# Системи лінійних рівнянь

**Означення.**

Рівняння з $n$ невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$ називається *лінійним*, якщо його можна записати у такому вигляді:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \tag{1}$$

де $a_1, a_2, ..., a_n, b$ – деякі числа.

**Означення.**

Сукупність записана у певному порядку $n$ чисел $(l_1, l_2, ..., l_n)$ називається розв'язком рівняння (1), якщо після заміни в ньому невідомих $x_i$ відповідними числами $l_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, воно перетвориться на правильну рівність.

## Загальний вигляд системи з $m$ лінійних рівнянь і $n$ невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n & = & b_m \end{cases}$$

## **Означення.**

Розв'язком системи лінійних рівнянь називається кожна сукупність записаних у певному порядку чисел $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, що є розв'язком кожного з рівнянь цієї системи.

або інакше

## **Означення.**

Розв'язком системи лінійних рівнянь називається така сукупність записаних у певному порядку чисел $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, що кожне з рівнянь системи перетворюється на правильну рівність після заміни у ньому невідомих $x_i$ відповідними числами $l_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Якщо система лінійних рівнянь має розв'язки, то називаємо її *сумісною*.

Якщо система лінійних рівнянь не має розв'язків, то називаємо її *несумісною*.

Сумісна система лінійних рівнянь може мати єдиний розв'язок (називаємо її *визначеною*) або безліч (називаємо її *невизначеною*.)

# Еквівалентні системи лінійних рівнянь.

Дві СЛР називаємо *еквівалентними*, якщо кожен розв'язок однієї з них є розв'язком іншої і навпаки, або якщо обидві системи несумісні.

Інакше:

Дві СЛР називаємо *еквівалентними*, якщо множини їх розв'язків збігаються.

## Матриці

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + ... + a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + ... + a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\ ... & & \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + ... + a_{mn}\cdot x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

## Матриця системи (1)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

## Розширена матриця системи (1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

1. Транспозиція (переставляння) двох рядків (стовпців) матриці.
2. Множення рядка (стовпця) матриці на деяке відмінне від нуля число.
3. Додавання до одного рядка (стовпця) матриці іншого її рядка (стовпця), помноженого на деяке число.

**Теорема**

Якщо матрицю $\overline{B}$ можна отримати з матриці $\overline{A}$, виконавши скінченну кількість елементарних перетворень **рядків**, то система лінійних рівнянь $S(\overline{B})$ еквівалентна системі лінійних рівнянь $S(\overline{A})$.

## Означення

*Ступінчастою* матрицею називається матриця, що задовільняє наступні умови:

1. Якщо в $i-$му рядку перший відмінний від нуля елемент стоїть на $k-$му місці, то в наступному $i+1$-му рядку на перших $k$ місцях стоять нулі.
2. Якщо коже елемент $i-$го рядка дорівнює нулю. то і кожен елемент наступного $i+1$-го рядка теє дорівнює нулю.

## Теорема

Кожну матрицю скінченним числом елементарних перетворень рядків можна звести до ступінчастого вигляду.

# Дії з матрицями

# Лінійні дії з матрицями

Додавати і віднімати можна матриці однакових розмірів.

$$A_{n\times m} \pm B_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n_2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1m} \pm b_{1m} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2m} \pm b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & a_{n2} \pm b_{n2} & \dots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{pmatrix}$$

Нехай $\alpha \in R$

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n_2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n_2} & \dots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

Для матриці $A$ **протилежною** називаємо матрицю $-A = (-1) \cdot A$.

# Властивості лінійних дій з матрицями

1) $A + B = B + A$ – комутативність
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ – асоціативність
3) $A_{n\times m} + O_{n\times m}$, де $O_{n\times m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
4) $A + (-A) = O$
5) $1 \cdot A = A$
6) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ — дистрибутивність множення матриці на число відносно додавання дійсних чисел
7) $\alpha \cdot (A + B)\alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ — дистрибутивність множення матриці на число відносно додавання матриць
8) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$ – асоціативність множення матриць на число.

Називаємо матрицю $A$ **узгодженою** з матрицею $B$, якщо кількість стовпців матриці $A$ співпадає з кількістю рядків матриці $B$.

Множити можна тільки узгоджені матриці.

$$A_{n\times k} \times B_{k\times m} = C_{n\times m}$$

$$A_{n\times k} \times B_{k\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1k}b_{k1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + ... + a_{1k}b_{k2}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + ... + a_{2k}b_{k1}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj}$$

# Множення матриць не комутативне. Приклад

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Помножимо $A \cdot B :$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Помножимо $B \cdot A :$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Бачимо, що $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Квадратну матрицю $n$- го порядку $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ називаємо **одиничною** матрицею.

Властивості:

- $A_{n\times m} \cdot E_m = A_{n\times m}$
- $E_n \cdot A_{n\times m} = A_{n\times m}$

Властивості множення матриць:

1) $(A_{n\times m} \cdot B_{m\times k}) \cdot C_{k\times l} = A_{n\times m} \cdot (B_{m\times k} \cdot C_{k\times l})$

2) $C_{l\times n} \cdot (A_{n\times m} + B_{n\times m}) = C_{l\times n} \cdot A_{n\times m} + C_{l\times n} \cdot B_{n\times m}$

   $(A_{n\times m} + B_{n\times m}) \cdot C_{m\times l} = A_{n\times m} \cdot C_{m\times l} + B_{n\times m} \cdot C_{m\times l}$

3) $\alpha(A_{n\times m} \cdot B_{m\times k}) = (\alpha A_{n\times m}) \cdot B_{m\times k}$

Тільки квадратну матрицю можна помножити саму на себе.

Якщо у матриці $A$ поміняти рядки і стовпці місцями, то отримаємо **транспоновану** матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

**Властивості транспонування**

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
3) $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

**Оберненою** до матриці $A$ називаємо матрицю $A^{-1}$ таку, що $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Обернена матриця існує тільки для квадратної матриці, визначник якої відмінний від 0.

**Властивості:**

1) $(A^{-1})^{-1} = A$
2) $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$
3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}_{n\times n} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ де $A_{ij}$ – алгебраїчне доповнення до елемента $a_{ij}$ матриці $A$, $\Delta$ – визначник матриці $A$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Розв'яжемо рівняння $X \cdot A = B$, де $X$ – невідома матриця, $A, B$ – відомі.

Домножимо рівняння на $A^{-1}$ справа:

$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$.

Скористаємось асоціативністю множення матриць:

$X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}$.

З означення оберненої матриці:

$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$

З властивості одиничної матриці:

$X = B \cdot A^{-1}$ – формула для знаходження $X$.

Подібними міркуваннями отримаємо формулу для знаходження розв'язку матричного рівняння $A \cdot X = B$ :

$X = A^{-1} \cdot B$.

# Лінійна залежність. Ранг матриці.

Виберемо в матриці $A_{n\times m}$ $k$ рядків та $k$ стовпців.

Матрицю, утворену з елементів матриці $A$, які знаходяться на перетині вибраних $k$ рядків та $k$ стовпців називають **підматрицею** $k$-го порядку матриці $A$ і позначають $A_k$.

Наприклад, для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ однією із її підматриць 2-го порядку є $A_k = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

**Рангом** матриці $A$ називають найбільший з порядків її невироджених підматриць і позначають $rangA$.

Якщо $rangA = r$, то невироджені підматриці порядку $r$ матриці називають **базисними** підматрицями, а їх рядки і стовпці базисними рядками і стовпцями.

Приклад.

Знайдемо ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Усі підматриці 3-го порядку вироджені. Серед підматриць 2-го порядку є невироджена підматриця $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Отже, $rangA = 2$.

Система рядків (стовпців) $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$ однакової довжини (висоти) **лінійно незалежна**, якщо з рівності

$$\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + ... + \alpha_k\vec{a_k} = \vec{0}$$

випливає

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0.$$

Система рядків (стовпців) $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$ однакової довжини (висоти) **лінійно залежна**, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, нерівні одночасно нулю, що

$$\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + ... + \alpha_k\vec{a_k} = \vec{0}.$$

**Критерій лінійної залежності рядків (стовпців).** Система з $k > 1$ рядків (стовпців) лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один із рядків (стовпців) є лінійною комбінацією решти рядків (стовпців).

**Доведення.**($\Rightarrow$) Нехай система рядків $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$ лінійно залежна. Тоді правдива рівність

$$\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_k \vec{a_k} = \vec{0},$$

у якій не всі коефіцієнти дорівнюють нулю. Припустимо, що саме $\alpha_1 \neq 0$, тоді цю рівність можна переписати так

$$\vec{a_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a_2} - ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\vec{a_k}.$$

Отже, рядок $\vec{a_1}$ лінійно виражається через решту рядків.
($\Leftarrow$) Якщо один із рядків (нехай це $\vec{a_1}$) є лінійною комбінацією решти рядків, тобто

$$\vec{a_1} = \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_k \vec{a_k},$$

то

$$\vec{a_1} + (-\alpha_2)\vec{a_2} + ... + (-\alpha_k)\vec{a_k} = \vec{0},$$

де принаймні коефіцієнт при $\vec{a_1}$ відмінний від нуля.
Отже, система векторів $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$ лінійно залежна.

# Виродженість матриці

- Квадратна матриця $n$-го порядку вироджена тоді і тільки тоді, коли її рядки (стовпці) лінійно залежні.
- Визначник квадратної матриці $n$-го порядку дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли її ранг менший за $n$.
- Визначник квадратної матриці $n$-го порядку відмінний від 0 тоді і тільки тоді, коли її рядки (стовпці) лінійно незалежні.
- Рядки $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли визначник матриці, що складається з цих рядків, дорівнює нулю.

# Лінійний простір

# Означення лінійного простору

Множина $L$ називається **лінійним (векторним) простором**, якщо:

1. Задано закон, згідно з яким двом елементам $x, y \in L$ відповідає елемент множини $L$, названий їх сумою $x + y$.
2. Задано закон, згідно з яким кожному елементу $x \in L$ і кожному числу $\alpha \in R$ відповідає елемент $\alpha x$, який названий добутком елемента на число.
3. Виконується 8 аксіом лінійного простору.
   1. $x + y = y + x$;
   2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
   3. $x + e = e + x = x$. Елемент $e$ називається нульовим;
   4. для кожного $x \in L$ існує такий елемент $x' \in L$, що $x + x' = e$. Елемент $x'$ називається протилежним до $x$
   5. $1 \cdot x = x$;
   6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$;
   7. $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$;
   8. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

# Наслідки з аксіом

1. Існує лише один нульовий елемент.
   Доведення. Припустимо, що існує $e' \neq e$, що $x + e' = e' + x = x$. Тоді
   $$e = e + e' = e'.$$
2. Для будь-якого $x \in L : 0 \cdot x = e$.
   Доведення. $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, звідки $0 \cdot x = e$.
3. Існує лише один протилежний елемент $x' = (-1)x$.
   Доведення. Нехай існує ще один протилежний до $x$ елемент $x''$. Тоді
   $$x'' = x'' + e = x'' + (x + x') = (x'' + x) + x' = e + x' = x'.$$
   Тепер
   $$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = e.$$
   Отже, $(-1)x$ – протилежний до $x$. Значить $x' = (-1) \cdot x$. Надалі позначатимемо $x' = -x$.
4. Для будь-якого $\alpha \in R : \alpha \cdot e = e$.
   Доведення. $\alpha \cdot e = \alpha \cdot (e + e) = \alpha \cdot e + \alpha \cdot e$. Отже, $\alpha \cdot e = e$.

# Приклади

1. Множина дійсних чисел.
2. Множина наборів $(x_1, x_2, ..., x_n)$, де $x_1, x_2, ..., x_n$ – дійсні числа, операції додавання і множення на число - покоординатні:
$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n);$$
$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$
3. Множина геометричних векторів простору.
4. Множина матриць однакового розміру $m \times n$ з операціями додавання матриць і множення матриці на число.
5. Множина всіх многочленів степеня $\leq n$.
6. Множина всіх функцій, неперервних на заданому відрізку. Операції додавання і множення на число поточкові. Тобто
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

# Розмірність і базис лінійного простору

Якщо в лінійному просторі $L$ виконуються дві умови:
1. існує система з $n$ лінійно незалежних векторів
2. кожна система з $n+1$ векторів лінійно залежна,
тоді $n$ – **розмірність** простору $L$. пишемо $dimL = n$.

**Зауваження.** Якщо простір складається з одного елемента, то його розмірність дорівнює 0.

**Базисом** називається будь-яка впорядкована система з $n$ лінійно незалежних векторів.

Нехай $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ – лінійно незалежна система векторів $n$-вимірного векторного простору $L$. Тоді для будь-якого вектора $\vec{x}$ система з $n+1$ вектора лінійно залежна, отже,

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + ... + \alpha_n\vec{e_n}.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – координати вектора $\vec{x}$ у базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$.

Координати вектора в базисі визначаються однозначно.

# Підпростір лінійного простору

Непорожня підмножина $L'$ векторного простору $L$ називається **лінійним підпростором** простору $L$, якщо вона є лінійним простором відносно операцій, заданих на $L$.

**Теорема.** Для того. щоб непорожня підмножина $L'$ векторного простору $L$ була лінійним підпростором цього простору, достатньо виконання таких умов:

1. Якщо $x \in L'$ і $y \in L'$, то $(x + y) \in L'$;
2. Якщо $x \in L'$ і $\alpha \in R$, то $\alpha x \in L'$.

**Доведення.** Справді, на множині $L'$ визначено операцію додавання: елементи множини $L'$ додають як вектори простору $L$ і, згідно з (1) ця операція не виводить за межі $L'$. Ця операція асоціативна і комутативна, оскільки такі властивості вона має в $L$.У множині $L'$ є нульовий елемент, адже, згідно з (2), якщо $x \in L'$, то й $0 \cdot x \in L'$.Але ми знаємо, що $0 \cdot x = e$. Тобто, $e \in L'$. Також для кожного $x \in L'$ в $L'$ міститься протилежний елемент $-x = (-1) \cdot x$ (знову-таки, згідно (2)).
З умови (2) випливає, що на $L'$ введено операцію множення на число і властивості 5-8 з означення лінійного простору виконуються, оскільки вони виконуються в просторі $L$.

**Теорема.** Розмірність будь-якого підпростору векторного простору не більша, ніж розмірність простору.

Нехай

$$a_1, a_2, ..., a_m$$

є довільно вибрана система векторів простору $L$.Позначимо $L(a_1, a_2, ..., a_m)$ множину всіх векторів, які є лінійними комбінаціями векторів цієї системи. Множина $L(a_1, a_2, ..., a_m)$ є лінійним підпростором простору $L$.
Справді, якщо $x, y \in L(a_1, a_2, ..., a_m)$, тобто

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_m a_m$$

і

$$y = y_1 a_1 + y_2 a_2 + ... + y_m a_m,$$

де $x_k, y_k$ – деякі числа, то

$$x + y = (x_1 + y_1)a_1 + (x_2 + y_2)a_2 + ... + (x_m + y_m)a_m.$$

Отже, $(x + y) \in L(a_1, a_2, ..., a_m)$.
У множині $L(a_1, a_2, ..., a_m)$ також міститься елемент $\alpha x = (\alpha x_1)a_1 + (\alpha x_2)a_2 + ... + (\alpha x_m)a_m$.
Підпростір $L(a_1, a_2, ..., a_m)$ називають **лінійною оболонкою** векторів $a_1, a_2, ..., a_m \in L$.

# Координати вектора

Нехай $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ – будь-який базис простору $L$. Тоді кожний вектор $\vec{a} \in L$ можна подати у вигляді $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + ... + \alpha_n \vec{e_n}$, де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – деякі дійсні числа. Доведемо, що цей запис єдиний.Припустимо, що існують два зображення:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + ... + \alpha_n \vec{e_n}$$

і

$$\vec{a} = \beta_1 \vec{e_1} + \beta_2 \vec{e_2} + ... + \beta_n \vec{e_n}.$$

Тоді, почленно віднімаючи ці рівності, отримаємо:

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{e_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e_2} + ... + (\alpha_n - \beta_n)\vec{e_n}.$$

Оскільки вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ лінійно незалежні, то така рівність можлива лише коли

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0,$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = 0,$$

$$...$$

$$\alpha_n - \beta_n = 0.$$

Отже, $\alpha_i = \beta_i, \ i = 1, ..., n$.
Числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ називають **координатами вектора** $\vec{a}$ у базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$.

Нехай дано в просторі $L$ два різних базиси $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$ і $B' = \{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, ..., \vec{e'_n}\}$.Кожний вектор базису $B'$, як і будь-який вектор простору $L$, однозначно лінійно виражається через вектори базису $B$. Нехай

$$\vec{e'_1} = \alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{12}\vec{e_2} + ... + \alpha_{1n}\vec{e_n},$$

$$\vec{e'_2} = \alpha_{21}\vec{e_1} + \alpha_{22}\vec{e_2} + ... + \alpha_{2n}\vec{e_n},$$

..................

$$\vec{e'_n} = \alpha_{n1}\vec{e_1} + \alpha_{n2}\vec{e_2} + ... + \alpha_{nn}\vec{e_n}.$$

Матриця $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ називається **матрицею переходу** від базису $B$ до базису $B'$.

Нехай вектор $\vec{a}$ у базисі $B$ має координати $x_1, x_2, ..., x_n$, а у базисі $B'$ координати $x'_1, x'_2, ..., x'_n$. Тоді виконується рівність

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

# Лінійний оператор

# Означення лінійного оператора

Всяке відображення векторного простору $L$ у самого себе називається **оператором** на просторі $L$, або **перетворенням** простору $L$. Областю визначення оператора є простір $L$, а множиною значень – деякий підпростір $L$.

Оператор $A$ на просторі $L$ називається лінійним, якщо виконуються наступні умови:

1. $A(x+y) = Ax + Ay$ для всіх $x, y \in L$;
2. $A(\alpha x) = \alpha Ax$ для всіх $x \in L, \alpha \in R$.

**Властивості.** Для кожного лінійного оператора $A$ на просторі $L$ виконуються наступні властивості:

1. $A(\vec{0}) = \vec{0}$;
2. $A(-x) = -Ax$ для всіх $x \in L$;
3. $A(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) = \alpha_1 Ax_1 + ... + \alpha_n Ax_n$.

# Матриця лінійного оператора

Нехай у просторі $L$ задано базис $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$. Лінійний оператор $A$ базисні вектори переводить в деякі вектори $A\vec{e_1}, A\vec{e_2}, ..., A\vec{e_n}$. Ці вектори однозначно виражаються через базис $B$. Наприклад

$$A\vec{e_1} = \alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{12}\vec{e_2} + ... + \alpha_{1n}\vec{e_n},$$

$$A\vec{e_2} = \alpha_{21}\vec{e_1} + \alpha_{22}\vec{e_2} + ... + \alpha_{2n}\vec{e_n},$$

..................

$$A\vec{e_n} = \alpha_{n1}\vec{e_1} + \alpha_{n2}\vec{e_2} + ... + \alpha_{nn}\vec{e_n}.$$

Матрицю $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ називаємо матрицею лінійного оператора $A$.

Якщо вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ оператором $A$ переводиться у вектор $A\vec{x} = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, то має місце рівність

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$