УДК 510;51:62

Б.М. Стефанюк

Межі зростання гармонійного ряду

Новокузнецький державний університет,
м. Новокузнецьк, Російська Федерація

Знайдено верхню межу, яка дорівнює ln2, зростання гармонійного ряду. Уточнено нижню межу, яка дорівнює 0,6055, зростання гармонійного ряду. Отримано вираз для функції частинної суми гармонійного ряду. Розраховані верхні та нижні межі зростання цієї суми. Показано, що існує зв'язок між характеристичними числами гармонійного ряду та числами Фібоначчі та сталою Ейлера.

Ключові слова: гармонійний ряд, межі зростання ряду, частинна сума ряду, числа гармонійности, числа Фібоначчі, стала Ейлера.

B.M. Stefanyuk

Limits of Growth of Harmonic Series

Novokuznetsky State University,
Novokuznetsk, Russian Federation

The upper limit of growth of harmonic series which equals to ln2 has been found. The lower limit of growth of harmonic series which equals to 0,6055 has been specified. An expression for function of partial sum of harmonic series has been obtained. The upper and lower limits of growth this sum have been calculated. It has been shown that there is a connection between characteristic numbers of harmonic series and Fibonacci numbers and Euler constant.

Key words: harmonic series, limits of growth of series, partial sum of series, harmonic numbers, Fibonacci numbers, Euler constant.

Стаття поступила до редакції 12.04.2010; прийнята до друку 28.05.2010.

Вступ

Гармонійний ряд [1]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad (1)$$

застосовують для вирішення прикладних завдань в хемії та хемічній технології.

Чисельним узагальненням ряду (1) є ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad (2)$$

який за $\alpha>1$ збігається, а за $\alpha\leq 1$ розбігається. Між тим, за М.А. Муратовим [2] гармонійний ряд (1) є «якісним узагальненням» ряду (2), тобто являється основою всіх частинних випадків ряду (2) і, відповідно, основою гармонії Природи.

Ряд (2) за $\alpha=1$, тобто ряд (1), знаходиться на межі між збіжністю і розбіжністю, тобто на невичерпній межі гармонії та дисгармонії Природи.

Відомо [1], що різниця частинних сум гармонійного ряду (1) при як завгодно великих, але кінцевих числах N більше 0,5:

$$\left(\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)>0,5\,. \qquad (3)$$

З (3) витікає, що нижня межа зростання ряду (1) на інтервалі [N; 2N] більша за 0,5.

Мета роботи полягала у тому, щоби дати відповідь на питання: чи існує верхня межа зростання гармонійного ряду на цьому ж інтервалі [N; 2N], а також уточнити нижню межу зростання гармонійного ряду на проміжку [N; 2N], знайти верхні та нижні межі зростання частинної суми гармонійного ряду, знайти зв'язок характеристичних чисел гармонійного ряду з іншими гармонійними співвідношеннями.

I. Результати та обговорення

1. Теорема 1. Про верхню межу зростання гармонійного ряду: різниця частинних сум 2N і N членів гармонійного ряду менша за ln2:

$$\left(\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}\right)-\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)<\ln 2=0{,}69314718\ldots \quad \textbf{(4)}$$

Доведення: з частинної суми ряду (1) за n=2N віднімемо частинну суму знакозмінного ряду:

$$\sum_{n=1}^{2N}\left[(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right]. \quad \textbf{(5)}$$

Таким чином, маємо:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2N-1}+\frac{1}{2N}\right)-$$
$$-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N}\right)= \quad \textbf{(6)}$$
$$=0+\frac{2}{2}+0+\frac{2}{4}+0+\frac{2}{6}+\ldots+0+\frac{2}{2N}.$$

Отримана частинна сума ряду чисельно рівносильна частинній сумі гармонійного ряду:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N}=\sum_{n-1}^{N}\frac{1}{n}. \quad \textbf{(7)}$$

Отримаємо чисельну рівність частинних сум:

$$\left(\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}\right)-\left(\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}. \quad \textbf{(8)}$$

Відомо [1], що знакозмінний ряд має межу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2=0{,}69314718\ldots, \quad \textbf{(9)}$$

а частинна сума менше ln2:

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}<\ln 2. \quad \textbf{(10)}$$

Підставляючи (9), (10) у (8), отримаємо:

$$\left(\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}\right)-\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)<\ln 2, \quad \textbf{(11)}$$

що й потрібно було довести.

2. Теорема 2. Про частинну суму гармонійного ряду: частинна сума гармонійного ряду менша за (1+ln2N):

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}<(1+\ln 2N). \quad \textbf{(12)}$$

Доведення: використавши теорему 1, запишемо послідовність нерівностей та візьмемо суму з (13):

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}<\ln 2;\\
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N/2}\frac{1}{n}<\ln 2;\\
\sum_{n=1}^{N/2}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N/4}\frac{1}{n}<\ln 2;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sum_{n=1}^{N/K}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N/2K}\frac{1}{n}<\ln 2;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{1}\frac{1}{n}<\ln 2;
\end{array}\right\}x \quad \textbf{(13)}$$

$$\text{Сума}: \quad \sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{1}\frac{1}{n}<x\ln 2,$$

де x – кількість нерівностей (13):

$$x=\log_2(2N)=\frac{\ln(2N)}{\ln 2}. \quad \textbf{(14)}$$

Зауважимо, що, якщо N/2 є не ціле число, то вираз частинної суми має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{N/K}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\mathrm{Re}[(N/K)-1]}\frac{1}{n}+\frac{1}{NK}, \quad \textbf{(15)}$$

де Re(N/K–1) – ціла частина числа (N/K–1).

Суму (15) необхідно розуміти у такому смислі:

$$2>\sum_{n=1}^{2>R\geq 1}\frac{1}{n}\geq 1. \quad \textbf{(16)}$$

Щоби не послабити нерівність (16), вибираємо менше значення, тобто 1, тоді у підсумку отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}<(1+\ln 2N), \quad \textbf{(17)}$$

що й необхідно було довести.

Надалі будемо використовувати позначення частинної суми у такому вигляді:

$$\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}=S_{2N}. \quad \textbf{(18)}$$

3. Теорема 3. Для N=3 маємо

$$(S_6 - S_3) > 0{,}615 > q\,, \qquad \textbf{(19)}$$

де **q** – певне число, що менше 0,615.

Запишемо нерівности (19) у вигляді (20) та візьмемо суму з них:

$$\left.\begin{array}{l} S_{2N} - S_N > q\,; \\ S_N - S_{N/2} > q\,; \\ S_2 - S_{N/4} > q\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{N/K} - S_{N/2K} > q\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_6 - S_3 > q\,; \end{array}\right\} x \qquad \textbf{(20)}$$

$$\text{Сума}: \quad \overline{S_{2N} - S_3 > xq}\,,$$

де

$$x = \log_2(2N) - \log_2(3) = \frac{\ln(2N)}{\ln 2} - \frac{\ln 3}{\ln 2}\,. \qquad \textbf{(21)}$$

Згідно процедурі, що аналогічна доведенню теореми 2, будемо мати:

$$2{,}0833(3) > S_3 \geq 1{,}8333(3)\,. \qquad \textbf{(22)}$$

Підставляючи (22) у (20), отримаємо:

$$S_{2N} > \frac{q}{\ln 2}\left\{\frac{\ln 2}{q}1{,}8333(3) - \ln 3 + \ln 2N\right\}. \qquad \textbf{(23)}$$

Нехай

$$\frac{\ln 2}{q}1{,}8333(3) - \ln 3 = 1\,, \qquad \textbf{(24)}$$

тоді нижня межа зростання дорівнює:

$$q = \frac{\ln 2 \cdot 1{,}8333(3)}{1 + \ln 3} = 0{,}605528633\dots\,. \qquad \textbf{(25)}$$

І у підсумку будемо мати:

$$S_{2N} > \frac{1{,}8333(3)}{1 + \ln 3}(1 + \ln 2N) = 0{,}873593156(1 + \ln 2N)\,, \qquad \textbf{(26)}$$

що й необхідно було довести.

4. Висновок 1. Ширина коридору зростання гармонійного ряду на проміжку [N; 2N] є сталою:

$$\ln 2 - q = 0{,}087618547\dots \qquad \textbf{(27)}$$

5. Висновок 2. Виявлено, що частинна сума гармонійного ряду знаходиться у проміжку:

$$(0{,}873593156\dots)(1 + \ln 2N) < S_{2N} < (1 + \ln 2N)\,. \qquad \textbf{(28)}$$

6. Подамо фактичне значення частинної суми гармонійного ряду (1) рівністю:

$$S_{2N} = C_{2N}\left[(1 + \ln(2N)\right], \qquad \textbf{(29)}$$

де $\mathbf{C_{2N}}$ є функцією від арґументу 2N, яка приймає певні значення у проміжку $0{,}877582767 < C_{2N} < 1$. Значення функції $\mathbf{C_{2N}}$ для деяких значень арґументу 2N приведені в табл. 1 та на рис. 1.

7. Піддаючи аналізі зростання функції C_{2N}, приходимо до висновку, що цю функцію можна представити у такому вигляді:

$$C_{2N} = \frac{a + \ln(2N)}{b + \ln(2N)}\,, \qquad \textbf{(30)}$$

де ***a*** і ***b*** певні числа ($a<b$).

Для їх розрахунку використаємо дві точки А і В та контрольну точку С (рис. 1). Для цих точок значення функції $\mathbf{C_{2N}}$, розрахованих за (29) та табличними (табл. 1) даними для $\mathbf{S_{2N}}$, дорівнюють:

$$\left.\begin{array}{lll} (\bullet A) & C_6 = 0{,}877582767 & \ln 6 = 1{,}791759469 \\ (\bullet B) & C_{210} = 0{,}933764375 & \ln 210 = 5{,}347107531 \\ (\bullet C) & C_{300} = 0{,}937182183 & \ln 300 = 5{,}703782475 \end{array}\right\} \textbf{(31)}$$

Таблиця 1

Значення функції C_{2N} від арґументу 2N

№ точки	N	2N	0,873593156(1+ln2N) < S_{2N} < (1+ln2N)	C_{2N}
1	3	6	2,438861966 < 2,450000000 < 2,791759469	0,877582767
2	5	10	2,885115734 < 2,9289682 < 3,302585093	0,886871
3	16	32	3,901236321 < 4,0584954 < 4,465735903	0,908808
4	25	50	4,291109680 < 4,4992054 < 4,912023005	0,915958
5	40	80	4,701701633 < 4,9654792 < 5,382026635	0,922604
6	50	100	4,896638313 < 5,1873776 < 5,605170186	0,925463
7	75	150	5,250849856 < 5,5911810 < 6,010635294	0,930215
8	100	200	5,502166946 < 5,8780315 < 6,298317367	0,933270
9	105	210	5,544789699 < 5,926702896 < 6,347107531	0,933764375
10	110	220	5,585429267 < 5,9731151 < 6,393627546	0,93422949
11	128	256	5,717822220 < 6,1243460 < 6,545177444	0,935704
12	140	280	5,796106789 < 6,2137910 < 6,634789603	0,936547
13	150	300	5,856378489 < 6,282665494 < 6,703782475	0,937182183
14	160	320	5,912758900 < 6,3505869 < 6,768320996	0,93828005
15	500	1000	6,908160891 < 7,4757334 < 7,907755279	0,94536731*

* розрахункова величина

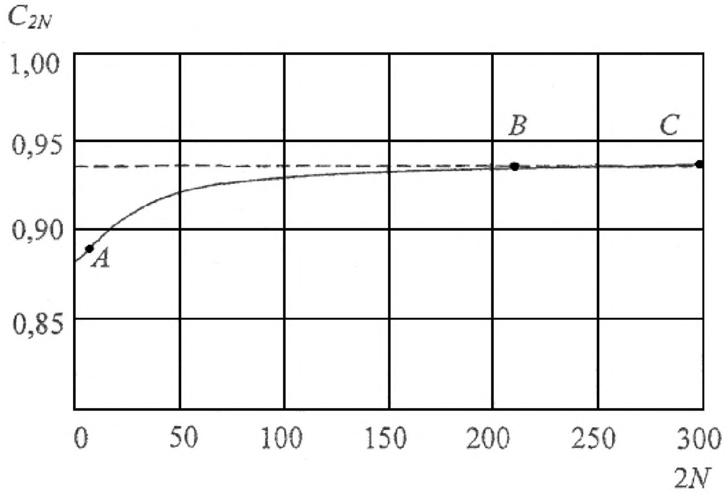

Рис. 1. Залежність функції C_{2N} від аргументу 2N.

Із (30) для точок A та B будемо мати:

$$a = C_{2N} b - (1 - C_{2N}) \ln 2N . \qquad \textbf{(32)}$$

Знайдемо розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 = C_6 b_1 - (1 - C_6) \ln 6 \\ a_1 = C_{210} b_1 - (1 - C_{210}) \ln 210 \end{cases} . \qquad \textbf{(33)}$$

Розрахункові дані за (33):

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}877582767 \cdot b_1 - (1 - 0{,}877582767) \cdot 1{,}791759469 \\ a_1 = 0{,}933764375 \cdot b_1 - (1 - 0{,}933764375) \cdot 5{,}347107531. \end{cases}$$

Звідки:

$$\begin{cases} b_1 = 2{,}399838271 \\ a_1 = 1{,}886714474. \end{cases} \qquad \textbf{(34)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1} = 0{,}786184009 \\ \dfrac{b_1}{a_1} = 1{,}271966852 . \end{cases} \qquad \textbf{(35)}$$

8. За (30) та (34) розрахуємо $C_{2N}=C_{300}=$ 0,936679687, а за (29) (табл. 1) $C_{2N}=C_{300}=$ 0,937182183. Тоді, відносна похибка за C_{300} буде становити:

$$|\eta_C| = \left| \frac{C_{300}[(30);(34)] - C_{300}[(29);\text{табл. 1}]}{C_{300}[(29);\text{табл. 1}]} \right| =$$

$$= 5{,}361775 \cdot 10^{-4} \quad (\text{або } 0{,}053618\%) .$$

За (30) та (34) за формулою (29) будемо мати $S_{2N}=S_{300}=$6,279296875, а за табл. 1 та (29) $S_{2N}=S_{300}=$6,282665. Тоді, відносна похибка за S_{300} буде становити:

$$|\eta_S| = \left| \frac{S_{300}[(30);(34);(29)] - S_{300}[(29);\text{табл. 1}]}{S_{300}[(29);\text{табл. 1}]} \right| =$$

$$= 5{,}360982 \cdot 10^{-4} \quad (\text{або } 0{,}053610\%) .$$

Для вирішення прикладних завдань така відносна похибка є задовільною.

9. Відома гармонійність чисел ***a*** та ***b***, яка виявляється у таких співвідношеннях:

• **числа Фібоначчі** (число «золотого перерізу») [5]:

$$\Phi = 1{,}618033989. \qquad \textbf{(36)}$$

Числа ***a*** і ***b*** гармонійного ряду (1) пов'язані з числом Фібоначчі Ф співвідношеннями:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\Phi^{-1}} = 0{,}786151377 . \qquad \textbf{(37)}$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\Phi} = 1{,}272019651 \qquad \textbf{(38)}$$

Похибка визначення ***a/b*** за (35) порівняно з (37) складає:

$$|\eta_{a/b}| = \left| \frac{a/b(\mathbf{35}) - a/b(\mathbf{37})}{a/b(\mathbf{37})} \right| = 4{,}150855 \cdot 10^{-5}$$

$$(\text{або } 0{,}004151\%) ;$$

$$|\eta_{b/a}| = \left| \frac{b/a(\mathbf{35}) - b/a(\mathbf{38})}{b/a(\mathbf{38})} \right| = 4{,}150801 \cdot 10^{-5}$$

$$(\text{або } 0{,}004151\%) ;$$

• **сталої Ейлера** за [3, 4]:

$$E = 0{,}57721564 \qquad \textbf{(39)}$$

$$\Phi = \exp[2(1 - \sqrt{E})] = 1{,}616892055. \qquad \textbf{(40)}$$

Похибка визначення числа Фібоначчі Ф за (40) порівняно з (36) складає:

$$|\eta_\Phi| = \left| \frac{\Phi(\mathbf{39}) - \Phi(\mathbf{36})}{\Phi(\mathbf{36})} \right| = 7{,}057541 \cdot 10^{-4}$$

$$(\text{або } 0{,}070575\%) .$$

Стала Ейлера дорівнює:

$$E = \left(1 + \ln \sqrt{\Phi^{-1}}\right)^2 = 0{,}576679378, \qquad \textbf{(41)}$$

де Φ^{-1}=0,618033988.

Похибка визначення сталої Ейлера E за (41) порівняно з (39) складає:

$$\eta_E = \left| \frac{E(40) - E(38)}{E(38)} \right| = 9{,}290497 \cdot 10^{-4}$$

(або 0,092905%).

Висновки

1. Знайдено верхню межу зростання гармонійного ряду в проміжку [N; 2N], яка дорівнює ln2=0,69314718…

2. Уточнено нижню межу зростання гармонійного ряду в проміжку [N; 2N], де N≥3, яка більше за 0,5 і дорівнює 0,605528633…

3. Введено у науковий обіг вираз для аналітичної функції частинної суми гармонійного ряду.

4. Знайдені верхні та нижні межі зростання частинної суми гармонічного ряду.

Переклад з рос. Сіренка Г.О.

Література

1. **Маркушевич А.И.** Ряды. – Москва: Наука, 1979. – 192 с.
2. **Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.Т.** Золотое сечение. Три взгляда на природу гармонии. – Москва: Стройиздат, 1990. – 343 с.
3. **Математический энциклопедический** словарь. – Москва: Советская энциклопедия, 1988. – С. 641.
4. **Картавов С.А.** Математические термины. Справочно-библиографический словарь. – Киев: Высшая школа, 1988. – С. 280.
5. **Золотое сечение** // Математическая энциклопедия. – Т.2. – Москва: Сов. энциклопедия, 1979. – 1103 с.: ил. –С. 466–467.

Стефанюк Б.М. – доктор фізико-математичних наук, автор понад ста наукових статей і монографій, винахідник, математик, кібернетик, розробник нових методів вуглевидобутку. А ще – самобутній поет і політкаторжанин комуністичного тоталітаризму. Народився він 1 січня 1930 року в селі Суботові Галицького району на Станіславщині (сучасна Івано-Франківська область) в селянській родині. У 1948 році, завершивши середню освіту у Галичі, вступає до Львівського держуніверситету на фізико-математичний факультет. У квітні 1952 року заарештований за написання «націоналістичних творів» і засуджений військовим трибуналом до 25 років позбавлення волі. Ув'язнення відбував у сумнозвісній Інті, працював на шахтах. 1 липня 1956 року був звільнений за відсутности складу злочину зі зняттям судимости, але продовжити навчання у Львові йому було заборонено. У грудні цього ж року прибув у місто Новокузнецьк Кемеровської области в Росії, де проживає дотепер. З того часу беззмінно працює у Науково-дослідному інституті з видобутку вугілля гідравлічним способом.

Референт Солтис Л.М.

Рецензенти:

Сіренко Г.О. – доктор технічних наук, професор, завідувач катедри теоретичної та прикладної хемії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Солтис Л.М. – аспірант катедри теоретичної та прикладної хемії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис

Уточненя та зауваги до статті Б.М. Стефанюка «Межі зростання гармонійного ряду»

1. Гармонійний ряд. Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{1}$$

носить назву гармонійного [1], кожний член якого, починаючи з n=2, є **гармонійним (h) середнім** [2]:

$$\overline{n}_h = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{n_i} \right) \Big/ N} \tag{2}$$