Карпатські математичні
публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.4, №1

УДК 517.9

Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І.

МАТРИЧНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ІНТЕГРОВНИХ СИСТЕМ З ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ЗОБРАЖЕННЯМИ ЛАКСА

Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. *Матричні узагальнення інтегровних систем з інтегро-диференціальними зображеннями Лакса* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 125–144.

Знайдені інтегро-диференціальні зображення Лакса для матричних моделей Деві-Стюартсона (DS-I, DS-II, DS-III), просторово-двовимірних узагальнень рівняння Чена-Лі-Лю та їх вищих симетрій. А саме, модифікованих рівнянь Кортевега-де Вріза, Нижника, тощо. Наведено деякі матричні багатовимірні узагальнення рівняння Бюргерса.

1 Вступ

1.1 Вихідні поняття та позначення

В цьому розділі ми стисло наводимо необхідні означення та поняття, пов'язані з алгеброю формальних символів псевдодиференціальних (мікродиференціальних) операторів (МДО, див., наприклад [16, 18, 22]).

Розглянемо над полем $\mathbb{C}$ лінійний простір ζ МДО вигляду

$$L \in \zeta = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{n(L)} a_j D^j \,:\, n(L) \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{1}$$

де коефіцієнти a_j є функціями "просторової" змінної $x = t_1$ і еволюційних параметрів $t_2, t_3, \ldots$. Коефіцієнти $a_j(t)$, $t = (t_1, t_2, \ldots)$, вважаються гладкими функціями векторної змінної t, яка має скінченну кількість компонент, і належать деякому функціональному простору A, який є диференціальною алгеброю стосовно звичайних арифметичних дій; $D := \dfrac{\partial}{\partial x}$ — оператор диференціювання.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 33Q58, 37K10, 37K15.
Ключові слова і фрази: матричні інтегровні системи, інтегро-диференціальні зображення Лакса, матричні рівняння Бюргерса.

Операції додавання і множення операторів на скаляри (елементи поля $\mathbb{C}$) вводяться так

$$\lambda_1 L_1 \pm \lambda_2 L_2 = \sum_{i=-\infty}^{N_1} \lambda_1 a_{1j} D^j \pm \sum_{j=-\infty}^{N_2} \lambda_2 a_{2j} D^j = \sum_{j=-\infty}^{\max\langle N_1, N_2\rangle} (\lambda_1 a_{1j} \pm \lambda_2 a_{2j}) D^j, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Структура алгебри Лі на лінійному просторі ζ (1) визначається комутатором Лі $[\cdot,\cdot] : \zeta \times \zeta \to \zeta$, $[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1$, де композиція (операторне множення) МДО L_1 та L_2 індукується загальним правилом Лейбніца

$$D^n f := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} f^{(j)} D^{n-j}, \tag{2}$$

$n \in \mathbb{Z}$, $f \in A \subset \zeta$, $f^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in A \subset \zeta$, $D^n D^m = D^m D^n = D^{n+m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, де $\binom{n}{0} := 1$, $\binom{n}{j} := \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j!}$.

Формула (2) задає композицію оператора $D^n \in \zeta$ і оператора множення на функцію $f \in A \subset \zeta$ (як оператора нульового порядку) на відміну від позначення $D^k\{f\} := \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in A$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Розглянемо мікродиференціальний оператор Лакса

$$L := WDW^{-1} = D + \sum_{j=1}^{\infty} U_j D^{-j}, \tag{3}$$

який параметризується нескінченною кількістю динамічних змінних $U_j = U_j(t_1, t_2, t_3, \ldots)$, $j \in \mathbb{N}$, що залежать від довільного (скінченного) числа незалежних змінних $t_1 := x$, t_2, t_3, ..., і диференціальним чином виражаються через функціональні коефіцієнти формального одягаючого оператора (оператора перетворення) Захарова-Шабата

$$W = I + \sum_{j=1}^{\infty} w_j D^{-j}. \tag{4}$$

Обернений до формального оператора W є оператор вигляду

$$W^{-1} = I + \sum_{j=1}^{\infty} a_j D^{-j}, \; WW^{-1} = W^{-1}W = I,$$

де коефіцієнти a_j, $j \in \mathbb{N}$ є диференціальними поліномами від коефіцієнтів w_k, $k \in \mathbb{N}$ оператора (4). В скалярному випадку ієрархія Кадомцева-Петвіашвілі — це комутативна сім'я еволюційних рівнянь Лакса для оператора (3)

$$\alpha_i L_{t_i} = [B_i, L] := B_i L - L B_i, \tag{5}$$

де $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, а оператор $B_i := (L^i)_+$ є диференціальною частиною i-ого степеня мікродиференціального символа L. Символом L_{t_i} позначається оператор вигляду

$$L_{t_i} := (WDW^{-1})_{t_i} = \sum_{j=1}^{\infty} (U_j)_{t_i} D^{-j}.$$

Під формально транспонованим та ермітово спряженими операторами відповідно розумітимемо вирази

$$L^\tau := -D + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j D^{-j} U_j^\top, L^* := \bar{L}^\tau.$$

Рівняння Захарова-Шабата (5) виникають у цьому підході внаслідок комутативності двох довільних потоків (5) при $i = m$ та $i = n$:

$$L_{t_m t_n} = L_{t_n t_m} \Longrightarrow [\alpha_n \partial_{t_n} - B_n, \alpha_m \partial_{t_m} - B_m] = \alpha_m B_{n t_m} - \alpha_n B_{m t_n} + [B_n, B_m] = 0.$$

1.2 Нелокальні симетрійні редукції KP-ієрархії

Розглянемо симетрійну k-редукцію оператора L [20, 26, 31, 32], яка є нелокальним узагальненням k-редукцій Гельфанда-Дікого

$$(L^k)_- := (L^k)_{<0} = \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top = \int^x \mathbf{q}(x, t_2, t_3, \ldots)\mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top(s, t_2, t_3, \ldots) \cdot ds, \tag{6}$$

де $\mathrm{Mat}_{l\times l}(\mathbb{C}) \ni \mathcal{M}_0$ є сталою матрицею, а функції $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_l)$, $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_l)$ є фіксованими розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_n \mathbf{q}_{t_n} = B_n\{\mathbf{q}\}, \\ \alpha_n \mathbf{r}_{t_n} = -B_n^\tau\{\mathbf{r}\}, \end{cases} \tag{7}$$

де $n \in \mathbb{N}$. В правій частині формули (6) стоїть символ інтегрального оператора Вольтери з виродженим ядром. Формально транспонований оператор до оператора (6) матиме вигляд $((L^k)_-)^\tau = -\mathbf{r}\mathcal{M}_0^\top D^{-1}\mathbf{q}^\top$.

Редукційні обмеження (6) накладають нелокальні в'язі на функціональні коефіцієнти оператора L і розв'язки еволюційних рівнянь (7), сумісні з динамікою в силу рівнянь Лакса (5). Редуковані потоки (5), (6), (7) допускають операторне зображення Лакса вигляду

$$[L_k, M_n] = 0, \text{ де } L_k = B_k + \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top, \ M_n = \alpha_n \partial_{t_n} - B_n, \tag{8}$$

і є (1+1)-вимірними інтегровними системами для коефіцієнтів U_i , $i = \overline{1, k-1}$ і власних та спряжених власних функцій $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$:

$$\begin{cases} U_{it_n} = P_{in}[U_1, U_2, ..., U_{k-1}, \mathbf{q}, \mathbf{r}], \\ \mathbf{q}_{t_n} = B_n[U_i, \mathbf{q}, \mathbf{r}]\{\mathbf{q}\}, \ \mathbf{r}_{t_n} = -B_n^\tau[U_i, \mathbf{q}, \mathbf{r}]\{\mathbf{r}\}, \end{cases} \tag{9}$$

де $i = \overline{1, k-1}$, P_{in}, B_n — диференціальні поліноми стосовно динамічних змінних, що вказані в квадратних дужках.

(2+1)-вимірні узагальнення зображень Лакса

$$[L_k, M_n] = 0, \tag{10}$$

де L_k є інтегро-диференціальним (2+1)-вимірним оператором вигляду

$$L_k = \alpha\partial_y - B_k - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top,$$

а M_n в зображенні (10) є еволюційним стосовно змінної t_n, чисто диференціальним (без інтегральної складової) оператором порядку n відносно просторової змінної x

$$M_n = \alpha_n\partial_{t_n} - \sum_{j=1}^{n} v_j\mathcal{D}^j, \tag{11}$$

запропоновано в роботах [5, 7]. Серед рівнянь, які допускають операторні зображення (10)-(11), є, зокрема, важливі з точки зору фізичних застосувань, векторні (2+1)-вимірні узагальнення нелінійної моделі Деві-Стюартсона (DS-III, при $k = 1, n = 2$), Яджими-Ойкави ($k = 2, n = 2$) та рівнянь Мельникова ($k = 2, n = 3$) і розширена (2+1)-вимірна система Бусинеска ($k = 3, n = 2$). Деякі з цих систем, як в розмірності (1+1), так і в розмірності (2+1), ми розглянемо в наступному розділі. Метод побудови точних розв'язків відповідних (1+1) та (2+1)-вимірних рівнянь Лакса (8)-(11) запропоновано в роботах [13, 34]. В кінці розділу 3 ми наводимо матричні узагальнення рівнянь Деві-Стюартсона [21] (DS-I, DS-II, пропущені в роботах [5, 7]), для яких обидва оператори в лаксовому зображенні (10) є інтегро-диференціальними. Альтернативні зображення для цих рівнянь в алгебрі чисто диференціальних операторів більш високої матричної розмірності можна знайти в роботі [17]. В розділі 4 ми розглядаємо інтегро-диференціальні зображення Лакса для матричного просторово-двовимірного узагальнення модифікованого рівняння Кортевега-де Вріза, рівняння Нижника та Вєсєлова-Новікова, які відсутні в роботі [17]. В розділі 5 ми пропонуємо, на наш погляд, нове просторово-двовимірне матричне узагальнення нелінійного рівняння Шредінгера, яке по аналогії з (1+1)-вимірним випадком можна назвати рівнянням Чена-Лі-Лю [16, 19]. Зауважимо, що при додатковій редукції в (2+1)-вимірній моделі Чена-Лі-Лю отримується просторово-двовимірне матричне узагальнення рівняння Бюргерса та його вища симетрія. У розділі 6 ми розглядаємо матричні та багатовимірні рівняння Бюргерса які є прикладом так званих C^2-інтегровних систем [27, 30].

В заключному розділі ми стисло окреслюємо можливість подальших застосувань результатів цієї роботи.

2 Нелінійні моделі KP-ієрархії з нелокальними в'язями та їх редукції

Розглянемо приклади рівнянь (8)-(9) та (10)-(11) для деяких k та n:

1. $k = 1, n = 2$:

$$\begin{aligned} L_1 &= D + \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^*, \\ M_2 &= \alpha_2\partial_{t_2} - D^2 - 2\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*, \end{aligned} \tag{12}$$

де $\alpha_2 \in i\mathbf{R}$, $\mathcal{M}_0^* = \mathcal{M}_0$. Рівняння $[L_1, M_2] = 0$ еквівалентне векторному узагальненню нелінійного рівняння Шредінгера $\alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2\left(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right)\mathbf{q}$.

Тепер розглянемо (2+1)-вимірні узагальнення формальних виразів (12):

$$\begin{aligned} L_1 &= \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*, \\ M_2 &= \alpha_2\partial_{t_2} - c_1\mathcal{D}^2 - 2c_1 S_1, \end{aligned}$$

де $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$, $S_1 = S_1(x, y, t_2) = \bar{S}_1(x, y, t_2)$,$c_1 \in \mathbb{R}$.

Операторне рівняння $[L_1, M_2] = 0$ еквівалентне третій моделі Деві-Стюартсона (DS-III):

$$\begin{cases} \alpha_2 \mathbf{q}_{t_2} = c_1 \mathbf{q}_{xx} - 2c_1 S_1 \mathbf{q}, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x. \end{cases} \tag{13}$$

З системи (13) при $y = x, l = 1$ отримаємо нелінійне рівняння Шредінгера, в зв'язку з чим ця система називається *просторово двовимірним l-компонентним узагальненням нелінійного рівняння Шредінгера.*

2. $k = 1, n = 3:$

$$\begin{gathered} L_1 = D + \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^*, \\ M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^* D - 3\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*. \end{gathered} \tag{14}$$

Операторне рівняння $[L_1, M_3] = 0$ еквівалентне системі

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3\left(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right)\mathbf{q}_x + 3\left(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right)\mathbf{q}. \tag{15}$$

Просторово-двовимірні узагальнення виразів (14) мають вигляд

$$\begin{gathered} L_1 = \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^*, \\ M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} + c_1 D^3 - 3c_1 v_1 D - 3c_1 v_3, \end{gathered}$$

а операторне рівняння $[L_1, M_3] = 0$ еквівалентне такій системі:

$$\begin{cases} \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_x - 3c_1 v_3\mathbf{q} = 0, \\ v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x,\ v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x. \end{cases} \tag{16}$$

Рівняння (15) є векторним узагальненням комплексного рівняння Кортевега-де Вріза (KdV), а система (16) є його (2+1)-вимірною версією.

3. $k = 2, n = 2 : L_2 = D^2 + 2u + \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^*$, $M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - D^2 - 2u$, де $\mathcal{M}_0^* = -\mathcal{M}_0$, $u = \bar{u}$, $\alpha_2 \in i\mathbf{R}$. Операторне рівняння $[L_2, M_2] = 0$ еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2u\mathbf{q}, \\ \alpha_2 u_{t_2} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x. \end{cases}$$

(2+1)-вимірні узагальнення формальних виразів L_2, M_2 матимуть вигляд

$$L_2 = i\partial_y - \mathcal{D}^2 - 2u - \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*,$$

$$M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - \mathcal{D}^2 - 2u,$$

де $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_0^*$, $u = \bar{u}$.

Рівняння $[L_2, M_2] = 0$ можна записати еквівалентним чином у вигляді системи

$$\begin{cases} \alpha_2 u_{t_2} = iu_y + (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x, \\ \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2u\mathbf{q}. \end{cases} \tag{17}$$

Система (17) є l-компонентним просторово-двовимірним узагальненням рівнянь Яджими-Ойкави.

4. $k=2, n=3: L_2 = D^2 + 2u + \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^*$, $M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3uD - \frac{3}{2}(u_x + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)$, де $\mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_0^*$, $u = \bar{u}$, $\alpha_3 \in \mathbf{R}$. Рівняння $[L_2, M_3] = 0$ еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \frac{3}{2}u_x\mathbf{q} + \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}, \\ \alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + \frac{3}{4}\left(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^* - \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}_x^*\right)_x. \end{cases}$$

Просторово-двовимірні узагальнення операторів L_2, M_3 мають такий вигляд

$$L_2 = i\partial_y - D^2 - 2u - \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*,$$
$$M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3uD - \frac{3}{2}\left(u_x + iD^{-1}\{u_y\} + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right),$$

де $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_0^* = -\mathcal{M}_0$, $u = \bar{u}$. Рівняння $[L_2, M_3] = 0$ еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \frac{3}{2}\left(u_x + iD^{-1}\{u_y\} + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right)\mathbf{q}, \\ \Big[\alpha_3 u_{t_3} - \frac{1}{4}u_{xxx} - 3uu_x + \frac{3}{4}\left(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}_x^* - \mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right)_x \\ \qquad -\frac{3}{4}i\left(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right)_y\Big]_x = -\frac{3}{4}u_{yy}. \end{cases}$$

3 Інтегро-диференціальні зображення Лакса для матричних узагальнень систем DS-I, DS-II, DS-III

Розглянемо такі узагальнення операторів L_1, M_2 (2):

$$L_1 = \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top,$$

$$M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - c_1 D^2 - c_2\partial_y^2 + 2c_1 S_1 + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}_y^\top + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top\partial_y,$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x,y,t_2)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y,t_2)$ та $S_1 = S_1(x,y,t_2)$ — матричні функції розмірностей $N \times M$ та $N \times N$ відповідно; $\mathcal{M}_0$ — стала матриця розмірності $M \times M$.

Операторне рівняння $[L_1, M_2] = 0$ еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = c_1\mathbf{q}_{xx} + c_2\mathbf{q}_{yy} - 2c_1 S_1\mathbf{q} - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ -\alpha_2\mathbf{r}_{t_2}^\top = c_1\mathbf{r}_{xx}^\top + c_2\mathbf{r}_{yy}^\top - 2c_1\mathbf{r}^\top S_1 - 2c_2 S_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x,\ S_{2x} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{18}$$

При $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$ допустима редукція $\mathbf{r}^\top = \mathbf{q}^*$, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0^*$, оператор M_2 буде ермітовим, а система (18) набуде вигляду

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = c_1\mathbf{q}_{xx} + c_2\mathbf{q}_{yy} - 2c_1 S_1\mathbf{q} - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x,\ S_{2x} = (\mathbf{q}^*\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{19}$$

Якщо у системі (19) покласти $c_2 = 0$, то отримаємо

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = c_1\mathbf{q}_{xx} - 2c_1 S_1\mathbf{q}, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x. \end{cases} \tag{20}$$

При $c_1 = 0$ система (19) набуде вигляду

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = c_2\mathbf{q}_{yy} - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ S_{2x} = (\mathbf{q}^*\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{21}$$

Системи (20) та (21) є матричними узагальненнями моделі Деві-Стюартсона (DS-III) [2, 7, 24]. У випадку, коли $u := \mathbf{q}$, $\mathcal{M}_0 := \mu$ — скаляри, система (19) матиме вигляд

$$\begin{cases} \alpha_2 u_{t_2} = c_1 u_{xx} + c_2 u_{yy} - 2c_1 S_1 u - 2\mu c_2 S_2 u, \\ S_{1y} = \mu(|u|^2)_x, \ S_{2x} = (|u|^2)_y. \end{cases} \tag{22}$$

Поклавши $c_1 = c_2 = 1$, $\mu = 1$ отримаємо звідси такий диференціальний наслідок

$$\begin{cases} \alpha_2 u_{t_2} = u_{xx} + u_{yy} - 2Su, \\ S_{xy} = (|u|^2)_{xx} + (|u|^2)_{yy}, \end{cases} \tag{23}$$

де $S = S_1 + S_2$.

Тепер в системі (22) покладемо $c_1 = -c_2 = 1$, $\mu = 1$. Зробивши заміну $\tilde{x} = x - y$, $\tilde{y} = x + y$ та поклавши $\tilde{S}(\tilde{x}, \tilde{y}, t_2) := S_1(x, y, t_2) - S_2(x, y, t_2)$, $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, t_2) := u(x, y, t_2)$; $\tilde{x} := x$, $\tilde{y} := y$, отримаємо систему

$$\begin{cases} \alpha_2 \tilde{u}_{t_2} = 4\tilde{u}_{xy} - 2\tilde{u}\tilde{S}, \\ \tilde{S}_{yy} - \tilde{S}_{xx} = 4|\tilde{u}|^2_{xy}. \end{cases} \tag{24}$$

Системи (23), (24) є різними реалізаціями першої моделі Деві-Стюартсона (DS-I).

Розглянемо тепер формальні інтегродиференціальні вирази $L_1 = \partial_{\bar{z}} - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1} \mathbf{r}^\top$, $M_2 = \alpha_2 \partial_{t_2} - c_1 D_{zz}^2 - c_2 \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 + 2c_1 S_1 + 2c_2 \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1} \mathbf{r}_{\bar{z}}^\top + 2c_2 \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1} \mathbf{r}^\top \partial_{\bar{z}}$, де $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(z, \bar{z}, t_2)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(z, \bar{z}, t_2)$ та $S_1 = S_1(z, \bar{z}, t_2)$ – матричні функції розмірностей $N \times M$, та $N \times N$ відповідно; $\mathcal{M}_0$ – стала матриця розмірності $M \times M$.

Операторне рівняння $[L_1, M_2] = 0$ еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_2 \mathbf{q}_{t_2} = c_1 \mathbf{q}_{zz} + c_2 \mathbf{q}_{\bar{z}\bar{z}} - 2c_1 S_1 \mathbf{q} - 2c_2 \mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ -\alpha_2 \mathbf{r}_{t_2}^\top = c_1 \mathbf{r}_{zz}^\top + c_2 \mathbf{r}_{\bar{z}\bar{z}}^\top - 2c_1 \mathbf{r}^\top S_1 - 2c_2 S_2 \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top, \\ S_{1\bar{z}} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top)_z, \ S_{2z} = (\mathbf{r}^\top \mathbf{q})_{\bar{z}}. \end{cases} \tag{25}$$

В змінних t_2, x, y при $c_1 = c_2 = 1$ система (25) виглядатиме так:

$$\begin{cases} 2\alpha_2 \mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} - \mathbf{q}_{yy} - 4S_1 \mathbf{q} - 4\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ -2\alpha_2 \mathbf{r}_{t_2}^\top = \mathbf{r}_{xx}^\top - \mathbf{r}_{yy}^\top - 4\mathbf{r}^\top S_1 - 4S_2 \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top, \\ S_{1x} + iS_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top)_x - i(\mathbf{q}\mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top)_y, \ S_{2x} - iS_{2y} = (\mathbf{r}^\top \mathbf{q})_x + i(\mathbf{r}^\top \mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{26}$$

При $N = M$ ($\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ – квадратні матриці), $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$ система (26) допускає редукцію $\mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top = \bar{\mathbf{q}}$, $S_1 = \bar{S}_2$ і набуває вигляду

$$\begin{cases} 2\alpha_2 \mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} - \mathbf{q}_{yy} - 4S_1 \mathbf{q} - 4\mathbf{q}\bar{S}_1, \\ S_{1x} + iS_{1y} = (\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_x - i(\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_y. \end{cases} \tag{27}$$

У скалярному випадку ($N = M = 1$), $u := \mathbf{q}$ система (27) зводиться до вигляду

$$\begin{cases} 2\alpha_2 u_{t_2} = u_{xx} - u_{yy} - 8\hat{S}u, \\ \hat{S}_{xx} + \hat{S}_{yy} = |u|^2_{xx} - |u|^2_{yy}, \end{cases} \tag{28}$$

де $\hat{S} = \mathrm{Re}(S_1)$.

Якщо ж покласти у системі (25) $c_1 = -c_2 = i$, то отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_2 \mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xy} - 2iS_1\mathbf{q} + 2i\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ -\alpha_2 \mathbf{r}^\top_{t_2} = \mathbf{r}^\top_{xy} - 2i\mathbf{r}^\top S_1 + 2iS_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, \\ S_{1x} + iS_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - i(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_y, \ S_{2x} - iS_{2y} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_x + i(\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y. \end{array} \right. \tag{29}$$

При $N = M$ ($\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ – квадратні матриці), $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$ для системи (29) допустима редукція $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = \bar{\mathbf{q}}$, $S_1 = \bar{S}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xy} - 2iS_1\mathbf{q} + 2i\mathbf{q}\bar{S}_1, \\ S_{1x} + iS_{1y} = (\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_x - i(\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_y. \end{array} \right. \tag{30}$$

У скалярному випадку ($N = M = 1$) диференціальним наслідком системи (30) є рівняння

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \tilde{u}_{t_2} = \tilde{u}_{xy} + 4\tilde{S}\tilde{u}, \\ \tilde{S}_{xx} + \tilde{S}_{yy} = -4|\tilde{u}|^2_{xy}, \end{array} \right. \tag{31}$$

де $\tilde{S}$=$\mathrm{Im}(S_1)$, $\tilde{u} := \mathbf{q}$.

Системи (28) та (31) є різними реалізаціями моделі Деві-Стюартсона (DS-II).

4 Інтегро-диференціальні зображення Лакса для матричного просторово-двовимірного узагальнення модифікованого рівняння Кортевега-де Вріза

Розглянемо таке узагальнення пари виразів L_1, M_3 (14)

$$L_1 = \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top, \tag{32}$$

$$M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} + c_1 D^3 - c_2\partial_y^3 - 3c_1 v_1 D - 3c_1 v_3 + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top_y$$
$$-3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0\partial_y D^{-1}\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top + 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top + 3c_2\partial_y\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top\partial_y, \tag{33}$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y, t_3)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, t_3)$ та $v_1 = v_1(x, y, t_3)$, $v_3 = v_3(x, y, t_3)$ — матричні функції розмірності $N \times M$ та $N \times N$ відповідно. Операторне рівняння $[L_1, M_3] = 0$ еквівалентне системі

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - c_2\mathbf{q}_{yyy} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_x + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_{2y} - 3c_1 v_3\mathbf{q} - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_4$$
$$-3c_2\mathbf{q}D^{-1}\left\{\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\right\} = 0,$$
$$\alpha_3\mathbf{r}^\top_{t_3} + c_1\mathbf{r}^\top_{xxx} - c_2\mathbf{r}^\top_{yyy} - 3c_1\mathbf{r}^\top_x v_1 - 3c_1\mathbf{r}^\top v_{1x} + 3c_2 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top_y + 3c_1\mathbf{r}^\top v_3 + 3c_2 v_4\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top$$
$$-3c_2 D^{-1}\left\{v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q} - \mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2\right\}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = 0,$$
$$v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x,\ v_{2x} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y,\ v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, v_1],\ v_{4x} = (\mathbf{r}^\top_y\mathbf{q})_y. \tag{34}$$

Розглянемо деякі редукції системи (34):

1). При $c_2 = 0$ система (34) набуде вигляду

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_x - 3c_1 v_3\mathbf{q} = 0,$$
$$\alpha_3\mathbf{r}^\top_{t_3} + c_1\mathbf{r}^\top_{xxx} - 3c_1\mathbf{r}^\top_x v_1 - 3c_1\mathbf{r}^\top v_{1x} + 3c_1\mathbf{r}^\top v_3 = 0,$$
$$v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x,\ v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, v_1]. \tag{35}$$

2). При $c_1 = 0$ система (34) набуде вигляду

$$\alpha_3 \mathbf{q}_{t_3} - c_2 \mathbf{q}_{yyy} + 3c_2 \mathbf{q}_y \mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2 \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_{2y} - 3c_2 \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_4$$

$$-3c_2 \mathbf{q} D^{-1} \left\{ \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2 \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top \mathbf{q} \right\} = 0,$$

$$\alpha_3 \mathbf{r}^\top_{t_3} - c_2 \mathbf{r}^\top_{yyy} + 3c_2 v_2 \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top_y + 3c_2 v_4 \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top - 3c_2 D^{-1} \left\{ v_2 \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top \mathbf{q} - \mathbf{r}^\top \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_2 \right\} \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top = 0,$$

$$v_{2x} = (\mathbf{r}^\top \mathbf{q})_y, \ v_{4x} = (\mathbf{r}^\top_y \mathbf{q})_y$$

3). При допустимій редукції $\alpha_3, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r}^\top = \mathbf{q}^*$, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0^*$, оператори L_1, M_3 будуть косоермітовими, а система (34) набуде вигляду

$$\alpha_3 \mathbf{q}_{t_3} + c_1 \mathbf{q}_{xxx} - c_2 \mathbf{q}_{yyy} - 3c_1 v_1 \mathbf{q}_x + 3c_2 \mathbf{q}_y \mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2 \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_{2y} - 3c_1 v_3 \mathbf{q} - 3c_2 \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_4$$

$$-3c_2 \mathbf{q} D^{-1} \left\{ \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^* \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2 \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^* \mathbf{q} \right\} = 0,$$

$$v_{1y} = (\mathbf{q} \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^*)_x, \ v_{2x} = (\mathbf{q}^* \mathbf{q})_y, \ v_{3y} = (\mathbf{q}_x \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^*)_x + [\mathbf{q} \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^*, v_1], \ v_{4x} = (\mathbf{q}^*_y \mathbf{q})_y. \tag{36}$$

В скалярному випадку ($N = M = 1$, $\mathbb{R} \ni \mu := \mathcal{M}_0$, $q(x, y, t_3) := \mathbf{q}(x, y, t_3)$) система (36) матиме вигляд

$$\alpha_3 q_{t_3} + c_1 q_{xxx} - c_2 q_{yyy} - 3c_1 \mu q_x \int |q|^2_x dy$$

$$+3c_2 \mu q_y \int |q|^2_y dx + 3c_2 \mu q \int (\bar{q} q_y)_y dx - 3c_1 \mu q \int (q_x q)_x dy = 0.$$

3а). Якщо покласти $c_2 = 0$, то система (36) набуде вигляду

$$\alpha_3 \mathbf{q}_{t_3} + c_1 \mathbf{q}_{xxx} - 3c_1 v_1 \mathbf{q}_x - 3c_1 v_3 \mathbf{q} = 0,$$

$$v_{1y} = (\mathbf{q} \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^*)_x, \ v_{3y} = (\mathbf{q}_x \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^*)_x + [\mathbf{q} \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^*, v_1].$$

3б). У випадку $c_1 = 0$ система (36) буде такою

$$\alpha_3 \mathbf{q}_{t_3} - c_2 \mathbf{q}_{yyy} + 3c_2 \mathbf{q}_y \mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2 \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_{2y} - 3c_2 \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_4$$

$$-3c_2 \mathbf{q} D^{-1} \left\{ \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^* \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2 \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^* \mathbf{q} \right\} = 0,$$

$$v_{2x} = (\mathbf{q}^* \mathbf{q})_y, \ v_{4x} = (\mathbf{q}^*_y \mathbf{q})_y.$$

3в). У дійсному випадку ($\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$) рівняння (36) набуде вигляду

$$\alpha_3 \mathbf{q}_{t_3} + c_1 \mathbf{q}_{xxx} - c_2 \mathbf{q}_{yyy} - 3c_1 v_1 \mathbf{q}_x + 3c_2 \mathbf{q}_y \mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2 \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_{2y} - 3c_1 v_3 \mathbf{q} - 3c_2 \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_4$$

$$-3c_2 \mathbf{q} D^{-1} \left\{ \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^\top \mathbf{q} \mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2 \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^\top \mathbf{q} \right\} = 0,$$

$$v_{1y} = (\mathbf{q} \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^\top)_x, \ v_{2x} = (\mathbf{q}^\top \mathbf{q})_y, \ v_{3y} = (\mathbf{q}_x \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^\top)_x + [\mathbf{q} \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^\top, v_1], \ v_{4x} = (\mathbf{q}^\top_y \mathbf{q})_y. \tag{37}$$

У скалярному випадку ($N = M = 1$) рівняння (37) виглядатиме так ($\mathcal{M}_0 =: \mu$, $q = q(x, y, t_3) := \mathbf{q}(x, y, t_3)$)

$$\alpha_3 q_{t_3} + c_1 q_{xxx} - c_2 q_{yyy} - 3c_1 \mu (q_x + \frac{1}{2} q \partial_x) \int q^2_x dy + 3c_2 \mu (q_y + \frac{1}{2} q \partial_y) \int q^2_y dx = 0. \tag{38}$$

При $y = x$, $c_1 - c_2 = 1$ рівняння (38) набуде такого вигляду

$$\alpha_3 q_{t_3} + q_{xxx} - 6\mu q^2 q_x = 0. \tag{39}$$

Рівняння (39) називається модифікованим рівнянням Кортевега-де Вріза (mKdV), а рівняння (36) та (37) є, відповідно, його комплексним та дійсним матричними просторово-двовимірними узагальненнями.

4). Накладемо редукцію $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = \nu$, де ν — стала матриця. Після заміни $u := \mathbf{q}\nu$ система (34) набуде вигляду

$$\begin{gathered}\alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 D\left\{\left(\int u_x dy\right)u\right\} + 3c_2\partial_y\left\{u\left(\int u_y dx\right)\right\}\\ -3c_1\left(\int [u, v_1]dy\right)u - 3c_2 u D^{-1}\{[u, v_2]\} = 0,\\ \nu\left(c_1\int [u, v_1]dy - c_2 D^{-1}\{[v_2, u]\}\right) = 0,\\ v_{1y} = u_x,\ v_{2x} = u_y. \end{gathered}\tag{40}$$

4а). Якщо $c_2 = 0$, то система (40) виглядатиме так

$$\alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - 3c_1 D\left\{\left(\int u_x dy\right)u\right\} - 3c_1\left(\int [u, v_1]dy\right)u = 0,$$

$$\nu\int [u, v_1]dy = 0, v_{1y} = u_x.$$

4б). У випадку $c_1 = 0$ система (40) набуде такого вигляду

$$\alpha_3 u_{t_3} - c_2 u_{yyy} + 3c_2\partial_y\left\{u\left(\int u_y dx\right)\right\} + 3c_2 u D^{-1}\{[u, v_2]\} = 0,$$

$$\nu D^{-1}\{[v_2, u]\} = 0,\ v_{2x} = u_y.$$

В скалярному випадку ($N = 1, M = 1$) система (40) виглядатиме так

$$\alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 D\left\{\left(\int u_x dy\right)u\right\} + 3c_2\partial_y\left\{u\left(\int u_y dx\right)\right\} = 0. \tag{41}$$

Рівняння (41) є рівнянням Нижника [28], а система (40) узагальнює його на матричний випадок.

Тепер розглянемо такі формальні інтегро-диференціальні вирази

$$L_1 = \partial_{\bar z} - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top,$$

$$\begin{gathered}M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} + c_1 D_z^3 - c_2\partial_{\bar z}^3 - 3c_1 v_1 D_z - 3c_1 v_3 + 3c_2\mathbf{q}_{\bar z}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}_{\bar z}^\top + 3c_2\mathbf{q}_{\bar z}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top\\ +3c_2\mathbf{q}v_2\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top + 3c_2\partial_{\bar z}\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top\partial_{\bar z} - 3c_2\partial_{\bar z}\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top,\end{gathered}$$

де $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(z, \bar z, t_3)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(z, \bar z, t_3)$ та $S_1 = S_1(z, \bar z, t_3)$ – матричні функції розмірностей $N \times M$ та $N \times N$ відповідно; $\mathcal{M}_0$ – стала матриця розмірності $M \times M$.

Операторне рівняння $[L_1, M_3] = 0$ еквівалентне системі

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{zzz} - c_2\mathbf{q}_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} - 3c_1v_1\mathbf{q}_z + 3c_2\mathbf{q}_{\bar{z}}\mathcal{M}_0v_2 + 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0v_{2\bar{z}} - 3c_1v_3\mathbf{q} - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0v_4$$
$$-3c_2\mathbf{q}D_z^{-1}\left\{\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0v_2 - \mathcal{M}_0v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\right\} = 0,$$
$$\alpha_3\mathbf{r}^\top_{t_3} + c_1\mathbf{r}^\top_{zzz} - c_2\mathbf{r}^\top_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} - 3c_1\mathbf{r}^\top_z v_1 - 3c_1\mathbf{r}^\top v_{1z} + 3c_2v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top_{\bar{z}} + 3c_1\mathbf{r}^\top v_3 + 3c_2v_4\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top$$
$$-3c_2D_z^{-1}\left\{v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q} - \mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0v_2\right\}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = 0,$$
$$v_{1\bar{z}} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_z,\ v_{2z} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_{\bar{z}},\ v_{3\bar{z}} = (\mathbf{q}_z\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_z + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, v_1],\ v_{4z} = (\mathbf{r}^\top_{\bar{z}}\mathbf{q})_{\bar{z}}.$$

Покладаючи $c_1 = -c_2 = 1$ та, враховуючи, що $z = x + iy$, отримаємо систему

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + \frac{1}{4}(\mathbf{q}_{xxx} - 3\mathbf{q}_{xyy}) - \frac{3}{2}v_1(\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y) - \frac{3}{2}(\mathbf{q}_x + i\mathbf{q}_y)\mathcal{M}_0v_2 - \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}_0(v_{2x} + iv_{2y}) - 3v_3\mathbf{q}$$
$$+3\mathbf{q}\mathcal{M}_0v_4 - 3\mathbf{q}D_z^{-1}\left\{\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0v_2 - \mathcal{M}_0v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\right\} = 0,$$
$$\alpha_3\mathbf{r}^\top_{t_3} + \frac{1}{4}(\mathbf{r}^\top_{xxx} - 3\mathbf{r}^\top_{xyy}) - \frac{3}{2}(\mathbf{r}^\top_x - i\mathbf{r}^\top_y)v_1 - \frac{3}{2}\mathbf{r}^\top(v_{1x} - iv_{1y}) - \frac{3}{2}v_2\mathcal{M}_0(\mathbf{r}^\top_x + i\mathbf{r}^\top_y) + 3\mathbf{r}^\top v_3 - 3v_4\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top$$
$$-3D_z^{-1}\left\{v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q} - \mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0v_2\right\}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = 0,$$
$$v_{1x} + iv_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - i(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_y,\ v_{2x} - iv_{2y} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_x + i(\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y,$$
$$v_{3x} + iv_{3y} = \frac{1}{2}((\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y)\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - \frac{i}{2}((\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y)\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_y + 2[\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, v_1],$$
$$v_{4x} - iv_{4y} = \frac{1}{2}((\mathbf{r}^\top_x + i\mathbf{r}^\top_y)\mathbf{q})_x + \frac{i}{2}((\mathbf{r}^\top_x + i\mathbf{r}^\top_y)\mathbf{q})_y. \tag{42}$$

Розглянемо дві редукції останньої системи:

1). При $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $N = M$ для системи (42) допустима редукція $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = \bar{\mathbf{q}}$, а система (42) при цьому набуде такого вигляду

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + \frac{1}{4}(\mathbf{q}_{xxx} - 3\mathbf{q}_{xyy}) - \frac{3}{2}v_1(\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y) - \frac{3}{2}(\mathbf{q}_x + i\mathbf{q}_y)\bar{v}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{q}(\bar{v}_{1x} + i\bar{v}_{1y}) - 3v_3\mathbf{q} + 3\mathbf{q}\bar{v}_3 = 0,$$
$$v_{1x} + iv_{1y} = (\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_x - i(\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_y,$$
$$v_{3x} + iv_{3y} = \frac{1}{2}((\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y)\bar{\mathbf{q}})_x - \frac{i}{2}((\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y)\bar{\mathbf{q}})_y + 2[\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}, v_1].$$

2). Накладемо редукцію $\mathbf{q}\mathcal{M}_0 = \nu$, де ν – стала матриця. Після заміни $u := \nu\mathbf{r}^\top$ система (42) набуде вигляду

$$\left\{\begin{array}{c}
\left(D_{\bar{z}}^{-1}\{[u, v_1]\} + D_z^{-1}\{[u, v_2]\}\right)\nu = 0,\\
\alpha_3u_{t_3} + \frac{1}{4}(u_{xxx} - 3u_{xyy}) - \frac{3}{2}(u_x - iu_y)v_1\\
-\frac{3}{2}u(v_{1x} - iv_{1y}) - \frac{3}{2}v_2(u_x + iu_y) + 3uD_{\bar{z}}^{-1}\{[u, v_1]\}\\
-\frac{3}{4}D_z^{-1}\{u_{xx} - u_{yy} + 2iu_{xy}\}u - 3D_z^{-1}\{[v_2, u]\}u = 0,\\
v_{1x} + iv_{1y} = u_x - iu_y,\\
v_{2x} - iv_{2y} = u_x + iu_y.
\end{array}\right.$$

В скалярному випадку система (4) виглядатиме так

$$\left\{\begin{array}{c}
\alpha_3u_{t_3} + \frac{1}{4}(u_{xxx} - 3u_{xyy}) - \frac{3}{4}(u_x - iu_y)D_{\bar{z}}^{-1}\{u_x - iu_y\}\\
-\frac{3}{4}(u_x + iu_y)D_z^{-1}\{u_x + iu_y\} - \frac{3}{2}uD_z^{-1}\{u_{xx} - u_{yy}\} = 0,\\
v_{1x} + iv_{1y} = u_x - iu_y,\ v_{2x} - iv_{2y} = u_x + iu_y.
\end{array}\right. \tag{43}$$

Рівняння (43) є рівняннями Вєсєлова-Новікова [1], а система (4) є їх матричним узагальненням.

5 Інтегро-диференціальні зображення Лакса для просторово-двовимірного матричного узагальнення моделі Чена-Лі-Лю

Розглянемо формальні інтегро-диференціальні вирази:

$$L_1 = \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top D, \tag{44}$$

$$M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - c_1 D^2 - c_2\partial_y^2 + 2c_1 S_1 D + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\partial_y\mathbf{r}^\top D. \tag{45}$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y, t_2)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, t_2)$ та $S_1 = S_1(x, y, t_2)$ – матричні функції розмірностей $N \times M$ та $N \times N$ відповідно; $\mathcal{M}_0$ – стала матриця розмірності $M \times M$.

Умова $[L_1, M_2] = 0$ еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} - c_1\mathbf{q}_{xx} - c_2\mathbf{q}_{yy} + 2c_1 S_1\mathbf{q}_x - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2 + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0(\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y = 0, \\ \left(\alpha_2\mathbf{r}_{t_2}^\top + c_1\mathbf{r}_{xx}^\top + c_2\mathbf{r}_{yy}^\top + 2c_1\mathbf{r}_x^\top S_1 + 2c_2 S_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\right)_x = 0, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, S_1],\ S_{2x} = (\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{46}$$

Система (46) є матричним просторово-двовимірним узагальненням системи Чена-Лі-Лю [19].

Розглянемо можливі редукції системи (46):

1). $c_2 = 0$:

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} - c_1\mathbf{q}_{xx} + 2c_1 S_1\mathbf{q}_x = 0, \\ \left(\alpha_2\mathbf{r}_{t_2}^\top + c_1\mathbf{r}_{xx}^\top + 2c_1\mathbf{r}_x^\top S_1\right)_x = 0, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, S_1]. \end{cases}$$

2). $c_1 = 0$:

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} - c_2\mathbf{q}_{yy} - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2 + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0(\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y = 0, \\ \left(\alpha_2\mathbf{r}_{t_2}^\top + c_2\mathbf{r}_{yy}^\top + 2c_2 S_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\right)_x = 0, \\ S_{2x} = (\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q})_y. \end{cases}$$

3). При додаткових умовах $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_0^*$, $\mathbf{r}^\top = \mathbf{q}^*$, $S_1 = S_1^*$ формальні вирази L_1 (44) та M_2 (45) будуть D-косоермітовим ($L_1^* = -DL_1D^{-1}$) та D-ермітовим ($M_2^* = DM_2D^{-1}$) відповідно і матимуть вигляд

$$L_1 = \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^* D,$$

$$M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - c_1 D^2 - c_2\partial_y^2 + 2c_1 S_1 D + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\partial_y\mathbf{q}^* D,$$

а система (46) виглядатиме так:

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} - c_1\mathbf{q}_{xx} - c_2\mathbf{q}_{yy} + 2c_1 S_1\mathbf{q}_x - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2 + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0(\mathbf{q}^*\mathbf{q})_y = 0, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*, S_1],\ S_{2x} = (\mathbf{q}_x^*\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{47}$$

В скалярному випадку ($N = M = 1$) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $y = x$, $\mu := \mathcal{M}_0$, $q = q(x, y, t_2) := \mathbf{q}(x, y, t_2)$ ми отримаємо з системи (47) модель Чена-Лі-Лю [19]

$$\alpha_2 q_{t_2} - q_{xx} + 2\mu|q|^2 q_x = 0.$$

4). При редукції $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = \nu$, де ν – стала матриця, формальні вирази L_1 (44) та M_1 (45) будуть диференціальними, а система (46) після заміни $u := \mathbf{q}\nu$ матиме вигляд

$$\begin{cases} \alpha_2 u_{t_2} - c_1 u_{xx} - c_2 u_{yy} + 2c_1 S_1 u_x + 2c_2 u u_y = 0, \\ S_{1y} = u_x + [u, S_1]. \end{cases} \tag{48}$$

Система (48) є матричним просторово-двовимірним узагальненням рівняння Бюргерса. Ми розглянемо детальніше це рівняння та побудову його розв'язків у наступному розділі.

Для побудови вищої симетрії просторово-двовимірного узагальнення рівняння Чена-Лі-Лю розглянемо такі формальні інтегро-диференціальні вирази:

$$L_1 = \partial_y - \mathbf{q}D^{-1}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top D, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} M_3 = {}& \alpha_3\partial_{t_3} + c_1 D^3 - c_2\partial_y^3 - 3c_1 v_1 D^2 - 3c_1 v_3 D + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 D^{-1}\partial_y\mathbf{r}^\top D \\ & +3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\partial_y\mathbf{r}^\top\partial_y D - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0\partial_y D^{-1}\mathbf{r}^\top D\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top D \\ & +3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\}_y D^{-1}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top D, \end{aligned} \tag{50}$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x,y,t_3)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y,t_3)$ та $v_1 = v_1(x,y,t_3)$, $v_3 = v_3(x,y,t_3)$ – матричні функції розмірності $N\times M$ та $N\times N$ відповідно, $\mathcal{M}_0$ – стала $(M\times M)$-матриця. Умова $[L_1, M_3] = 0$ еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{aligned} & \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - c_2\mathbf{q}_{yyy} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_{xx} - 3c_1 v_3\mathbf{q}_x + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\}_y \\ & +3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_{xy}\}_y - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\left\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\}_y - D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\right\} \\ & -3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\}_y = 0, \\ & \big(\ \alpha_3\mathbf{r}_{t_3}^\top + c_1\mathbf{r}_{xxx}^\top - c_2\mathbf{r}_{yyy}^\top + 3c_1(\mathbf{r}_x^\top v_1)_x - 3c_1\mathbf{r}_x^\top v_3 - 3c_2 D^{-1}\{\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q}\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{r}_y^\top \\ & -3c_2 D^{-1}\{\mathbf{r}_{xy}^\top\mathbf{q}\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top - 3c_2 D^{-1}\left\{D^{-1}\{\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q}\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q} - \mathbf{r}_x^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q}\}_y\right\}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top \\ & -3c_2 D^{-1}\{\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\ \big)_x = 0, \\ & v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - [v_1, \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top], \\ & v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - \left\{2v_1\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top + v_1\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}_x^\top + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}_x^\top v_1\right\} - [v_3, \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top]. \end{aligned} \tag{51}$$

1). При додаткових умовах $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_0^*$, $\mathbf{r}^\top = \mathbf{q}^*$, $v_1 = v_1^*$, $v_3 + v_3^* = v_{1x}$, формальні вирази L_1 (49) та M_3 (50) будуть D-косоермітовими ($L_1^* = -DL_1D^{-1}$, $M_3^* = -DM_3D^{-1}$), а система (51) матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - c_2\mathbf{q}_{yyy} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_{xx} - 3c_1 v_3\mathbf{q}_x + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y \\ & +3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_{xy}\}_y - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\left\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y - D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\right\} \\ & -3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y = 0, \\ & v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x - [v_1, \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*], \\ & v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x - \{2v_1\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^* + v_1\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}_x^* + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}_x^* v_1\} - [v_3, \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*]. \end{aligned} \tag{52}$$

У векторному випадку ($\mathbf{q}$ – вектор, тобто $M=1$), система (52) матиме такий вигляд

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3}+c_1\mathbf{q}_{xxx}-c_2\mathbf{q}_{yyy}-3c_1v_1\mathbf{q}_{xx}-3c_1v_3\mathbf{q}_x+3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y$$

$$+3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_{xy}\}_y-3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\left\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y-D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\right\}$$

$$-3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y=0,$$

$$v_{1y}=(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x,$$

$$v_{3y}=(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x-2v_1(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*+\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*_x). \tag{53}$$

В скалярному випадку ($N=1$, $M=1$, $\mathcal{M}_0=:\mu$, $q=q(x,y,t_3):=\mathbf{q}(x,y,t_3)$) система (53) виглядатиме так:

$$\alpha_3q_{t_3}+c_1q_{xxx}-c_2q_{yyy}-3c_1v_1q_{xx}-3c_1v_3q_x+3\mu c_2q_yD^{-1}\{\bar{q}q_x\}_y+$$

$$+3c_2\mu qD^{-1}\{\bar{q}q_{xy}\}_y-3c_2\mu^2qD^{-1}\{|q|^2\bar{q}q_x\}_y=0,$$

$$v_{1y}=\mu(|q|^2)_x,$$

$$v_{3y}=\mu(q_x\bar{q})_x-2\mu v_1(|q|^2)_x. \tag{54}$$

При $c_1=1$, $c_2=0$, y з системи (54) отримаємо вищу симетрію рівняння Чена-Лі-Лю:

$$\alpha_3q_{t_3}+q_{xxx}-3\mu|q|^2q_{xx}-3\mu\bar{q}q_x^2+3\mu^2|q|^4q_x=0.$$

2). При редукції $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top=\nu$ формальний вираз L_1 (49) буде диференціальним, а система (51) після заміни $u:=\mathbf{q}\nu$ матиме вигляд

$$\alpha_3u_{t_3}+c_1u_{xxx}-c_2u_{yyy}-3c_1v_1u_{xx}-3c_1v_3u_x+3c_2u_y^2+3c_2uu_{yy}-3c_2u^2u_y=0,$$

$$v_{1y}=u_x-[v_1,u],$$

$$v_{3y}=u_{xx}-2v_1u_x-[v_3,u]. \tag{55}$$

Рівняння (55) є вищою симетрією матричного просторово-двовимірного рівянння Бюргерса, яка розглядатиметься детальніше у наступному розділі.

6 Узагальнення рівняння Бюргерса та їх розв'язки

У цьому розділі ми розглянемо два матричні різновиди просторово-двовимірних узагальнень рівняння Бюргерса. А саме, систему (48) та рівняння такого вигляду:

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha_2u_{t_2}-c_1u_{xx}-c_2u_{yy}+2c_1u_xS_1+2c_2u_yu=0,\\ S_{1y}=u_x+[u,S_1].\end{array}\right. \tag{56}$$

Твердження 6.1. *Нехай $T := T(x, y, t_2)$ – $(N\times N)$-матрична функція, яка задовольняє рівняння*

$$\alpha_2 T_{t_2} = c_1 T_{xx} + c_2 T_{yy}. \tag{57}$$

Тоді:

1. $N \times N$ матричні функції $u := -T^{-1}T_y$ та $S_1 = -T^{-1}T_x$ задовольняють матричне просторово-двовимірне рівняння Бюргерса (48).

2. $N \times N$ матричні функції $u := -T_y T^{-1}$ та $S_1 = -T_x T^{-1}$ задовольняють матричне просторово-двовимірне рівняння Бюргерса (56).

Розглянемо тепер такі узагальнення рівняння Бюргерса:

$$\begin{cases} \alpha_2 u_{t_2} - c_1 u_{xx} - c_2 u_{yy} + 2c_1 S_1 u_x + 2c_2 u u_y = 0, \\ \alpha_2 S_{1t_2} - c_1 S_{1xx} - c_2 S_{1yy} + 2c_1 S_1 S_{1x} + 2c_2 u S_{1y} = 0. \end{cases} \tag{58}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 u_{t_2} - c_1 u_{xx} - c_2 u_{yy} + 2c_1 u_x S_1 + 2c_2 u_y u = 0, \\ \alpha_2 S_{1t_2} - c_1 S_{1xx} - c_2 S_{1yy} + 2c_1 S_{1x} S_1 + 2c_2 S_{1y} u = 0. \end{cases} \tag{59}$$

У випадку $N > 1$ розв'язки систем (58) та (59) будуть також розв'язками систем (48) та (56) відповідно. У цьому неважко переконатись, продиференціювавши друге рівняння системи (48) за змінною t_2 та використавши обидва рівняння системи (58). Аналогічним чином встановлюється зв'язок між (56) та (59). Зауважимо, що функції u та S_1, введені в Твердженні 6.1, будуть також розв'язками рівнянь (58) та (59) відповідно. Узагальнення рівнянь (58), (59) та підстановок типу Хопфа-Коула на $(n+1)$-вимірний випадок проведено у Твердженні 6.2.

В скалярному випадку ($N = 1$) усі чотири рівняння (48), (56), (58), (59) будуть еквівалентними. Тобто, множини їх розв'язків збігатимуться. Це можна перевірити, продиференціювавши друге рівняння системи (48) за змінною t_2 та проінтегрувавши за змінною y.

Матричне рівняння Бюргерса (58) допускають природнє узагальнення на $(n + 1)$ - вимірний випадок:

$$\alpha_2 (S_k)_{t_2} - \sum_{i=1}^{n} c_i (S_k)_{x_i x_i} + 2\sum_{i=1}^{n} c_i S_i (S_k)_{x_i} = 0, \ k = \overline{1, n}, \tag{60}$$

де $S_k = S_k(t_2, x_1, \ldots, x_n)$ — $(N \times N)$-матричні функції.

Аналогічним чином узагальнюється рівняння (59):

$$\alpha_2 (S_k)_{t_2} - \sum_{i=1}^{n} c_i (S_k)_{x_i x_i} + 2\sum_{i=1}^{n} c_i (S_k)_{x_i} S_i = 0, \ k = \overline{1, n}. \tag{61}$$

Рівняння (60) можна записати і в більш компактній формі:

$$\alpha_2 \mathbf{S}_{t_2} = \Delta_2 \mathbf{S} - 2\mathbf{S}\nabla_1 \mathbf{S}, \tag{62}$$

де $\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_n)$, $\Delta_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_{x_i}^2$, $\nabla_1 = (c_1\partial_{x_1}, \ldots, c_n\partial_{x_n})^\top$.

Подібним чином можна записати рівняння (61):

$$\alpha_2\tilde{\mathbf{S}}_{t_2} = \Delta_2\tilde{\mathbf{S}} - 2(\nabla_1\tilde{\mathbf{S}}^\top)^\top\tilde{\mathbf{S}}, \tag{63}$$

де $\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}$. Для систем (62) та (63) існує аналог лінеаризуючої підстановки Хопфа-Коула. А саме, справедливе таке твердження:

Твердження 6.2. *Нехай функція T задовольняє систему $\alpha_2 T_{t_2} = \Delta_2 T$. Тоді функції $\mathbf{S} := -(T^{-1}T_{x_1}, \ldots, T^{-1}T_{x_n})$ та $\tilde{\mathbf{S}} := -\begin{pmatrix} T_{x_1}T^{-1} \\ \vdots \\ T_{x_n}T^{-1} \end{pmatrix}$ задовольнятимуть рівняння (62) та (63) відповідно.*

Тепер перейдемо до вищої симетрії просторово-двовимірного рівняння Бюргерса (55)

$$\begin{cases} \alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 v_1 u_{xx} - 3c_1 v_3 u_x + 3c_2 u_y^2 + 3c_2 u u_{yy} - 3c_2 u^2 u_y = 0, \\ v_{1y} = u_x - [v_1, u], \\ v_{3y} = u_{xx} - 2v_1 u_x - [v_3, u]. \end{cases} \tag{64}$$

Для системи (64) допустима редукція: $v_3 = v_{1x} - v_1^2$, після якої вона набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 v_1 u_{xx} - 3c_1(v_{1x} - v_1^2)u_x + 3c_2 u_y^2 + 3c_2 u u_{yy} - 3c_2 u^2 u_y = 0, \\ v_{1y} = u_x - [v_1, u]. \end{cases} \tag{65}$$

По аналогії з просторово-двовимірними узагальненнями рівняння Бюргерса другого порядку, розглянемо ще одне рівняння типу Бюргерса третього порядку

$$\begin{cases} \alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 u_{xx} v_1 - 3c_1 u_x(v_{1x} - v_1^2) + 3c_2 u_y(u_y - u^2) + 3c_2 u_{yy} u = 0, \\ v_{1y} = u_x - [v_1, u]. \end{cases} \tag{66}$$

Має місце аналог твердження 6.1 для рівнянь (65), (66):

Твердження 6.3. *Нехай $T := T(x, y, t_3)$ — $(N \times N)$-матрична функція, яка задовольняє рівняння $\alpha_3 T_{t_3} + c_1 T_{xxx} - c_2 T_{yyy} = 0$. Тоді:*

1. $N \times N$ матричні функції $u := -T^{-1}T_y$ та $v_1 = -T^{-1}T_x$ задовольняють матричне просторово-двовимірне рівняння Бюргерса (65).

2. $N \times N$ матричні функції $u := -T_y T^{-1}$ та $S_1 = -T_x T^{-1}$ задовольняють матричне просторово-двовимірне рівняння Бюргерса (66).

Розглянемо такі два матричні узагальнення рівняння типу Бюргерса третього порядку:

$$\begin{cases} \alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 v_1 u_{xx} - 3c_1(v_{1x} - v_1^2)u_x + 3c_2 u u_{yy} + 3c_2(u_y - u^2)u_y = 0, \\ \alpha_3 v_{1t_3} + c_1 v_{1xxx} - c_2 v_{1yyy} - 3c_1 v_1 v_{1xx} - 3c_1(v_{1x} - v_1^2)v_{1x} + 3c_2 u v_{1yy} + 3c_2(u_y - u^2)v_{1y} = 0. \end{cases} \tag{67}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 u_{xx} v_1 - 3c_1 u_x (v_{1x} - v_1^2) + 3c_2 u_{yy} u + 3c_2 u_y (u_y - u^2) = 0, \\ \alpha_3 v_{1t_3} + c_1 v_{1xxx} - c_2 v_{1yyy} - 3c_1 v_{1xx} v_1 - 3c_1 v_{1x} (v_{1x} - v_1^2) + 3c_2 v_{1yy} u + 3c_2 v_{1y} (u_y - u^2) = 0. \end{cases} \tag{68}$$

У випадку $N > 1$ розв'язки систем (67) та (68) будуть також розв'язками систем (65) та (66) відповідно. Це перевіряється аналогічним чином як і для рівнянь типу Бюргерса другого порядку.

В скалярному випадку ($N = 1$) рівняння (65), (66), (67) та (68) будуть еквівалентними.

Узагальнення на $(n+1)$-вимірний випадок матричних рівнянь Бюргерса (67) та (68) мають вигляд

$$\alpha_3 (v_k)_{t_3} + \sum_{i=1}^{n} c_i (v_k)_{x_i x_i x_i} - 3 \sum_{i=1}^{n} c_i v_i (v_k)_{x_i x_i} - 3 \sum_{i=1}^{n} c_i (v_{i x_i} - v_i^2) v_{k x_i} = 0, \; k = \overline{1, n}, \tag{69}$$

$$\alpha_3 (v_k)_{t_3} + \sum_{i=1}^{n} c_i (v_k)_{x_i x_i x_i} - 3 \sum_{i=1}^{n} c_i (v_k)_{x_i x_i} v_i - 3 \sum_{i=1}^{n} c_i v_{k x_i} (v_{i x_i} - v_i^2) = 0, \; k = \overline{1, n}, \tag{70}$$

де $v_k = v_k(t_3, x_1, \dots, x_n)$ — $(N \times N)$-матричні функції.

Скорочена форма запису рівнянь (69) виглядає так:

$$\alpha_3 \mathbf{v}_{t_3} + \Delta_3 \mathbf{v} - 3\mathbf{v}\nabla_2 \mathbf{v} - 3\mathbf{u}\nabla_1 \mathbf{v} = 0, \tag{71}$$

де $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\Delta_3 = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_{x_i}^3$, $\nabla_2 = (c_1 \partial_{x_1}^2, \dots, c_n \partial_{x_n}^2)^\top$, $\nabla_1 = (c_1 \partial_{x_1}, \dots, c_n \partial_{x_n})^\top$, $\mathbf{u} = (v_{1x_1} - v_1^2, \dots, v_{nx_n} - v_n^2)$

Аналогічним чином можна записати рівняння (70):

$$\alpha_3 \tilde{\mathbf{v}}_{t_3} + \Delta_3 \tilde{\mathbf{v}} - 3(\nabla_2 \tilde{\mathbf{v}}^\top)^\top \tilde{\mathbf{v}} - 3(\nabla_1 \tilde{\mathbf{v}}^\top)^\top \tilde{\mathbf{u}} = 0, \tag{72}$$

де $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} v_{1x_1} - v_1^2 \\ \vdots \\ v_{nx_n} - v_n^2 \end{pmatrix}$.

Як і для $(n+1)$-вимірних рівнянь типу Бюргерса другого порядку (див. Твердження 6.2), для рівнянь (71) та (72) теж існує аналог підстановки Хопфа-Коула, тобто, справедливе твердження:

Твердження 6.4. *Нехай функція T задовольняє систему:*

$$\alpha_3 T_{t_3} + \Delta_3 T = 0. \tag{73}$$

Тоді функції $\mathbf{v} := -(T^{-1}T_{x_1}, \dots, T^{-1}T_{x_n})$ та $\tilde{\mathbf{v}} := -\begin{pmatrix} T_{x_1}T^{-1} \\ \vdots \\ T_{x_n}T^{-1} \end{pmatrix}$ задовольнятимуть рівняння (71) та (72) відповідно.

7 Заключні зауваження

1. Метод інтегральних перетворень (бінарних перетворень типу Дарбу, тощо) як метод побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь був запропонований спочатку для систем з диференціальним зображенням Лакса [6, 9, 10, 11, 12, 29]. Адаптації цього методу на випадок інтегро-диференціального оператора Лакса в розмірностях (1+1) та (2+1) присвячено роботи [13, 14, 34]. Для зображень Лакса, запропонованих в цій роботі, в яких обидва оператори є інтегро-диференціальними, метод бінарних перетворень потребує подальшого розвинення.

2. Різноманітні (просторові, матричні, тощо) узагальнення класичного рівняння Бюргерса цікаві тісним зв'язком з моделями, інтегровними методом оберненої задачі. Зокрема, в роботах [4, 8] рівняння (56) та (65) в (1+1)-вимірному випадку використовувалися для побудови точних розв'язків рівняння Кадомцева-Петвіашвілі, системи Деві-Стюартсона, їх матричних узагальнень, а також для знаходження розв'язків інших моделей теорії солітонів. В роботі [15] показаний зв'язок між перетворенням типу Хопфа-Коула для матричних узагальнень рівняння Бюргерса та диференціальним оператором перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва. Окремо стоїть питання побудови точних розв'язків для рівнянь типу Бюргерса [23, 25, 33], важливих також з точки зору їх фізичних застосувань [3]. Можна показати, що підстановки типу Хопфа-Коула (див. Твердження 6.1–6.4) є частковим (локальним) випадком інтегральних бінарних перетворень, а відповідні рівняння типу Бюргерса є частковим випадком більш загальних нелінійних систем, які допускають "пряму лінеаризацію" [29].

Література

1. Веселов А.П., Новиков С.П. *Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы* // Докл. АН СССР. — 1984. — Т.279, №4. — С. 784–788.

2. Захаров А.В., Шабат А.Б. *Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I* // Функциональный анализ и его приложения. — Т.8, Вып. 3. — 1974. — С. 43–53.

3. Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А. *Получение точных решений неоднородного уравнения Бюргерса с использованием преобразования Дарбу* // Акустический журнал. — 2011. — Т.57, №3. — С. 313–322.

4. Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры. — Киев: Наук. думка, 1986. — 156 с.

5. Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г, Сидоренко Ю.М. *Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями* // Доповіді НАН України. — 1999. — №9. — С. 19–23.

6. Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М. *Інтегрування деяких* $(2+1)$*-вимірних інтегровних систем методами оберненої задачі розсіяння та бінарних перетворень Дарбу* // Математичні студії. — 2003. — Т.20, №2. — С. 119–132.

7. Самойленко А.М., Самойленко В.Г, Сидоренко Ю.М. *Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем* // Укр. мат. журн. — 1999. — Т.51, №1. — С. 78–97.

8. Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. *Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса і інтегровні редукції в системі Деві-Стюардсона* // Укр. мат. журн. — 1998. — Т.50, №2. — С. 252–264.

9. Сидоренко Ю.М. *Нелокальні редукції в системах, інтегровних методом оберненої задачі* // Нелинейные краевые задачи мат.физики и их прилож. Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 1998. — С. 199–202.

10. Сидоренко Ю.М. *Про узагальнення τ–функції для ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі* // Вісн. Київського ун-ту. Сер. математика і механіка. — 1998. — С. 40–49.

11. Сидоренко Ю.М. *Бінарні перетворення і* $(2+1)$*-вимірні інтегровні системи* // Укр. мат. журн. — 2002. — Т.54, №11. — С. 1531–1550.

12. Сидоренко Ю.М., Гвоздева Е.В. *Бинарные преобразования общих уравнений Лакса-Захарова-Шабата* // Нелинейные краев. задачи мат. физики и их прилож. — Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 1999. — С. 220–224.

13. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. *Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегро-диференціальних операторів і рівнянь Лакса* // Вісн. Київського націон. ун-ту. Сер. математика і механіка. — 2009. — Вип. 22. — С. 32–35.

14. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. *Інтегрування скалярної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі методом інтегральних перетворень типу Дарбу* // Вісн. Львівського ун-ту. Серія механіко-математична. — 2011. — Вип. 75. — С. 10–54.

15. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. *Метод проектування і перетворення Дарбу-Крама-Матвеєва* // Математичний вісник НТШ. — 2012. — Том 9. (прийнята до друку).

16. Шабат А.Б. Энциклопедия интегрируемых систем. — Москва: Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау, 2008. — 454 с.

17. Athorne C., Fordy A.P. *Integrable equations in* $(2+1)$*-dimensions associated with symmetric and homogeneous spaces*, J. Math. Phys., **28** (1987), 2018–2024.

18. Blaszak M. Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1998.

19. Chen H.H., Lee Y.C., Liu C.S. *Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method*, Physica Scr., **20** (1979), 490–492.

20. Cheng Yi. *Constrained of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy*, J. Math. Phys., **33** (1992), 3774–3787.

21. Davey A., Stewartson K. *On three dimensional packets of surface waves*, Proc. R. Soc., **338**, 1613 (1974), 101–110.

22. Dickey L.A. *Soliton equations and Hamiltonian systems*, Adv. Ser. in Math. Phys., **12** (1991).

23. Fletcher C.A.J. *Generating exact solutions of the two-dimensional Burgers' equations*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **3** (1983), 213–216.

24. Fokas A.S. *On the simplest integrable equation in* $2+1$, Inverse Problems, **10** (1994), 19–22.

25. Guoliang Cai, Kun Ma, Xiaofen Tang, Fengyun Zhang. *New exact Traveling Wave Solutions of the* $(2+1)$*-dimension Burgers Equations*, Internat. J. of Nonlinear Science, **6**, 2 (2008), 185–192.

26. Konopelchenko B., Sidorenko Yu., Strampp W. *(1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of* $(2+1)$*-dimensional systems*, Phys. Lett. A., **157** (1991), 17–21.

27. Mikhailov A.V., Shabat A.B., Sokolov V.V. *The symmetry approach to classification of integrable equations In: What is Integrability?*, New York: Springer Verlag, (1990), 115–184.

28. Nizhnik L., *Integration of multidimensional nonlinear equations by inverse scattering method*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **254** (1980), 332–335.

29. Samoilenko V.H., Sidorenko Yu.M., Buonanno L., Matarazzo G. *Explicit solutions of nonlinear evolution equations via nonlocal reductions approach*, Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine, **30**, II (2000), 406–410.

30. Santini P.M. *Integrable nonlinear evolution equations with constraints: I*, Inverse Problem, **8** (1992), 285–301.

31. Sidorenko Yu., Strampp W. *Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvilli hierarchy*, J. Math. Phys., **34**, 4 (1993), 1429–1446.

32. Sidorenko Yu., Strampp W. *Symmetry constraints of the KP-hierarchy*, Inverse Problems, **7** (1991), L37–L43.

33. Srinivasa Ch. Rao, Engu Satyanarayana. *Solutions of Burgers Equation*, International Journal of Nonlinear Science, **9**, 3 (2010), 290–295.

34. Sydorenko Yu. *Generalized Binary Darboux-like Theorem for Constrained Kadomtsev-Petviashvili (cKP) Flows*, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, **50**, 1 (2004), 470–477.

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, Україна

e-mail: *y_ sydorenko@franko.lviv.ua*

Надійшло 12.04.2012

Sydorenko Yu.M., Chvartatskyi O.I. *Matrix generalizations of integrable systems with Lax integro-differential representations*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 125–144.

We found matrix integro-differential Lax representations for Davey-Stewartson systems (DS-I, DS-II, DS-III), (2+1)-dimensional generalizations of Chen-Lee-Liu equation and its higher symmetries. In particular, we obtain (2+1)-dimensional generalizations of modified Korteweg-de Vries equation, Nizhnik equation and so etc. We also propose some matrix multidimensional generalizations of Burgers equation.

Сидоренко Ю.М., Чвартацкий А.И. *Матричные обощения интегрируемых систем с интегро-дифференциальными представлениями Лакса* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 125–144.

Найдены матричные интегро-дифференциальные представления Лакса для моделей Дэви-Стюартсона (DS-I, DS-II, DS-III), пространственно-двумерных обобщений уравнения Чена-Ли-Лю и их высших симметрий. А именно, модифицированных уравнений Кортевега- де Фриза, Нижника и т.д. Приведены некоторые матричные многомерные обобщения уравнения Бюргерса.