Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.524

Дмитришин Р.І.

БАГАТОВИМІРНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ g-АЛГОРИТМУ БАУЕРА

Дмитришин Р.І. *Багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 247–260.

Побудовано алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у відповідний багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено умови існування такого алгоритму.

Вступ

В аналітичній теорії неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень — гіллястих ланцюгових дробів — вивчаються функціональні дроби, які використовуються для дослідження голоморфних і мероморфних функцій. При побудові таких дробів, як один із методів, використовують принцип відповідності [12, с. 148–160]. У результаті отримано різні типи функціональних неперервних дробів (див. [12, с. 220–283]) та їх узагальнення [1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 7, 8, 11, 13, 14]. Одним із таких узагальнень є багатовимірні g-дроби з нерівнозначними змінними [2, 3, 4, 7, 9, 10]. У даній статті побудовано алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду (ФКСР) у відповідний багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними, який є багатовимірним узагальненням g-алгоритму Бауера [6], і встановлено необхідні та достатні умови його існування.

1 Відповідність

Нехай $P_{m_n}(\mathbf{z})$, $Q_{l_n}(\mathbf{z})$ — багаточлени степенів m_n і l_n відповідно, $n \geq 1$, де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, $N \in \mathbb{N}$, причому $Q_{l_n}(\mathbf{0}) \neq 0$. Раціональна функція

$$f_n(\mathbf{z}) = \frac{P_{m_n}(\mathbf{z})}{Q_{l_n}(\mathbf{z})}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11A55, 65D15, 11J70.
Ключові слова і фрази: багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними, відповідність, кратний степеневий ряд, багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера.

називається відповідною деякому ФКСР

$$L(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)|\geq 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)}, \tag{1}$$

де $m(N) = m_1, m_2, \ldots, m_N$ — мультиіндекс, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq N$, $0(N) = 0, 0, \ldots, 0$, $|m(N)| = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$, $s_{m(N)} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{z}^{m(N)} = z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot z_N^{m_N}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, з порядком відповідності ν_n, якщо розвинення $f_n(\mathbf{z})$ у ФКСР збігається з $L(\mathbf{z})$ за всіма однорідними багаточленами до степеня $\nu_n - 1$ включно. Послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ є відповідною ряду (1), якщо

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n = \infty.$$

Задамо множину мультиіндексів

$$\mathcal{M} = \{m(N) :\ m(N) = m_1, m_2, \ldots, m_N,\ m_p \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \leq p \leq N\},$$

на якій визначимо покомпонентно арифметичні операції:

$$m(N) + n(N) = m_1 + n_1, m_2 + n_2, \ldots, m_N + n_N, \quad \text{для всіх} \quad m(N), n(N) \in \mathcal{M};$$

$$km(N) = km_1, km_2, \ldots, km_N, \quad \text{для всіх} \quad m(N) \in \mathcal{M} \quad \text{і для всіх} \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Розглянемо багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}} = \cfrac{s_0}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{g_{i(2)}(1 - g_{i(1)}) z_{i_2}}{1 + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} \cfrac{g_{i(3)}(1 - g_{i(2)}) z_{i_3}}{1 + \ddots}}}}, \tag{2}$$

де $s_0 > 0$, $i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k$ — мультиіндекс, $0 < g_{i(k)} < 1$, $k \geq 1$, $1 \leq i_n \leq i_{n-1}$, $1 \leq n \leq k$, $i_0 = N$, $g_{i(0)} = 0$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$.

Нехай $e_r = \delta_{r,1}, \delta_{r,2}, \ldots, \delta_{r,N}$ — мультиіндекс, $\delta_{r,s}$ — символ Кронекера, $1 \leq r, s \leq N$. Задамо множини мультиіндексів

$$\mathcal{I} = \{i(k) :\ i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k,\ 1 \leq i_p \leq i_{p-1},\ 1 \leq p \leq k,\ k \geq 1,\ i_0 = N\},$$

$$\mathcal{I}^* = \{\vec{i}_k^* :\ \vec{i}_k^* = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_k},\ i(k) \in \mathcal{I}\}$$

і відображення $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}^*$, таке, що $\varphi(i(k)) = \vec{i}_k^*$ для кожного $i(k) \in \mathcal{I}$ (можна показати, що відображення φ є бієктивне). Покладемо $g_{i(k)} = q_{\vec{i}_k^*}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $\vec{i}_k^* \in \mathcal{I}^*$, і $g_{i(0)} = q_{\vec{i}_0^*}$, де $\vec{i}_0^* = e_0 = 0, 0, \ldots, 0$. Тоді дріб (2) запишемо у вигляді

$$\frac{s_0}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{q_{\vec{i}_k^*}(1 - q_{\vec{i}_{k-1}^*}) z_{i_k}}{1}}, \tag{3}$$

де $s_0 > 0$, $q_{\vec{i}_0^*} = 0$, $0 < q_{\vec{i}_k^*} < 1$, $\vec{i}_k^* \in \mathcal{I}^*$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$.

Відповідність дробу (3) до ряду (1) означає, що розвинення кожного його n-го підхідного дробу

$$g_n(\mathbf{z}) = \cfrac{s_0}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{q_{\vec{i}_k^*}(1 - q_{\vec{i}_{k-1}^*}) z_{i_k}}{1}}$$

у ФКСР збігається з даним рядом за всіма однорідними багаточленами до степеня $n-1$ включно, тобто $\nu_n = n,\ n \ge 1$.

2 Алгоритм

Побудуємо та дослідимо алгоритм розвинення ФКСР (1) у відповідний багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (3).

Нехай $s_{0(N)} > 0$ і

$$R_{e_0}(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)| \ge 0} (-1)^{|m(N)|} \frac{s_{m(N)}}{s_{0(N)}} \mathbf{z}^{m(N)}.$$

Позначимо через

$$R'_{e_0}(\mathbf{z}) = \sum_{|m(N)| \ge 0} (-1)^{|m(N)|} s^{e_0}_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} \tag{4}$$

ряд, обернений до кратного степеневого ряду $R_{e_0}(\mathbf{z})$. Коефіцієнти ряду (4) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул

$$s^{e_0}_{m(N)} = -\sum_{|r(N)|=1}^{|m(N)|} s^{e_0}_{m(N)-r(N)} \frac{s_{r(N)}}{s_{0(N)}}, \quad m_j \ge 0,\ 1 \le j \le N,\ |m(N)| \ge 1, \tag{5}$$

де $s^{e_0}_{0(N)} = 1$, причому $s^{e_0}_{n(N)} = 0$, якщо існує індекс j, $1 \le j \le N$, такий, що $n_j < 0$.

Ряд (4) за умов, що $s^{e_0}_{e_j} \ne 0$, $2 \le j \le N$, запишемо у вигляді

$$R'_{e_0}(\mathbf{z}) = P_{e_1}(z_1) - \sum_{j=2}^{N} s^{e_0}_{e_j} z_j R_{e_j}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_1}(z_1) = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_j=0,\ 2 \le j \le N}}^{\infty} (-1)^{m_1} s^{e_0}_{m(N)} z_1^{m_1}, \quad R_{e_j}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|r(N)| \ge 0 \\ r_i=0,\ j+1 \le i \le N}} (-1)^{|r(N)|} \frac{s^{e_0}_{e_j+r(N)}}{s^{e_0}_{e_j}} \mathbf{z}^{r(N)}.$$

Тоді

$$L(\mathbf{z}) = \frac{s_{0(N)}}{P_{e_1}(z_1) - \sum\limits_{j=2}^{N} s^{e_0}_{e_j} z_j R_{e_j}(\mathbf{z})}.$$

Послідовність

$$s_n = \int_0^1 u^n d\varphi(u), \quad n \ge 0,$$

де $\varphi(u)$ — дійсна і монотонно неспадна функція з нескінченним числом точок росту, називається цілком монотонною відповідною нескінченному розподілу мас, якщо

$$\Delta^m s_n \geq 0, \quad m \geq 0,\ n \geq 0,$$

де

$$\Delta^m s_n = s_n - \binom{1}{m} s_{n+1} + \binom{2}{m} s_{n+2} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} s_{n+m}\ [17].$$

Нехай $\{s_{m(N)}\}_{m_1=0}^{\infty}$, $m_j = 0$, $2 \leq j \leq N$, — цілком монотонна послідовність відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді згідно з теоремою 4.1 [17] існують дійсні числа $q_{\vec{i}_k^*}$, $i_p = 1$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ такі, що $0 < q_{\vec{i}_k^*} < 1$, $i_p = 1$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ і

$$\sum_{\substack{m_1=0\\ m_j=0,\ 2\leq j\leq N}}^{\infty} (-1)^{m_1} \frac{s_{m(N)}}{s_{0(N)}} z_1^{m_1} \sim \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\leq p\leq k}}^{\infty} \frac{q_{\vec{i}_k^*}(1-q_{\vec{i}_{k-1}^*})z_1}{1}\right)^{-1},$$

де символ "$\sim$" означає відповідність між рядом і дробом, $q_{\vec{i}_0^*} = 0$. Звідси

$$P_{e_1}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\leq p\leq k}}^{\infty} \frac{q_{\vec{i}_k^*}(1-q_{\vec{i}_{k-1}^*})z_1}{1},$$

оскільки ряд $P_{e_1}(z_1)$ обернений до ряду

$$\sum_{\substack{m_1=0\\ m_j=0,\ 2\leq j\leq N}}^{\infty} (-1)^{m_1} \frac{s_{m(N)}}{s_{0(N)}} z_1^{m_1}.$$

Коефіцієнти неперервного g-дробу, відповідного формальному степеневому ряду, можна обчислити, використовуючи g-алгоритм Бауера [6]. Згідно з цим алгоритмом $q_{\vec{i}_k^*}$, $i_p = 1$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ є діагональними елементами $q_{\vec{i}_k^*}^{(0)}$, $i_p = 1$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ g-таблиці при $h = 0$

$$\begin{array}{ccccc}
 & q^{(0)}_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*} & & & \\
q^{(1)}_{\vec{i}_0^*+\vec{j}_h^*} & & q^{(0)}_{\vec{i}_2^*+\vec{j}_h^*} & & \\
 & q^{(1)}_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*} & & q^{(0)}_{\vec{i}_3^*+\vec{j}_h^*} & \\
q^{(2)}_{\vec{i}_0^*+\vec{j}_h^*} & & q^{(1)}_{\vec{i}_2^*+\vec{j}_h^*} & \vdots & \ddots \\
\vdots & q^{(2)}_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*} & \vdots & & \\
 & \vdots & & &
\end{array} \tag{6}$$

елементи якої визначаються за такими рекурентними співвідношеннями (правилами ромба)

$$\left.\begin{array}{l}
(1-q^{(n)}_{\vec{i}_{2r+1}^*+\vec{j}_h^*})(1-q^{(n)}_{\vec{i}_{2r+2}^*+\vec{j}_h^*}) = (1-q^{(n+1)}_{\vec{i}_{2r}^*+\vec{j}_h^*})(1-q^{(n+1)}_{\vec{i}_{2r+1}^*+\vec{j}_h^*}), \quad r \geq 0,\ n \geq 0,\\
q^{(n)}_{\vec{i}_{2r}^*+\vec{j}_h^*} q^{(n)}_{\vec{i}_{2r+1}^*+\vec{j}_h^*} = q^{(n+1)}_{\vec{i}_{2r-1}^*+\vec{j}_h^*} q^{(n+1)}_{\vec{i}_{2r}^*+\vec{j}_h^*}, \quad r \geq 1,\ n \geq 0,
\end{array}\right\} \tag{7}$$

з початковими умовами

$$q^{(n)}_{\vec{i}_0^*+\vec{j}_h^*}=0,\quad q^{(n)}_{\vec{i}_1^*+\vec{j}_h^*}=\frac{s^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}_{m(N)+e_{i_1}+e_{j_h}}}{s^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}_{m(N)+e_{j_h}}},\quad |m(N)|=m_{i_1}=n,\ \ n\geq 0, \tag{8}$$

причому

$$q^{(n)}_{\vec{i}_1^*}=\frac{s_{m(N)+e_{i_1}}}{s_{m(N)}},\quad |m(N)|=m_{i_1}=n,\ n\geq 0.$$

Таким чином, можемо записати

$$L(\mathbf{z})\sim\frac{s_{0(N)}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\leq p\leq k}}^{\infty}\dfrac{q_{\vec{i}_k^*}(1-q_{\vec{i}_{k-1}^*})z_1}{1}-\sum\limits_{j=2}^{N}s^{e_0}_{e_j}z_jR_{e_j}(\mathbf{z})},$$

де $q_{\vec{i}_0^*}=0$.

Нехай l — довільне натуральне число, $2\leq l\leq N$, і нехай

$$\{s_{m(N)}\}_{m_l=0}^{\infty},\quad m_j=0,\ j\neq l,\ 1\leq j\leq N$$

— цілком монотонна послідовність відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді, згідно з теоремою 4.1 [17], існують дійсні числа $q'_{\vec{i}_k^*}$, $i_p=l$, $1\leq p\leq k$, $k\geq 1$ такі, що $0<q'_{\vec{i}_k^*}<1$, $i_p=l$, $1\leq p\leq k$, $k\geq 1$, і

$$\sum_{\substack{m_l=0\\ m_j=0,\ j\neq l,\ 1\leq j\leq N}}^{\infty}(-1)^{m_l}s_{m(N)}z_l^{m_l}\sim s_{0(N)}\left(1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{\substack{k=1\\ i_p=l,\ 1\leq p\leq k}}^{\infty}\frac{q'_{\vec{i}_k^*}(1-g'_{\vec{i}_{k-1}^*})z_l}{1}\right)^{-1},$$

де $q'_{\vec{i}_0^*}=0$. Коефіцієнти $q'_{\vec{i}_k^*}$, $i_p=l$, $1\leq p\leq k$, $k\geq 1$ є діагональними елементами $q^{(0)}_{\vec{i}_k^*}$, $i_p=l$, $1\leq p\leq k$, $k\geq 1$ g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами (8) при $h=0$.

Оскільки

$$-s^{e_0}_{m(N)}=\frac{s_{m(N)}}{s_{0(N)}}=q'_{\vec{i}_1^*},\quad m_l=1,\ m_j=0,\ j\neq l,\ 1\leq j\leq N,\ i_1=l,$$

то покладемо $q_{\vec{i}_1^*}=q'_{\vec{i}_1^*}$.

Таким чином, можемо записати, що

$$L(\mathbf{z})\sim\frac{s_{0(N)}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\leq p\leq k}}^{\infty}\dfrac{q_{\vec{i}_k^*}(1-q_{\vec{i}_{k-1}^*})z_1}{1}+\sum\limits_{j_1=2}^{N}q_{\vec{j}_1^*}z_{j_1}R_{\vec{j}_1^*}(\mathbf{z})},$$

де $q_{\vec{i}_0^*}=0$.

Нехай l — довільне натуральне число, $2\leq l\leq N$. Позначимо через

$$R'_{e_l}(\mathbf{z})=\sum_{\substack{|m(N)|\geq 0\\ m_i=0,\ l+1\leq i\leq N}}(-1)^{|m(N)|}s^{e_l}_{m(N)}\mathbf{z}^{m(N)} \tag{9}$$

ряд, обернений до ряду $R_{e_l}(\mathbf{z})$. Коефіцієнти ряду (9) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул при $m_i = 0,\ j_h + 1 \le i \le N,\ |m(N)| \ge 1$, і $\vec{j}_h^* = e_l$

$$s_{m(N)}^{\vec{j}_h^*} = -\sum_{|r(N)|=1}^{|m(N)|} s_{m(N)-r(N)}^{\vec{j}_h^*} \frac{s_{r(N)+e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}}{s_{e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*-e_{j_h}}}, \tag{10}$$

де $s_{0(N)}^{\vec{j}_h^*} = 1$, причому $s_{n(N)}^{\vec{j}_h^*} = 0$, якщо існує індекс p, $1 \le p \le N$ такий, що $n_p < 0$.

Ряд (9) за умов, що $s_{e_j}^{e_l} \ne 0$, $2 \le j \le l$ запишемо у вигляді

$$R'_{e_l}(\mathbf{z}) = P_{e_l+e_1}(z_1) - \sum_{j=2}^{l} s_{e_j}^{e_l} z_j R_{e_l+e_j}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_l+e_1}(z_1) = \sum_{\substack{m_1=0\\ m_j=0,\ 2\le j\le N}}^{\infty} (-1)^{m_1} s_{m(N)}^{e_l} z_1^{m_1}, \quad R_{e_l+e_j}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|r(N)|\ge 0\\ r_i=0,\ j+1\le i\le N}} (-1)^{|r(N)|} \frac{s_{e_j+r(N)}^{e_l}}{s_{e_j}^{e_l}} \mathbf{z}^{r(N)}.$$

Тоді $R_{e_l}(\mathbf{z})$ запишемо у вигляді

$$R_{e_l}(\mathbf{z}) = \frac{1}{P_{e_l+e_1}(z_1) - \sum\limits_{j=2}^{l} s_{e_j}^{e_l} z_j R_{e_l+e_j}(\mathbf{z})}.$$

Нехай $\{s_{m(N)+e_l}^{e_0}\}_{m_1=0}^{\infty}$, $m_j = 0$, $2 \le j \le N$ — цілком монотонна послідовність відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді згідно з теоремою 4.1 [17] існують дійсні числа $q'_{\vec{i}_k^*+e_l}$, $i_p = 1$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ такі, що $0 < q'_{\vec{i}_k^*+e_l} < 1$, $i_p = 1$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ і

$$\sum_{\substack{m_1=0\\ m_j=0,\ 2\le j\le N}}^{\infty} (-1)^{m_1} \frac{s_{m(N)+e_l}^{e_0}}{s_{e_l}^{e_0}} z_1^{m_1} \sim \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q'_{\vec{i}_k^*+e_l}(1 - q'_{\vec{i}_{k-1}^*+e_l}) z_1}{1}\right)^{-1},$$

де $q'_{\vec{i}_0^*+e_l} = 0$.

Оскільки ряд $P_{e_l+e_1}(z_1)$ обернений до ряду

$$\sum_{\substack{m_1=0\\ m_j=0,\ 2\le j\le N}}^{\infty} (-1)^{m_1} \frac{s_{m(N)+e_l}^{e_0}}{s_{e_l}^{e_0}} z_1^{m_1},$$

то

$$P_{e_l+e_1}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q'_{\vec{i}_k^*+e_l}(1 - q'_{\vec{i}_{k-1}^*+e_l}) z_1}{1},$$

де $q'_{\vec{i}_k^*+e_l}$, $i_p = 1$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, є діагональні елементи $q_{\vec{i}_k^*+e_l}^{(0)}$, $i_p = 1$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами (8), при $\vec{j}_h^* = e_l$.

Послідовність $\{a_n\}$ називається ланцюговою, якщо існують дійсні числа g_n, $n \geq 0$ такі, що

$$0 \leq g_{n-1} \leq 1, \quad a_n = g_n(1 - g_{n-1}), \quad n \geq 1.$$

Числа g_n, $n \geq 0$ називаються параметрами ланцюгової послідовності $\{a_n\}$ [16, с. 79–86].

Для кожної ланцюгової послідовності $\{a_n\}$ існують мінімальні m_n, $n \geq 0$ і максимальні M_n, $n \geq 0$ параметри такі, що

$$a_n = m_n(1 - m_{n-1}), \quad a_n = M_n(1 - M_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

і $m_n \leq g_n \leq M_n$, $n \geq 0$, для будь-якої іншої послідовності параметрів $\{g_n\}$ послідовності $\{a_n\}$. Мінімальні і максимальні параметри обчислюються відповідно за формулами

$$m_0 = 0, \quad m_{p+1} = \begin{cases} 0, & m_p = 1, \\ \dfrac{a_{p+1}}{1 - m_p}, & m_p < 1, \end{cases} \qquad M_p = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=p+1}^{\infty} \frac{-a_r}{1}, \quad p \geq 0,$$

причому, якщо існує індекс $n + k$ такий, що $a_{n+k} = 0$, $k \geq 0$, то

$$M_n = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=n+1}^{n+k-1} \frac{-a_r}{1}.$$

Нехай $0 < q_{e_l} \leq M_{e_l}^{(1)} < 1$, де

$$M_{e_l}^{(1)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1 \\ i_p=1,\ 1 \leq p \leq k}}^{\infty} \frac{-q'_{\vec{i}_k^* + e_l}(1 - q'_{\vec{i}_{k-1}^* + e_l})}{1}, \quad q'_{\vec{i}_0^* + e_l} = 0,$$

тоді

$$P_{e_l}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1 \\ i_p=1,\ 1 \leq p \leq k}}^{\infty} \frac{q_{\vec{i}_k^* + e_l}(1 - q_{\vec{i}_{k-1}^* + e_l}) z_1}{1},$$

де коефіцієнти неперервного дробу визначаються за допомогою рекурентних співвідношень (див. [15]) при $i_p = 1$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$, і $\vec{j}_h^* = e_l$

$$q_{\vec{i}_1^* + \vec{j}_h^*} = \frac{q'_{\vec{i}_1^* + \vec{j}_h^*}}{1 - q_{\vec{j}_h^*}} = \frac{-s_{e_{i_1}}^{\vec{j}_h^*}}{1 + s_{e_{j_h}}^{\vec{j}_h^* - e_{j_h}}} = \frac{s_{e_{i_1} + e_{j_h}}^{\vec{j}_h^* - e_{j_h}}}{s_{e_{j_h}}^{\vec{j}_h^* - e_{j_h}}(1 + s_{e_{j_h}}^{\vec{j}_h^* - e_{j_h}})}, \tag{11}$$

$$q_{\vec{i}_k^* + \vec{j}_h^*} = q'_{\vec{i}_k^* + \vec{j}_h^*} \left(1 - \frac{\dfrac{q'_{\vec{i}_1^* + \vec{j}_h^*} q'_{\vec{i}_2^* + \vec{j}_h^*} \cdot \ldots \cdot q'_{\vec{i}_{k-1}^* + \vec{j}_h^*}}{(1 - q'_{\vec{i}_1^* + \vec{j}_h^*})(1 - q'_{\vec{i}_2^* + \vec{j}_h^*}) \cdot \ldots \cdot (1 - q'_{\vec{i}_{k-1}^* + \vec{j}_h^*})}}{\dfrac{1 - q_{\vec{j}_h^*}}{-q_{\vec{j}_h^*}} + \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} \dfrac{q'_{\vec{i}_1^* + \vec{j}_h^*} q'_{\vec{i}_2^* + \vec{j}_h^*} \cdot \ldots \cdot q'_{\vec{i}_p^* + \vec{j}_h^*}}{(1 - q'_{\vec{i}_1^* + \vec{j}_h^*})(1 - q'_{\vec{i}_2^* + \vec{j}_h^*}) \cdot \ldots \cdot (1 - q'_{\vec{i}_p^* + \vec{j}_h^*})}} \right), \quad k \geq 2. \tag{12}$$

Нехай t — довільне натуральне число, $2 \leq t \leq l - 1$ і нехай

$$\{s_{m(N)+e_l}^{e_0}\}_{m_t=0}^{\infty}, \quad m_j = 0,\ j \neq t,\ 1 \leq j \leq N$$

— цілком монотонна послідовність відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді згідно з теоремою 4.1 [17] існують дійсні числа $q'_{\vec{i}_k^*+e_l}$, $i_p = t$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ такі, що $0 < q'_{\vec{i}_k^*+e_l} < 1$, $i_p = t$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ і

$$\sum_{\substack{m_t=0\\ m_j=0,\ j\ne t,\ 1\le j\le N}}^{\infty} (-1)^{m_t} \frac{s^{e_0}_{m(N)+e_l}}{s^{e_0}_{e_l}} z_t^{m_t} \sim \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=t,\ 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q'_{\vec{i}_k^*+e_l}(1-g'_{\vec{i}_{k-1}^*+e_l})z_l}{1}\right)^{-1},$$

де $q'_{\vec{i}_0^*+e_l} = 0$. Коефіцієнти $q'_{\vec{i}_k^*+e_l}$, $i_p = t$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ є діагональними елементами $q^{(0)}_{\vec{i}_k^*+e_l}$, $i_p = t$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами (8) при $\vec{j}_h^* = e_l$.

Нехай $0 < q_{e_l} \le M^{(t)}_{e_l} < 1$, де

$$M^{(t)}_{e_l} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=t,\ 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{-q'_{\vec{i}_k^*+e_l}(1-q'_{\vec{i}_{k-1}^*+e_l})}{1}, \quad q'_{\vec{i}_0^*+e_l} = 0.$$

Тоді

$$\sum_{\substack{m_t=0\\ m_j=0,\ j\ne t,\ 1\le j\le N}}^{\infty} (-1)^{m_t} \frac{s^{e_0}_{m(N)+e_l}}{s^{e_0}_{e_l}} z_t^{m_t} \sim \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=t,\ 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q_{\vec{i}_k^*+e_l}(1-q_{\vec{i}_{k-1}^*+e_l})z_1}{1}\right)^{-1},$$

де коефіцієнти неперервного дробу визначаються за допомогою рекурентних співвідношень (11), (12) при $i_p = t$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, і $\vec{j}_h^* = e_l$.

Оскільки

$$\frac{-s^{e_l}_{e_t}}{1-q_{e_l}} = \frac{s^{e_0}_{e_l+e_t}}{s^{e_0}_{e_l}(1+s^{e_0}_{e_l})} = \frac{s_{0(N)}s_{e_l+e_t} - s^2_{e_l}}{s_{e_l}(s_{0(N)} - s_{e_l})} = q'_{e_l+e_t},$$

$$\frac{-s^{e_l}_{e_l}}{1-q_{e_l}} = \frac{s^{e_0}_{e_l+e_l}}{s^{e_0}_{e_l}(1+s^{e_0}_{e_l})} = \frac{s_{0(N)}s_{e_l+e_l} - s^2_{e_l}}{s_{e_l}(s_{0(N)} - s_{e_l})} = q'_{2e_l},$$

то покладемо $q_{e_l+e_t} = q'_{e_l+e_t}$ і $q_{2e_l} = q'_{2e_l}$.

Таким чином, можемо записати

$$L(\mathbf{z}) \sim \cfrac{s_{0(N)}}{Q_{\vec{j}_0^*}(z_1) + \displaystyle\sum_{j_1=2}^{N} \cfrac{q_{\vec{j}_1^*} z_{j_1}}{Q_{\vec{j}_1^*}(z_1) + \displaystyle\sum_{j_2=2}^{j_1} q_{\vec{j}_2^*}(1-q_{\vec{j}_1^*}) z_{j_2} R_{\vec{j}_2^*}(\mathbf{z})}},$$

де

$$Q_{\vec{j}_h^*}(z_1) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1\\ i_p=1,\ 1\le p\le k}}^{\infty} \frac{q_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}(1-q_{\vec{i}_{k-1}^*+\vec{j}_h^*})z_1}{1}, \quad h \ge 0,\ n \ge 0,$$

причому $q_{\vec{i}_0^*} = 0$ і $j_r \ne 1$, $1 \le r \le h$, $\vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$, якщо $h \ge 1$.

Обчислюючи далі коефіцієнти

$$s_{m(N)}^{\vec{j}_h^*}, \quad m_i = 0,\ j_h + 1 \le i \le N,\ |m(N)| \ge 1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*,$$

за допомогою рекурентних формул (10) і продовжуючи процес ітерації, за умов, що

$$\{s_{m(N)}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \ne p,\ 1 \le p, i \le N,$$

$$\{s_{m(N)+e_r}^{e_0}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \ne p,\ 1 \le p \le r-1,\ 2 \le r \le N,\ 1 \le i \le N,$$

$$\{s_{m(N)+e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \ne p,\ 1 \le p \le j_h - 1,\ 1 \le i \le N,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

— цілком монотонні послідовності відповідні нескінченним розподілам мас та

$$s_{0(N)} > 0, \quad s_{e_{n+1}}^{\vec{j}_h^*} \ne 0, \quad 1 \le n \le j_h - 1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*, \tag{13}$$

$$0 < q_{\vec{j}_h^*} \le M_{\vec{j}_h^*}^{(n)} < 1, \quad 1 \le n \le j_h - 1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*, \tag{14}$$

де

$$M_{\vec{j}_h^*}^{(n)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1 \\ i_p = n,\ 1 \le p \le k}}^{\infty} \frac{-q'_{\vec{i}_k^* + \vec{j}_h^*}(1 - q'_{\vec{i}_{k-1}^* + \vec{j}_h^*})}{1}, \quad q'_{\vec{i}_0^* + \vec{j}_h^*} = 0,$$

$$q'_{\vec{i}_k^* + \vec{j}_h^*}, \quad i_p = n,\ 1 \le p \le k,\ 1 \le n \le j_h - 1,\ k \ge 1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{J}^*$$

є діагональними елементами

$$q_{\vec{i}_k^* + \vec{j}_h^*}^{(0)}, \quad i_p = n,\ 1 \le p \le k,\ 1 \le n \le j_h - 1,\ k \ge 1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{J}^*$$

g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами (8), для ряду (1) отримаємо дріб (3), де $s_0 = s_{0(N)}$, $q_{\vec{i}_k^*}$, $i_p = n$, $1 \le p \le k$, $1 \le n \le N$, $k \ge 1$ є діагональними елементами $q_{\vec{i}_k^*}^{(0)}$, $i_p = n$, $1 \le p \le k$, $1 \le n \le N$, $k \ge 1$ g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами(8), при $h = 0$,

$$q_{\vec{i}_1^* + \vec{j}_h^*}, \quad 1 \le i_1 \le j_h - 1,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*,$$

$$q_{\vec{i}_k^* + \vec{j}_h^*}, \quad i_p = n,\ 1 \le p \le k,\ 1 \le n \le j_h - 1,\ k \ge 2,\ j_r \ne 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

визначаються за допомогою формул (11) і (12) відповідно.

Таким чином, побудовано рекурентний алгоритм обчислення коефіцієнтів дробу (3), якщо задані коефіцієнти ряду (1), який є багатовимірним узагальненням g-алгоритму Бауера [6].

Покажемо, що побудований багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (3) є відповідним ФКСР (1). Використовуючи співвідношення (7), (8) і (11), згортатимемо $g_n(\mathbf{z})$ при $n \ge 1$.

При $n = 1$ маємо $g_1(\mathbf{z}) = s_0$. Оскільки

$$s_0 - \sum_{|m(N)| \ge 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} = \sum_{|m(N)| \ge 1} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)},$$

то $g_1(\mathbf{z}) \sim L(\mathbf{z})$, тобто порядок відповідності $\nu_1 = 1$.

При $n = 2$ можемо записати

$$g_2(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{1 + \sum\limits_{j_1=1}^{N} q_{\vec{j}_1^*} z_{j_1}} = \frac{s_0}{1 - \sum\limits_{j_1=1}^{N} s_{e_{j_1}}^{e_0} z_{j_1}} = \sum_{|m(N)|=0}^{1} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^2),$$

де $\mathrm{O}(\mathbf{z}^p)$ — символічний запис деякого ФКСР найменший степінь однорідних багаточленів якого не менший ніж $p,\ p \geq 2$. Оскільки,

$$\sum_{|m(N)|=0}^{1} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^2) - \sum_{|m(N)|\geq 0} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} = \mathrm{O}'(\mathbf{z}^2),$$

де $\mathrm{O}'(\mathbf{z}^p)$ — символічний запис деякого ФКСР найменший степінь однорідних багаточленів якого не менший ніж $p,\ p \geq 2$, то $g_2(\mathbf{z}) \sim L(\mathbf{z})$, тобто $\nu_2 = 2$.

Згідно описаного вище узагальненого алгоритму Бауера дріб $Q_{\vec{j}_h^*}(z_1)$ є відповідним ряду $P_{\vec{j}_h^*+e_1}(z_1)$, при $h \geq 0$, причому $j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$, якщо $h \geq 1$. Порядок відповідності $\nu_n = n + 1$. Тому, при $n \geq 3$ і $0 \leq h \leq n-3$ дріб

$$Q_{\vec{j}_h^*}^{(n-h-1)}(z_1) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{\substack{k=1 \\ i_p=1,\ 1\leq p\leq k}}^{n-h-1} \frac{q_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}(1 - q_{\vec{i}_{k-1}^*+\vec{j}_h^*}) z_1}{1}$$

має розвинення в формальний степеневий ряд

$$L_{\vec{j}_h^*}^{(n-h-1)}(z_1) = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_i=0,\ 2\leq i\leq N}}^{n-h-1} (-1)^{m_1} s_{m(N)}^{\vec{j}_h^*} z_1^{m_1} + \mathrm{O}(z_1^{n-h}),$$

де $\mathrm{O}(z_1^p)$ — символічний запис деякого формального степеневого ряду найменший степінь багаточленів якого не менший ніж $p,\ p \geq 3$.

Тоді при $n = 3$ маємо

$$g_3(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{Q_{\vec{j}_0^*}^{(2)}(z_1) + \sum\limits_{j_1=2}^{N} \dfrac{q_{\vec{j}_1^*} z_{j_1}}{1 + \sum\limits_{j_2=1}^{j_1} q_{\vec{j}_2^*}(1 - q_{\vec{j}_1^*}) z_{j_2}}} = \frac{s_0}{L_{e_0}^{(2)}(z_1) - \sum\limits_{j_1=2}^{N} \dfrac{s_{e_{j_1}}^{e_0} z_{j_1}}{1 - \sum\limits_{j_2=1}^{j_1} s_{e_{j_2}}^{e_{j_1}} z_{j_2}}}$$

$$= \frac{s_0}{L_{e_0}^{(2)}(z_1) - \sum\limits_{j_1=2}^{N} s_{e_{j_1}}^{e_0} z_{j_1} P_{\vec{j}_1^*}^{(2)}} = \sum_{|m(N)|=0}^{2} (-1)^{|m(N)|} s_{m(N)} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^3),$$

де

$$P_{\vec{j}_h^*}^{(n)} = \sum_{\substack{|m(N)|=0 \\ m_i=0,\ j_h+1\leq i\leq N}}^{n-1} (-1)^{|m(N)|} \frac{s_{m(N)+e_{j_h}}^{\vec{j}_{h-1}^*}}{s_{e_{j_h}}^{\vec{j}_{h-1}^*}} \mathbf{z}^{m(N)} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^n), \quad j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*,\ n \geq 2.$$

Оскільки

$$\sum_{|m(N)|=0}^{2}(-1)^{|m(N)|}s_{m(N)}\mathbf{z}^{m(N)}+\mathrm{O}(\mathbf{z}^3)-\sum_{|m(N)|\geq 0}(-1)^{|m(N)|}s_{m(N)}\mathbf{z}^{m(N)}=\mathrm{O}'(\mathbf{z}^3),$$

то $g_3(\mathbf{z})\sim L(\mathbf{z})$, тобто $\nu_3=3$.

Далі, нехай n — довільне натуральне число, $n\geq 4$. Тоді

$$g_n(\mathbf{z})=\cfrac{s_0}{Q^{(n-1)}_{\vec{j}^*_0}(z_1)+\sum\limits_{j_1=2}^{N}\cfrac{q_{\vec{j}^*_1}z_{j_1}}{Q^{(n-2)}_{\vec{j}^*_1}(z_1)+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{r=2}^{n-1}\sum\limits_{j_r=2}^{j_{r-1}}\cfrac{q_{\vec{j}^*_r}(1-q_{\vec{j}^*_{r-1}})z_{j_r}}{Q^{(n-r-1)}_{\vec{j}^*_r}(z_1)}}}$$

$$=\cfrac{s_0}{L^{(n-1)}_{e_0}(z_1)-\sum\limits_{j_1=2}^{N}\cfrac{s^{e_0}_{e_{j_1}}z_{j_1}}{L^{(n-2)}_{e_{j_1}}(z_1)-\ddots-\sum\limits_{j_{n-3}=2}^{j_{n-4}}\cfrac{s^{\vec{j}^*_{n-4}}_{e_{j_{n-3}}}z_{j_{n-3}}}{L^{(2)}_{\vec{j}^*_{n-3}}(z_1)-\sum\limits_{j_{n-2}=2}^{j_{n-3}}\cfrac{s^{\vec{j}^*_{n-3}}_{e_{j_{n-2}}}z_{j_{n-2}}}{1-\sum\limits_{j_{n-1}=1}^{j_{n-2}}s^{\vec{j}^*_{n-2}}_{e_{j_{n-1}}}z_{j_{n-1}}}}}}$$

$$=\cfrac{s_0}{L^{(n-1)}_{e_0}(z_1)-\sum\limits_{j_1=2}^{N}\cfrac{s^{e_0}_{e_{j_1}}z_{j_1}}{L^{(n-2)}_{e_{j_1}}(z_1)-\ddots-\sum\limits_{j_{n-3}=2}^{j_{n-4}}\cfrac{s^{\vec{j}^*_{n-4}}_{e_{j_{n-3}}}z_{j_{n-3}}}{L^{(2)}_{\vec{j}^*_{n-3}}(z_1)-\sum\limits_{j_{n-2}=2}^{j_{n-3}}s^{\vec{j}^*_{n-3}}_{e_{j_{n-2}}}z_{j_{n-2}}P^{(2)}_{\vec{j}^*_{n-2}}}}}$$

$$=\cfrac{s_0}{L^{(n-1)}_{e_0}(z_1)-\sum\limits_{j_1=2}^{N}\cfrac{s^{e_0}_{e_{j_1}}z_{j_1}}{L^{(n-2)}_{e_{j_1}}(z_1)-\ddots-\sum\limits_{j_{n-4}=2}^{j_{n-5}}\cfrac{s^{\vec{j}^*_{n-5}}_{e_{j_{n-4}}}z_{j_{n-4}}}{L^{(3)}_{\vec{j}^*_{n-4}}(z_1)-\sum\limits_{j_{n-3}=2}^{j_{n-4}}s^{\vec{j}^*_{n-4}}_{e_{j_{n-3}}}z_{j_{n-3}}P^{(3)}_{\vec{j}^*_{n-3}}}}}.$$

Продовжуючи даний процес, на останньому кроці отримаємо

$$g_n(\mathbf{z})=\frac{s_0}{L^{(n-1)}_{e_0}(z_1)-\sum\limits_{j_1=2}^{N}s^{e_0}_{e_{j_1}}z_{j_1}P^{(n-1)}_{\vec{j}^*_1}}=\sum_{|m(N)|=0}^{n-1}(-1)^{|m(N)|}s_{m(N)}\mathbf{z}^{m(N)}+\mathrm{O}(\mathbf{z}^n).$$

Оскільки,

$$\sum_{|m(N)|=0}^{n-1}(-1)^{|m(N)|}s_{m(N)}\mathbf{z}^{m(N)}+\mathrm{O}(\mathbf{z}^n)-\sum_{|m(N)|\geq 0}(-1)^{|m(N)|}s_{m(N)}\mathbf{z}^{m(N)}=\mathrm{O}'(\mathbf{z}^n),$$

то $g_n(\mathbf{z}) \sim L(\mathbf{z})$, тобто $\nu_n = n$.

В силу довільності n робимо висновок, що $g_n(\mathbf{z}) \sim L(\mathbf{z})$, при $n \geq 1$. Порядок відповідності $\nu_n = n$. Це означає, що розвинення кожного його n-го підхідного дробу $g_n(\mathbf{z})$ у ФКСР збігається з рядом $L(\mathbf{z})$ за всіма однорідними багаточленами до степеня $n-1$ включно. Оскільки

$$\lim_{n\to+\infty} \nu_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty,$$

то дріб (3) є відповідним ряду (1).

Таким чином, справджується теорема:

Теорема 1. *Багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (3) є відповідним заданому формальному кратному степеневому ряду (1) тоді і лише тоді, коли виконуються умови (13), (14) і*

$$\{s_{m(N)}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \leq p, i \leq N,$$

$$\{s_{m(N)+e_r}^{e_0}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \leq p \leq r-1,\ 2 \leq r \leq N,\ 1 \leq i \leq N,$$

$$\{s_{m(N)+e_{j_h}}^{\vec{j}_h^*}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \leq p \leq j_h - 1,\ 1 \leq i \leq N,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

є цілком монотонні послідовності відповідні нескінченним розподілам мас, де коефіцієнти

$$s_{m(N)}^{e_0}, \quad m_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq N,\ |m(N)| \geq 1,$$

$$s_{m(N)}^{\vec{j}_h^*}, \quad m_i = 0,\ j_h + 1 \leq i \leq N,\ |m(N)| \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

визначаються за формулами (5) і (10) відповідно.

Нехай $\{q_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}(1 - q_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*-e_{i_k}})\}_{k=1}^{\infty}$, $i_p = n$, $1 \leq p \leq k$, $1 \leq n \leq j_h - 1$, $k \geq 1$, $j_r \neq 1$, $1 \leq r \leq h$, $\vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$, є ланцюговими послідовностями з відповідними послідовностями мінімальних параметрів

$$\{m'_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}\}_{k=0}^{\infty}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq j_h - 1,\ k \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*,$$

де $m'_{\vec{j}_h^*} = 0$, $j_r \neq 1$, $1 \leq r \leq h$, $\vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$. Тоді, позначаючи

$$q_{\vec{i}_k^*}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq N,\ k \geq 1,$$

$$m'_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq j_h - 1,\ k \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

через

$$m_{\vec{i}_k^*}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq N,\ k \geq 1,$$

$$m_{\vec{i}_k^*+\vec{j}_h^*}, \quad i_p = n,\ 1 \leq p \leq k,\ 1 \leq n \leq j_h - 1,\ k \geq 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \leq r \leq h,\ \vec{j}_h^* \in \mathcal{I}^*$$

відповідно, дріб (3) запишемо у вигляді

$$\cfrac{s_0}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{m_{\vec{i}_1^*} z_{i_1}}{1 + \operatorname*{D}\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{m_{\vec{i}_k^*}(1 - \delta_{i_k,i_{k-1}} m_{\vec{i}_{k-1}^*}) z_{i_k}}{1}}}, \tag{15}$$

де $s_0 > 0$, $0 < m_{\vec{i}^*_k} < 1$, $\vec{i}^*_k \in \mathcal{I}^*$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $1 \le i, j \le N$.

За схемою доведення теореми 1, можна показати справедливість наступної теореми:

Теорема 2. *Багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (15) є відповідним заданому формальному кратному степеневому ряду (1) тоді і лише тоді, коли виконуються умови (13) і*

$$\{s_{m(N)}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \le p, i \le N,$$

$$\{s^{e_0}_{m(N)+e_r}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \le p \le r-1,\ 2 \le r \le N,\ 1 \le i \le N,$$

$$\{s^{\vec{j}^*_h}_{m(N)+e_{j_h}}\}_{m_p=0}^{\infty}, \quad m_i = 0,\ i \neq p,\ 1 \le p \le j_h - 1,\ 1 \le i \le N,\ j_r \neq 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*$$

є цілком монотонні послідовності відповідні нескінченним розподілам мас, де коефіцієнти

$$s^{e_0}_{m(N)}, \quad m_j \ge 0,\ 1 \le j \le N,\ |m(N)| \ge 1,$$

$$s^{\vec{j}^*_h}_{m(N)}, \quad m_i = 0,\ j_h + 1 \le i \le N,\ |m(N)| \ge 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*$$

визначаються за формулами (5) і (10) відповідно.

З огляду на вище побудоване багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера коефіцієнти дробу (15), відповідного заданому ряду (1), можна обчислювати наступним чином: $s_0 = s_{0(N)}$; $m_{\vec{i}^*_k}$, $i_p = n,\ 1 \le p \le k,\ 1 \le n \le N,\ k \ge 1$ є діагональними елементами $q^{(0)}_{\vec{i}^*_k}$, $i_p = n,\ 1 \le p \le k,\ 1 \le n \le N,\ k \ge 1$ g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами(8), при $h = 0$;

$$m_{\vec{i}^*_k + \vec{j}^*_h}, \quad i_p = n,\ 1 \le p \le k,\ 1 \le n \le j_h - 1,\ k \ge 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*$$

є діагональними елементами

$$q^{(0)}_{\vec{i}^*_k + \vec{j}^*_h}, \quad i_p = n,\ 1 \le p \le k,\ 1 \le n \le j_h - 1,\ k \ge 1,\ j_r \neq 1,\ 1 \le r \le h,\ \vec{j}^*_h \in \mathcal{I}^*$$

g-таблиці (6) з правилами ромба (7) і початковими умовами (8).

Література

1. Боднар Д.І. *Багатовимірні C-дроби* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — Т. 39, № 3. — С. 39–66.
2. Боднар Д.І., Дмитришин Р.І. *Двовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера* // Доп. НАН України. — 2006. — № 2. — С. 13–18.
3. Дмитришин Р.І. *Ефективна ознака збіжності деякого гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Матем. — 2008. — Вип. 374. — С. 44–49.
4. Дмитришин Р.І. *Про збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 4. — С. 87–92.
5. Кучмінська Х.Й. *Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду* // Доп. АН УРСР. — 1978. — № 7. — С. 614–618.

6. Bauer F.L. *The g-algorithm*, J. Soc. Indust. Appl. Math., **8**, 1 (1960), 1–17.
7. Dmytryshyn R.I. *On the expansion of some functions in a two-dimensional g-fraction with independent variables*, J. Math. Sc., **181**, 3 (2012), 320–327.
8. Dmytryshyn R.I. *The multidimensional generalization of g-fractions and their application*, J. Comp. & Appl. Math., **164–165**, (2004), 265–284.
9. Dmytryshyn R.I. *The multidimensional g-fraction with nonequivalent variables corresponding to the formal multiple power series* // Carpath. Math. Publ., **1**, 2 (2009), 145–151.
10. Dmytryshyn R.I. *The two-dimensional g-fraction with nonequivalent variables for double power series*, Proceedings of ICNAAM 2005. Rhodes, Greece, 2005, 15–18.
11. Cuyt A., Verdonk B. *A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximations*, Appl. Numer. Math., **4**, (1988), 263–271.
12. Jones W.B., Thron W.J. Continued fractions: Analytic theory and applications, Addison-Wesley, Encycl. of Math. & its Appl., Vol. 11, London, Amsterdam, Don Mills, Ontario, Sydney, Tokyo, 1980.
13. Murphy J.F., O'Donohoe M.R. *A two-variable generalisation of the Stieltjes-type continued fractions*, J. Comp. & Appl. Math., **4**, 3, (1978), 181–190.
14. Siemaszko W. *Branched continued fractions for double power series*, J. Comp. & Appl. Math., **6**, 2 (1980), 121–125.
15. Runckel H.-J. *Bounded analytic functions in the unit disk and the behaviour of certain analytic continued fractions near the singular line*, J. reine angew. Math., **281** (1976), 97–125.
16. Wall H.S. Analytic theory of continued fractions, Van Nostrand, New York, 1948.
17. Wall H.S. *Continued fractions and totally monotone sequences*, Trans. Amer. Math. Soc., **48** (1940), 165–184.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 15.07.2012

Dmytryshyn R.I. *The multidimensional generalization of Bauer's g-algorithm*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 247–260.

The algorithm for the expansion of the given formal multiple power series into the corresponding multidimensional g-fraction with independent variables is constructed and the conditions of existence of such algorithm are established.

Дмитришин Р.И. *Многомерное обобщение g-алгоритма Бауера* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 247–260.

Построен алгоритм развития данного формального кратного степенного ряда в соответствующую многомерною g-дробь с неравнозначными переменными и установлены условия существования такого алгоритма.