Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.956.225 + 517.956.8

Мельник Т.А., Наквасюк Ю.А.

УСЕРЕДНЕННЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ СІНЬОРІНІ В ГУСТОМУ З'ЄДНАННІ ТИПУ 3:2:1

Мельник Т.А., Наквасюк Ю.А. *Усереднення параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 90–110.

Розглядається параболічна крайова задача Сіньоріні в густому з'єднанні Ω_ε, яке є об'єднанням деякої області Ω_0 та великої кількості ε-періодично розташованих тонких криволінійних циліндрів. На бічних поверхнях циліндрів задані умови Сіньоріні. Вивчено асимптотичну поведінку розв'язку такої задачі коли $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких циліндрів необмежено зростає, а їхня товщина прямує до нуля. За допомогою методу інтегральних тотожностей доведено теорему збіжності та показано, що умови Сіньоріні трансформуються (при $\varepsilon \to 0$) в диференціальні нерівності в області, що заповнюється тонкими циліндрами.

Вступ

Багатомасштабне моделювання та чисельний аналіз є новою областю сучасних досліджень, що надзвичайно широко розвивається, і в майбутньому матиме великий вплив на обчислювальну науку та прикладну математику. Це пов'язано з перспективою розвитку більш ефективних методів, які мають бути поєднанням нового класу чисельних і аналітичних прийомів моделювання. Одним із таких класів задач багатомасштабного моделювання є крайові задачі в сингулярно збурених областях. Існує багато типів збурених областей, які потребують різних методів дослідження.

В роботі розглянуто крайову задачу в сингулярно збуреній області, а саме в густому з'єднанні типу 3:2:1. Густим з'єднанням типу $k:p:d$ називається область в $\mathbb{R}^n$, яка складається із деякої області (тіло густого з'єднання) та великої кількості тонких областей, що ε-періодично розташовані вздовж деякої множини (зона приєднання) на межі тіла густого з'єднання. Тип $k:p:d$ густого з'єднання відповідає граничним розмірностям ($\varepsilon \to 0$) тіла з'єднання, зони приєднання та кожної з приєднаних тонких областей відповідно.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35B27, 35R45, 35J20, 74K30.
Ключові слова і фрази: усереднення, густе з'єднання, крайові умови Сіньоріні.

Останнім часом крайові задачі в густих з'єднаннях інтенсивно досліджуються ([7]–[11], [14], [24]–[26]), оскільки такі з'єднання є прототипами багатьох сучасних інженерних конструкцій, таких як мікро-електромеханічні системи, а також багато інших фізичних та біологічних систем з дуже відмінними характерними розмірами і складною структурою. Так, в енергозберігаючих технологіях очистки води від шкідливих органічних домішок почали використовувати густі абсорбери (поглиначі), які мають форму густих з'єднань ([17]).

Незважаючи на величезний прогрес обчислювальних засобів, неможливо знайти прийнятні чисельні розв'язки крайових задач в таких областях, оскільки збільшення кількості компонент для густої мультиструктури природно приводить до суттєвого збільшення часу обчислень та істотно ускладнює підтримання прийнятого рівня точності. Таким чином, важливою задачею прикладної математики є асимптотичний аналіз крайових задач в таких областях. Метою цього аналізу є розробка строгих асимптотичних методів для крайових задач в густих з'єднаннях різних типів. Їх суть полягає у вивчені асимптотичної поведінки розв'язку задачі, коли кількість компонент густого з'єднання необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Асимптотичні методи дають обгрунтовану можливість замінити складні моделі більш простішими і вже далі проводити чесельний аналіз для простішої задачі (див., наприклад, [26]).

Крайові задачі в густих з'єднаннях при прямуванні до нуля параметра збурення ε мають свої специфічні труднощі. Як показано в роботі [31], крайові задачі в густих з'єднаннях втрачають коерцитивність при $\varepsilon \to 0$, що значною мірою ускладнює асимптотичні дослідження. Зауважимо, що першими роботами в цьому напрямку були роботи [3]–[5], в яких вивчена асимптотична поведінка функції Ґріна задачі Неймана для рівняння Гельмгольца в необмеженому густому з'єднанні. В роботах [18]–[21], [27]–[30] дана класифікація густих з'єднань, розроблено строгі асимптотичні методи дослідження основних крайових задач математичної фізики в густих сингулярно вироджувальних з'єднаннях різних типів, побудовано перші члени асимптотики та доведено асимптотичні оцінки, вивчено вплив крайових умов, які задаються на межах густих з'єднань, та геометричної конфігурації густих з'єднань на асимптотичну поведінку розв'язків.

В даній роботі у густому з'єднанні розглядається крайова задача Сіньоріні. Вперше така задача, відома тепер як задача Сіньоріні, була поставлена самим Сіньоріні у [35]. Суть такої крайової задачі полягає в тому, що на межі області можливе виконання двох крайових умов Діріхле або Неймана, і наперед не відомо на яких частинах межі задаються ці умови. Математично така ситуація описується наступними співвідношеннями:

$$\left.\begin{aligned} u \le g, \quad \partial_\nu u \le d, \\ (u-g)\,(\partial_\nu u - d) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

В роботі [35] автор їх називає “сумнівні крайові умови”, оскільки апріорі невідомо, яка із двох умов і де виконується. Згодом ці умови стали називати умовами Сіньоріні. Крайові задачі зустрічаються в теорії розповсюдження тріщин в пружних середовищах, в теорії оптимального керування, гідрогеології, метеорології, теорії пластичності (див. [2], [6]). Цікаві асимптотичні властивості виявлено при дослідженні крайових задач Сіньоріні в перфорованих областях (див. [1], [32]).

В даній роботі розглядається параболічна крайова задача у густому з'єднанні Ω_ε, яке є об'єднанням деякої області Ω_0 та великої кількості тонких криволінійних циліндрів, на бічних поверхнях яких задано однорідні крайові умови Сіньоріні. Зауважимо, що еліптичні задачі Сіньоріні в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1 були досліджені в роботах ([16], [26]).

Структура роботи виглядає наступним чином. Постановка задачі описана в першому розділі. В розділі 2 сформульовано основний результат та обговорено основні твердження і деякі елементи доведення теореми збіжності. Різні означення узагальненого розв'язку початкової та усередненої задач сформульовані в розділі 3. Також в ньому отримані існування та єдиність цих розв'язків та певні їх властивості. В четвертому розділі ми отримаємо апріорні рівномірні оцінки для узагальненого розв'язку початкової задачі. Основна теорема збіжності доведена в останньому розділі.

1 Постановка задачі

Нехай a та h — додатні дійсні числа, N — велике натуральне число, $\varepsilon = \frac{a}{N}$.

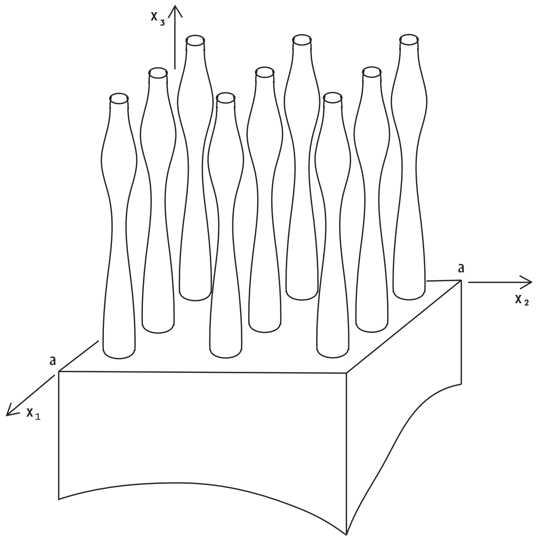

Рис. 1: Модельне густе з'єднання типу 3:2:1.

Розглянемо модельне густе з'єднання Ω_ε (див. рис. 1) типу $3:2:1$, яке складається з тіла $\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x' = (x_1, x_2) \in \Xi_0 = (0, a) \times (0, a), -\gamma(x') < x_3 < 0\}$ та великої кількості тонких криволінійних циліндрів $G_\varepsilon = \bigcup_{i,j=0}^{N-1} G_\varepsilon(i, j)$,

$$G_\varepsilon(i, j) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < x_3 < h, \quad \left(\frac{x_1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - i\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - j\right)^2 < \varrho^2(x_3) \right\}, \qquad (1)$$

де задані функції γ та ϱ — гладкі та додатні на $[0, a] \times [0, a]$ та $[0, h]$ відповідно. Крім того, $0 < \varrho < \frac{1}{2}$. Очевидно, що тонкі криволінійні циліндри заповнюють паралелепіпед $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0, h)$ в граничному переході при $N \to +\infty$ (або $\varepsilon \to 0$).

Зауваження 1.1. *Можна також розглядати більш загальний випадок криволінійних циліндрів*

$$G_\varepsilon(i,j) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 < x_3 < h, \quad (\varepsilon^{-1}x_1 - i,\, \varepsilon^{-1}x_2 - j) \in \omega(x_3)\}, \tag{2}$$

де $\omega(x_3)$ *– плоска область, що належить внутрішності квадрата* $\{\xi' = (\xi_1, \xi_2) : 0 < \xi_1 < 1,$ $0 < \xi_2 < 1\}$ *для всіх* $x_3 \in [0,h]$*, та така, що поверхня* $\{(\xi', x_3) : \xi' \in \partial\omega,\ x_3 \in [0,h]\}$ *— гладка.*

В області Ω_ε розглядається наступна крайова задача:

$$\begin{array}{rclr} u'_\varepsilon(x,t) & = & \Delta_x u_\varepsilon(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,t) \le 0, & & \partial_\nu u_\varepsilon(x,t) \le 0, & (x,t) \in S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,t)\, \partial_\nu u_\varepsilon(x,t) & = & 0, & (x,t) \in S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,t) & = & 0, & (x,t) \in \Gamma_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x,t) & = & 0, & (x,t) \in \big(\partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon)\big) \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) & = & 0, & x \in \Omega_\varepsilon \times \{t=0\}, \end{array} \tag{3}$$

де $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial\nu}$ — зовнішня нормальна похідна, $u'_\varepsilon := \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$, S_ε — об'єднання бічних поверхонь тонких циліндрів, а Γ_ε — об'єднання верхніх основ циліндрів G_ε при $x_3 = h$.

Задана функція f належить простору $L^2(\Omega_1 \times (0,T))$, припускаємо, що для неї існує слабка похідна f' така, що

$$f' \in L^2(\Omega_1 \times (0,T)), \tag{4}$$

де $\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega^+}$, $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0,h)$, $\Xi_0 = \{x : x' = (x_1,x_2) \in (0,a) \times (0,a), \quad x_3 = 0\}$. Будемо також використовувати позначення $\Xi_h = \{x : x' \in (0,a) \times (0,a), \quad x_3 = h\}$.

Відомо, що для кожного фіксованого значення ε існує єдиний узагальнений розв'язок u_ε задачі (3) (див. підрозділ 3.1). Нашою метою є вивчення асимптотичної поведінки узагальненого розв'язку u_ε задачі (3) при $\varepsilon \to 0$, тобто, коли число тонких криволінійних циліндрів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

2 Формулювання основного результату та його обговорення

Позначимо через $\widetilde{u}$ продовження нулем функції u на паралелепіпед $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0,h) \times (0,T)$, який заповнюється тонкими криволінійними циліндрами при $\varepsilon \to 0$, а саме

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & (x,t) \in G_\varepsilon \times (0,T), \\ 0, & (x,t) \in \big(\Omega^+ \setminus G_\varepsilon\big) \times (0,T). \end{cases} \tag{5}$$

Нехай $\zeta(x_3) = \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|}$, $\omega(x_3) = \left\{\xi' \in \mathbb{R}^2 : (\xi_1 - \frac{1}{2})^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < \varrho^2(x_3)\right\}$, де $|\omega(x_3)|$ — площа $\omega(x_3)$, а $l_\omega(x_3)$ — довжина $\partial\omega(x_3)$ для кожного фіксованого $x_3 \in [0,h]$.

Також визначимо характеристичну функцію

$$\chi_{G_\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega^+ \setminus G_\varepsilon. \end{cases}$$

Відомо (див. [24]), що $\chi_{G_\varepsilon} \xrightarrow{w} |\omega|$ слабко в $L^2(\Omega^+)$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. *Послідовність розв'язків u_ε задачі (3) задовольняє співвідношення:*

$$\left.\begin{array}{rlll} u_\varepsilon\,|_{\Omega_0} & \xrightarrow{w} u_0^- & \text{слабко в} & H^1(\Omega_0\times(0,T)),\\ \widetilde{u_\varepsilon} & \xrightarrow{w} |\omega(x_3)|\,u_0^+ & \text{слабко в} & L^2(0,T;L^2(\Omega^+)),\\ \widetilde{\partial_{x_3}u_\varepsilon} & \xrightarrow{w} |\omega(x_3)|\,\partial_{x_3}u_0^+ & \text{слабко в} & L^2(0,T;L^2(\Omega^+)),\\ \widetilde{\partial_{x_i}u_\varepsilon} & \xrightarrow{w} 0 & \text{слабко в} & L^2(0,T;L^2(\Omega^+)), \quad (i=1,\,2)\\ \widetilde{\partial_t u_\varepsilon} & \xrightarrow{w} |\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+ & \text{слабко в} & L^2(\Omega^+\times(0,T)), \end{array}\right\}\ \text{при}\quad \varepsilon\to 0, \tag{6}$$

та функція

$$u_0(x,t)=\begin{cases} u_0^-, & (x,t)\in\Omega_0\times(0,T),\\ u_0^+, & (x,t)\in\Omega^+\times(0,T)\end{cases} \tag{7}$$

є єдиним розв'язком такої крайової задачі

$$\begin{cases} \partial_t u_0^-(x,t)-\Delta_x u_0^-(x,t)=f(x,t), & (x,t)\in\Omega_0\times(0,T),\\ |\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+(x,t)-\partial_{x_3}\big(|\omega(x_3)|\,\partial_{x_3}u_0^+(x,t)\big)\le|\omega(x_3)|f(x,t), & (x,t)\in\Omega^+\times(0,T),\\ u_0^+(x,t)\le 0, & (x,t)\in\Omega^+\times(0,T),\\ u_0^+\big(-|\omega|\,\partial_t u_0^+ +\partial_{x_3}\big(|\omega|\,\partial_{x_3}u_0^+\big)+|\omega|\,f\big)=0, & (x,t)\in\Omega^+\times(0,T),\\ u_0^-(x',0,t)=u_0^+(x',0,t), & (x',0,t)\in\Xi_0\times(0,T),\\ \partial_{x_3}u_0^-(x',0,t)=|\omega(0)|\,\partial_{x_3}u_0^+(x',0,t), & (x',0,t)\in\Xi_0\times(0,T),\\ \partial_\nu u_0^-(x,t)=0, & (x,t)\in\big(\partial\Omega_0\setminus\Xi_0\big)\times(0,T),\\ u_0^+(x',h,t)=0, & (x',h,t)\in\Xi_h\times(0,T),\\ u_0(x,0,t)=0, & x\in\Omega_1,\end{cases} \tag{8}$$

яку будемо називати усередненою задачею для задачі (3).

2.1 Обговорення

Результати, наведені вище, показують, що крайові умови істотньо впливають на асимптотичну поведінку розв'язку задачі (3). А саме, ми бачимо, що умови Сіньоріні $u_\varepsilon\le 0$, $\partial_\nu u_\varepsilon\le 0$, $u_\varepsilon\,\partial_\nu u_\varepsilon=0$ на бічних поверхнях S_ε криволінійних циліндрів та параболічне рівняння $u_\varepsilon'=\Delta_x u_\varepsilon+f$ в $G_\varepsilon\times(0,T)$ трансформуються (при $\varepsilon\to 0$) в наступне поточкове одностороннє обмеження $u_0^+(x,t)\le 0$ та диференціальну нерівність

$$|\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+(x,t)-\partial_{x_3}\big(|\omega(x_3)|\,\partial_{x_3}u_0^+(x,t)\big)\le|\omega(x_3)|\,f(x,t)$$

для кожного $(x,t)\in\Omega^+\times(0,T)$, які пов'язані між собою співвідношенням

$$u_0^+(x,t)\big(-|\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+(x,t)+\partial_{x_3}\big(|\omega(x_3)|\,\partial_{x_3}u_0^+(x,t)\big)+|\omega(x_3)|\,f(x,t)\big)=0 \quad \text{в} \quad \Omega^+\times(0,T).$$

Для доведення даної теореми ми використовуємо інтегральний метод розвинений в [19, 21, 24], суть якого полягає в застосуванні спеціальних нерівностей в граничному випадку та доведенні рівномірних оцінок. Для нашої задачі — це нерівність (28).

Як було показано в [12, 13] для усереднення параболічних задач в перфорованих областях потрібно вимагати додаткові припущення на початкові умови параболічної задачі (див. також [33]). Подібна ситуація зберігається для параболічних задач в густих з'єднаннях. Для нашої задачі — це додаткова умова (4), за допомогою якої ми покажемо (див. підрозділ 3.1), що

$$\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

Далі використовуючи метод штрафу, отримаємо рівномірну оцінку для $\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}$ відносно параметра ε (див. розділ 4). На основі цієї оцінки та інших оцінок ми переходимо до границі в варіаційній нерівності (13), що відповідає задачі (3) та отримуємо варіаційну нерівність (26), що відповідає усередненій задачі (8).

3 Означення узагальнених розв'язків, їх існування та єдиність

3.1 Існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (3)

Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$ — дужки спряження між простором $H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon) = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon) : u_{|\Gamma_\varepsilon} = 0\}$ та спряженим до нього $(H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))^*$. Припустимо, що існує класичний розв'язок задачі (3). Домноживши рівняння задачі (3) на функцію u_ε, проінтегрувавши частинами в Ω_ε та використавши крайові умови для u_ε, отримаємо таку рівність

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon\rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, u_\varepsilon \, dx. \tag{9}$$

Розглянемо наступні функціональні простори

$$W^\varepsilon(0,T) = \{v \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)), \quad \exists v' \in L^2(0,T;(H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))^*)\},$$

$$W_0^\varepsilon(0,T) = \{v \in W^\varepsilon(0,T) : \quad v(\cdot,0) = 0\}.$$

Зауваження 3.1. *З огляду на твердження 1.2 ([34], с. 106) простір $W^\varepsilon(0,T)$ вкладається в простір $C([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))$, тому рівність $v(\cdot,0)=0$ має сенс.*

Також визначимо такі функціональні множини

$$K_\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon) : \quad v|_{S_\varepsilon} \le 0 \quad \text{на} \quad S_\varepsilon\},$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \{v \in W^\varepsilon(0,T) : \quad v(\cdot,t) \in K_\varepsilon \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0,T)\},$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon^0 = \{v \in W_0^\varepsilon(0,T) : \quad v(\cdot,t) \in K_\varepsilon \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0,T)\},$$

де $v|_S$ позначає слід функції v на поверхні S.

Очевидно, що K_ε — замкнена та опукла множина в $H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$.

Домножимо рівняння задачі (3) на довільну функцію $\varphi \in K_\varepsilon$ та проінтегруємо в Ω_ε. Аналогічно як це було зроблено раніше, використавши крайові умови, отримаємо

$$\langle u_\varepsilon', \varphi\rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, \varphi \, dx + \int\limits_{S_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon \, \varphi \, d\sigma. \tag{10}$$

Оскільки $\partial_\nu u_\varepsilon \le 0$ та $\varphi \le 0$ м. с. на $S_\varepsilon \times (0,T)$, то $\int\limits_{S_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon \, \varphi \, d\sigma \ge 0$. Використовуючи останню нерівність, з рівності (10) отримаємо, що

$$\langle u_\varepsilon', \varphi\rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx \ge \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \, \varphi \, dx. \tag{11}$$

Означення 3.1. *Узагальненим розв'язком задачі* (3) *називається функція* $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon^0$, *яка задовольняє рівність* (9) *та нерівність* (11) *для майже всіх* $t \in (0,T)$ *та для довільної функції* $\varphi \in K_\varepsilon$.

Означення 3.2. *Узагальненим розв'язком задачі* (3) *називається функція* $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon^0$, *яка задовольняє нерівність*

$$\langle u_\varepsilon', \varphi - u_\varepsilon\rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon) \, dx \ge \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon) \, dx \tag{12}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ *та для довільної функції* $\varphi \in K_\varepsilon$, *або, що еквівалентно, наступну нерівність*

$$\int\limits_0^T \langle u_\varepsilon', \varphi - u_\varepsilon\rangle_\varepsilon dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon) \, dx \, dt \ge \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon) \, dx \, dt \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{K}_\varepsilon. \tag{13}$$

Покажемо, що означення 3.1 та 3.2 еквівалентні. Віднімаючи рівність (9) від нерівності (11), отримаємо (12). Взявши $\varphi \equiv 0$ в (12), маємо, що

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon\rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx \le \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \, u_\varepsilon \, dx. \tag{14}$$

Поклавши $\varphi = 2u_\varepsilon$ в (12), ми одержимо обернену нерівність

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon\rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx \ge \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \, u_\varepsilon \, dx. \tag{15}$$

Отже, (9) виконується. Взявши $\varphi = \psi + u_\varepsilon$ в (12), де ψ довільна функція з K_ε, маємо (11). Очевидно, що наступний функціонал

$$\int\limits_0^T \langle F, v\rangle_\varepsilon \, dt := \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \, v \, dx \, dt, \quad v \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)),$$

належить простору $L^2(0,T; (H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))^*)$. Крім того, на підставі (4) існує узагальнена похідна F', така що

$$F' \in L^2(0,T; (H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))^*) \quad \text{та} \tag{16}$$

$$\int\limits_0^T \langle F', v\rangle_\varepsilon \, dt = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f' \, v \, dx \, dt, \quad v \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)).$$

Тепер легко переконатися, що всі умови (одна із них це є включення (16)) теореми 2.1 ([15, Глава 6]) для задачі (3) виконуються в сенсі означення 3.2, і як наслідок з цієї теореми задача (3) має єдиний розв'язок u_ε такий, що

$$u_\varepsilon, u_\varepsilon' \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

3.2 Існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (8)

Розглянемо частково анізотропний простір Соболєва

$$\mathcal{H}(\Omega_1; \Xi_h) = \{u \in L^2(\Omega_1) \big| \quad \partial_{x_3} u \in L^2(\Omega_1), \quad u|_{\Omega_0} \in H^1(\Omega_0), \quad u|_{\Xi_h} = 0\}.$$

З властивостей анізотропних просторів Соболєва (див. [36]) випливає, що сліди обмежень $u^+ := u|_{\Omega^+}$ та $u^- := u|_{\Omega_0}$ на Ξ_0 рівні. Крім того, оскільки сліди функцій з $\mathcal{H}(\Omega_1; \Xi_h)$ дорівнюють нулю на Ξ_h, існує стала C_0 така, що

$$\int\limits_{\Omega_1} u^2\, dx \le C_0 \Big(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u^-|^2\, dx + \int\limits_{\Omega^+} |\partial_{x_3} u^+|^2\, dx \Big) \quad \text{для всіх } u \in \mathcal{H}(\Omega_1; \Xi_h).$$

В просторі $\mathcal{H}(\Omega_1; \Xi_h)$ введемо норму $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, що породжена скалярним добутком

$$(u,v)_{\mathcal{H}} = \int\limits_{\Omega_0} \nabla u^- \cdot \nabla v^-\, dx + \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u^+\, \partial_{x_3} v^+\, dx, \quad u, v \in \mathcal{H}(\Omega_1, \Xi_h). \tag{17}$$

Також розглянемо простір $\mathcal{V}(\Omega_1) = L^2(\Omega_1)$ із скалярним добутком

$$(u,v)_{\mathcal{V}} = \int\limits_{\Omega_0} u\, v\, dx + \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, u\, v\, dx.$$

Очевидно, що вкладення $\mathcal{H}(\Omega_1, \Xi_h) \subset \mathcal{V}(\Omega_1)$ є щільним та неперервним. Тому ми можемо розглянути трійку просторів $\mathcal{H} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{H}^*$ з відповідними дужками спряження $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ між $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^*$, де $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\Omega_1, \Xi_h)$, $\mathcal{V} := \mathcal{V}(\Omega_1)$ та $\mathcal{H}^* := (\mathcal{H}(\Omega_1, \Xi_h))^*$.

Припустимо, що існує гладка функція u_0, що задовольняє співвідношення усередненої задачі (8). Домноживши рівняння задачі (8) на функцію u_0^-, проінтегрувавши по Ω_0 та використавши крайову умову на $\partial\Omega_0 \setminus \Xi_0$, знаходимо

$$\int\limits_{\Omega_0} \partial_t u_0^- u_0^-\, dx + \int\limits_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla u_0^-\, dx = \int\limits_{\Omega_0} f\, u_0^-\, dx - \int_{\Xi_0} \left(\partial_{x_3} u_0^-\, u_0^-\right)\big|_{x_3=0}\, dx'. \tag{18}$$

Проінтегрувавши четверте рівняння задачі (8) в Ω^+ та використавши крайову умову на Ξ_h, маємо

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\Xi_0} \left(|\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+\, u_0^+\right)\big|_{x_3=0}\, dx' &+ \int\limits_{\Omega_+} |\omega(x_3)|\, \partial_t u_0^+\, u_0^+\, dx \\ &+ \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+\, \partial_{x_3} u_0^+\, dx = \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, f\, u_0^+\, dx. \end{aligned} \tag{19}$$

Додамо (18) та (19). Використовуючи умови спряження для u_0^+ та u_0^-, отримаємо

$$(\partial_t u_0, u_0)_{\mathcal{V}} + (u_0, u_0)_{\mathcal{H}} = (f, u_0)_{\mathcal{V}}. \tag{20}$$

Розглянемо наступні функціональні простори

$$\mathcal{W}(0,T) = \{v \in L^2(0,T;\mathcal{H}),\, \exists\, v' \in L^2(0,T;\mathcal{H}^*)\},$$

$$\mathcal{W}_0(0,T) = \{v \in \mathcal{W}(0,T): \quad v(\cdot,0) = 0\}.$$

Також визначимо такі функціональні множини

$$K_0 = \{v \in \mathcal{H}: \quad v \le 0 \quad \text{м. с. на} \quad \Omega^+\},$$

$$\mathcal{K}_0 = \{v \in \mathcal{W}(0,T): \quad v(\cdot,t) \in K_0 \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0,T)\},$$
$$\mathcal{K}_0^0 = \{v \in \mathcal{W}_0(0,T): \quad v(\cdot,t) \in K_0 \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0,T)\}.$$

Очевидно, що K_0 — замкнена та опукла в $\mathcal{H}(\Omega_1, \Xi_h)$.

Домножимо перше рівняння задачі (8) на φ з K_0 та проінтегруємо в Ω_0. Аналогічно, як описано вище, маємо

$$\int\limits_{\Omega_0} \partial_t u_0^- \,\varphi\, dx + \int\limits_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla \varphi\, dx = \int\limits_{\Omega_0} f\,\varphi\, dx - \int\limits_{\Xi_0} \left(\partial_{x_3} u_0^- \,\varphi\right)\Big|_{x_3=0}\, dx'. \tag{21}$$

Другу нерівність домножимо на φ та проінтегруємо по Ω^+. Оскільки $\varphi \le 0$, виводимо

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_t u_0^+ \varphi\, dx + &\int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+\, \partial_{x_3}\varphi\, dx \\ &\ge \int\limits_{\Xi_0} \left(|\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+\, \varphi\right)\Big|_{x_3=0}\, dx' + \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, f\,\varphi\, dx.\end{aligned} \tag{22}$$

Додавши (21) та (22) та використавши другу умову спряження на Ξ_h, маємо

$$(\partial_t u_0, \varphi)_{\mathcal{V}} + (u_0, \varphi)_{\mathcal{H}} \ge (f, \varphi)_{\mathcal{V}}. \tag{23}$$

Отже, класичний розв'язок усередненої задачі (8) задовольняє співвідношення (20) та (23). Використовучи їх, ми можемо дати наступні означення узагальненого розв'язку задачі (8).

Означення 3.3. *Узагальненим розв'язком задачі (8) називається функція $u_0 \in \mathcal{K}_0^0$, яка задовольняє рівність*

$$\langle \partial_t u_0, u_0 \rangle_0 + (u_0, u_0)_{\mathcal{H}} = (f, u_0)_{\mathcal{V}},$$

та нерівність

$$\langle \partial_t u_0, \varphi \rangle_0 + (u_0, \varphi)_{\mathcal{H}} \ge (f, \varphi)_{\mathcal{V}}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Означення 3.4. *Узагальненим розв'язком задачі (8) називається функція $u_0 \in \mathcal{K}_0^0$, яка задовольняє нерівність*

$$\langle \partial_t u_0, \varphi - u_0 \rangle_0 + (u_0, \varphi - u_0)_{\mathcal{H}} \geq (f, \varphi - u_0)_{\mathcal{V}} \tag{24}$$

для майже всіх $t \in (0, T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Аналогічно, як ми довели еквівалентність означень 3.1 та 3.2, можна показати еквівалентність означень 3.3 та 3.4. Наведемо ще одне означення.

Означення 3.5. *Узагальненим розв'язком задачі (8) називається функція $u_0 \in K_0^0$, яка задовольняє нерівність*

$$\langle \partial_t u_0, \varphi - u_0 \rangle_0 + (\varphi, \varphi - u_0)_{\mathcal{H}} \geq (f, \varphi - u_0)_{\mathcal{V}} \tag{25}$$

для майже всіх $t \in (0, T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$, або, що еквівалентно, наступну нерівність

$$\int_0^T \langle \partial_t u_0, \varphi - u_0 \rangle_0 \, dt + \int_0^T (\varphi, \varphi - u_0)_{\mathcal{H}} \, dt \geq \int_0^T (f, \varphi - u_0)_{\mathcal{V}} \, dt, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{K}_0. \tag{26}$$

Щоб показати еквівалентність означень 3.4 та 3.5, додамо нерівність

$$\int_{\Omega_0} \nabla(\varphi - u_0^-) \cdot \nabla(\varphi - u_0^-) \, dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \, \partial_{x_3}(\varphi - u_0^+) \, \partial_{x_3}(\varphi - u_0^+) \, dx \geq 0$$

до нерівності (24), та отримаємо (25).

Взявши $\varphi = u_0 + s(\psi - u_0)$ в нерівності (25), де ψ довільна функція з K_0 та $s \in [0, 1]$, маємо $\langle \partial_t u_0, \psi - u_0 \rangle_0 + (u_0 + s(\psi - u_0), \psi - u_0)_{\mathcal{H}} \geq (f, \psi - u_0)_{\mathcal{V}}$. Перейшовши до границі при $s \to 0$, одержимо (24).

Розглянемо наступний функціонал

$$\int_0^T \langle F_0, v \rangle_0 \, dt := \int_0^T \left(\int_{\Omega_0} f\, v \, dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f\, v \, dx \right) dt, \quad v \in L^2(0, T; \mathcal{H}).$$

Очевидно, що F_0 належить простору $L^2(0, T; \mathcal{H}^*)$. Завдяки (4) існує узагальнена похідна F_0' така, що

$$F_0' \in L^2(0, T; \mathcal{H}^*) \quad \text{та} \tag{27}$$

$$\int_0^T \langle F_0', v \rangle_0 \, dt = \int_0^T \left(\int_{\Omega_0} f'\, v \, dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f'\, v \, dx \right) dt, \quad v \in L^2(0, T; \mathcal{H}).$$

Отже, всі умови (одна з них — це (27)) теореми 2.1 ([15, Глава 6]) виконуються для усередненої задачі (8) в сенсі означення 3.4, і, як наслідок з цієї теореми, задача (8) має єдиний узагальнений розвязок u_0 такий, що $u_0, u_0' \in L^2(0, T; \mathcal{H}) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$.

4 Апріорні рівномірні оцінки

Для усереднення крайових задач в густих мультиструктурах з неоднорідними умовами Неймана чи умовами Фур'є на межі приєднуваних тонких областей використовується метод спеціальних інтегральних тотожностей ([22, 24]). Для нашої задачі ця тотожність має вигляд (див. [24, глава 2])

$$\varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\varphi(x)\, d\sigma_x}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\varrho'(x_3)|^2}} = \int\limits_{G_\varepsilon} \zeta(x_3)\, \varphi\, dx + \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} \nabla_{\xi'} Y(\xi', x_3)|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}} \cdot \nabla_{x'}\varphi\, dx \tag{28}$$

для всіх $\varphi \in H^1(G_\varepsilon)$, де функція Y — єдиний розв'язок наступної задачі

$$\Delta_{\xi'} Y = \zeta(x_3) \quad \text{в} \quad \omega(x_3), \quad \partial_{\nu'(\xi')} Y = 1 \quad \text{на} \quad \partial\omega(x_3), \qquad \int\limits_{\omega(x_3)} Y(\xi', x_3)\, d\xi' = 0,$$

де $\xi' = x'/\varepsilon$, $\nu'(\xi') = (\nu_1(\xi'), \nu_2(\xi'))$. Далі періодично продовжимо розв'язок Y по ξ_1 та ξ_2.

В [24] були доведені такі нерівності

$$\sup_{x \in G_\varepsilon} |\nabla_{\xi'} Y(\xi', x_3)\,|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\,| \le C_0, \tag{29}$$

$$\varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi^2\, d\sigma_x \le C_1 \left(\varepsilon^2 \int\limits_{G_\varepsilon} |\nabla_{x'}\varphi|^2\, dx + \int\limits_{G_\varepsilon} \varphi^2\, dx \right), \tag{30}$$

$$\int\limits_{G_\varepsilon} \varphi^2\, dx \le C_2 \left(\varepsilon^2 \int\limits_{G_\varepsilon} |\nabla_{x'}\varphi|^2\, dx + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi^2\, d\sigma_x \right), \tag{31}$$

$$\|\varphi\|_{L^2(S_\varepsilon)} \le C_3 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^1(G_\varepsilon)} \quad \text{для всіх } \varphi \in H^1(G_\varepsilon). \tag{32}$$

Зауваження 4.1. *Тут і надалі всі сталі $\{C_i\}$ та $\{c_i\}$ в нерівностях не залежать від параметра ε.*

Лема 4.1 ([23])**.** *Норма $\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \left(\int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$ в $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ та норма $\|\cdot\|_\varepsilon$, що породжена скалярним добутком*

$$(u, v)_\varepsilon = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v\, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon),$$

рівномірно еквівалентні, тобто існують сталі $C_1 > 0$ та $\varepsilon_0 > 0$ такі, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ та для всіх $u \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ виконується оцінка

$$\|u\|_\varepsilon \le \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_4 \|u\|_\varepsilon. \tag{33}$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського та нерівність Коші $2ab \le \delta a^2 + \delta^{-1} b^2$ з $\delta > 0$ та довільними додатніми числами a та b, за допомогою (33) отримаємо з (9), що

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \le c_0 \, \delta_1 \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c_1 (1 + \delta_1^{-1}) \|f\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

для майже всіх $t \in (0, T)$. Вибираючи δ_1 так, щоб $c_0 \, \delta_1 < \frac{1}{2}$, маємо

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \le c_2 \, \|f\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \tag{34}$$

для майже всіх $t \in (0, T)$. Інтегруючи (34) по $(0, t)$ та використовуючи співвідношення $\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon \rangle_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right)$, виводимо

$$\max_{t \in (0,T)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))} \le c_3 \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}. \tag{35}$$

Оцінимо $\|u_\varepsilon'\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))}$. Для цього ми застосуємо метод штрафу. Розглянемо таку наближену задачу

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon^\delta(x,t) &=& \Delta_x u_\varepsilon^\delta(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon^\delta &=& -\frac{1}{\delta}(u_\varepsilon^\delta)^+, & (x,t) \in S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon^\delta(x,t) &=& 0, & (x,t) \in \Gamma_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon^\delta(x,t) &=& 0, & (x,t) \in \big(\partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega_0\big) \times (0,T), \\ u_\varepsilon^\delta(x,0) &=& 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{36}$$

де δ - довільне додатне число,

$$(u_\varepsilon^\delta)^+ = \begin{cases} u_\varepsilon^\delta, & \text{якщо } u_\varepsilon^\delta \ge 0; \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Нагадаємо, що функція $u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))$ така, що $\partial_t u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T;(H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))^*)$ — узагальнений розв'язок (36), якщо $u_\varepsilon^\delta(\cdot,0) = 0$ та виконується наступна інтегральна тотожність

$$\langle \partial_t u_\varepsilon^\delta, \varphi \rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon^\delta \cdot \nabla \varphi \, dx + \frac{1}{\delta} \int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ \varphi \, d\sigma = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \, \varphi \, dx \tag{37}$$

для довільної функції $\varphi \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))$ та для майже всіх $t \in (0,T)$.

Знову, внаслідок (4), маємо, що $\partial_t u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))$. Тому ми можемо взяти $\varphi = \partial_t u_\varepsilon^\delta$ в (37) та отримаємо для всіх $t \in (0,T)$, що

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\partial_t u_\varepsilon^\delta(x,\tau)|^2 dx \, d\tau + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta(x,t)|^2 dx + \frac{1}{\delta} \int\limits_0^t \int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ \partial_t u_\varepsilon^\delta d\sigma \, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \, \partial_t u_\varepsilon^\delta \, dx d\tau. \tag{38}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^t \int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ \partial_t u_\varepsilon^\delta \, d\sigma dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{S_\varepsilon} \partial_t \left(\left[(u_\varepsilon^\delta)^+ \right]^2 \right) d\sigma dt \ge 0,$$

то внаслідок (38) має місце наступна оцінка

$$\|\partial_t u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le C_1. \tag{39}$$

Взявши $\varphi = u_\varepsilon^\delta$ в (37), маємо

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon^\delta\, u_\varepsilon^\delta\, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta|^2\, dx + \frac{1}{\delta}\int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ u_\varepsilon^\delta\, d\sigma = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, u_\varepsilon^\delta\, dx \tag{40}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$. Враховуючи те, що

$$\int_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ u_\varepsilon^\delta\, d\sigma \ge 0, \tag{41}$$

аналогічно як при доведенні оцінки (35), виводимо з (40)

$$\max_{t\in(0,T)} \|u_\varepsilon^\delta(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))} \le C_2. \tag{42}$$

Використовуючи оцінки (39) та (42), отримуємо $\|u_\varepsilon^\delta\|_{H^1(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le C_3$. Тому існує функція $w_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$ така, що

$$u_\varepsilon^\delta \xrightarrow{w} w_\varepsilon \quad \text{слабко в} \quad H^1(\Omega_\varepsilon \times (0,T)), \tag{43}$$

$$u_\varepsilon^\delta \xrightarrow{s} w_\varepsilon \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T)) \tag{44}$$

при $\varepsilon \to 0$. Доведемо, що w_ε — розв'язок задачі (3).

Перейдемо до границі при $\delta \to 0$ в тотожності (37), та проінтегруємо її по $(0,T)$ з довільною тестовою функцією $\varphi = v \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Використовуючи те, що

$$\frac{1}{\delta}\int_0^T \int_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ v\, d\sigma\, dt \le 0$$

та збіжності (43) і (44), виводимо

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t w_\varepsilon\, v\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla v\, dx\, dt \ge \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, v\, dx\, dt \quad \forall\ v \in \mathcal{K}_\varepsilon. \tag{45}$$

Взявши $\varphi = u_\varepsilon^\delta$ в (37) та враховуючи (41), виводимо

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2\, dxdt \le \liminf_{\delta\to 0} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta|^2\, dx\, dt \le \liminf_{\delta\to 0} \left\{ \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, u_\varepsilon^\delta\, dxdt \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon^\delta\, u_\varepsilon^\delta\, dx\, dt \right\} = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f w_\varepsilon\, dx\, dt - \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t w_\varepsilon\, w_\varepsilon\, dxdt.$$

Отже, w_ε задовольняє нерівність

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t w_\varepsilon\, w_\varepsilon dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2\,dxdt \le \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, w_\varepsilon\,dxdt. \tag{46}$$

Віднімаючи нерівність (46) від (45), маємо

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t w_\varepsilon(v-w_\varepsilon)\,dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon\cdot\nabla(v-w_\varepsilon)\,dx\,dt \ge \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\,(v-w_\varepsilon)\,dx\,dt \quad \forall\, v\in\mathcal{K}_\varepsilon. \tag{47}$$

Отже, w_ε — узагальнений розв'язок задачі (3). Оскільки задача (3) має єдиний розв'язок, то $w_\varepsilon = u_\varepsilon$ та $u_\varepsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))$, $u'_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))$.

З (35) та (39) випливає нерівність

$$\max_{t\in(0,T)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))} + \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le C_4. \tag{48}$$

5 Доведення теореми 1

1. Використовуючи (48), маємо

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_0))} \le C_0, \quad \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0\times(0,T))} \le C_0, \quad \|\widetilde{u_\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega^+))} \le C_0,$$
$$\|\widetilde{\partial_{x_i} u_\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega^+))} \le C_0,\ i=1,2,3, \quad \|\widetilde{\partial_t u_\varepsilon}\|_{L^2(\Omega^+\times(0,T))} \le C_0.$$

Тому можна вибрати підпослідовність $\{\varepsilon'\}\subset\{\varepsilon\}$ (яку знову позначимо ε) таку, що

$$\left.\begin{array}{rcll} u_\varepsilon|_{\Omega_0} & \stackrel{w}{\longrightarrow} & u_0^- & \text{в}\ \ H^1(\Omega_0\times(0,T)),\\ \widetilde{u_\varepsilon} & \stackrel{w}{\longrightarrow} & |\omega(x_3)|\,(|\omega(x_3)|^{-1}u) =: |\omega|\,u_0^+ & \text{в}\ \ L^2(\Omega^+\times(0,T)),\\ \widetilde{\partial_{x_i} u_\varepsilon} & \stackrel{w}{\longrightarrow} & \gamma_i & \text{в}\ \ L^2(\Omega^+\times(0,T)),\quad i=1,2,3,\\ \widetilde{\partial_t u_\varepsilon} & \stackrel{w}{\longrightarrow} & \gamma_4 & \text{в}\ \ L^2(\Omega^+\times(0,T)), \end{array}\right\}\ \text{при}\ \varepsilon\to 0, \tag{49}$$

де u_0^-, u_0^+, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 — деякі функції, які будуть визначені згодом.

Спочатку визначимо γ_3. Для довільної функції $\psi\in C_0^\infty(\Omega^+)$ маємо

$$\int\limits_{\Omega^+}\widetilde{\partial_{x_3} u_\varepsilon}\,\psi\,dx = \int\limits_{G_\varepsilon}\partial_{x_3}u_\varepsilon\,\psi\,dx = -\int\limits_{G_\varepsilon} u_\varepsilon\,\partial_{x_3}\psi\,dx - \varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\varrho'(x_3)\,u_\varepsilon\,\psi}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\varrho'(x_3)|^2}}\,d\sigma_x = -\int\limits_{\Omega^+}\widetilde{u_\varepsilon}\,\partial_{x_3}\psi\,dx$$
$$-\int\limits_{\Omega^+}\varrho'(x_3)\,\zeta(x_3)\,\widetilde{u_\varepsilon}\,\psi\,dx + \varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon}\varrho'(x_3)\,\nabla_{\xi'}Y(\xi',x_3)\,|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\cdot\nabla_{x'}(u_\varepsilon\,\psi)\,dx \tag{50}$$

для майже всіх $t\in(0,T)$. Використовуючи (29) та (48), перейдемо до границі в даній тотожності при $\varepsilon\to 0$, та отримаємо

$$\int\limits_{\Omega^+}\gamma_3\,\psi\,dx = -\int\limits_{\Omega^+}(|\omega(x_3)|\,u_0^+\,\partial_{x_3}\psi\,dx + |\omega(x_3)|'\,u_0^+\,\psi)\,dx \quad \text{для майже всіх} \quad t\in(0,T),$$

звідки маємо, що існує узагальнена похідна $\partial_{x_3} u_0^+$ та $\gamma_3 = |\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+$ м. с. в $\Omega^+ \times (0,T)$.

Аналогічно визначимо γ_4. Легко переконатися, що

$$\int_0^T \int_{\Omega^+} \widetilde{\partial_t u_\varepsilon}\, \psi\, dx\, dt = -\int_0^T \int_{\Omega^+} \widetilde{u}_\varepsilon\, \partial_t \psi\, dx\, dt \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega^+ \times (0,T)).$$

Перейдемо до границі в даній тотожності, використовуючи другу та останню границю в (49), одержимо

$$\int_0^T \int_{\Omega^+} \gamma_4\, \psi\, dx\, dt = -\int_0^T \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| u_0^- \partial_t \psi\, dx\, dt \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega^+ \times (0,T)), \tag{51}$$

звідки маємо, що $\gamma_4 = |\omega(x_3)| \partial_t u_0^-$ м. с. в $\Omega^+ \times (0,T)$.

Тепер визначимо $\gamma_i, i = 1,\, 2$. Розглянемо функції $Y_i(\xi_i) = -\xi_i + [\xi_i]$, $i = 1,\, 2$, де $[t]$ — ціла частина t. За допомогою цих функцій виберемо наступні тестові функції

$$\Phi_i(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T), \\ \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \psi(x,t), & (x,t) \in G_\varepsilon \times (0,T), \quad i = 1,\, 2, \end{cases} \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega^+ \times (0,T),\ \psi \geq 0.$$

Оскільки $Y_i \leq 0$ та $\psi \geq 0$, то $\Phi_i \in K_\varepsilon,\ i = 1, 2$. Легко переконатися, що

$$\nabla \Phi_1 = \left(-\psi + \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1}\psi,\ \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2}\psi,\ \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_3}\psi\right), \qquad x \in G_\varepsilon,$$

$$\nabla \Phi_2 = \left(\varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1}\psi,\ -\psi + \varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2}\psi,\ \varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_3}\psi\right), \qquad x \in G_\varepsilon.$$

Підставляючи Φ_i, $i = 1, 2$ в нерівність (11) для розв'язку u_ε та враховуючи те, що $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$, маємо

$$\varepsilon \int_{G_\varepsilon} Y_1(\frac{x_1}{\varepsilon})\, \partial_t u_\varepsilon\, \psi\, dx + \int_{G_\varepsilon} \left(-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\psi + \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right.$$

$$\left. + \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}\frac{\partial \psi}{\partial x_3}\right) dx \geq \int_{G_\varepsilon} \varepsilon\, f\, Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \psi\, dx, \quad i = 1, 2.$$

За допомогою (48), з попередньої нерівності виводимо нерівність

$$\left| \int_{\Omega^+ \times (0,T)} \widetilde{\partial_{x_i} u_\varepsilon} \psi\, dx\, dt \right| \leq \varepsilon \left(\int_{G_\varepsilon \times (0,T)} |Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \left(\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi - f\, \psi + \partial_t u_\varepsilon\, \psi\right)| dx\, dt \right)$$

$$\leq \varepsilon c_1 \int_0^T \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\nabla \psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} + \|f\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} + \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)}\right) dt$$

$$\leq \varepsilon c_2 \|\psi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega^+))}, \quad i = 1, 2,$$

звідки в границі (при $\varepsilon \to 0$) одержимо

$$\int_{\Omega^+ \times (0,T)} \gamma_i \psi\, dx dt = 0 \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega^+ \times (0,T)), \quad \psi \geq 0. \tag{52}$$

З (52) отримаємо, що $\gamma_i = 0$, $i = 1, 2$, м. с. в $\Omega^+ \times (0,T)$.

2. Покажемо, що сліди $u_0^+|_{\Xi_0}$ та $u_0^-|_{\Xi_0}$ рівні. За допомогою неперервності оператору сліду, компактного вкладення $H^{1/2}(\Xi_0) \subset L^2(\Xi_0)$ та першого співвідношення в (49), маємо

$$u_\varepsilon(x',0,t) \xrightarrow{s} u_0^-(x',0,t) \quad \text{в} \quad L^2(\Xi_0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{для м. в.} \quad t \in (0,T). \tag{53}$$

Розглянемо рівність

$$\widetilde{u_\varepsilon}(x',0,t) = \chi_{\omega_0}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x',0,t) \quad \text{для м. в. } (x',0,t) \in \Xi_0 \times (0,T), \tag{54}$$

де $\chi_{\omega_0}(\xi'),\ \xi' \in \mathbb{R}^2$, — 1-періодична функція визначена на квадраті Ξ_0 наступним чином

$$\chi_{\omega_0}(\xi') = \begin{cases} 1, & \xi' \in \overline{\omega(0)}, \\ 0, & [0,1] \times [0,1] \setminus \overline{\omega(0)}. \end{cases}$$

Відомо, що $\chi_{\omega_0}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{w} |\omega(0)|$ слабко в $L^2(\Xi_0)$ при $\varepsilon \to 0$. Звідси та з (53) отримаємо, що права частина (54) збігається до $|\omega(0)|\, u_0^-$ слабко в $L^2(\Xi_0)$ при $\varepsilon \to 0$.

З іншого боку, за допомогою (28) маємо

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Xi_0} \widetilde{u_\varepsilon}(x',0,t)\, \psi(x')\, dx' = \frac{1}{h} \Bigg(& \int\limits_{\Omega^+} \widetilde{u_\varepsilon(x,t)}\, \psi(x')\, dx + \int\limits_{\Omega^+} (x_3 - h)\, \widetilde{\partial_{x_3} u_\varepsilon}(x,t)\, \psi(x')\, dx \\ & + \int\limits_{\Omega^+} \zeta(x_3)\, \varrho'(x_3)\, (x_3 - h)\, \widetilde{u_\varepsilon}\, \psi(x')\, dx \\ & + \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} \varrho'(x_3)\, (x_3 - h)\, \nabla_{\xi'} Y(\xi', x_3)\, |_{\xi' = \frac{x'}{\varepsilon}} \cdot \nabla_{x'}(u_\varepsilon \psi)\, dx \Bigg) \end{aligned} \tag{55}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\psi \in C_0^\infty(\Xi_0)$. Використовуючи результати збіжності отримані вище та переходячи до границі в (55) при $\varepsilon \to 0$, отримаємо наступну тотожність

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Xi_0} |\omega(0)|\, u_0^-(x',0,t)\psi(x')\, dx = \frac{1}{h} \Bigg(& \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, u_0^+(x,t)\, \psi(x')\, dx + \int\limits_{\Omega^+} (x_3 - h)|\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+(x,t)\, \psi\, dx \\ & + \int\limits_{\Omega^+} (x_3 - h)\, \zeta(x_3)\, \varrho'(x_3)\, |\omega(x_3)|\, u_0^+(x,t)\, \psi(x')\, dx \Bigg) \\ = \frac{1}{h} & \int\limits_{\Omega^+} \big(|\omega(x_3)|\, u_0^+\, \psi(x') + (x_3 - h)\, \psi(x')\, \partial_{x_3}\big(|\omega(x_3)|\, u_0^+(x,t)\big)\big)\, dx \\ = & \int\limits_{\Xi_0} |\omega(0)|\, u_0^+(x',0,t)\, \psi(x')\, dx \end{aligned}$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(\Xi_0)$ та для майже всіх $t \in (0,T)$, звідки $u_0^+(x',0,t) = u_0^-(x',0,t)$ для майже всіх $x' \in \Xi_0$ та $t \in (0,T)$.

3. В першому пункті ми фактично довели, що для майже всіх $x \in \Omega^+$

$$\widetilde{u_\varepsilon}(x,\cdot) \ \xrightarrow{w}\ |\omega|\, u_0^+(x,\cdot) \quad \text{слабко в } H^1(0,T) \quad \text{при } \ \varepsilon \to 0. \tag{56}$$

Оскільки $\widetilde{u_\varepsilon}|_{t=0} = 0$, границя (56) означає, що $u_0^+|_{t=0} = 0$. Очевидно, що і $u_0^-|_{t=0} = 0$.

З (28) маємо, що для майже всіх $t \in (0,T)$ виконується наступна нерівність

$$0 \le \int\limits_{\Omega^+} \zeta(x_3)\widetilde{u_\varepsilon}(x,t)\,\varphi(x)\,dx + \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} \nabla_{\xi'} Y(\xi',x_3)|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}} \cdot \nabla_{x'}(u_\varepsilon(x,t)\varphi(x))\,dx \tag{57}$$

для всіх $\varphi \in C_0^\infty(\Omega^+)$ таких, що $\varphi \le 0$ в Ω^+. Переходячи до границі в (57) при $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$0 \le \int\limits_{\Omega^+} \zeta(x_3) u_0^+(x,t)\,\varphi(x)\,dx \qquad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega^+), \quad \varphi \le 0,$$

яка означає, що $u_0^+ \le 0$ м. с. в $\Omega^+ \times (0,T)$.

Отже, функція u_0 визначена в (7) належить до множини $\mathcal{K}_0^0$.

4. З (48) та першої границі (49) виводимо, що $u_\varepsilon(\cdot,T)|_{\Omega_0} \ \xrightarrow{s}\ u_0^-(\cdot,T)$ сильно в $L^2(\Omega_0)$ при $\varepsilon \to 0$. Також з (48) випливає, що ми можемо вибрати підпослідовність $\{\varepsilon\}' \subset \{\varepsilon\}$ (яку знову позначимо через ε) таку, що

$$\widetilde{u}_\varepsilon(\cdot,T) \ \xrightarrow{w}\ w_0^+(\cdot,T) \quad \text{слабко в } L^2(\Omega^+) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Покажемо, що $w_0^+(x,T) = |\omega(x_3)|\, u_0^+(x,T),\ \ x \in \Omega^+$. Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$ в наступній тотожності

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^+} \widetilde{\partial_t u_\varepsilon}(x,t)\,v(x)\,dx\,dt = \int\limits_{\Omega^+} \widetilde{u_\varepsilon}(x,T)\,v(x)\,dx \quad \forall v \in L^2(\Omega^+),$$

маємо

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+(x,t)\,v(x)\,dx\,dt = \int\limits_{\Omega^+} w_0^+(x,T)\,v(x)\,dx \quad \forall v \in L^2(\Omega^+),$$

або

$$\int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\,u_0^+(x,T)\,v(x)\,dx = \int\limits_{\Omega+} w_0^+(x,T)\,v(x)\,dx \quad \forall v \in L^2(\Omega^+).$$

Використовуючи слабку напівнеперервність норми в гільбертовому просторі, маємо

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\|u_\varepsilon(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|\widetilde{u}_\varepsilon(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega^+)}\right) \ge \|u_0^-(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \||\omega|u_0^+(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega^+)} = \|u_0(\cdot,T)\|^2_{\mathcal{V}}.$$

З цієї нерівності отримаємо

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon\, u_\varepsilon dx\,dt \ge \int\limits_0^T (\partial_t u_0, u_0)_{\mathcal{V}}\,dt. \tag{58}$$

5. Додамо нерівність

$$\int_{\Omega_0} |\nabla(\varphi - u_\varepsilon)|^2\,dx + \int_{G_\varepsilon} |\partial_{x_3}(\varphi - u_\varepsilon)|^2\,dx + \int_{G_\varepsilon} |\partial_{x_2} u_\varepsilon|^2\,dx + \int_{G_\varepsilon} |\partial_{x_1} u_\varepsilon|^2\,dx \geq 0$$

до (12) та проінтегруємо її по $(0,T)$. Тут φ — довільна функція з наступної множини

$$\mathcal{K}_0^1 = \left\{\varphi \in C^1\big(\overline{\Omega_1} \times [0,T]\big) : \ \ \varphi \leq 0 \ \text{ на } \ \Omega^+, \ \ \varphi = 0 \ \text{ на } \ \Xi_h \ \text{ для всіх } \ t \in [0,T]\right\}.$$

Використовуючи те, що $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$ маємо

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon\,(\varphi - u_\varepsilon)dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega_0} \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi - u_\varepsilon)\,dx\,dt + \int_0^T\int_{G_\varepsilon} \partial_{x_1} u_\varepsilon\,\partial_{x_1}\varphi\,dx\,dt$$
$$+ \int_0^T\int_{G_\varepsilon} \partial_{x_2} u_\varepsilon\,\partial_{x_2}\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_{G_\varepsilon} \partial_{x_3}\varphi\,\partial_{x_3}(\varphi - u_\varepsilon)\,dx\,dt \geq \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon)\,dx\,dt, \tag{59}$$

яка може бути переписана у наступній формі

$$\int_0^T\int_{\Omega_0} \partial_t u_\varepsilon\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega^+} \widetilde{\partial_t u_\varepsilon}\varphi\,dx\,dt - \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon\,u_\varepsilon dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega_0} \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi - u_\varepsilon)\,dx\,dt$$
$$+ \int_0^T\int_{\Omega^+} \widetilde{\partial_{x_1} u_\varepsilon}\,\partial_{x_1}\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega^+} \widetilde{\partial_{x_2} u_\varepsilon}\,\partial_{x_2}\varphi\,dx\,dt$$
$$+ \int_0^T\int_{\Omega^+} \chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_3}^2\varphi\,dx\,dt - \int_0^T\int_{\Omega^+} \partial_{x_3}\varphi\,\widetilde{\partial_{x_3} u_\varepsilon}\,dx\,dt$$
$$\geq \int_0^T\int_{\Omega_0} f\,(\varphi - u_\varepsilon)\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega^+} \chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) f\,\varphi\,dx\,dt - \int_0^T\int_{\Omega^+} f\widetilde{u_\varepsilon}\,dx\,dt. \tag{60}$$

Переходячи до границі (60) при $\varepsilon \to 0$ та використовуючи (58) та (49), отримаємо таку інтегральну нерівність

$$\int_0^T\int_{\Omega_0} \partial_t u_0^-\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\partial_t u_0^+\varphi\,dx\,dt$$
$$- \int_0^T (\partial_t u_0\,u_0)_{\mathcal{V}}dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega_0} \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi - u_0^-)\,dx\,dt$$
$$+ \int_0^T\int_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\partial_{x_3}^2\varphi\,dx\,dt - \int_0^T\int_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\partial_{x_3}\varphi\,\partial_{x_3} u_0^+\,dx\,dt$$
$$\geq \int_0^T\int_{\Omega_0} f\,(\varphi - u_0^-)\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f\,\varphi\,dx\,dt - \int_0^T\int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f u_0^+\,dx\,dt. \tag{61}$$

Нерівність (61) може бути переписана у вигляді

$$\int_0^T (\partial_t u_0, \varphi - u_0)_{\mathcal{V}}\, dt + \int_0^T (\varphi, \varphi - u_0)_{\mathcal{H}}\, dt \geq \int_0^T (f, \varphi - u_0)_{\mathcal{V}}\, dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}_0^1. \tag{62}$$

Оскільки множина $\mathcal{K}_0^1$ щільна в $\mathcal{K}_0$, інтегральна нерівність (62) виконується для всіх $\varphi \in \mathcal{K}_0$. Разом з включенням $u_0 \in \mathcal{K}_0^0$, яке доведене в 3 пункті, це означає, що функція u_0 є узагальненим розв'язком усередненої задачі (8) (див. означення 3.5).

Враховуючи єдиність розв'язку задачі (8) зрозуміло, що всі описані вище міркування мають місце для будь-якої підпослідовності $\{\varepsilon\}$, яку ми обрали на початку доведення. Отже, теорему 1 доведено.

Література

1. Воробьев А. Ю., Шапошникова Т. А. *Об усреднении неоднородной задачи Синьорини для уравнения Пуассона в периодически перфорированной области* // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т.39, №3.
2. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М., 1983.
3. Котляров В. П., Хруслов Е. Я. *О предельном граничном условии одной задачи Неймана* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1970. — №10. — С. 83–96.
4. Сузиков Г. В., Хруслов Е. Я. *О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1976. — №5. — С. 35–49.
5. Хруслов Е. Я. *О резонансных явлениях в одной задаче дифракции* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1968. — №10. — С. 113–120.
6. Baiocchi C., Capelo A. Variational and Quasivariational inequalities, Applications to Free Boundary Problems Willey, Chichester, 1984.
7. Blanchard D., Gaudiello A., and Griso G. *Junction of a periodic family of elastic rods with 3d plate. Part I. II,* J. Math. Pures Appl., **88**, 9 (2007), 1–33; **88**, 9 (2007), 149–190.
8. Blanchard D., Gaudiello A., and Mel'nyk T. A. *Boundary homogenization and reduction of dimension in a Kirchhoff-Love plate,* SIAM J. Math. Anal., **39**, 6 (2008), 1764–1787.
9. Blanchard D., Gaudiello A., and Mossino J. *Highly oscillating boundaries and reduction of dimension in the critical case,* Anal. Appl., **5** (2007), 137–163.
10. Chechkin G. A., Mel'nyk T. A. *Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses,* Applicable Analysis, DOI:10.1080/00036811.2011.602634 (2012).
11. D'Apice C., De Maio U., and Mel'nyk T. A. *Asymptotic analysis of a perturbed parabolic problem in a thick junction of type 3:2:2,* Networks Heterogen. Media, **2** (2007), 255–277.
12. Donato P., Nabil A. *Homogenization and correctors for the heat equation in perforated domains,* Ricerche di Matematica, **L**, 1 (2001), 115–144.
13. Donato P., Nabil A. *Homogenization of semilinear parabolic equations in perforated domains,* Chin. Ann. Math. **25B**, 2 (2004), 143–156.
14. Durante T. and Mel'nyk T. A. it Homogenization of quasilinear optimal control problems involving a thick multilevel junction of type 3:2:1, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, DOI:10.1051/cocv/2011107 (2012)

15. Glowinski R., Lions J. L., Tremoliere R. Numerical analyses of variational inequalities [Russian translation], M. Mir, 1979.

16. Kazmerchuk Iu. A., Mel'nyk, T. A. *Homogenization of the Signorini boundary-value problem in a thick plane junction. Nonlinear oscillations,* **12**, 1 (2009), 44–58.

17. Lavrentovich Y. I., Knyzkova T. V., Pidlisnyuk V. V. *The potential of application of new nanostructural materials of for degradation of pesticides in water,* Proceedings of the 7-th International HCH and Pesticides Forum "Towards the estaplishment of an absolute POPS", June 5–7, 2003, Kyiv, Ukraine, 167–169.

18. Mel'nyk T. A. *Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction,* Z. Anal. An., **18**, 4 (1999), 953–975.

19. Mel'nyk T. A. *Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction,* Nonlinear Oscillations, **4**, 1 (2000), 91–105.

20. Mel'nyk T. A. *Asymptotic analysis of a spectral problem in a periodic thick junction of type 3:2:1,* Mathematical Methods in the Applied Sciences, **23** (2000), 321–346.

21. Mel'nyk T. A. *Homogenization of a singularly perturbed parabolic problem in a thick periodic junction of type 3:2:1,* Ukr. Math. J. **52**, 11 (2000), 1737–1749.

22. Mel'nyk T. A. *Homogenization of a singularly perturbed parabolic problem in a thick periodic junction of the type 3:2:1,* Ukrainskii Matem. Zhurnal, **52** (2000), 1524–1534 (in Ukrainian); English transl. in Ukrainian Math. Journal, **52** (2000), 1737–1749.

23. Mel'nyk T. A. *Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction,* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, **18**, 4 (1999), 953–975.

24. Mel'nyk T. A. *Homogenization of a boundary value problem with a nonlinear boundary condition in a thick junction of type 3:2:1,* Math. Models Meth. Appl. Sci., **31**, 9 (2008), 1005–1027. Published online: `http://dx.doi.org/10.1002/mma.951`

25. Mel'nyk T. A. and Vashchuk P. S. *Homogenization of a boundary value problem with mixed type of boundary conditions in a thick junction* [in Russian], Differ. Uravn. **43**, 5 (2007), 677–684; English transl.: *Differ. Equ.* **43**, 5 (2007), 696–703.

26. Mel'nyk T. A., Nakvasiuk Iu. A., Wendland W. L. *Homogenization of the Signorini boundary-value problem in a thick plane junction and boundary integral equations for the homogenized problem,* Mathematical Methods in the Applied Science, **34**, 7(2011), 758–775.

27. Mel'nyk T. A. and Nazarov S. A. *The asymptotic structure of the spectrum in the problem of harmonic oscillations of a hub with heavy spokes* [in Russian], Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk, **333**, 1 (1993), 13–15; English transl.: Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., **48**, 3 (1994), 428–432.

28. Mel'nyk T. A. and Nazarov S. A. *The asymptotics of the solution to the Neumann spectral problem in a domain of the "dense-comb" type* [in Russian], Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo, **19** (1996), 138–173; English transl.: J. Math. Sci., New York **85**, 6 (1997), 2326–2346.

29. Mel'nyk T. A. and Nazarov S. A. *Asymptotic analysis of the Neumann problem on the junction of a body and thin heavy rods* [in Russian], Algebra Anal. **12**, 2 (2000), 188–238; English transl.: St. Petersb. Math. J. **12**, 2 (2001), 317–351.

30. Nazarov S. A. *Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions I, II* [in Russian], Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo **18** (1995), 1-78; **20** (1997), 155–196; English transl.: J. Math. Sci., New York,**80**, 5 (1996), 1989–2034; **97**, 3 (1999), 4085–4108.

31. Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E. Vibration and Coupling of Continuous Systems, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

32. Sandrakov G. V. *Homogenization of variational inequalities for problems with regular obstacles,* Dokl. Akad. Nauk, 397 (2004), 170–173; English transl., Dokl. Math. 71 (2004), 119–122.
33. Shaposhnikova T. A., Zubova M. N. *Homogenization problem for a parabolic variational inequality with constraints on subsets situated on the boundary of the domain,* Networks and Heteregeneous Media, **3**, 3 (2008), 1–20.
34. Showalter R. E. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations,* Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, **49** (1997).
35. Signorini A. Questioni di elasticita non linearizzata o semilinearizzata, Rend. di Matem. e delle sue appl., 18, 1959.
36. Uspenskii S. V. *The traces of functions the Sobolev space* $W_p^{l_1,\ldots,l_n}$ *on smooth surfaces,* Siberian Math. J., **13** (1972), 298–313.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна

Надійшло 12.04.2012

Mel'nyk T.A., Nakvasiuk Yu.A. *Homogenization of the parabolic Signorini boundary-value problem in a thick junction of type 3:2:1*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 90–110.

We consider a parabolic Signorini boundary-value problem in a thick junction Ω_ε which is the union of a domain Ω_0 and a large number of $\varepsilon-$periodically situated thin cylinders. The Signorini conditions are given on the lateral surfaces of the cylinders. The asymptotic analysis of this problem is done as $\varepsilon \to 0$, i.e., when the number of the thin cylinders infinitely increases and their thickness tends to zero. With the help of the integral identity method we prove a convergence theorem and show that the Signorini conditions are transformed (as $\varepsilon \to 0$) in differential inequalities in the region that is filled up by the thin cylinders.

Мельник Т.А., Накваснюк Ю.А. *Усреднение параболической краевой задачи Синьорини в густом соединении типа 3:2:1* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 90–110.

Рассматривается параболическая краевая задача Синьорини в густом соединении Ω_ε, которое является объединением некоторой области Ω_0 и большого количества $\varepsilon-$ периодически расположенных тонких криволинейных цилиндров. На боковых поверхностях цилиндров заданные условия Синьорини. Изучено асимптотическое поведение решения такой задачи, когда $\varepsilon \to 0$, т.е. когда количество цилиндров неограниченно возрастает, а их толщина стремится к нулю. С помощью метода интегральных тождеств доказана теорема сходимости и показано, что условия Синьорини трансформируются (при $\varepsilon \to 0$) в дифференциальные неравенства в области заполняемой тонкими цилиндрами.