Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.550.4+517.552

Бродяк О.Я., Васильків Я.В.

ЗОБРАЖЕННЯ ЛОГАРИФМА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

Бродяк О.Я., Васильків Я.В. *Зображення логарифма цілої функції багатьох комплексних змінних* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 204–211.

Отримано інтегральне зображення певної гілки логарифма цілої в $\mathbb{C}^n$ функції, яке узагальнює формулу Пуассона-Іенсена-Штоля.

1 Вступ

Оператори зовнішнього диференціювання ∂ і $\overline{\partial}$ в $\mathbb{C}^n$ визначають співвідношеннями (див., напр., [6, Глава 1])

$$\partial = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\, w_k}\, d\, w_k, \qquad \overline{\partial} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\, \overline{w}_k}\, d\, \overline{w}_k,$$

де $w_k = x_k + i\, y_k,\ \overline{w}_k = x_k - i\, y_k,\ \{x_k, y_k\} \subset \mathbb{R},\ k = 1, 2, \dots, n$, а

$$\frac{\partial}{\partial\, w_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\, x_k} - i\, \frac{\partial}{\partial\, y_k}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\, \overline{w}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\, x_k} + i\, \frac{\partial}{\partial\, y_k}\right)$$

— оператори формальних похідних. Покладемо

$$d := \partial + \overline{\partial} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\, x_k}\, d\, x_k + \frac{\partial}{\partial\, y_k}\, d\, y_k\right), \quad d^{\perp} := i(\partial - \overline{\partial}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\, y_k}\, d\, x_k - \frac{\partial}{\partial\, x_k}\, d\, y_k\right).$$

Нехай

$$\omega^{n-1}(\eta) = \left(\frac{1}{4} d^{\perp} d\, \log|\eta|^2\right)^{n-1}, \qquad \eta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 31B10, 32A15.

Ключові слова і фрази: ціла функція багатьох комплексних змінних, інтегральне зображення.

Робота виконана в рамках науково-дослідних тем "Нові методи комплесного і функціонального аналізу в теорії мероморфних і субгармонійних функцій, теорії операторів та нелінійних динамічних систем"(номер держреєстрації 0112U001272) та "Дослідження властивостей δ-субгармонійних та мероморфних функцій, ряди Фур'є"(номер держреєстрації 0111U002152).

— однорідна метрична форма Фубіні-Штуді,

$$\sigma(\eta) = -\frac{1}{2\pi^n}\, d^{\perp} \log|\eta| \wedge \omega^{n-1}(\eta)$$

— метрична форма Пуанкаре (тобто нормована форма об'єму на сферах $\mathbf{S}^n(r) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| = r\},\ 0 < r < +\infty$).

Нехай $f(w)$ — ціла в $\mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) функція, $f(0) = 1$, $\mathcal{Z}_f = f^{-1}(\{0\}) = \{w \in \mathbb{C}^n : f(w) = 0\}$ — її нульова поверхня, а ν_f — функція кратності нульової поверхні $\mathcal{Z}_f$ (тобто пара $(\mathcal{Z}_f, \nu_f)$ — дивізор функції f).

Покладемо $\langle w, \eta\rangle = w_1\overline{\eta}_1 + \cdots + w_n\overline{\eta}_n$, $\{w, \eta\} \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbf{B}^n(t) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| < t\}$, $\overline{\mathbf{B}}^n(t) = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta| \le t\}$, $\overline{\mathbf{B}}^n_*(t) = \overline{\mathbf{B}}^n(t) \cap \mathbb{C}^n_*$, $\mathbb{C}^n_* = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\zeta\in\mathcal{Z}_f} \zeta(a)$, де $\zeta(a) = a\,\zeta,\ a \in [1, +\infty)$, $0 < t < +\infty$.

В роботі [11] доведено один багатовимірний аналог формули Пуассона-Іенсена. Наведемо його формулювання лише для випадку голоморфної в області $G \subset \mathbb{C}^n$ функції.

Для $y \in \mathbb{C},\ |y| < 1$ і $n \in \mathbb{N}$ позначимо (див. [11, с. 165] або [10, с. 403])

$$L(y) := L_n(y) := \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{d\,y^{n-1}}\left[w^{n-1}\operatorname{Log}(1-y)\right],$$

де символ Log означає головне значення логарифма.

Теорема 1. *Нехай $f \not\equiv 0$ — голоморфна у відкритій зв'язній множині $G \subset \mathbb{C}^n$ функція. Припустимо, що $\overline{\mathbf{B}}^n(r) \subseteq G$ і $\mathcal{Z}_f \cap \mathbf{B}^n(s) = \varnothing$ при деякому $0 < s < r < +\infty$. Припустимо також, що $f(0) = 1$. В кулі $\mathbf{B}^n(s)$ визначимо функцію $\log f(w)$ умовою $\log f(0) = 0$. Якщо $w \in \mathbf{B}^n(s)$, то*

$$\log f(w) = 2\int_{\mathbf{S}^n(r)} \log|f(\eta)| \left[\frac{r^{2n}}{(r^2 - \langle w, \eta\rangle)^n} - 1\right] \sigma(\eta)$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta) \left(L\left(\frac{\langle w, \eta\rangle}{|\eta|^2}\right) - L\left(\frac{\langle w, \eta\rangle}{r^2}\right)\right) \omega^{n-1}(\eta). \tag{1}$$

Зауваження 1.1. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для всіх $w \in \mathbf{B}^n(s)$*

$$\log f(w) = 2\int_{\mathbf{S}^n(r)} \log|f(\eta)| \left(\frac{r^{2n}}{(r^2 - \langle w, \eta\rangle)^n} - 1\right) \sigma(\eta)$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_s^r \frac{dt}{t} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \overline{\mathbf{B}}^n(t)} \nu_f(\eta) \left(1 - \frac{t^n\,|\eta|^n}{(t|\eta| - \langle w, \eta\rangle)^n}\right) \omega^{n-1}(\eta)$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}} \int_s^r \frac{dt}{t} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \overline{\mathbf{B}}^n(t)} \nu_f(\eta) \left(1 - \frac{r^{2n}|\eta|^n}{(r^2|\eta| - t\langle w, \eta\rangle)^n}\right) \omega^{n-1}(\eta), \tag{2}$$

де перший і третій інтеграли є голоморфними в $\mathbf{B}^n(r)$ функціями, а другий — голоморфною в $\mathbf{B}^n(s)$ функцією.

Покажемо, що зображення (1), після відповідних перетворень, набуде вигляду (2). Справді, спочатку подамо співвідношення (1) у наступному вигляді

$$\log f(w) = 2\int_{\mathbf{S}^n(r)} \log|f(\eta)| \left(\frac{r^{2n}}{(r^2-\langle w,\eta\rangle)^n} - 1\right)\sigma(\eta)$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left[L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{|\eta|^2}\right) - L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r\,|\eta|}\right)\right]\omega^{n-1}(\eta)$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left[L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r\,|\eta|}\right) - L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r^2}\right)\right]\omega^{n-1}(\eta).$$

Тоді (див. [10, с. 405]), враховуючи, що для $z\in\mathbb{C},\ |z|<1$

$$L(z) = -\sum_{p=1}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\,\frac{z^p}{p} \qquad \text{та} \qquad \frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\,z^p, \tag{3}$$

і той факт, що $\nu_f(\eta)=0$ для $\eta\in\mathbf{B}^n(s)$, маємо

$$\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left(L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{|\eta|^2}\right) - L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r\,|\eta|}\right)\right)\omega^{n-1}(\eta)$$

$$= -\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left(\sum_{p=1}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\,\frac{\langle w,\eta\rangle^p}{|\eta|^p}\right)\omega^{n-1}(\eta)\int_{|\eta|}^{r}\frac{d\,t}{t^{p+1}}$$

$$= -\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_0^r\left[\int_{|\eta|\le t}\nu_f(\eta)\left(\sum_{p=1}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\,\frac{\langle w,\eta\rangle^p}{|\eta|^p}\right)\omega^{n-1}(\eta)\right]\frac{d\,t}{t^{p+1}}$$

$$= \frac{1}{\pi^{n-1}}\int_s^r\left[\int_{s\le|\eta|\le t}\nu_f(\eta)\left(1-\left(\frac{t|\eta|}{t|\eta|-\langle w,\eta\rangle}\right)^n\right)\omega^{n-1}(\eta)\right]\frac{d\,t}{t},$$

і, відповідно,

$$\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\left(L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r\,|\eta|}\right) - L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{r^2}\right)\right)\omega^{n-1}(\eta)$$

$$= -\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\overline{\mathbf{B}}(r)} \nu_f(\eta)\left(\sum_{p=1}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\,\frac{\langle w,\eta\rangle^p}{r^2\,|\eta|^p}\right)\omega^{n-1}(\eta)\int_{|\eta|}^{r} t^{p-1}\,d\,t$$

$$= -\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_0^r\left[\int_{|\eta|\le t}\nu_f(\eta)\left(\sum_{p=1}^{+\infty} C^p_{p+n-1}\,\frac{\langle w,\eta\rangle^p}{r^2\,|\eta|^p}\right)\omega^{n-1}(\eta)\right] t^{p-1}\,d\,t$$

$$= \frac{1}{\pi^{n-1}}\int_s^r\left[\int_{s\le|\eta|\le t}\nu_f(\eta)\left(1-\left(\frac{r^2|\eta|}{r^2|\eta|-t\langle w,\eta\rangle}\right)^n\right)\omega^{n-1}(\eta)\right]\frac{d\,t}{t}.$$

Враховуючи сказане вище, одержуємо (2).

При доведенні теореми 1 істотно використано наступні два оператори:

1^0. інтегральний оператор

$$\delta^n[g](\zeta) := (n-1)\int_0^1 (1-t)^{n-2}\,g(t\zeta)\,d\,t,$$

2^0. диференціальний оператор

$$\delta_n[g](\zeta) := \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{d\,z^{n-1}}\left[z^{n-1}\,g(z\zeta)\right]\Big|_{z=1},$$

а також їх властивості (див. [11]–[9]), сформульовані у наступному твердженні.

Твердження 1.1. *Нехай g голоморфна в $\mathbf{B}^n(r) \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функція, $\zeta \in \mathbf{B}^n(r)$, $0 < r < +\infty$. Тоді*

a) $\delta^n[g]$ *голоморфна в* $\mathbf{B}^n(r)$;

b) $\delta^n[g](\zeta) = \int\limits_{\mathbf{S}^n(1)} g(\langle\zeta,\eta\rangle\eta)\,\sigma(\eta)$;

c) *якщо* $g(0) = 0$, *то* $\delta_n[g](0) = 0$;

d) $\delta_n[g]$ *голоморфна в* $\mathbf{B}^n(r)$;

e) $\delta_n \circ \delta^n[g] = \delta^n \circ \delta_n[g] = g$.

Формулу Пуассона-Іенсена-Штоля (1) в роботі [1] узагальнено на випадок плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій.

2 Зображення логарифма цілої в $\mathbb{C}^n$ функції

Мета цієї роботи узагальнити теорему 1 на випадок логарифмів цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій. З цією метою подамо наступне означення.

Означення 2.1. *Для цілої в $\mathbb{C}^n$ функції $f(w)$, $f(w) \neq 0$ для всіх w із $\mathbf{B}^n(s)$ при деякому $0 < s < +\infty$, $f(0) = 1$, покладемо*

$$\log\,f(w) := \int_0^{|w|} \frac{f'_x(xw/|w|)}{f(xw/|w|)}\,d\,x, \quad w \in \mathbb{C}^n_*, \quad \log\,f(0) = 0.$$

Правильна наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $f(w)$ — ціла в $\mathbb{C}^n$ функція, $f(w) \neq 0$ в $\mathbf{B}^n(s)$ при деякому $0 < s < R < +\infty$, $f(0) = 1$, $|w| = r$. Тоді для всіх $w \in \mathbf{B}^n_*(R)$*

$$\log\,f(w) = 2\int_{\mathbf{S}^n(R)} \log|f(\eta)|\left(\frac{R^{2n}}{(R^2 - \langle w,\eta\rangle)^n} - 1\right)\sigma(\eta)$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\mathcal{Z}_f\cap\mathbf{B}^n(R)} \nu_f(\eta)\,\omega^{n-1}(\eta)\int_0^r\left(1 - \frac{r^n\,|\eta|^{2n}}{(r|\eta|^2 - t\langle w,\eta\rangle)^n}\right)\frac{dt}{t}$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\mathcal{Z}_f\cap\mathbf{B}^n(R)} \nu_f(\eta)\,\omega^{n-1}(\eta)\int_0^r\left(\frac{R^{2n}r^n}{(R^2 r - t\langle w,\eta\rangle)^n} - 1\right)\frac{dt}{t}. \tag{4}$$

Доведення. В ідейному плані доведення цієї теореми є модифікацією доведення теореми 1 з [1] (порівн. з [11, Теорема 1.7]). Нехай $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$, $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$, $f_\zeta(z) = f(z\zeta)$ — зріз-функція f. З огляду на узагальнену формулу Шварца (див. теореми 1 та 2 з [8] при $u = \log |f_\zeta|$) та формулу Ієнсена [7], маємо

$$\log\, f_\zeta(z) - \sum_{|a_j|\le|z|} \nu_{f_\zeta}(a_j)\, \log\left(1-\frac{z}{a_j}\right) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_\zeta(Re^{i\theta})|\,\frac{z}{Re^{i\theta}-z}\,d\,\theta$$

$$+\sum_{|z|<|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j)\, \log\left(1-\frac{z}{a_j}\right) - \sum_{|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j)\, \log\left(1-\frac{z\,\overline{a}_j}{R^2}\right), \tag{5}$$

де $a_j \in \mathcal{Z}_{f_\zeta}$, $z \in \mathbf{B}^1_*(R)$.

Покладемо

$$F(z\zeta) := \log\, f_\zeta(z) - \sum_{|a_j|\le|z|} \nu_{f_\zeta}(a_j)\, \log\left(1-\frac{z}{a_j}\right).$$

Зауважимо, що правий бік співвідношення (5) є голоморфною в $\mathbf{B}^1(R)$ функцією від змінної z для всіх $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$, а лівий — голоморфною функцією від змінної $z \in \mathbf{B}^1(R)$ для всіх $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$ таких, що $z\,\zeta \in \mathbf{B}^n_*(R)$. Тоді, з теореми про усунення відрізка [2, Теорема 4.15] випливає, що зріз-функція $F(z\zeta)$ також є голоморфною в $\mathbf{B}^1(R)$ функцією від змінної z для всіх $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$, тобто для всіх $z\,\zeta \in \mathbf{B}^n(R)$.

Зважаючи на те, що

$$\log\left(1-\frac{z}{a}\right) = -\int\limits_0^{|z|} \frac{t\,z\,\overline{a}}{|z|\,|a|^2 - t\,z\,\overline{a}}\,\frac{d\,t}{t}, \qquad \log\left(1-\frac{z\,\overline{a}}{R^2}\right) = -\int\limits_0^{|z|} \frac{t\,z\,\overline{a}}{R^2\,|z| - t\,z\,\overline{a}}\,\frac{d\,t}{t},$$

подамо співвідношення (5) у наступному вигляді

$$\log\, f_\zeta(z) + \sum_{|a_j|\le|z|} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|z|} \frac{t\,z\,\overline{a}_j}{|z|\,|a_j|^2 - tz\overline{a}_j}\,\frac{d\,t}{t} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_\zeta(Re^{i\theta})|\,\frac{z\,Re^{-i\theta}}{R^2 - z\,Re^{-i\theta}}\,d\,\theta$$

$$-\sum_{|z|<|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|z|} \frac{t\,z\,\overline{a}_j}{|z|\,|a_j|^2 - tz\overline{a}_j}\,\frac{d\,t}{t} + \sum_{|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|z|} \frac{t\,z\,\overline{a}_j}{R^2\,|z| - t\,z\,\overline{a}_j}\,\frac{d\,t}{t}. \tag{6}$$

Візьмемо $w \in \mathbf{B}^n(R)$ і $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$. Замінимо в (6) z на $\langle w, \zeta\rangle$ і зауважимо, що $|\langle w, \zeta\rangle| < R$. Тоді

$$F(\langle w,\zeta\rangle\,\zeta) := \log\, f(\langle w,\zeta\rangle\,\zeta) + \sum_{|a_j|\le|\langle w,\zeta\rangle|} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\langle w,\, a_j\zeta\rangle}{|\langle w,\zeta\rangle|\,|a_j\,\zeta|^2 - t\langle w, a_j\zeta\rangle}\,\frac{d\,t}{t}$$

$$= \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta}\zeta)|\,\frac{\langle w,\, Re^{i\theta}\zeta\rangle}{R^2 - \langle w,\, Re^{i\theta}\zeta\rangle}\,\frac{d\,\theta}{\pi} - \sum_{|\langle w,\zeta\rangle|<|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j)$$

$$\times \int\limits_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\langle w,\, a_j\zeta\rangle}{|\langle w,\zeta\rangle|\,|a_j\,\zeta|^2 - t\langle w, a_j\zeta\rangle}\,\frac{d\,t}{t} - \sum_{|a_j|<R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int\limits_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\,\langle w, a_j\zeta\rangle}{R^2\,|\langle w,\zeta\rangle| - t\,\langle w, a_j\zeta\rangle}\,\frac{d\,t}{t}. \tag{7}$$

Тепер усереднимо всі складові співвідношення (7) за параметром $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$. Враховуючи п. b) твердження 1.1, маємо

$$\int_{\mathbf{S}^n(1)} F(\langle w, \zeta\rangle\, \zeta)\sigma(\zeta) = \delta^n[F](w). \tag{8}$$

Крім того, позаяк метрична форма Пуанкаре $\sigma(\bullet)$ інваріантна відносно обертань [3, Твердження 1.4.7], то

$$\int_{\mathbf{S}^n(1)} \frac{\sigma(\zeta)}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \log|f(Re^{i\theta}\zeta)| \frac{\langle w,\, Re^{i\theta}\zeta\rangle}{R^2 - \langle w,\, Re^{i\theta}\zeta\rangle}\, d\,\theta = \int_{\mathbf{S}^n(R)} \log|f(\eta)| \frac{\langle w, \eta\rangle}{R^2 - \langle w, \eta\rangle} \sigma(\eta). \tag{9}$$

Інтегрування по $\mathbf{S}^n(1)$ можна здійснити спочатку по перетину $\mathbf{S}^n(1)$ з комплексною прямою $l_\zeta := \{\xi = \lambda\,\zeta\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbf{S}^n(1)$, тобто по колу $\{|\lambda| = 1\}$, а потім по сукупності $\{l_\zeta\}$ таких прямих (див., напр., [4, Глава 3], [5, с. 254-255]). Оскільки на комплексній прямій l_ζ форма $-\dfrac{1}{2\,\pi}\, d^\perp \log|\xi| = \dfrac{d\,\theta}{2\,\pi}$, де $\theta = \arg\lambda$, то враховуючи, що $\sigma(\xi) = -\dfrac{1}{2\,\pi^n}\, d^\perp \log|\xi| \wedge \omega^{n-1}(\xi)$ і ті факти, що метрична форма $\omega^{n-1}(\bullet)$ інваріантна відносно розтягів та обертань, одержимо

$$\int_{\mathbf{S}^n(1)} \sigma(\zeta) \sum_{|a_j| \le |\langle w,\zeta\rangle|} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\langle w,\, a_j\zeta\rangle}{|\langle w,\zeta\rangle|\,|a_j|^2 - t\langle w, a_j\zeta\rangle} \frac{d\,t}{t}$$

$$= \int_{\{l_\zeta\}} \frac{\omega^{n-1}(\xi)}{\pi^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{2\pi} \sum_{|a_j e^{i\theta}| \le |\langle w,\zeta\rangle|} \nu_{f_\zeta}(a_j e^{i\theta}) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{\langle t\, w,\, a_j e^{i\theta}\zeta\rangle}{|\langle w,\zeta\rangle|\,|a_j e^{i\theta}|^2 - t\langle w, a_j e^{i\theta}\zeta\rangle} \frac{d\,t}{t}$$

$$= \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \overline{\mathbf{B}}^n(r)} \nu_f(\eta)\omega^{n-1}(\eta) \int_0^r \frac{t\,\langle w, \eta\rangle}{r|\eta|^2 - t\langle w,\eta\rangle} \frac{d\,t}{t}, \tag{10}$$

$$\int_{\mathbf{S}^n(1)} \sigma(\zeta) \sum_{|\langle w,\zeta\rangle| < |a_j| < R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\langle w,\, a_j\zeta\rangle}{|\langle w,\zeta\rangle|\,|a_j|^2 - t\langle w, a_j\zeta\rangle} \frac{d\,t}{t}$$

$$= \int_{\{l_\zeta\}} \frac{\omega^{n-1}(\xi)}{\pi^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{2\pi} \sum_{|\langle w,\zeta\rangle| < |a_j e^{i\theta}| < R} \nu_{f_\zeta}(a_j e^{i\theta}) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{\langle t\, w,\, a_j e^{i\theta}\zeta\rangle}{|\langle w,\zeta\rangle|\,|a_j e^{i\theta}|^2 - t\langle w, a_j e^{i\theta}\zeta\rangle} \frac{d\,t}{t}$$

$$= \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \{\mathbf{B}^n(R) \setminus \overline{\mathbf{B}}^n(r)\}} \nu_f(\eta)\omega^{n-1}(\eta) \int_0^r \frac{t\,\langle w, \eta\rangle}{r|\eta|^2 - t\langle w,\eta\rangle} \frac{d\,t}{t}, \tag{11}$$

$$\int_{\mathbf{S}^n(1)} \sigma(\zeta) \sum_{|a_j| < R} \nu_{f_\zeta}(a_j) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\,\langle w, a_j\zeta\rangle}{R^2\,|\langle w,\zeta\rangle| - t\,\langle w, a_j\zeta\rangle} \frac{d\,t}{t}$$

$$= \int_{\{l_\zeta\}} \frac{\omega^{n-1}(\xi)}{\pi^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{2\pi} \sum_{|a_j e^{i\theta}| < R} \nu_{f_\zeta}(a_j e^{i\theta}) \int_0^{|\langle w,\zeta\rangle|} \frac{t\,\langle w, a_j e^{i\theta}\zeta\rangle}{R^2\,|\langle w,\zeta\rangle| - t\,\langle w, a_j e^{i\theta}\zeta\rangle} \frac{d\,t}{t}$$

$$= \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathcal{Z}_f \cap \mathbf{B}^n(R)} \nu_f(\eta)\omega^{n-1}(\eta) \int_0^r \frac{t\langle w, \eta\rangle}{R^2 r - t\langle w,\eta\rangle} \frac{d\,t}{t}. \tag{12}$$

Отже, з урахуванням співвідношень (8), (9), (11) та (12), маємо

$$\delta^n[F](w) = \int_{\mathbf{S}^n(R)} \log|f(\eta)| \frac{\langle w,\eta\rangle}{R^2-\langle w,\eta\rangle}\sigma(\eta)$$

$$-\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\mathcal{Z}_f\cap\{\mathbf{B}^n(R)\setminus\overline{\mathbf{B}}^n(r)\}} \nu_f(\eta)\omega^{n-1}(\eta)\int_0^r \frac{t\,\langle w,\eta\rangle}{r|\eta|^2-t\langle w,\eta\rangle}\frac{d\,t}{t}$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\mathcal{Z}_f\cap\mathbf{B}^n(R)} \nu_f(\eta)\omega^{n-1}(\eta)\int_0^r \frac{t\langle w,\eta\rangle}{R^2r-t\langle w,\eta\rangle}\frac{d\,t}{t}. \tag{13}$$

Застосовуючи тепер оператор δ_n до співвідношення (13) і враховуючи, що

$$\delta_n\circ\delta^n[F]=F, \qquad \delta_n\left[\frac{\langle w,\bullet\rangle}{R^2-\langle w,\bullet\rangle}\right]=\frac{R^{2n}}{(R^2-\langle w,\bullet\rangle)^n}-1,$$

$$\delta_n\left[\frac{t\,\langle\, w,\bullet\rangle}{r|\bullet|^2-t\,\langle w,\bullet\rangle}\right]=\frac{r^n|\bullet|^{2n}}{(r|\bullet|^2-t\langle w,\bullet\rangle)^n}-1, \quad \delta_n\left[\frac{t\langle w,\bullet\rangle}{R^2r-t\langle w,\bullet\rangle}\right]=\frac{R^{2n}r^n}{(R^2r-t\langle w,\bullet\rangle)^n}-1,$$

і співвідношення (7) та (10), отримуємо (4) для всіх $w\in\mathbf{B}^n_*(R)$. □

3 Завершальне зауваження

Зауваження 3.1. *Нехай виконуються умови теореми 2 і нехай $w\in\mathbf{B}^n(s)$. Тоді, враховуючи співвідношення (3), співвідношення (4) набуде вигляду*

$$\log\, f(w) = 2\int_{\mathbf{S}^n(R)} \log\,|f(\eta)|\left[\frac{R^{2\,n}}{(R^2-\langle w,\eta\rangle)^n}-1\right]\sigma(\eta)$$

$$+\frac{1}{\pi^{n-1}}\int_{\mathcal{Z}_f\cap\mathbf{B}^n(R)}\nu_f(\eta)\,\left(L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{|\eta|^2}\right)-L\left(\frac{\langle w,\eta\rangle}{R^2}\right)\right)\,\omega^{n-1}(\eta),$$

тобто отримуємо твердження теореми 1.

Література

1. Бродяк О.Я., Васильків Я.В., Тарасюк С.І. *$H(p,q)$-розвинення плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій* // Вісн. Харківського національного у-ту. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". — 2010. — №931. — С. 73–92.
2. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В., Скасків О.Б. Комплексний аналіз. — Львів: Афіша, 2008. — 203 с.
3. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. — М.: Мир, 1984. — 455 с.
4. Чирка Е.М. Комплексные аналитические множества. — М.: Наука, 1985. — 272 с.
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, Ч. 2. — М.: Наука, 1985. — 464 с.
6. Шабат Б.В. Распределение значений голоморфных отображений. — М.: Наука, 1982. — 288 с.
7. Jensen J.L. W.V. *Sur un nouvel et important theoreme de la theorie des fonctions*, Acta Math., **22**, (1899), 359–364.
8. Kondratyuk A.A., Vasyl'kiv Ya. V. *Congjugate of subharmonic function*, Math. Stud., **13**, 13 (2010), 173-180.

9. Kujala R.O. *Functions of finite λ-type in several complex variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **161**, (1971), 327–358.

10. Stoll W. *About entire and meromorphic functions of exponential type*, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc. Providence, R.I., **11**, (1968), 392–430.

11. Stoll W. *Normal familes of non-negative divisors*, Math. Z., **84**, (1964), 154–218.

Національний університет "Львівська політехніка",

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, Україна

e-mail: *brodyakoksana@mail.ru, yavvasylkiv@gmail.com*

Надійшло 20.02.2012

Brodyak O.Ya., Vasyl'kiv Ya.V. *Representation of logarithm of entire function in several complex variables*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 204–211.

The integral representation of some branch of an entire on $\mathbb{C}^n$ function which generalized the Poisson-Jensen-Stoll Formula is obtained.

Бродяк О.Я., Василькив Я.В. *Представление логарифма целой функции многих комплексных переменных* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 204–211.

Получено интегральное представление определенной ветви логарифма целой в $\mathbb{C}^n$ функции, обобщающее формулу Пуассона-Иенсена-Штоля.