}_v \leq 1$, $\bar{E}_{v(max)} > 1$, $\bar{E}_{v(min)} < 1$, що вказує на випадковий характер розподілу (розподіл Пуассона) особин кедр асоціації I v -стадії розвитку із зсувом до слабкого контагіозного та рівномірного характеру розподілів.

Для асоціації II ступінь контагіозності особин кедр v, im, q, j, ks, s -стадій розвитку: $\zeta_v = \zeta_{im} = \zeta_q = \zeta_j = \zeta_{ks} = \zeta_s = \text{const}$, при цьому показник просторової агрегації за $(Z_\alpha + \chi_\alpha^2)$ знаходиться в межах $E = (7,001 \pm 0,816)$ [од.] $\gg 1$ для довірчої ймовірності $P = 0,99$ та $E = 5,41 \pm 0,05$ [од.] $\gg 1$ для $P = 0,95$, тобто з високою надійністю і точністю результату стверджується рівність генерального показника просторової агрегації за стадіями розвитку особин кедр сфагнової структури та сильна контагіозність розподілу генеральних сукупностей особин кедр.

3. Статистичний аналіз: порівняння двох рядів середніх особин кедр асоціації I і II, за стадіями розвитку, що розташовані на одноіменних пробних площах, закладених за схемою 1 привели до таких результатів. Перевірка статистичної різниці за H_0 : $\sigma_{1(I)}^2 = \sigma_{1(II)}^2$ між особинами кедр асоціації I і II (за схемою 1) за міжрядковими вибілковими дисперсіями S_i^2 за критерієм Фішера показало, що $F_{p1} = 18,987 > F_{0,01} \{ \alpha = 0,01; f_{1(I)} = 5; f_{1(II)} = 5 \} = 11,0$ (для $\alpha = 0,01$); $F_{p1} = 18,987 > F_{0,05} \{ \alpha = 0,05; f_{1(I)} = 5; f_{1(II)} = 5 \} = 5,05$ (для $\alpha = 0,05$), тобто між генеральними дисперсіями σ_1^2 для кедр асоціацій I і II (за схемою 1) є суттєва статистична різниця $\sigma_{1(I)}^2 > \sigma_{1(II)}^2$ з $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$, при цьому ступінь нерівності складає: $\xi_{0,01} = 1,73$ (для $\alpha = 0,01$); $\xi_{0,05} = 3,76$ (для $\alpha = 0,05$).

Перевірка статистичної різниці за H_0 : $\sigma_{2(I)}^2 = \sigma_{2(II)}^2$ за внутрішніми вибілковими дисперсіями S_2^2 показала, що $F_{p2} = 2,248 < F_{0,01} \{ \alpha = 0,01; f_{2(I)} = 18; f_{2(II)} = 18 \} = 3,13$ (для $\alpha = 0,01$); $F_{p2} = 2,248 > F_{0,05} \{ \alpha = 0,05; f_{2(I)} = 18; f_{2(II)} = 18 \} = 2,22$ (для $\alpha = 0,05$), тобто між генеральними дисперсіями $\sigma_{2(I)}^2$ та $\sigma_{2(II)}^2$ для кедр асоціації I (чорнично-зеленомохової структури) та асоціації II (сфагнової структури) за стадіями розвитку

немає суттєвої статистичної різниці з $\alpha = 0,01$ зі ступенем нерівності: $\xi_{0,01} = 0,72$ (ступінь рівності $\xi_{0,01} = 1,39$) та є ця різниця з $\alpha = 0,05$ зі ступенем нерівності $\xi_{0,05} = 1,01$ (ступінь рівності $\xi_{0,05} = 0,99$, що близько до 1,0).

Перевірка статистичної різниці за $H_0: \sigma_{3(I)}^2 = \sigma_{3(II)}^2$ за повними вибірковими дисперсіями S_3^2 показала, що $F_{p3} = 9,443 > F_{0,01} \{ \alpha = 0,01; f_{3(I)} = 23; f_{3(II)} = 23 \} = 2,723$ (для $\alpha = 0,01$); $F_{p3} = 9,443 > F_{0,05} \{ \alpha = 0,05; f_{3(I)} = 23; f_{3(II)} = 23 \} = 2,015$ (для $\alpha = 0,05$), тобто між генеральними дисперсіями $\sigma_{3(I)}^2$ та $\sigma_{3(II)}^2$ для кедр асоціації I (чорнично-зеленомохової структури) та асоціації II (сфагнової структури) за стадіями розвитку є статистична різниця $\sigma_{3(I)}^2 > \sigma_{3(II)}^2$ з $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$ зі ступенем нерівності: $\xi_{0,01} = 3,47$ (для $\alpha = 0,01$); $\xi_{0,05} = 4,69$ (для $\alpha = 0,05$). Між загальними середніми за $H_0: \mu_I = \mu_{II}$ для особин кедр з асоціаціями I і II за вибірковими середніми $\bar{x}_{(I)}$ і $\bar{x}_{(II)}$: $t_p = 9,377$, так як $t_{0,01} \left\{ \frac{\alpha}{2} = 0,005; f = f_{2(I)} + f_{2(II)} = 36 \right\} = 2,72$ (для $\alpha = 0,01$); $t_{0,05} \left\{ \frac{\alpha}{2} = 0,025; f = 36 \right\} = 2,028$ (для $\alpha = 0,05$), то при $t_p > t_{0,01}$ і $t_p > t_{0,05}$ нульову гіпотезу відкидаємо, що приводить до ствердження, що між загальними генеральними середніми двох структур кедр є суттєва статистична нерівність за стадіями розвитку $\mu_I > \mu_{II}$ із ступенем нерівності: $\xi_{0,01} = 3,45$ (для $\alpha = 0,01$); $\xi_{0,05} = 4,62$ (для $\alpha = 0,05$).

4. Кореляційний і регресійний аналізи.

Лінійний кореляційний зв'язок між кількостями особин кедр стадій розвитку $a, (j, im, v, g, s, ks)$ шукали між асоціацією I (чорнично-зеленомохової структури) та асоціацією II (сфагнової структури) на сукупних пробних площах $F_9 = 5625 \text{ м}^2$ (асоціація I) та $F_3 = 1875 \text{ м}^2$ (асоціація II). Розрахунок числових статистичних характеристик виборок зведені в табл. 5. Розрахунок вибіркового коефіцієнта кореляції за формулами [3] показав, що між асоціаціями I і II існує щільний лінійний зв'язок за стадіями розвитку особин кедр: $r = 0,9723$ (97,23%). Перевірка нульової гіпотези $H_0: \rho = 0$ про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції (значущості коефіцієнта r) здійснювали за критеріями $Z, r_{кр}$ та t :

1) $|Z| = 2,1327; \sigma_Z = 0,5774; Z_T = Z \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2} \right\} = Z_{0,995} = 2,58$ (для $\alpha = 0,01$); $Z_T = Z \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2} \right\} = Z_{0,975} = 1,96$ (для $\alpha = 0,05$) [5, 10, 11]; $(Z_{0,995} \cdot \sigma_Z) = 1,4897$ (для $\alpha = 0,01$); $(Z_{0,975} \cdot \sigma_Z) = 1,1317$ (для $\alpha = 0,05$). Таким чином, нерівність $|Z| > (Z_p \cdot \sigma_Z)$ дає підстави відкинути H_0 з $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$, тобто визнати статистичну значущість вибіркового коефіцієнта кореляції і стверджувати, що між чорнично-зеленомоховою та сфагновою структурами кедр за стадіями розвитку існує тісний статистично значущий лінійний зв'язок.

Введемо у науковий обіг у математичні методи в біології означення ступеня щільності (ступінь лінійності) лінійного (нелінійного) зв'язку за $Z_{\alpha}, r_{\alpha(кр)}, t_{\alpha}$:

$$\xi_{Z(\alpha)} = \frac{|Z|}{Z_{1-\alpha} \cdot \sigma_Z} \quad (\text{ступінь нелінійності: } \xi_{Z(\alpha)} = \frac{(Z_{1-\alpha} \cdot \sigma_Z)}{|Z|}); \quad (1)$$

$$\xi_{кр(\alpha)} = \frac{|r|}{r_{\alpha(кр)}} \quad (\text{ступінь нелінійності: } \xi_{кр(\alpha)} = \frac{r_{\alpha(кр)}}{|r|}); \quad (2)$$

$$\xi_{t(\alpha)} = \frac{|t|}{t_{\alpha}} \quad (\text{ступінь нелінійності: } \xi_{t(\alpha)} = \frac{t_{\alpha}}{|t|}), \quad (3)$$

де $Z\{r\}$ – функція перетворення Фішера [5]; $r_{\alpha(кр)} \{ P = 1 - \frac{\alpha}{2}; f = k - 2 \}$ – нижня межа довірчої ділянки для абсолютного значення коефіцієнта кореляції; $t_{\alpha} \{ \alpha, f = N - 2 \}$ – теоретичне (табличне) значення критерію Стьюдента для рівня значущості α та числа ступенів вільності при розрахунку вибіркового коефіцієнта кореляції $f = N - 2$. Тоді, ступінь щільності лінійного зв'язку (ступінь лінійності) між асоціаціями I і II за Z_{α} дорівнює: $\xi_{Z(0,01)} = 1,43$ (для $\alpha = 0,01$); $\xi_{Z(0,05)} = 1,89$ (для $\alpha = 0,05$).

$$2) r_{кр(\alpha)} \left\{ p = 1 - \frac{\alpha}{2}; f = k - 2 \right\}; r_{0,995} = r_{кр} \{ p = 0,995; f = 4 \} = 0,920 \quad (\text{для } \alpha = 0,01);$$

$r_{0,975} = r_{кр} \{ p = 0,975; f = 4 \} = 0,811$ (для $\alpha = 0,05$) [12]. Так як, $|r| > r_{кр}$, то H_0 відкидаємо, стверджуючи, що між асоціацією I і II існує тісний лінійний кореляційний зв'язок зі ступенем щільності зв'язку (ступінь лінійності) за $r_{кр(\alpha)}$:

$$\xi_{кр(0,01)} = 1,06 \quad (\text{для } \alpha = 0,01); \quad \xi_{кр(0,05)} = 1,20 \quad (\text{для } \alpha = 0,05).$$

3) Перевірка значущості коефіцієнта кореляції за t_{α} дала такі результати:

$t_p = 35,594 > t_{0,01} \{ \alpha = 0,01; f = 4 \} = 3,747 > t_{0,05} \{ \alpha = 0,05; f = 4 \} = 2,132$, що дозволяє відкинути нульову гіпотезу $H_0: \rho = 0$ і ствердити про значущість коефіцієнта кореляції з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ і $\alpha = 0,05$,

при цьому ступінь щільності лінійного зв'язку дорівнює: $\xi_{t(0,01)} = 9,50$ (для $\alpha = 0,01$) та $\xi_{t(0,05)} = 16,70$ (для $\alpha = 0,05$).

Таблиця 4. Вибіркові числові характеристики показника просторової агрегації та довірчі інтервали для генерального показника просторової агрегації особин кедра за стадіями розвитку на пробних площах, закладених за схемою 1.

A_i	Вибіркові показники просторової агрегації		Довірчі інтервали та середина інтервалів для генерального показника просторової агрегації особин кедра з довірчою ймовірністю			
	ξ_{II} [од.]	ξ_I [од.]	P = 0,99		P = 0,95	
			за $Z_{0,01} + \chi_{0,01}^2$	\bar{E}_I [од.]	за $Z_{0,05} + \chi_{0,05}^2$	\bar{E}_I [од.]
Асоціація I (чорнично-зеленомохова структура)						
j	1,795	2,863	2,271 < E _j < 5,530	3,901	2,267 < E _j < 4,601	3,434
im	2,973	1,020	0,573 < E _{im} < 2,404	1,489	0,638 < E _{im} < 1,911	1,275
v	0,556	0,636	0,337 < E _v < 1,572	0,955	0,385 < E _v < 1,235	0,810
q	1,677	1,220	0,745 < E _q < 2,810	1,778	0,787 < E _q < 2,247	1,517
s	0,335	6,768	9,453 < E _s < 42,098	25,776	8,353 < E _s < 11,701	10,027
ks	0,857	5,317	8,279 < E _{ks} < 9,339	8,809	6,385 < E _{ks} < 7,182	6,784
Асоціація II (сфагнова структура)						
j	0,220	7,575	6,184 < E < 7,817	7,001	5,360 < E < 5,459	5,410
im	4,263	2,392				
v	3,987	1,818				
q	1,200	4,545				
s	0,688	15,150				
ks	1,000	45,449				

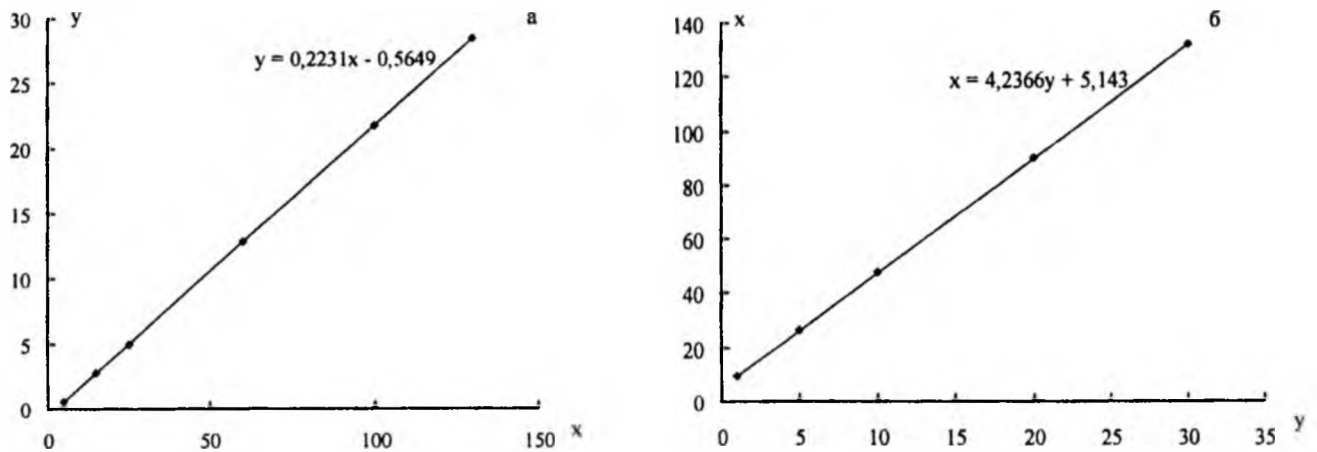


Рис. 2. Лінійний кореляційний зв'язок між стадіями розвитку особин кедра асоціації II (y) та асоціації I (x): $y = f(x)$ (а); $x = \Psi(y)$ (б).

Довірчу ймовірність (надійність результату) та довірчий інтервал (точність результату) для коефіцієнта кореляції знаходили за [5]:

$$P [0,5425 < \rho < 0,9985] = 0,99 \text{ (для } \alpha = 0,01); P [0,7468 < \rho < 0,9969] = 0,95 \text{ (для } \alpha = 0,05).$$

Перевірка нульової гіпотези $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ за критерієм Фішера [5] привела до таких результатів:

$F_p = 18,987$. Табличне значення критерію Фішера [9]:

$F_{0,01} = F_T \{ \alpha = 0,01; f_x = 5; f_y = 5 \} = 11,0$ (для $\alpha = 0,01$); $F_{0,05} = F_T \{ \alpha = 0,05; f_x = 5; f_y = 5 \} = 5,05$ (для $\alpha = 0,05$). Таким чином, отримали нерівності: $F_p > F_{0,01}$ та $F_p > F_{0,05}$, що дозволяє відкинути H_0 з $\alpha = 0,01$ і $\alpha = 0,05$, тобто між генеральними дисперсіями за стадіями розвитку є суттєва різниця, при цьому ступінь нерівності дисперсій:

$$\xi_{0,01} = 1,73 \text{ (для } \alpha = 0,01); \xi_{0,05} = 3,76 \text{ (для } \alpha = 0,05).$$

Перевірка нульової гіпотези $H_0: \mu_x = \mu_y$ за критерієм Стюдента [5] привела до таких результатів $|t_p| = 2,293$; $t_T \{ f = 5,25; \alpha/2 = 0,005 \} = 3,951$ (для $\alpha = 0,01$); $t_T \{ f = 5,25; \alpha/2 = 0,025 \} = 2,540$ (для $\alpha = 0,05$)

[9]. Таким чином, отримали нерівності $|t_p| < t_{0,01}$ та $|t_p| < t_{0,05}$, що дозволяє прийняти H_0 з $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$, тобто між генеральними середніми асоціації I і II кедр за стадіями розвитку немає суттєвої статистичної різниці (ступінь рівності $\xi_{0,01} = 1,72$; $\xi_{0,05} = 1,11$).

Використовуючи r , знайдемо рівняння регресії, що зв'язує випадкову величину y – число особин кедр за стадіями розвитку асоціації II та випадкову величину x – число особин кедр за стадіями розвитку асоціації I за [5] (рис. 2):

$$y = \bar{y} + r \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x}); y = 0,2231x - 0,5649 \text{ або } x = \bar{x} + r \frac{S_x}{S_y} (y - \bar{y}); x = 4,2366y + 5,143.$$

Таблиця 5. Кількість особин кедр ювенільної (j), іматурної (im), віргінійської (v), генеративної (g), сеньїної (s) та квазісеньїної (ks) стадій розвитку чорнично-зеленомохової (асоціація I) та сфагнової (асоціація II) структур.

A_i	Асоціація I	Асоціація II
j	26	6
im	73	19
v	117	25
g	61	10
s	11	3
ks	14	1
Σ	302	64
$\bar{x}, \bar{y},$ (од.)	50,333	10,667
S^2 (од. ²)	1706,271	89,866
S (од.)	41,307	9,480
$\gamma = \frac{S}{\bar{x}}$ (%)	82,07	88,87
$\xi = \frac{S^2}{\bar{x}^2}$ (од.)	33,899	8,425

Як свідчить високий коефіцієнт кореляції ($r = 97,23\%$) та дані рис. 2, на великих пробних площах розподіл за стадіями розвитку кедр статистично рівний для чорнично-зеленомохової (асоціація I) та сфагнової структури (асоціація II).

5. Опис просторового розподілу особин кедр за теоретичним нормальним законом Гаусса

5.1. Асоціація I. За даними табл. 5 розраховували вибіркові групові характеристики розподілу особин кедр за стадіями розвитку на сукупній пробній площі $F_0 = 5625 \text{ м}^2$: вибіркові початкові моменти к-порядку [1, 5]:

$h_1 = 50,3(3)$ од.; $h_2 = 3955,3(3)$ од.²; $h_3 = 373.210,3(3)$ од.³; $h_4 = 38.357.139,3(3)$ од.⁴, що дало можливість розрахувати вибіркові центральні моменти к-порядку: $m_1 = 0$ од.; $m_2 = 1421,8(8)$ од.²; $m_3 = 30.988,4093$ од.³; $m_4 = 4.086.141,093$ од.⁴ Вибірковий показник асиметрії розподілу: $as = 0,578$ порівняли з його середнім квадратичним відхиленням [5]: $\sigma_{as} = 0,690$, а вибірковий показник ексцесу: $ex = -0,979$ порівняли з його середнім квадратичним відхиленням [1, 5]: $\sigma_{ex} = 0,836$. З цих даних витікає, що $|as| < \sigma_{as}$, але $|ex| > \sigma_{ex}$, що не дає за цими показниками однозначно стверджувати, що емпіричний розподіл не протирічить теоретичному нормальному закону розподілу Гаусса. Так як $|ex| < 5 \sigma_{ex} = 4,178$, то це підпорядкування можливе – необхідна перевірка за більш точним та надійним критерієм ω^2 [5]. Для цього розраховуємо за [5]: $(k\omega^2)_p$.

Ступінь відповідності емпіричного розподілу (експериментальних даних) теоретичному розподілу за нормальним законом Гаусса за критерієм ω^2 :

$$\xi_\alpha = \frac{Z_\alpha}{(k\omega^2)_p} \quad (\text{ступінь невідповідності: } \xi_\alpha = \frac{(k\omega^2)_p}{Z_\alpha}), \quad (4)$$

де Z_α – критичне значення критерію $(k\omega^2)_{кр}$ для рівня значущості α .

Знайдено, що $(k\omega^2)_p = 0,0475$, що менше критичного значення $\omega_{кр}^2 = Z_\alpha$:

1) $\alpha = 0,01$ $Z_{0,01} = 0,7435$; ступінь відповідності експериментальних даних нормальному закону розподілу Гаусса: $\xi_{0,01} = 15,65$; 2) $\alpha = 0,05$ $Z_{0,05} = 0,4614$; $\xi_{0,05} = 9,71$; 3) $\alpha = 0,50$ $Z_{0,50} = 0,1184$; $\xi_{0,50} = 2,49$; 4) $\alpha = 0,70$ $Z_{0,70} = 0,05354$; $\xi_{0,70} = 1,13$, тобто з високим рівнем значущості ($\alpha > 0,70$) можна стверджувати, що експериментальні дані розподілу особин кедр за стадіями розвитку чорнично-зеленомохової структури (асоціації I) підпорядковані теоретичному нормальному закону розподілу Гаусса [5].

5.2. Асоціація II. За даними табл. 4 розраховували вибіркові групові характеристики розподілу особин кедр за стадіями розвитку на сукупній пробній площі $F_3 = 1875 \text{ м}^2$: вибіркові початкові моменти k -порядку: $h_1 = 10,6(6) \text{ од.}$; $h_2 = 188,6(6) \text{ од.}^2$; $h_3 = 3954,6(6) \text{ од.}^3$; $h_4 = 88.720,6(6) \text{ од.}^4$, що дало можливість розрахувати вибіркові центральні моменти k -порядку: $m_1 = 0 \text{ од.}$; $m_2 = 74,8882 \text{ од.}^2$; $m_3 = 344,5954, \text{ од.}^3$; $m_4 = 9948,3321 \text{ од.}^4$. Вибірковий показник асиметрії розподілу: $as = 0,532$ порівнювали з його середнім квадратичним відхиленням [1, 5]: $\sigma_{as} = 0,690$, а вибірковий показник ексцесу: $ex = -1,226$ порівнювали з його середнім квадратичним відхиленням [10]: $\sigma_{ex} = 0,836$. З цих даних витікає, що $|as| < \sigma_{as}$, але $|ex| > \sigma_{ex}$, що не дає за цими показниками однозначно стверджувати, що емпіричний розподіл не протирічить теоретичному нормальному закону розподілу Гаусса. Так як $|ex| < 5\sigma_{ex} = 4,178$, то це підпорядкування можливе – необхідна перевірка за більш точним та надійним критерієм ω^2 [5]. Для цього розрахуємо за [5] $(k\omega^2)_p$. Знайдено $(k\omega^2)_p = 0,1760$, що менше критичного значення $\omega_{кр}^2 = z_\alpha$:

1) $\alpha = 0,01$ $Z_{0,01} = 0,7435$; ступінь відповідності експериментальних даних нормальному закону розподілу Гаусса: $\xi_{0,01} = 4,22$; 2) $\alpha = 0,05$ $Z_{0,05} = 0,4614$; $\xi_{0,05} = 2,62$; 3) $\alpha = 0,30$ $Z_{0,30} = 0,1843$; $\xi_{0,30} = 1,05$, тобто з високим рівнем значущості ($\alpha > 0,30$) можна стверджувати, що експериментальні дані розподілу особин кедр за стадіями розвитку сфагнової структури (асоціація II) підпорядковані теоретичному нормальному закону розподілу Гаусса [5].

За оцінками $S^2 \rightarrow \sigma^2$, \bar{x} , $\bar{y} \rightarrow \mu$, $S \rightarrow \sigma$ результати розрахунків $\varphi(x_i)$ та $\varphi(Z_i)$ для експериментальних x_i (асоціація I) та y_i (асоціація II) приведені в табл. 6. На рис. 6 приведена залежність щільності ймовірностей нормованого нормального розподілу $\varphi(Z)$ від нормованої змінної Z для асоціації I (а) та асоціації II (б). На графіках чорними точками показані експериментальні значення $\varphi(Z_i)$.

Таблиця 6. Розрахункові значення щільностей ймовірності розподілу $\varphi(x_i)$, $\varphi(y_i)$ та $\varphi(Z_{i(x)})$, $\varphi(Z_{i(y)})$.

Асоціація I					Асоціація II				
a	x_i	$Z_{i(x)}$	$\varphi(x_i), \cdot 10^{-3} \text{ од.}^{-1}$	$\varphi_i(Z)$	a	y_i	$Z_{i(y)}$	$\varphi(y_i), \cdot 10^{-3} \text{ од.}^{-1}$	$\varphi(Z_i)$
s	11	-0,9522	6,139	0,2536	ks	1	-1,0197	25,027	0,2373
ks	14	-0,8796	6,561	0,2710	s	3	-0,8087	30,352	0,28773
j	26	-0,5891	8,121	0,3355	j	6	-0,4923	37,290	0,35353
\bar{x}	50,333	0,0	9,660	0,3989	q	10	-0,0703	41,989	0,3981
q	61	+0,2582	9,343	0,3859	\bar{y}	10,667	0,0	42,093	0,3989
im	73	+0,5487	8,310	0,3433	im	19	+0,8790	28,603	0,2712
v	117	+1,6139	2,626	0,1085	v	25	+1,5120	13,421	0,1272

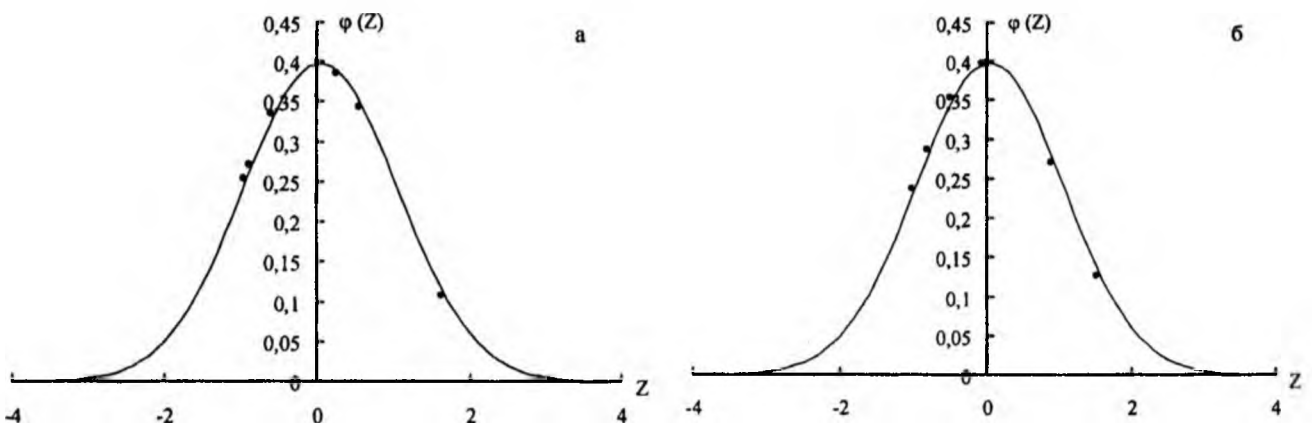


Рис. 3. Нормований нормальний розподіл Гаусса особин кедр за стадіями розвитку чорнично-зеленомохової (а) та сфагнової (б) структури.

5.3. За даними табл. 1 та експериментальними даними розраховували вибіркові початкові h_1, h_2, h_3, h_4 та центральні m_1, m_2, m_3, m_4 моменти k -порядку для просторового розподілу за стадіями розвитку (а) кедр на сукупних пробних площах $F_9 = 5625 \text{ м}^2$ (для асоціації I) та $F_3 = 1875 \text{ м}^2$ (для асоціації II), закладених за схемою 1, які містили 4 елементарні комірки. Використовуючи ці розрахунки, знайшли величини коефіцієнтів асиметрії (as) та ексцесу (ex) (табл. 6), при цьому нормовані коефіцієнти цих показників дорівнювали:

• асоціація I

для асиметрії: $\beta_1 = 0,189$ (j); 0,963 (im); 0,720 (v); 0,029 (q); 0,243 (s); 0,790 (ks);

для ексцесу: $\beta_2 = 1,846$ (j); 2,181 (im); 2,071 (v); 1,224 (q); 1,628 (s); 2,185 (ks);

• асоціація II

для асиметрії: $\beta_1 = 0$ (j); 0,519 (im); 0,248 (v); 0,790 (q); 0,243 (s); 1,333 (ks);

для ексцесу: $\beta_2 = 1,0$ (j); 1,93 (im); 2,032 (v); 2,185 (q); 1,628 (s); 2,333 (ks).

Таблиця 7. Просторовий розподіл за стадіями розвитку кедр, осереднений нормальним законом Гаусса на сукупних пробних площах 5625 м² (для чорнично-зеленомохової структури) та 1875 м² (для сфагнової структури), закладених за схемою 1 з чотирма елементарними комірками.

A	as	σ_{as}	3 σ_{as}	ex	σ_{ex}	5 σ_{ex}	$(N\omega^2)_p$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
								$\xi_{0,5}$	$\xi_{0,05}$	$\xi_{0,01}$
Асоціація I (чорнично-зеленомохова структура)										
j	0,435	0,717	2,15	-1,154	0,582	2,91	0,0288	4,11	16,0	25,8
im	0,982	0,717	2,15	-0,819	0,582	2,91	0,0825	1,44	5,59	9,01
v	0,848	0,717	2,15	-0,929	0,582	2,91	0,060	1,97	7,69	12,4
q	0,171	0,717	2,15	-1,776	0,582	2,91	0,0635	1,86	7,27	11,7
s	0,493	0,717	2,15	-1,372	0,582	2,91	0,0556	2,13	8,30	13,4
ks	0,889	0,717	2,15	-0,815	0,582	2,91	0,0851	1,39	5,42	8,74
Асоціація I (сфагнова структура)										
j	0	0,717	2,15	-2,0	0,582	2,91	0,0967	1,22	4,77	7,69
im	0,721	0,717	2,15	-1,07	0,582	2,91	0,050	2,37	9,23	14,9
v	0,498	0,717	2,15	-0,968	0,582	2,91	0,0443	2,67	10,4	16,8
q	0,889	0,717	2,15	-0,815	0,582	2,91	0,0851	1,39	5,42	8,74
s	0,493	0,717	2,15	-1,372	0,582	2,91	0,0795	1,49	5,80	9,35
ks	1,155	0,717	2,15	-0,667	0,582	2,91	0,1823	1,01*	2,53	4,08

* $\xi_{0,3}$ ($\alpha = 0,3$).

Порівняння показників as і ex із своїми середніми квадратичними відхиленнями σ_{as} і σ_{ex} , показало, що за нерівностями $|as| > \sigma_{as}$, $|ex| > \sigma_{ex}$ не можна однозначно прийняти гіпотезу про підпорядкування емпіричних даних теоретичному нормальному закону розподілу Гаусса, але з нерівностей $|as| < 3\sigma_{as}$, $|ex| < 5\sigma_{ex}$ таку можливість не відкидаємо. Проведемо розрахунки за критерієм ω^2 : значення $(N\omega^2)_p$ приведено в табл. 7. Складемо нерівність $(N\omega^2)_p \leq Z_\alpha$.

Як видно з табл. 7, $(N\omega^2)_p < Z_{0,5} < Z_{0,05} < Z_{0,01}$, де Z_α – критичне значення критерію $(N\omega^2)$ для рівня значущості $\alpha = 0,5; 0,05; 0,01$ (для ks асоціації II $\alpha = 0,3; 0,05; 0,01$): для $\alpha = 0,5$ $Z_{0,5} = 0,1184$; для $\alpha = 0,3$ $Z_{0,3} = 0,1843$; для $\alpha = 0,05$ $Z_{0,05} = 0,4614$; для $\alpha = 0,01$ $Z_{0,01} = 0,7435$. Як видно з табл. 7, $(N\omega^2)_p$ відповідає рівню значущості $\alpha > 0,5$ ($\alpha > 0,3$ для ks асоціації II), що підтверджує нульову гіпотезу, за якою нормальний закон розподілу особин кедр за стадіями розвитку для чорнично-зеленомохової та сфагнової структур не протирічить експериментальним даним, при цьому ступінь відповідності дорівнює ξ_α , де $\alpha = 0,5; 0,3; 0,05; 0,01$ (табл. 7).

Висновки

1. За допомогою критеріїв Фішера, Кохрана та Бартлета встановлено статистичну рівність ряду генеральних дисперсій за стадіями розвитку особин кедр для чорнично-зеленомохової структури та статистичну нерівність для сфагнової структури, при цьому співвідношення середніх ступенів рівності асоціацій I та II за критеріями Кохрана + Бартлета складає: $\bar{\xi}_{0,01(I)} / \bar{\xi}_{0,01(II)} = 1,61$ (для $\alpha = 0,01$) та $\bar{\xi}_{0,05(I)} / \bar{\xi}_{0,05(II)} = 1,55$ (для $\alpha = 0,05$), а середніх ступенів нерівності асоціацій II та I за критеріями Кохрана + Бартлета складає: $\bar{\xi}_{0,01(II)} / \bar{\xi}_{0,01(I)} = 1,65$ (для $\alpha = 0,01$) та $\bar{\xi}_{0,05(II)} / \bar{\xi}_{0,05(I)} = 1,71$ (для $\alpha = 0,05$).
2. За критерієм Фішера як відношенням міжрядкової дисперсії S_1^2 до внутрішньо рядкової дисперсії S_2^2 доведено, що ряд генеральних середніх за стадіями розвитку кедр статистично нерівний для чорнично-зеленомохової структури (асоціація I) зі ступенем нерівності $\xi_{0,01} = 5,39$ та $\xi_{0,05} = 8,27$ та оцінкою генеральної дисперсії середніх $S_\mu^2 = 84,991$ од.² та статистично рівний для сфагнової структури (асоціація II) зі ступенем рівності $\xi_{0,01} = 1,57$ та $\xi_{0,05} = 1,02$ та оцінкою генеральної

дисперсії середніх $S_{\mu}^2 = 2,956 \text{ од.}^2$, при цьому співвідношення ступенів нерівності для асоціацій I та II складає: $\xi_{0,01(I)} / \xi_{0,01(II)} = 8,42$ та $\xi_{0,05(I)} / \xi_{0,05(II)} = 8,44$, співвідношення ступенів рівності для асоціацій II і I складає: $\xi_{0,01(II)} / \xi_{0,01(I)} = 8,26$ та $\xi_{0,05(II)} / \xi_{0,05(I)} = 8,5$, а співвідношення оцінок дисперсій середніх асоціацій I і II складає: $S_{\mu(I)}^2 / S_{\mu(II)}^2 = 28,75$.

3. За результатами дослідження просторового розподілу особин кедр чорнично-зеленомохової структури (асоціації I) за стадіями розвитку створений мажорантний ряд за ступенем контагіозності:

$$\zeta_v < \zeta_{im} < \zeta_q < \zeta_j < \zeta_{ks} < \zeta_s$$

тобто в ряду:

сенільної (s) > квазісенільної (ks) > ювенільної (j) > генеративної (q) > іматурної (im) > віргінійної (v) стадій розвитку кедр чорнично-зеленомохової структури ступінь контагіозності просторового розподілу зменшується, при цьому для s, ks, j – стадій розвитку розподіл особин кедр носить чистий сильноконтагіозний характер, для im, q – стадій розвитку – слабкий контагіозний характер із зсувом до рівномірного розподілу та для v – стадії розвитку – випадковий характер із зсувом до слабого контагіозного та рівномірного характерів розподілу. Для особин кедр сфагнової структури (асоціації II) ступінь контагіозності просторового розподілу не залежить від стадій розвитку кедр:

$\zeta_j = \zeta_{im} = \zeta_v = \zeta_q = \zeta_s = \zeta_{ks}$, при цьому генеральний показник просторової агрегації за $(Z_{\alpha} + \chi_{\alpha}^2)$ знаходиться в межах $E = (7,001 \pm 0,816)$ [од.] $\gg 1$ для довірчої ймовірності $P = 99\%$ та $E = (5,41 \pm 0,05)$ [од.] $\gg 1$ для $P = 95\%$, тобто з високою надійністю та точністю результату стверджується рівність генерального показника просторової агрегації за стадіями розвитку особин кедр сфагнової структури та сильна контагіозність розподілу на пробних площах генеральних сукупностей особин кедр.

4. Вперше у науковий обіг у математичні методи в біології введено означення ступеня щільності (ступеня лінійності) лінійного зв'язку за Z-функцією, критичним значенням коефіцієнта кореляції, критерію Стюдента.
5. Знайдено, що між чорнично-зеленомоховою та сфагновою структурами особин кедр за стадіями розвитку існує щільний лінійний кореляційний зв'язок (коефіцієнт кореляції 97,23%) і показано, що на великих пробних площах [F_9 (I) = 5625 м² та F_3 (II) = 1875 м²] розподіл за стадіями розвитку кедр статистично рівний для чорнично-зеленомохової та сфагнової структури (коефіцієнт варіації особин γ (I) = 82,07% та γ (II) = 88,87%), при цьому між генеральними дисперсіями існує суттєва статистична різниця [ступінь нерівності $\xi_{0,01} = 1,73$ (для рівня значущості $\alpha = 0,01$) та $\xi_{0,05} = 3,76$ (для $\alpha = 0,05$)], а між генеральними середніми такої різниці немає [ступінь рівності $\xi_{0,01} = 1,72$ (для $\alpha = 0,01$) та $\xi_{0,05} = 1,11$ (для $\alpha = 0,05$)].
6. Показано, що розподіл особин кедр на узагальнених пробних площах за стадіями розвитку підпорядкований нормальному закону розподілу Гаусса з високим рівнем значущості.

Література

- Сіренко О. Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 2. Статистичні характеристики. Дисперсійний аналіз (статистична рівність ряду генеральних дисперсій) / О. Г. Сіренко, О. В. Кузишин // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Серія Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І. Я., 2008. – Вип. X. – С. 95 – 113: іл. 1, табл. 6. – Бібліогр.: с. 112 – 113 (34 назви).
- Сіренко О. Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 5. Статистичні характеристики. Дисперсійний аналіз (статистична рівність ряду математичних сподівань особин кедр та ялини) / О. Г. Сіренко, О. В. Кузишин // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Серія Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І. Я., 2008. – Вип. XI. – С. 98 – 118: іл. 8, табл. 13. – Бібліогр.: с. 117– 118 (12 назв).
- Сіренко О. Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 3. Статистичні характеристики. Кореляційний та регресійний аналізи / О. Г. Сіренко, О. В. Кузишин, Л. Я. Мідак // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Серія Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І. Я., 2008. – Вип. XI. – С. 76 - 89: іл. 4, табл. 7. – Бібліогр.: с. 89 (15 назв).
- Сіренко О. Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 4. Розподіл особин сосни кедрової європейської (*Pinus cembra* L.) та ялини звичайної (*Picea abies*) за нормальним законом Гаусса / О. Г. Сіренко, О. В. Кузишин, Л. Я. Мідак // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Серія Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І. Я., 2008. – Вип. XI. – С. 90 – 98: іл. 1, табл. 1. – Бібліогр.: с. 97-98 (16 назв).
- Степнов М. Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний / Михаил Никитович Степнов. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 назв.).
- Зажигаев Л. С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л. С. Зажи́гаев, А. А. Ки́шьян, Ю. И. Романиков. – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.: ил., табл. – Приложение: с. 144-229 (16 табл.). – Библиогр.: с. 230-231.

7. Тихомиров В.Б. Планирование и анализ эксперимента / Владислав Борисович Тихомиров. – М.: Легкая индустрия, 1974. – 264 с.: ил., табл. – Приложение: с. 255-257 (4 табл.). – Библиогр.: с. 258-261 (99 наименов.).
8. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник для самост. вивчення дисц. [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / А.Б. Волощенко, І.А. Джалладова; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 14 / 18.2-613 від 22.03.2002 р.]. – К.: Київ. Нац. економ. ун-т, 2003. – 256 с.: ил., табл. – Приклади розв. завдань і вправи для самост. розв'язання в кінці розд. – Блочно-модул. контроль: с. 183 – 203 (9 варіантів). – Відповіді: с. 204 – 216. – – Бібліогр.: с. 217 (18 назв). – Додатки: с. 218 – 254 (8 табл.). – ISBN 966 – 574 – 459– 3.
9. Бендат Дж.С. Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В.Магушевского, В.Е.Привальского; под ред. И.Н.Коваленко. – М.: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод с изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).
10. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1965. – Табл. 4.5 а.
11. Смирнов Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1965. – Табл. II.
12. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – 2-е изд., перераб. и допол. – М.: Наука, 1976. – 280 с.: ил., табл. – Библиогр. в конце гл.

Автори висловлюють щирю подяку к.х.н., доценту Мідак Л.Я. за цінні зауваження, консультації та допомогу при підготовці статті до друку.

Стаття поступила до редакції 2.09.2008 р.; прийнята до друку 15.09.2008 р.

Сіренко О.Г. – провідний інженер відділу природної флори;

Кузишин О.В. – асистент кафедри теоретичної і прикладної хімії, магістр.

Рецензент: кандидат хімічних наук Мідак Л.Я., доцент кафедри теоретичної і прикладної хімії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

УДК 62.50; 57.087.1

СТАН ПОПУЛЯЦІЙ СОСНИ КЕДРОВОЇ ЄВРОПЕЙСЬКОЇ (*PINUS CEMBRA L.*) В УКРАЇНСЬКИХ КАРПАТАХ: ЕКОЛОГІЧНА ПРИУРОЧЕНІСТЬ ДЕРЕВОСТАНІВ (ЗАГАЛЬНИЙ ТА КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗИ)

О.Г. Сіренко¹, О.В. Кузишин², Л.Я. Мідак²

¹Національний ботанічний сад ім. М.М. Гришка Національної Академії Наук України,
вул. Тімірязєвська, 1, Київ, 01014, Україна

²Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76025, Україна

*Досліджено вплив температури, швидкості вітру, вологості, кислотності та фізико-хімічних властивостей ґрунтів, експозиції та крутизни схилу, висоти над рівнем моря на стан популяцій *Pinus cembra*. За допомогою кореляційного аналізу встановлено щільність лінійного зв'язку, ступінь лінійності і нелінійності зв'язків між складом насаджень, висотою, діаметром та віком особин, бонітетом, показною площею та повнотою насаджень, експозицією та крутизною схилу, типом лісу та висотою над рівнем моря.*

Ключові слова: *Pinus cembra L.*, коефіцієнт кореляції, температура, вологість, ґрунт, висота і діаметр особин, бонітет, щільність насаджень.

*Kuzyshyn O.V., Midak L.Ya. The state of populations of *Pinus cembra L.* in the Ukrainian Carpathians: ecological confinement of stock of trees (general and correlative analysis). The influence of temperature, speed of wind, moisture, acidity and physicochemical properties of soil, exposition and steepness of inclination, floor line on the populations' state *Pinus cembra* has been investigated. The tightness of linear linkage, coefficient of linearity and nonlinearity of planting content, height, diameter and age of species, quality index, exposition and steepness of inclination, type of woods and floor line are determined.*