

Міністерство освіти і науки України  
Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника

О. В. Махней

**ПРАКТИКУМ З  
МАТЕМАТИЧНОГО  
МОДЕЛЮВАННЯ**

Навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів  
спеціальностей «Математика», «Прикладна математика»

Івано-Франківськ  
2022

УДК 004.94:519.87  
ББК 22.18  
М 36

*Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів спеціальностей «Математика», «Прикладна математика» (протокол № 9 від 19 травня 2022 р.).*

**Рецензенти:**

*П'янило Я. Д.*, доктор технічних наук (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача);

*Власій О. О.*, кандидат технічних наук (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника).

**М36 Махней О. В. Практикум з математичного моделювання** : навчальний посібник. — Івано-Франківськ : Голіней, 2022. — 172 с.

Посібник містить короткий теоретичний матеріал, приклади розв'язування типових задач, підбір задач для практичних занять і самостійної роботи з математичного моделювання. Містить понад 60 прикладів і задач з детальним розв'язуванням.

Для студентів спеціальностей «Математика» і «Прикладна математика». Може бути корисним для студентів інженерно-технічних та природничих спеціальностей.

**УДК 004.94:519.87**  
**ББК 22.18**

© Махней О. В., 2022.

---

## Зміст

Передмова . . . . .	4
1. Диференціальні моделі . . . . .	5
2. Скінченні автомати . . . . .	17
3. Мережі Петрі . . . . .	30
4. Аналітичне моделювання систем масового обслуговування . . . . .	47
5. Основи мови імітаційного моделювання GPSS World . . . . .	69
6. Додаткові можливості мови і середовища GPSS World . . . . .	96
7. Моделювання випадкових величин . . . . .	111
8. Емпіричні розподіли і їхнє моделювання . . . . .	133
9. Вибір теоретичних розподілів . . . . .	144
10. Планування експерименту . . . . .	167
Список рекомендованої літератури . . . . .	170

## Передмова

Моделювання — це потужний універсальний метод дослідження й оцінювання ефективності різноманітних систем. Під математичним моделюванням розуміють процес створення для заданого реального об'єкта деякої математичної моделі, якою може бути як система рівнянь, так і комп'ютерна програма. Математичне моделювання широко використовують у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки.

Метою пропонованого практикуму з математичного моделювання є ознайомлення студентів із розв'язуванням задач з різноманітних методів математичного моделювання.

Практикум містить десять тем. До кожної теми наведено короткі теоретичні відомості, рекомендовану літературу, розв'язані типові задачі, запропоновані вправи для аудиторної і самостійної роботи. Кінець розв'язаних прикладів позначається символом ■, проте у тих випадках, де була можливість «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу.

Практикум написаний на основі досвіду проведення автором практичних занять з математичного моделювання на факультеті математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника для студентів спеціальностей «Математика» і «Прикладна математика».

## Тема 1. Диференціальні моделі

### *Короткі теоретичні відомості*

Диференціальними називають моделі, які задаються з допомогою диференціальних рівнянь. Найпоширеніший метод побудови диференціальних рівнянь полягає у використанні фундаментальних законів природи у конкретній ситуації, таких як другий закон Ньютона, закон розчинення речовини, закон Гука та інші.

Можна рекомендувати дотримуватись такої послідовності дій при складанні і дослідженні диференціальних моделей:

- 1) встановити величини, які змінюються у заданому явищі чи процесі, і виявити закони (формули) відповідної науки, які ці величини пов'язують;
- 2) вибрати незалежні змінні і функції цих змінних, які потрібно знайти;
- 3) виходячи з відомих даних, визначити початкові, крайові або інші умови, які накладаються на шукані функції;
- 4) виразити всі величини через незалежні змінні, шукані функції та їхні похідні або прирости незалежних змінних і функцій;
- 5) виходячи з закону, який описує задане явище, або отриманої залежності, скласти диференціальне рівняння чи систему таких рівнянь;
- 6) зінтегрувати одержані диференціальні рівняння;
- 7) якщо задані початкові чи інші умови, то знайти частинний розв'язок, який ці умови задовольняє;
- 8) за необхідності здійснити дослідження одержаного розв'язку.

*Рекомендована література:* [1, с. 9–64], [9, с. 23–46], [11, с. 15–226], [13, с. 11–92].

### Розв'язування типових вправ і задач

**Приклад 1.1.** З деякої висоти вертикально вниз кинуте тіло масою  $m$ . Знайти закон зміни швидкості  $v$  падіння цього тіла від часу  $t$ , якщо на нього діє сила ваги і гальмівна сила опору повітря, пропорційна квадрату швидкості тіла. Визначити максимальну можливу швидкість падіння тіла.

**Розв'язання.** З другого закону Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = F.$$

Сила  $F$  складається з двох сил: сили ваги  $F_1 = mg$  і сили опору повітря  $F_2 = -kv^2$ . Тоді

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Відокремлюємо змінні і інтегруємо рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{m dv}{mg - kv^2} = dt &\Rightarrow -\frac{m}{k} \int \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = t + C \Rightarrow \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{kg}} \ln \left| \frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}} \right| = t + C &\Rightarrow \\ \ln \left| \frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}} \right| = -2 \sqrt{\frac{kg}{m}} (t + C) &\Rightarrow \\ \frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}} = C e^{-2 \sqrt{\frac{kg}{m}} t} &\Rightarrow \\ v = \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} \left( 1 + C e^{-2 \sqrt{\frac{kg}{m}} t} \right)}{1 - C e^{-2 \sqrt{\frac{kg}{m}} t}}. &\quad (1.1) \end{aligned}$$

Якщо початкова швидкість дорівнює  $v_0$ , то

$$C = \frac{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}}},$$

зокрема, якщо  $v_0 = 0$ , то  $C = -1$ .

Для того щоб знайти максимальну можливу швидкість падіння тіла, перейдемо в (1.1) до границі при  $t \rightarrow +\infty$ . Тоді  $v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ . Можна й іншим способом отримати цю швидкість: з рівності  $F = 0$  маємо  $mg = kv^2$ , звідки  $v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ . ■

**Приклад 1.2.** У лекційній аудиторії об'ємом  $200 \text{ м}^3$  повітря після лекції містить  $0,1 \%$  вуглекислоти. Кондиціонер подає свіже повітря, що містить  $0,04 \%$  вуглекислого газу, в кількості  $a \text{ м}^3/\text{хв}$ . Припустивши, що змішування чистого повітря з забрудненим відбувається миттєво, обчислити, якою має бути величина  $a$ , щоб після  $10$  хвилин перерви вміст вуглекислого газу в аудиторії не перевищував  $0,06 \%$ .

**Розв'язання.** Позначимо вміст вуглекислого газу (в %) у повітрі в момент часу  $t$  через  $y(t)$ . Розглянемо деякий проміжок часу  $\Delta t$  і знайдемо зміну концентрації вуглекислого газу в аудиторії за цей проміжок, вважаючи, що процес є рівномірним. За цей час кондиціонер подає  $0,0004a\Delta t \text{ м}^3$  вуглекислого газу, а виходить його з приміщення назовні через шпарини  $0,01y(t + \alpha)a\Delta t \text{ м}^3$ . Отже, за  $\Delta t$  хвилин кількість вуглекислоти в повітрі змінюється на  $0,0004a\Delta t - 0,01y(t + \alpha)a\Delta t \text{ м}^3$ . З іншого боку,  $(y(t + \Delta t) - y(t))0,01 \cdot 200$  – це приріст вуглекислоти в приміщенні. Отже,

$$(y(t + \Delta t) - y(t))0,01 \cdot 200 = (0,0004 - 0,01y(t + \alpha))a\Delta t \Rightarrow \\ 200dy = (0,04 - y)a dt.$$

Таким чином, одержали рівняння з відокремленими змін-

ними. Зінтегруємо його:

$$200 \frac{dy}{0,04 - y} = a dt \Rightarrow y = 0,04 + Ce^{-\frac{at}{200}}.$$

Оскільки  $y(0) = 0,1$ , то  $C = 0,06$  і

$$y = 0,04 + 0,06e^{-\frac{at}{200}}.$$

Внаслідок умови  $y(10) = 0,06$  маємо:

$$0,06 = 0,04 + 0,06e^{-\frac{10a}{200}} \Rightarrow a = 20 \ln 3 \approx 22 \text{ м}^3/\text{хв.} \blacksquare$$

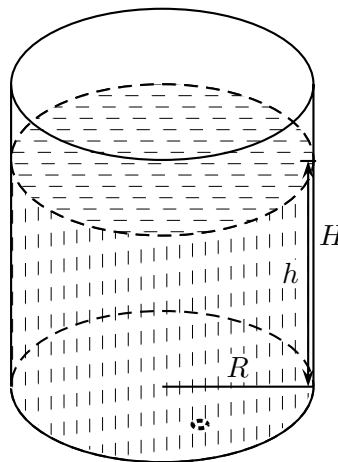
**Приклад 1.3.** У дні вертикальної циліндричної посудини висоти  $H$  і радіуса основи  $R$ , заповненої водою, утворився невеликий отвір площі  $S$  (рис. 1.1). Через який час через отвір витече вся вода, якщо чверть води витікає через  $t_1$  с.

**Розв'язання.** Якщо б витікання води відбувалось рівномірно, то вся вода витекла б з посудини за  $4t_1$  с. Однак досліди показують, що зі зменшенням рівня води у посудині швидкість витікання води зменшується. Тому потрібно врахувати залежність між швидкістю витікання  $v$  і висотою  $h$  стовпа води над отвором. Згідно із законом Торрічеллі

$$v = \mu \sqrt{2gh},$$

де  $g$  — прискорення вільного падіння ( $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ),  $\mu$  — коефіцієнт, залежний від в'язкості рідини та форми отвору (для води у випадку круглого отвору  $\mu = 0,6$ ).

Розглянемо досліджуваний процес на відрізку  $[t; t + \Delta t]$ . Нехай у момент часу  $t$  висота води над отвором становила  $h$ ,



1.1



а через  $\Delta t$  с вона зменшилась і стала  $h + \Delta h$ , де  $\Delta h$  — приріст висоти (очевидно,  $\Delta h < 0$ ). Тоді об'єм води, який витік з посудини, дорівнює об'єму відповідного циліндра, тобто

$$\Delta V = -\pi R^2 \Delta h.$$

Припустимо, що вода з посудини виливається у вигляді циліндричного струменя, площа основи якого  $S$ , а висота дорівнює шляху, який пройшла вода за проміжок часу  $[t; t + \Delta t]$ . На початку і наприкінці цього відрізка швидкість витікання води згідно із законом Торрічеллі дорівнювала  $\mu\sqrt{2gh}$  і  $\mu\sqrt{2g(h + \Delta h)}$  відповідно. Якщо  $\Delta t$  досить мале, то  $\Delta h(t)$  також мале і отримані вирази для швидкості майже однакові. Тому шлях, пройдений водою за проміжок часу  $[t; t + \Delta t]$ , виражається формулою  $(\mu\sqrt{2gh} + \alpha(\Delta t))\Delta t$ , де  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha(\Delta t) = 0$ . Отже, об'єм рідини, яка вилетіть за проміжок часу  $[t; t + \Delta t]$ , можемо знайти за формулою

$$\Delta V = (\mu\sqrt{2gh} + \alpha(\Delta t))S\Delta t.$$

Прирівнюючи два вирази для об'єму рідини, яка вилетіла з посудини за проміжок часу  $[t; t + \Delta t]$ , одержуємо рівняння

$$-\pi R^2 \Delta h = (\mu\sqrt{2gh} + \alpha(\Delta t))S\Delta t. \quad (1.2)$$

Поділимо обидві частини (1.2) на  $\Delta t$  і перейдемо до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Оскільки  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha(\Delta t) = 0$ , а  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta h(t)}{\Delta t} = h'(t)$ , то одержуємо диференціальне рівняння першого порядку

$$-\pi R^2 h'(t) = \mu\sqrt{2gh} S. \quad (1.3)$$

Отримати рівняння (1.3) можна й інакше. Досліджуючи процес протягом нескінченно малого проміжку часу  $dt$ , припустимо, що за цей проміжок швидкість витікання води є

незмінною. Тоді замість наближеного рівняння (1.2) відразу одержуємо рівняння

$$-\pi R^2 dh = \mu \sqrt{2gh} S dt, \quad (1.4)$$

яке, очевидно, є просто іншою формою запису рівняння (1.3).

Рівняння (1.4) — рівняння з відокремленими змінними. Зінтегруємо його:

$$\begin{aligned} dt = \frac{-\pi R^2}{\sqrt{2g\mu S}} \frac{dh}{\sqrt{h}} &\Rightarrow t = \frac{-\sqrt{2}\pi R^2}{\sqrt{g\mu S}} \sqrt{h} + C \Rightarrow \\ t = C - A\sqrt{h}, &\end{aligned} \quad (1.5)$$

де стала  $A = \frac{\sqrt{2}\pi R^2}{\sqrt{g\mu S}}$  залежить від розмірів і форми отвору, в'язкості рідини та деяких інших фізичних параметрів, а стала  $C$  є довільною (це стала інтегрування). Знайдемо ці сталі.

За умовою задачі  $h(0) = H$  (на початку відліку висота стовпа води дорівнювала  $H$ ). Підставляючи у (1.5)  $t = 0$  і  $h = H$ , знаходимо сталу  $C = A\sqrt{H}$ .

Сталу  $A$  знайдемо з умови задачі  $h(t_1) = \frac{3}{4}H$ . Звідси

$$t_1 = A\sqrt{H} - A\sqrt{\frac{3H}{4}} \Rightarrow A = (4 + 2\sqrt{3}) \frac{t_1}{\sqrt{H}}.$$

Підставляючи знайдені значення сталих  $A$  і  $C$  у формулу (1.5), одержуємо закон зміни часу витікання від висоти стовпа води:

$$t = (4 + 2\sqrt{3}) \frac{\sqrt{H} - \sqrt{h}}{\sqrt{H}} t_1. \quad (1.6)$$

З (1.6) знаходимо час  $T$  повного витікання рідини з посудини:

$$h(T) = 0 \Rightarrow T = (4 + 2\sqrt{3}) t_1.$$

Зауважимо, що знайдене значення  $T$  приблизно у 1,9 разу більше від значення  $4t_1$ , одержаного у припущенні, що рідина з посудини витікає рівномірно. ■

**Приклад 1.4.** Знайти закон зміни загальної кількості живих організмів у колонії, яка розвивається в умовах конкурентної боротьби, недостатньої кількості місця і їжі, передачі інфекцій.

**Розв'язання.** Нехай  $x(t)$  — чисельність організмів у колонії в момент часу  $t$ ,  $\Delta x$  — приріст чисельності за час  $\Delta t$ . Вважаємо, що  $x(t)$  може набувати не лише цілих значень, а є неперервно диференційовною функцією змінної  $t$ . Приріст чисельності організмів залежить від їх розмноження і смертності. Розмноження організмів є прямо пропорційним їхній чисельності з коефіцієнтом пропорційності  $k_1$ . Оскільки конкуренція і передача інфекцій посилюється з ростом кількості зустрічей між членами колонії, яка пропорційна добутку  $x \cdot x$ , то природно вважати, що смертність також є пропорційною  $x^2$  з деяким коефіцієнтом пропорційності  $k_2$ . Отже,

$$\Delta x = (k_1 x - k_2 x^2) \Delta t.$$

Поділимо обидві частини на  $\Delta t$  і перейдемо до границі, коли  $\Delta t \rightarrow 0$ . Отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 x^2,$$

звідки

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x(k_1 - k_2 x)} = dt &\Rightarrow \frac{1}{k_1} \left( \int \frac{dx}{x} + \int \frac{k_2 dx}{k_1 - k_2 x} \right) = \int dt \Rightarrow \\ \ln |x| - \ln \left| x - \frac{k_1}{k_2} \right| = k_1 t + \ln C &\Rightarrow \frac{x}{x - \frac{k_1}{k_2}} = C e^{k_1 t} \Rightarrow \\ x = \frac{k_1}{k_2} \frac{C e^{k_1 t}}{C e^{k_1 t} - 1}. \end{aligned}$$

Частинний розв'язок  $x = 0$  відповідає відсутності організмів у колонії, а особливий розв'язок  $x = k_1/k_2$  — їхній максимально можливій кількості.

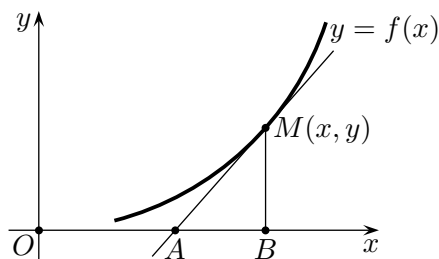
Якщо  $x(0) = x_0$  — початкова кількість організмів, то

$$x_0 = \frac{k_1 C}{k_2 C - 1} \Rightarrow C = \frac{k_2 x_0}{k_2 x_0 - k_1}.$$

Тоді

$$x = \frac{k_1 x_0 e^{k_1 t}}{k_2 x_0 e^{k_1 t} - k_2 x_0 + k_1}. \blacksquare$$

**Приклад 1.5.** Знайти криву, для якої точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику і початку координат.



1.2

**Розв'язання.** Нехай  $M(x, y)$  — довільна точка кривої  $y = f(x)$ . Проведемо у цій точці дотичну  $MA$  (рис. 1.2). За умовою,  $OA = AM$ . Позначимо  $AM$  через  $z$ . Знайдемо величину  $z$  з прямокутного трикутника  $ABM$ , скориставшись теоремою Піфагора і тим, що  $OB = x$ ,  $MB = y$ . Тоді

$$(x - z)^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow z = \frac{x^2 + y^2}{2x}.$$

Враховуючи, що  $y' = \operatorname{tg} \angle MAB = \frac{MB}{AB}$  (геометричний зміст похідної), отримуємо однорідне диференціальне рівняння (п. 3.1)

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Зінтегруємо його з допомогою заміни  $y = zx$ :

$$\begin{aligned} z'x + z &= \frac{2z}{1-z^2} \Rightarrow z'x = \frac{z^3+z}{1-z^2} \Rightarrow \\ \int \frac{(1-z^2)dz}{z^3+z} &= \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} - \int \frac{2zdz}{z^2+1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \ln|z| - \ln|z^2+1| &= \ln|x| + \ln C \Rightarrow \frac{z}{(z^2+1)x} = C \Rightarrow \\ y &= C(x^2+y^2). \blacksquare \end{aligned}$$

### Вправи

1. За 30 днів розпалось 50 % початкової кількості радіоактивної речовини. За який час залишиться 1 % від початкової кількості?

2. Круглий циліндричний чан з вертикальною віссю діаметром  $D$  і висотою  $H$  заповнений водою. За який час вся вода витече крізь круглий отвір діаметром  $a$  у дні чана?

3. Визначити час витікання всього гасу з заповненої циліндричної залізничної цистерни довжиною  $L = 12$  м і діаметром  $D = 2,6$  м через коротку зливну трубку з площею поперечного перерізу  $\omega = 20$  см<sup>2</sup> у нижній частині цистерни. Коефіцієнт витрат для гасу  $\mu = 0,6$ .

4. Посудину, що має форму півкулі радіусом 2 м, заповнено водою. За який час витече вся вода крізь круглий отвір радіусом 0,1 м, вирізаний у дні посудини?

5. Встановлений вертикально чан циліндричної форми має отвір у дні. Половина води з повного чана витікає за 5 хвилин. За який час витече вся вода?

6. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла та температурою повітря. Температура повітря 20°C, тіло протягом 20 хв охолоджується від 100°C до 60°C. Знайти залежність температури від часу та час, через який температура тіла знизиться до 30°C.

**7.** Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю  $v = 10$  км/год. Через 1 хв після вимкнення двигуна швидкість човна зменшилась до 6 км/год. Якою буде швидкість човна через 2 хв? Який шлях пройде човен через 2 хв після зупинки двигуна? Вважати, що сила опору води рухові човна пропорційна його швидкості.

**8.** Знайти криві, для яких площа трикутника, обмеженого дотичною, віссю абсцис і відрізком від початку координат до точки дотику, є величина стала і рівна  $a$ .

**9.** Швидкість розмноження деяких бактерій пропорційна кількості бактерій у розглядуваний момент часу. Кількість бактерій подвоюється протягом трьох годин. Знайти: а) залежність кількості бактерій від часу; б) у скільки разів збільшиться кількість бактерій протягом 9 годин.

**10.** Швидкість розпаду радіо пропорційна наявній його кількості. З досвіду відомо, що протягом року вага одного грама радіо меншає на 0,435 мг. Визначити період піврозпаду (час, протягом якого початкова кількість зменшиться вдвоє).

**11.** Кількість світла, що поглинається під час проходження крізь тонкий шар води, пропорційна товщині шару й кількості світла, що падає на його поверхню. Якщо під час проходження крізь шар завтовшки 3 м поглинається половина початкової кількості світла, то яка частина цієї кількості дійде до глибини 30 м?

**12.** Електровоз рухається по горизонтальній залізничній колії зі швидкістю 72 км/год. Машиніст включає гальма, опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 ваги електровоза. Знайти час від моменту початку гальмування до повної зупинки електровоза і пройдений за цей час шлях.

**13.** Тіло кинуто під кутом  $\alpha$  до горизонту з початковою швидкістю  $v_0$  (наприклад, здійснено постріл з гармати). Виведіть рівняння руху тіла, нехтуючи опором повітря. З аналізу рівняння руху дайте відповідь на поставлені запитання: а) яким є час польоту тіла; б) як далеко від початкової точки

тіло впаде на землю; в) при якому куті  $\alpha$  тіло пролетить найбільшу відстань; г) якою є максимальна висота підйому тіла; д) якою є траєкторія польоту тіла?

**14.** Деякі бактерії розмножуються пропорційно їхній кількості, але в той самий час продукти їхньої життєдіяльності знищують їх пропорційно кількості бактерій і продуктів їхньої життєдіяльності. Швидкість утворення продуктів життєдіяльності теж є пропорційною кількості бактерій. Довести, що кількість бактерій  $N$  спочатку зростає до деякого максимального значення  $M$ , а потім спадає до нуля; у момент часу  $t$  вона подається формулою  $N = M(1 - th^2kt)$ , де час  $t$  змінюється від моменту, коли  $N = M$ .

**15.** До деякої кількості нерозчинної речовини, що містить у своїх порах 2 кг солі, додамо 30 л води. Через 5 хв розчиняється 1 кг солі. Через який час розчиниться 99 % початкової кількості солі?

*Вказівка.* Швидкість розчинення пропорційна кількості нерозчиненої солі та різниці між концентрацією розчину у даний момент і концентрацією насиченого розчину (1 кг на 3 л). Концентрацією  $c$  даної речовини називають її кількість, що міститься в одиниці об'єму.

**16.** Населення Землі у січні 2022 року становило  $7,92 \cdot 10^9$  людей, а річний приріст — 1 %. У припущенні, що приріст пропорційний кількості людей, знайти чисельність населення Землі у січні 2030 року.

**17.** У чан налито 100 л ропи, що містить 10 кг розчиненої солі. Зі швидкістю 3 л за хвилину в чан вливається вода і суміш з такою самою швидкістю витікає з чана. Перемішуючи воду, у чані підтримують рівномірну концентрацію. Скільки солі залишиться у чані через годину?

**18.** Знайти криві, в яких площа трапеції, яка обмежена осями координат, дотичною і ординатою точки дотику, є величина стала і дорівнює  $3a^2$ .

**19.** У посудину, яка містить 1 кг води при температурі

$20^{\circ}\text{C}$ , опустили алюмінієвий предмет з масою  $0,5$  кг, з питомою теплоємністю  $840$  Дж/(кг $\cdot^{\circ}\text{C}$ ) і температурою  $75^{\circ}\text{C}$ . Через хвилину вода нагрілась на  $2^{\circ}\text{C}$ . Коли температура води і предмета будуть відрізнятись на  $1^{\circ}\text{C}$ ? Втратами тепла на нагрівання посудини знехтувати. Питома теплоємність води  $4200$  Дж/(кг $\cdot^{\circ}\text{C}$ ).

**20.** Під впливом постійного випромінювання у газовому середовищі відбувається процес іонізації, при якому за  $1$  с утворюється  $q$  позитивних і  $q$  негативних іонів у даному об'ємі газу. Оскільки позитивні і негативні іони знову об'єднуються між собою, то їхня кількість зменшується. Із загальної кількості  $y$  позитивних іонів кожну секунду об'єднується частина, пропорційна квадрату їхньої кількості. Коефіцієнт пропорційності  $k$  залежить від природи і складу газу. Знайти залежність кількості іонів  $y$  від часу  $t$ . У початковий момент іонів не було.



## Тема 2. Скінченні автомати

### *Короткі теоретичні відомості*

Скінченний автомат Мілі — це п'ятірка  $A = (X, Q, Y, q_0, F)$ , де  $X = \{x\}$  — скінченний вхідний алфавіт,  $Y = \{y\}$  — скінченний вихідний алфавіт,  $Q = \{q\}$  — скінченна множина внутрішніх станів,  $q_0$  — початковий стан,  $F : X \times Q \rightarrow Y \times Q$  — функція переходів. Функція переходів може бути наочно подана діаграмою станів.

Скінченний автомат Мура — це шістка  $B = (X, S, Y, s_0, P, R)$ , де  $X = \{x\}$  — скінченний вхідний алфавіт,  $Y = \{y\}$  — скінченний вихідний алфавіт,  $S = \{s\}$  — скінченна множина внутрішніх станів,  $s_0$  — початковий стан,  $P : X \times S \rightarrow S$  — функція переходів,  $R : S \rightarrow Y$  — функція виходів.

Клітинні автомати є окремим випадком скінченних автоматів. Їх використовують для моделювання динамічної поведінки однорідних двовимірних і тривимірних середовищ у дискретному просторі і часі. При цьому всі фізичні характеристики теж змінюються дискретно.

При створенні клітинних автоматів весь простір розбивається регулярною ґраткою на таблицю комірок, які називають клітинками. Кожна з клітинок може знаходитись в одному зі скінченної кількості станів. Кожній клітинці ставиться у відповідність клітинний автомат. Найважливішими особливостями клітинних автоматів є наступні:

- стан кожної клітинки оновлюється в результаті виконання послідовності дискретних кроків у часі (тактів);
- змінні стани у кожній клітинці змінюються одночасно (синхронно) відповідно до значень змінних станів цієї клітинки і клітинок деякого її околу на попередньому кроці.

Клітинки для клітинних автоматів на площині найчастіше мають форму квадрата, рідше — трикутника чи шестикутника. За окіл клітинки беруть певну кількість сусідніх клітинок.

Зокрема, для квадрата околom можуть бути чотири або вісім сусідніх клітинок.

Для того щоб виключити особливий вигляд околу для точок, що лежать на межі області, часто вводять так звані крайові умови циклічного типу. Вони означають, що для крайнього лівого стовпця клітинок сусіднім зліва вважається крайній правий стовпець, а для крайнього правого — крайній лівий стовпець. Аналогічно, для крайнього верхнього рядка клітинок сусіднім зверху вважається крайній нижній рядок, і навпаки. Таким чином, можна вважати, що клітинки задаються на поверхні тора.

Функцію переходів для клітинних автоматів називають правилами клітинних автоматів.

*Рекомендована література:* [2, с. 382–413], [9, с. 48–64].

### *Розв'язування типових вправ і задач*

**Приклад 2.1.** Побудувати скінченний автомат Мілі для керування ліфтом у двоповерховому будинку.

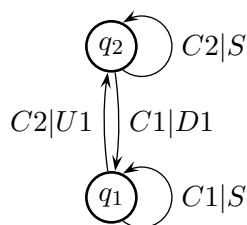


Рис. 2.1

**Розв'язання.** Вхідний алфавіт автомата складається з кнопок виклику відповідного поверху:  $X = \{C1, C2\}$ ; вихідний алфавіт складається зі зміщень на один поверх вгору або вниз, а також зупинки ліфта:  $Y = \{U1, D1, S\}$ ; стан відповідає поверху, на якому знаходиться ліфт:  $Q = \{q1, q2\}$ . Якщо спочатку ліфт перебуває на першому поверсі, то початковим станом

є стан  $q_1$ . Функція переходів цього автомата зручно подається діаграмою станів (рис. 2.1). Лінії зі стрілками визначають переходи зі стану в стан, кожен з написів біля цих ліній містить кнопку виклику відповідного поверну з вхідного алфавіту і вихідний сигнал для зміщення чи зупинки ліфта, відокремлені вертикальною рискою.

**Приклад 2.2.** Скласти автомат Мура для керування автоматом для продажу кави. Вартість кави — 5 грн. Автомат приймає банкноти номіналом в одну, дві і п'ять гривень, всі інші папірці ігноруються. Банкноти приймаються по черзі. Після накопичення достатньої суми автомат видає каву. Автомат здачу не дає.

**Розв'язання.** Вхідний алфавіт автомата Мура складається з чисел 1, 2 і 5 — номіналів банкнот, а вихідний — з чисел 0 (сума недостатня) і 1 (сума достатня). Можливими станами є  $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ , які відповідають накопиченій сумі. Якщо накопичена сума перевищує 5, наприклад,  $2 + 2 + 2$ , то можна вважати, що досягнутий стан  $s_5$ . Діаграму станів зображено на рис. 2.2. Функція виходу для станів  $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4$  набуває значення 0, а для стану  $s_5$  вона дорівнює 1. ■

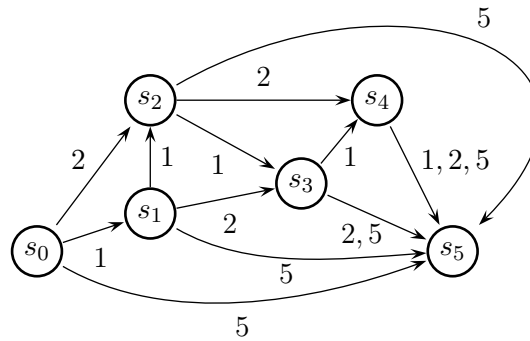


Рис. 2.2

**Приклад 2.3.** Перетворити автомат Мілі з прикладу 2.1 в автомат Мура.

**Розв'язання.** Розширимо множину внутрішніх станів до чотирьох. Діаграма станів наведена на рис. 2.3, причому для кожного стану  $s_j$  автомата Мура під рискою вказується відповідний стан  $q_k$  автомата Мілі і вихідний сигнал.

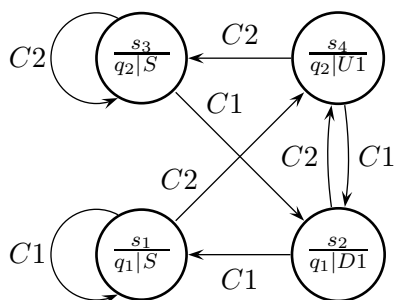


Рис. 2.3

**Приклад 2.4.** Біологічною системою є двовимірне поживне середовище з одноклітинними організмами, які на ньому розвиваються. Скласти програму для моделювання цієї біологічної системи, якщо модель описується сукупністю правил:

1. Простір клітинних автоматів є полем  $n \times n$  квадратних клітинок. Окіл клітинки утворюють вісім сусідніх клітинок.

2. Кожній клітинці відповідає значення  $p$  рівня поживності (енергоємності) розчину, яке може змінюватись від 0 до  $p_{max}$ .

3. Рівень поживності розчину клітинки за такт часу збільшується на величину  $\Delta p$ , але не може перевищувати  $p_{max}$ .

4. Клітинка може бути вільною або містити один живий організм.

5. Організм бере енергію з поживного розчину клітинки, в якій він знаходиться, зменшуючи її поживність і збільшуючи свій запас енергії на величину  $\Delta E_{pl}$  за такт, але при цьому не може взяти енергії з клітинки більше, ніж її там є.

6. Максимальна можлива кількість енергії, яку може накопичити організм, не перевищує  $E_{max}$ .

7. Наприкінці кожного такту організм намагається перейти в сусідню вільну клітинку, вибираючи її довільним чином. Якщо вільної клітинки в околі немає, то організм залишається в тій самій клітинці.

8. Починаючи з віку  $L_{zr}$  тактів, організм вважається зрілим. Протягом такту до досягнення зрілості організм витрачає на життя  $\Delta E_{mi}$  енергії, а після досягнення зрілості —  $\Delta E_{zrmi}$  енергії.

9. Зрілий організм може створювати собі подібних діленням, витрачаючи додатково  $\Delta E_{di}$  енергії при кожному поділі. При цьому батьківська особина переходить у сусідню вільну клітинку, а нова залишається у попередній клітинці з початковим запасом енергії  $E_0$ . Якщо в околі клітинки вільних клітинок немає або запас енергії організму не перевищує  $\Delta E_{di}$ , то ділення не відбувається.

10. Час життя окремої особини не перевищує  $L_{max}$  тактів. Якщо час життя організму досягає тривалості життя  $L_{max}$  або запас енергії знижується до нуля, то організм помирає.

11. Початкова поживність клітинок задається рівномірним законом розподілу в межах від 0 до  $p_{max}$ . Загальну поживність всіх клітинок на такті  $t$  позначимо через  $P_A(t)$ , тоді відносна поживність  $P(t) = \frac{P_A(t)}{n^2 p_{max}}$ .

12. Початковий закон розподілу організмів у клітинному просторі є рівномірним. Початкова кількість організмів —  $N_0$ . Початковий запас енергії кожної особини дорівнює  $E_0$ , а вік вважається нульовим. Загальну кількість організмів на такті  $t$  позначимо через  $N_A(t)$ , тоді відносна чисельність організмів  $N(t) = \frac{N_A(t)}{n^2}$ .

**Розв'язання.** Для випадку, коли  $n = 1000$ ,  $p_{max} = 10$ ,  $\Delta p = 1$ ,  $\Delta E_{pl} = 6$ ,  $E_{max} = 30$ ,  $\Delta E_{mi} = 3$ ,  $\Delta E_{zrmi} = 2$ ,  $\Delta E_{di} = 4$ ,  $E_0 = 4$ ,  $L_{max} = 20$ ,  $L_{zr} = 4$ ,  $N_0 = 0,3 n^2$ , програму на мові C++ для моделювання розвитку організмів наведено нижче.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <cstdlib>
#include <fstream>
using namespace std;
#define NP 1000
int Pmax=10 ,dP=1, dEp1=6, Emax=30,
    dEmi=3, dEzrmi=2, dEdi=4, EO=4, Lmax=20, Lzr=4,
    NO=floor(NP*NP*0.3), KT=1000;
float PA;
int NA;
float MP[NP+2][NP+2],MEO[NP+2][NP+2];
unsigned char MTL[NP+2][NP+2],MTO[NP+2][NP+2];

void Init()
{
    int i,j,k;
    PA=0;
    for (i=1;i<=NP;i++)
    {
        for (j=1;j<=NP;j++)
            {MTO[i][j]=0; MP[i][j]=rand()%(Pmax+1); PA+=MP[i][j];}
    }
    for (i=0;i<=NP+1;i++)
        { MTO[i][0]=5; MTO[i][NP+1]=5; }
    for (j=1;j<=NP;j++)
        { MTO[0][j]=5; MTO[NP+1][j]=5; }
    k=0; NA=NO;
    while (k<NO)
    {
        i=rand()%NP+1; j=rand()%NP+1;
        if (MTO[i][j]!=0) continue;
        MTO[i][j]=1; MTL[i][j]=0; MEO[i][j]=EO; k++;
    }
}

int KVKO(int i, int j, int tk)
{
```

```
int k=0;
if (MTO[i-1][j-1]==tk) k++;
if (MTO[i-1][j]==tk) k++;
if (MTO[i-1][j+1]==tk) k++;
if (MTO[i][j-1]==tk) k++;
if (MTO[i][j+1]==tk) k++;
if (MTO[i+1][j-1]==tk) k++;
if (MTO[i+1][j]==tk) k++;
if (MTO[i+1][j+1]==tk) k++;
return k;
}

void VV(int i, int j, int tk, int& ni, int& nj)
{
    int k,nk;
    nk=rand()%KVKO(i,j,tk)+1; k=0;
    if (MTO[i-1][j-1]==tk)
        { k++; if (k==nk) {ni=i-1; nj=j-1;} }
    if (MTO[i-1][j]==tk)
        { k++; if (k==nk) {ni=i-1; nj=j;} }
    if (MTO[i-1][j+1]==tk)
        { k++; if (k==nk) {ni=i-1; nj=j+1;} }
    if (MTO[i][j-1]==tk)
        { k++; if (k==nk) {ni=i; nj=j-1;} }
    if (MTO[i][j+1]==tk)
        { k++; if (k==nk) {ni=i; nj=j+1;} }
    if (MTO[i+1][j-1]==tk)
        { k++; if (k==nk) {ni=i+1; nj=j-1;} }
    if (MTO[i+1][j]==tk)
        { k++; if (k==nk) {ni=i+1; nj=j;} }
    if (MTO[i+1][j+1]==tk)
        { k++; if (k==nk) {ni=i+1; nj=j+1;} }
}

void ObrP(int i,int j)
{
    if ((MTO[i][j]==1)&&(MTL[i][j]==Lmax)) MTO[i][j]=0;
    MP[i][j]=MP[i][j]+dP;
}
```

```
    if ((MTO[i][j]!=1)&&(MP[i][j]>Pmax)) MP[i][j]=Pmax;
}

void Obr0(int i, int j)
{
    float dE;
    int ni,nj;
    if (MTO[i][j]==1)
    {
        MTL[i][j]++;
        if (MTL[i][j]<Lzr) MEO[i][j]=MEO[i][j]-dEmi;
        else MEO[i][j]=MEO[i][j]-dEzrmi;
        dE=dEpl;
        if (dE>MP[i][j]) dE=MP[i][j];
        MEO[i][j]=MEO[i][j]+dE;
        MP[i][j]=MP[i][j]-dE;
        if (MEO[i][j]<=0) { MTO[i][j]=0;return; }
        if ((MTL[i][j]>=Lzr)&&(MEO[i][j]>=dEdi)&&
            (KVKO(i,j,0)>0))
        {
            if (MEO[i][j]-dEdi>Emax)
            {
                MP[i][j]+=MEO[i][j]-dEdi-Emax;
                MEO[i][j]=Emax+dEdi;
            }
            VV(i,j,0,ni,nj);
            MTO[ni][nj]=2; MTL[ni][nj]=MTL[i][j];
            MEO[ni][nj]=MEO[i][j]-dEdi;
            MEO[i][j]=dEdi; MTL[i][j]=0;
        }
    }
    else
    {
        if (MEO[i][j]>Emax)
        {
            MP[i][j]+=MEO[i][j]-Emax;
            MEO[i][j]=Emax;
        }
        if (KVKO(i,j,0)==0) return;
    }
}
```



```
        VV(i,j,0,ni,nj);
        MTO[ni][nj]=2; MTO[i][j]=0;
        MTL[ni][nj]=MTL[i][j]; MEO[ni][nj]=MEO[i][j];
    }
}

void Takt()
{
    int i,j;
    PA=0; NA=0;
    for (i=1;i<=NP;i++)
        for (j=1;j<=NP;j++)
            ObrP(i,j);
    for (i=1;i<=NP;i++)
        for (j=1;j<=NP;j++)
            ObrO(i,j);
    for (i=1;i<=NP;i++)
        for (j=1;j<=NP;j++)
        {
            if (MTO[i][j]==2) MTO[i][j]=1;
            if (MTO[i][j]==1) NA++;
            PA+=MP[i][j];
        }
}

int main()
{
    ofstream fPout;
    fPout.open("P.txt");
    ofstream fNout;
    fNout.open("N.txt");
    Init();
    fPout<<PA/(NP*NP*Pmax)<<endl;
    fNout<<float(NA)/(NP*NP)<<endl;
    for (int k=1;k<=KT;k++)
    {
        Takt();
    }
}
```

```

    if (k/10*10==k) cout<<'\r'<<k/10<<" %";
    fPout<<PA/(NP*NP*Pmax)<<endl;
    fNout<<float(NA)/(NP*NP)<<endl;
  }
  fPout.close();
  fNout.close();
}

```

В результаті роботи програми у файлах P.txt і N.txt буде збережено відносну поживність середовища і відносну кількість організмів на кожному з 1000 тактів. З допомогою математичного пакета Maple можна побудувати графік залежності між поживністю середовища і кількістю організмів (рис. 2.4):

```

> P:=readdata("P.txt",float):
  N:=readdata("N.txt",float):
  plot(P,N,labels=["P","N"],color=black);

```

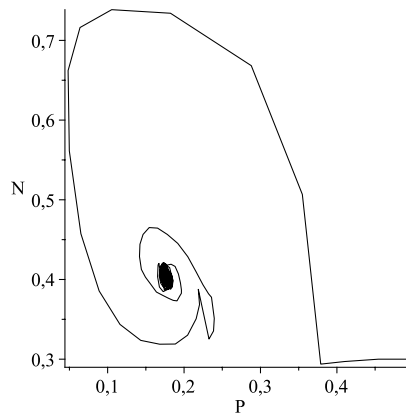


Рис. 2.4

Аналогічно будуюмо графік залежності кількості організмів від часу (рис. 2.5):

```

> t:=seq(i,i=0..500):
  plot(t,N,labels=["t","N"],color=black);

```

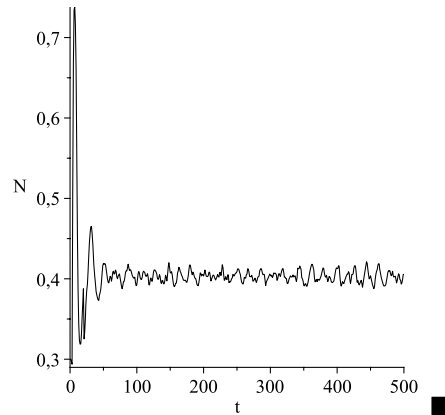


Рис. 2.5

### *Вправи*

1. Створіть автомат Мілі для керування ліфтом у триповерховому будинку. Перетворіть його в автомат Мура.

2. Перетворіть автомат Мура для продажу кави з прикладу 2.2 в автомат Мілі.

3. Створіть автомат Мілі для розпізнавання цілих чисел довільного знаку. Перетворіть його в автомат Мура.

4. Складіть програму для реалізації клітинного автомата «Життя». Стан клітинного простору потрібно відображати графічно. Дослідіть еволюцію клітинного автомата для деяких початкових розташувань активних клітинок. Множина правил для цього автомата полягає у наступному:

- квадратна клітинка може перебувати у двох станах — активному і пасивному;
- околom є вісім сусідніх клітинок;
- якщо в околі пасивної клітинки є рівно три активних клітинки, то клітинка стає активною («народжується»);
- якщо в околі активної клітинки є дві або три активних клітинки, то клітинка залишається активною («виживає»);

– якщо в околі активної клітинки є менше двох чи більше трьох активних клітинок, то вона стає пасивною («помирає» від самотності чи перенаселення).

**5.** Розробіть програму для реалізації клітинного автомата «Дюни», поведінка якого відповідає наступним правилам:

– квадратна клітинка може перебувати в активному або пасивному («схованому») стані;

– якщо клітинка була активною і з восьми сусідніх клітинок є  $N$  або більше активних клітинок, то вона «ховається»;

– час перебування в «схованому» стані становить  $W$  тактів;

– якщо час «ховання» закінчився і в околі є не більше, ніж  $M$  активних клітинок, то клітинка знову стає активною.

Здійсніть моделювання для поля  $250 \times 250$  клітинок з крайовими умовами циклічного типу, чисел  $N = 3$ ,  $W = 5$ ,  $M = 3$  і деякого початкового розподілу активних клітинок. Дослідіть еволюцію клітинного автомата.

**6.** Розробіть програму для реалізації клітинного автомата «Робот», поведінка якого відповідає наступним правилам:

– квадратна клітинка може перебувати в активному або пасивному стані;

– в початковий момент часу всі клітинки пасивні, в центральній клітинці перебуває «робот», напрямлений направо;

– «робот» переходить у сусідню клітинку, якщо вона активна, він робить її пасивною і повертає наліво на  $90^\circ$ , якщо клітинка пасивна, то «робот» робить її активною і повертає направо на  $90^\circ$ .

**7.** Створіть програму для моделювання біологічної системи, модель якої додатково до правил з прикладу 2.4 описується правилами:

– клітинка може бути вільною, містити один звичайний організм або одного хижака;

– їжею для хижаків є живі організми з прикладу 2.4;

- хижак може напасти на свою жертву, якщо вона знаходиться в його околі, тобто в одній з восьми сусідніх клітинок;
- якщо є кілька потенційних жертв, то одна з них вибирається довільним чином, при цьому жертва гине з імовірністю  $P_X$ , а хижак переміщується в її клітинку, підвищуючи свій запас енергії на величину енергетичної цінності жертви  $\Delta EX_{pl}$ ;
- імовірність загибелі жертви не дорівнює одиниці, бо вважається, що вона має деякі засоби захисту, якщо жертва залишається живою, то гине хижак;
- якщо в околі хижака немає потенційних жертв, то хижак переміщується на сусідню вільну клітинку, вибираючи напрям довільним чином;
- інші характеристики життя хижаків є аналогічними до відповідних характеристик для звичайних організмів: хижак може накопичити не більше, ніж  $EX_{max}$  енергії, за один такт життя хижак до досягнення зрілості витрачає  $\Delta EX_{mi}$  енергії, а після досягнення зрілості —  $\Delta EX_{zrmi}$  енергії, максимальна тривалість життя хижака становить  $LX_{max}$  тактів, вік зрілості —  $LX_{zr}$  тактів, енергія, що витрачається при діленні, —  $\Delta EX_{di}$ , початковий запас енергії хижака —  $EX_0$ ;
- якщо час життя хижака перевищує максимально можливий час  $LX_{max}$  або запас енергії зменшується до нуля, то хижак помирає;
- початковий розподіл хижаків у просторі є рівномірним, початкова кількість хижаків —  $X_0$ .

Вважати, що  $n = 1000$ ,  $p_{max} = 10$ ,  $\Delta p = 1$ ,  $\Delta E_{pl} = 6$ ,  $E_{max} = 30$ ,  $\Delta E_{mi} = 3$ ,  $\Delta E_{zrmi} = 2$ ,  $\Delta E_{di} = 4$ ,  $E_0 = 4$ ,  $L_{max} = 20$ ,  $L_{zr} = 4$ ,  $N_0 = 0,3 N$ ,  $EX_{max} = 40$ ,  $\Delta EX_{mi} = 3,5$ ,  $\Delta EX_{zrmi} = 3$ ,  $\Delta EX_{di} = 5$ ,  $LX_{max} = 25$ ,  $LX_{zr} = 6$ ,  $P_X = 0,85$ ,  $EX_0 = 5$ ,  $X_0 = 0,05 n^2$ ,

$$\Delta EX_{pl} = \begin{cases} 3L + \frac{E}{5}, & L < L_{zr}, \\ 10 + \frac{E}{5}, & L \geq L_{zr}, \end{cases}$$

де  $L$  — вік з'їденої жертви,  $E$  — її запас енергії.

### Тема 3. Мережі Петрі

#### *Короткі теоретичні відомості*

Мережа Петрі є орієнтованим дводольним графом, який має чотири базові елементи: вузли, переходи, дуги і маркери. Дуги з'єднують вузли з переходами і переходи з вузлами. Вузли позначають кружками, переходи — прямокутниками або рисками, дуги — лініями зі стрілками на кінцях, маркери — крапками. Маркери знаходяться всередині вузлів і переміщуються в мережі при спрацюванні переходів. Дуги можуть бути простими і кратними.

У випадку простих дуг перехід називається дозволелим, якщо всі його вхідні вузли містять маркери. Дозволений перехід може спрацювати. При спрацюванні переходу вилучається по одному маркеру з кожного його вхідного вузла і додається по одному маркеру у всіх його вихідних вузлах.

Графом мережі Петрі називають трійку  $G = (P, T, F)$ , де  $P = \{p_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , — непорожня скінченна множина вузлів,  $T = \{t_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , — непорожня скінченна множина переходів,  $F : P \times T \cup T \times P \rightarrow N_0$  — функція інцидентності,  $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Значення функції  $F$  визначають наявність і кратність дуг. Розміткою мережі називають відображення  $M : P \rightarrow N_0$ , яке задає розміщення маркерів у вузлах.

Функцію інцидентності  $F$  подають матрицями  $B$  і  $D$ :

$$\begin{aligned} B &= (b_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad b_{ij} = F(p_i, t_j), \\ D &= (d_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad d_{ij} = F(t_j, p_i). \end{aligned}$$

Матрицю  $B$  називають матрицею входів, а матрицю  $D$  — матрицею виходів. Для мереж без петель замість матриць  $B$  і  $D$  можна використовувати одну матрицю  $C = D - B$ , яку називають матрицею змінювань. Розмітку мережі подають вектором  $\overline{M} = (M(p_1) \ M(p_2) \ \dots \ M(p_m))^T$ , який також заради компактності будемо записувати у вигляді  $\overline{M} = (M(p_1), M(p_2), \dots, M(p_m))$ .

Вузол  $p$  називають обмеженим ( $l$ -обмеженим), якщо існує таке ціле число  $l$ , що для будь-якої досяжної розмітки мережі кількість маркерів у вузлі  $p$  не перевищує числа  $l$ . Мережа Петрі є обмеженою, якщо обмежені всі її вузли. Вузол  $p$  називають безпечним, якщо для довільної досяжної розмітки мережі кількість маркерів у вузлі  $p$  не перевищує одиниці. Мережа Петрі є безпечною, якщо безпечні всі її вузли. Послідовність переходів називають стаціонарно повторюваною, якщо вона переводить мережу в ту саму розмітку.

Консервативною називають мережу, яка зберігає зважену суму маркерів відносно певного вагового вектора  $\bar{w} = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m)$  з натуральними елементами, тобто  $\bar{w}\bar{M} = \bar{w}\bar{M}_0 = \text{const}$ , де  $\bar{M}$  — довільна розмітка,  $\bar{M}_0$  — початкова розмітка. Строго консервативною називають мережу, сума маркерів якої є сталою.

Інваріантом вузлів мережі або  $p$ -інваріантом називають ненульовий вектор-рядок  $\bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m)$ , який складається з невід'ємних цілих чисел і є розв'язком рівняння

$$\bar{x}C = 0. \quad (3.1)$$

Якщо існує інваріант вузлів, який складається лише з натуральних чисел, то мережу Петрі називають  $p$ -інваріантною.

Інваріантом переходів мережі або  $t$ -інваріантом називають ненульовий вектор-стовпець  $\bar{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$ , який складається з невід'ємних цілих чисел і є розв'язком рівняння

$$C\bar{y} = 0. \quad (3.2)$$

Мережа Петрі є консервативною тоді і тільки тоді, коли вона є  $p$ -інваріантною. Кожна  $p$ -інваріантна мережа Петрі є обмеженою. Якщо в мережі Петрі немає інваріанта переходів, то в ній не існує стаціонарно повторювана послідовність переходів. У протилежному разі така послідовність переходів може існувати.

Дерево досяжності подає множину досяжних розміток мережі Петрі. Викладемо алгоритм побудови дерева досяжності.

Крок 1. Вибираємо за граничну розмітку  $M$  початкову розмітку.

Крок 2. Обробку граничної розмітки  $M$  здійснюємо за наступними правилами.

1. Якщо у розмітці  $M$  не дозволений жоден перехід, то оголошуємо її термінальною.

2. Якщо в дереві досяжності є інша розмітка  $M'$ , яка не є граничною, така, що  $M' = M$ , то розмітка  $M$  оголошується дублюючою.

3. Якщо на шляху від кореня дерева (початкової розмітки) до граничної є така розмітка  $M'$ , що  $M(k) \geq M'(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , то для всіх вузлів, таких, що  $M(j) > M'(j)$ , покладемо  $M(j) = \omega$ .

4. Якщо розмітка  $M$  не є початковою, дублюючою або термінальною, то оголошуємо розмітку  $M$  внутрішньою і для кожного дозволеного в цій розмітці переходу  $t_k$  додаємо до дерева досяжності нову вершину з розміткою  $X_k$ , таку, що  $M \xrightarrow{t_k} X_k$ . Розмітку  $X_k$  оголошуємо граничною.

Крок 3. Якщо є нова гранична розмітка, то позначаємо її через  $M$  і переходимо до кроку 2, інакше — кінець роботи алгоритму.

У неklasичних мережах Петрі розширюються можливості переходів: переходи можуть спрацювати протягом певного часу, можливе одночасне спрацювання кількох переходів. Крім того, можуть використовуватись інформаційні дуги (позначають пунктиром) і дуги заперечення (з крапкою на кінці). Ці дуги з'єднують вузли з переходами і впливають лише на дозволенисть відповідних переходів.

**Рекомендована література:** [9, с. 66–93], [10, с. 11–205], [16, с. 61–214].



### Розв'язування типових вправ і задач

**Приклад 3.1.** Проаналізувати мережу Петрі  $N_1$  (рис. 3.1) для передачі односторонніх повідомлень і підтвердження їхнього прийняття.

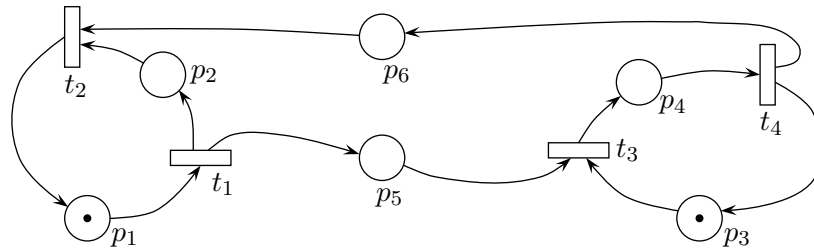


Рис. 3.1

**Розв'язання.** Спочатку дозволим є лише перехід  $t_1$ . При його спрацюванні вилучається маркер з вузла  $p_1$  і з'являються маркери у вузлах  $p_2$  і  $p_5$ , внаслідок чого мережа  $N_1$  переходить у стан, зображений на рис. 3.2.

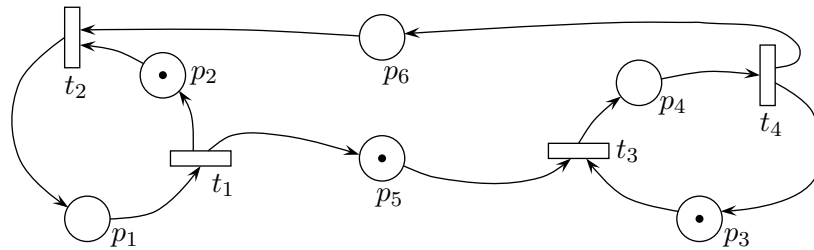


Рис. 3.2

Тепер дозволим є лише перехід  $t_3$ . При його спрацюванні вилучаються маркери з вузлів  $p_3$  і  $p_5$  та з'являється маркер у вузлі  $p_4$ . Внаслідок цього дозволим стає лише перехід  $t_4$ . Коли він спрацьовує, вилучається маркер з вхідного вузла  $p_4$  і по одному маркеру розміщується у вузлах  $p_3$  і  $p_6$ . Після цього дозволим є лише перехід  $t_2$ , спрацювання якого переводить мережу Петрі до початкового стану (рис. 3.1).

У цій мережі Петрі перехід  $t_1$  моделює відправлення повідомлення, перехід  $t_3$  — прийом повідомлення, перехід  $t_4$  — відправлення підтвердження, перехід  $t_2$  — отримання підтвердження. Переходи спрацьовують саме у цій послідовності, утворюючи цикл  $t_1 t_3 t_4 t_2$ . ■

**Приклад 3.2.** Подати мережу Петрі  $N_1$  з рисунка 3.1 у теоретико-множинному вигляді.

**Розв'язання.** Мережу Петрі  $N_1$  з рисунка 3.1 можна формально записати так:

$$\begin{aligned} N_1 &= (P, T, F, M_0), \\ P &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}, \quad T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, \\ F(p_1, t_1) &= 1, \quad F(p_2, t_2) = 1, \quad F(p_3, t_3) = 1, \quad F(p_4, t_4) = 1, \\ F(p_5, t_3) &= 1, \quad F(p_6, t_2) = 1, \quad F(t_1, p_2) = 1, \quad F(t_1, p_5) = 1, \\ F(t_2, p_1) &= 1, \quad F(t_3, p_4) = 1, \quad F(t_4, p_3) = 1, \quad F(t_4, p_6) = 1, \\ M_0(p_1) &= 1, \quad M_0(p_3) = 1. \end{aligned}$$

Для скорочення запису вказані лише ненульові значення функцій  $F$  і  $M_0$ . ■

**Приклад 3.3.** Подати мережу Петрі  $N_1$  з рис. 3.1 у матричному вигляді.

**Розв'язання.** Побудуємо матричне подання мережі Петрі  $N_1$ , зображеної на рис. 3.1:

$$N_1 = (B, D, \overline{M}_0),$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки мережа не має петель, то можливе подання

$N_1 = (C, \overline{M}_0)$ , де

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare \quad (3.3)$$

**Приклад 3.4.** Знайти інваріанти мережі Петрі  $N_1$  з рис. 3.1 і зробити висновки.

**Розв'язання.** У прикладі 3.3 встановлено, що матриця  $C$  подається формулою (3.3).

Інваріант вузлів знаходимо за формулою (3.1):

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_3 - x_4 + x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_5, \\ x_4 = x_3 + x_5, \\ x_6 = x_5. \end{cases}$$

Надамо вільним невідомим  $x_2$ ,  $x_3$  і  $x_5$  натуральних значень, наприклад,  $x_2 = x_3 = x_5 = 1$ . Тоді  $x_1 = 2$ ,  $x_4 = 2$ ,  $x_6 = 1$  і існує інваріант вузлів  $\overline{x} = (2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1)$ , який складається з натуральних чисел. Отже, мережа Петрі  $N_1$  є консервативною й обмеженою, проте не є строго консервативною, бо ваговий вектор  $\overline{x}$  не є одиничним.

Інваріант переходів знаходимо за формулою (3.2):

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 = 0, \\ y_1 - y_2 = 0, \\ -y_3 + y_4 = 0, \\ y_3 - y_4 = 0, \\ y_1 - y_3 = 0, \\ -y_2 + y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2 = y_3 = y_4.$$

Інваріант переходів є, наприклад, таким:  $\overline{y} = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ . Тому мережа Петрі  $N_1$  може мати стаціонарно повторювану

послідовність переходів. З аналізу мережі Петрі  $N_1$  у прикладі 3.1 випливає, що вона справді має стаціонарно повторювану послідовність. ■

**Приклад 3.5.** Побудувати дерево досяжності для мережі Петрі  $N_1$  (рис. 3.1).

**Розв'язання.** У початковій розмітці  $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$  єдиним дозволеним переходом є перехід  $t_1$ . Після його спрацювання отримуємо розмітку  $(0, 1, 1, 0, 1, 0)$ , яку оголошуємо внутрішньою. Тепер спрацює єдиний дозволений перехід  $t_3$  і отримуємо розмітку  $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$ , яка знову буде внутрішньою. Після спрацювання єдиного дозволеного переходу  $t_4$  отримуємо внутрішню розмітку  $(0, 1, 1, 0, 0, 1)$ . Дозволеним є лише перехід  $t_2$ . Внаслідок його спрацювання отримуємо розмітку  $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$ , яка збігається з початковою. Називаємо її дублюючою. Отримане дерево досяжності зображене на рис. 3.3.

На основі дерева досяжності робимо висновок, що мережа Петрі  $N_1$  є обмеженою, безпечною, оборотною, живою, стійкою і має стаціонарно повторювану послідовність переходів  $t_1 t_3 t_4 t_2$ . ■

**Приклад 3.6.** Побудувати дерево досяжності для мережі Петрі  $N_2$  з рис. 3.4.

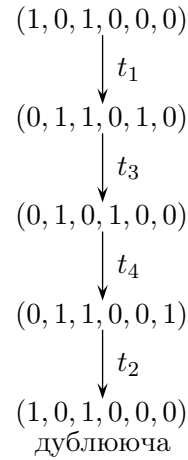


Рис. 3.3

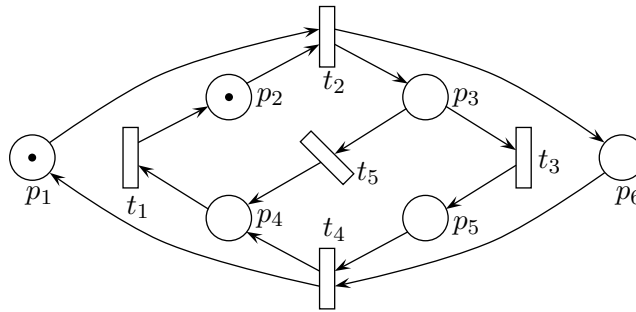


Рис. 3.4

**Розв'язання.** У початковій розмітці  $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$  дозволеним є лише перехід  $t_2$ . Запуск переходу  $t_2$  приводить до розмітки  $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$ , в якій дозволеними є переходи  $t_3$  і  $t_5$ . Спрацювання переходу  $t_3$  приводить до розмітки  $(0, 0, 0, 0, 1, 1)$  з єдиним дозволеним переходом  $t_4$ . Запуск переходу  $t_4$  приводить до розмітки  $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$  з єдиним дозволеним переходом  $t_1$ . Спрацювання переходу  $t_1$  приводить до розмітки  $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$ , яка збігається з початковою. Називаємо її дублюючою. Якщо у розмітці  $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$  спрацює перехід  $t_5$ , то отримаємо розмітку  $(0, 0, 0, 1, 0, 1)$  з єдиним дозволеним переходом  $t_1$ . Спрацювання переходу  $t_1$  приводить до розмітки  $(0, 1, 0, 0, 0, 1)$ , яка є термінальною. Дерево досяжності для мережі  $N_2$  зображене на рис. 3.5.

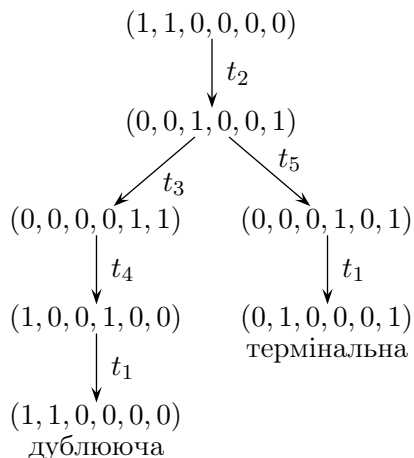


Рис. 3.5

На основі дерева досяжності робимо висновок, що мережа Петрі  $N_2$  є обмеженою, безпечною і строго консервативною (бо сума маркерів у всіх можливих розмітках дорівнює двом), проте не є живою, стійкою і оборотною. Мережа  $N_2$  має стаціонарно повторювану послідовність переходів  $t_2t_3t_4t_1$ , а

спрацювання послідовності переходів  $t_5t_1$  призводить до термінальної розмітки. ■

**Приклад 3.7.** Побудувати дерево досяжності для мережі Петрі  $N_3$  з рис. 3.6.

**Розв'язання.** У початковій розмітці  $(1, 0, 1, 0)$  дозволені є переходи  $t_1$  і  $t_2$ . Спрацювання переходу  $t_1$  призводить до термінальної розмітки  $(2, 1, 0, 0)$ . Запуск переходу  $t_2$  з початкової розмітки приводить до розмітки  $(0, 0, 0, 1)$  з єдиним дозволе-

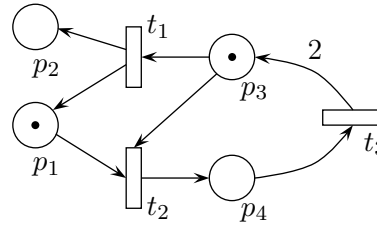


Рис. 3.6

ним переходом  $t_3$ . Спрацювання переходу  $t_3$  дає розмітку  $(0, 0, 2, 0)$  з єдиним дозволеним переходом  $t_1$ . Спрацювання переходу  $t_1$  приводить до розмітки  $(1, 1, 1, 0)$ . Порівнюючи цю розмітку з розміткою  $(1, 0, 1, 0)$ , яка є на шляху до розглядуваної, помічаємо, що в другому вузлі спостерігається зростання кількості маркерів  $((1, 1, 1, 0) \geq (1, 0, 1, 0))$ . Тому в цьому вузлі треба покласти символ  $\omega$ , внаслідок чого отримуємо розмітку  $(1, \omega, 1, 0)$  з дозволеними переходами  $t_1$  і  $t_2$ . Запуск переходу  $t_1$  призводить до термінальної розмітки  $(2, \omega, 0, 0)$ . Спрацювання переходу  $t_2$  з розмітки  $(1, \omega, 1, 0)$  приводить до розмітки  $(0, \omega, 0, 1)$  з єдиним дозволеним переходом  $t_3$ . Спрацювання переходу  $t_3$  дає розмітку  $(0, \omega, 2, 0)$  з єдиним дозволеним переходом  $t_1$ . Запуск переходу  $t_1$  приводить до розмітки  $(1, \omega, 1, 0)$ , яка вже зустрічалась раніше. Називаємо її дублюючою. Дерево досяжності для мережі  $N_3$  зображене на рис. 3.7.

На основі дерева досяжності робимо висновки, що мережа Петрі  $N_3$  не є обмеженою, безпечною, консервативною, оборотною, стійкою і живою. Мережа  $N_3$  не має стаціонарно повторюваної послідовності, у деяких випадках спрацювання переходу  $t_1$  призводить до термінальної розмітки. Вузол  $p_2$  є фактично лічильником кількості спрацювань переходу

$t_1$ . Цей вузол може містити довільну кількість маркерів, що порушує обмеженість мережі Петрі. ■

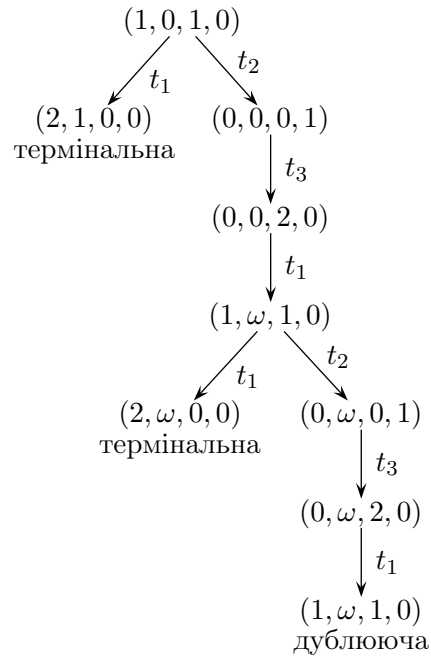


Рис. 3.7

**Приклад 3.8.** В аеропорт для перевезення за тим самим маршрутом надходять вантажі у контейнерах, утворюючи стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю 0,5 контейнера за хвилину. Вантажний аеропорт не має фіксованого розкладу, а літаки відправляються по мірі їхнього повного завантаження. У розпорядженні керуючого аеропортом для перевезення вантажів за даним маршрутом є три літаки з вантажопідйомністю 70 контейнерів і один літак з вантажопідйомністю 120 контейнерів. Час польоту кожного літака туди й назад, включаючи час розвантаження, розподілено рівномірно на проміжку від чотирьох до шести годин. Керуючий

аеропортом намагається якомога частіше використовувати літаки меншої вантажопідйомності для зменшення часу, необхідного для транспортування вантажів. Літак, що піднімає 120 контейнерів, використовуються тільки тоді, коли інших літаків немає в наявності. Припускається, що часом завантаження літаків можна нехтувати. Скласти мережу Петрі для моделювання роботи аеропорту.

**Розв'язання.** Для моделювання стаціонарного пуассонівського потоку використовується експоненціальний закон розподілу. У випадку експоненціально розподіленої випадкової величини середнє значення є оберненою величиною до інтенсивності. За одиницю модельного часу вибираємо хвилину. Мережа Петрі  $N_4$ , яка може використовуватись для моделювання цієї задачі, наведена на рис. 3.8.

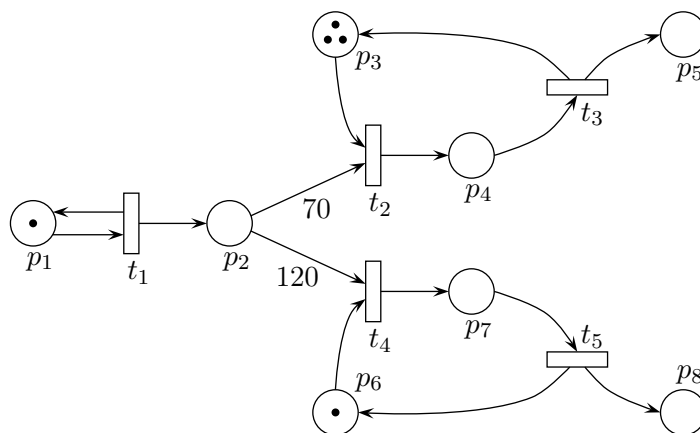


Рис. 3.8

У цій мережі перехід  $t_1$  є експоненціальним з середнім значенням 2 і моделює надходження контейнерів, перехід  $t_2$  є миттєвим і моделює завантаження малого літака, перехід  $t_3$  є рівномірним на проміжку  $[240, 360]$  і моделює політ малого літака, перехід  $t_4$  є миттєвим і моделює завантаження великого літака, перехід  $t_5$  є рівномірним на проміжку  $[240, 360]$



і моделює політ великого літака. У процесі моделювання вузол  $p_2$  міститиме чергу з контейнерів,  $p_3$  — кількість вільних малих літаків,  $p_4$  — кількість малих літаків, що перебувають у польоті,  $p_5$  — кількість рейсів, виконаних малими літаками,  $p_6$  — кількість вільних великих літаків,  $p_7$  — кількість великих літаків, що перебувають у польоті,  $p_8$  — кількість рейсів, виконаних великими літаками. ■

**Приклад 3.9.** На дорозі з двостороннім рухом і однією смугою для руху в кожен бік є світлофор на пішохідному переході (рис. 3.9). Автомобілі у напрямку  $AB$

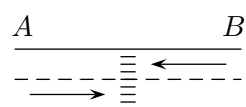


Рис. 3.9

утворюють стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю 5 машин за хвилину, а у напрямку  $BA$  — стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю 6 машин за хвилину. На перетин пішохідного переходу автомобілі витрачають час, який є рівномірно розподіленою на проміжку  $[2, 5]$  секунд випадковою величиною. Жовтий сигнал світлофора можна не враховувати, бо він визначає рух відповідно до попереднього сигналу і є лише попередженням про зміну руху. Тривалість зеленого сигналу для автомобілів — 1 хвилина, а червоного — 45 секунд. Скласти мережу Петрі для моделювання руху автомобілів на цьому переході.

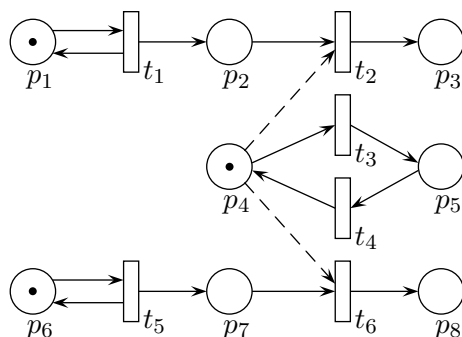


Рис. 3.10

**Розв'язання.** За одиницю модельного часу вибираємо секун-

ду. Мережа Петрі  $N_5$ , яка може використовуватись для моделювання цієї задачі, наведена на рис. 3.10.

У цій мережі перехід  $t_1$  є експоненціальним з середнім значенням 12 і моделює появу автомобілів у напрямі  $AB$ , перехід  $t_2$  є рівномірним на проміжку  $[2, 5]$  і моделює проїзд пішохідного переходу у напрямі  $AB$ , перехід  $t_3$  є детермінованим зі значенням 60 і моделює тривалість зеленого сигналу світлофора для автомобілів, перехід  $t_4$  є детермінованим зі значенням 45 і моделює тривалість червоного сигналу світлофора для автомобілів, перехід  $t_5$  є експоненціальним з середнім значенням 10 і моделює появу автомобілів у напрямі  $BA$ , перехід  $t_6$  є рівномірним на проміжку  $[2, 5]$  і моделює проїзд пішохідного переходу у напрямі  $BA$ . У процесі моделювання вузол  $p_2$  міститиме чергу з автомобілів у напрямі  $AB$ ,  $p_3$  — кількість автомобілів, що проїхали через перехід у напрямі  $AB$ ,  $p_7$  — чергу з автомобілів у напрямі  $BA$ ,  $p_8$  — кількість автомобілів, що проїхали через перехід у напрямі  $BA$ . Наявність маркера у вузлі  $p_4$  моделює зелений сигнал світлофора для автомобілів. Інформаційні дуги від вузла  $p_4$  до переходів  $t_2$  і  $t_6$  дозволяють використовувати один маркер у вузлі  $p_4$  для багатьох запусків цих переходів. ■

**Приклад 3.10.** З допомогою програми HPSim виконати імітаційне моделювання мережі Петрі  $N_4$  з рис. 3.8.

**Розв'язання.** На рис. 3.11 наведено загальний вигляд програми HPSim зі створеною у ній модифікованою мережею  $N_4$  без петлі. Числа біля вузлів визначають їхню ємність, біля переходів — величину затримки або її нижню межу, а біля дуг — їхню кратність. Миттєві переходи відображаються зафарбованими прямокутниками. ■

### Вправи

1. Проаналізуйте мережу Петрі  $N_6$  з рис. 3.12. Подайте мережу Петрі у теоретико-множинному і матричному виглядах. Знайдіть інваріанти мережі і зробіть висновки.

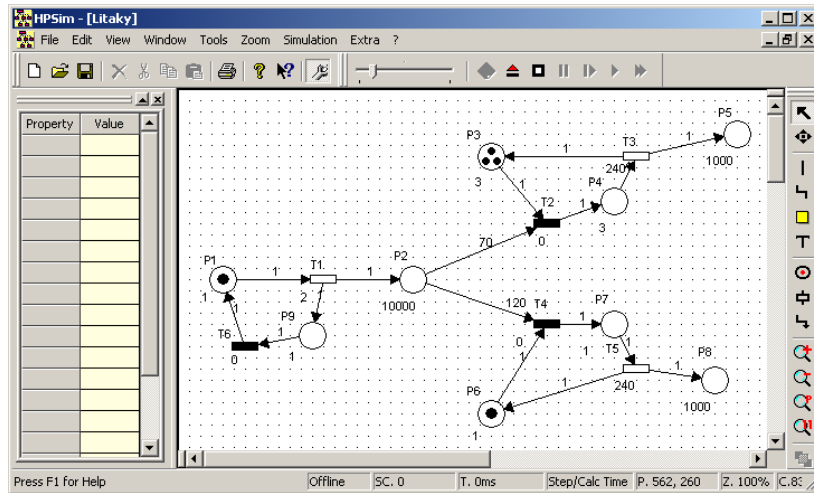


Рис. 3.11

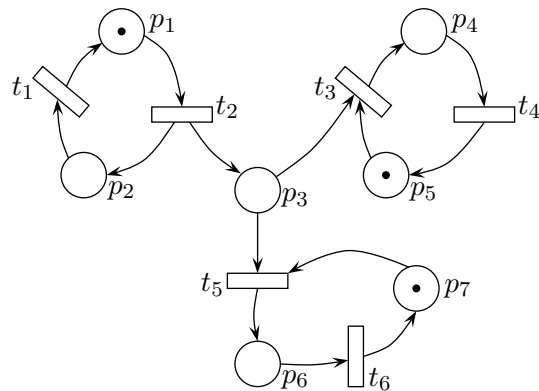


Рис. 3.12

2. Подайте мережу Петрі  $N_7$  з рис. 3.13 у матричному вигляді. Знайдіть інваріанти мережі і зробіть висновки.

3. Проаналізуйте мережу Петрі  $N_8$  з рис. 3.14. Позбувшись петлі, подайте мережу Петрі у теоретико-множинному і матричному виглядах. Знайдіть інваріанти мережі і зробіть висновки.

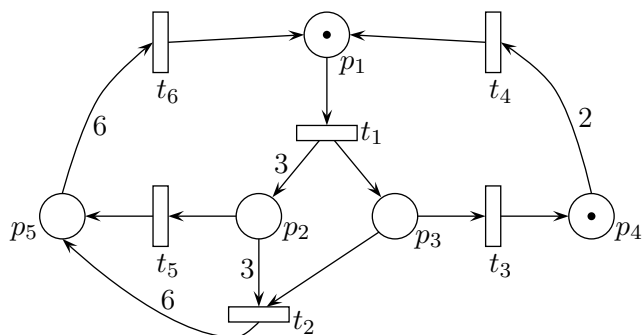


Рис. 3.13

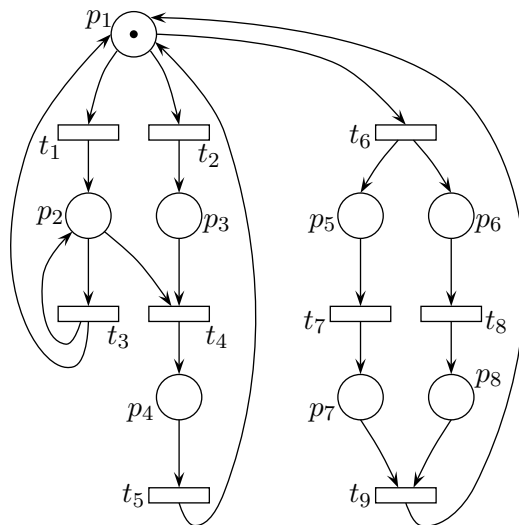


Рис. 3.14

4. Проаналізуйте мережу Петрі  $N_9$  з рис. 3.15. Подайте мережу Петрі у матричному вигляді. Знайдіть інваріанти мережі і зробіть висновки.

5. Проаналізуйте мережу Петрі  $N_2$  з рис. 3.4. Подайте мережу Петрі у матричному вигляді. Знайдіть інваріанти мережі і зробіть висновки.

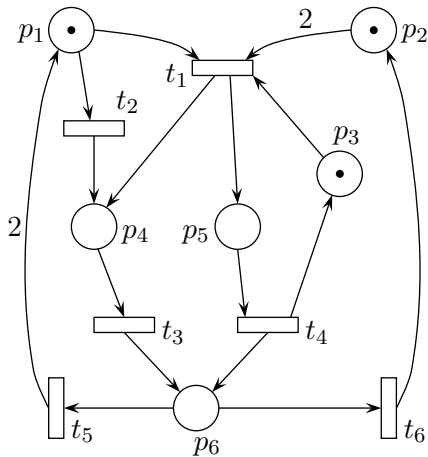


Рис. 3.15

6. Проаналізуйте мережу Петрі  $N_3$  з рис. 3.6. Подайте мережу Петрі у матричному вигляді. Знайдіть інваріанти мережі і зробіть висновки.

7. Проаналізуйте мережу Петрі  $N_4$  з рис. 3.8. Подайте мережу Петрі у матричному вигляді. Знайдіть інваріанти мережі і зробіть висновки.

8. Побудуйте дерево досяжності для мережі Петрі  $N_6$  з рис. 3.12 і зробіть висновки про властивості мережі.

9. Побудуйте дерево досяжності для мережі Петрі  $N_7$  з рис. 3.13 і зробіть висновки про властивості мережі.

10. Побудуйте дерево досяжності для мережі Петрі  $N_8$  з рис. 3.14 і зробіть висновки про властивості мережі.

11. Побудуйте дерево досяжності для мережі Петрі  $N_9$  з рис. 3.15 і зробіть висновки про властивості мережі.

12. З допомогою програми HPSim виконайте імітаційне моделювання мережі Петрі  $N_6$  з рис. 3.12.

13. З допомогою програми HPSim виконайте імітаційне моделювання мережі Петрі  $N_7$  з рис. 3.13.

**14.** З допомогою програми HPSim виконайте імітаційне моделювання мережі Петрі  $N_8$  з рис. 3.14.

**15.** З допомогою програми HPSim виконайте імітаційне моделювання мережі Петрі  $N_9$  з рис. 3.15.

**16.** З допомогою програми HPSim виконайте імітаційне моделювання мережі Петрі  $N_2$  з рис. 3.4.

**17.** З допомогою програми HPSim виконайте імітаційне моделювання мережі Петрі  $N_5$  з рис. 3.10.

**18.** На комплектувальний конвеєр складального цеху кожні  $5 \pm 1$  хвилин надходять 5 деталей першого типу і кожні  $20 \pm 6$  хвилин надходять 20 деталей другого типу. Конвеєр складається із секцій, що вміщують по 10 деталей кожного типу. Чергова секція конвеєра надходить кожні 10 хвилин. Комплектація починаються тільки при наявності деталей обох типів у необхідній кількості і триває 10 хвилин. При недостатній кількості деталей секція конвеєра залишається порожньою. Складіть мережу Петрі для моделювання надходження деталей і розміщення їх на конвеєрі. Яким чином можна визначити ймовірність пропуску секції?

**19.** На обробку до інформаційної системи приймаються три класи задач  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Не більше двох задач класів  $A$  і  $B$  можуть розв'язуватись інформаційною системою одночасно, а задачі класу  $C$  вимагають, щоб система була вільною від інших задач. Задачі класу  $A$  надходять через  $20 \pm 5$  хвилин, класу  $B$  — через  $20 \pm 10$  хвилин і класу  $C$  — через  $40 \pm 10$  хвилин і потребують для виконання: клас  $A$  —  $20 \pm 5$  хвилин, клас  $B$  —  $21 \pm 3$  хвилин і клас  $C$  —  $28 \pm 5$  хвилин. Одна задача класу  $A$  або  $B$  може дозавантажуватись до задачі класу  $A$  або  $B$ , що вже розв'язується. Складіть мережу Петрі для моделювання роботи інформаційної системи. Визначте величини черг у ситуації, коли задачі всіх типів мають однаковий пріоритет і коли задачі типу  $C$  мають вищий пріоритет.

## Тема 4. Аналітичне моделювання систем масового обслуговування

### *Короткі теоретичні відомості*

Системи, спрямовані на задоволення масового попиту на певні послуги, називають системами масового обслуговування. У системах масового обслуговування зазвичай використовуються одноканальні або багатоканальні пристрої. Перед пристроями можуть формуватись черги.

Потоком подій називають послідовність однотипних ситуацій, які відбуваються одна за одною в які-небудь моменти часу. Найважливішою характеристикою потоку подій є інтенсивність потоку  $\lambda$  — середня кількість подій, які відбуваються за одиницю часу. Потік подій називають стаціонарним, якщо його інтенсивність є сталою. Потік подій є потоком без післядії, якщо він не залежить від передісторії. Потік подій називають ординарним, якщо події в ньому з'являються поодиночку, а не групами по кілька подій одразу. Стаціонарним пуассонівським або найпростішим потоком називають потік, який має властивості стаціонарності, ординарності і відсутності післядії. Проміжки часу між подіями в стаціонарному пуассонівському потоці розподілені за експоненціальним законом розподілу.

Фінальною ймовірністю  $p$  називають границю ймовірності  $p(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Обчислити характеристики багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами, вхідний потік для якої є стаціонарним пуассонівським з інтенсивністю  $\lambda$ , а час обслуговування в кожному з  $n$  однотипних каналів утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю  $\mu$ , можна за формулами:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}, \quad p_0 = \left( 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} \right)^{-1}, \quad (4.1)$$

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad P_{\text{відм}} = \frac{\alpha^n}{n!} p_0, \quad (4.2)$$

$$A = \lambda(1 - P_{\text{відм}}), \quad N_3 = \alpha(1 - P_{\text{відм}}), \quad K_3 = \frac{N_3}{n}, \quad (4.3)$$

де  $\alpha$  — зведена інтенсивність,  $p_0$  — імовірність того, що всі канали вільні,  $p_k$  — імовірність того, що зайнято  $k$  каналів,  $P_{\text{відм}}$  — імовірність відмови,  $A$  — пропускна здатність системи,  $N_3$  — середня кількість зайнятих каналів,  $K_3$  — коефіцієнт завантаження системи масового обслуговування.

Характеристики багатоканальної системи масового обслуговування з обмеженою чергою обчислюють за формулами:

$$p_0 = \left( 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{n^{m+1} - \alpha^{m+1}}{n^m(n-\alpha)} \right)^{-1}, \quad (4.4)$$

$$N_3 = p_0 \alpha \left( 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{n^m - \alpha^m}{n^{m-1}(n-\alpha)} \right), \quad (4.5)$$

$$L_{\text{ч}} = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1}}{n!} \cdot \frac{\alpha^m(m\alpha - mn - n) + n^{m+1}}{n^m(n-\alpha)^2} p_0, & \alpha \neq n, \\ \frac{\alpha^n m(m+1)}{2 \cdot n!} p_0, & \alpha = n, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}, \quad P_{\text{відм}} = \frac{\alpha^{n+m}}{n! n^m} p_0, \quad K_3 = \frac{N_3}{n}, \quad W_{\text{ч}} = \frac{L_{\text{ч}}}{\lambda}, \quad (4.7)$$

де  $\lambda$  — інтенсивність вхідного стаціонарного пуассонівського потоку,  $n$  — кількість однотипних каналів в системі масового обслуговування,  $m$  — обмеження довжини черги,  $\mu$  — інтенсивність обслуговування,  $\alpha$  — зведена інтенсивність,  $p_0$  — імовірність того, що всі канали вільні,  $P_{\text{відм}}$  — імовірність відмови,  $N_3$  — середня кількість зайнятих каналів,  $K_3$  — коефіцієнт завантаження системи масового обслуговування,  $L_{\text{ч}}$  — середня довжина черги,  $W_{\text{ч}}$  — середній час перебування в черзі. Пропускна здатність обчислюється так само, як і у випадку системи масового обслуговування з відмовами.

Характеристики багатоканальної системи масового обслуговування з чергою довільної довжини за умови  $\alpha < n$  ( $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ )



обчислюють за формулами:

$$p_0 = \left( 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha^n}{(n-1)!(n-\alpha)} \right)^{-1}, \quad (4.8)$$

$$N_3 = \alpha, \quad K_3 = \frac{N_3}{n}, \quad L_ч = \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2} p_0, \quad W_ч = \frac{L_ч}{\lambda}, \quad (4.9)$$

де  $\lambda$  — інтенсивність вхідного стаціонарного пуассонівського потоку,  $n$  — кількість однотипних каналів в системі масового обслуговування,  $\mu$  — інтенсивність обслуговування,  $\alpha$  — зведена інтенсивність,  $p_0$  — імовірність того, що всі канали вільні,  $N_3$  — середня кількість зайнятих каналів,  $K_3$  — коефіцієнт завантаження системи масового обслуговування,  $L_ч$  — середня довжина черги,  $W_ч$  — середній час перебування в черзі. Якщо  $\alpha \geq n$ , то  $N_3 = n$ ,  $K_3 = 1$ ,  $L_ч = W_ч = \infty$ .

Операційний аналіз застосовують для дослідження мереж, які працюють з перевантаженням, тобто в яких завжди є черга вимог. Нехай  $q_{kj}$  — імовірність переходу вимог від  $k$ -го до  $j$ -го вузла мережі,  $k, j = 1, 2, \dots, n$ , де  $n$  — загальна кількість вузлів,  $q_{0j}$  — імовірність надходження вимог з зовнішнього середовища до  $j$ -го вузла мережі,  $q_{k0}$  — імовірність того, що після завершення обслуговування у  $k$ -му вузлі вимоги залишають мережу,  $U_k$  — коефіцієнт використання  $k$ -го вузла,  $S_k$  — середній час обслуговування у  $k$ -му вузлі,  $X_k$  — інтенсивність вихідного потоку вимог з  $k$ -го вузла. Має місце закон коефіцієнта використання вузла

$$U_k = X_k S_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.10)$$

і система балансу потоків вимог

$$X_j = \sum_{k=0}^n X_k q_{kj}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (4.11)$$

**Рекомендована література:** [2, с. 228–240], [4, с. 5–16, 86–140], [9, с. 97–133], [18, с. 46–84].

### Розв'язування типових вправ і задач

**Приклад 4.1.** Часову діаграму роботи багатоканальної системи масового обслуговування з двома пристроями (Пр1 і Пр2) і трьома позиціями для очікування в черзі (Ч1, Ч2 і Ч3) наведено на рис. 4.1. Час надходження вимоги до системи і час, коли вона залишила систему, наведено поряд з номером вимоги відповідно в нижній і верхній частинах рис. 4.1. Час вимірюється у хвилинах і для зручності заокруглений до цілого числа хвилин.

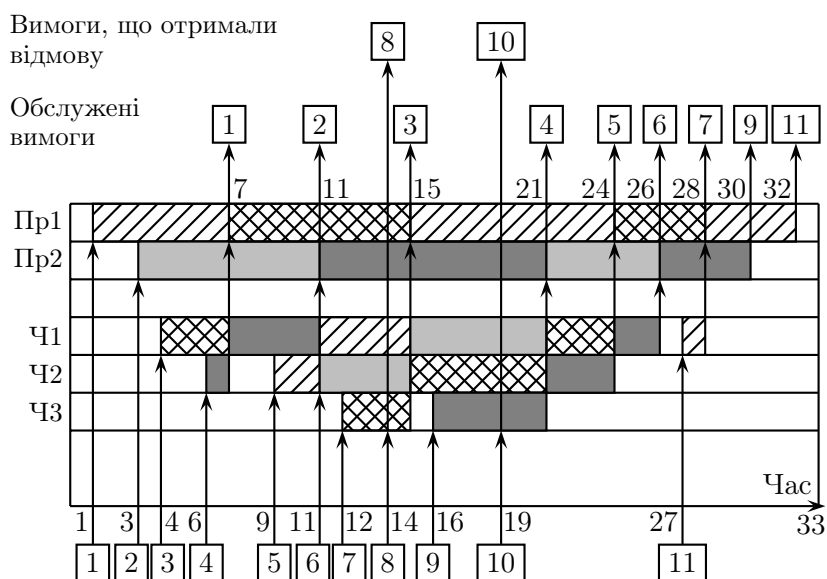


Рис. 4.1.

На основі цієї діаграми знайти імовірність обслуговування вимоги, інтенсивність вхідного потоку, пропускну здатність системи, імовірність відмови в обслуговуванні, імовірність того, що вимога застане обидва пристрої вільними, імовірність того, що обслуговуванням зайнятий тільки один пристрій з двох, імовірність того, що обслуговуванням зайняті обидва

пристрої, але в черзі відсутні вимоги, імовірність того, що в черзі є лише одна вимога, імовірність того, що в черзі знаходиться дві вимоги, середню кількість пристроїв, зайнятих обслуговуванням, середню кількість вимог у черзі, середній час перебування вимог у черзі, середній час перебування вимог у черзі без врахування вимог, які не чекали, середній час обслуговування вимоги пристроями, загальний середній час перебування вимоги в системі масового обслуговування, середню кількість вимог у системі масового обслуговування.

**Розв'язання.** З діаграми видно, що час спостереження за роботою системи становить  $T_{\text{СП}} = 33$  хв.

1. Імовірність обслуговування вимоги:

$$P_{\text{об}} = \frac{N_{\text{об}}}{N} = \frac{9}{11} \approx 0,818,$$

де  $N_{\text{об}}$  і  $N$  — відповідно кількість обслужених вимог і загальна кількість вимог.

2. Інтенсивність вхідного потоку:

$$\lambda = \frac{N}{T_{\text{СП}}} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \approx 0,333 \text{ вимоги/хв.}$$

3. Пропускна здатність системи:

$$X = \frac{N_{\text{об}}}{T_{\text{СП}}} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11} \approx 0,273 \text{ вимоги/хв.}$$

4. Імовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{\text{від}} = \frac{N_{\text{від}}}{N} = \frac{2}{11} \approx 0,182,$$

де  $N_{\text{від}}$  — кількість вимог, яким відмовлено в обслуговуванні.

5. Імовірність того, що вимога зустрине обидва пристрої вільними:

$$P_0 = \frac{T_{\text{вільн}}}{T_{\text{СП}}} = \frac{2}{33} \approx 0,061,$$

де  $T_{\text{вільн}}$  — час, протягом якого обидва пристрої були вільними.

6. Імовірність того, що обслуговуванням зайнятий тільки один пристрій з двох:

$$P_1 = \frac{T_{з1} + T_{з2}}{T_{\text{сп}}} = \frac{2 + 2}{33} \approx 0,121,$$

де  $T_{з1}$  і  $T_{з2}$  — час, протягом якого був зайнятим відповідно лише перший і лише другий пристрій.

7. Імовірність того, що обслуговуванням зайняті обидва пристрої, а в черзі відсутні вимоги:

$$P_2 = \frac{T_{з1,2}}{T_{\text{сп}}} = \frac{(4 - 3) + (27 - 26) + (30 - 28)}{33} = \frac{4}{33} \approx 0,121,$$

де  $T_{з1,2}$  — час, протягом якого були зайнятими обидва пристрої, а в черзі не було вимог.

8. Імовірність того, що в черзі є лише одна вимога:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{T_{\text{чер},1}}{T_{\text{сп}}} = \frac{(6 - 4) + (9 - 7) + (26 - 24) + (28 - 27)}{33} = \\ &= \frac{7}{33} \approx 0,212, \end{aligned}$$

де  $T_{\text{чер},1}$  — час, протягом якого в черзі перебувала лише одна вимога.

9. Імовірність того, що в черзі знаходиться дві вимоги:

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{T_{\text{чер},2}}{T_{\text{сп}}} = \frac{(7 - 6) + (12 - 9) + (16 - 15) + (24 - 21)}{33} = \\ &= \frac{8}{33} \approx 0,242, \end{aligned}$$

де  $T_{\text{чер},2}$  — час, протягом якого в черзі перебувало дві вимоги.

10. Імовірність того, що в черзі знаходиться три вимоги:

$$P_5 = \frac{T_{\text{чер},3}}{T_{\text{сп}}} = \frac{(15 - 12) + (21 - 16)}{33} = \frac{8}{33} \approx 0,242,$$

де  $T_{\text{чер},3}$  — час, протягом якого в черзі було три вимоги.

11. Середня кількість пристроїв, зайнятих обслуговуванням:

$$\begin{aligned} N_{\text{пр}} &= 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot (P_2 + P_3 + P_4 + P_5) = \\ &= 1 \cdot \frac{4}{33} + 2 \cdot \left( \frac{4}{33} + \frac{7}{33} + \frac{8}{33} + \frac{8}{33} \right) = \frac{58}{33} \approx 1,76. \end{aligned}$$

12. Середня кількість вимог у черзі:

$$\begin{aligned} N_{\text{чер}} &= 1 \cdot P_3 + 2 \cdot P_4 + 3 \cdot P_5 = \\ &= 1 \cdot \frac{7}{33} + 2 \cdot \frac{8}{33} + 3 \cdot \frac{8}{33} = \frac{47}{33} \approx 1,42. \end{aligned}$$

13. Середній час перебування вимог у черзі:

$$\begin{aligned} t_{\text{чер}} &= \frac{\sum_{i=1}^N t_{\text{чер},i}}{N_{\text{об}}} = \\ &= \frac{0 + 0 + 3 + 5 + 6 + 10 + 12 + 0 + 10 + 0 + 1}{9} = \frac{47}{9} \approx 5,22 \text{ хв}, \end{aligned}$$

де  $t_{\text{чер},i}$  — час перебування  $i$ -ї вимоги в черзі ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

14. Середній час перебування вимог у черзі без врахування вимог, які не чекали:

$$t_{\text{чер}}^- = \frac{\sum_{i=1}^N t_{\text{чер},i}}{N_{\text{об}(-0)}} = \frac{3 + 5 + 6 + 10 + 12 + 10 + 1}{7} = \frac{47}{7} \approx 6,71 \text{ хв},$$

де  $N_{\text{об}(-0)}$  — кількість вимог, які чекали в черзі.

15. Середній час обслуговування вимоги пристроями:

$$\begin{aligned} t_{\text{об}} &= \frac{\sum_{i=1}^N t_{\text{об},i}}{N_{\text{об}}} = \frac{6 + 8 + 8 + 10 + 9 + 5 + 4 + 4 + 4}{9} = \frac{58}{9} \approx \\ &\approx 6,44 \text{ хв}, \end{aligned}$$

де  $t_{об,i}$  — час обслуговування  $i$ -ї вимоги пристроєм ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

16. Загальний середній час перебування вимоги в системі масового обслуговування:

$$T = t_{чер} + t_{об} = \frac{47}{9} + \frac{58}{9} = \frac{35}{3} \approx 11,67 \text{ хв.}$$

17. Середня кількість вимог у системі масового обслуговування:

$$\bar{N} = N_{чер} + N_{пр} = \frac{47}{33} + \frac{58}{33} = \frac{35}{11} \approx 3,18. \blacksquare$$

**Приклад 4.2.** Система має чотири стани  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Імовірності перебування у цих станах дорівнюють  $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$  відповідно. Розмічений граф станів зображено на рис. 4.2. Перехід системи зі стану  $i$  в стан  $j$  утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю  $\lambda_{ij}$ . Початковим є стан  $S_1$ . Скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей  $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$  і записати початкові умови. Побудувати також систему для фінальних імовірностей.

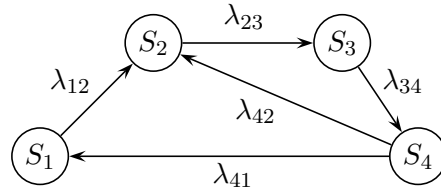


Рис. 4.2.

**Розв'язання.** Нехай  $\Delta t$  — невеликий проміжок часу. Тоді

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t)(1 - \lambda_{12}\Delta t) + p_4(t)\lambda_{41}\Delta t,$$

звідки

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{41}p_4(t).$$

Спрямовуючи  $\Delta t$  до нуля і переходячи до границі, отримуємо диференціальне рівняння для  $p_1(t)$ :

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{41}p_4(t).$$

Аналогічно складаючи три інших рівняння, приходимо до системи диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{41}p_4(t), \\ \frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}p_1(t) - \lambda_{23}p_2(t) + \lambda_{42}p_4(t), \\ \frac{dp_3}{dt} = \lambda_{23}p_2(t) - \lambda_{34}p_3(t), \\ \frac{dp_4}{dt} = \lambda_{34}p_3(t) - (\lambda_{41} + \lambda_{42})p_4(t). \end{cases}$$

Початковим є стан  $S_1$ , тому початкові умови мають вигляд:

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0, \quad p_3(0) = 0, \quad p_4(0) = 0.$$

Система для фінальних імовірностей отримується з системи диференціальних рівнянь Колмогорова заміною ймовірностей  $p_k(t)$  сталими фінальними ймовірностями  $p_k$ :

$$\begin{cases} -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{41}p_4 = 0, \\ \lambda_{12}p_1 - \lambda_{23}p_2 + \lambda_{42}p_4 = 0, \\ \lambda_{23}p_2 - \lambda_{34}p_3 = 0, \\ \lambda_{34}p_3 - (\lambda_{41} + \lambda_{42})p_4 = 0. \blacksquare \end{cases}$$

**Приклад 4.3.** У перукарні є три перукарі. Час обслуговування клієнта кожним з них є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 10 хвилин. Клієнти часом своєї появи утворюють стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю  $\lambda = 1/5$ . Якщо всі перукарі зайняті, то клієнт іде в іншу перукарню, яка знаходиться поруч. Знайти ймовірність того, що клієнт піде в іншу

перукарню, пропускну здатність системи, середню кількість зайнятих перукарів, коефіцієнт завантаження перукаря.

**Розв'язання.** З курсу теорії ймовірностей відомо, що інтенсивність потоку подій для експоненціального закону розподілу проміжків між подіями є оберненою величиною до середнього значення. Тому в цій задачі  $\lambda = 1/5$ ,  $\mu = 1/10$ ,  $n = 3$ . Отже, зведена інтенсивність  $\alpha = 2$ , а за формулами (4.1)–(4.3) маємо:

$$p_0 = \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right)^{-1} = \frac{3}{19},$$

$$P_{\text{відм}} = \frac{4}{19} \approx 0,21, \quad A = \frac{3}{19} \approx 0,16,$$

$$N_3 = 2 \left(1 - \frac{4}{19}\right) = \frac{30}{19} \approx 1,58, \quad K_3 = \frac{10}{19} \approx 0,53. \quad \blacksquare$$

**Приклад 4.4.** У перукарні є три перукарі. Час обслуговування клієнта кожним з них є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 10 хвилин. Клієнти часом своєї появи утворюють стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю  $\lambda = 1/5$ . Якщо всі перукарі зайняті, а довжина черги не перевищує п'ять осіб, то клієнт стає в спільну чергу. Якщо в черзі вже є шість осіб, то черговий клієнт йде в іншу перукарню. Знайти ймовірність того, що клієнт піде в іншу перукарню, пропускну здатність системи, середню кількість зайнятих перукарів, коефіцієнт завантаження перукаря, середню довжину черги і середній час очікування в черзі.

**Розв'язання.** Як і в попередньому прикладі, маємо  $\lambda = 1/5$ ,  $\mu = 1/10$ ,  $n = 3$ . Крім того,  $m = 6$ . Отже, зведена інтенсивність  $\alpha = 2$ , а за формулами (4.4)–(4.7) отримуємо:

$$p_0 = \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} \cdot \frac{3^7 - 2^7}{3^6(3-2)}\right)^{-1} = \frac{2187}{19171},$$

$$P_{\text{відм}} = \frac{2^9}{3!3^6} p_0 = \frac{256}{19171} \approx 0,0134,$$



$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{5}(1 - P_{\text{відм}}) = \frac{3783}{19171} \approx 0,197, \\
N_3 &= 2p_0 \left( 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} \cdot \frac{3^6 - 2^6}{3^5(3-2)} \right) = \frac{37830}{19171} \approx 1,97, \\
K_3 &= \frac{N_3}{3} = \frac{12610}{19171} \approx 0,658, \\
L_{\text{ч}} &= \frac{2^4}{3!} \cdot \frac{2^6(6 \cdot 2 - 6 \cdot 3 - 3) + 3^7}{3^6(3-2)^2} p_0 = \frac{12888}{19171} \approx 0,672, \\
W_{\text{ч}} &= 5L_{\text{ч}} = \frac{64440}{19171} \approx 3,36. \blacksquare
\end{aligned}$$

**Приклад 4.5.** У перукарні є три перукарі. Час обслуговування клієнта кожним з них є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 10 хвилин. Клієнти часом своєї появи утворюють стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю  $\lambda = 1/5$ . За необхідності формується черга довільної довжини. Знайти середню кількість зайнятих перукарів, коефіцієнт завантаження перукаря, середню довжину черги і середній час очікування в черзі.

**Розв'язання.** Так само, як і в двох попередніх прикладах, маємо  $\lambda = 1/5$ ,  $\mu = 1/10$ ,  $n = 3$ . Отже, зведена інтенсивність  $\alpha = 2$ , а оскільки  $\frac{\alpha}{n} = \frac{2}{3} < 1$ , то черга є скінченною і за формулами (4.8)–(4.9) отримуємо:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \left( 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{2!(3-2)} \right)^{-1} = \frac{1}{9}, \\
N_3 &= 2, \quad K_3 = \frac{2}{3} \approx 0,667, \\
L_{\text{ч}} &= \frac{2^4}{2!(3-2)^2} \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,889, \quad W_{\text{ч}} = 5L_{\text{ч}} = \frac{40}{9} \approx 4,44. \blacksquare
\end{aligned}$$

**Приклад 4.6.** На рис. 4.3 подано мережу систем масового обслуговування, яка працює з перевантаженням. Вузли мережі позначено квадратиками з їхніми номерами, для позначення черг перед вузлами використовуються символи  $\text{III}$ .

Середній час (у секундах) обслуговування вимог у вузлах мережі є наступним:  $S_1 = 0,05$ ,  $S_2 = 0,03$ ,  $S_3 = 0,09$ ,  $S_4 = 0,01$ . Проаналізувати вузькі місця мережі і визначити найбільшу кількість вимог, яку мережа зможе опрацювати за одиницю часу, тобто максимальну інтенсивність вхідного потоку. Обчислити коефіцієнти використання всіх вузлів мережі і вихідні потоки з усіх вузлів для знайденого вхідного потоку.

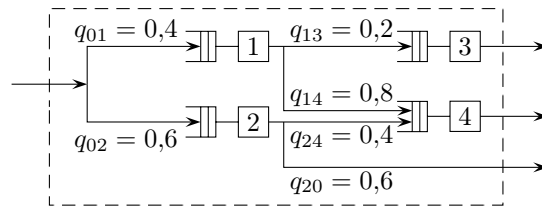


Рис. 4.3.

**Розв'язання.** Складаємо систему балансу (4.11) для мережі з рис. 4.3:

$$\begin{cases} X_0 = X_3 + X_4 + 0,6X_2, \\ X_1 = 0,4X_0, \\ X_2 = 0,6X_0, \\ X_3 = 0,2X_1, \\ X_4 = 0,8X_1 + 0,4X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,4X_0, \\ X_2 = 0,6X_0, \\ X_3 = 0,08X_0, \\ X_4 = 0,56X_0. \end{cases}$$

За формулами (4.10) визначаємо коефіцієнти використання вузлів через інтенсивність вхідного потоку  $X_0$ :

$$U_1 = 0,02X_0, \quad U_2 = 0,018X_0, \quad U_3 = 0,0072X_0, \quad U_4 = 0,0056X_0.$$

Найбільшим є коефіцієнт використання першого вузла, тому саме перший вузол є вузьким місцем даної мережі. Оскільки коефіцієнт використання вузла не може бути більшим від 1, то з рівності  $0,02X_0 = 1$  отримуємо  $X_0 = 50$  — максимальну інтенсивність вхідного потоку. Тепер можна обчислити відпо-

відні інтенсивності вихідних потоків і коефіцієнти використання всіх вузлів:

$$\begin{aligned} X_1 = 20, \quad X_2 = 30, \quad X_3 = 4, \quad X_4 = 28, \\ U_1 = 1, \quad U_2 = 0,9, \quad U_3 = 0,36, \quad U_4 = 0,28. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### *Вправи*

1. Задана двоканальна система масового обслуговування з двома пристроями (Пр1 і Пр2) з двома позиціями для очікування в черзі (Ч1 і Ч2). Її часову діаграму наведено на рис. 4.4. Час надходження вимоги до системи і час, коли вона залишила систему, наведено поряд з номером вимоги відповідно в нижній і верхній частинах рис. 4.4. Час вимірюється у хвилинах і для зручності заокруглений до цілого числа хвилин.

Знайдіть імовірність обслуговування вимоги, інтенсивність вхідного потоку, пропускну здатність системи, імовірність відмови в обслуговуванні, імовірність того, що вимога застане обидва пристрої вільними, імовірність того, що обслуговуванням зайнятий тільки один пристрій з двох, імовірність того, що обслуговуванням зайняті обидва пристрої, але в черзі відсутні вимоги, імовірність того, що в черзі є лише одна вимога, імовірність того, що в черзі знаходиться дві вимоги, середню кількість пристроїв, зайнятих обслуговуванням, середню кількість вимог у черзі, середній час перебування вимог у черзі, середній час перебування вимог у черзі без врахування вимог, які не чекали, середній час обслуговування вимоги пристроями, загальний середній час перебування вимоги в системі масового обслуговування, середню кількість вимог у системі масового обслуговування.

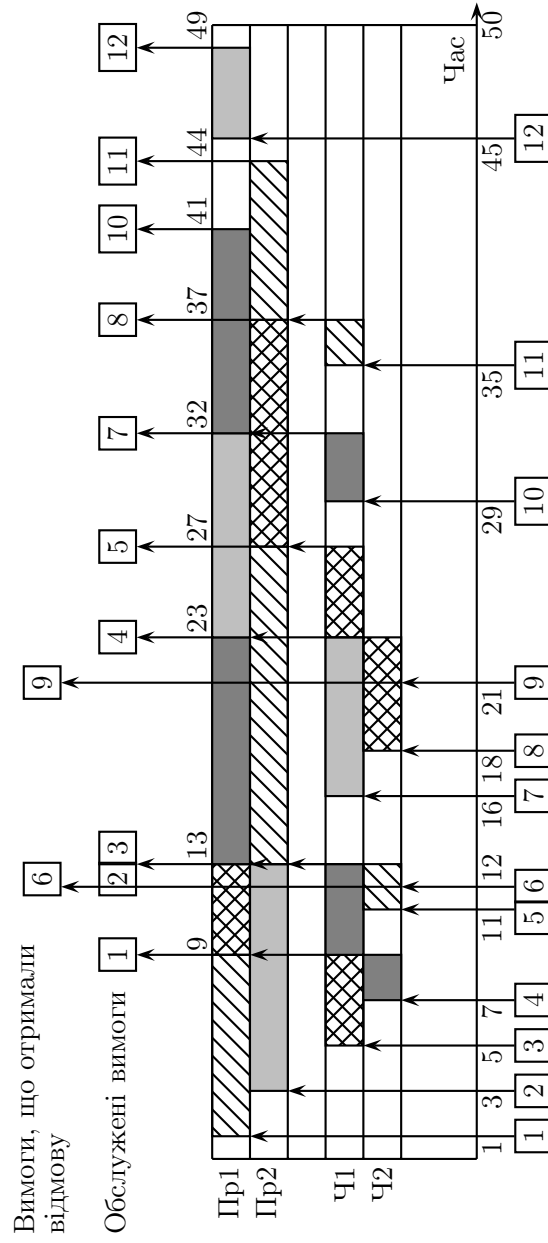


Рис. 4.4.

2. Система має чотири стани  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ . Імовірності перебування у цих станах дорівнюють  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$ ,  $p_4(t)$  відповідно. Розмічений граф станів зображено на рис. 4.5. Перехід системи зі стану  $i$  в стан  $j$  утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю  $\lambda_{ij}$ . Початковим є стан  $S_1$ . Складіть систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$ ,  $p_4(t)$  і запишіть початкові умови. Побудуйте також систему для фінальних ймовірностей.

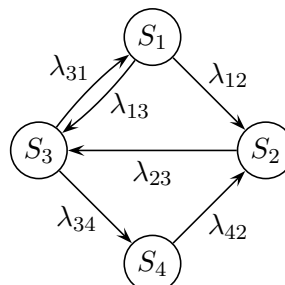


Рис. 4.5.

3. Розмічений граф станів зображено на рис. 4.6. Перехід системи зі стану  $i$  в стан  $j$  утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю  $\lambda_{ij}$ . Початковим є стан  $S_1$ . Складіть систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей перебування у станах  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$ ,  $p_4(t)$ , запишіть початкові умови і побудуйте систему для фінальних ймовірностей.

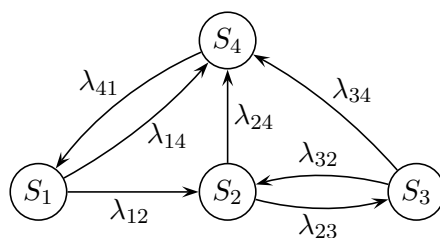


Рис. 4.6.

4. Розмічений граф станів зображено на рис. 4.7. Перехід системи зі стану  $i$  в стан  $j$  утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю  $\lambda_{ij}$ . Початковим є стан  $S_1$ . Складіть систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей перебування у станах  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$ ,  $p_4(t)$ ,  $p_5(t)$ ,

запишіть початкові умови і побудуйте систему для фінальних імовірностей.

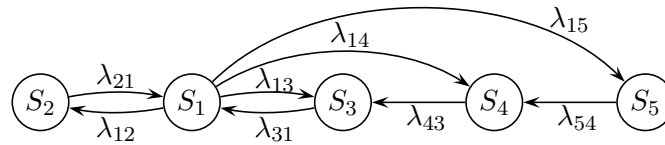


Рис. 4.7.

5. Розмічений граф станів зображено на рис. 4.8. Перехід системи зі стану  $i$  в стан  $j$  утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю  $\lambda_{ij}$ . Початковим є стан  $S_1$ . Складіть систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей перебування у станах  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$ ,  $p_4(t)$ ,  $p_5(t)$ , запишіть початкові умови і побудуйте систему для фінальних імовірностей.

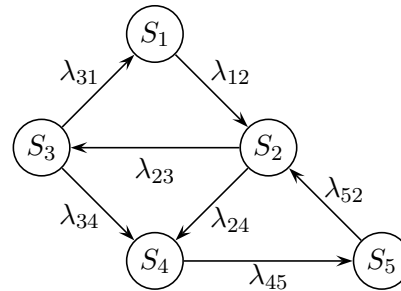


Рис. 4.8.

6. Розмічений граф станів зображено на рис. 4.9. Перехід системи зі стану  $i$  в стан  $j$  утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю  $\lambda_{ij}$ . Початковим є стан  $S_2$ . Складіть систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей перебування у станах  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$ ,  $p_4(t)$ ,  $p_5(t)$ , запишіть початкові умови і побудуйте систему для фінальних імовірностей.

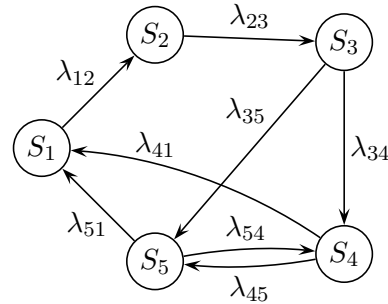


Рис. 4.9.

7. На виробничій дільниці є  $N$  однакових верстатів. Продуктивність одного верстата така, що в середньому на протя-

зі зміни на ньому можна обробити  $\mu$  деталей, а час обробки деталей утворює потік, близький до стаціонарного пуассонівського. Деталі надходять на обробку партіями по  $M$  штук. Партії надходять нерівномірно і їхній потік є близьким до стаціонарного пуассонівського з інтенсивністю  $\lambda$  партій за зміну. Побудуйте граф станів даної системи масового обслуговування і запишіть систему рівнянь Колмогорова для фінальних імовірностей.

**8.** Автоматизована телефонна станція має 5 ліній зв'язку. Вхідний потік викликів є стаціонарним пуассонівським з інтенсивністю 2 виклики за хвилину. Тривалості телефонних розмов утворюють стаціонарний пуассонівський потік. Середня тривалість телефонної розмови становить 1 хвилину. Потрібно визначити ймовірність відмови, середню кількість зайнятих ліній зв'язку і коефіцієнт завантаження однієї лінії.

**9.** Автостоянка біля магазину має 7 місць. Тривалість перебування автомашини на стоянці є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 0,5 години. Інтенсивність вхідного стаціонарного пуассонівського потоку становить 8 автомобілів за годину. Якщо вільних місць на стоянці немає, то автомобілі не зупиняються біля магазину. Потрібно визначити ймовірність відмови, середню кількість зайнятих місць і коефіцієнт завантаження одного місця.

**10.** Автостоянка має 10 місць. Тривалість перебування автомашини на стоянці є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 3 години. Інтенсивність вхідного стаціонарного пуассонівського потоку становить 3 автомашини за годину. Якщо вільних місць на стоянці немає, то автомобілі їдуть шукати іншу стоянку. Потрібно визначити ймовірність відмови, середню кількість зайнятих місць і коефіцієнт завантаження одного місця.

**11.** Визначте мінімальну потрібну кількість ліжок у стаціонарній лікарні, якщо час перебування в лікарні хворого є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з

середнім значенням 14 днів. Нові хворі не приймаються, якщо всі ліжка в стаціонарі зайняті. Потік надходження хворих є близьким до стаціонарного пуассонівського з інтенсивністю 3 людини за день. Імовірність відмови має не перевищувати 5 %.

**12.** Підприємець надає послуги, і його роботу можна розглядати як  $n$ -канальну систему масового обслуговування з відмовами (тобто в черзі немає сенсу стояти, бо є конкурент, у якого можна отримати ті самі послуги за ту саму ціну) з вхідним стаціонарним пуассонівським потоком вимог з інтенсивністю надходження 5 вимог за годину, і часом виконання роботи, який має експоненціальний розподіл з середнім значенням часу виконання однієї вимоги 1,5 години. За виконання кожного замовлення підприємець отримує 300 грн, а накладні витрати становлять  $c = 100$  грн за годину за кожен канал незалежно від того, зайнятий він, чи ні. Визначити, якою повинна бути кількість каналів такої системи масового обслуговування, щоб підприємець отримував максимально можливий прибуток за годину, яким буде цей прибуток і якою буде у цьому випадку ймовірність втрати замовлення.

**13.** У майстерні, яка виконує ремонт телевізорів, працює троє майстрів. Вхідний потік замовлень на ремонт телевізорів є близьким до стаціонарного пуассонівського з інтенсивністю 1,3 телевізора за годину. У зв'язку з обмеженістю місця для зберігання замовлень на ремонт черга обмежена десятьма позиціями. Якщо в черзі перебуває 10 замовлень, то наступне замовлення отримує відмову і замовник ремонту йде в іншу майстерню. Час ремонту телевізора майстром є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 2 години. Визначте ймовірність відмови, середню кількість зайнятих роботою майстрів, коефіцієнт завантаження роботою кожного майстра, середню довжину черги, середній час перебування замовлення в черзі.

**14.** На автозаправці є дві бензоколонки. Майданчик поблизу автозаправки допускає одночасне очікування не більше



$m$  автомобілів. Потік автомобілів, які прибувають на заправку, є стаціонарним пуассонівським з інтенсивністю 0,2 автомобіля за хвилину. Час обслуговування автомобіля розподілений за експоненціальним законом з середнім значенням 7 хвилин. Визначте мінімальну кількість місць  $m$  для очікування, які забезпечать обслуговування не менше 95 % автомобілів, що потребують заправки. Для знайденого  $m$  обчисліть коефіцієнт завантаження бензоколонок, середню довжину черги і середній час перебування автомобіля в черзі.

**15.** Підприємець надає послуги, і його роботу можна розглядати як  $n$ -канальну систему масового обслуговування з п'ятьма позиціями для очікування в черзі з вхідним стаціонарним пуассонівським потоком вимог з інтенсивністю надходження 5 вимог за годину, і часом виконання роботи, який має експоненціальний розподіл з середнім значенням часу виконання однієї вимоги 1,5 години. За виконання кожного замовлення підприємець отримує 300 грн, а накладні витрати становлять  $c = 100$  грн за годину за кожен канал незалежно від того, зайнятий він, чи ні. Визначити, якою повинна бути кількість каналів такої системи масового обслуговування, щоб підприємець отримував максимально можливий прибуток за годину, яким буде цей прибуток і якою буде у цьому випадку ймовірність втрати замовлення.

**16.** По конвеєру надходять деталі двох видів:  $A$  і  $B$ . Інтенсивність надходження деталей однакова і становить  $\lambda_A = \lambda_B = 0,45$  деталей за хвилину, а їхній потік є близьким до стаціонарного пуассонівського. Для обробки деталей використовуються два верстати, які можуть обробляти як деталі виду  $A$ , так і деталі виду  $B$ . Середній час обробки деталей (як одного виду, так і іншого) становить 2 хвилини, причому час обробки утворює стаціонарний пуассонівський потік. Потрібно визначити коефіцієнт завантаження верстатів, середню довжину черги і середній час очікування в черзі.

**17.** Припустимо, що один раціоналізатор запропонував

спеціалізувати кожен верстат з попередньої задачі тільки на один вид деталей. У результаті час обробки деталей на кожному з верстатів зменшився. На верстаті, який обробляє деталі типу  $A$ , він зменшився в середньому до 1,9 хвилини, а на верстаті, який обробляє деталі типу  $B$ , — до 1,95 хвилини. Потрібно визначити коефіцієнти завантаження верстатів, середні довжини черг, середній час очікування в чергах, а також загальну довжину черги. Чи вдалою є така раціоналізаторська пропозиція?

**18.** У магазині є три продавці, які по черзі обслуговують покупців. Середній час обслуговування одного покупця продавцем становить 1 хвилину, причому час обслуговування утворює стаціонарний пуассонівський потік. Потік покупців є близьким до стаціонарного пуассонівського з інтенсивністю 2 покупці за хвилину. Визначте коефіцієнт завантаження каси, середню довжину черги і середній час очікування в черзі.

**19.** У магазині є одна каса. Середній час обслуговування одного покупця в касі становить 0,3 хвилини, причому час обслуговування утворює стаціонарний пуассонівський потік. Потік покупців є близьким до стаціонарного пуассонівського з інтенсивністю 3 покупці за хвилину. Визначте коефіцієнт завантаження каси, середню довжину черги і середній час очікування в черзі.

**20.** Визначте, скільки в магазині з попередньої задачі необхідно встановити кас, якщо інтенсивність потоку покупців зростає втричі. Середня довжина спільної черги до всіх кас не повинна перевищувати 10 осіб.

**21.** На рис. 4.10 подано мережу систем масового обслуговування, яка працює з перевантаженням. Середній час (у секундах) обслуговування вимог у вузлах мережі є наступним:  $S_1 = 0,05$ ,  $S_2 = 0,08$ ,  $S_3 = 0,04$ . Проаналізуйте вузькі місця мережі і визначте найбільшу кількість вимог, яку мережа зможе опрацювати за одиницю часу, тобто максимальну інтенсивність вхідного потоку. Обчисліть коефіцієнти викори-

стання всіх вузлів мережі і вихідні потоки з усіх вузлів для знайденого вхідного потоку.

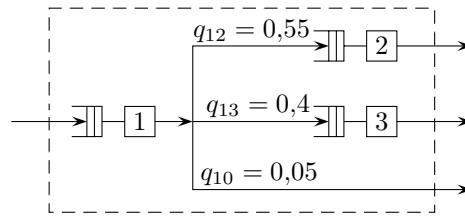


Рис. 4.10.

**22.** На рис. 4.11 подано мережу систем масового обслуговування, яка працює з перевантаженням. Середній час (у секундах) обслуговування вимог у вузлах мережі є наступним:  $S_1 = 0,03$ ,  $S_2 = 0,01$ ,  $S_3 = 0,09$ ,  $S_4 = 0,07$ . Проаналізуйте вузькі місця мережі і визначте найбільшу кількість вимог, яку мережа зможе опрацювати за одиницю часу, тобто максимальну інтенсивність вхідного потоку. Обчисліть коефіцієнти використання всіх вузлів мережі і вихідні потоки з усіх вузлів для знайденого вхідного потоку.

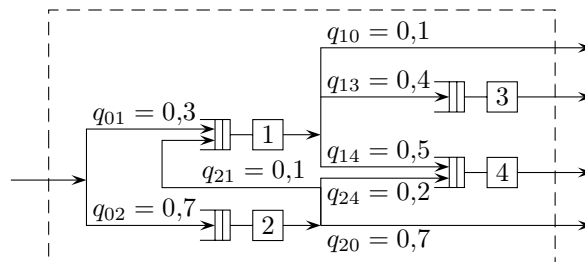


Рис. 4.11.

**23.** На рис. 4.12 подано мережу систем масового обслуговування, яка працює з перевантаженням. Середній час (у секундах) обслуговування вимог у вузлах мережі є наступним:  $S_1 = 0,05$ ,  $S_2 = 0,03$ ,  $S_3 = 0,07$ ,  $S_4 = 0,1$ . Проаналізуйте вузькі

місця мережі і визначте найбільшу кількість вимог, яку мережа зможе опрацювати за одиницю часу, тобто максимальну інтенсивність вхідного потоку. Обчисліть коефіцієнти використання всіх вузлів мережі і вихідні потоки з усіх вузлів для знайденого вхідного потоку.

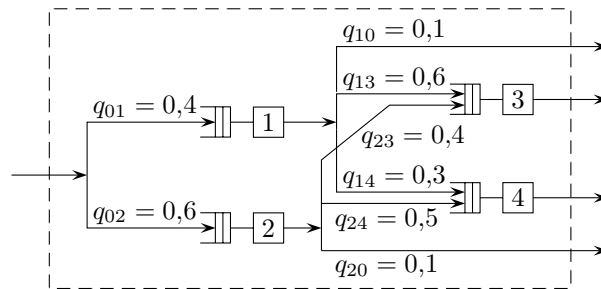


Рис. 4.12.

24. На рис. 4.13 подано мережу систем масового обслуговування, яка працює з перевантаженням. Середній час (у секундах) обслуговування вимог у вузлах мережі є наступним:  $S_1 = 0,02$ ,  $S_2 = 0,01$ ,  $S_3 = 0,04$ ,  $S_4 = 0,02$ ,  $S_5 = 0,03$ . Проаналізуйте вузькі місця мережі і визначте найбільшу кількість вимог, яку мережа зможе опрацювати за одиницю часу, тобто максимальну інтенсивність вхідного потоку. Обчисліть коефіцієнти використання всіх вузлів мережі і вихідні потоки з усіх вузлів для знайденого вхідного потоку.

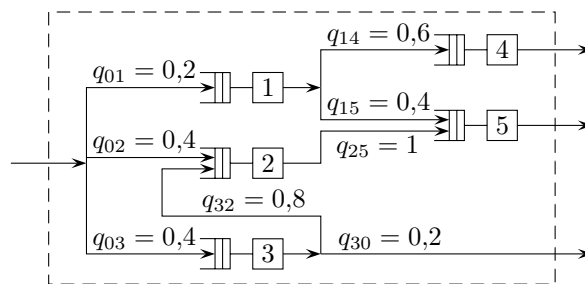


Рис. 4.13.

## Тема 5. Основи мови імітаційного моделювання GPSS World

### *Короткі теоретичні відомості*

Для імітаційного моделювання зручно застосовувати спеціалізовані мови програмування моделей. Однією з найпоширеніших з них є мова GPSS та її остання реалізація GPSS World, яку найчастіше використовують для моделювання систем масового обслуговування.

Програма на мові GPSS складається з послідовності операторів, якими є блоки, команди опису і команди керування. Блоки формують саму модель і використовуються протягом всього процесу моделювання. Команди опису і команди керування виконуються лише по одному разу в тому порядку, в якому вони записані в програмі. Великі і малі латинські букви в тексті програми не розрізняються. Результатом виконання програми є статистичний звіт.

Одними з ключових об'єктів мови GPSS є транзакти. Транзакти — це абстрактні рухомі об'єкти, які, переміщуючись між блоками, викликають різні дії і зазнають їх. Зміст транзакта в кожній конкретній програмі встановлює її розробник.

Кожен оператор програми записується в окремому рядку. Рядок може бути також порожнім або містити лише коментар. Формат рядка є наступним:

номер мітка ключове\_слово операнди коментар

Номер є обов'язковим елементом рядка, ніде не використовується й ігнорується. Мітка теж є обов'язковим елементом рядка. Вона складається з латинських букв, цифр і символів підкреслення. Ключовим словом може бути назва блока, команди опису або команди керування. Кількість операндів і їхній формат залежить від ключового слова. Як правило, операнди записуються через кому без пропусків (до чи після неї).

Коментар є необов'язковим елементом рядка і починається з символу «;». Усі символи після нього в рядку ігноруються.

Для створення і введення транзактів у модель використовують блок **GENERATE**  $A, B, C, D, E$ . Для моделювання випадкового потоку транзактів з рівномірним законом розподілу часу між транзактами на проміжку  $[a, b]$  використовують операнди  $A$  і  $B$ . У цьому випадку операнд  $A$  задає середину проміжку  $\frac{a+b}{2}$ , а операнд  $B$  — половину довжини проміжку  $\frac{b-a}{2}$ . Зокрема, якщо операнд  $B$  не вказано, то час між створенням транзактів визначається лише операндом  $A$ , який може бути як числом так і функцією. Операнд  $C$  задає час появи першого транзакта. Операнд  $D$  вказує кількість транзактів, які потрібно згенерувати. Ціле число на місці операнда  $E$  визначає пріоритет транзактів.

Процес моделювання запускається командою керування **START**  $A$ , де  $A$  — початкове значення лічильника завершень (натуральне число).

Транзакт виводиться з моделі блоком **TERMINATE**  $A$ , де  $A$  — ціле значення, яке віднімається від значення лічильника завершень. Коли значення лічильника завершень стає рівним нулю, моделювання припиняється.

Для затримки транзактів з метою імітації їхнього обслуговування використовується блок **ADVANCE**  $A, B$ . Зміст операндів  $A$  і  $B$  тут той самий, що й у блоці **GENERATE**.

Блок **ASSIGN**  $A, B$  присвоює параметру  $A$  транзакта значення  $B$ . Блок **PRIORITY**  $A$  змінює рівень пріоритету транзакта. Блок **SAVEVALUE**  $A, B$  присвоює комірці пам'яті  $A$  значення  $B$ .

Блок **SEIZE**  $A$  моделює вхід в одноканальний пристрій з ім'ям  $A$ , а блок **RELEASE**  $A$  — вихід з одноканального пристрою з ім'ям  $A$ .

Для використання багатоканального пристрою в моделі його спочатку потрібно описати командою  $N$  **STORAGE**  $A$ , де  $N$  — ім'я багатоканального пристрою,  $A$  — його ємність, тобто кількість каналів. Блок **ENTER**  $A$  моделює вхід у багато-

канальний пристрій з ім'ям  $A$ , описаний командою **STORAGE**. Блок **LEAVE**  $A$  моделює вихід із багатоканального пристрою з ім'ям  $A$ .

Для збору статистичної інформації про результати моделювання використовують команду опису таблиць

$N$  TABLE  $A,B,C,D$ ,

де  $N$  — ім'я таблиці,  $A$  — системний числовий атрибут об'єкта, для якого створюють таблицю,  $B$  — верхня межа нижнього інтервалу таблиці,  $C$  — ширина інтервалів (крім першого і останнього),  $D$  — кількість інтервалів. Інформація в таблицю заноситься блоком **TABULATE**  $A$ , де  $A$  — ім'я таблиці. Черга моделюється блоками **QUEUE**  $A$  (стати в чергу  $A$ ) і **DEPART**  $B$  (вийти з черги  $B$ ).

Блок **TRANSFER** , $A$  виконує безумовний перехід на мітку  $A$ . Блок **TEST**  $X$   $A,B,C$  порівнює операнди  $A$  і  $B$  відповідно до умовного операнда  $X$ . Якщо умова виконується, то транзакт переходить у наступний блок, інакше він переходить на мітку  $C$ .

*Рекомендована література:* [3, с. 10–114], [6, с. 5–33], [9, с. 141–190], [12, с. 17–377], [15, с. 7–62], [17, с. 4–214].

### *Розв'язування типових вправ і задач*

**Приклад 5.1.** У магазині є одна каса. Час обслуговування одного покупця в касі є рівномірно розподіленою випадковою величиною на проміжку  $[10, 70]$  секунд. Відомо, що покупці з'являються через кожні 0–90 секунд. З допомогою мови імітаційного моделювання GPSS здійснити моделювання обслуговування 100 покупців у касі, визначити коефіцієнт її завантаження і час обслуговування 100 покупців.

*Розв'язання.* За одиницю модельного часу в цій задачі зручно вибрати секунду. Роль покупців у моделі будуть виконувати транзакти. Касою слугуватиме одноканальний при-

стрій `kasa`. Інтервали часу між надходженням покупців вважаємо випадковими величинами з рівномірним розподілом на відрізки  $[0, 90]$ . Для моделювання обслуговування 100 покупців використовуємо команду `START` з операндом 100 і блок `TERMINATE` з операндом 1. Програма має вигляд:

```
GENERATE 45,45
SEIZE kasa
ADVANCE 40,30
RELEASE kasa
TERMINATE 1
START 100
```

За результатами моделювання отримуємо звіт (рис. 5.1), з якого робимо висновок про те, що коефіцієнт завантаження каси приблизно дорівнює 0,86 (стовпець `UTIL.` таблиці `FACILITY`), а загальний час обслуговування 100 покупців становить близько 78 хвилин (`END TIME`). ■

GPSS World Simulation Report - Model1.1.1

Thursday, June 13, 2019 14:44:36

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	4697.709	5	1	0

NAME	VALUE
KASA	10000.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT	COUNT	RETRY
	1	GENERATE	100	0	0	0
	2	SEIZE	100	0	0	0
	3	ADVANCE	100	0	0	0
	4	RELEASE	100	0	0	0
	5	TERMINATE	100	0	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
KASA	100	0.857	40.258	1	0	0	0	0	0

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
101	0	4742.765	101	0	1		

Рис. 5.1



Треба мати на увазі, що чимало характеристик у звіті залежить від випадкових чисел, а тому повторний запуск моделі командою `START 100` може дати дещо інші числа.

**Приклад 5.2.** У магазині є дві каси, до яких формується спільна черга. Час обслуговування одного покупця в касі є рівномірно розподіленою випадковою величиною на проміжку  $[10, 80]$  секунд. Відомо, що покупці з'являються через кожні  $0-50$  секунд. З допомогою мови імітаційного моделювання GPSS здійснити моделювання обслуговування 100 покупців у касі, визначити коефіцієнт її завантаження, час обслуговування 100 покупців, характеристики черги, детальну статистику черги, статистику розподілу часу перебування покупців біля кас і часу обслуговування покупців касирами.

**Розв'язання.** Для моделювання двох кас використовуємо багатоканальний пристрій `kasa` з двома каналами. Створюємо три таблиці — `tab1`, `tab2` і `tab3`. У таблиці `tab1` будемо збирати статистику розподілу часу, необхідного покупцям для перебування в черзі до каси і здійснення оплати, в таблиці `tab2` — лише для здійснення оплати, а в таблиці `tab3` — детальну статистику черги. Програма може бути, наприклад, такою:

```
tab1 TABLE M1,10,10,20
tab2 TABLE MP1,10,10,20
tab3 QTABLE cherga,10,10,20
kasa STORAGE 2
GENERATE 25,25
QUEUE cherga
ENTER kasa
DEPART cherga
MARK 1
ADVANCE 45,35
LEAVE kasa
TABULATE tab1
TABULATE tab2
```

```

TERMINATE 1
START 100

```

За результатами моделювання отримуємо звіт (його частково наведено на рис. 5.2, 5.3), з якого робимо висновок про те, що коефіцієнт завантаження кас приблизно дорівнює 0,86 (стовпець UTIL. таблиці STORAGE), загальний час обслуговування 100 покупців становить близько 44 хвилини (END TIME), максимальна довжина черги — 5 осіб, середня довжина — 1,3, а середній час перебування в черзі — близько 33 секунд (стовпці MAX, AVE. CONT. і AVE. TIME таблиці QUEUE).

	START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES							
	0.000	2659.890	10	0	1							
QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY				
CHERGA	5	3	104	25	1.303	33.328	43.874	0				
STORAGE	CAP.	REM.	MIN.	MAX.	ENTRIES	AVL.	AVE.C.	UTIL.	RETRY	DELAY		
KASA	2	0	0	2	102	1	1.724	0.862	0	2		
TABLE	MEAN	STD.DEV.	RANGE			RETRY	FREQUENCY	CUM.%				
TAB1	79.003	39.842	10.000	-	20.000			0	3	3.00		
			20.000	-	30.000				8	11.00		
			30.000	-	40.000				5	16.00		
			40.000	-	50.000				9	25.00		
			50.000	-	60.000				11	36.00		
			60.000	-	70.000				10	46.00		
			70.000	-	80.000				9	55.00		
			80.000	-	90.000				9	64.00		
			90.000	-	100.000				7	71.00		
			100.000	-	110.000				9	80.00		
			110.000	-	120.000				4	84.00		
			120.000	-	130.000				3	87.00		
			130.000	-	140.000				5	92.00		
			140.000	-	150.000				2	94.00		
			150.000	-	160.000				2	96.00		
			160.000	-	170.000				2	98.00		
			170.000	-	180.000				1	99.00		
			180.000	-	190.000				1	100.00		

Рис. 5.2

З таблиці tab1, зокрема, видно, що середній час перебування покупця біля каси становить 79 секунд, а один з покупців

на перебування біля каси витратив понад три хвилини (останній рядок таблиці `tab1`). ■

TABLE	MEAN	STD.DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY	CUM. %
TAB2	45.796	20.478		0		
			10.000 - 20.000		17	17.00
			20.000 - 30.000		11	28.00
			30.000 - 40.000		12	40.00
			40.000 - 50.000		13	53.00
			50.000 - 60.000		18	71.00
			60.000 - 70.000		14	85.00
			70.000 - 80.000		15	100.00
TAB3	33.422	33.867		0		
			- - 10.000		35	34.65
			10.000 - 20.000		13	47.52
			20.000 - 30.000		10	57.43
			30.000 - 40.000		5	62.38
			40.000 - 50.000		7	69.31
			50.000 - 60.000		9	78.22
			60.000 - 70.000		5	83.17
			70.000 - 80.000		2	85.15
			80.000 - 90.000		5	90.10
			90.000 - 100.000		6	96.04
			100.000 - 110.000		1	97.03
			110.000 - 120.000		2	99.01
			120.000 - 130.000		1	100.00

Рис. 5.3

**Приклад 5.3.** Телефонна система має три паралельні лінії зв'язку. Нові зовнішні виклики утворюють стаціонарний пуассонівський потік з середнім значенням 75 секунд між викликами. Якщо всі лінії зайняті, то абонент набирає номер ще раз через  $5 \pm 1$  хвилин. Тривалість телефонної розмови становить  $3 \pm 1$  хвилини. Потрібно скласти програму на мові GPSS World, яка б дозволила отримати: а) кількість часу, необхідного для здійснення 500 розмов; б) коефіцієнт завантаження телефонної системи; в) табулювання розподілу часу, який потрібен абоненту для встановлення зв'язку і здійснення розмови; г) середню і максимальну кількість абонентів, які чекають звільнення лінії; д) середню і максимальну кількість викликів, потрібні для здійснення абонентом телефонної розмови.

**Розв'язання.** Оскільки в постановці задачі для вимірювання часу використовуються як хвилини, так і секунди, потрібно весь час у хвилинах перевести в секунди або навпаки. Нехай одиницею модельного часу є секунда. У цій задачі зручно імітувати абонентів транзактами. Для формування стаціонарного пуассонівського потоку вхідних викликів використаємо функцію `Exponential` в операнді блока `GENERATE`. Для моделювання роботи телефонної системи з трьома лініями зв'язку використаємо багатоканальний пристрій `tel` з трьома каналами. Оскільки у випадку, коли зайняті всі лінії зв'язку, абонент отримує відмову і змушений чекати  $5 \pm 1$  хвилин для здійснення повторної спроби виклику, то для перевірки зайнятості телефонної системи скористаємось блоком `GATE`, додатковим блоком затримки `ADVANCE` і блоком безумовного переходу `TRANSFER`. Таким чином, для здійснення моделювання 500 розмов і отримання відповіді на пункти а) і б) достатньо скласти таку модель:

```
tel STORAGE 3
GENERATE (Exponential(9,0,75))
again GATE SNF tel,wait
ENTER tel
ADVANCE 180,60
LEAVE tel
TERMINATE 1
wait ADVANCE 300,60
TRANSFER ,again
START 500
```

Для побудови статистики, згаданої у пункті в), створимо таблицю з ім'ям `trans` з допомогою команди опису `TABLE` і блока `TABULATE`. Часові інтервали в таблиці візьмемо рівними 60 секундам. Для відповіді на пункт г) зручно нетрадиційним способом скористатись чергою, для цього блок `ADVANCE` після мітки `wait` оточимо блоками `QUEUE` і `DEPART`.

Нарешті, для визначення середньої і максимальної кількостей спроб, потрібних для отримання зв'язку абонентом, у параметрі `vyk` кожного транзакта будемо накопичувати кількість здійснених абонентом викликів. Для цього після мітки `again` розмістимо блок `ASSIGN`, який працюватиме в режимі збільшення. Середню і максимальну кількості спроб виклику найлегше знайти з таблиці `calls`, побудованої за параметром `vyk`. Для цього скористаємось командою опису `TABLE`, першим операндом якої вкажемо системний числовий атрибут `P$vyk`, і блоком `TABULATE`. З таблиці `calls` насправді можна отримати ще більше статистичної інформації. Нижче наводиться остаточна модель:

```
tel STORAGE 3
trans TABLE M1,60,60,200
calls TABLE P$vyk,1,1,100
GENERATE (Exponential(9,0,75))
again ASSIGN vyk+,1
GATE SNF tel,wait
ENTER tel
ADVANCE 180,60
LEAVE tel
TABULATE trans
TABULATE calls
TERMINATE 1

wait QUEUE chr
ADVANCE 300,60
DEPART chr
TRANSFER ,again
START 500
```

У книзі повністю не наводиться досить об'ємний статистичний звіт (читач може отримати його самостійно), а наводяться лише його окремі частини і даються відповіді на поставлені питання. Таблиця з загальною інформацією у звіті

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	39020.297	13	0	1

дає кількість часу, необхідного для здійснення 500 розмов, — 39020 секунд або понад 10 годин. З таблиці

STORAGE	CAP.	REM.	MIN.	MAX.	ENTRIES	AVL.	AVE.C.	UTIL.	RETRY	DELAY
TEL	3	1	0	3	502	1	2.299	0.766	0	0

видно, що коефіцієнт завантаження телефонної системи приблизно становить 0,8. При зміні генераторів випадкових чисел будуть отримані трохи інші, але подібні результати.

Табулювання розподілу часу, який потрібен абоненту для встановлення зв'язку і здійснення розмови, видно з таблиці TRANS (наведена лише частково):

TABLE	MEAN	STD.DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY	CUM.%
TRANS	617.102	658.100		0		
		120.000	-	180.000	119	23.80
		180.000	-	240.000	115	46.80
		240.000	-	300.000	0	46.80
		300.000	-	360.000	0	46.80
		360.000	-	420.000	17	50.20
		420.000	-	480.000	43	58.80
		480.000	-	540.000	31	65.00
		540.000	-	600.000	14	67.80
		600.000	-	660.000	1	68.00
		660.000	-	720.000	7	69.40
		720.000	-	780.000	22	73.80
		780.000	-	840.000	15	76.80
		840.000	-	900.000	10	78.80
		900.000	-	960.000	1	79.00
		...		...	...	...
		4860.000	-	4920.000	0	99.80
		4920.000	-	4980.000	0	99.80
		4980.000	-	5040.000	1	100.00

Зокрема, виявляється, що 234 абоненти (понад 46 %) витратили на здійснення телефонної розмови до чотирьох хвилин (вони змогли додзвонитись з першої спроби). У п'ятнадцять хвилин змогло вкластись майже 79 % абонентів, проте решті абонентів довелось чекати довше, зокрема, одному абоненту — близько 1 години 24 хвилин. Середній час становить близько 10 хвилин.

Максимальну і середню кількості абонентів, які чекають звільнення лінії, знайдемо з таблиці для черги CHR:

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY
CHR	18	9	754	0	5.748	297.466	297.466	0

Максимальна кількість абонентів — 18, середня кількість абонентів — 5,7. Середній час очікування абонентів з цієї таблиці визначити неможливо. З таблиці

TABLE	MEAN	STD.DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY	CUM.%
CALLS	2.460	2.186		0		
			- -	1.000	234	46.80
			1.000 -	2.000	105	67.80
			2.000 -	3.000	55	78.80
			3.000 -	4.000	40	86.80
			4.000 -	5.000	24	91.60
			5.000 -	6.000	14	94.40
			6.000 -	7.000	7	95.80
			7.000 -	8.000	8	97.40
			8.000 -	9.000	5	98.40
			9.000 -	10.000	1	98.60
			10.000 -	11.000	2	99.00
			11.000 -	12.000	2	99.40
			12.000 -	13.000	2	99.80
			13.000 -	14.000	0	99.80
			14.000 -	15.000	0	99.80
			15.000 -	16.000	0	99.80
			16.000 -	17.000	1	100.00

робимо висновок про те, що для одного абонента середня кількість викликів становить приблизно 2,5, а максимальна — дорівнює 17. Крім того, з останньої таблиці можна побачити, наприклад, що 105 абонентів зробили по два виклики, а понад три чверті абонентів здійснили не більше трьох викликів. ■

**Приклад 5.4.** З допомогою GPSS World здійснити моделювання роботи телефонної системи з попереднього прикладу (с. 75), якщо для абонента максимальна кількість невдалих викликів становить від трьох до шести. Визначити ймовірність того, що абонент не зможе додзвонитись.

**Розв'язання.** Будемо вважати, що максимальна кількість викликів має рівномірний розподіл серед цілих чисел на проміжку [3, 6]. Збережемо її у параметрі транзакта з ім'ям

maxv. Для цього використаємо додатковий блок ASSIGN з викликом функції DUniform після блока GENERATE у моделі зі с. 77. Після мітки wait додамо перевірку виконання умови  $P\$vyk < P\$maxv$  (блок TEST). Для визначення кількості абонентів, які не змогли додзвонитись, використаємо блок SAVEVALUE в режимі збільшення. Для вилучення цих транзактів з моделі використаємо додатковий блок TERMINATE з нульовим операндом. Отримаємо програму:

```
tel STORAGE 3
trans TABLE M1,60,60,200
calls TABLE P$vyk,1,1,100
GENERATE (Exponential(9,0,75))
ASSIGN maxv,(DUniform(8,3,6))
again ASSIGN vyk+,1
GATE SNF tel,wait
ENTER tel
ADVANCE 180,60
LEAVE tel
TABULATE trans
TABULATE calls
TERMINATE 1

wait TEST 1 P$vyk,P$maxv,vidm
QUEUE chr
ADVANCE 300,60
DEPART chr
TRANSFER ,again

vidm SAVEVALUE vidmov+,1
TERMINATE 0
START 500
```

Після моделювання в комірці пам'яті vidmov міститься кількість абонентів, які не змогли додзвонитись. Імовірність того, що абонент не зможе додзвонитись, знаходимо за фор-



мулою

$$P_{\text{відм}} = \frac{\text{vidmov}}{500 + \text{vidmov}} = \frac{38}{538} = \frac{19}{269} \approx 0,07.$$

Насправді можна було б не додавати в модель блок **SAVEVALUE**, а кількість відмов знайти з таблиці блоків по кількості входів транзактів в останній блок **TERMINATE**. Обчислення ймовірності відмови можна було включити в модель з допомогою додаткового блока **SAVEVALUE** (зробіть самостійно!). Зі статистичного звіту можна отримати всі ті самі характеристики, що й у прикладі 5.3 зі с. 75 (зробіть це самостійно і порівняйте їх з аналогічними характеристиками з прикладу 5.3). ■

**Приклад 5.5.** Основна виробнича функція рекламного агентства повного циклу послуг «Фіалка» — виробництво реклами трьох видів — телереклама, друкована реклама і радіореклама. Виробничий процес в агентстві «Фіалка» організований наступним чином. Реклама трьох видів, що надходить від замовників з інтервалом, рівномірно розподіленим на проміжку  $[1, 100]$  хвилин, обробляється групою менеджерів по рекламі на протязі 2–5 хвилин. Останні передають фінансові документи про оплату замовником прийнятої реклами в бухгалтерію, а самі рекламні замовлення — у виробничий відділ. На це теж потрібно 2–5 хвилин. Виробничий відділ на протязі 1–3 хвилин скеровує замовлення залежно від їхнього типу в телестудію, видавництво або радіостудію рекламного агентства і здійснює контроль за їхнім виконанням. Імовірності того, що реклама виявиться телерекламою, друкованою рекламою та радіорекламою дорівнюють відповідно 0,25, 0,35 і 0,4. Тривалості виконання замовлень телестудією, видавництвом та радіостудією становлять відповідно 50–100, 30–90 та 15–30 хвилин, причому студії і видавництво не можуть виконувати більше одного замовлення одночасно. Готова реклама надходить від студій і видавництва у виробничий відділ і спрямовується ним у засоби масової інформації на протязі 5–10 хвилин.

З допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World здійснити моделювання роботи рекламного агентства на протязі восьмигодинного робочого дня. Проаналізувати кількість виконаних замовлень з різних видів реклами і порівняти її з заданими ймовірностями, визначити витрачений час на виконання замовлень, кількість часу, потрібного на виконання одного замовлення в середньому, відмінності між тривалостями часу виконання замовлень, наявність черг, їхні довжини, середній час перебування в чергах, кількість замовлень, виконаних без черги.

**Розв'язання.** Одиницею модельного часу є хвилина. Замовлення зручно імітувати транзактами. Телестудію, радіостудію і видавництво моделюємо з допомогою одноканальних пристроїв. Для визначення черг перед цими пристроями використовуємо блоки QUEUE і DEPART. Вважаємо, що група менеджерів по рекламі і виробничий відділ можуть виконувати кілька замовлень одночасно (про інше не сказано), тому їхню роботу можна моделювати лише з допомогою блоків ADVANCE. Вибір типу реклами зручно здійснювати з допомогою двох блоків TRANSFER, які працюють у режимі статистичної передачі. Для аналізу часу перебування замовлень у моделі використовується таблиця, описана командою TABLE, інформацію в таблицю збирає блок TABULATE. Для моделювання роботи рекламного агентства протягом восьми годин створюємо таймер із блоків GENERATE і TERMINATE, інші блоки TERMINATE використовуємо з нульовим операндом, а команду START — з одиничним операндом. Отримуємо таку програму:

```
tab TABLE M1,10,10,100
GENERATE 480
TERMINATE 1
GENERATE 50.5,49.5
ADVANCE 3.5,1.5
ADVANCE 3.5,1.5
ADVANCE 2,1
```

```
TRANSFER 0.4,,radio
TRANSFER 0.5833,tv,druk
radio QUEUE ch_radio
SEIZE pryl_radio
DEPART ch_radio
ADVANCE 22.5,7.5
RELEASE pryl_radio
TRANSFER,zmi
tv QUEUE ch_tv
SEIZE pryl_tv
DEPART ch_tv
ADVANCE 75,25
RELEASE pryl_tv
TRANSFER,zmi
druk QUEUE ch_druk
SEIZE pryl_druk
DEPART ch_druk
ADVANCE 60,30
RELEASE pryl_druk
TRANSFER,zmi
zmi ADVANCE 7.5,2.5
TABULATE tab
TERMINATE 0
START 1
```

Читачам пропонується самостійно виконати моделювання і проаналізувати звіт. ■

**Приклад 5.6.** Час появи замовлень у двоканальній системі масового обслуговування визначається функцією з випадковим аргументом, графік якої зображено на рис. 5.4. Час обслуговування задається функцією з випадковим аргументом, графік якої наведено на рис. 5.5. Виконати моделювання обслуговування 300 замовлень у такій системі масового обслуговування.

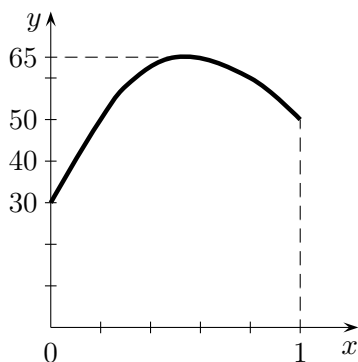


Рис. 5.4.

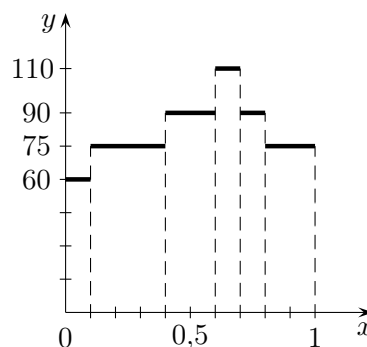


Рис. 5.5.

**Розв'язання.** Неперервну функцію, графік якої подано на рис. 5.4, назвемо `gen` і закодуємо шістьма точками. Дискретну функцію з рис. 5.5 назвемо `adv` і також закодуємо шістьма точками. Для моделювання системи масового обслуговування використаємо двоканальний пристрій `smo`. Для визначення характеристик черги і тривалості перебування замовлень в моделі застосуємо відповідні блоки і команду для опису таблиці. Наведемо текст моделі:

```
smo STORAGE 2
tab TABLE M1,10,10,100
gen FUNCTION RN10,C6
0,30/0.2,50/0.3,58/0.5,65/0.8,60/1,50
adv FUNCTION RN11,D6
0.1,60/0.4,75/0.6,90/0.7,110/0.8,90/1,75
GENERATE FN$gen
QUEUE cher
ENTER smo
DEPART cher
ADVANCE FN$adv
LEAVE smo
TABULATE tab
TERMINATE 1
```

## START 300

На рис. 5.6 наведено частину звіту. З неї, зокрема, видно, що більшу частину часу черги не було, лише окремі замовлення перебували в черзі довжиною одне замовлення, коефіцієнт завантаження системи масового обслуговування наближено дорівнює 0,73, середній час перебування замовлення в моделі становить 83 одиниці модельного часу. Інші висновки зі звіту читачам пропонується зробити самостійно. ■

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY
CHER	1	0	301	271	0.018	1.031	10.347	0

STORAGE	CAP.	REM.	MIN.	MAX.	ENTRIES	AVL.	AVE.C.	UTIL.	RETRY	DELAY
SMO	2	1	0	2	301	1	1.455	0.727	0	0

TABLE	MEAN	STD.DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY	CUM.%
TAB	83.335	13.921		0		
			50.000 -	60.000	23	7.67
			60.000 -	70.000	2	8.33
			70.000 -	80.000	142	55.67
			80.000 -	90.000	83	83.33
			90.000 -	100.000	5	85.00
			100.000 -	110.000	42	99.00
			110.000 -	120.000	3	100.00

Рис. 5.6

**Приклад 5.7.** Виробництво деталей певного типу складається з тривалого процесу складання, що завершується коротким періодом випалу в печі. Оскільки утримання печі обходиться досить дорого, кілька складальників використовують ту саму піч. У печі одночасно можна випалювати лише одну деталь. Якщо піч зайнята, складальник разом зі своєю заготовкою деталі чекає в черзі звільнення печі. Складальник не може розпочати процес складання нової деталі, доки не витягне готову деталь із печі. Після отримання з печі готової деталі складальник починає складати наступну деталь. Час складання деталі є рівномірно розподіленою випадковою величиною на проміжку  $[40, 50]$  хвилин. Час випалу деталі є

рівномірно розподіленою випадковою величиною на проміжку [5, 10] хвилин. Зарплата складальника становить 50 грн за годину, вартість печі — 3000 грн за добу незалежно від міри використання, вартість матеріалу — 40 грн за деталь, вартість готового виробу — 120 грн за деталь. Процес складання і випалу здійснюється цілодобово (у три зміни) без вихідних.

Скласти модель на мові GPSS World, здійснити моделювання протягом місяця з різними кількостями складальників і визначити оптимальну кількість складальників, що максимізує прибуток. Визначити також середню і максимальну довжини черги, середню і максимальну тривалості перебування в черзі та середню і максимальну тривалості обробки деталей. **Розв'язання.** За одиницю модельного часу беремо хвилину. На роль транзактів у цій задачі найкраще підходять складальники. Однак після завершення виготовлення деталі складальники не припиняють роботу. Оскільки після завершення зміни їхнє місце роботи займають інші складальники, для спрощення моделі можна вважати, що складальники працюють вічно і їх достатньо створити лише на початку процесу моделювання. Отже, блок GENERATE для створення складальників слід записувати особливим чином (див. нижче текст моделі).

Для моделювання процесу випалу деталей у печі використовуємо одноканальний пристрій, а для визначення основних характеристик черги — пару блоків QUEUE і DEPART. Проте цього недостатньо для визначення максимального часу перебування заготовки деталі в черзі до печі. Знайти його можна з детальної статистики черги (команда QTABLE). Після завершення виготовлення деталі потрібно виконати безумовну передачу транзакта на блок початку виготовлення наступної деталі (блок TRANSFER). Для визначення часу обробки деталей зручно використовувати таблицю, для збору інформації в яку потрібні блоки MARK і TABULATE. Для моделювання процесу виробництва протягом тридцяти діб створюємо таймер з блоків GENERATE і TERMINATE, а команду START використовуємо з оди-

ничним операндом.

Оптимальну кількість складальників доводиться шукати перебором, причому надто мала або велика кількість складальників призводить до збитків. Кількість виготовлених деталей можна визначити з таблиці блоків у звіті, а потім за елементарною формулою знайти прибуток за місяць. Однак, оскільки такі розрахунки потрібно здійснювати для різної кількості складальників, легше зробити так, щоб прибуток виводився безпосередньо у статистичному звіті. Для цього достатньо двох блоків **SAVEVALUE**, в одному з них треба накопичувати кількість виготовлених деталей, а другий потрібен для обчислення прибутку і його достатньо виконати один раз перед завершенням моделювання. Крім того, щоб не змінювати кількість складальників у двох місцях моделі, достатньо занести цю кількість один раз перед початком моделювання в комірку пам'яті, а потім використовувати її як константу у блоках **GENERATE** і **SAVEVALUE**. Наведемо текст моделі для роботи 10 складальників:

```
tabd TABLE MP1,1,1,100
tabq QTABLE qkiln,1,1,100
INITIAL X$fit,10
GENERATE ,,X$fit
assem MARK 1
ADVANCE 45,5
QUEUE qkiln
SEIZE kiln
DEPART qkiln
ADVANCE 7.5,2.5
RELEASE kiln
TABULATE tabd
SAVEVALUE det+,1
TRANSFER ,assem
GENERATE (60#24#30)
SAVEVALUE prof,(X$det#80-3000#30-50#X$fit#24#30)
```

TERMINATE 1

START 1

Після завершення моделювання комірка пам'яті `prof` міститиме прибуток для заданої у третьому рядку програми кількості складальників. Пропонуємо читачам самостійно переконатись у тому, що найбільший прибуток забезпечує сім складальників, а також знайти для цього випадку всі потрібні характеристики. ■

### *Вправи*

**1.** Читальний зал на факультеті обслуговує читачів лише під час перерв між парами і після пар. У читальному залі працює один бібліотекар. Час між появами читачів — рівномірно розподілена випадкова величина на проміжку  $[0, 30]$  секунд. Читачі бувають двох типів, причому їхня кількість однакова. Читачі першого типу хочуть здати книжку і цей процес займає 10–20 секунд. Читачі другого типу хочуть взяти книжку. Цей процес вимагає від 20 до 120 секунд. Бібліотекар не може обслуговувати кілька читачів одночасно. Складіть модель на мові GPSS World, яка б дозволила змоделювати роботу читального залу протягом 30 хвилин перерви, визначте довжину черги і статистику розподілу часу, потрібного для обслуговування читача.

**2.** Змініть модель з вправи 1 так, щоб час між появами читачів був рівномірно розподіленою випадковою величиною на проміжку  $[0, 30 + h/60]$  секунд, де  $h$  — кількість секунд, які минули від відкриття читального залу (тобто на початку перерви приходить найбільше читачів).

**3.** У магазині є два продавці. Якщо обидва продавці зайняті обслуговуванням покупців, то до них формується спільна черга. Вхідний потік покупців не залежить від передісторії і є стаціонарним пуассонівським (найчастіше саме так і є). Тому час появи покупців є експоненціально розподіленою випадковою величиною з інтенсивністю 0,9 за хвилину. Час обслуго-



вування покупця продавцем теж є експоненціально розподіленою випадковою величиною з середнім значенням 2 хвилини. Складіть модель на мові GPSS, яка б дозволила змоделювати роботу магазину протягом 12 годин, отримати статистику розподілу часу, потрібного для обслуговування покупця, і довжину черги.

4. У перукарні є  $n$  перукарів. Вхідний потік клієнтів має експоненціальний розподіл з інтенсивністю 0,21 за хвилину. Якщо один з перукарів є вільним, то він обслуговуватиме чергового клієнта. Якщо всі перукарі зайняті, то клієнти стають у спільну чергу. Якщо довжина черги досягає значення 10, то наступні клієнти не займають чергу, а йдуть шукати іншу перукарню. Час обслуговування клієнта будь-яким перукарем має експоненціальний розподіл з середнім значенням 15 хвилин. Складіть модель роботи системи на мові GPSS, шляхом моделювання визначте мінімальну кількість перукарів, необхідну для того щоб середня довжина черги була меншою від 5. Визначте ймовірність того, що клієнту доведеться шукати іншу перукарню, максимальну довжину черги, коефіцієнт завантаження перукарні та статистику розподілу часу, необхідного для обслуговування клієнтів.

5. Тривалість перебування відвідувача в картинній галереї є рівномірно розподіленою випадковою величиною на проміжку  $[0,5; 2,5]$  години. Відвідувачі приходять у картинну галерею з інтервалом, який є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 4 хвилини. Кількість відвідувачів, які одночасно перебувають у картинній галереї, не обмежується. Складіть модель на мові GPSS, яка б дозволила здійснити моделювання перебування відвідувачів у картинній галереї протягом десяти годин її роботи і встановити те, яка найбільша кількість відвідувачів знаходилась у картинній галереї одночасно.

6. У відділенні зв'язку є два віконечка, в яких приймають рекомендовані листи і продають марки. Час обслуговування

одного клієнта є випадковою величиною, рівномірно розподіленою на проміжку  $[1, 6]$  хвилин. Якщо обидва віконечка зайняті, то клієнти займають спільну чергу, з якої переходять до будь-якого вільного віконечка. Час появи клієнтів утворює стаціонарний пуассонівський потік з середнім значенням 1,5 хвилини. Складіть модель на мові GPSS, яка б дозволила змоделювати процес обслуговування 100 клієнтів і допомогла зробити директору відділення зв'язку висновок про необхідність взяття на роботу ще одного працівника на основі аналізу довжини черг і часу, потрібного на перебування в черзі.

**7.** На автозаправній станції є місця для одночасної заправки трьох автомобілів і достатня кількість працівників. Тривалість заправки кожного автомобіля становить 7–15 хвилин. Автомобілі, яким бракує пального, прибувають через кожні 4–10 хвилин. Якщо на автозаправній станції всі місця зайняті, то автомобілі їдуть на іншу автозаправку. Складіть модель на мові GPSS, яка б дозволила здійснити моделювання роботи автозаправної станції протягом обслуговування 200 автомобілів (крім тих, які у зв'язку із зайнятістю всіх місць для заправки поїхали шукати іншу автозаправну станцію). Визначте кількість і відсоток автомобілів, водії яких не захотіли стояти в черзі.

**8.** Час появи замовлень у одноканальній системі масового обслуговування визначається функцією з випадковим аргументом, графік якої зображено на рис. 5.7. Час обслуговування задається функцією з випадковим аргументом, графік якої наведено на рис. 5.8. Виконайте моделювання обслуговування 200 замовлень у такій системі масового обслуговування, визначте основні характеристики черги і час перебування замовлень у моделі. Функцію з рис. 5.7 закодуйте не менше, ніж п'ятьма точками.

**9.** Час появи замовлень у системі масового обслуговування визначається функцією з випадковим аргументом, графік якої зображено на рис. 5.9. Час обслуговування задається

функцією з випадковим аргументом, графік якої наведено на рис. 5.10. Одночасно обслуговуватись може довільна кількість замовлень. Виконайте моделювання обслуговування 200 замовлень у такій системі масового обслуговування, визначте час перебування замовлень у моделі. Функцію з рис. 5.10 закодуйте не менше, ніж п'ятьма точками.

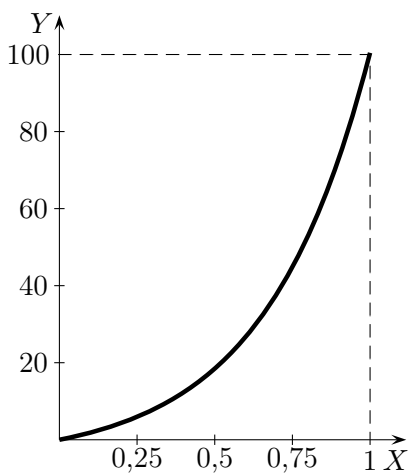


Рис. 5.7.

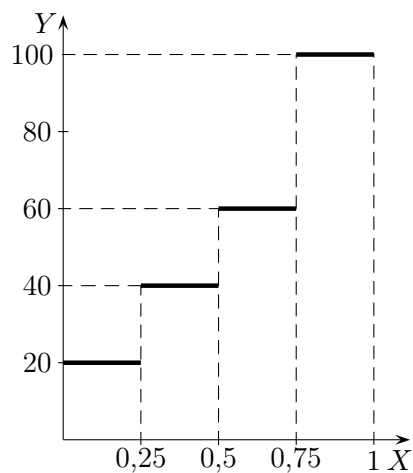


Рис. 5.8.

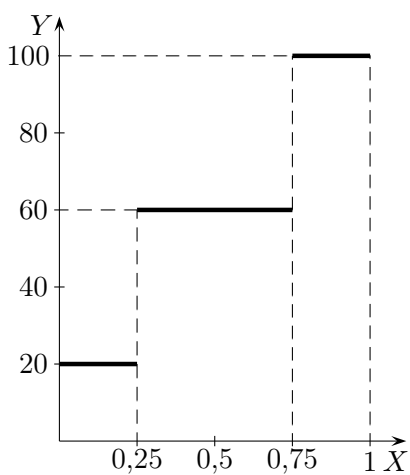


Рис. 5.9.

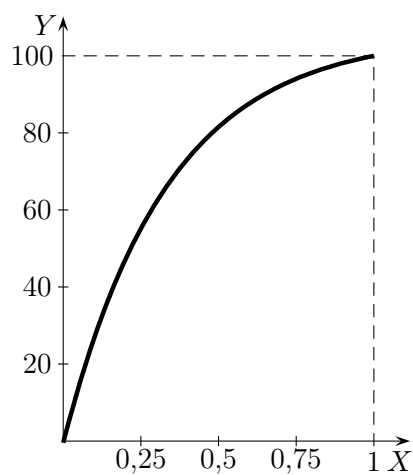


Рис. 5.10.

**10.** На обробку до інформаційної системи приймаються три класи задач  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Не більше двох задач класів  $A$  і  $B$  можуть розв'язуватись інформаційною системою одночасно, а задачі класу  $C$  вимагають, щоб система була вільною від інших задач. Задачі класу  $A$  надходять через  $20 \pm 5$  хвилин, класу  $B$  — через  $20 \pm 10$  хвилин і класу  $C$  — через  $30 \pm 10$  хвилин. Задачі потребують для виконання: клас  $A$  —  $20 \pm 5$  хвилин, клас  $B$  —  $21 \pm 3$  хвилин і клас  $C$  —  $28 \pm 5$  хвилин. Одна задача класу  $A$  або  $B$  може дозавантажуватись до задачі класу  $A$  або  $B$ , що вже розв'язується. Побудуйте модель на мові GPSS для моделювання роботи інформаційної системи протягом року, вважаючи, що вона працює цілодобово. Визначте характеристики черги, завантаження інформаційної системи і статистику розподілу часу, необхідного для розв'язування задачі.

**11.** На виробничу дільницю надходять деталі. Час їхнього надходження розподілений рівномірно на проміжку  $[5, 15]$  хвилин. Спочатку вони проходять зовнішній прийом у контролера відділу технічного контролю за 2–4 хвилини. 5 % з них скеровуються на доопрацювання, яке займає 3–5 хвилин, після чого вони знову надходять на перевірку до контролера на час 1–3 хвилини. Деталі, які вже побували на доопрацюванні і знову не проходять контроль якості, визнаються бракованими (в середньому їх буває 10 % від кількості тих, що були на доопрацюванні). Після прийому деталі надходять на складання протягом 2–7 хвилин, а потім на термозагартування на час 8–12 хвилин. Деталі, що гартувалися менше 10 хвилин або були на доопрацюванні, одержують маркування другого сорту, а якщо ці деталі були на доопрацюванні і гартування тривало менше 10 хвилин — третього. На складанні не може перебувати більше однієї деталі одночасно.

Склавши модель на мові GPSS, змоделюйте роботу дільниці протягом 22 робочих днів тривалістю вісім годин кожен. Визначте кількість бракованих деталей і кількість деталей ко-

жного сорту. Визначте як зміняться ці дані при зменшенні браку до 2 %.

**12.** Станція технічного обслуговування автомобілів ремонтує машини трьох типів:  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Автомобілі всіх типів надходять під час робочого дня через проміжки часу, які мають експоненціальний закон розподілу, причому для машин типу  $A$  інтенсивність становить 0,015 за хвилину, типу  $B$  — 0,02 за хвилину, типу  $C$  — 0,011 за хвилину. На станції технічного обслуговування працюють чотири бригади слюсарів. Ремонт машини типу  $A$  є випадковою величиною, рівномірно розподіленою на проміжку [36, 110] хвилин, типу  $B$  — [30, 125] хвилин, типу  $C$  — [30, 150] хвилин. Стоянка перед станцією технічного обслуговування має 15 місць, а кожна бригада має свій бокс на одну машину. Машини, для яких не знайшлося місця в боксі чи на стоянці, ремонтуються в іншому місці. Станція технічного обслуговування працює в середньому 22 дні на місяць по вісім годин на день.

Завдання:

а) складіть модель на мові GPSS і змоделюйте роботу станції технічного обслуговування протягом місяця та року;

б) знайдіть розподіл часу обслуговування автомашин кожного типу, ймовірність відмови в обслуговуванні, коефіцієнт завантаження слюсарів роботою, коефіцієнт заповнення стоянки, середню кількість боксів, що працюють, та середню кількість зайнятих місць на стоянці;

в) визначте необхідну кількість місць на стоянці для виключення випадків відмови в обслуговуванні та всі величини пункту б) у цьому випадку;

г) знайдіть необхідну місткість боксів для виключення випадків відмови в обслуговуванні та всі величини пункту б) у цьому випадку.

**13.** Вулиці, що виходять на чотиристороннє перехрестя, мають позначення за напрямом руху годинникової стрілки:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . З боку вулиці  $A$  автомобілі під'їжджають до пе-

перехрестя кожні  $4 \pm 2$  секунди, причому 30 % з них повертають праворуч у напрямі  $A-D$ , а 25 % — ліворуч у напрямі  $A-B$ . Поворот наліво можливий, якщо немає руху в напрямі  $C-A$ . З боку вулиці  $C$  автомашини під'їжджають до перехрестя кожні  $7 \pm 3$  секунд, причому 60 % із них проїжджають прямо у напрямі  $C-A$ , а 40 % — направо у напрямі  $C-B$ . Поворот ліворуч у напрямі  $C-D$  заборонений. Світлофор на перехресті перемикається кожні 30 секунд (жовтий сигнал світлофора можна не враховувати, бо він є лише попередженням про зміну руху). Ширина всіх вулиць допускає рух у три ряди в кожному напрямі. Машини долають перехрестя в будь-якому напрямі за 2 секунди. Автомобіль, що виїхав на перехрестя до моменту перемикавання світлофора, обов'язково продовжує рух. На перехресті може знаходитись не більше однієї машини для кожного напрямку руху.

Змоделюйте рух автомобілів через перехрестя з боку вулиць  $A$  і  $C$  протягом години. Підрахуйте кількість автомашин, що пройшли в кожному напрямі. Визначте середню і максимальну довжини черги автомобілів, середній час перебування автомобілів у черзі для кожного напрямку руху.

**14.** Система складається з одного бульдозера, двох самоскидів і одного механізованого навантажувача. Бульдозер згрібає землю до навантажувача. Для початку навантаження перед навантажувачем повинна лежати хоча б одна купа землі. Час, що витрачається бульдозером на підготовку купи землі, має експоненціальний розподіл з середнім значенням 10 хвилин. Крім наявності куп землі, для роботи навантажувача потрібен порожній самоскид. Про час навантаження відомо лише те, що він розподілений на відріжку  $[10, 18]$  хвилин. Після того, як самоскид завантажений, він їде до місця розвантаження, розвантажується і знову повертається для завантаження. Час перебування самоскида в дорозі розподілено логнормально, причому у завантаженому стані середнє значення відповідного нормального закону розподілу становить 2, а в поро-

жньому — 1,7. Середньоквадратичне відхилення відповідного нормального закону розподілу в обох випадках дорівнює 1,5. Час розвантаження розподілено рівномірно на інтервалі від 2 до 8 хвилин. Після завантаження кожного самоскида навантажувач повинен «відпочивати» протягом 5 хвилин, а потім він знову може розпочинати роботу.

Складіть модель на мові GPSS World для моделювання роботи бульдозера, навантажувача і самоскидів протягом року. Бульдозер працює з 9 до 17 години п'ять днів на тиждень, навантажувач — з 9 до 16 години. Самоскиди в кінці робочого дня мусять завершити рейс і повернутись до навантажувача. Визначте характеристики черг партій вантажу, самоскидів і навантажувача. Дослідіть можливість зменшення черг.

**15.** Конвеєрна система складається з п'яти обслуговуючих пристроїв, розташованих уздовж стрічки конвеєра. Деталі надходять на обробку на першій пристрій. Інтервали між надходженням деталей є випадковою величиною з логнормальним законом розподілу з середнім значенням 0,1 і середньоквадратичним відхиленням 0,2 відповідного нормального закону розподілу. Вільного місця перед кожним пристроєм немає, тому пристрій може зняти деталь із конвеєра, тільки якщо він вільний. Тривалість обслуговування на кожному пристрої лежить у межах від 3 до 8 хвилин. По закінченні обробки деталь залишає систему. Якщо перший пристрій зайнятий у момент надходження деталі, то деталь по конвеєру надходить до другого пристрою. Інтервал проходження деталі між пристроями — 1 хвилина. Якщо при прямуванні деталі по конвеєру всі пристрої були зайняті, то вона повертається до першого пристрою з затримкою 5 хвилин.

Побудуйте модель на мові GPSS для моделювання роботи конвеєрної системи протягом року, вважаючи, що вона працює з однаковою інтенсивністю цілодобово. Визначте статистичні характеристики часу перебування деталей у системі і завантаження обслуговуючих пристроїв.

## Тема 6. Додаткові можливості мови і середовища GPSS World

### *Короткі теоретичні відомості*

Для імітації виходу з ладу одноканального пристрою можна використовувати блок **PREEMPT** з пріоритетами, а імітувати несправність і її усунення (ремонт) з допомогою спеціального транзакта з високим пріоритетом.

Для імітації виходу з ладу одного чи кількох каналів багатоканального пристрою можна замість багатоканального пристрою використовувати кілька одноканальних пристроїв, входи в які треба моделювати блоками **PREEMPT** з пріоритетами, а імітувати несправність і її усунення спеціальним транзактом (транзактами) з високим пріоритетом.

Блок **DISPLACE**  $A, B, C, D$  призначений для відшукування в моделі потрібного транзакта і переміщення його до вказаного блока. Операнд  $A$  — номер транзакта, який потрібно перемістити. Операнд  $B$  — мітка блока, до якого переміщується транзакт, вказаний операндом  $A$ . Операнд  $C$  — номер чи ім'я параметра цього транзакта, до якого записується час, що залишився до завершення його обслуговування у блоці **ADVANCE**, якщо транзакт перебував у ньому. Блок **DISPLACE** спрацьовує при потраплянні до нього активного транзакта. Операнд  $D$  — мітка альтернативного блока для активного транзакта, якщо шуканий транзакт відсутній у моделі.

Недоступність багатоканального пристрою моделює блок **SUNAVAIL**  $A$ , де  $A$  — ім'я багатоканального пристрою. Зняття недоступності цього пристрою моделюється блоком **SAVAIL**  $A$ . Якщо у пристрої обслуговувались транзакти, то вони продовжуватимуть обслуговуватись, поки не вийде час. Інші транзакти зайти в недоступний пристрій не можуть. Блоки **FUNAVAIL**  $A$  і **FAVAIL**  $A$  призначені відповідно для моделювання недоступності і доступності одноканального пристрою.

Імітацію виходу з ладу всього багатоканального пристрою



здійснюють у ручному режимі за допомогою блоків **SUNAVAIL**, **SAVAAIL**, **DISPLACE**.

При використанні одноканальних і багатоканальних пристроїв у моделі автоматично можуть виникати черги, які функціонують за принципом FIFO («першим прийшов — першим обслуговують») з врахуванням пріоритетів. Для створення черг з іншою дисципліною обслуговування потрібно використувати списки користувача.

Для введення транзактів до списку користувача слугує блок **LINK A,B**. Операнд *A* задає ім'я або номер списку користувача, до якого заноситься транзакт після входу в блок **LINK**. Операнд *B* визначає порядок перебування транзактів у списку користувача, наприклад **LIFO** — транзакт передається на початок списку користувача.

Для виведення одного чи кількох транзактів зі списку користувача використовується блок **UNLINK X A,B,C,D,E,F**. Зі списку користувача *A* в блок, визначений міткою *B*, виводиться *C* транзактів. Необов'язкові операнди *X*, *D* і *E* визначають додаткові умови виведення транзактів. Операндом *F* може вказуватись мітка блока, куди переходить транзакт, який ініціює виведення, якщо зі списку користувача не було виведено жодного транзакта.

Змінні користувача створюють командою опису **N EQU A**, де *N* — ім'я змінної, а операнд *A* — її значення.

У GPSS World передбачена можливість чисельно знаходити розв'язки початкових задач для звичайних автономних диференціальних рівнянь першого порядку та їхніх систем. Незалежна змінна у цих рівняннях має бути часом. Для інтегрування таких рівнянь використовуються команди **INTEGRATE** і **EQU**. Початкова умова в точці 0 задається оголошенням початкового значення шуканої функції командою **EQU**.

Команда **INTEGRATE** має формат: **N INTEGRATE A,B,C,D,E**. Тут *N* — шукана функція  $y(x)$  у рівнянні  $y' = f(y)$ , за її ім'я беруть змінну користувача; операнд *A* — права частина ди-

ференціального рівняння, тобто значення похідної змінної користувача за часом;  $B$  — перше порогове значення шуканої функції;  $C$  — мітка блока, в який переходить згенерований транзакт у момент, коли шукана функція проходить через своє перше порогове значення у будь-якому напрямку;  $D$  — друге порогове значення шуканої функції;  $E$  — мітка блока, в який переходить згенерований транзакт у момент, коли шукана функція проходить через своє друге порогове значення у будь-якому напрямку.

Для створення двовимірної матриці з ім'ям  $N$  використовується команда опису  $N$  MATRIX  $A,B,C$ . Операнд  $A$  не використовується, операнд  $B$  визначає кількість рядків матриці, а операнд  $C$  — кількість стовпців матриці.

Після створення матриці командою MATRIX всі її елементи містять нульове значення. Інші початкові значення елементам матриці можуть бути присвоєні командою INITIAL  $A,B$ , де  $A$  — системний числовий атрибут елемента матриці або ім'я матриці, а  $B$  — початкове значення.

Блок MSAVEVALUE  $A,B,C,D$  в процесі моделювання присвоює елементу матриці  $A$  з рядка  $B$  і стовця  $C$  значення  $D$ .

Можливості імітаційного моделювання розширюються з використанням PLUS-процедур, ознайомитись з якими можна, наприклад, в [9, с. 238–245].

Для спостереження за процесом моделювання на етапі тестування і верифікації, а також для отримання додаткової інформації, відсутньої у статистичному звіті, використовують десять динамічних інформаційних вікон середовища GPSS World: Blocks (блоки), Expressions (вирази), Facilities (одноканальні пристрої), Logicswitches (логічні перемикачі), Matrix (матриця), Plots (графіки), Queues (черги), Savevalues (комірки пам'яті), Storages (багатоканальні пристрої), Table (таблиця).

*Рекомендована література:* [3, с. 94–106, 115–134], [7, с. 11–31], [9, с. 209–246], [12, с. 17–377], [15, с. 7–62], [17,

с. 4–214].

### *Розв’язування типових вправ і задач*

**Приклад 6.1.** На виробничій дільниці є два верстати. Якщо один з них виходить з ладу, то деталь буде чекати завершення ремонту або звільнення другого верстату. Потік надходження деталей є стаціонарним пуассонівським з середнім значенням 2,5. Час обслуговування — випадкова величина з логнормальним законом розподілу з середнім значенням 1 і середньоквадратичним відхиленням 1 відповідного нормального розподілу. Вихід з ладу верстату моделюється логнормальним законом розподілу з середнім значенням 6 і середньоквадратичним відхиленням 2 відповідного нормального розподілу. Час ремонту — випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку [1, 3]. Скласти модель роботи виробничої дільниці.

**Розв’язання.** Два верстати будемо моделювати двома блоками PREEMPT з пріоритетами. Будемо вважати, що транзакт, обслуговування якого було перерване, стає в кінець черги. Нижче наводиться можливий лістинг моделі.

```

tab TABLE M1,1,1,100
GENERATE (Exponential(10,0,2.5))
ASSIGN 1,(Lognormal(11,0,1,1))
mit1 QUEUE cherga
TEST NE (F$prod1+F$prod2),2; чекати,
; доки не звільниться хоч один пристрій
DEPART cherga
GATE NU prod1,mit3; якщо зайнятий пристрій 1, то
; перейти до пристрою 2
mit2 PREEMPT prod1,PR,mit1,1,RE
ADVANCE P1
RETURN prod1
TRANSFER ,mit4
mit3 PREEMPT prod2,PR,mit1,1,RE

```

```
ADVANCE P1
RETURN prod2
mit4 TEST E PR,0,mit5
TABULATE tab
mit5 TERMINATE 1

GENERATE (Lognormal(12,0,6,2)); генерування виходу
; з ладу пристрою
PRIORITY 1
ASSIGN 1,(Uniform(13,1,3))
TRANSFER 0.5,mit2,mit3

START 1000 ■
```

**Приклад 6.2.** Вхідний потік вимог обслуговується у багатоканальному пристрої. Пристрій може вийти з ладу повністю. У випадку виходу з ладу багатоканального пристрою всі недообслужені вимоги ставляться у чергу для подальшого обслуговування у багатоканальному пристрої після його ремонту. Ємність пристрою — 10 каналів. Вхідний потік вимог є стаціонарним пуассонівським з середнім значенням 3. Час обслуговування — випадкова величина з логнормальним законом розподілу з середнім значенням 1,1 і середньоквадратичним відхиленням 1 відповідного нормального закону розподілу. Вихід з ладу багатоканального пристрою відбувається за логнормальним законом розподілу з середнім значенням 6 і середньоквадратичним відхиленням 2,5 відповідного нормального закону розподілу. Час ремонту багатоканального пристрою — випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку [100, 200]. Виконати моделювання роботи пристрою.

**Розв’язання.** Номери транзактів, які знаходяться в багатоканальному пристрої, будемо зберігати в комітках пам’яті з номерами від 1 до 10. Для доступу до них використаємо непряму адресацію в циклі. Нижче наводиться можливий лістинг програми.

```
bkp STORAGE 10
tab TABLE M1,10,10,100
GENERATE (Exponential(10,0,3))
ASSIGN 1,(Lognormal(11,0,1.1,1))
mit1 QUEUE cherga
ENTER bkp,1
DEPART cherga
ASSIGN zmc,10
mitc1 TEST E X*zmc,0,mitac1
SAVEVALUE P$zmc,XN1
TRANSFER ,mitvc1
mitac1 LOOP zmc,mitc1
mitvc1 ADVANCE P1
ASSIGN zmc,10
mitc2 TEST E X*zmc,XN1,mitac2
SAVEVALUE P$zmc,0
TRANSFER ,mitvc2
mitac2 LOOP zmc,mitc2
mitvc2 LEAVE bkp,1
TABULATE tab
TERMINATE 1
GENERATE (Lognormal(12,200,6,2.5))
SUNAVAIL bkp
ASSIGN zmc,10
mitc3 TEST NE X*zmc,0,mitac3
DISPLACE X*zmc,mit2,1
SAVEVALUE P$zmc,0
mitac3 LOOP zmc,mitc3
ADVANCE 150,50
SAVAIL bkp
TERMINATE 1
mit2 LEAVE bkp,1
TRANSFER ,mit1
START 1000
```

Читачам пропонується самостійно виконати моделювання, користуючись наведеною програмою, проаналізувати статистичний звіт і побудувати графік черги. ■

**Приклад 6.3.** В одноканальній системі масового обслуговування організувати таку дисципліну обслуговування, коли пріоритет віддається замовленням з найменшим часом обслуговування. Вхідний потік — стаціонарний пуассонівський з середнім часом 1. Час обслуговування — рівномірно розподілена випадкова величина на проміжку  $[0,5; 2]$ .

**Розв'язання.** Для моделювання черги використаємо список користувача. Нижче наводиться модель:

```
GENERATE (Exponential(5,0,1))
ASSIGN 1,(Uniform(6,0.5,2))
GATE NU pryl,wait
mit SEIZE pryl
ADVANCE P1
RELEASE pryl
UNLINK cherga,mit,1
TERMINATE 1
wait LINK cherga,P1
START 1000 ■
```

**Приклад 6.4.** У чан, що в початковий момент часу містить 10 л чистої води, неперервно надходить зі швидкістю 2 л за хвилину розчин, у кожному літрі якого міститься 200 г солі. Цей розчин перемішується з водою і суміш витікає з чана з тією самою швидкістю. Скільки солі буде в чані через 10 хвилин?

**Розв'язання.** Нехай  $y(t)$  — кількість солі в чані в момент часу  $t$ , час  $t$  вимірюється у хвилинах, кількість солі  $y(t)$  — у кілограмах. Тоді

$$y(t + \Delta t) - y(t) = \left( 2 \cdot 0,2 - 2 \cdot \frac{y(t + \alpha)}{10} \right) \Delta t$$

— приріст солі за час  $\Delta t$  ( $0 < \alpha < \Delta t$ ). Поділивши на  $\Delta t$ , спрямувавши  $\Delta t$  до нуля і врахувавши, що  $\alpha \rightarrow 0$  для  $\Delta t \rightarrow 0$ , отримаємо:

$$y' = 0,4 - 0,2y.$$

Крім того, маємо  $y(0) = 0$ . Для моделювання придатна модель:

```

у_ EQU 0
у_ INTEGRATE (0.4-0.2#у_)
GENERATE 10
TERMINATE 1
START 1

```

Круглі дужки у другому рядку цієї програми обов'язкові. У звіті вказується значення  $y_$  на кінець моделювання, тобто для часу  $t = 10$  (рис. 6.1). Оскільки воно дорівнює 1,729, то через 10 хвилин у чані буде 1,729 кг солі. ■

NAME	VALUE
у_	1.729

Рис. 6.1

**Приклад 6.5.** Знайти час, коли в чані з попередньої задачі опиниться 1,9 кг солі.

**Розв'язання.** Модифікуємо модель:

```

у_ EQU 0
у_ INTEGRATE (0.4-0.2#у_),1.9,mit
GENERATE 1000
mit TERMINATE 1
START 1

```

Час моделювання є відповіддю на поставлену задачу. З фрагменту звіту (рис. 6.2) видно, що час моделювання становить 14,985 хвилин. ■

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	14.985	2	0	0

Рис. 6.2

**Приклад 6.6.** Знайти розв'язок початкової задачі

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3xy, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1$$

в точці  $t = 7$ .

**Розв'язання.** Складаємо модель:

```
x_ EQU 1
y_ EQU -1
x_ INTEGRATE (-3#x_#y_)
y_ INTEGRATE (4#x_-3#y_)
GENERATE 7
TERMINATE 1
START 1
```

Зі звіту можна побачити, що  $x(7) = 0,03$ ,  $y(7) = 0,042$ . ■

**Приклад 6.7.** Знайти розв'язок початкової задачі  $y' = 0,4 - 0,2y$ ,  $y(1) = 0,5$  в точці  $t = 10$ .

**Розв'язання.** Для розв'язування цієї задачі засобами GPSS World потрібно скласти PLUS-процедуру, яка б змінювала початкове значення функції  $y$ . Складаємо модель:

```
y_ EQU 0
y_ INTEGRATE (0.4-0.2#y_)
PROCEDURE newint(valuei)
BEGIN
y_=valuei;
END;
GENERATE 1,,1
PLUS (newint(0.5))
ADVANCE 9
TERMINATE 1
START 1
```

У момент часу, рівний одиниці, генерується один транзакт, який запускає PLUS-процедуру `newint` зміни значення



змінної користувача  $y_-$ . Процес інтегрування диференціального рівняння продовжується до часу  $t = 10$ , коли знищується транзакт і припиняється моделювання. Зі звіту можна побачити, що розв'язок початкової задачі в точці  $t = 10$  дорівнює 1,752. ■

**Приклад 6.8.** Вхідний потік вимог є стаціонарним пуассонівським з середнім значенням 0,3. Час обслуговування у двоканальному пристрої задається функцією

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \leq 4, \\ \frac{4}{x}, & x > 4, \end{cases}$$

де  $x$  — довжина черги до цього пристрою. Склавши програму для моделювання роботи системи, здійснити моделювання обслуговування 5000 вимог.

**Розв'язання.** Для обчислення значення функції створимо PLUS-процедуру  $fx$ . Програма може бути такою:

```
PROCEDURE fx(x_)
BEGIN
IF (x_<=4) THEN RETURN 5-x_; ELSE RETURN 4/x_;
END;
bkr STORAGE 2
GENERATE (Exponential(5,0,0.3))
QUEUE wait
ENTER bkr
DEPART wait
ADVANCE (fx(q$wait))
LEAVE bkr
TERMINATE 1
START 5000
```

Читачам пропонується самостійно виконати моделювання, користуючись наведеною програмою, проаналізувати статистичний звіт і побудувати графік черги. ■

### *Вправи*

1. Вхідний потік вимог задається неперервною функцією зі значеннями у вузлах  $(0; 0)$ ,  $(0,2; 1)$ ,  $(0,5; 2)$ ,  $(0,7; 3)$ ,  $(0,8; 4)$ ,  $(1; 7)$ . Час обслуговування є рівномірно розподіленою на відрізок  $[1, 5]$  випадковою величиною. Одночасно не може обслуговуватись більше однієї вимоги. На мові GPSS World напишіть модель, яка заповнить матрицю за наступним правилом: у перший рядок  $j$ -го стовпця матриці буде заноситись час появи  $j$ -ї вимоги в моделі, а в другий рядок  $j$ -го стовпця — час перебування цієї вимоги в моделі. Здійсніть моделювання обслуговування 100 вимог. Перегляньте створену матрицю.

2. Вхідний потік вимог має логнормальний закон розподілу з середнім значенням 2 і середньоквадратичним відхиленням 1 відповідного нормального розподілу. Час обслуговування вимоги в одноканальному пристрої є випадковою величиною, розподіленою за експоненціальним законом з інтенсивністю 0,5. Вихід з ладу пристрою відбувається через інтервали часу, що мають розподіл Вейбулла з параметрами стиснення  $\beta = 600$  і форми  $\alpha = 10$  (задаються саме в цьому порядку у функції `Weibull` мови GPSS World). Час ремонту є рівномірно розподіленою випадковою величиною на проміжку  $[10, 100]$ . При виході з ладу пристрою недообслужені вимоги чекають завершення обслуговування після закінчення ремонту. За наявності черги першими мають обслуговуватись вимоги, обслуговування яких було перерване виходом з ладу пристрою.

Складіть модель на мові GPSS World для моделювання роботи пристрою і його ремонту. Здійсніть моделювання обслуговування 1000 вимог. Визначте середню і максимальну довжини черги. Проаналізуйте таблицю часу перебування вимог у моделі.

Створіть точку зупинки моделювання при виході з ладу пристрою. Визначте системний час, коли відбулась ця подія. Перегляньте списки поточних і майбутніх подій після досягнен-

ння цієї точки. Після цього по крокам виконайте моделювання і проаналізуйте модель у вікні блоків. Створіть і перегляньте графік залежності поточної довжини черги від часу.

**3.** Вхідний потік вимог є стаціонарним пуассонівським з середнім значенням 0,3. Час обслуговування вимоги в одному каналі чотириканального пристрою є випадковою величиною з логнормальним законом розподілу з середнім значенням 0,1 і середньоквадратичним відхиленням 0,5 відповідного нормального розподілу. Вихід з ладу одного з каналів пристрою відбувається через інтервали часу, що мають логнормальний розподіл з середнім значенням 6 і середньоквадратичним відхиленням 2 відповідного нормального розподілу. Час ремонту є рівномірно розподіленою випадковою величиною на проміжку [4, 30]. При виході з ладу каналу пристрою недообслужені вимоги залишають систему.

Складіть модель на мові GPSS World для моделювання роботи пристрою і його ремонту. Здійсніть моделювання обслуговування 10000 вимог. Визначте середню і максимальну довжини черги. Проаналізуйте таблицю часу перебування вимог у моделі.

Під час моделювання перегляньте зміну інформації у вікнах блоків, пристроїв, черг, таблиці. У вікні виразів під час моделювання перегляньте зміну абсолютного системного часу, тривалості обслуговування вимоги, поточної довжини черги.

Створіть точку зупинки моделювання при виході з ладу пристрою. Визначте системний час, коли відбулась ця подія. Перегляньте списки поточних і майбутніх подій після досягнення цієї точки. Після цього по крокам виконайте моделювання і проаналізуйте модель у вікні блоків. Перегляньте графік залежності поточної довжини черги від часу.

**4.** Вхідний потік вимог є стаціонарним пуассонівським з середнім значенням 5. Час обслуговування вимоги в одному каналі дванадцятиканального пристрою є випадковою величиною з логнормальним законом розподілу з середнім значе-

нням 2 і середньоквадратичним відхиленням 2 відповідного нормального розподілу. Вихід з ладу всього пристрою відбувається через інтервали часу, що мають логнормальний розподіл з середнім значенням 5 і середньоквадратичним відхиленням 3 відповідного нормального розподілу. Час ремонту є рівномірно розподіленою величиною на проміжку [50, 300]. При виході з ладу пристрою недообслужені вимоги чекають завершення ремонту. За наявності черги першими мають обслуговуватись вимоги, обслуговування яких було перерване виходом з ладу пристрою.

Складіть модель на мові GPSS World для моделювання роботи пристрою і його ремонту. Здійсніть моделювання обслуговування 1000 вимог. Визначте середню і максимальну довжини черги. Проаналізуйте таблицю часу перебування вимог у моделі.

Під час моделювання перегляньте зміну інформації у вікнах блоків, пристроїв, таблиці.

Створіть точку зупинки моделювання при виході з ладу пристрою. Визначте системний час, коли відбулась ця подія. Перегляньте списки поточних і майбутніх подій після досягнення цієї точки. Після цього по крокам виконайте моделювання і проаналізуйте модель у вікні блоків.

Перегляньте графік залежності поточної довжини черги від часу.

**5.** Вхідний потік вимог є стаціонарним пуассонівським з середнім значенням 5. Час обслуговування вимоги в одноканальному пристрої є випадковою величиною з рівномірним законом розподілу на проміжку [2, 7]. За наявності черги першими мають обслуговуватись вимоги, які прийшли останніми.

Складіть модель на мові GPSS World для моделювання роботи пристрою. Здійсніть моделювання обслуговування 1000 вимог. Визначте середню і максимальну довжини черги, середній час перебування вимог у черзі. Проаналізуйте таблицю часу перебування вимог у моделі.

Під час моделювання перегляньте зміну інформації у вікнах блоків, пристроїв, таблиці. Створіть і перегляньте графік залежності поточної довжини черги від часу.

**6.** Вхідний потік вимог є стаціонарним пуассонівським з інтенсивністю 1. Час обслуговування вимоги в одноканальному пристрої є випадковою величиною з рівномірним законом розподілу на проміжку  $[0,3; 1,5]$ . За наявності черги першими мають обслуговуватись вимоги з найменшим часом обслуговування. Черга обмежена десятьма позиціями. Вимоги, для яких немає місця в черзі, залишають модель необслуженими.

Складіть модель на мові GPSS World для моделювання роботи пристрою. Здійсніть моделювання обслуговування 1000 вимог. Визначте середню і максимальну довжини черги, середній час перебування вимог у черзі. Проаналізуйте таблицю часу перебування вимог у моделі.

Під час моделювання перегляньте зміну інформації у вікнах блоків, пристроїв, таблиці. Створіть і перегляньте графік залежності поточної довжини черги від часу.

**7.** З допомогою GPSS World знайдіть розв'язок початкової задачі  $y' = 5 + 4\sqrt{y}$ ,  $y(0) = 22$  у точці  $x_1 = 33$ . З допомогою GPSS World знайдіть таке значення  $x_2$ , щоб розв'язок цієї початкової задачі  $y(x_2) = 100$ .

**8.** З допомогою GPSS World знайдіть розв'язок початкової задачі  $y' = 4 + \sqrt{y} + y$ ,  $y(0) = 18$  у точці  $x_1 = 15$ . З допомогою GPSS World знайдіть таке значення  $x_2$ , щоб розв'язок цієї початкової задачі  $y(x_2) = 200$ .

**9.** З допомогою GPSS World знайдіть розв'язок системи  $x' = 3x - 2xy$ ,  $y' = 5x - 6y$ ,  $x(0) = 3$ ,  $y(0) = 7$  у точці  $t = 18$ .

**10.** Складіть на мові GPSS World модель п'ятиканальної системи масового обслуговування з відмовами, передбачивши можливість числового інтегрування системи диференціальних рівнянь для ймовірностей станів і порівняння результатів, отриманих з допомогою аналітичної та імітаційної моделей. Інтенсивність стаціонарного пуассонівського потоку за-

мовлень —  $\lambda = 1/3$ , час обслуговування — випадкова величина з експоненціальним законом розподілу й інтенсивністю  $\mu = 1/16$ . Порівняйте результати.

Побудуйте одночасно графіки всіх імовірностей станів з аналітичної моделі для часу з проміжку  $[0, 100]$ . Побудуйте одночасно графіки аналітичної й імітаційної ймовірностей обслуговування для часу з проміжку  $[0, 100]$ . Побудуйте одночасно графіки аналітичної й імітаційної середніх кількостей зайнятих каналів обслуговування для часу з проміжку  $[0, 100]$ . Побудуйте одночасно графіки аналітичного й імітаційного коефіцієнтів зайнятості системи масового обслуговування для часу з проміжку  $[0, 100]$ .

Вказівка. Система диференціальних рівнянь Колмогорова для імовірностей станів має вигляд:

$$\begin{cases} p'_0(t) = \mu p_1(t) - \lambda p_0(t), \\ p'_1(t) = \lambda p_0(t) + 2\mu p_2(t) - (\lambda + \mu)p_1(t), \\ p'_2(t) = \lambda p_1(t) + 3\mu p_3(t) - (\lambda + 2\mu)p_2(t), \\ p'_3(t) = \lambda p_2(t) + 4\mu p_4(t) - (\lambda + 3\mu)p_3(t), \\ p'_4(t) = \lambda p_3(t) + 5\mu p_5(t) - (\lambda + 4\mu)p_4(t), \\ p'_5(t) = \lambda p_4(t) - 5\mu p_5(t). \end{cases}$$

**11.** Вхідний потік вимог є стаціонарним пуассонівським з середнім значенням 2. Час обслуговування в одноканальному пристрої є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу, середнє значення якого задається функцією

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \leq 2, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 2, \end{cases}$$

де  $x$  — довжина черги до цього пристрою.

Складіть модель на мові GPSS World для моделювання роботи системи, створивши PLUS-процедуру для обчислення значення функції  $f(x)$ . Здійсніть моделювання обслуговування 1000 вимог. Визначте середню і максимальну довжини черги та побудуйте графік залежності поточної довжини черги від часу.

## Тема 7. Моделювання випадкових величин

### *Короткі теоретичні відомості*

Імітаційною моделлю при використанні методу Монте-Карло є комп'ютерна програма, яка відтворює процес функціонування реальної системи. Моделювання на основі методу Монте-Карло ґрунтується на багаторазовій імітації досліджуваного явища і наступній статистичній обробці результатів моделювання. Вплив випадкових факторів моделюється використанням випадкових чисел.

Припустимо, що ймовірність настання деякої елементарної випадкової події  $A$  в одному випробуванні становить  $P(A) = p$ . Нехай тут і нижче  $r$  — значення випадкової величини з рівномірним законом розподілу на півінтервалі  $[0, 1)$ . Тоді за умови  $r < p$  відбувається подія  $A$ , а якщо  $r \geq p$ , то відбувається протилежна подія  $\bar{A}$ .

Нехай задано групу несумісних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  з відомими ймовірностями настання цих подій  $p_1 = P(A_1)$ ,  $p_2 = P(A_2)$ ,  $\dots$ ,  $p_n = P(A_n)$ , причому  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ . Якщо випадкове число  $r$  задовольняє подвійну нерівність

$$\sum_{i=0}^{j-1} p_i \leq r < \sum_{i=0}^j p_i, \quad (7.1)$$

де  $p_0 = 0$ , то вважаємо, що відбувається подія  $A_j$ .

Для моделювання неперервної випадкової величини з функцією розподілу  $F(x)$  методом оберненої функції потрібно розв'язати рівняння  $F(x) = r$ . Тоді  $x = F^{-1}(r)$  — випадкова величина з потрібним законом розподілу, де  $F^{-1}(r)$  — обернена функція до функції розподілу  $F(x)$ . Якщо функція  $F^{-1}(r)$  є неоднозначною, то для кожного проміжку значень змінної  $r$  вибирають потрібну вітку функції  $F^{-1}(r)$ .

Припустимо, що дискретна випадкова величина може набувати значень  $x_1, x_2, \dots$ , для яких  $x_1 < x_2 < \dots$ , а  $F(x)$  — її

функція розподілу ймовірностей. Для моделювання випадкової величини методом оберненої функції генеруємо рівномірно розподілене випадкове число  $r \in [0, 1)$  і знаходимо таке найменше ціле число  $k$ , для якого  $r < F(x_k)$ . Тоді число  $x_k$  буде значенням випадкової величини з потрібним законом розподілу.

Для генерування цілочислової рівномірно розподіленої на проміжку  $[a, b]$  випадкової величини використовують формулу

$$k = [a + (b - a + 1)r], \quad (7.2)$$

де квадратні дужки означають цілу частину числа.

Для отримання значення випадкової величини з геометричним розподілом використовують формулу

$$k = \left[ \frac{\ln(1 - r)}{\ln(1 - p)} \right] + 1, \quad (7.3)$$

де  $p \in (0, 1)$  — ймовірність успіху в одному випробуванні. Квадратні дужки тут знову є цілою частиною числа.

Для невеликих  $n$  значення біноміально розподіленої випадкової величини визначають як кількість менших від ймовірності  $p$  чисел у послідовності рівномірно розподілених випадкових чисел  $r_i \in [0, 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . У випадку великих  $n$  генерують рівномірно розподілене випадкове число  $r \in [0, 1)$  і визначають таке найменше ціле число  $k$ , щоб виконувалась нерівність

$$r < \sum_{j=0}^k \frac{n!}{(n-j)!j!} p^j (1-p)^{n-j}$$

для заданих  $n$  і  $p$ . Знайдене  $k$  має біноміальний розподіл.

Для отримання значення випадкової величини з пуассонівським законом розподілу генерують рівномірно розподілене випадкове число  $r \in [0, 1)$  і визначають таке найменше ціле



число  $k$ , щоб виконувалась нерівність

$$re^\lambda < \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j}{j!},$$

де  $\lambda$  — середнє значення.

Для генерування рівномірно розподіленої на проміжку  $[a, b]$  неперервної випадкової величини використовують формулу

$$x = a + (b - a)r. \quad (7.4)$$

Випадкову величину з експоненціальним розподілом генерують за формулою

$$x = -\bar{x} \ln(1 - r), \quad (7.5)$$

де  $\bar{x}$  — середнє значення експоненціального розподілу.

Для генерування нормально розподіленої випадкової величини з середнім значенням  $\mu$  і середньоквадратичним відхиленням  $\sigma$  використовують формулу

$$x = \mu + \sigma \left( \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right),$$

де  $r_i \in [0, 1)$  — рівномірно розподілені випадкові числа.

Випадкову величину з логнормальним розподілом з середнім значенням  $\mu$  і середньоквадратичним відхиленням  $\sigma$  відповідного нормального розподілу обчислюють за формулою

$$x = \exp \left( \mu + \sigma \left( \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right) \right).$$

Для генерування розподілу Вейбулла з параметром форми  $\alpha$  і коефіцієнтом стиснення  $\beta$  використовують формулу

$$x = \beta (-\ln(1 - r))^{1/\alpha}.$$

Випадкову величину з трикутним законом розподілу з найімовірнішим значенням  $c$  з проміжку  $[a, b]$  генерують за формулою

$$x = \begin{cases} a + \sqrt{r(b-a)(c-a)}, & 0 \leq r < \frac{c-a}{b-a}, \\ b - \sqrt{(1-r)(b-a)(b-c)}, & \frac{c-a}{b-a} \leq r < 1. \end{cases} \quad (7.6)$$

*Рекомендована література:* [5, с. 502–547], [9, с. 252–277], [14, с. 6–75], [18, с. 112–149].

### *Розв'язування типових вправ і задач*

**Приклад 7.1.** Необхідно знайти площу фігури, обмежену функцією  $y = f(x)$  ( $f(x) > 0$  на відрізку  $[a, b]$ ), вертикальними відрізками  $x = a$  і  $x = b$  та віссю абсцис (рис. 7.1), тобто треба знайти

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

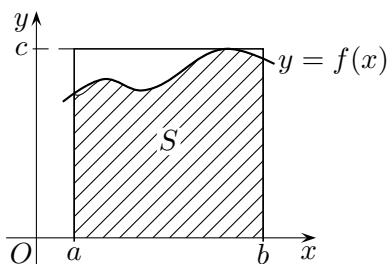


Рис. 7.1.

**Розв'язання.** Для розв'язування цієї задачі застосуємо метод Монте-Карло. Нехай

$$c = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Фігура, площу якої шукаємо, міститься в прямокутнику  $[a, b] \times [0, c]$ , площа якого дорівнює  $c(b - a)$ . Нехай  $\xi$  — деяка випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку  $[0, 1]$ . Замість відрізка  $[0, 1]$  можна брати півінтервал  $[0, 1)$ , бо ймовірність набуття неперервною випадковою величиною конкретного значення дорівнює нулю. Тоді  $\eta = (b - a)\xi + a$  і  $\zeta = c\xi$  — випадкові величини, рівномірно розподілені на проміжках  $[a, b]$  і  $[0, c]$ . Використовуємо випадкову величину  $\eta$  для визначення координати  $x_i$ , а випадкову величину  $\zeta$  для визначення координати  $y_i$ .

Здійснюємо  $N$  випробувань. Випробування вважаємо успішним, якщо точка з координатами  $(x_i, y_i)$  потрапляє в область під кривою  $y = f(x)$  або на неї. Підраховуємо кількість успішних випробувань, позначаємо її через  $m$  і знаходимо величину  $\frac{m}{N}$ . Згідно з геометричним означенням імовірності при великих  $N$  ця величина є ймовірністю  $P$  потрапляння точки в заштриховану область на рис. 7.1.

$$P = \frac{S}{c(b - a)} \quad \Rightarrow \quad S \approx c(b - a) \frac{m}{N}. \quad \blacksquare$$

**Приклад 7.2.** Нехай є деяка ціль довільної форми загальною площею  $S$ , на яку бомбардувальники скидають  $n$  бомб. Область враження кожної бомби — це круг з радіусом  $r$ . Ціль вважається враженою, якщо зруйновано не менше, ніж  $K$  відсотків її площі  $S$ . Необхідно знайти ймовірність враження цілі, якщо бомбардувальники скидають бомби всередині круга з центром приблизно у центрі цілі і радіусом  $R$  (рис. 7.2).

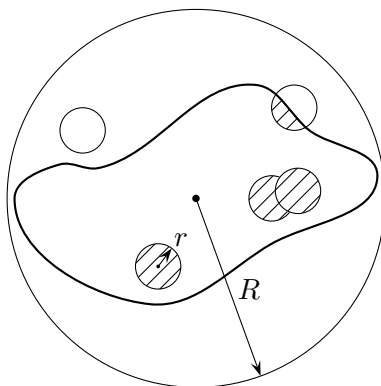


Рис. 7.2.

**Розв'язання.** Зауважимо, що окремі бомби можуть взагалі не влучити в ціль або лише її зачепити, бомби можуть падати так, що області руйнування ними цілі перекриватимуться.

Здійснюємо  $N$  випробувань, моделюючи кожного разу координати точок падіння бомб, і підраховуємо кількість випробувань  $m$ , під час яких ціль було вражено. Якщо площа враження становить  $K$  або більше відсотків від загальної площі цілі  $S$ , то ціль вважається враженою, а випробування — успішним. Імовірність враження цілі визначається як  $\frac{m}{N}$  (згідно з класичним означенням імовірності). ■

**Приклад 7.3.** Вивести формули для моделювання неперервної випадкової величини, щільність розподілу ймовірностей якої має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{1}{10}, & 2 \leq x < 5, \\ \frac{x}{8} - \frac{3}{5}, & 5 \leq x < 7, \\ \frac{1}{20}, & 7 \leq x < 15, \\ 0, & x \geq 15. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Знайдемо функцію розподілу  $F(x)$  за форму-

лою

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

Тоді

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0dx, & x < 2, \\ \int_{-\infty}^2 0dx + \int_2^x \frac{1}{10}dx, & 2 \leq x < 5, \\ \int_{-\infty}^2 0dx + \int_2^5 \frac{1}{10}dx + \int_5^x \left(\frac{x}{8} - \frac{3}{5}\right)dx, & 5 \leq x < 7, \\ \int_{-\infty}^2 0dx + \int_2^5 \frac{1}{10}dx + \int_5^7 \left(\frac{x}{8} - \frac{3}{5}\right)dx + \int_7^x \frac{1}{20}dx, & 7 \leq x < 15, \\ 1, & x \geq 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{x}{10} - \frac{1}{5}, & 2 \leq x < 5, \\ \frac{x^2}{16} - \frac{3}{5}x + \frac{139}{80}, & 5 \leq x < 7, \\ \frac{x}{20} + \frac{1}{4}, & 7 \leq x < 15, \\ 1, & x \geq 15. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння  $F(x) = r$  відносно  $x$ . Маємо три випадки.

1)  $\frac{x}{10} - \frac{1}{5} = r$ ,  $2 \leq x < 5$ . Тоді  $x = 10r + 2$ . Межі діапазону значень  $r$  отримуємо підстановкою відповідних меж діапазону значень  $x$  у рівняння  $\frac{x}{10} - \frac{1}{5} = r$ , тому  $0 \leq r < \frac{3}{10}$ .

2)  $\frac{x^2}{16} - \frac{3}{5}x + \frac{139}{80} = r$ ,  $5 \leq x < 7$ . Позбудемось дробів у рівнянні, помноживши обидві його частини на 80:  $5x^2 - 48x + 139 - 80r = 0$ . Дискримінант  $\frac{D}{4} = 24^2 - 5(139 - 80r) = 400r - 119$ . Тоді  $x_{1,2} = \frac{24}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{400r - 119}$ . Оскільки  $x \geq 5$ , то корінь зі знаком «мінус» не підходить. Межі діапазону значень  $r$  знаходимо аналогічно:  $\frac{3}{10} \leq r < \frac{3}{5}$ .

3)  $\frac{x}{20} + \frac{1}{4} = r$ ,  $7 \leq x < 15$ . Тоді  $x = 20r - 5$ ,  $\frac{3}{5} \leq r < 1$ .

Отже, для генерування випадкових чисел з заданим законом розподілу потрібно використовувати формулу

$$x = \begin{cases} 10r + 2, & 0 \leq r < \frac{3}{10}, \\ \frac{24}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{400r - 119}, & \frac{3}{10} \leq r < \frac{3}{5}, \\ 20r - 5, & \frac{3}{5} \leq r < 1, \end{cases}$$

де  $r$  — випадкове число з рівномірним розподілом на  $[0, 1)$ . ■

**Приклад 7.4.** Торговий заклад щодня купує у видавництва 1000 примірників деякої газети по ціні 5,5 грн і продає по 7 грн. З досвіду роботи закладу відомо, що в ранковий час попит на газети зазвичай становить від 200 до 500 примірників. У денний час попит зазвичай становить від 300 до 600 примірників. Попит у вечірній час залежить від того, чи були надруковані в газеті матеріали, що викликали підвищений інтерес. Якщо в газеті були опубліковані такі матеріали, то попит становить від 300 до 600 примірників; якщо таких матеріалів немає, то попит становить від 100 до 300 примірників. Матеріали, що викликають підвищений інтерес, друкуються в газеті в середньому два рази на тиждень. Газети, не продані на протязі дня, не можуть бути продані в наступні дні.

Розробити програму для імітації роботи торгового закладу на основі методу Монте-Карло з метою визначення середнього прибутку закладу за день, середньої кількості непроданих за день газет, середньої кількості газет за день, яких не вистачило для задоволення попиту, і ймовірності того, що попит на газети не буде повністю задоволено.

**Розв'язання.** Для моделювання попиту на газети будемо використовувати формулу (7.2), а для моделювання появи в газеті особливо цікавих матеріалів — перевірку умови  $r < 2/7$ , де  $r$  — рівномірно розподілене на проміжку  $[0, 1)$  випадкове число. Для визначення шуканих характеристик достатньо здійснити імітацію роботи торгового закладу протягом 1000 днів. Нижче наводиться програма на мові C++. Для того,

щоб отримати в C++ рівномірно розподілене на проміжку  $[0, 1)$  випадкове число, використовують наступний фрагмент коду: `(double)rand()/RAND_MAX`. Змінна `N` містить кількість днів, доки триває моделювання, змінна `Ng` — кількість газет, отриманих кожного дня, змінна `k` — кількість проданих кожного дня газет. У змінній `nvg` накопичується кількість газет, яких не вистачило для задоволення попиту. У змінній `nvd` накопичується кількість днів, коли не вистачило газет. У змінній `npg` накопичується кількість непроданих газет. У змінній `Pr` накопичується прибуток.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <cstdlib>
using namespace std;
int main()
{
    int N=1000,Ng=1000;
    int k,nvg=0,nvd=0,npg=0;
    float Pr=0;
    for (int i=0;i<N;i++)
    {
        k=200+rand()%301+300+rand()%301;
        if ((double)rand()/RAND_MAX<2.0/7)
            k+=300+rand()%301; else k+=100+rand()%201;
        if (k>Ng) {nvg+=k-Ng; nvd++; Pr+=Ng*(7-5.5);}
        else {npg+=Ng-k; Pr+=k*7-Ng*5.5;}
    }
    cout<<"Прибуток "<<Pr/N<<endl;
    cout<<"Не продано газет "<<round(float(npg)/N)
        <<endl;
    cout<<"Не вистачило газет "<<round(float(nvg)/N)
        <<endl;
    cout<<"Імовірність незадоволення попиту "
        <<(float)nvd/N<<endl;
```

}

Внаслідок роботи програми було отримано такі результати: середній прибуток за день становить близько 1200 грн, середня кількість непроданих за день газет — 40, середня кількість газет за день, яких не вистачило для задоволення попиту, — 115, імовірність того, що попит на газети не буде повністю задоволено, — 0,65. ■

**Приклад 7.5.** Лінія електропередачі (ЛЕП) з'єднує електростанцію з містом. Довжина ЛЕП (відстань між містом і електростанцією) — 200 км. Засоби автоматичного контролю, якими обладнана ЛЕП, дозволяють у випадку аварії зразу встановити місце, де вона відбулась, і оцінити її серйозність. Приблизно у 85 % випадків аварія є звичайною, а у 15 % — серйозною. При звичайній аварії для її усунення скеровується ремонтна бригада з пункту (міста чи електростанції), ближчого до місця аварії. Для усунення серйозної аварії скеровується спеціальна ремонтна бригада з міста, незалежно від того, де відбулась аварія.

Для виїзду звичайної ремонтної бригади потрібно 5–10 хвилин, а для виїзду спеціальної бригади — 10–20 хвилин. Відстань до місця аварії по дорозі в середньому є на 20 % більшою, ніж по лінії електропередачі. Середня швидкість руху ремонтної бригади до місця аварії лежить у межах від 30 до 60 км/год (залежно від якості дороги, якою можна дістатись безпосередньо до місця аварії), найімовірніша швидкість руху — 50 км/год. Час, необхідний для ремонту ЛЕП — випадкова величина, яку можна вважати розподіленою за експоненціальним законом розподілу. Ремонт ЛЕП у випадку звичайної аварії потребує в середньому 4 години, а серйозної — 8 годин.

Розробити програму для імітації ремонту ЛЕП на основі методу Монте-Карло і визначення середнього часу, необхідного для усунення аварії (включно з часом, необхідним для прибуття ремонтної бригади).



**Розв’язання.** Для моделювання відстані від міста до місця аварії на ЛЕП і часу, необхідного для виїзду ремонтної бригади, будемо використовувати неперервно розподілену випадкову величину на заданому проміжку, яка задається формулою (7.4). Для моделювання несерйозності аварії застосуємо перевірку умови  $r < 0,85$ , де  $r$  — рівномірно розподілене на проміжку  $[0, 1)$  випадкове число. Для визначення швидкості руху ремонтної бригади використаємо випадкову величину з трикутним законом розподілу з межами 30 і 60 та найімовірнішим значенням (точкою  $c$ ), рівним 50. Для моделювання такої випадкової величини призначена формула (7.6). Час руху ремонтної бригади до місця аварії визначимо діленням відстані на швидкість. Для моделювання часу ремонту ЛЕП будемо використовувати формулу (7.5). Для визначення середнього часу, необхідного для усунення аварії, достатньо здійснити імітацію усунення 5000 аварій на ЛЕП. Нижче наводиться програма на мові C++. У програмі час вимірюється у годинах і накопичується у змінній  $t$ . У змінній  $vvm$  зберігається відстань від міста у кілометрах, а в змінній  $v$  — швидкість.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <cstdlib>
using namespace std;
int main()
{
    int N=5000;
    double t=0,vvm,v,r;
    for (int i=0; i<N; i++)
    {
        vvm=200*(double)rand()/RAND_MAX;
        r=(double)rand()/RAND_MAX;
        if (r<2.0/3) v=30+sqrt(r*600);
        else v=60-sqrt((1-r)*300); // трикутний розподіл
        if ((double)rand()/RAND_MAX<0.85)
```

```

{
  t+=1.0/12+(double)rand()/RAND_MAX/12;
  if (vvm<=100) t+=vvm*1.2/v;
  else t+=(200-vvm)*1.2/v;
  t+=-4*log(1-(double)rand()/RAND_MAX);
}
else t+=1.0/6+(double)rand()/RAND_MAX/6+vvm*1.2/v-
  8*log(1-(double)rand()/RAND_MAX);
}
cout<<t/N<<endl;
}

```

Робота програми показала, що середній час усунення аварії приблизно дорівнює 6,3 години. ■

**Приклад 7.6.** Розробляється план виробництва трьох видів деталей (Д1, Д2, Д3) на робочий день. Підприємство має 20 верстатів типу ВТ1 і 30 верстатів типу ВТ2. На кожному з верстатів можна виготовляти деталі всіх трьох видів. Продуктивність верстатів (деталей/день) наведена в наступній таблиці.

Тип верстатів	Продуктивність		
	Д1	Д2	Д3
ВТ1	18	35	15
ВТ2	25	30	40

Дані в таблиці означають, наприклад, що якщо верстат типу ВТ1 протягом цілого робочого дня використовується для виробництва деталей виду Д1, то за день на цьому верстаті буде виготовлено 18 деталей цього виду.

Кожен верстат налаштовується на виготовлення деталей лише якогось одного виду протягом робочого дня. Кожного робочого дня підприємство має виготовляти не менше 150 деталей виду Д1, не менше 100 деталей виду Д2 і не менше 100 деталей виду Д3. Прибуток підприємства від продажу однієї

деталі виду Д1 становить 6 грошових одиниць, від продажу деталі виду Д2 — 4 грошових одиниці, від продажу деталі виду Д3 — 5 грошових одиниць.

Розробити програму для імітації виготовлення деталей на основі методу Монте-Карло, яка б визначила, скільки верстатів кожного типу мають виготовляти протягом дня деталі кожного виду, щоб прибуток від продажу деталей був максимальним.

**Розв’язання.** Випадковим чином вибираємо ціле число  $v1d1$  від 0 до 20 — кількість верстатів першого типу, спеціалізованих на деталі виду Д1. Випадковим чином вибираємо ціле число  $v1d2$  від 0 до  $20 - v1d1$  — кількість верстатів першого типу, спеціалізованих на деталі виду Д2. Тоді  $v1d3 = 20 - v1d1 - v1d2$  — кількість верстатів першого типу, спеціалізованих на деталі виду Д3. Аналогічно вибираємо ціле число  $v2d1$  від 0 до 30 — кількість верстатів другого типу, спеціалізованих на деталі виду Д1. Вибираємо ціле число  $v2d2$  від 0 до  $30 - v2d1$  — кількість верстатів другого типу, спеціалізованих на деталі виду Д2. Тоді  $v2d3 = 30 - v2d1 - v2d2$  — кількість верстатів другого типу, спеціалізованих на деталі виду Д3. Кількості виготовлених протягом дня деталей кожного типу обчислюємо за формулами  $d1 = 18 v1d1 + 25 v2d1$ ,  $d2 = 35 v1d2 + 30 v2d2$ ,  $d3 = 15 v1d3 + 40 v2d3$ . Якщо  $d1 < 150$  або  $d2 < 100$  або  $d3 < 100$ , то вибраний набір є недопустимим. Отже, прибуток  $S = 6 d1 + 4 d2 + 5 d3$ . Всі ці обчислення повторюємо 10 000 000 разів. Цього цілком достатньо, бо можливих наборів є значно менше, ніж  $21^2 31^2 = 423801$ . Якщо на черговому кроці отриманий прибуток виявляється більшим від максимального, отриманого на попередніх кроках, то зберігаємо його і величини  $v1d1$ ,  $v1d2$ ,  $v1d3$ ,  $v2d1$ ,  $v2d2$ ,  $v2d3$ . Нижче наводиться програма на мові C++.

```
#include <iostream>
#include <cstdlib>
using namespace std;
```

```
int main()
{
    int v1d1,v1d2,v1d3,v2d1,v2d2,v2d3,d1,d2,d3,S,
        opt_v1d1,opt_v1d2,opt_v1d3,opt_v2d1,opt_v2d2,
        opt_v2d3,opt_S=0;
    for (int i=0;i<10000000;i++)
    {
        v1d1=rand()%21; v1d2=rand()%(21-v1d1);
        v1d3=20-v1d1-v1d2;
        v2d1=rand()%31; v2d2=rand()%(31-v2d1);
        v2d3=30-v2d1-v2d2;
        d1=18*v1d1+25*v2d1; d2=35*v1d2+30*v2d2;
        d3=15*v1d3+40*v2d3;
        if (d1<150||d2<100||d3<100) continue;
        S=6*d1+4*d2+5*d3;
        if (S>opt_S)
        {
            opt_S=S;
            opt_v1d1=v1d1; opt_v1d2=v1d2; opt_v1d3=v1d3;
            opt_v2d1=v2d1; opt_v2d2=v2d2; opt_v2d3=v2d3;
        }
    }
    cout<<"v1d1="<<opt_v1d1<<endl;
    cout<<"v1d2="<<opt_v1d2<<endl;
    cout<<"v1d3="<<opt_v1d3<<endl;
    cout<<"v2d1="<<opt_v2d1<<endl;
    cout<<"v2d2="<<opt_v2d2<<endl;
    cout<<"v2d3="<<opt_v2d3<<endl;
    cout<<"S="<<opt_S<<endl;
}
```

Результати виконання програми: за наявних обмежень максимальний прибуток у розмірі 8526 грошових одиниць за день досягається, якщо 7 верстатів першого типу і 1 верстат другого типу виготовляють деталі виду Д1, 13 верстатів пер-

шого типу виготовляють деталі виду Д2, а 29 верстатів другого типу виготовляють деталі виду Д3. ■

### *Вправи*

**1.** Підприємство по ремонту побутової електроніки виконує ремонт радіоприймачів, телевізорів, DVD-плеєрів і телефонів. Відомо, що приблизно 5 % замовлень, які надходять на підприємство, становлять замовлення на ремонт радіоприймачів, 40 % — телевізорів, 25 % — DVD-плеєрів, 30 % — телефонів. По кожному замовленню потрібен ремонт лише одного виробу. Прибуток підприємства від ремонту одного радіоприймача становить 15 грошових одиниць, телевізора — 60 грошових одиниць, DVD-плеєра — 30 грошових одиниць, телефону — 40 грошових одиниць. Розробіть програму для імітації роботи ремонтного підприємства на основі методу Монте-Карло і визначення прибутку підприємства від виконання 100 ремонтів побутової електроніки.

**2.** Підприємство виготовляє деякі вироби. Зі спостережень відомо, що 4 % виробів є бракованими. Виготовлення додатного виробу приносить підприємству прибуток у розмірі 10 грошових одиниць, а виготовлення дефектного виробу — збиток у розмірі 15 грошових одиниць. Створіть програму імітації виготовлення виробів на основі методу Монте-Карло для визначення середнього прибутку підприємства від виготовлення одного виробу.

**3.** Підприємство виготовляє електроприлади, які складаються з трьох блоків  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Якщо хоч один із блоків виходить з ладу, то прилад працювати не буде. З досвіду відомо, що ймовірність безвідмовної роботи блока  $A$  протягом гарантійного терміну становить 95 %, блока  $B$  — 97 %, блока  $C$  — 98 %. Витрати підприємства на виготовлення одного приладу наступні: вартість кожного блока — 10 грошових одиниць, інші витрати — 15 грошових одиниць. Прилади продаються по ціні 60 грошових одиниць. У випадку відмови приладу до

закінчення гарантійного терміну підприємство безкоштовно виконує його ремонт. Витрати підприємства, пов'язані з гарантійним ремонтом, можуть бути різними в залежності від складності ремонту, витрат на доставку і т. п. Відомо, що приблизно у 60 % випадків витрати на гарантійний ремонт становлять 20 грошових одиниць, у 35 % випадків — 30 грошових одиниць, у 5 % випадків — 45 грошових одиниць.

Потрібно скласти алгоритм і програму на основі методу Монте-Карло для знаходження: а) ймовірності відмови приладу до завершення гарантійного терміну; б) середнього прибутку підприємства від випуску одного приладу. Визначте, чи вигідно для підприємства використовувати в конструкції приладу новий, більш надійний блок А, вартість якого становить 13 грошових одиниць, а ймовірність безвідмовної роботи протягом гарантійного терміну — 99 % (при цьому підвищення ціни на прилади не планується).

4. Бібліотека надає платну послугу: видачу книжок з читального залу додому. Читачу видається не більше, ніж чотири книги. З досвіду роботи бібліотеки відомо, що приблизно 50 % читачів беруть одну книгу, 25 % — дві, 15 % — три, 10 % — чотири книги.

Книги видаються на ціле число днів, але не більше, ніж на три дні. Читач бере всі книги на один термін, тобто по одному замовленню не можна, наприклад, взяти одну книгу на день, а іншу — на три дні. З досвіду роботи бібліотеки відомо, що читачі беруть книги на будь-який термін (один, два або три дні) однаково часто.

Плата за користування книгою з загального читального залу становить 10 грошових одиниць за день, а зі спеціалізованого читального залу — 15 грошових одиниць за день. Приблизно 55 % книг беруться читачами з загального читального залу, а решта — зі спеціалізованого.

Потрібно скласти програму на основі методу Монте-Карло для знаходження середнього розміру плати, що стягується з

одного читача, і ймовірності того, що плата з читача перевищить 100 грошових одиниць.

**5.** Підприємство виготовляє книжкові шафи на замовлення. Для великих замовлень передбачена знижка: за виготовлення однієї шафи підприємство бере 30 грошових одиниць, якщо замовлення становить від однієї до п'яти шаф, і 25 грошових одиниць — якщо замовлення перевищує п'ять шаф. Витрати підприємства на виготовлення однієї шафи — 20 грошових одиниць. З досвіду роботи підприємства відомо, що замовлення зазвичай становлять від однієї до тридцяти шаф, причому ця величина є рівномірно розподіленою на цілому проміжку. Замовлення на виготовлення більше тридцяти шаф зустрічаються надзвичайно рідко і ними можна знехтувати. Директор підприємства пропонує скасувати знижку з метою збільшення прибутку. Однак у цьому випадку можна припускати, що кількість великих замовлень зменшиться, і замовлення будуть передбачати виготовлення в середньому від однієї до п'ятнадцяти шаф. Потрібно скласти програму для імітації виконання замовлень і визначити, чи вигідним для підприємства є скасування знижок.

**6.** У ремонтній службі підприємства виконується налагодження і ремонт деяких пристроїв. Кожен пристрій складається з п'яти схем. Кожна з них може виявитись несправною з імовірністю 0,1 (у 10 % випадків). Налагодження і ремонт пристрою включає в себе наступні операції: перевірку, заміну несправної схеми і налагодження пристрою. Для перевірки кожної схеми потрібно витратити від 3 до 6 хвилин. Час заміни однієї схеми є випадковою величиною з логнормальним законом розподілу з середнім значенням відповідного нормального закону розподілу 1,8 і середньоквадратичним відхиленням 0,2. Якщо схеми не замінювались, то достатньо дрібного налагодження пристрою. Якщо було замінено хоч одну схему, то необхідне повне налагодження пристрою. Час налагодження є випадковою величиною, розподіленою за експоненціальним

законом. Дрібне налагодження потребує в середньому 10 хвилин, а повне — 15 хвилин.

Потрібно скласти алгоритм і програму імітації налагодження і ремонту пристроїв на основі методу Монте-Карло. Програма має дати можливість визначити: середній час налагодження і ремонту одного пристрою; процент випадків, коли відбувався ремонт, тобто була замінена хоч одна схема; середню кількість схем, заміненіх в одному пристрої.

**7.** Деякі вироби виготовляються шляхом накладання двох пластин. Номінальна товщина першої пластини — 9 мм, а другої — 6 мм. Оскільки у виробничому процесі неминучі відхилення, фактична товщина першої пластини є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім значенням 9 мм і середньоквадратичним відхиленням 0,15 мм. Товщина другої пластини — теж нормально розподілена випадкова величина з середнім значенням 6 мм і середньоквадратичним відхиленням 0,1 мм. Готовий виріб вважається придатним, якщо його товщина становить від 14,8 до 15,2 мм. Створіть алгоритм і програму для імітації товщини виготовленого виробу на основі методу Монте-Карло. Знайдіть середню товщину готового виробу і ймовірність випуску придатної продукції.

**8.** Фірма виконує переклади з двадцяти п'яти іноземних мов на українську мову. Обсяг перекладу — випадкова величина з експоненціальним законом розподілу. Середній обсяг перекладу — 7 сторінок. Сторінкою вважається обсяг тексту, що містить 1860 друкованих знаків з пропусками.

З усіх перекладів переклади з англійської, німецької, французької, італійської та іспанської мов становлять 85 %, з польської і російської мов — 5 %, з інших мов — 10 %. Крім того, відомо, що з усіх замовлень 50 % становлять замовлення на стандартні переклади, 30 % — економічні і юридичні, 20 % — художні, медичні і технічні. Кожне замовлення належить лише до одного виду (тобто переклад не може бути, наприклад, одночасно економічним і медичним).



Плата, яку бере фірма з замовника за одну сторінку стандартного перекладу, наступна: з англійської, німецької, французької, італійської та іспанської мов — 45 грн, з польської і російської мов — 40 грн, з інших мов — 65 грн. За економічний або юридичний переклад плата підвищується на 30 %, а за художній, медичний або технічний — на 50 %. Якщо обсяг перекладу становить менше, ніж півсторінки, то плата береться за півсторінки. Якщо обсяг перекладу перевищує 50 сторінок, то застосовується знижка у розмірі 5 %.

Потрібно скласти програму на основі методу Монте-Карло для визначення середньої вартості виконання одного перекладу.

**9.** В автоматизованій системі керування технологічним процесом передаються сигнали від виробничого обладнання (об'єкта керування) до комп'ютера, який керує процесом. Тривалість передачі сигналу — випадкова величина, розподілена за експоненціальним законом із середнім значенням 3 мс. У каналі зв'язку можуть виникати перешкоди. Інтервали між перешкодами — випадкові величини, розподілені за експоненціальним законом. Перешкоди виникають у середньому 30 разів за секунду, але є короткочасними. Якщо під час передачі сигналу виникне хоч одна перешкода, то сигнал спотвориться. Розробіть алгоритм і програму для імітації передачі сигналів. Визначте ймовірність передачі сигналу без спотворень.

Вказівка. Оскільки інтервали часу між перешкодами є експоненціально розподіленими випадковими величинами, то кількість перешкод за деякий інтервал часу  $t$  є випадковою величиною, розподіленою за законом розподілу Пуассона з параметром  $\lambda = \Lambda t$ , де  $\Lambda$  — інтенсивність потоку перешкод. У нашому випадку  $\Lambda = 30$  перешкод/с = 0,03 перешкоди/мс.

**10.** Деталі, необхідні для роботи цеху, знаходяться на цеховому і центральному складах. На цеховому складі зберігається 25 комплектів деталей, потреба в яких виникає через  $60 \pm 15$  хвилин і становить один комплект. У випадку зниже-

ння запасів до трьох комплектів протягом 60 хвилин формується вимога на поповнення запасів цехового складу до повного обсягу в 25 комплектів, яка посилається на центральний склад, де протягом  $60 \pm 30$  хвилин відбувається комплектування. Для доставки комплектів деталей з центрального складу у цех потрібно від 50 до 80 хвилин з найімовірнішим значенням 70 хвилин.

Потрібно скласти програму на основі методу Монте-Карло для визначення ймовірності простою цеху через відсутність деталей. Визначити момент поповнення запасу цехового складу, при якому ймовірність простою цеху буде дорівнювати нулю.

Вказівка. Для моделювання часу доставки комплектів деталей з центрального складу у цех потрібно використовувати трикутний розподіл.

**11.** Підприємство має можливість укласти контракти на виконання кількох замовлень. У наступній таблиці наведені характеристики всіх контрактів, які можуть бути укладені підприємством: терміни, необхідні підприємству для виконання контрактів, і очікуваний прибуток.

Номер контракту	1	2	3	4	5	6	7
Термін виконання, днів	15	21	8	5	12	11	10
Прибуток, тис. грош. од.	24	33	13	7	22	15	20

Одночасно підприємство може працювати лише над одним контрактом. Потрібно скласти програму на основі методу Монте-Карло для визначення переліку контрактів, які треба укласти підприємству, щоб отримати максимальний прибуток, якщо контракти мають бути виконані протягом не більше, ніж 50 днів.

**12.** Вантажні судна С1 і С2 використовуються для перевезення вантажів по річці в населені пункти П1 і П2. Протягом року в населений пункт П1 потрібно завезти не менше 4 тис. т

вантажу, а в пункт П2 — не менше 5 тис. т. Судно С1 перевозить за один рейс 15 т вантажу, а судно С2 — 20 т. Витрати, пов'язані з одним рейсом судна С1 у пункт П1, становлять 450 грошових одиниць, а в пункт П2 — 200 грошових одиниць. Один рейс судна С2 в пункт П1 обходиться в 500 грошових одиниць, а в пункт П2 — 400 грошових одиниць. Кожне судно може виконати протягом року не більше 300 рейсів.

Потрібно скласти програму на основі методу Монте-Карло для визначення оптимального плану перевезень, тобто кількості рейсів, які має зробити кожне судно у кожен населений пункт для доставки необхідної кількості вантажу з мінімальними витратами.

**13.** Для зберігання деякого хімікату використовується контейнер циліндричної форми з вертикальною віссю. Ємність контейнера —  $5 \text{ м}^3$ , а висота може набувати значень від 1 до 3 м. Дно і стінки контейнера, які мають безпосередній контакт з хімікатом, виготовляються з більш стійкого матеріалу, ніж його кришка. Вартість матеріалу для стінок і дна контейнера —  $7 \text{ гр.од./м}^2$ , а вартість матеріалу для кришки —  $4 \text{ гр.од./м}^2$ .

Потрібно скласти програму на основі методу Монте-Карло для визначення габаритів контейнера (радіуса основи і висоти), при яких вартість матеріалу для виготовлення контейнера буде мінімальною.

**14.** Фірма, яка має два заводи, планує виконати шість замовлень. Кожне замовлення може виконуватись лише одним заводом (спільна робота заводів над одним замовленням неможлива). Кожен завод може виконати кілька замовлень по черзі (одночасне виконання кількох замовлень одним заводом неможливе). Час, необхідний кожному заводу для виконання кожного замовлення, наведений у наступній таблиці.

Номер замовлення	1	2	3	4	5	6
Витрати часу для 1-го заводу, дні	3	4	6	3	5	4
Витрати часу для 2-го заводу, дні	1	7	3	8	4	3

Потрібно скласти програму на основі методу Монте-Карло для визначення такого розподілу замовлень, щоб спільний час виконання всіх замовлень був мінімальним.

**15.** Виведіть формули для генерування випадкової величини, яка має задану щільність розподілу ймовірностей:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{x-1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{2}, & 2 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x < 4, \\ 0, & x \geq 4; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{10}, & 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3}, & 2 \leq x < 3, \\ 1 - \frac{x}{5}, & 3 \leq x < 5, \\ 0, & x \geq 5; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{x-2}{3}, & 2 \leq x < 3, \\ \frac{1}{2}, & 3 \leq x < 4, \\ \frac{1}{3}, & 4 \leq x < 5, \\ 0, & x \geq 5; \end{cases} \quad \text{г) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{13}{60}, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{5}, & 2 \leq x < 3, \\ \frac{1}{12}, & 3 \leq x < 4, \\ 0, & x \geq 4; \end{cases}$$

$$\text{д) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{x}{4}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{4}, & 2 \leq x < 4, \\ \frac{5-x}{4}, & 4 \leq x < 5, \\ 0, & x \geq 5; \end{cases} \quad \text{е) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{5}, & 0 \leq x < 2, \\ \frac{2}{5}, & 2 \leq x < 3, \\ \frac{1}{5}, & 3 \leq x < 4, \\ 0, & x \geq 4. \end{cases}$$

**16.** Виведіть формули для генерування випадкової величини з лівим трикутним законом розподілу.

**17.** Виведіть формули для генерування випадкової величини з правим трикутним законом розподілу.

## Тема 8. Емпіричні розподіли і їхнє моделювання

### *Короткі теоретичні відомості*

Для того щоб здійснити імітаційне моделювання будь-якої ймовірнісної системи, потрібно знати розподіли випадкових величин, які задають випадкові фактори у системі. Спочатку треба здійснити спостереження за випадковими процесами і отримати дані (вибірку) спостережень, наприклад, моменти появи клієнтів у банку, час їхнього обслуговування і т. п. Одним зі способів використання отриманих даних спостережень є створення емпіричних розподілів і їхнє моделювання.

Нехай відомими є значення окремих спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  неперервної випадкової величини. Відсортуємо їх за зростанням і перепозначимо через  $x_{(i)}$ :

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

Для моделювання неперервної випадкової величини з емпіричним розподілом, відповідним цим даним спостереження, генерують випадкове число  $r$ , рівномірно розподілене на півінтервалі  $[0, 1)$ , а потім знаходять число  $i$  за формулою

$$i = [(n-1)r] + 1 \quad (8.1)$$

(квадратні дужки позначають цілу частину числа) і число  $x$  за формулою

$$x = x_{(i)} + ((n-1)r - i + 1)(x_{(i+1)} - x_{(i)}). \quad (8.2)$$

При використанні мови імітаційного моделювання GPSS обчислення за формулами (8.1), (8.2) здійснювати не потрібно, бо ці дії виконуються автоматично при використанні функції, яка описується так:

```
N FUNCTION RNm,Cn
0, x(1)/1/n-1, x(2)/2/n-1, x(3)/.../n-2, x(n-1)/1, x(n)
```

Замість  $N$  вказують ім'я функції, число  $n$  — кількість чисел у вибірці даних спостережень,  $m$  — номер генератора випадкових чисел, а  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$  — відсортовані за зростанням дані спостережень. Усі дроби при визначенні функції мають бути обчисленими.

Припустимо, що відомими є значення окремих спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  дискретної випадкової величини. Відсортуємо їх за зростанням і перепозначимо через  $x_{(i)}$ :

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

Для моделювання дискретної випадкової величини з емпіричним розподілом, відповідним цим даним спостереження, генерують випадкове число  $r$ , рівномірно розподілене на півінтервалі  $[0, 1)$ , а потім виводять  $x_{(i)}$ , де число  $i$  обчислюється за формулою

$$i = [rn] + 1 \quad (8.3)$$

(квадратні дужки позначають цілу частину числа).

При використанні мови імітаційного моделювання GPSS для моделювання такого емпіричного розподілу можна застосувати функцію, яка описується так:

```
N FUNCTION RNm,Dn
  1/n, x(1)/2/n, x(2)/3/n, x(3)/.../n-1/n, x(n-1)/1, x(n)
```

Нехай випадкова величина є неперервною, а дані — згрупованими, тобто ми не знаємо значень окремих величин  $x_j$ . Припустимо, що  $n$  величин  $x_j$  згруповані в  $k$  суміжних півінтервалів  $[a_0, a_1), [a_1, a_2), [a_2, a_3), \dots, [a_{k-1}, a_k)$ , причому  $i$ -й півінтервал ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) містить  $n_i$  спостережень, а  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

Для моделювання неперервної випадкової величини з емпіричним розподілом у випадку таким чином заданих згрупованих даних генерують випадкове число  $r$ , рівномірно розподілене на півінтервалі  $[0, 1)$ , потім методом перебору знахо-

дять таке число  $i$ , щоб виконувалась формула

$$G(a_i) \leq r < G(a_{i+1}), \quad (8.4)$$

де  $G(a_i)$  задаються формулами

$$G(a_0) = 0, \quad G(a_i) = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (8.5)$$

і, насамкінець, обчислюють число  $x$  за формулою

$$x = a_i + \frac{r - G(a_i)}{G(a_{i+1}) - G(a_i)}(a_{i+1} - a_i). \quad (8.6)$$

При використанні мови імітаційного моделювання GPSS можна використовувати функцію, яка описується так:

`N FUNCTION RNm,C(k+1)`  
`0, a0/n, a1/n, a2/.../n, ak-1/1, ak`

Замість  $N$  вказують ім'я функції, а замість  $m$ ,  $n$ ,  $a_0$ ,  $a_i$ ,  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , ставлять відповідні числа. Усі дроби тут також потрібно обчислити.

Нехай ми маємо дискретну випадкову величину, про яку відомо те, що значення  $x_i$  у вибірці зустрічається  $n_i$  разів,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Припустимо, що числа  $x_i$  відсортовані за зростанням:  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ . Нехай  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

Для моделювання дискретної випадкової величини з емпіричним розподілом у випадку таким чином заданих згрупованих даних спочатку генерують випадкове число  $r$ , рівномірно розподілене на півінтервалі  $[0, 1)$ , потім методом перебору знаходять таке число  $i$ , щоб виконувалась подвійна нерівність

$$\frac{n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1}}{n} \leq r < \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_i}{n}, \quad (8.7)$$

і виводять число  $x_i$ .

При використанні мови імітаційного моделювання GPSS функцію для моделювання цієї випадкової величини описують таким чином:

*N* FUNCTION RN $m, Dk$

$$\frac{n_1}{n}, x_1/\frac{n_1+n_2}{n}, x_2/\frac{n_1+n_2+n_3}{n}, x_3/\dots/\frac{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}}{n}, x_{k-1}/1, x_k$$

*Рекомендована література:* [5, с. 381–383, 538–539], [9, с. 282–296].

### *Розв'язування типових вправ і задач*

**Приклад 8.1.** Обчислити два числових значення неперервної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає вибірці: 13,16; 12,32; 10,71; 14,6; 13,74; 10,39; 10,71; 14,22. Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,867 і 0,215.

*Розв'язання.* Кількість чисел у вибірці  $n = 8$ . Відсортуємо вибірку за зростанням: 10,39; 10,71; 10,71; 12,32; 13,16; 13,74; 14,22; 14,6. Виконуємо обчислення за формулами (8.1), (8.2). Для  $r = 0,867$  маємо:

$$i = [7 \cdot 0,867] + 1 = 7,$$

$$x = 14,22 + (7 \cdot 0,867 - 7 + 1)(14,6 - 14,22) = 14,24622.$$

Для  $r = 0,215$  маємо:

$$i = [7 \cdot 0,215] + 1 = 2,$$

$$x = 10,71 + (7 \cdot 0,215 - 2 + 1)(10,71 - 10,71) = 10,71.$$

**Відповідь:** 14,24622, 10,71.

**Приклад 8.2.** На мові імітаційного моделювання GPSS створити неперервну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає вибірці: 13,16; 12,32; 10,71; 14,6; 13,74; 10,39; 10,71; 14,22.

*Розв'язання.* Кількість чисел у вибірці  $n = 8$ . Відсортуємо вибірку за зростанням: 10,39; 10,71; 10,71; 12,32; 13,16; 13,74; 14,22; 14,6. Функцію записуємо, наприклад, так:

abcd FUNCTION RN15, C8

$$0, 10.39/\frac{1}{7}, 10.71/\frac{2}{7}, 10.71/\frac{3}{7}, 12.32/\frac{4}{7}, 13.16/\frac{5}{7}, 13.74/$$



$\frac{6}{7}, 14.22/1, 14.6$

Після наближеного обчислення дробів маємо:

```
abcd FUNCTION RN15,C8
0,10.39/0.143,10.71/0.286,10.71/0.429,12.32/
0.571,13.16/0.714,13.74/0.857,14.22/1,14.6 ■
```

**Приклад 8.3.** Обчислити два числових значення дискретної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає вибірці 5, 6, 8, 4, 3, 7, 4, 3, 4, якщо генератор випадкових чисел генерує значення 0,867 і 0,215.

**Розв'язання.** Кількість чисел у вибірці  $n = 9$ . Відсортуємо вибірку за зростанням: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8. Виконуємо обчислення за формулою (8.3). Для  $r = 0,867$  маємо:

$$i = [9 \cdot 0,867] + 1 = 8, \quad x = 7.$$

Для  $r = 0,215$  маємо:

$$i = [9 \cdot 0,215] + 1 = 2, \quad x = 3.$$

**Відповідь:** 7, 3.

**Приклад 8.4.** На мові імітаційного моделювання GPSS створити дискретну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає вибірці 5, 6, 8, 4, 3, 7, 4, 3, 4.

**Розв'язання.** Кількість чисел у вибірці  $n = 9$ . Відсортуємо вибірку за зростанням: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8. Функцію запишемо, наприклад, так:

```
ddd FUNCTION RN13,D9
1/9,3/2/9,3/3/9,4/4/9,4/5/9,4/6/9,5/7/9,6/8/9,7/1,8
```

Якщо в дискретному розподілі зустрічаються пари з однаковими другими елементами, то перші з них можна пропускати. Тому після наближеного обчислення дробів маємо:

```
ddd FUNCTION RN13,D6
0.222,3/0.556,4/0.667,5/0.778,6/0.889,7/1,8 ■
```

**Приклад 8.5.** Обчислити два числових значення неперервної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає згрупованій вибірці з наступної таблиці.

$[a_i, a_{i+1})$	[3, 4)	[4, 5)	[5, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10)
$n_i$	1	2	1	0	3	1

Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,867 і 0,215.

**Розв'язання.** Кількість інтервалів  $k = 6$ , а кількість чисел у вибірці  $n = 1 + 2 + 1 + 0 + 3 + 1 = 8$ . Для зручності, користуючись формулами (8.5), заповнимо наступну таблицю (останній рядок містить наближені числа).

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$a_i$	3	4	5	7	8	9	10
$G(a_i)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1
$G(a_i)$	0	0,125	0,375	0,5	0,5	0,875	1

Для  $r = 0,867$  подвійна нерівність (8.4) виконується ( $0,5 \leq 0,867 < 0,875$ ) для значення  $i = 4$ . Обчислимо  $x$  за формулою (8.6):

$$x = 8 + \frac{0,867 - 0,5}{0,875 - 0,5}(9 - 8) \approx 8,979.$$

Для  $r = 0,215$  подвійна нерівність (8.4) виконується ( $0,125 \leq 0,215 < 0,375$ ) для значення  $i = 1$ . Знаходимо  $x$  за формулою (8.6):

$$x = 4 + \frac{0,215 - 0,125}{0,375 - 0,125}(5 - 4) = 4,36.$$

**Відповідь:** 8,979, 4,36.

**Приклад 8.6.** На мові імітаційного моделювання GPSS створити неперервну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає згрупованій вибірці з наступної таблиці.

$[a_i, a_{i+1})$	[3, 4)	[4, 5)	[5, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10)
$n_i$	1	2	1	0	3	1

**Розв'язання.** Кількість півінтервалів  $k = 6$ , а кількість чисел у вибірці  $n = 8$ . Функцію записуємо, наприклад, так:

```
zgrv FUNCTION RN25,C7
0,3/1/8,4/3/8,5/1/2,7/1/2,8/7/8,9/1,10
```

Після наближеного обчислення дробів маємо:

```
zgrv FUNCTION RN25,C7
0,3/0.125,4/0.375,5/0.5,7/0.5,8/0.875,9/1,10 ■
```

**Приклад 8.7.** Обчислити два числових значення дискретної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає згрупованій вибірці з наступної таблиці.

$x_i$	6	3	5	2	7	10
$n_i$	1	2	1	4	3	1

Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,867 і 0,215.

**Розв'язання.** Кількість значень дискретної величини  $k = 6$ , а кількість чисел у вибірці  $n = 1 + 2 + 1 + 4 + 3 + 1 = 12$ . Відсортуємо вибірку за зростанням і заповнимо наступну таблицю (останній рядок містить наближені числа).

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$x_i$		2	3	5	6	7	10
$n_i$		4	2	1	1	3	1
$\frac{n_1+n_2+\dots+n_i}{n}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{12}$	1
$\frac{n_1+n_2+\dots+n_i}{n}$	0	0,333	0,5	0,583	0,667	0,917	1

Для  $r = 0,867$  подвійна нерівність (8.7) виконується ( $0,667 \leq 0,867 < 0,917$ ) для значення  $i = 5$ . Отже,  $x = 7$ .

Для  $r = 0,215$  подвійна нерівність (8.7) виконується ( $0 \leq 0,215 < 0,333$ ) для значення  $i = 1$ . Отже,  $x = 2$ .

**Відповідь:** 7, 2.

**Приклад 8.8.** На мові імітаційного моделювання GPSS створити дискретну функцію для моделювання емпіричного

розподілу, що відповідає згрупованій вибірці з наступної таблиці.

$x_i$	6	3	5	2	7	10
$n_i$	1	2	1	4	3	1

**Розв'язання.** Кількість різних чисел  $k = 6$ , а кількість чисел у вибірці  $n = 12$ . Упорядкуємо вибірку за зростанням:

$x_i$	2	3	5	6	7	10
$n_i$	4	2	1	1	3	1

Функцію запишемо, наприклад, так:

```
zdv FUNCTION RN34,D6
1/3,2/1/2,3/7/12,5/2/3,6/11/12,7/1,10
```

Після наближеного обчислення дробів маємо:

```
zdv FUNCTION RN34,D6
0.333,2/0.5,3/0.583,5/0.667,6/0.917,7/1,10 ■
```

### Вправи

1. Обчисліть три числових значення неперервної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає вибірці: 12,34; 13,01; 8,75; 14,2; 10,21; 16,1; 9,2; 11,22; 10,82; 9,2. Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,239, 0,792 і 0,465.

2. На мові імітаційного моделювання GPSS створіть неперервну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає вибірці з вправи 1.

3. Обчисліть три числових значення неперервної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає вибірці: 5,73; 6,21; 4,95; 8,07; 7,61; 6,34; 8,12; 7,23; 9,05; 7,29; 4,51; 7,6. Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,123, 0,477 і 0,912.

4. На мові імітаційного моделювання GPSS створіть неперервну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає вибірці з вправи 3.

**5.** Обчисліть три числових значення неперервної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає вибірці: 8,23; 11,61; 14,13; 6,58; 8,94; 9,35; 7,29; 13,15; 10,06; 8,94. Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,197, 0,549 і 0,782.

**6.** На мові імітаційного моделювання GPSS створіть неперервну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає вибірці з вправи 5.

**7.** Обчисліть три числових значення дискретної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає вибірці 5, 6, 8, 6, 9, 7, 4, 3, 5, 6, якщо генератор випадкових чисел генерує значення 0,791, 0,669 і 0,322.

**8.** На мові імітаційного моделювання GPSS створіть дискретну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає вибірці з вправи 7.

**9.** Обчисліть три числових значення дискретної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає вибірці 13, 14, 12, 14, 15, 11, 9, 10, 12, 16, якщо генератор випадкових чисел генерує значення 0,527, 0,903 і 0,059.

**10.** На мові імітаційного моделювання GPSS створіть дискретну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає вибірці з вправи 9.

**11.** Обчисліть три числових значення дискретної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає вибірці 8, 12, 10, 13, 8, 16, 7, 11, 12, 9, якщо генератор випадкових чисел генерує значення 0,375, 0,628 і 0,909.

**12.** На мові імітаційного моделювання GPSS створіть дискретну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає вибірці з вправи 11.

**13.** Обчисліть три числових значення неперервної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає згрупованій вибірці з наступної таблиці.

[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10)	[10, 11)	[11, 12]
3	2	1	0	5	6	4	2	3	2

Другий рядок таблиці містить кількість чисел, які потрапляють у відповідний проміжок з першого рядка таблиці. Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,157, 0,812 і 0,44.

**14.** На мові імітаційного моделювання GPSS створіть неперервну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає згрупованій вибірці з вправи 13.

**15.** Обчисліть три числових значення неперервної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає згрупованій вибірці з наступної таблиці.

[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10)
1	0	3	4	5	4	3	2	3

Другий рядок таблиці містить кількість чисел, які потрапляють у відповідний проміжок з першого рядка таблиці. Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,232, 0,588 і 0,779.

**16.** На мові імітаційного моделювання GPSS створіть неперервну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає згрупованій вибірці з вправи 15.

**17.** Обчисліть три числових значення неперервної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає згрупованій вибірці з наступної таблиці.

[0, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 6)	[6, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10)	[10, 12)
2	1	0	2	4	5	3	1	2

Другий рядок таблиці містить кількість чисел, які потрапляють у відповідний проміжок з першого рядка таблиці. Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,172, 0,59 і 0,884.

**18.** На мові імітаційного моделювання GPSS створіть неперервну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає згрупованій вибірці з вправи 17.

**19.** Обчисліть три числових значення дискретної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає згрупованій вибірці з наступної таблиці.

$x_i$	0	1	2	3	4	5	7	8
$n_i$	4	3	2	3	2	1	1	2

Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,855, 0,091 і 0,311.

**20.** На мові імітаційного моделювання GPSS створіть дискретну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає згрупованій вибірці з вправи 19.

**21.** Обчисліть три числових значення дискретної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає згрупованій вибірці з наступної таблиці.

$x_i$	1	2	4	5	7	10	11	12
$n_i$	2	2	5	4	3	1	2	2

Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,148, 0,351 і 0,689.

**22.** На мові імітаційного моделювання GPSS створіть дискретну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає згрупованій вибірці з вправи 21.

**23.** Обчисліть три числових значення дискретної випадкової величини з емпіричним розподілом, що відповідає згрупованій вибірці з наступної таблиці.

$x_i$	0	1	3	4	5	7	9	10
$n_i$	2	3	4	6	1	3	3	1

Вважати, що генератор випадкових чисел генерує значення 0,269, 0,447 і 0,725.

**24.** На мові імітаційного моделювання GPSS створіть дискретну функцію для моделювання емпіричного розподілу, що відповідає згрупованій вибірці з вправи 23.

## Тема 9. Вибір теоретичних розподілів

### *Короткі теоретичні відомості*

Якщо вибірка є залежною, то визначення параметрів розподілу і перевірка гіпотези про придатність розподілу можуть дати неточний або помилковий результат.

Перевірити вибірку даних спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , впорядкованих за часом їхнього збору, на залежність (незалежність) можна з допомогою діаграми розкиду і кореляційного графіка.

Діаграма розкиду для вибірки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — це графік точок з координатами  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Якщо отримані точки є розкиданими у деякій прямокутній області площини, то вибірку вважають незалежною; якщо ці точки розташовуються вздовж деякої лінії на площині, то вибірку вважають залежною.

Для побудови кореляційного графіка обчислюють вибірку кореляцію  $\rho_j$  за формулами

$$\rho_j = \frac{c_j}{D}, \quad c_j = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} (x_i - \bar{x})(x_{i+j} - \bar{x}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (9.1)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (9.2)$$

і будують графік залежності  $\rho_j$  від  $j$ . Якщо на кореляційному графіку всі точки є близькими до осі абсцис, то вважаємо, що вибірка є незалежною, інакше вибірка є залежною.

Вибір теоретичного розподілу ймовірностей здійснюють у три етапи: висунення гіпотези щодо сім'ї розподілів, яка буде наближати дані спостережень, визначення параметрів розподілу і перевірка правильності гіпотези про характер розподілу.

Важливим інструментом визначення сім'ї розподілів є гістограма. Для створення гістограми розбиваємо область



даних спостережень на  $k$  півінтервалів  $[b_0, b_1), [b_1, b_2), \dots, [b_{k-1}, b_k)$  однакової довжини. Нехай  $n_j$  — кількість тих величин  $x_i$ , які входять в  $j$ -й інтервал  $[b_{j-1}, b_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Гістограма складається з  $k$  стовпчиків, висота яких визначається величинами  $n_j$ . Вибирають той теоретичний розподіл, графік функції щільності якого найбільше нагадує гістограму.

Число  $k$  можна вибирати за формулою  $k = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ , де квадратні дужки позначають цілу частину числа, проте це правило не завжди гарантує оптимальність гістограми.

Крім гістограми, використовують інші способи вибору сім'ї розподілів.

Головним методом, який дозволяє визначити параметри розподілу, є метод максимальної правдоподібності. Цей метод передбачає складання функції правдоподібності  $L(\theta) = f_\theta(x_1)f_\theta(x_2)\dots f_\theta(x_n)$ , де  $f_\theta(x)$  — функція щільності неперервного розподілу або імовірність події дискретного розподілу,  $\theta$  — скалярний чи векторний невідомий параметр, а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — дані спостережень. Функція правдоподібності досліджується на максимум. Значення параметра  $\theta$ , який надає максимального значення функції правдоподібності, визначає параметри розподілу.

Для перевірки гіпотези про придатність підбраного теоретичного розподілу ймовірностей для опису даних спостережень можна використовувати такі графічні процедури, як побудову графіка функції щільності розподілу ймовірностей поверх гістограми для їхнього порівняння, частотне порівняння, аналіз графіка відмінностей між теоретичною і емпіричною функціями розподілу, а також перевірку гіпотези з допомогою статистичного критерію  $\chi^2$ .

Для застосування критерію  $\chi^2$  треба спочатку розбити всю область розподілу на  $k$  суміжних (необов'язково однакових) півінтервалів  $[a_0, a_1), [a_1, a_2), \dots, [a_{k-1}, a_k)$ . Нехай  $N_j$  — кількість величин  $x_i$  в  $j$ -му півінтервалі  $[a_{j-1}, a_j)$ . Обчислюємо очікувану частку  $p_j$  тих величин  $x_i$ , які потрапляють в  $j$ -й

півінтервал. Для неперервних і дискретних даних відповідно

$$p_j = \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x) dx = F(a_j) - F(a_{j-1}), \quad p_j = \sum_{a_{j-1} \leq x_i < a_j} p(x_i),$$

де  $f(x)$  — щільність вибраного розподілу,  $p(x)$  — імовірність вибраного розподілу, а  $F(x)$  — відповідна функція розподілу. Далі обчислюємо

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j}, \quad n = \sum_{j=1}^k N_j, \quad (9.3)$$

і порівнюємо його з  $\chi_{k-1, \alpha}^2$  або  $\chi_{k-m-1, \alpha}^2$  — теоретичним (табличним) значенням критерію, де  $\alpha$  — рівень значущості,  $m$  — кількість параметрів розподілу, які визначались.

Якщо  $\chi^2 > \chi_{k-1, \alpha}^2$ , то вибраний розподіл не підходить для моделювання даних спостережень при заданому рівні значущості  $\alpha$ . Якщо  $\chi^2 < \chi_{k-m-1, \alpha}^2$ , то підбраний розподіл можна використовувати для моделювання даних спостережень. Якщо  $\chi_{k-m-1, \alpha}^2 < \chi^2 < \chi_{k-1, \alpha}^2$ , то маємо сумнівний випадок, коли можна як прийняти, так і відкинути початкову гіпотезу про придатність знайденого розподілу.

Якщо не відомі дані спостережень за випадковою величиною, але відомий проміжок  $[a, b]$ , якому вона належить, її найімовірніше значення (мода)  $c$  і середнє значення  $\mu$ , то часто вдається підбрати бета-розподіл на проміжку  $[a, b]$ , який моделюватиме цю випадкову величину. Параметри бета-розподілу у цьому випадку визначаються за формулами

$$\alpha_1 = \frac{\mu - a}{b - a} \cdot \frac{2c - a - b}{c - \mu}, \quad \alpha_2 = \frac{b - \mu}{b - a} \cdot \frac{2c - a - b}{c - \mu}, \quad (9.4)$$

причому мають виконуватись нерівності  $\alpha_1 > 1$  і  $\alpha_2 > 1$ . Якщо при обчисленні за формулами (9.4) хоча б одне з чисел  $\alpha_1$  чи

$\alpha_2$  виявляється меншим або рівним одиниці, то числа  $\mu$  і  $c$  неправильно оцінені або бета-розподіл неможливо використовувати для моделювання даної випадкової величини.

**Рекомендована література:** [5, с. 383–452], [9, с. 296–348].

### *Розв'язування типових вправ і задач*

**Приклад 9.1.** З допомогою діаграми розкиду перевірити на незалежність вибірку:  $-0,1824; -0,01079; 0,9981; 0,5227; -0,2657; 0,4019; 0,2828; 1,454; 0,5447; 1,124; -0,04849; -0,1606; 0,01237; -0,1720; 0,1703; 0,3347; -0,03626; 0,2109; 0,4173; 0,7286; -0,1929; -0,2704; 0,4542; -0,1968; 0,4555; 0,9337; 0,04769; -0,3455; 0,3980; 0,3663$ .

**Розв'язання.** Діаграму розкиду для цієї вибірки зображено на рис. 9.1. З діаграми робимо висновок про незалежність вибірки. ■

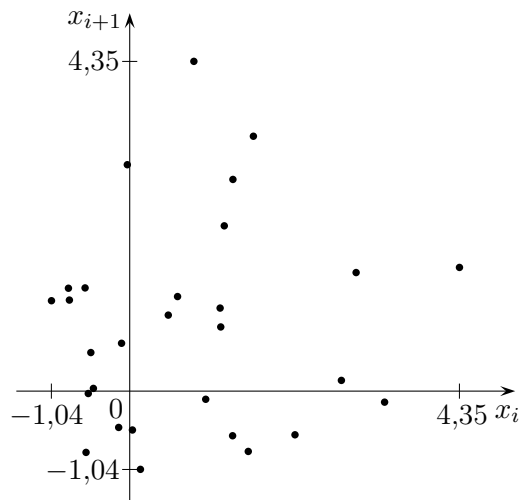


Рис. 9.1.

**Приклад 9.2.** З допомогою діаграми розкиду перевірити на незалежність вибірку:  $0; 3,03; 3,1; 3,55; 2,5; 3,56; 4,39; 5,43$ ;

5,93; 5,44; 0,8; 0,01; 0,77; 0,56; 0; 1,2; 1,39; 0,92; 0,13; 0; 0,21;  
0,52; 0,62; 0,25; 0; 0; 0; 0,38; 0,53; 0; 0,16; 0; 0; 1,48; 2,7; 1,3;  
2,19; 0,88; 0; 1,09.

**Розв'язання.** Діаграму розкиду для цієї вибірки зображено на рис. 9.2. Оскільки більшість точок зосереджено приблизно вздовж відрізка прямої, дана вибірка є залежною. ■

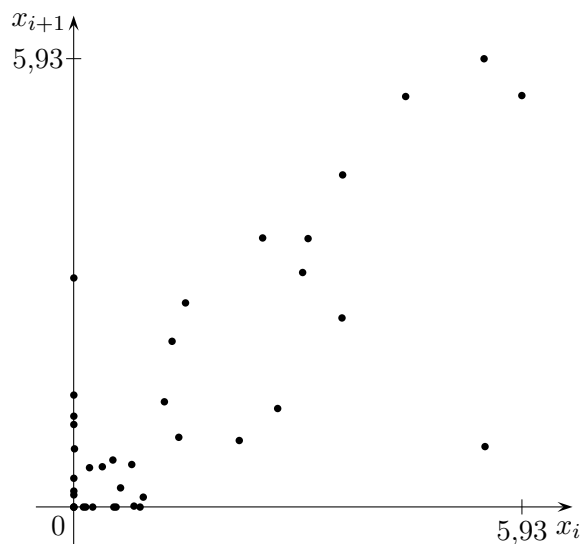


Рис. 9.2.

**Приклад 9.3.** З допомогою кореляційного графіка перевірити на незалежність вибірку:  $-0,1824$ ;  $-0,01079$ ;  $0,9981$ ;  $0,5227$ ;  $-0,2657$ ;  $0,4019$ ;  $0,2828$ ;  $1,454$ ;  $0,5447$ ;  $1,124$ ;  $-0,04849$ ;  $-0,1606$ ;  $0,01237$ ;  $-0,1720$ ;  $0,1703$ ;  $0,3347$ ;  $-0,03626$ ;  $0,2109$ ;  $0,4173$ ;  $0,7286$ ;  $-0,1929$ ;  $-0,2704$ ;  $0,4542$ ;  $-0,1968$ ;  $0,4555$ ;  $0,9337$ ;  $0,04769$ ;  $-0,3455$ ;  $0,3980$ ;  $0,3663$ .

**Розв'язання.** Обчислюємо середнє арифметичне і дисперсію вибірки за формулами (9.2), а вибіркoву кореляцію за формулами (9.1). Отримані числові значення наведені в наступній таблиці.

$\bar{x}$	0,2659	$\rho_3$	-0,1198	$\rho_7$	0,0481	$\rho_{11}$	-0,0028
$D$	0,2058	$\rho_4$	-0,0901	$\rho_8$	-0,2532	$\rho_{12}$	0,0083
$\rho_1$	0,0795	$\rho_5$	-0,0649	$\rho_9$	-0,1863	$\rho_{13}$	-0,072
$\rho_2$	-0,1362	$\rho_6$	0,0612	$\rho_{10}$	0,2701	$\rho_{14}$	-0,3784

На рис. 9.3 побудовано кореляційний графік. Оскільки мінімальне значення вибіркової кореляції дорівнює  $-0,3784$ , максимальне —  $0,2701$ , а точки розкидано на графіку випадковим чином, то цю вибірку можна вважати незалежною. ■

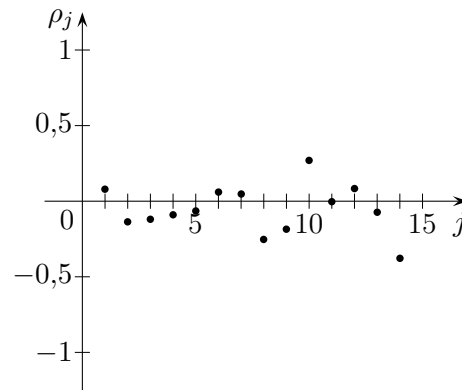


Рис. 9.3.

**Приклад 9.4.** З допомогою кореляційного графіка перевірити на незалежність вибірку: 0; 3,03; 3,1; 3,55; 2,5; 3,56; 4,39; 5,43; 5,93; 5,44; 0,8; 0,01; 0,77; 0,56; 0; 1,2; 1,39; 0,92; 0,13; 0; 0,21; 0,52; 0,62; 0,25; 0; 0; 0; 0,38; 0,53; 0; 0,16; 0; 0; 1,48; 2,7; 1,3; 2,19; 0,88; 0; 1,09.

**Розв'язання.** На рис. 9.4 наведено кореляційний графік. Оскільки мінімальне значення вибіркової кореляції дорівнює  $-0,64$ , а максимальне —  $0,77$ , то ця вибірка є залежною. ■

**Приклад 9.5.** Визначити сім'ю розподілів, якщо дані спостережень мають вигляд: 0,626; 1,21; 7,53; 1,74; 0,695; 5,38; 0,750; 0,584; 3,17; 1,50; 0,969; 1,92; 1,16; 0,150; 0,491; 2,09; 3,44; 0,132; 0,234; 0,969.

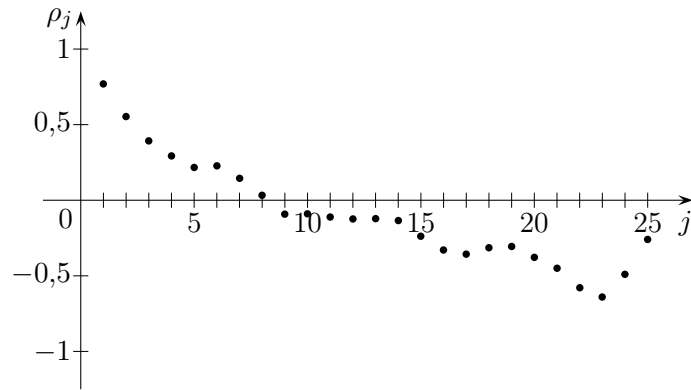


Рис. 9.4.

**Розв'язання.** Кількість чисел у вибірці  $n = 20$ , причому випадкова величина є неперервною. Кількість стовпчиків у гістограмі знаходимо за формулою  $k = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ , отже,  $k = 5$ . Оскільки мінімальне значення у вибірці  $0,15$ , а максимальне —  $7,53$ , то гістограму потрібно будувати на проміжку  $[0,1; 7,6]$  (проміжок трохи розширено для зручності). Розіб'ємо проміжок  $[0,1; 7,6]$  на п'ять однакових частин (шириною  $1,5$ ), обчислимо кількість чисел, які потрапили в кожен частину, а результати наведемо в наступній таблиці.

$[b_{j-1}; b_j)$	$[0,1; 1,6)$	$[1,6; 3,1)$	$[3,1; 4,6)$	$[4,6; 6,1)$	$[6,1; 7,6]$
$n_j$	13	3	2	1	1

Гістограму (з різним масштабом по осі абсцис і осі ординат) наведено на рис. 9.5. Такій гістограмі можуть відповідати експоненціальний, логнормальний, гамма-розподіл, розподіл Вейбулла. Оскільки у проміжок  $[0; 0,8)$  — першу половину проміжку  $[0; 1,6)$  — потрапляє вісім чисел, тобто більшість чисел з першого проміжку  $[0,1; 1,6)$ , то є підстави вважати, що найбільше підходить експоненціальний закон розподілу.

Можна додатково обчислити коефіцієнт варіації  $cv \approx 1,1$  і показник асиметрії  $\nu \approx 1,9$ . Вони приблизно дорівнюють значенням 1 і 2, відповідним експоненціальному закону розподі-

лу. Отже, є підстави вважати, що найкращим наближенням для даних спостережень є експоненціальний розподіл. ■

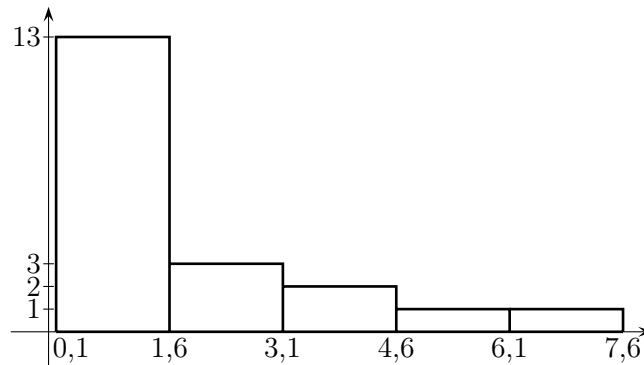


Рис. 9.5.

**Приклад 9.6.** Визначити методом максимальної правдоподібності параметр експоненціального розподілу для даних спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Розв'язання.** Для експоненціального розподілу функція щільності  $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  для  $x \geq 0$ . Тому функція правдоподібності для даних спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  набуває вигляду:

$$L(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda x_2} \cdot \dots \cdot \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Зручніше буде досліджувати на екстремум логарифм функції правдоподібності

$$M(\lambda) = \ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

З необхідної умови екстремуму маємо:

$$\frac{dM}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}},$$

де  $\bar{x}$  — середнє арифметичне даних спостережень.

Перевіримо тепер достатні умови екстремуму. Оскільки

$$\frac{d^2 M}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

для всіх  $\lambda \neq 0$ , то значення

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad (9.5)$$

справді максимізує функцію максимальної правдоподібності і є шуканим параметром експоненціального розподілу. ■

**Приклад 9.7.** Визначити методом максимальної правдоподібності параметри нормального розподілу для даних спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Розв'язання.** Для нормального розподілу функція щільності

$$f_{(\mu, \sigma)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Тому функція правдоподібності для даних спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  має вигляд:

$$L(\mu, \sigma) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}.$$

Тоді

$$M(\mu, \sigma) = \ln L(\mu, \sigma) = -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

З необхідних умов екстремуму для функції двох змінних маємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \\ \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = s, \end{cases}$$



де  $\bar{x}$  — середнє арифметичне даних спостережень, а  $s$  — середньоквадратичне відхилення даних спостережень.

Перевіримо тепер достатні умови екстремуму:

$$a_{11} = \left. \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} \right|_{\substack{\mu=\bar{x} \\ \sigma=s}} = -\frac{n}{s^2} < 0,$$

$$a_{12} = \left. \frac{\partial^2 M}{\partial \sigma \partial \mu} \right|_{\substack{\mu=\bar{x} \\ \sigma=s}} = -\frac{2}{s^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0,$$

$$a_{22} = \left. \frac{\partial^2 M}{\partial \sigma^2} \right|_{\substack{\mu=\bar{x} \\ \sigma=s}} = \frac{n}{s^2} - \frac{3}{s^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = -\frac{2n}{s^2},$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{2n^2}{s^4} > 0.$$

Отже,

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = s$$

надають максимуму функції правдоподібності і є шуканими параметрами нормального розподілу. ■

**Приклад 9.8.** Визначити розподіл, якщо дані спостережень мають вигляд: 0,626; 1,21; 7,53; 1,74; 0,695; 5,38; 0,750; 0,584; 3,17; 1,50; 0,969; 1,92; 1,16; 0,150; 0,491; 2,09; 3,44; 0,132; 0,234; 0,969.

**Розв'язання.** У прикладі 9.5 встановлено, що для моделювання цих даних спостережень найбільше підходить експоненціальний розподіл. Параметр  $\lambda$  експоненціального розподілу для цих даних спостережень згідно з формулою (9.5), виведеною методом максимальної правдоподібності у прикладі 9.6, наближено дорівнює 0,5757. ■

**Приклад 9.9.** З допомогою графіка функції щільності поверх гістограми перевірити гіпотезу про придатність екс-

поненціального розподілу для моделювання таких даних спостережень: 0,626; 1,21; 7,53; 1,74; 0,695; 5,38; 0,750; 0,584; 3,17; 1,50; 0,969; 1,92; 1,16; 0,150; 0,491; 2,09; 3,44; 0,132; 0,234; 0,969.

**Розв'язання.** Параметр  $\lambda$  експоненціального розподілу для цих даних спостережень згідно з формулою (9.5), виведеною методом максимальної правдоподібності, наближено дорівнює 0,5757 (приклад 9.8). Гістограма з п'ятьма стовпцями для заданих даних спостережень була побудована у прикладі 9.5 (рис. 9.5). Ширина кожного зі стовпців цієї гістограми дорівнює 1,5. Для побудови графіка функції щільності поверх гістограми скористаємось математичним пакетом Maple (про роботу з пакетом Maple див., наприклад, у [8]):

```
> with(stats):  
> p1:=statplots[histogram]([0.626,1.21,7.53,1.74,  
  0.695,5.38,0.750,0.584,3.17,1.50,0.969,1.92,1.16,  
  0.150,0.491,2.09,3.44,0.132,0.234,0.969],area=1):  
> p2:=plot(1.5*statevalf[pdf,exponential[0.5757]](x),  
  x=0..7.8, color=black, thickness=3):  
> plots[display]([p1,p2]);
```

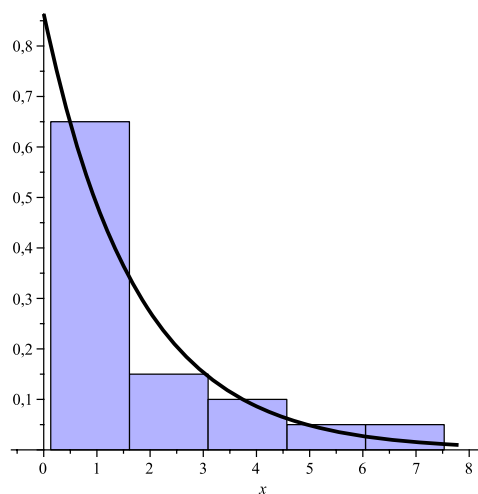


Рис. 9.6.

На рис. 9.6 поверх гістограми побудовано графік функції щільності, помноженої на 1,5 — ширину стовпця гістограми. Оскільки графік функції щільності приблизно відповідає гістограмі, то можна вважати, що експоненціальний розподіл достатньо добре наближає дані спостережень. ■

**Приклад 9.10.** З допомогою частотного порівняння перевірити гіпотезу про придатність експоненціального розподілу для моделювання даних спостережень з попереднього прикладу: 0,626; 1,21; 7,53; 1,74; 0,695; 5,38; 0,750; 0,584; 3,17; 1,50; 0,969; 1,92; 1,16; 0,150; 0,491; 2,09; 3,44; 0,132; 0,234; 0,969.

**Розв'язання.** Параметр  $\lambda$  експоненціального розподілу для цих даних спостережень був обчислений у прикладі 9.8, він наближено дорівнює 0,5757. Функція розподілу для експоненціального закону розподілу подається формулою  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  для  $x \geq 0$ . Як і в прикладі 9.5, розіб'ємо проміжок  $[0, 1; 7, 6]$ , який містить дані спостережень, на п'ять однакових частин (довжиною 1,5), обчислимо величини  $h_j$  — частки чисел, які потрапляють в  $j$ -й проміжок, і величини  $r_j = F(b_j) - F(b_{j-1})$  для  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ , а результати після заокруглень наведемо в наступній таблиці.

$j$	1	2	3	4	5
$[b_{j-1}; b_j)$	$[0, 1; 1, 6)$	$[1, 6; 3, 1)$	$[3, 1; 4, 6)$	$[4, 6; 6, 1)$	$[6, 1; 7, 6]$
$h_j$	0,65	0,15	0,1	0,05	0,05
$r_j$	0,546	0,2302	0,0971	0,0409	0,0173

Пари стовпців для частотного порівняння, побудовані з допомогою програми Excel, наведені на рис. 9.7. Оскільки стовпці у парах є майже однаковими, то можна вважати, що експоненціальний розподіл достатньо добре наближає дані спостережень. ■

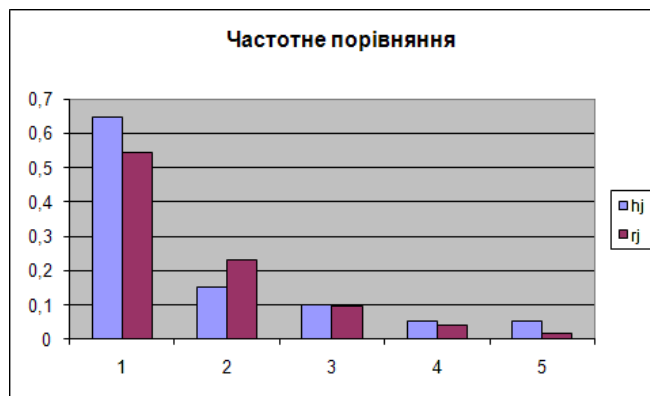


Рис. 9.7.

**Приклад 9.11.** З допомогою графіка відмінностей між функціями розподілу перевірити гіпотезу про придатність експоненціального розподілу для моделювання даних спостережень з попереднього прикладу: 0,626; 1,21; 7,53; 1,74; 0,695; 5,38; 0,750; 0,584; 3,17; 1,50; 0,969; 1,92; 1,16; 0,150; 0,491; 2,09; 3,44; 0,132; 0,234; 0,969.

**Розв'язання.** Параметр  $\lambda$  експоненціального розподілу для цих даних спостережень був обчислений у прикладі 9.8, він наближено дорівнює 0,5757. Побудуємо графік різниці емпіричної і теоретичної функцій розподілу з допомогою математичного пакета Maple:

```
> with(stats):
> ds:=transform[statsort]([0.626,1.21,7.53,1.74,
  0.695,5.38,0.750,0.584,3.17,1.50,0.969,1.92,1.16,
  0.150,0.491,2.09,3.44,0.132,0.234,0.969]):
> FT:=x->statevalf[cdf,exponential[0.5757]](x):
> FE:=proc(x::numeric)
  local i,n:
  n:=nops(ds):
  if x<ds[1] then return 0 end if:
  if x>=ds[n] then return 1 end if:
```

```
for i from 1 to n-1 do
  if (x>=ds[i]) and (x<ds[i+1]) then
    return (i-1)/(n-1)+(x-ds[i])/((n-1)*(ds[i+1]-
      ds[i])) end if
  end do
end proc:
> for j from 0 to 10 by 0.01 do
  if j=0 then sp:=[j,FE(j)-FT(j)]
  else sp:=sp,[j,FE(j)-FT(j)] end if
end do:
> plot([sp],color=black,labels=[x,F[e](x)-F[t](x)],
  labeldirections=[horizontal,vertical]);
```

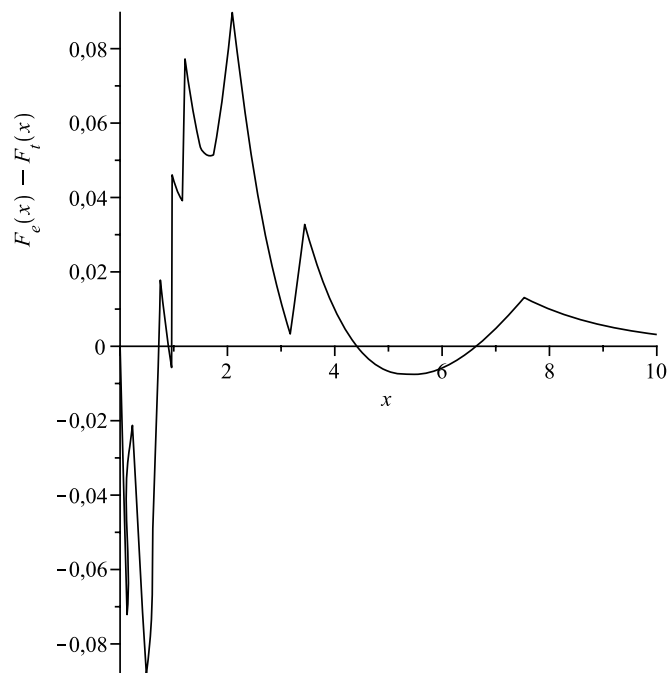


Рис. 9.8.

На рис. 9.8 зображено шуканий графік різниці емпіричної

і теоретичної функції розподілу. Для його побудови дані спостережень було відсортовано за зростанням, задано функцію  $FT(x)$  для обчислення значення теоретичної функції розподілу, створено процедуру  $FE(x)$  для обчислення значення емпіричної функції розподілу і протабульовано їхню різницю на проміжку  $[0, 10]$  з кроком 0,01. З графіка видно, що відхилення між емпіричною і теоретичною функціями розподілу для всіх значень  $x$  є невеликим (меншим від 0,1), тому ми можемо вважати, що експоненціальний розподіл достатньо добре наближає дані спостережень. Найбільша невідповідність спостерігається поблизу лівого кінця області даних спостережень. ■

**Приклад 9.12.** З допомогою критерію  $\chi^2$  перевірити гіпотезу про придатність експоненціального розподілу для моделювання даних спостережень з попереднього прикладу: 0,626; 1,21; 7,53; 1,74; 0,695; 5,38; 0,750; 0,584; 3,17; 1,50; 0,969; 1,92; 1,16; 0,150; 0,491; 2,09; 3,44; 0,132; 0,234; 0,969. Рівень значущості  $\alpha = 0,01$ .

**Розв'язання.** Параметр  $\lambda$  експоненціального розподілу для цих даних спостережень був обчислений вище, він наближено дорівнює 0,5757. З умов  $np_j \geq 5$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $p_1 = p_2 = \dots = p_k$  для  $n = 20$  впливає, що число  $k$  має бути не більшим від 4. Тому візьмемо  $k = 4$ . З допомогою математичного пакета підберемо числа  $a_j$  так, щоб імовірності  $p_j$  були приблизно рівними, і заповнимо таблицю:

$j$	1	2	3	4
$[a_{j-1}; a_j)$	$[0; 0,5)$	$[0,5; 1,2)$	$[1,2; 2,4)$	$[2,4; \infty)$
$p_j$	0,2501	0,2487	0,25	0,2512
$N_j$	4	7	5	4

За формулою (9.3) обчислюємо  $\chi^2 \approx 1,2$ . Оскільки  $\chi_{2,0,01}^2 = 9,2$ , то  $\chi^2 < \chi_{2,0,01}^2$  і гіпотезу про придатність експоненціального розподілу для моделювання даних спостережень можна прийняти. ■

**Приклад 9.13.** Про випадкову величину відомо лише те, що вона може набувати значень з проміжку  $[2, 5]$  з середнім значенням 4 і модою 4,4. Знайти параметри розподілу для моделювання цієї випадкової величини.

**Розв'язання.** Знайдемо параметри бета-розподілу для проміжку  $[2, 5]$  за формулами (9.4):  $\alpha_1 = 3$ ,  $\alpha_2 = 1,5$ . Отримані числа є більшими від одиниці, тому вони є справжніми параметрами бета-розподілу для проміжку  $[2, 5]$ . ■

### *Вправи*

1. З допомогою діаграми розкиду перевірте на незалежність вибірку: 1,87; 2,13; 2,33; 2,37; 0,15; 0,64; 0,13; 0,86; 1,79; 0,82; 0,13; 2,05,  $-0,77$ ; 0,95; 0,24.

2. З допомогою діаграми розкиду перевірте на незалежність вибірку:  $-1,82$ ; 1,52; 0,56;  $-1,97$ ; 1,1; 1,08;  $-1,97$ ; 0,59; 1,51;  $-1,82$ ; 0,03; 1,82;  $-1,51$ ;  $-0,53$ ; 1,99.

3. З допомогою кореляційного графіка перевірте на незалежність вибірку з вправи 1.

4. З допомогою кореляційного графіка перевірте на незалежність вибірку з вправи 2.

5. З допомогою діаграми розкиду перевірте на незалежність вибірку:  $-0,69$ ; 1,22; 0,24; 0,94; 0,1; 2,05; 1,23; 0,94;  $-0,93$ ;  $-0,76$ ;  $-0,23$ ;  $-0,58$ ; 2,26; 2,55; 1,32.

6. З допомогою діаграми розкиду перевірте на незалежність вибірку: 1,98;  $-1,92$ ; 1,83;  $-1,68$ ; 1,53;  $-1,31$ ; 1,11;  $-0,83$ ; 0,61;  $-0,28$ ; 0,05; 0,29;  $-0,5$ ; 0,83;  $-1,01$ .

7. З допомогою кореляційного графіка перевірте на незалежність вибірку з вправи 5.

8. З допомогою кореляційного графіка перевірте на незалежність вибірку з вправи 6.

9. З допомогою діаграми розкиду перевірте на незалежність вибірку: 0,52; 0,35; 0,69; 0,73; 0,57; 0,93; 0,71; 0,90; 0,84;

1,23; 0,91; 0,92; 0,98; 0,95; 1,08; 0,99; 0,95; 1,14; 1,28; 0,98; 1,34; 1,30; 1,23; 1,48; 1,34; 1,45; 1,43; 1,38; 2,04; 1,97.

**10.** З допомогою діаграми розкиду перевірте на незалежність вибірку: 0,93; 0,73; 0,70; 1,52; 1,09; 2,26; 0,43; 0,99; 0,29; 1,16; 0,76; 1,93; 0,44; 1,09; 0,67; 1,17; 0,93; 0,55; 1,34; 0,76; 1,59; 1,47; 0,64; 0,87; 1,80; 1,59; 0,74; 2,26; 1,12; 0,95.

**11.** Методом максимальної правдоподібності знайдіть параметри логнормального розподілу.

**12.** Методом максимальної правдоподібності знайдіть параметри розподілу Вейбулла.

**13.** Методом максимальної правдоподібності знайдіть параметри біноміального розподілу.

**14.** Методом максимальної правдоподібності знайдіть параметри геометричного розподілу.

**15.** Визначте сім'ю розподілів, якщо дані спостережень мають вигляд: 0,16; 0,08; 0,07; 0,61; 0,26; 1,47; 0,014; 0,2; 0,004; 0,31; 0,09; 1,06; 0,015; 0,26; 0,06; 0,32; 0,16; 0,03; 0,45; 0,086.

**16.** Визначте параметри розподілу для даних спостережень з вправи 15.

**17.** З допомогою комп'ютера побудуйте поверх гістограми для даних спостережень з вправи 15 графік функції щільності розподілу, знайденого у вправі 16. Зробіть висновки.

**18.** З допомогою комп'ютера виконайте частотне порівняння для даних спостережень з вправи 15 і розподілу, знайденого у вправі 16. Зробіть висновки.

**19.** З допомогою комп'ютера побудуйте графік відмінностей між функціями розподілу для даних спостережень з вправи 15 і розподілу, знайденого у вправі 16. Зробіть висновки.

**20.** З допомогою критерію  $\chi^2$  перевірте гіпотезу про придатність розподілу, знайденого у вправі 16, для моделювання даних спостережень з вправи 15. Рівень значущості  $\alpha = 0,01$ .



**21.** Визначте сім'ю розподілів, якщо дані спостережень мають вигляд: 394, 206, 309, 149, 215, 96, 1557, 275, 207, 190, 510, 148, 134, 105, 37, 297, 81, 929, 147, 572.

**22.** Визначте параметри розподілу для даних спостережень з вправи 21.

**23.** З допомогою комп'ютера побудуйте поверх гістограми для даних спостережень з вправи 21 графік функції щільності розподілу, знайденого у вправі 22. Зробіть висновки.

**24.** З допомогою комп'ютера виконайте частотне порівняння для даних спостережень з вправи 21 і розподілу, знайденого у вправі 22. Зробіть висновки.

**25.** З допомогою комп'ютера побудуйте графік відмінностей між функціями розподілу для даних спостережень з вправи 21 і розподілу, знайденого у вправі 22. Зробіть висновки.

**26.** З допомогою критерію  $\chi^2$  перевірте гіпотезу про придатність розподілу, знайденого у вправі 22, для моделювання даних спостережень з вправи 21. Рівень значущості  $\alpha = 0,01$ .

**27.** Визначте сім'ю розподілів, якщо дані спостережень мають вигляд: 10,4; 10,6; 10,6; 10,1; 8,8; 8,7; 10,2; 10,5; 10,1; 12,3; 10,9; 9,0; 9,8; 8,4; 10,4; 9,6; 10,3; 11,2; 11,6; 9,7.

**28.** Визначте параметри розподілу для даних спостережень з вправи 27.

**29.** З допомогою комп'ютера побудуйте поверх гістограми для даних спостережень з вправи 27 графік функції щільності розподілу, знайденого у вправі 28. Зробіть висновки.

**30.** З допомогою комп'ютера виконайте частотне порівняння для даних спостережень з вправи 27 і розподілу, знайденого у вправі 28. Зробіть висновки.

**31.** З допомогою комп'ютера побудуйте графік відмінностей між функціями розподілу для даних спостережень з вправи 27 і розподілу, знайденого у вправі 28. Зробіть висновки.

**32.** З допомогою критерію  $\chi^2$  перевірте гіпотезу про придатність розподілу, знайденого у вправі 28, для моделювання даних спостережень з вправи 27. Рівень значущості  $\alpha = 0,01$ .

**33.** Визначте сім'ю розподілів, якщо дані спостережень мають вигляд: 29,0; 19,2; 23,8; 19,3; 26,5; 22,7; 25,5; 30,8; 21,5; 32,0; 14,4; 25,5; 15,8; 20,0; 26,2; 28,0; 19,8; 7,22; 24,7; 22,6.

**34.** Визначте параметри розподілу для даних спостережень з вправи 33.

**35.** Визначте сім'ю розподілів, якщо дані спостережень мають вигляд: 4,13; 4,35; 3,2; 4,55; 4,72; 4,67; 4,52; 3,73; 4,9; 4,76; 4,46; 4,92; 4,78; 4,8; 4,11; 4,24; 4,32; 3,45; 4,61; 1,74.

**36.** Визначте параметри розподілу для даних спостережень з вправи 35.

**37.** Про випадкову величину відомо лише те, що вона може набувати значень з проміжку  $[1, 5]$  з середнім значенням 2,5 і модою 2. Знайдіть параметри бета-розподілу для моделювання цієї випадкової величини.

**38.** Про випадкову величину відомо лише те, що вона може набувати значень з проміжку  $[3, 10]$  з середнім значенням 7 і модою 8. Знайдіть параметри бета-розподілу для моделювання цієї випадкової величини.

**39.** Про випадкову величину відомо лише те, що вона може набувати значень з проміжку  $[2, 12]$  з середнім значенням 7,5 і модою 8. Знайдіть параметри бета-розподілу для моделювання цієї випадкової величини.

**40.** Визначте сім'ю і параметри розподілу, якщо дані спостережень мають вигляд: 14,0; 13,8; 13,2; 14,2; 13,5; 14,3; 14,3; 13,3; 13,7; 14,5; 14,3; 13,5; 14,7; 14,0; 13,8; 13,3; 14,0; 13,9; 13,9; 13,7; 14,0; 14,1; 12,9; 12,5; 13,6. Крім того, відомо, що випадкова величина не може набувати значень, менших від 10.

**41.** Вхідний потік деталей на виробничу дільницю є стаціонарним пуассонівським з середнім значенням 3. Обробка деталей на виробничій дільниці здійснюється у два етапи. Під час

кожного етапу може оброблятися не більше 5 деталей одночасно. Час обробки деталей є випадковою величиною зі зміщеним двовимірним логнормальним законом розподілу з середнім значенням 1,9 і середньоквадратичним відхиленням 1,1 для першого етапу і з середнім значенням 2,4 і середньоквадратичним відхиленням 0,6 для другого етапу, коефіцієнт кореляції дорівнює 0,7, зміщення для першого етапу становить 1, а для другого етапу — 1,5.

Складіть модель на мові GPSS World для моделювання роботи виробничої дільниці. Для моделювання зміщеного двовимірного логнормального закону розподілу потрібно створити універсальну процедуру `lognormal2`.

Визначте середні тривалості обробки 1000 деталей на першому і на другому етапах роботи. Побудуйте і проаналізуйте графіки тривалостей обробки 20 деталей на першому і на другому етапах. Щоб можна було побачити взаємозв'язок, другий графік потрібно будувати з коефіцієнтом 0,5.

**42.** Час появи покупців у магазині з дев'ятої до дванадцятої години дня протягом десяти днів наведений нижче з точністю до однієї хвилини. Цей потік є ординарним і не має післядії. Знайдіть інтенсивність цього потоку як функцію часу.

1 день: 9:04, 9:11, 9:11, 9:13, 9:15, 9:16, 9:19, 9:19, 9:21, 9:22, 9:26, 9:26, 9:28, 9:30, 9:31, 9:33, 9:34, 9:41, 9:41, 9:43, 9:44, 9:51, 9:53, 9:54, 9:54, 9:59, 10:04, 10:04, 10:05, 10:13, 10:13, 10:15, 10:18, 10:19, 10:21, 10:21, 10:21, 10:21, 10:22, 10:25, 10:28, 10:40, 10:41, 10:41, 10:43, 10:45, 10:49, 11:04, 11:04, 11:06, 11:06, 11:07, 11:11, 11:12, 11:13, 11:15, 11:17, 11:20, 11:22, 11:22, 11:23, 11:24, 11:26, 11:28, 11:29, 11:30, 11:34, 11:36, 11:39, 11:40, 11:40, 11:43, 11:45, 11:47, 11:47, 11:48, 11:50, 11:50, 11:52, 11:59, 12:00.

2 день: 9:03, 9:04, 9:06, 9:08, 9:09, 9:11, 9:18, 9:20, 9:25, 9:26, 9:26, 9:27, 9:28, 9:30, 9:30, 9:30, 9:32, 9:33, 9:33, 9:34, 9:38, 9:42, 9:44, 9:45, 9:49, 9:52, 9:55, 9:56, 9:57, 9:57, 10:10, 10:10, 10:10, 10:13, 10:13, 10:13, 10:18, 10:20, 10:21, 10:23, 10:28, 10:30, 10:33,

10:34, 10:38, 10:39, 10:39, 10:39, 10:41, 10:42, 10:42, 10:43, 10:43, 10:45, 10:51, 10:54, 10:57, 10:57, 11:03, 11:03, 11:04, 11:04, 11:04, 11:05, 11:07, 11:08, 11:10, 11:13, 11:14, 11:16, 11:17, 11:17, 11:18, 11:18, 11:18, 11:18, 11:19, 11:20, 11:22, 11:22, 11:23, 11:24, 11:24, 11:25, 11:27, 11:37, 11:38, 11:38, 11:39, 11:43, 11:44, 11:44, 11:46, 11:47, 11:48, 11:49, 11:58, 11:58.

3 день: 9:02, 9:05, 9:13, 9:14, 9:14, 9:15, 9:21, 9:28, 9:29, 9:34, 9:36, 9:39, 9:40, 9:42, 9:43, 9:45, 9:46, 9:47, 9:47, 9:52, 9:53, 9:55, 9:59, 9:59, 10:00, 10:01, 10:04, 10:09, 10:11, 10:20, 10:20, 10:21, 10:21, 10:22, 10:24, 10:26, 10:30, 10:32, 10:34, 10:36, 10:40, 10:41, 10:42, 10:42, 10:44, 10:45, 10:45, 10:45, 10:52, 10:57, 10:58, 10:59, 11:01, 11:02, 11:02, 11:08, 11:09, 11:09, 11:10, 11:12, 11:13, 11:13, 11:14, 11:15, 11:15, 11:16, 11:17, 11:20, 11:21, 11:21, 11:22, 11:22, 11:23, 11:23, 11:24, 11:25, 11:29, 11:32, 11:33, 11:34, 11:36, 11:37, 11:38, 11:39, 11:40, 11:41, 11:41, 11:43, 11:47, 11:49, 11:51, 11:54, 11:55, 11:56, 11:59, 12:00.

4 день: 9:01, 9:02, 9:05, 9:06, 9:12, 9:13, 9:13, 9:13, 9:14, 9:16, 9:17, 9:22, 9:26, 9:28, 9:31, 9:31, 9:31, 9:33, 9:34, 9:36, 9:37, 9:37, 9:41, 9:44, 9:44, 9:46, 9:46, 9:48, 9:52, 9:56, 9:58, 10:00, 10:02, 10:02, 10:05, 10:08, 10:08, 10:09, 10:14, 10:18, 10:18, 10:20, 10:22, 10:23, 10:26, 10:28, 10:29, 10:32, 10:32, 10:32, 10:33, 10:33, 10:36, 10:40, 10:47, 10:48, 10:49, 10:50, 10:52, 10:56, 10:57, 10:57, 11:02, 11:02, 11:02, 11:04, 11:04, 11:05, 11:07, 11:07, 11:07, 11:08, 11:11, 11:13, 11:14, 11:16, 11:18, 11:19, 11:21, 11:21, 11:21, 11:22, 11:22, 11:24, 11:28, 11:31, 11:33, 11:34, 11:34, 11:36, 11:40, 11:41, 11:44, 11:46, 11:47, 11:48, 11:51, 11:53, 11:59.

5 день: 9:05, 9:06, 9:11, 9:17, 9:18, 9:20, 9:22, 9:22, 9:24, 9:28, 9:29, 9:34, 9:34, 9:35, 9:36, 9:39, 9:45, 9:45, 9:45, 9:49, 9:49, 9:50, 9:53, 9:56, 9:56, 9:58, 10:03, 10:14, 10:15, 10:17, 10:19, 10:22, 10:22, 10:23, 10:29, 10:31, 10:32, 10:38, 10:38, 10:39, 10:45, 10:46, 10:48, 10:50, 10:52, 10:52, 10:53, 10:53, 10:53, 10:54, 10:55, 10:55, 10:56, 10:58, 10:58, 11:00, 11:03, 11:05, 11:12, 11:13, 11:13, 11:14, 11:15, 11:18, 11:21, 11:25, 11:26, 11:27, 11:30, 11:31, 11:31, 11:35, 11:36, 11:39, 11:39, 11:43, 11:48, 11:49, 11:49, 11:50, 11:51, 11:52,

11:53, 11:55, 11:58.

6 день: 9:02, 9:05, 9:05, 9:07, 9:07, 9:09, 9:16, 9:16, 9:16, 9:24, 9:25, 9:29, 9:30, 9:31, 9:32, 9:32, 9:33, 9:34, 9:34, 9:39, 9:43, 9:44, 9:45, 9:48, 9:50, 9:51, 9:54, 9:56, 9:56, 10:00, 10:01, 10:07, 10:10, 10:16, 10:19, 10:23, 10:24, 10:26, 10:26, 10:27, 10:31, 10:31, 10:33, 10:34, 10:36, 10:40, 10:41, 10:42, 10:46, 10:47, 10:48, 10:50, 10:52, 10:56, 10:56, 10:57, 10:58, 10:59, 11:01, 11:01, 11:01, 11:05, 11:05, 11:07, 11:13, 11:17, 11:18, 11:20, 11:26, 11:26, 11:27, 11:27, 11:28, 11:29, 11:32, 11:33, 11:37, 11:39, 11:45, 11:46, 11:47, 11:50, 11:54, 11:55, 11:57, 12:00.

7 день: 9:00, 9:01, 9:09, 9:14, 9:18, 9:18, 9:20, 9:20, 9:26, 9:28, 9:28, 9:29, 9:36, 9:37, 9:39, 9:42, 9:54, 9:54, 9:57, 9:57, 9:58, 9:58, 10:03, 10:09, 10:10, 10:12, 10:13, 10:15, 10:18, 10:18, 10:19, 10:21, 10:26, 10:26, 10:27, 10:31, 10:33, 10:35, 10:36, 10:36, 10:37, 10:42, 10:44, 10:46, 10:48, 10:50, 10:51, 10:52, 10:54, 10:55, 10:56, 10:57, 10:57, 10:58, 10:59, 11:00, 11:00, 11:01, 11:01, 11:02, 11:03, 11:04, 11:05, 11:07, 11:07, 11:08, 11:10, 11:10, 11:10, 11:11, 11:15, 11:15, 11:19, 11:19, 11:21, 11:21, 11:26, 11:27, 11:27, 11:36, 11:36, 11:36, 11:38, 11:39, 11:39, 11:40, 11:41, 11:45, 11:46, 11:51, 11:52, 11:52, 11:54, 11:58, 11:59.

8 день: 9:06, 9:06, 9:08, 9:09, 9:14, 9:15, 9:33, 9:34, 9:34, 9:35, 9:36, 9:37, 9:40, 9:43, 9:44, 9:46, 9:47, 9:48, 9:49, 9:50, 9:51, 9:52, 9:54, 9:55, 9:56, 9:58, 10:00, 10:01, 10:02, 10:02, 10:06, 10:08, 10:09, 10:09, 10:12, 10:17, 10:18, 10:25, 10:25, 10:27, 10:27, 10:30, 10:31, 10:31, 10:34, 10:34, 10:37, 10:39, 10:41, 10:42, 10:44, 10:45, 10:47, 10:55, 10:56, 10:56, 10:57, 10:57, 11:06, 11:14, 11:15, 11:15, 11:16, 11:17, 11:17, 11:18, 11:18, 11:19, 11:22, 11:24, 11:25, 11:26, 11:26, 11:27, 11:28, 11:29, 11:34, 11:36, 11:38, 11:43, 11:45, 11:46, 11:47, 11:47, 11:50, 11:52, 11:55, 11:56, 11:58, 11:58.

9 день: 9:05, 9:05, 9:05, 9:06, 9:10, 9:15, 9:17, 9:17, 9:18, 9:19, 9:21, 9:26, 9:26, 9:35, 9:36, 9:41, 9:42, 9:43, 9:45, 9:46, 9:48, 9:48, 9:49, 9:49, 9:50, 9:50, 9:51, 9:52, 9:53, 9:54, 9:54, 9:56, 9:58, 10:04, 10:09, 10:19, 10:21, 10:22, 10:23, 10:34, 10:34, 10:35, 10:36, 10:37, 10:38, 10:42, 10:47, 10:47, 10:47, 10:48, 10:48, 10:49, 10:50, 10:51,

10:51, 10:51, 10:52, 10:53, 10:55, 10:57, 10:58, 10:59, 10:59, 11:01, 11:02, 11:02, 11:04, 11:06, 11:09, 11:10, 11:17, 11:18, 11:19, 11:20, 11:22, 11:22, 11:22, 11:30, 11:33, 11:35, 11:36, 11:36, 11:48, 11:53, 11:54, 11:56, 11:56, 11:56, 11:57.

10 день: 9:01, 9:02, 9:04, 9:07, 9:07, 9:11, 9:13, 9:18, 9:18, 9:19, 9:20, 9:22, 9:28, 9:30, 9:36, 9:38, 9:39, 9:42, 9:43, 9:48, 9:50, 9:54, 9:55, 10:02, 10:04, 10:10, 10:10, 10:11, 10:13, 10:19, 10:28, 10:28, 10:28, 10:29, 10:36, 10:36, 10:37, 10:39, 10:40, 10:41, 10:41, 10:44, 10:44, 10:46, 10:49, 10:55, 10:57, 10:58, 11:00, 11:03, 11:07, 11:08, 11:09, 11:10, 11:10, 11:11, 11:11, 11:13, 11:13, 11:19, 11:20, 11:21, 11:24, 11:25, 11:25, 11:26, 11:27, 11:27, 11:32, 11:32, 11:34, 11:34, 11:38, 11:39, 11:45, 11:45, 11:46, 11:47, 11:52, 11:57.

### *Критичні точки розподілу $\chi^2$*

Для рівня значущості  $\alpha = 0,01$  має місце наступна таблиця значень критичних точок розподілу  $\chi^2$ :

Кількість ступенів свободи, $k$	$\chi_{k,\alpha}^2$	Кількість ступенів свободи, $k$	$\chi_{k,\alpha}^2$
1	6,6	11	24,7
2	9,2	12	26,2
3	11,3	13	27,7
4	13,3	14	29,1
5	15,1	15	30,6
6	16,8	16	32,0
7	18,5	17	33,4
8	20,1	18	34,8
9	21,7	19	36,2
10	23,2	20	37,6

## Тема 10. Планування експерименту

### *Короткі теоретичні відомості*

Часто моделювання здійснюють для визначення ймовірності  $p$  настання певної події. Для оцінювання цієї ймовірності з наперед заданою точністю потрібно здійснити достатню кількість реалізацій процесу моделювання. Ця кількість обчислюється за формулою

$$n = \left[ \left( \Phi^{-1} \left( \frac{1 + \gamma}{2} \right) \right)^2 \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \right] + 1, \quad (10.1)$$

де квадратні дужки позначають цілу частину числа,  $\varepsilon$  — оцінка похибки,  $\gamma$  — рівень надійності оцінки,  $\Phi^{-1}(x)$  — обернена функція до функції стандартного нормального розподілу  $\Phi(x)$ .

Оскільки ймовірність  $p$  заздалегідь невідома, то спочатку здійснюють близько ста випробувань, по ним наближено оцінюють ймовірність  $p$  за формулою

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

і підставляють у формулу (10.1) для визначення числа  $n$  — кількості реалізацій процесу моделювання.

Кількість реалізацій процесу моделювання для оцінювання середнього значення знаходять за формулою

$$n = \left[ \left( \Phi^{-1} \left( \frac{1 + \gamma}{2} \right) \right)^2 \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right] + 1, \quad (10.2)$$

де  $\sigma^2$  — дисперсія випадкової величини. Оскільки дисперсія заздалегідь невідома, то спочатку здійснюють близько ста випробувань, по яким наближено оцінюють дисперсію  $\sigma^2$  і підставляють її у формулу (10.2) для визначення числа  $n$  — кількості реалізацій процесу моделювання.

*Рекомендована література:* [5, с. 571–600], [9, с. 357–364], [18, с. 151–156, 248–255].

### *Розв'язування типових вправ і задач*

**Приклад 10.1.** Визначити потрібну кількість реалізацій процесу моделювання для обчислення ймовірності настання події з точністю  $\varepsilon = 0,005$  при рівні надійності  $\gamma = 0,99$ , якщо ймовірність  $p \approx 0,7$ .

*Розв'язання.* Оскільки

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = \Phi^{-1}(0,995) \approx 2,58,$$

то за формулою (10.1) кількість реалізацій

$$n = \left[ 2,58^2 \cdot \frac{0,7 \cdot (1 - 0,7)}{0,005^2} \right] + 1 = 55\,914. \blacksquare$$

**Приклад 10.2.** Визначити потрібну кількість реалізацій процесу моделювання для обчислення середнього значення з точністю  $\varepsilon = 0,001$  при рівні надійності  $\gamma = 0,98$ , якщо дисперсія  $\sigma^2 \approx 1,2$ .

*Розв'язання.* Оскільки

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = \Phi^{-1}(0,99) \approx 2,33,$$

то за формулою (10.2) кількість реалізацій

$$n = \left[ \frac{2,33^2 \cdot 1,2}{0,001^2} \right] + 1 = 6\,514\,681. \blacksquare$$

### *Вправи*

1. Визначте потрібну кількість реалізацій процесу моделювання для обчислення ймовірності настання події з точністю  $\varepsilon = 0,002$  при рівні надійності  $\gamma = 0,95$ , якщо ймовірність  $p \approx 0,4$ .



**2.** Визначте потрібну кількість реалізацій процесу моделювання для обчислення ймовірності настання події з точністю  $\varepsilon = 0,001$  при рівні надійності  $\gamma = 0,98$ , якщо ймовірність  $p \approx 0,7$ .

**3.** Визначте потрібну кількість реалізацій процесу моделювання для обчислення ймовірності настання події з точністю  $\varepsilon = 0,003$  при рівні надійності  $\gamma = 0,93$ , якщо ймовірність  $p \approx 0,3$ .

**4.** Визначте потрібну кількість реалізацій процесу моделювання для обчислення середнього значення з точністю  $\varepsilon = 0,001$  при рівні надійності  $\gamma = 0,99$ , якщо дисперсія  $\sigma^2 \approx 2,5$ .

**5.** Визначте потрібну кількість реалізацій процесу моделювання для обчислення середнього значення з точністю  $\varepsilon = 0,0005$  при рівні надійності  $\gamma = 0,995$ , якщо дисперсія  $\sigma^2 \approx 3,2$ .

**6.** Визначте потрібну кількість реалізацій процесу моделювання для обчислення середнього значення з точністю  $\varepsilon = 0,003$  при рівні надійності  $\gamma = 0,96$ , якщо дисперсія  $\sigma^2 \approx 1,9$ .

Наближені значення оберненої функції до функції стандартного нормального розподілу для типових значень рівня надійності оцінки наведені в таблиці.

$x$	$\Phi^{-1}(x)$	$x$	$\Phi^{-1}(x)$
0,95	1,645	0,985	2,17
0,96	1,751	0,99	2,326
0,965	1,812	0,995	2,576
0,97	1,881	0,9975	2,807
0,975	1,96	0,9995	3,291
0,98	2,054	0,99995	3,891

**Список рекомендованої літератури**

1. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 208 с.
2. Введение в математическое моделирование / Под ред. П. В. Трусова. — М. : Логос, 2005. — 440 с.
3. Жерновий Ю. В. Імітаційне моделювання систем масового обслуговування : Практикум. — Львів : Вид. центр ЛНУ ім. І. Франка, 2007. — 307 с.
4. Жерновий Ю. В. Марковські моделі масового обслуговування : Тексти лекцій. — Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. — 154 с.
5. Лоу А. М., Кельтон В. Д. Имитационное моделирование. — СПб. : Питер, 2004. — 847 с.
6. Махней О. В. Лабораторний практикум з імітаційного моделювання у GPSS: методичні рекомендації до проведення лабораторних занять. — Івано-Франківськ : ВДВ ЦІТ ПНУ, 2010. — 36 с.
7. Махней О. В. Лабораторний практикум з імітаційного моделювання у GPSS: методичні рекомендації до проведення лабораторних занять. — Частина 2. — Івано-Франківськ : Голіней, 2012. — 32 с.
8. Махней О. В., Гой Т. П. Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. — Івано-Франківськ : Сімик, 2013. — 304 с.
9. Махней О. В. Математичне моделювання. — Івано-Франківськ : Супрун В. П., 2015. — 372 с.
10. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем : пер. с англ. — М. : Мир, 1984. — 264 с.
11. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений. — Минск : Выш. школа, 1973. — 560 с.

12. Руководство пользователя по GPSS World / Пер. с англ. — Казань : Изд-во «Мастер Лайн», 2002. — 384 с.
13. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М. : Физматлит, 2001. — 320 с.
14. Смородинский С. С., Батин Н. В. Оптимизация решений на основе компьютерных имитационных методов и моделей. — Ч. 1. — Мн. : БГУИР, 2004. — 80 с.
15. Смородинский С. С., Батин Н. В. Оптимизация решений на основе компьютерных имитационных методов и моделей. — Ч. 2. — Мн. : БГУИР, 2005. — 104 с.
16. Стеценко І. В. Моделювання систем. — Черкаси : ЧДТУ, 2009. — 399 с.
17. Томашевский В., Жданова Е. Имитационное моделирование в среде GPSS. — М. : Бестселлер, 2003. — 416 с.
18. Томашевський В. М. Моделювання систем. — К. : Видавнича група ВНУ, 2005. — 352 с.

Навчальне видання

Махней Олександр Володимирович

**ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО  
МОДЕЛЮВАННЯ**

Підписано до друку 23.05.2022. Формат 60×84/16.

Папір офсетний. Друк цифровий.

Гарнітура «СМ Roman». Ум. друк. арк. 10.

Наклад 100. Зам. № 58 від 23.05.2022.

Віддруковано: Приватний підприємець Голіней О. М.

76008, м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128,

тел.: (0342) 58-04-32, +38 050 540 30 64