ЗМІСТ

Тема 1. СУТНІСТЬ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ. ТАРИФНА СТАВКА ТА СТРАХОВА СТАТИСТИКА

1.1. ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

Етимологія слова «актуарій». Завдання актуарних служб

1.2. ЗАВДАННЯ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

Основні визначення. Страхова калькуляція. Класифікація актуарних розрахунків

1.3. СТРУКТУРА ТАРИФНОЇ СТАВКИ. СТРАХОВИЙ ВНЕСОК

Тарифна ставка та її структура. Витрати на ведення страхової справи. Страховий внесок (страхова премія). Поділ страхового внеску за призначенням, характером ризиків, формою сплати, часом сплати, відображенням у балансі страховика

1.4. ПОКАЗНИКИ СТРАХОВОЇ СТАТИСТИКИ

Страхова статистика як аналіз певних показників. Визначення розрахункових показників

1.1. ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

Історія страхування в цілому нараховує щонайменше 2000 років. Однак воно могло одержати значний розвиток лише з початком застосування основних положень математичної теорії ймовірностей і нагромадження досить надійних статистичних даних. Лише після появи цих передумов стало можливим розроблення техніки страхових розрахунків за довгостроковими і короткостроковими операціями страхування життя та майна, чи, інакше кажучи, актуарних розрахунків.

Слово «актуарій» походить від лат. *actuarius* (службовець відділу запису актів громадянського стану). Пізніше так називали певну професійну групу працівників страхової системи.

Основи теорії актуарних розрахунків були закладені в XVII ст. у роботах Д. Граунта, Яна де Вітта, Є. Галлея. Розвитку актуарної техніки сприяло відкриття в 1762 р. у Лондоні страхового товариства «Еквітебл». На відміну від раніше діючих страхових товариств, «Еквітебл» запровадив у страхуванні на випадок смерті диференційовані за віковими групами тарифи страхових платежів, побудовані на основі таблиць смертності. За прикладом товариства «Еквітебл» почали діяти інші страхові товариства, спочатку в Англії, а потім і в інших країнах.

Значного розвитку страхування набуло, починаючи із середини XIX ст. Із розширенням кола проблем, які стали предметом актуарних розрахунків і становили інтерес для всіх страхових компаній, у 1889 р. була створена Міжнародна асоціація актуаріїв (IAA). 1895 р. під її керівництвом у Брюсселі відбувся I Міжнародний конгрес актуаріїв.

Міжнародні конгреси актуаріїв (ICA) – одна з найважливих подій у галузі страхової науки. Вони проводяться кожні три-чотири роки. До їх функцій належать обмін провідним досвідом у галузі актуарної теорії, уніфікація методів актуарних розрахунків і актуарної символіки (останній варіант такої символіки був прийнятий на XIV конгресі, що відбувся в Мадриді в 1954 р.).

Завдання актуарних служб – розробка комплексу спеціальних економіко-математичних методів калькулювання тарифних ставок і внесків із усіх видів особового та майнового страхування, визначення нормативів у галузі перестрахування, організація оптимальної інвестиційної політики за рахунок фондів особового і пенсійного страхування тощо.

Сьогодні в промислово розвинених країнах актуарії працюють у компаніях зі страхування життя, майнового страхування, у пенсійних фондах, у перестрахувальних това-риствах та органах страхового нагляду.

Важливу роль актуарна служба відіграє в діяльності перестрахувальних компаній. Як відомо, ***перестрахування*** – це така система економічних відносин, за якої страховик, приймаючи на страхування ризики, частину відповідальності за ними передає іншим страховикам з метою створення збалансованого портфеля договорів страхування та забезпечення фінансової стійкості страхових операцій.

Конкретний обсяг відповідальності, переданий страховою компанією іншому страховику (перестрахувальникові), обумовлюється її фінансовими можливостями.

На актуаріях перестрахувальної компанії лежить відповідальність за проведення ефективної перестрахувальної політики. Складність цього завдання обумовлюється певною суперечливістю самого процесу перестрахування, бо воно супроводжується передачею перестрахувальникові частини отриманих внесків, які надійшли, до страхової компанії, що погіршує фінансово-економічні результати її діяльності.

Ще однією важливою ділянкою діяльності актуаріїв є *служба державного страхового нагляду*, яка видає дозволи на створення нових страхових компаній. При цьому актуарії аналізують статут і інші документи щодо створення компанії, калькуляційні відомості з розрахунку тарифів. У деяких випадках, наприклад, через недостатнє валютне забезпечення передбачуваних страхових операцій, рівень якого визначається на основі теорії страхового ризику Готендорфа-Пероццо, актуарна служба органу страхового нагляду може не дати дозвіл на створення страхової компанії.

Актуарні служби страхового нагляду роблять висновок про можливість надання існуючій компанії права займатися новими видами страхування, територіального розширення проведених страхових операцій, зміни умов страхування, а також зміни розмірів тарифних ставок.

1.2. ЗАВДАННЯ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

Актуарні розрахунки – система математичних і статистичних закономірностей, яка регламентує взаємовідносини між страховиком та страхувальником.

Під час здійснення актуарних розрахунків визначають витрати, необхідні для страхування певного об'єкта, та собівартість і вартість послуги, яку надає страховик страхувальнику. За допомогою актуарних розрахунків визначають частку участі кожного страхувальника у створенні страхового фонду, тобто визначають розміри тарифних ставок.

Мета актуарних розрахунків	– формування системи фундаментальних знань щодо сутності, побудови та аналізу математичних моделей і методів, що регламентують відносини між страховиками і страхувальниками.
Предмет актуарних розрахунків	– економіко-математичні моделі розрахунків страхових премій, запасів та резервів, динаміки фінансового стану страхових компаній.
Страховик	– страхова компанія, тобто юридична особа, яка здійснює страхування і приймає на себе зобов'язання відшкодувати збитки або виплатити страхову суму при настанні певних страхових випадків.
Страхувальник	– страхує свої майнові інтереси, може бути як юридичною, так і фізичною особою.
Застрахований	– фізична особа, життя та здоров'я якої є об'єктом страхового захисту і яка може бути одночасно й страхувальником.

Форма, у якій розраховуються витрати на проведення певного випадку страхування, називають ***страховою (актуарною) калькуляцією.***

Актуарна калькуляція допомагає визначати страхові платежі по конкретному договору страхування.

Основними завданнями актуарних розрахунків є:

- дослідження та групування ризиків у межах страхової сукупності, тобто наукова класифікація ризиків з метою створення гомогенної підсукупності в межах загальної страхової сукупності;
- обчислення математичної ймовірності настання страхового випадку, визначення частоти та ступеня тяжкості його наслідків як в окремих ризикових групах, так і в цілому за страховою сукупністю;
- математичне обґрунтування необхідних витрат на ведення справи страховиком та прогнозування тенденцій їх розвитку;
- математичне обґрунтування розміру необхідних резервних фондів страховика, пропозиції щодо конкретних методів і джерел їх формування.

Актуарні розрахунки класифікують за такими ознаками: галузь страхування, час проведення, ієрархічна рівність (рис. 1.1).

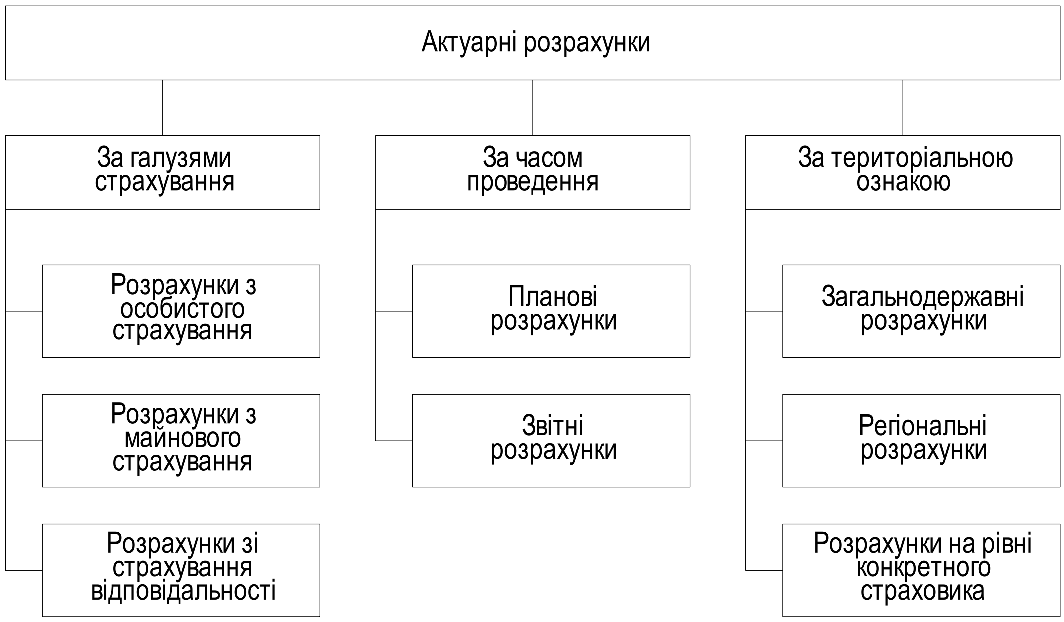


Рис. 1.1. Класифікація актуарних розрахунків

1.3. СТРУКТУРА ТАРИФНОЇ СТАВКИ. СТРАХОВИЙ ВНЕСОК

Тарифна ставка – ціна страхового ризику та інших витрат; адекватне грошове вираження зобов'язань страховика з укладеного договору страхування.

Тарифна ставка, за якою укладають договір страхування, називається ***брутто-ставкою***. Брутто-ставка складається з двох частин: нетто-ставки та навантаження. ***Нетто-ставка*** становить ціну страхового ризику: пожежі, повені, вибуху тощо. ***Навантаження*** покриває витрати страховика з організації та проведення страхової справи, ураховує відрахування в резервні фонди, містить елементи прибутку. В основу побудови нетто-ставки за будь-яким видом страхування покладено ймовірність настання страхової події.

Імовірністю події A – позначається $P(A)$ – називається відношення кількості позитивних для нього випадків M до загальної кількості всіх однаково можливих випадків N. Оскільки ймовірність події виражається правильним дробом, тобто тим, у якому чисельник менший від знаменника (M завжди менше або дорівнює N), зрозуміло, що $0 < P(A) < 1$. Якщо $P(A)$ дорівнює 0, то подія A вважається неможливою. Якщо воно дорівнює 1, то це – достовірна подія.

Отже, імовірність події знаходиться в межах від 0 до 1. Якщо вона досягає своїх крайніх меж, то страхування на випадок настання цієї події проводитися не може. Страхові відносини укладають лише тоді, коли завчасно невідомо, відбудеться в цьому періоді та чи інша подія чи ні, тобто має місце випадок.

Сума страхового відшкодування, яку виплачують потерпілим об'єктам у переважній більшості випадків, відрізняється від страхової суми за ними.

$$T_n = P(A) \cdot K \cdot 100, \qquad (1.1)$$

де T_n – тарифна нетто-ставка;

$P(A)$ – імовірність страхової події;

A – страховий випадок;

K – показник співвідношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір страхування.

Наведена формула (1.1) дає змогу розмежувати поняття «ймовірність страхової події» і «ймовірність збитку». Ймовірністю збитку називається добуток ймовірності страхової події *P(A)* на коефіцієнт *K*.

Подамо формулу для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми в розгорнутому вигляді:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{K_B}{K_Д}; \; K = \frac{C_B}{C_C}, \qquad (1.2)$$

де K_B – кількість виплат за той чи інший період (за рік);

$K_Д$ – кількість укладених договорів страхування в цьому періоді (році);

C_B – середня виплата на один договір;

C_C – середня страхова сума на один договір.

У результаті формула для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми набуває вигляду:

$$T = \frac{K_B \cdot C_B}{K_Д \cdot C_B} \cdot 100, \text{ або } T = \frac{B}{C} \cdot 100, \qquad (1.3)$$

де B – загальна сума виплат страхового відшкодування;

C – загальна страхова сума застрахованих об'єктів.

Відношення кількості виплат (K_B) до кількості укладених договорів ($K_Д$) визначає частоту страхових подій (частоту страхових випадків).

Відношення середньої виплати на один договір (C_B) до середньої страхової суми на один договір (C_C) є аналогом показника співвідношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір страхування у формулі для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми.

Ці розрахунки проводятся як за видами страхування в цілому, так і за окремими страховими ризиками. За цими даними визначають розмір нетто-ставки. Після її розрахунку визначають розмір сукупної тарифної ставки або брутто-ставки. Для обчислення розміру брутто-ставки до нетто-ставки додають навантаження.

Витрати на ведення справи зазвичай розраховують на 100 грн страхової суми (аналогічно до нетто-ставки), інші навантаження визначають у відсотках до брутто-ставки. Розмір сукупної брутто-ставки розраховують за формулою

$$T_b = T_n + F_{abc}, \tag{1.4}$$

де T_b – брутто-ставка;

T_n – нетто-ставка;

F_{abc} – навантаження.

Величини T_b, T_n, F_{abc} подають в абсолютному розмірі, тобто в гривнях зі 100 грн страхової суми. Оскільки багато статей навантаження визначають у відсотках до брутто-ставки, то її на практиці визначають за формулою

$$T_b = T_n + F_{abc} + F_{k/z} \cdot T_b, \tag{1.5}$$

де F_{abc} – навантаження, передбачене в тарифі у гривнях зі 100 грн страхової суми;

$F_{k/z}$ – частка навантаження, яка закладається в тариф у відсотках до брутто-ставки.

Звідси після нескладних перетворень маємо:

$$T_b = \frac{(T_n + F'_{abc})}{(1 - F_{k/z})}. \tag{1.6}$$

Якщо всі елементи навантаження визначені у відсотках до брутто-ставки, то величина F'_{abc} = 0. У цьому випадку формула спрощується та набуває вигляду:

$$T_b = \frac{T_n}{(1 - F_{k/z})}. \tag{1.7}$$

Головний елемент навантаження – *витрати на ведення справи.* До них належать витрати, пов'язані з укладанням та обслуговуванням договору страхування.

У страховій практиці розрізняють витрати на ведення справи внутрішньою службою страхової організації та витрати на ведення справи зовнішньою мережею страхової організації.

Виділяють також постійні та змінні витрати на ведення справи страховиком.

Змінні витрати на ведення справи відносять на окреме страхування (вид страхування, окремий страховий поліс). *Постійні витрати* розподіляють на весь портфель укладених договорів страхування.

Складаючи страхові тарифи, слід брати до уваги той факт, що страховими внесками потрібно покривати не тільки страхові суми і відшкодування, а й витрати на утримання страхової організації. З огляду на це, витрати на ведення справи можна класифікувати таким чином: аквізиційні, інкасаційні, ліквідаційні, організаційні, управлінські.

Аквізиційні витрати	– виробничі витрати страхової організації, пов'язані із залученням нових страхувальників та укладанням нових договорів страхування за посередництвом страхових агентів.
Інкасаційні витрати	– витрати, пов'язані з обслуговуванням готівкового обороту надходження страхових платежів. Це витрати на виготовлення бланків квитанцій про прийом страхових платежів та облікових реєстрів (відомостей, довідок тощо).
Ліквідаційні витрати	– витрати з ліквідації збитків, завданих страховою подією (заробітна плата осіб, які займаються ліквідацією збитків, судові витрати, поштово-телеграфні витрати і витрати, пов'язані з виплатою страхового відшкодування).
Організаційні витрати	– пов'язані із заснуванням страхової компанії. Їх відносять до активів страховика, бо вони є інвестиціями.
Управлінські витрати	– поділяють на загальні витрати управління та витрати управління майном.

Страховий внесок, або страхову премію, можна розглядати з економічного, юридичного та математичного погляду.

Економічна сутність страхового внеску виявляється в тому, що він є частиною національного доходу, яку виділяє страхувальник з метою гарантування захисту його інтересів від впливу негативних подій.

З юридичного погляду ***страховий внесок*** можна визначити як грошове вираження страхового зобов'язання, обумовленого та підтвердженого шляхом укладання договору страхування між його учасниками.

У математичному розумінні ***страховий внесок*** – це платіж страхувальника страховику, який періодично повторюється.

Якщо прийняти загальний розмір зобов'язань страховика зі страхування життя за B, вартість однієї ренти – A_x (x – вік особи, яка сплачує страховий внесок P_x), то отримаємо, що $P_x = \frac{B}{A_x}$ (у тому випадку, якщо страховий внесок сплачується пожиттєво), або $P_x = \frac{B}{L_t A_x}$ (у тому випадку, якщо страхові внески мають строковий характер), де $L_t A_x$ виражає вартість однієї термінової ренти.

Наведені формули свідчать про те, що страховий внесок у математичному розумінні може бути виражений тільки як середня величина, тобто як частина, що припадає на один поліс страхового портфеля від усіх зобов'язань страховика.

У майновому страхуванні страховий внесок можна розглядати як середню величину, отриману як відношення між загальною прогнозною величиною платежів страхувальника $\sum Q$ за певний період і загальною кількістю застрахованих об'єктів n, тобто $\frac{\sum Q}{n}$.

За призначенням страховий внесок поділяють на ризикову премію, накопичуваний внесок, нетто-премію, достатній внесок, бруттопремію.

Ризикова премія (чиста нетто-премія)	– частина страхового внеску у грошовій формі, призначена для покриття ризику.

Величина ризикової премії залежить від імовірності настання страхового випадку. Ризиковий внесок можна розглядати як функцію, похідну від імовірності реалізації ризику в часі та просторі.

Накопичуваний внесок	– призначений для покриття платежів страхування в разі закінчення терміну страхування.

Під час дії договору страхування розмір накопичувального внеску змінюється.

Нетто-премія	– частина страхового внеску, яка потрібна для покриття страхових платежів за певний проміжок часу за певним видом страхування.

Величина нетто-премії прямо залежить від розвитку ризику. Нетто-премія дорівнюватиме ризиковій премії у випадках, якщо простежується планомірний розвиток ризику.

Нетто-премія в майновому та особовому (особистому) страхуванні має різну структуру, зумовлену характером видів страхування та їх призначенням. Нетто-премія майнового страхування складається з ризикової премії та стабілізаційного навантаження (надбавки). В актуарних розрахунках особистого страхування нетто-премія складається з ризикової премії та накопичувального внеску. Інколи до них додають стабілізаційне навантаження (надбавки).

Достатній внесок – дорівнює сумі нетто-премії та навантаження, віднесених до витрат страховика.

Достатній внесок можна розглядати як брутто-премію або тарифну ставку.

Брутто-премія – тарифна ставка страховика.

Брутто-премія складається з достатнього внеску та надбавок на покриття витрат, пов’язаних із проведенням попереджувальних заходів, реклами, витрат на покриття збиткових видів страхування тощо. Кожний елемент, введений до брутто-премії, призводить до збільшення всієї тарифної ставки (страхового тарифу).

За характером ризиків страхові внески поділяють на натуральні та постійні премії.

Натуральна премія – премія, призначена для покриття ризику за певний проміжок часу.

Натуральна премія відповідає фактичному розвитку ризику. Вона в певний період дорівнює ризиковій премії. З часом натуральна премія змінюється. За різними видами страхування вона виражається різними ставками. У договорах страхування, розрахованих на тривалий час, ризикова премія не залишається незмінною. Вона повторює щорічні зміни ризику.

Постійні (фіксовані) внески – страхові внески, які з часом не змінюються, а залишаються постійними.

За формою сплати страхові внески поділяють на одночасні, поточні та річні.

Одночасний внесок – страхова премія, яку страхувальник сплачує страховику за весь період страхування наперед.

Суму одночасного внеску визначають до моменту укладання договору страхування.

Поточний внесок	– частина від загальних зобов'язань страхувальника стосовно страховика, тобто частина одночасного внеску.

Сума поточних внесків за цим видом страхування буде більшою ніж одночасний внесок.

Річний внесок (премія)	– одночасний страховий внесок, що звичайно вносять за договором, який має річний термін дії.

За часом сплати страхові внески поділяють на авансові платежі та попередню премію.

Авансові платежі	– платежі, які страхувальник сплачує страховикові завчасно – до настання терміну їх сплати, зазначеного в укладеній угоді. Авансові платежі звичайно вносять за весь термін дії договору.
Попередня премія	– платіж, внесений страхувальником до настання терміну сплати.

За способом відображення страхових внесків *в балансі страховика*, вони поділяються на перехідні платежі, ефективну премію та результативну премію.

Страхові угоди досить часто укладаються на один рік або кілька років. Здебільшого простежується незбіг календарного та страхового року. У випадку, коли річний страховий внесок сплачують у поточному календарному році, але відносять на період, який охоплює наступний календарний рік, слід провести розподіл страхової премії. У цьому випадку застосовують поняття перехідного платежу.

Перехідні платежі	– частина страхової премії, розподілена на наступний календарний рік.
Ефективна премія	– сума результативної премії та перехідних платежів, зарезервованих у поточному році та перенесених на наступний рік. Це вся сума поточних страхових платежів, якими володіє страховик у поточному році.
Результативна премія	– різниця між річною нетто-премією та перехідними платежами поточного року, які віднесено на наступний рік.

Величина результативної премії за інших рівних умов залежить від періодичності сплати страхових платежів.

1.4. ПОКАЗНИКИ СТРАХОВОЇ СТАТИСТИКИ

У практиці актуарних розрахунків широко використовують страхову статистику – систематизоване вивчення та узагальнення найбільш численних і типових страхових операцій на основі вироблених стати-стичною наукою методів обробки узагальнених підсумкових нату-ральних і вартісних показників, які характеризують страхову справу. Усі показники, які підлягають статистичному вивченню, поділяються на дві групи. Перша група відображає процес формування страхового фонду, друга – його використання.

Страхова статистика передбачає аналіз таких показників:

- кількість об'єктів страхування (n);
- кількість страхових подій (e);
- кількість об'єктів, які постраждали в результаті страхових подій (m);
- сума зібраних страхових платежів ($\sum p$);
- сума виплаченого страхового відшкодування ($\sum Q$);
- страхова сума для будь-якого об'єкта страхування ($\sum S_n$);
- страхова сума, що припадає на пошкоджений об'єкт сукупності, який досліджують ($\sum S_m$).

До розрахункових показників страхової статистики належать такі:

Частота страхових подій	– дорівнює співвідношенню між кількістю страхових подій та кількістю застрахованих об'єктів, тобто частота страхових подій показує, скільки страхових випадків припадає на один об'єкт страхування. Наведене співвідношення можна представити й кількісно – як величину, меншу ніж одиниця. Це означає, що одна страхова подія може спричинити кілька страхових випадків. Таким чином, існує термінологічна відмінність між поняттями страховий випадок і страхова подія. Страховою подією може бути град, ураган тощо, які охоплюють своїм шкідливим впливом численні об'єкти страхування.
Спустошеність страхової події (коефіцієнт кумуляції ризику)	– відношення кількості об'єктів страхування, які постраждали, до кількості страхових подій, тобто $\frac{m}{n}$. Коефіцієнт кумуляції ризику показує, скільки страхових випадків настане. Мінімальний коефіцієнт кумуляції ризику дорівнює одиниці.
Коефіцієнт (ступінь) збитковості	– виражає співвідношення між сумою виплаченого страхового відшкодування і страховою сумою всіх об'єктів, що постраждали, тобто $\frac{\sum Q}{\sum S_m}$. Цей показник

менший або дорівнює одиниці. Зворотню ситуацію можна вважати неймовірною, оскільки вона означає можливість знищення всіх застрахованих об'єктів більше, ніж один раз.

Середня страхова сума на один об'єкт (договір) страхування – відношення загальної страхової суми всіх об'єктів страхування до кількості всіх об'єктів страхування, тобто $\frac{\sum S_n}{n}$.

Середня страхова сума на один об'єкт, який постраждав, – дорівнює страховій сумі всіх об'єктів, що постраждали, поділеній на кількість цих об'єктів, тобто $\frac{\sum S_n}{m}$.

Збитковість страхової суми – дорівнює сумі виплаченого страхового відшкодування, поділеній на страхову суму всіх об'єктів страхування, тобто $\frac{\sum Q}{\sum S_n}$.

Норма збитковості – це співвідношення суми виплаченого страхового відшкодування до суми зібраних страхових платежів, виражене в процентах, тобто $\frac{\sum Q}{\sum P} \cdot 100$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке походження слова «актуарій»?
2. У чому полягає головне завданням актуарних служб?
3. Дайте визначення поняття актуарних розрахунків.
4. Які основні завдання актуарних розрахунків?
5. За якими критеріями здійснюється класифікація актуарних розрахунків?
6. Дайте визначення поняття “тарифна ставка”.
7. Які складові тарифної ставки?
8. Наведіть формули розрахунку нетто- та брутто-ставок.
9. Які існують види витрат на ведення страхової справи?
10. У чому полягає економічний, математичний та юридичний зміст страхового внеску.
11. Які складові страхового внеску?
12. Охарактеризуйте основні показники страхової статистики.
13. Які існують групи показників страхової статистики?
14. Наведіть формули розрахунку показників страхової статистики.

ТЕСТИ

1. Завдання актуарних служб страхових компаній полягає:
   а) у розробці комплексу спеціальних економіко-математичних методів калькулювання системи тарифних ставок і резервів внесків із усіх видів особового та майнового страхування;
   б) у визначенні системи нормативів у галузі перестрахування;
   в) в організації оптимальної інвестиційної політики за рахунок коштів фондів особового і пенсійного страхування.

2. Які відповіді характеризують витрати на ведення страхової справи – аквізиційні, інкасаційні, ліквідаційні, організаційні?
   а) пов'язані із заснуванням страхового товариства;
   б) витрати, пов'язані із обслуговуванням готівкового обороту надходження страхових платежів;
   в) виробничі витрати страхової організації, пов'язані із залученням нових страхувальників та укладанням нових договорів страхування за посередництвом страхових агентів;
   г) витрати з ліквідації збитків, нанесених страховою подією.

3. Які відповіді визначають актуарні розрахуки, їх мету і предмет?
   а) формування системи фундаментальних знань щодо сутності, побудови та аналізу математичних моделей і методів, що регламентують відносини між страховиками і страхувальниками;
   б) система математичних і статистичних закономірностей, яка регламентує визначення витрат, необхідних на страхування певного об'єкта, та собівартість і вартість послуги, яку надає страховик страхувальникові;
   в) економіко-математичні моделі розрахунків страхових премій, запасів та резервів, динаміка фінансового стану страхових компаній.

4. Різниця між річною нетто-премією та перехідними платежами поточного року, які віднесено на наступний рік, – це:
   а) ризикова премія;
   б) накопичуваний внесок;
   в) нетто-премія;
   г) достатній внесок;
   д) брутто-премія;
   е) натуральна премія;
   ж) попередня премія;

з) авансовий платіж;
и) результативна премія.

5. Формула $T_n = P(A) \cdot K \cdot 100$ дає можливість розрахувати:
а) імовірність страхової події;
б) тарифну брутто-ставку;
в) навантаження;
г) тарифну нетто-ставку.

6. У формулі для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми співвідношення $\frac{K_в}{K_д}$:
а) означає частоту страхових подій (частоту страхових випадків);
б) є аналогом коефіцієнта співвідношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір страхування;
в) є аналогом коефіцієнта співвідношення середньої виплати до частоти страхових подій на один договір страхування.

7. Тарифна ставка – це:
а) форма, у якій розраховуються витрати на проведення певного страхування;
б) ціна страхового ризику та інших витрат, адекватне грошове вираження зобов’язань страховика з укладеного договору страхування;
в) математичне обґрунтування необхідних витрат на ведення справи страховиком та прогнозування тенденцій їх розвитку.

8. До абсолютних показників страхової статистики належать:
а) кількість об’єктів страхування;
б) кількість страхових подій;
в) кількість об’єктів, які постраждали в результаті страхових подій;
г) частота страхових подій;
д) страхова сума, що припадає на пошкоджений об’єкт сукупності, яку досліджують;
е) спустошеність страхової події (коефіцієнт кумуляції ризику);
ж) коефіцієнт (ступінь) збитковості;
з) середня страхова сума на один об’єкт (договір) страхування;
и) норма збитковості.

9. Актуарні розрахунки класифікують за галуззю страхування на:
   а) розрахунки з особистого страхування;
   б) звітні розрахунки;
   в) розрахунки з майнового страхування;
   г) регіональні розрахунки;
   д) розрахунки зі страхування відповідальності;
   е) планові розрахунки.

10. Частина страхового внеску, потрібна для покриття страхових платежів за певний проміжок часу за певним видом страхування, – це:
   а) ризикова премія;
   б) накопичуваний внесок;
   в) нетто-премія;
   г) достатній внесок;
   д) брутто-премія;
   е) натуральна премія;
   ж) попередня премія;
   з) авансовий платіж;
   и) результативна премія.

Тема 2. ІНСТРУМЕНТАРІЙ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

2.1. ЕФЕКТИВНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

Поняття ефективної відсоткової ставки. Дохід від інвестування. Нарощена (накопичена) сума

2.2. СХЕМА ПРОСТИХ ВІДСОТКІВ

Сумарниий дохід. Накопичена сума. Підсумкова відсоткова ставка. Формула простих відсотків

2.3. СХЕМА СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ

Формула складних відсотків

2.4. ЕФЕКТИВНА ВІДСОТКОВА СТАВКА НА ЧАСТКОВОМУ ЧАСОВОМУ ПРОМІЖКУ

Поняття ефективної відсоткової ставки на частковому часовому проміжку. Процеси нагромадження

2.5. НОМІНАЛЬНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

Поняття номінальної відсоткової ставки. Період нарахування відсотків (період обертання, період конвертації)

2.6. ІНТЕНСИВНІСТЬ ВІДСОТКІВ

Поняття інтенсивності відсотків (сила росту, сила відсотку)

2.1. ЕФЕКТИВНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

У страхових операціях премії і страхові виплати пов’язуються з конкретними моментами чи періодами часу. У договорах страхування фіксуються терміни, дати, періодичність виплат. Необхідність обліку часового фактора є очевидною: зрозуміло, що отримані страховою компанією у вигляді премій суми якийсь час «працюють» (суми «накопичуються»), тому страховий тариф повинен визначатися з урахуванням цієї «роботи». Розглянемо механізми нарощення отриманих страхових сум.

Почнемо з найважливішого параметру фінансових обчислень – *ефективної відсоткової ставки.*

Нехай у момент часу t сума S інвестується в якийсь проект, що завершується через час h, приносячи дохід ΔS. Звичайно його вимірюють у відносних одиницях, розглядаючи відношення $i = \Delta S / S$, що називається ***ефективною відсотковою ставкою*** за розглянутий проміжок часу. «Ефективна» в цьому контексті означає «реальна», «фактична». Як правило, ця характеристика опускається, і параметр i називають відсотковою ставкою. Крім того, i називають також ставкою інвестиційного доходу, або нормою прибутковості.

Час h називають *періодом нарахування (нагромадження, нарощення).* У страхових операціях це, як правило, один рік, однак використовують й інші тимчасові проміжки – півріччя, квартал, місяць і навіть день.

Повертаючись до розглянутого приклада, зазначимо, що дохід $\Delta S = i \cdot S,$ а отримана в результаті операції *нарощена (накопичена) сума* $S = S_0 + \Delta S = S_0 \cdot (1 + i)$.

Для актураних розрахунків, як правило, інтерес становить процес нагромадження суми на об’єднанні тимчасових проміжків за заданих відсоткових ставок на кожному з них. Дві схеми такого процесу розглядаються нижче.

Відсоткова ставка i може залежати від моменту інвестування t, суми S, що інвестується, і тривалості періоду нарахування h, тобто, $i = i(t, S, h)$. Однак як достатнє для страхової практики наближення ми будемо припускати, що i не залежить від t і S.

Відсоткова ставка i, як правило, визначається у відсотках, однак обчислення проводяться з величиною i / 100. Наприклад, твердження «річна відсоткова ставка дорівнює 20%» означає, що в розрахунках використовується величина $i = 0{,}2$.

2.2. СХЕМА ПРОСТИХ ВІДСОТКІВ

Нехай початковий капітал S_0 інвестується у два послідовних проміжки часу (t_0, t_1) і (t_1, t_2). Відсоткові ставки на цих проміжках є i_1 та i_2 відповідно.

Нагромадження суми за схемою *простих відсотків* припускає, що відсотки нараховуються тільки на початковий капітал S_0. Тому збільшення капіталу (доходу) на першому інтервалі становитиме $\Delta S_1 = S_0 \cdot i_1$, на другому – $\Delta S_2 = S_0 \cdot i_2$. Сумарний дохід $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = S_0 \cdot (i_1 + i_2)$, а накопичена сума $S = \Delta S_0 + \Delta S =$ $= S_0 \cdot (1 + i_1 + i_2)$.

Зазначимо, що відсоткова ставка на об'єднаному проміжку (t_0, t_2) $i = \Delta S / \Delta S_0 = i_1 + i_2$.

Узагальнюючи отриманий результат на об'єднання n проміжків, одержуємо накопичену суму:

$$S = S_0 \cdot (1 + i_1 + i_2 + \ldots + i_n), \tag{2.1}$$

та підсумкову відсоткову ставку $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$.

У важливому окремому випадку фіксованої відсоткової ставки $i_k = i$, $k = 1, 2, \ldots, n$ одержуємо для накопиченої суми вираз

$$S = S_0 \cdot (1 + ni), \tag{2.2}$$

який називають ***формулою простих відсотків***.

Схеми нагромадження (2.1) і (2.2.) дозволяють одержати накопичену суму в разі, якщо різні ставки $i_1, i_2, \ldots, i_m$ фіксуються на періоди $n_1, n_2, \ldots, n_m$ відповідно:

$$S = S_0(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m), \tag{2.3}$$

Як правило, нагромадження за наведеною схемою здійснюють у разі короткотермінових (на термін до одного року) інвестиційних проектів. У довготермінових фінансових операціях (при страхуванні життя, у пенсійних схемах) використовують іншу схему нагромадження, за якою відсотки нараховуються на капітал, що накопичується.

2.3. СХЕМА СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ

Розглянемо приклад із двома послідовними часовими проміжками. Позначення попередні.

Нагромадження суми за схемою *складних відсотків* припускає, що на кожному часовому проміжку відсотки нараховуються на суму, накопичену до кінця попереднього проміжку.

У нашому випадку сума, накопичена до кінця першого проміжку, дорівнює $S_1 = S_0(1 + i_1)$, а сума, накопичена до кінця другого проміжку – $S_2 = S_1(1 + i_2) = S_0(1 + i_1)(1 + i_2)$.

Відсоткова ставка i на об'єднаному проміжку (t_0, t_2) визначається, виходячи з умови $1 + i = (1 + i_1)(1 + i_2)$, тобто $i = i_1 + i_2 + i_1 i_2$.

Узагальнюючи отриманий результат на об'єднання n проміжків, одержуємо накопичену суму:

$$S = S_0(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n), \tag{2.4}$$

та підсумкову відсоткову ставку: $i = (1 + i_1)(1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n) - 1$. У важливому окремому випадку фіксованої відсоткової ставки $i_k = i$, $k = 1, 2, \ldots, n$ одержуємо такий вираз для накопиченої суми:

$$S = S_0(1 + i)^n, \tag{2.5}$$

який називають ***формулою складних відсотків***.

Схеми нагромадження (2.4) і (2.5) дозволяють одержати накопичену суму у випадку, коли послідовні в часі ставки $i_1, i_2, \ldots, i_m$ фіксуються на періоди $n_1, n_2, \ldots, n_m$ відповідно:

$$S = S_0(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1 + i_m)^{n_m}. \tag{2.6}$$

2.4. ЕФЕКТИВНА ВІДСОТКОВА СТАВКА НА ЧАСТКОВОМУ ЧАСОВОМУ ПРОМІЖКУ

Зафіксуємо одиничний часовий проміжок (наприклад, один рік) і розіб'ємо його на m рівних частин (у страховій практиці, як правило, $m = 2; 4; 12$, тобто частинами є півріччя, квартал, місяць).

Нехай i – ефективна відсоткова ставка на одиничному проміжку. Позначимо через $i_{\bullet}^{(m)}$ ефективну відсоткову ставку на m частковому часовому проміжку.

Завдання полягає у визначенні $i_{\bullet}^{(m)}$ так, щоб «робота» грошей на об'єднанні проміжків, кожний завдовжки $1 / m$, накопичувала таку саму суму, що й ефективна відсоткова ставка i на одиничному проміжку.

Схема простих відсотків. З огляду на (2.2) маємо $S_0(1+mi_{\bullet}^{(m)}) = S_0(1+i)$, звідки випливає $i_{\bullet}^{(m)} = i/m$.

Нехай тепер період нагромадження n / m – раціональне число. Накопичена за цей проміжок часу сума $S = S_0(1+ni_{\bullet}^{(m)}) = S_0(1+n\frac{i}{m}) = S_0(1+ti)$.

Ураховуючи, що будь-яке число може бути з якою завгодно точністю апроксимоване раціональним числом, для довільного періоду нагромадження t маємо формулу нагромадження

$$S(t) = S_0(1 + ti). \tag{2.7}$$

Схема складних відсотків. Ураховуючи (2.5), маємо $S_0(1+i_{\bullet}^{(m)})^m = S_0(1+i)$, звідки випливає:

$$i_{\bullet}^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1. \tag{2.8}$$

Аналогічно попередньому при $t = n / m$ маємо $S = S_0(1+i_{\bullet}^{(m)})^n = S_0(1+i)^{n/m} = S_0(1+i)^t$. Для довільного t формула нагромадження за схемою складних відсотків має вигляд:

$$S(t) = S_0(1 + i)^t. \tag{2.9}$$

Формула (2.9) є однією з основних формул фінансової математики.

Порівняємо різні схеми нагромадження.

При фіксованій ефективній відсотковій ставці на одиничному ($t = 1$) проміжку для $0 < t < 1$ маємо $(1 + i)^t < (1 + ti)$. Звідси нагромадження за схемою простих відсотків є більш високим, ніж за схемою складних, а для $t > 1$маємо протилежний результат.

Відповідна графічна ілюстрація наведена на рис. 2.1. Графіки ілюструють процеси нагромадження за формулами (2.7) і (2.9).

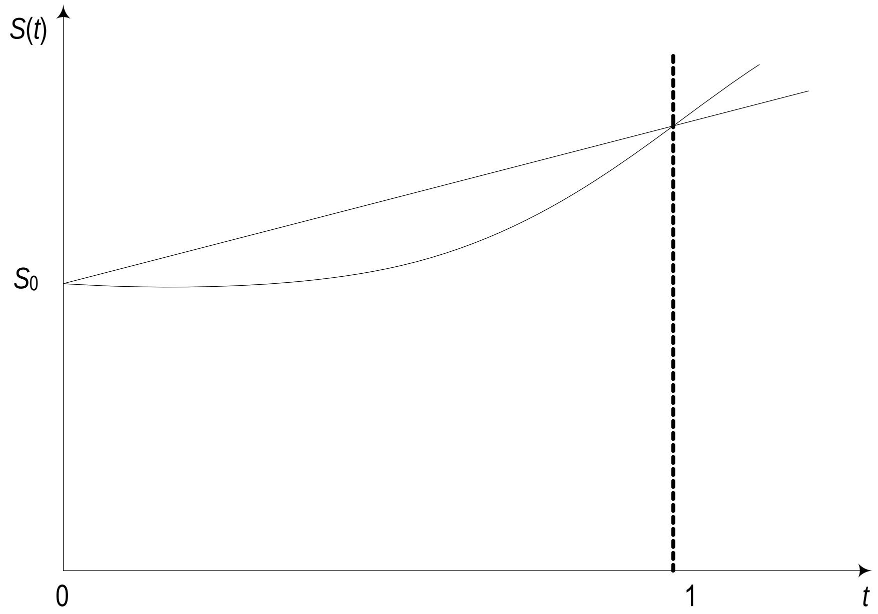


Рис. 2.1. Процес нагромадження

У подальшому незалежно від величини t будемо припускати, що процес нагромадження відбувається за схемою складних відсотків (формула (2.9), однак зазначимо, що іноді використовують змішану схему. Для цілого числа років користуються формулою (2.9), для дробової частини періоду нагромадження – формулою (2.7), а саме, якщо $t = n + a,$ де n –ціла, а a – дробова частина t, то $S(t) = S_0(1 + i)^n(1 + \alpha i)$.

2.5. НОМІНАЛЬНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

Як зазначалося, у фінансових операціях фіксується одиничний часовий проміжок, як правило, один рік. Однак нарахування відсотків доводиться робити кілька разів на рік по півріччях, кварталах тощо. Ця операція легко здійснюється за допомогою ефективної відсоткової ставки на відповідному проміжку, яка може бути або задана безпосередньо, або визначена за ефективною відсотковою ставкою на одиничному проміжку. Однак у фінансовій практиці ця операція виконується інакше. Як правило, задається фіктивна річна відсоткова ставка $i^{(p)}$, p – період нарахування відсотків (період обертання, конвертації), а ефективна відсоткова ставка за період 1 / p пов’язана із $i^{(p)}$ співвідношенням

$$i_{\bullet}^{(p)} = i^{(p)} / p \,. \qquad (2.10)$$

Ставка $i^{(p)}$ називається ***номінальною відсотковою ставкою***, яка обертається (конвертується) з частотою p, чи більш коротко, номінальною відсотковою ставкою.

Як приклад, наведемо твердження з договору страхування: «18% річних з поквартальним нарахуванням відсотків». Це означає, що $i^{(4)}$ = 18%, $i_{\bullet}^{(4)}$ = 4,5%.

Наведемо співвідношення, що зв'язує номінальну відсоткову ставку з ефективною:

$$i^{(p)} = p i_{\bullet}^{(p)} = p(1+i)^{1/p} - 1. \tag{2.11}$$

Завершуючи, ще раз зазначимо, що номінальна ставка є лише зручним способом опису реально застосовуваної ефективної ставки.

2.6. ІНТЕНСИВНІСТЬ ВІДСОТКІВ

Розглянемо дуже важливу локальну характеристику процесу нагромадження суми у страхуванні.

Нагадаємо, що похідна $f'(t)$ функції $f(t)$ характеризує швидкість зміни функції в момент часу t, а відношення $f'(t)/f(t)$ – відносну швидкість зміни функції.

Нехай $S(t)$ – сума, накопичена до моменту t. Тоді відносна швидкість нагромадження суми:

$$\delta(t) = S'(t)/S(t)\,. \tag{2.12}$$

Функція $\delta(t)$ називається ***інтенсивністю відсотків*** (інші терміни – *сила росту, сила відсотка).*

Вважаючи $S(t_0) = S_0$ й інтегруючи диференціальне рівняння (2.12), одержуємо опис процесу нагромадження у вигляді:

$$S(t) = S_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \delta(u)du\right). \tag{2.13}$$

У дуже важливому для практики випадку (яким ми надалі й обмежимося) постійної інтенсивності відсотків $\delta(t) = \delta$ з (2.13), позначивши період нагромадження $t - t_0$ через t, одержуємо формулу нагромадження:

$$S(t) = S_0 e^{\delta t}. \tag{2.14}$$

Порівнюючи (2.9) і (2.14), одержимо співвідношення, що зв'язує δ і i.

Дійсно, маємо, $S_0 e^{\delta t}. = S_0(1 + i)^t$, звідки $1 + i = e^{\delta}$, а

$$i = e^{\delta} - 1, \tag{2.15}$$

чи

$$\delta = \ln(1 + i). \tag{2.16}$$

Використовуючи (2.11) і (2.15), виразимо номінальну відсоткову ставку через параметр δ:

$$i^{(p)} = (e^{\delta / p} - 1). \tag{2.17}$$

Зазначимо, що ефективна відсоткова ставка i більше δ, але за малих значень i вони близькі. Так, якщо $i = 3\%$, то $\delta = 0{,}02956$, і відносна похибка наближеної рівності $\delta = i$ становить 1,5%. Цю обставину корисно враховувати, тому що формули розрахунку страхових тарифів для різних схем страхування життя містять множник i / δ, що за малих значень i може бути замінений на 1.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте визначення ефективної відсоткової ставки.
2. Що таке період нарахування?
3. Що таке нарощена (накопичена) сума? Наведіть формулу її розрахунку.
4. Наведіть схему простих відсотків.
5. Наведіть схему складних відсотків.
6. Дайте визначення поняттю ефективної відсоткової ставки на частковому тимчасовому проміжку.
7. Охарактеризуйте формули нагромадження за схемами простих та складних відсотків.
8. Що є номінальною відсотковою ставкою?
9. Наведіть співвідношення, що зв'язує номінальну відсоткову ставку з ефективною.
10. Що таке інтенсивність відсотків (сила росту, сила відсотків)?

ТЕСТИ

1. Формула $i = \Delta S / S$ використовується для визначення:
   а) ефективної відсоткової ставки;
   б) номінальної відсоткової ставки;
   в) реальної відсоткової ставки.

2. Формула $S = S_0(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m\, i_m)$ називається:
   а) формулою простих відсотків;
   б) формулою складних відсотків;
   в) формулою змішаних відсотків.

3. Формула $S(t) = S_0(1 + i)^n(1 + \alpha i)$ використовується, якщо:
   а) n – ціла, a – дробова частини;
   б) a – ціла, n – дробова частини;
   в) n і a – дробові частини;
   г) n і a – цілі частини.

4. Твердження «36% річних з поквартальним нарахуванням відсотків» означає, що номінальна відсоткова ставка дорівнює 36%, а ефективна – 9%:
   а) так;
   б) ні.

5. Співвідношення $i^{(p)} = pi_{\bullet}^{p} = p((1+i)^{1/p} - 1)$ зв'язує:
   а) номінальну відсоткову ставку з ефективною;
   б) номінальну відсоткову ставку з реальною;
   в) реальну відсоткову ставку з ефективною.

6. Функція $\delta(t) = S'(t)/S(t)$ має назву:
   а) інтенсивність відсотків;
   б) сила росту;
   в) сила відсотку.

7. За допомогою співвідношення $S(t) = S_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \delta(u)du\right)$ ми можемо одержати:
   а) опис процесу нагромадження;
   б) номінальну відсоткову ставку через інтенсивність відсотків;
   в) відносну швидкість зміни функції нагромадження відсотків.

8. Ефективну відсоткову ставку ще називають:
   а) ставкою інвестиційного доходу;
   б) реальною відсотковою ставкою;
   в) нормою прибутковості.

9. Твердження «річна відсоткова ставка дорівнює 20%» означає, що в розрахунках використовується величина $i = 0{,}05$:
   а) так;
   б) ні.

10. У довготермінових фінансових операціях використовують:
   а) схему нагромадження простих відсотків;
   б) схему нагромадження складних відсотків;
   в) змішану схему нагромадження відсотків.

Тема 3. ДИСКОНТУВАННЯ ТА ФІНАНСОВІ РЕНТИ

3.1. ДИСКОНТУВАННЯ

Поняття сучасної (поточної, приведеної) вартості. Поняття дисконту. Коефіцієнт дисконтування. Ставка дисконтування. Ефективна ставка дисконтування

3.2. ФІНАНСОВІ РЕНТИ

Поняття потоку платежів. Поняття члену потоку платежів. Фінансова рента (ануїтет). Період ренти. Термін ренти. Види фінансових рент. Фінансова еквівалентність. Рівняння еквівалентності. Ренти пренумерандо і постнумерандо. Вартості рент пренумерандо і постнумерандо. Відстрочені ренти. Відстрочені ренти постнумерандо і пренумерандо. Приведення ренти до кінця періоду. *Р*-термінові ренти. *Р*-термінові ренти постнумерандо і пренумерандо. Сучасна і накопичена вартість *Р*-термінових рент постнумерандо і пренумерандо. *Р*-термінові відстрочені ренти. Перемінні (зростаючі) ренти. Негайні зростаючі ренти. Зростаюча рента постнумерандо і пренумерандо. Сучасна вартість зростаючої ренти простумерандо і пренумерандо. Сучасна вартість об’єднаної ренти. Відсрочені зростаючі ренти. Відсрочені зростаючі ренти постнумерандо і пренумерандо. Приведення зростаючої ренти до кінця терміну. *Р*-термінові зростаючі ренти. *Р*-термінова зростаюча рента постнумерандо і пренумерандо. Безупинні постійні ренти. Безупинні перемінні ренти. Сучасна вартість рент

3.1. ДИСКОНТУВАННЯ

У страховій практиці при визначенні страхової премії у відповідний момент часу використовується сума $P(t)$, щоб через t років накопичена сума (за умови відмінної постійної ефективної відсоткової ставки i) становила $S(t)$.

Зв'язок між $P(t)$ і $S(t)$ описується співвідношенням $S(t) = P(t)(1 + i)^{t}$, звідки:

$$P(t) = S(t)(1 + i)^{-t}. \tag{3.1}$$

Величина $P(t)$. називається ***сучасною (поточною, приведеною) вартістю*** (величиною) (*present value*) суми $S(t)$, а процес відшукування сучасної вартості суми називається дисконтуванням (приведенням до моменту $t = 0$). Різницю $(S – P)$ називають *дисконтом* (discount).

Приведена вартість одиничної суми ($S(t) = 1$) позначається v(t). Таким чином, $v(t) = (1 + i)^{-t}$.

Величина

$$v = (1 + i)^{-1} \tag{3.2}$$

називається *коефіцієнтом дисконтування* (дисконтуючим множником). За його допомогою сучасна вартість суми $S(t)$ приймає

$$P(t) = S(t)v^{t}. \tag{3.3}$$

Термін «***дисконтування***» вживається у більш широкому значенні як відшкодування вартості суми $S(t)$ у будь-який попередній момент часу.

Якщо $S(t)$ – сума в момент t_2, то її вартість у момент t_1 ($t_2 < t_2$) визначається як $P(t_1) = S(t_2)v^{t_2 - t_1}$.

У таких випадках кажуть, що сума $S(t_2)$ приведена (дисконтована) до моменту t_1.

Термін «приведення» зручно поширити і на процес нагромадження. У цьому випадку сума «приводиться» до більш пізнього моменту часу.

Будь-які операції над грошовими сумами можливі тільки в тому випадку, якщо суми приведені до одного моменту часу.

Зазначимо, що при $\delta(t) = \delta v = e^{-\delta}$ сучасна вартість суми $S(0)$:

$$P(t) = S(t)\, e^{-\delta t}. \tag{3.4}$$

Нехай фіксований одиничний проміжок часу становить один рік. Сума накопичень до кінця терміну – $S = 1 + i$. Таким чином i відіграє роль доходу на капітал, що інвестується (дорівнює 1).

Рис. 3.1. Процес нагромадження

Отже, якщо сучасна вартість відсотків на капітал дорівнює 1, то відповідна їй вартість ефективної відсоткової ставки називається ***ефективною ставкою дисконтування*** (*effective rate of discount*), або просто ставкою дисконтування.

Якщо позначити ставку дисконтування через d, одержимо такі співвідношення

$$d = iv = i \,/\, (1 + i) = ie^{-\delta} = 1 - v = 1 - e^{-\delta}. \tag{3.5}$$

Зазначимо також, що:

$$v = 1 - d,\; i = d \,/\, (1 - d). \tag{3.6}$$

Таким чином, визначені чотири основні параметри, що використовуються у фінансовій математиці: i, δ, v, d.

Розіб'ємо одиничний проміжок на p рівних частин. Позначимо через $d_{\bullet}^{(p)}$ ефективну ставку дисконтування за час $1 \,/\, p$ і позначимо її через d.

Використовуючи ефективну ставку дисконтування і наведені співвідношення, послідовно одержимо:

$$\begin{aligned} d_{\bullet}^{(p)} &= i_{\bullet}^{(p)} v^{1/p} = ((1+i)^{1/p} - 1)v^{1+p} = (v^{-1/p} - 1)v^{1/p} = \\ &= 1 - v^{1/p} = 1 - 1(1-d)^{1/p}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

На практиці використовують не реальну ефективну ставку дисконтування, а номінальну (умовну) ставку дисконтування (*nominal rate of discount*).

$$d_{\bullet}^{(p)} = pd_{\bullet}^{(p)} = p(1-(1-d)^{1/p}). \tag{3.8}$$

3.2. ФІНАНСОВІ РЕНТИ

Потоки платежів. Страхові операції дуже часто пов'язані не з разовими платежами, а з певною їх послідовністю в часі. Прикладами можуть слугувати сплата премій, виплата пенсій, надходження доходів від інвестицій тощо. Такі послідовності платежів називають ***потоками платежів*** (*cash flows*). Окремий платіж називається членом потоку.

Потік платежів, усі члени якого позитивні, а часовий інтервал між членами однаковий, називається ***фінансовою рентою*** (рентою), або ануїтетом (*annuity*), незалежно від призначення походження платежів. Прикладами ренти є сплата премій у розстрочку і виплата пенсій.

Член ренти	– розмір окремого платежу.
Період ренти	– часовий проміжок між двома послідовними платежами.
Термін ренти	– часовий проміжок від початку першого періоду до кінця останнього.
Річні ренти	– виплати, що проводяться один раз на рік.
Р-термінові ренти	– *р*-кількість виплат у році.
Постійні ренти	– платежі однакові за розміром.
Перемінні ренти	– платежі, розміри яких змінюються за яким-небудь законом.
Правильні ренти	– платежі, сплата яких здійснюється безумовно, а кількість членів такої ренти заздалегідь відома.
Умовна рента	– платіж який залежить від настання деякої випадкової події, кількість її членів заздалегідь невідома.

Рівняння еквівалентності. Розглянемо потік платежів, коли у моменти $t_1, t_2, \ldots, t_n$ проводяться виплати $b_1, b_2, \ldots, b_n$ відповідно. Назвемо таку серію виплат пенсією. Необхідно визначити сучасну вартість A такої пенсії.

Нехай v – множник, що дисконтує. Відповідно до (3.1) маємо

$$A = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + \ldots + b_n v^{t_n} . \qquad (3.9)$$

Сучасна вартість пенсії A може розглядатися як сума, яку певна особа повинна внести до пенсійного фонду у момент укладення договору (цей момент звичайно приймається як початок відліку) для того, щоб у майбутньому (за умови фіксованої відсоткової ставки) забезпечити собі цю пенсію. Дані відношення проілюстровані на рис. 3.2.

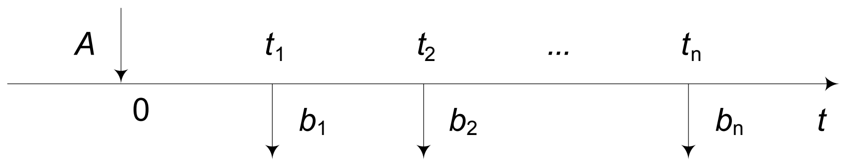


Рис. 3.2. Відношення при сплаті пенсії

У розглянутому випадку плата A за пенсію проводиться у вигляді разового внеску в момент укладення договору. Однак, як правило, ця плата здійснюється у вигляді серії внесків $c_1, c_2, \ldots, c_k$ у моменти $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ (у пенсійній практиці $\tau_k < t_1$).

Необхідно установити справедливе співвідношення між двома потоками платежів – пенсією і серією внесків. Принципом, на підставі якого встановлюється таке співвідношення, є *фінансова еквівалентність,* відповідно до якої еквівалентними вважаються такі платежі, у яких рівні приведені до одного моменту часу.

Порівнюючи сучасні вартості пенсії і серії внесків, одержуємо співвідношення:

$$c_1 v^{t_1} + c_2 v^{t_2} + \ldots + c_k v^{t_k} = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + \ldots + b_k v^{t_k}, \tag{3.10}$$

яке має назву рівняння еквівалентності**.**

Зазначимо, що приведення може здійснюватися до будь-якого моменту часу, однак найчастіше такими моментами є початок чи кінець терміну ренти.

Якщо моменти $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, t_1, t_2, \ldots, t_n$ об’єднати в одну послідовність, тобто розглядати один потік платежів (величини c необхідно при цьому замінити на мінус c_i), то алгебраїчна сума приведених вартостей членів потоку дорівнює нулю. Ця обставина пояснює зміст виразу «принцип нуля», яким часто називають співвідношення (3.10).

У реальній пенсійній практиці потік виплат має характер ренти, тобто $t_k - t_{k-1} = \text{const}$, а члени потоку b_k. або постійні, або змінюються відповідно до деякого закону.

Постійні ренти. Розглядаємо тільки правильні ренти. Проаналізуємо різні варіанти таких рент і їхньої вартості в початковий і кінцевий моменти терміну ренти. Надалі i, v, d, $i(p)$, $d(p)$ – це визначені раніше фінансові константи на одиничному часовому проміжку.

Термінові ренти. Розглянемо n послідовних одиничних (один рік) проміжків часу (0, 1), (1, 2), …, (n – 1, n).

Рента постнумерандо – серія з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, здійснюваних наприкінці кожного проміжку часу.

Рента пренумерандо – серія з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, що здійснюються на початку кожного проміжку часу.

Сучасні вартості рент постнумерандо і пренумерандо позначаються символам $a_{\overline{n}|}$ і $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ (або $a_{\overline{n}|}$ і $\ddot{a}_{\overline{n}|}$) відповідно.

Очевидно:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + ... + v^n = \frac{v - v^{n+1}}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{i}, \tag{3.11}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + ... + v^{n-1} = \frac{a_{\overline{n}|}}{v} = \frac{1 - v^n}{d}. \tag{3.12}$$

Зазначимо, що $a_{\overline{n}|} = v\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

Відсрочені ренти. Розглянемо проміжок часу (0, 1), (1, 2), …, (m – 1, m), (m, m + 1), …, (m + n – 1, m + n).

Відстрочена рента постнумерандо – серія з n одиничних виплат, зроблених у момент $t = m + 1$, $t = m + 1$,…, $t = m + n$

Її сучасна вартість позначається символом $m|a_{\overline{n}|}$.

Відстрочена рента пренумерандо – серія з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, що здійснюються на початку кожного проміжку часу.

Позначення її сучасної вартості $m|\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

Очевидно, що:

$$m|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}\nu^m;\ m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}\nu^m.$$

Крім того,

$$m|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+m}|} - a_{\overline{m}|};$$

$$m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+m}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

Приведення ренти до кінця терміну. Розглянемо тимчасові проміжки з розділу «Негайні ренти». Часто виникає необхідність у визначенні вартості ренти в момент $t = n$ (тобто накопичених сум). Позначимо через $S_{\overline{n}|}$ вартість ренти постнуме-рандо в момент $t = n$ (момент останнього платежу) і через $\ddot{S}_{\overline{n}|}$, вартість ренти пренумерандо в момент $t = n$ (тобто через одиницю часу після останнього платежу).

Використовуючи (3.3), одержимо

$$S_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{3.13}$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + ... + (1+i) = (1+i)S_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \tag{3.14}$$

Очевидно, що ці самі вирази можуть бути отримані приведенням до моменту $t = n$ сучасних вартостей відповідних рент:

$$S_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n; \ddot{S}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n. \tag{3.15}$$

Зазначимо, що значення $S_{\overline{n}|}$ для різних i і n також наводяться в актуарних таблицях.

Приведення відстроченої ренти до кінця терміну здійснюється так само, тобто сучасна вартість перемножується на $(1 + i)^{m + n}$. Спеціальні позначки для накопичених сум не потрібні.

Введені величини пов’язані різноманітними співвідношеннями. Наведемо деякі з них:

$$\begin{aligned} &ia_{\overline{n}|} + v^n = 1\ (a),\ iS_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n,\ (b) \\ &d\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n = 1\ (c),\ d\ddot{S}_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n.\ (d) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Алгебраїчна перевірка цих співвідношень є тривіальною (табл. 3.1). З’ясуємо фінансове трактування деяких з них.

Таблиця 3.1. Значення складних відсотків та ануїтетів при 15,0%

n	$(1+i)^n$	v^n	$a_{\overline{n}\vert}$	Функція	Значення
1	1,150 00	0,869 57	0,8696	i	0,150 000
2	1,322 50	0,756 14	1,6257	$i^{(2)}$	0,144 761
3	1,520 88	0,677 52	2,2832	$i^{(4)}$	0,142 232
4	1,749 01	0,571 75	2,8550	$i^{(12)}$	0,140 579
5	2,011 36	0,497 18	3,3522	δ	0,139 762
6	2,31306	0,432 33	3,7845	–	–
7	2,660 02	0,375 94	4,1604	–	–
8	3,059 02	0,326 90	4,4873	d	0,130 435
9	3,517 88	0,284 26	4,7716	$d^{(2)}$	0,134 990
10	4,045 56	0,247 18	5,0188	$d^{(4)}$	0,137 348
11	4,652 39	0,214 94	5,2337	$d^{(12)}$	0,128 951
12	5,350 25	0,186 91	5,4206	–	–
13	6,152 79	0,162 53	5,5831	$i / i^{(2)}$	1,036 190
14	7,075 71	0,141 33	5,7274	$i / i^{(4)}$	1,054 613
15	8,137 06	0,122 89	5,8474	$i / i^{(12)}$	1,067 016
16	9,357 62	0,106 86	5,9542	i / δ	1,073 254
17	10,761 26	0,092 93	6,0472	–	–
18	12,375 45	0,080 81	6,1280	$i / d^{(2)}$	1,111 190
19	14,231 77	0,070 27	6,1982	$i / d^{(4)}$	1,092 113
20	16,366 54	0,061 10	6,2593	$i / d^{(12)}$	1,079 516

Співвідношення (a) може бути інтерпретоване в спосіб представлений на рис. 3.3. Одинична грошова сума, інвестована в момент $t = 0$, по-роджує наступний потік платежів.

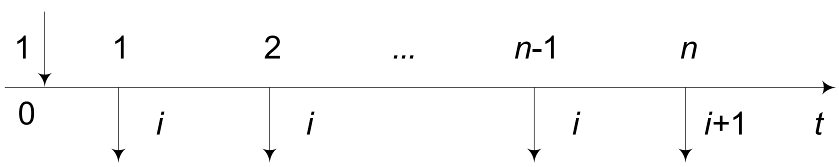


Рис. 3.3. Фінансове трактування співвідношення (a)

Сучасна вартість потоку складається з двох доданків: перший породжено платежами і дорівнює $ia_{\overline{n}|}$; другий – вартість одиничного платежу в момент $t = n$ дорівнює v^n. Таким чином, $A = ia_{\overline{n}|} + v^n$. З іншого боку, відомо, що інвестувалася 1, тобто $A = 1$.

Цікаво зазначити, що граничним переходом $y(a)$ за умови $n \to \infty$ одержуємо вартість так званої «довічної ренти» $a_{\overline{\infty}|} = 1/i$, тобто сума $1 / i$, інвестована в момент $t = 0$, породжує нескінченний потік одиничних платежів.

Співвідношення (c) може бути отримане, якщо перший доданок розглянутого вище потоку трактувати як сучасну вартість ренти пренумерандо з розміром платежів, що дорівнює d.

Р-термінові ренти. У розглянутих раніше рентах виплата платежів проводилась один раз – на початку чи наприкінці прийнятого за одиницю проміжку часу. У страховій практиці поширені ситуації, у яких за фіксованої на одиничному проміжку ефективної відсоткової ставки платежі здійснюються p раз в одиницю часу. Прикладами можуть слугувати сплата страхових внесків та виплат, помісячна виплата пенсії тощо. Такі ренти називаються p-терміновими.

Введемо необхідну термінологію і позначення.

Розглянемо n послідовних проміжків часу (0, 1), (1, 2), …, (n – 1, n) i – ефективна відсоткова ставка на кожному з них. Розіб'ємо кожен проміжок на p рівних частин (часткові проміжки) завдовжки $1 / p$. Найпоширенішим на практиці є випадок, коли одиницю часу становить рік, а значенням p = 12, 4, 2 відповідають місяць, квартал, півріччя відповідно (що зазначалося вище).

Р-термінова рента постнумерандо	– серія з np-виплат розміром $1 / p$, зроблених наприкінці кожного часткового проміжку.

Її сучасна вартість позначається символом $a^{(p)}_{\overline{n}|}$, а вартість, приведена до кінця терміну (тобто до моменту $t = n$) – $S^{(p)}_{\overline{n}|}$.

Зазначимо, що величина кожного члена ренти дорівнює $1/p$, отже, одиницею виміру грошових сум сума всіх виплат за одиницю часу.

Наприклад, якщо протягом 5 років наприкінці кожного місяця виплачується 100 грн і рік прийнятий за одиницю часу, то одиницею виміру грошових сум становить 1 200 грн. При цьому сучасна вартість зазначеної ренти є $1\,200 a^{(12)}_{\overline{5}|}$, а вартість, накопичена до кінця п'ятирічного терміну, – $1\,200 S^{(p)}_{\overline{n}|}$.

Р-термінова рента пренумерандо – серія з *np* виплат величиною 1/*p*, зроблених на початку кожного часткового проміжку.

Її сучасна вартість – $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$, накопичена – $\ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|}$.

Сучасна і накопичена вартості *p*-термінових рент легко виражаються через основні фінансові константи на одиничному тимчасовому проміжку і через вартості відповідних звичайних рент.

Зазначимо спочатку очевидні співвідношення:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = S^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n; \;\; S^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n;$$
$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n; \;\; \ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n. \qquad (3.17)$$

Зауважимо також, що сучасні вартості *p*-термінових рент постнумерандо і пренумерандо пов'язані співвідношенням:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \cdot v^n. \qquad (3.18)$$

Таким чином, досить виразити $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ через основні константи, щоб одержати інші необхідні формули. Це легко зробити, якщо розглядати *p-термінову ренту* як звичайну з одиницею часу 1/*p*, ефективною відсотковою ставкою $i_{\bullet}^{(p)}$, членом ренти 1/*p* і терміном ренти *np,* отже, маємо:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|@i} = \frac{1}{p} \cdot \ddot{a}_{\overline{np}|@i_{\bullet}^{(p)}}. \qquad (3.19)$$

З огляду на (3.19) (3.17) і (3.14):

$$\ddot{a}_{\overline{n}|@i} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1+(v_{\bullet}^{(p)})^{np}}{d_{\bullet}^{(p)}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1-(1-d)^n}{d_{\bullet}^{(p)}} = \frac{1-v^n}{d_{\bullet}^{(p)}}, \qquad (3.20)$$

де номінальну ставку дисконтування $d^{(p)}$ представлено через ефективну ставку дисконтування:

$$d^{(p)} = p(1-(1-d)^{1/p}) = p(1-v^{1/p}). \qquad (3.21)$$

Остаточно отримуємо формулу:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{p(1-v^{1/p})}. \qquad (3.22)$$

Поряд з (3.22) використовується вираз $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ через $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. З (3.21) легко одержуємо:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{d}{d^{(p)}} \cdot \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}. \qquad (3.23)$$

Тепер для $a^{(p)}{}_n$ одержимо, використовуючи:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(p)}} - \frac{1-v^n}{p} = \frac{(1-v^n)(p-d^{(p)})}{pd^{(p)}} = (1-v^n)\frac{p(1-d_{\bullet}^{(p)})}{p\cdot pd_{\bullet}^{(p)}} =$$

$$= (1-v^n)\frac{v_{\bullet}^{(p)}}{pd_{\bullet}^{(p)}} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}}.$$

Тобто:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}}. \qquad (3.24)$$

З (3.24) випливає вираз $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ через $a_{\overline{n}|}$:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(p)}} \cdot a_{\overline{n}|}. \qquad (3.25)$$

Накопичені *вартості p-термінових рент* можуть бути визначені за допомогою співвідношень (3.25).

Формули обчислення сучасних вартостей *p-термінових рент* отримані виходячи з припущення, що n – натуральне число. Однак процедура одержання цих формул, що базується на співвідношенні (3.25), легко узагальнюється на випадок $t = n + k / p$, $0 \le k \le n - 1$. Обираючи як одиничний тимчасовий проміжок завдовжки $1 / p$ за аналогією з (3.25) маємо:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{t}|i} = \frac{1}{p} \cdot \ddot{a}_{\overline{np+k}|i_{\bullet}^{(p)}}. \qquad (3.26)$$

Повторюючи попередній алгоритм, аналогічно одержуємо:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{t}|@i} = \frac{1-v^t}{d^{(p)}},$$
$$a_{\overline{t}|@i} = \frac{1-v^t}{i^{(p)}}. \qquad (3.27)$$

При використанні формул (3.27) не слід забувати, що одиницею виміру грошових сум є сума всіх виплат за одиницю часу. Зазначимо також, що обчислення, пов’язані з *p-терміновими рентами,* стають прозоріші, якщо за одиницю виміру прийняти проміжок часу завдовжки $1/p$.

За аналогією зі звичайною відстроченою рентою вводяться і *p-термінові відстрочені ренти.* Позначення сучасних (у момент $t = 0$) вартостей таких рент $m|a^{(p)}_{\overline{n}|}, m|\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$, Маємо

$$m|a^{(p)}_{\overline{n}|} = v^m a^{(p)}_{\overline{n}|}, m|\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = v^m \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}. \qquad (3.28)$$

Перемінні (зростаючі) ренти.

Перемінна рента	– рента, розміри платежів якої змінюються за певним законом.

Негайні зростаючі ренти. Розглянемо послідовність одиничних проміжків часу (0, 1), (1, 2), …, (n – 1, n), як це виконували щодо s.

Зростаюча рента постнумерандо	– потік платежів, розміри яких становлять k одиниць у моменти $t = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Сучасна вартість зростаючої ренти постнумерандо позначається символом $(Ia)_{\overline{n}|}$ і визначається таким чином:

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + \ldots + nv^n = v(1 + 2v + \ldots + nv^{n-1}) =$$
$$= v(v + v^2 + \ldots + v^n)' = v\left(\frac{v - v^{n+1}}{1-v}\right)' = v\frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \qquad (3.29)$$

Сучасна вартість зростаючої ренти постнумерандо легко виражається через вартість звичайної ренти. З огляду на те, що $i = (1 - v) / v$, перепишемо (3.29):

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i(1-v)} - v\frac{nv^n(1-v)}{(1-v)^2} = \frac{a_{\overline{n}|}}{d} - \frac{nv^n}{i}, \tag{3.30}$$

або

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n}|}}{d} - \frac{nv^n}{i}. \tag{3.31}$$

Зростаюча рента пренумерандо – потік платежів, розміри яких становлять k одиниць у моменти $t = k - 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Сучасна вартість зростаючої ренти пренумерандо позначається символом $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ і визначається як:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + 2v + \ldots + nv^{n-1} = \frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \tag{3.32}$$

З (3.32) одержуємо:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{(1-v)^2} - \frac{nv^n}{1-v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d}. \tag{3.33}$$

На практиці величини платежів зростаючої ренти можуть утворювати довільну арифметичну прогресію. Цей випадок повністю описується уже розглянутими. Дійсно, нехай, наприклад, величини платежів ренти пренумерандо $b_k = a + \beta k$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1\ldots$. Представимо їх у вигляді $b_k = (a - \beta) + \beta(k + 1)$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1\ldots$

Такий потік платежів можна розглядати як об'єднання двох рент. Сучасна вартість об'єднаної ренти:

$$A = (a - \beta)\ddot{a}_{\overline{n}|} + \beta(I\ddot{a})_{\overline{n}|}.$$

Відстрочені зростаючі ренти. Розглянемо проміжки часу (0, 1), (1, 2), …, (m – 1, m), (m, m + 1), …, (m + n – 1, m + n).

Відсрочена зростаюча рента постнумерандо – потік платежів, що здійснюється в моменти $t_k = m + k$ з відповідними розмірами виплат $b_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Сучасна вартість такої ренти позначається символом $m\,|\,(Ia)_{\overline{n}|}$ і пов'язана із сучасною вартістю негайної зростаючої ренти постнумерандо очевидним співвідношенням:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{(1-v)^2} - \frac{nv^n}{1-v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d}. \tag{3.34}$$

Відсрочена зростаюча рента пренумерандо	– потік платежів, що здійснюється в моменти $t_k = m + k - 1$ з відповідними розмірами виплат $b_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Сучасна вартість такої ренти позначається символом $m\,|\,(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ і пов'язана із сучасною вартістю негайної зростаючої ренти пренумерандо співвідношенням:

$$m\,|\,(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = v^m (I\ddot{a})_{\overline{n}|}. \tag{3.35}$$

Приведення зростаючої ренти до кінця терміну. Як і у випадку постійних рент, часто виникає необхідність у визначенні вартості перемінної ренти наприкінці останнього платіжного періоду. Наприклад, інтерес може становити загальна сума, накопичена на банківському рахунку після серії зростаючих внесків.

Будемо розглядати послідовність тимчасових проміжків (0, 1), (1, 2), …, $(n-1, n)$,

Вартості зростаючих рент постнумерандо і пренумерандо в момент $t = n$ позначаються символами $(Is)_{\overline{n}|}$ і $(I\ddot{s})_{\overline{n}|}$ і можуть бути виражені через накопичені суми звичайних рент. Дійсно, використовуючи (3.32) і (3.33), одержуємо

$$\begin{aligned} (Is)_{\overline{n}|} &= (1+i)^n (Ia)_{\overline{n}|} = (1+i)^n \left(\frac{a_{\overline{n}|}}{d} - \frac{nv^n}{i} \right) = \frac{s_{\overline{n}|}}{d} - \frac{n}{i}, \\ (I\ddot{s})_{\overline{n}|} &= (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n}|} = (1+i)^n \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{d}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Приведення відстроченої зростаючої ренти до кінця терміну здійснюється так само, тобто сучасна вартість множиться на $(1 + i)^{m+n}$. Спеціальні позначення не вводяться.

Р-термінові зростаючі ренти. Конструкція таких рент повинна бути зрозумілою з попередніх побудов. Як і раніше, розглядаються n одиничних проміжків часу і кожний з них поділяється на p рівних частин.

Р-термінова зростаюча рента постнумерандо	– потік платежів $b_k = k / p$, що здійснюється в моменти $t_k = (k - 1) / p$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
Р-термінова зростаюча рента пренумерандо	– потік платежів $b_k = k / p$, що здійснюється в моменти $t_k = (k - 1) / p$, $k = 1, 2, \ldots$, *інш.*

Для позначення сучасних вартостей і накопичених сум можуть бути введені символи, аналогічні попереднім, і виведені формули, подібні тим, які було отримано раніше. Однак ми не будемо цього робити, а обмежившись розглядом конкретного прикладу, продемонструємо, як прийоми, розвинені в попередніх пунктах, дозволяють аналізувати і *p-термінові зростаючі ренти.*

Беззупинні ренти. Усі розглянуті вище ренти припускали, що окремі складові (члени) потоку платежів надходять дискретно. Однак у деяких випадках виявляється корисна ідеалізація, у якій потік платежів сприймається як беззупинний процес.

Беззупинні постійні ренти. Розглянемо *p-термінову постійну ренту* і з'ясуємо поводження основних фінансових констант, а також приведених вартостей за умови $p \to \infty$. Інтенсивність відсотків, як і раніше, будемо вважати постійною.

$$\lim_{p\to\infty} i^{(p)} = \lim_{p\to\infty} p(e^{\delta/p} - 1) = \lim_{p\to\infty} p \cdot \frac{\delta}{p} = \delta. \qquad (3.37)$$

Аналогічно

$$\lim_{p\to\infty} d^{(p)} = \lim_{p\to\infty} p(1 - e^{\delta/p}) = \lim_{p\to\infty} p \cdot \frac{\delta}{p} = \delta. \qquad (3.38)$$

Таким чином, за достатньо великого p можна використовувати наближені рівності $i^{(p)} \approx \delta$, $d^{(p)} \approx \delta_1$.

Знайдемо сучасні вартості і накопичені суми беззупинних рент. Зрозуміло, що за умови $p \to \infty$, тобто прагнення до нуля періоду ренти, різниця між сучасними вартостями рент пост- і пренумерандо зникатиме. Тому обмежимося розглядом ренти пренумерандо

$$\lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \lim_{p\to\infty} \frac{1-v^n}{d^{(p)}} = \frac{1-v^n}{\delta}. \tag{3.39}$$

Позначимо сучасну вартість безупинної ренти через $\bar{a}_{\overline{n}|}$. Таким чином, маємо

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\delta} = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}. \tag{3.40}$$

Аналогічно знайдемо накопичену суму $\bar{S}_{\overline{n}|}$ беззупинної ренти, використовуючи ренту пренумерандо:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\overline{n}|} &= \lim_{p\to\infty} \ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|} = \lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}(1+i)^n = \\ &= \frac{(1-v^n)(1+i)^n}{\delta} = \frac{v^{-n}-1}{\delta} = \frac{e^{\delta n}-1}{\delta}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Розіб'ємо відрізок (0, n) на кінцеве число довільних частин (Δt_k) завдовжки Δt_k і виділимо довільну точку ξk на кожній з них. Виходячи з того, що рента є постійною, будемо вважати, що в кожний момент надходить платіж, що дорівнює 1, тобто сума платежів на проміжку (Δt_k) становить Δt_k. Сучасна вартість платежу в момент ξk дорівнює $v^{\xi k} = e^{\xi k}$. Отже, сучасна вартість потоку платежів на проміжку (Δt_k) може бути приблизно визначена як $v^{\xi k}\Delta t_k$, а сучасна вартість ренти $\bar{a}_{\overline{n}|} \approx \sum_k v^{\xi k}\Delta t_k = \sum_k e^{-\delta \xi k}\Delta t_k$.

Граничним переходом при $\max\Delta t_k \to 0$ одержуємо рівність

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}dt = -\frac{1}{\delta}e^{-\delta t}\Big|_0^n = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}. \tag{3.42}$$

Аналогічно:

$$\overline{S}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{\delta(n-t)}dt = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}. \qquad (3.43)$$

Беззупинні перемінні ренти. У даній моделі ми будемо вважати, що потік платежів є беззупинним, а розміри платежів змінюються в p часі, причому процес надходження платежів характеризується швидкістю надходження платежів $p(t)$ (якщо $S(t)$ – розмір платежу, що надходить у момент t, то $p(t) = S^{'}(p)$). Скористаємося розбивкою відрізка $(0, n)$, описаною раніше. Тепер сумарний платіж на проміжку Δt_k його сучасної вартості, відповідно, приблизно дорівнює $p(\xi k)\Delta t_k$ і $p(\xi k)v^{\xi k}\Delta t_k$.

Сучасна вартість ренти визначається за наступною формулою і наведена у табл. 3.2.

$$\overline{a}_{\overline{n}|} \approx \sum_k p(\xi k) v^{\xi k} \Delta t_k, \qquad (3.44)$$

Таблиця 3.2. Значення складних відсотків та ануїтетів при 25,0%

n	$(1+i)^n$	v^n	$a_{\overline{n}\|}$	Функція	Значення
1	1,25000	0,80000	0,8000	i	0,250000
2	1,56250	0,64000	1,4400	$i^{(2)}$	0,236068
3	1,95312	0,51200	1,9520	$i^{(4)}$	0,229485
4	2,44141	0,40960	2,3616	$i^{(12)}$	0,225231
5	3,05176	0,32768	2,6893	δ	0,223144
6	3,81470	0,26214	2,9514	–	–
7	4,76837	0,20972	3,1611	–	–
8	5,96046	0,16777	3,3289	d	0,200000
9	7,45058	0,13422	3,4631	$d^{(2)}$	0,211146
10	9,31323	0,10737	3,5705	$d^{(4)}$	0,217034
11	11,64153	0,08590	3,6564	$d^{(12)}$	0,221082
12	14,55192	0,06872	3,7251	–	–
13	18,18989	0,05498	3,7801	$i / i^{(2)}$	1,059017
14	22,73737	0,04398	3,8241	$i / i^{(4)}$	1,089396
15	28,42171	0,03518	3,8593	$i / i^{(12)}$	1,109971
16	35,52714	0,02815	3,8874	i / δ	1,120355
17	44,40892	0,02252	3,9099	–	–
18	55,51115	0,01801	3,9279	$i / d^{(2)}$	1,184017
19	69,38894	0,01441	3,9424	$i / d^{(4)}$	1,151896
20	86,73617	0,01153	3,9539	$i / d^{(12)}$	1,130804

Переходячи до межі при $\max\Delta t_k \to 0$, одержуємо

$$\overline{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n p(t)v^t dt = \int_0^n p(t)e^{-\delta t} dt. \qquad (3.45)$$

Аналогічно:

$$\overline{S}_{\overline{n}|} = \int_0^n p(t)v^{n-t} dt = \int_0^n p(t)e^{-\delta(n-t)} dt. \qquad (3.46)$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Охарактеризуйте поняття дисконтування.
2. Що називається дисконтом?
3. Наведіть формулу розрахунку сучасної (приведеної) вартості.
4. Що називається ефективною ставкою дисконтування?
5. Наведіть формулу розрахунку ефективної ставки дисконтування.
6. Що є потоком платежу?
7. Дайте визначення понять: член ренти, період ренти, термін ренти.
8. Наведіть рівняння еквівалентності.
9. Охарактеризуйте постійні та термінові ренти.
10. Наведіть формули розрахунку сучасної вартості рент постнумерандо і пренумерандо.
11. Охарактеризуйте відсрочені ренти постнумерандо і відсрочені ренти пренумерандо.
12. Дайте характеристику p-термінових рент.
13. Які ренти називаються перемінними (зростаючими)?
14. Дайте визначення поняття зростаючої ренти постнумерандо та зростаючої ренти пренумерандо.
15. Наведіть формулу для розрахунку вартості об'єднаної ренти.
16. Охарактеризуйте відсрочені зростаючі ренти постнумерандо і відсрочені зростаючі ренти пренумерандо.
17. Як здійснюється приведення зростаючої ренти до кінця терміну?
18. Охарактеризуйте p-термінові зростаючі ренти.
19. Які ренти називаються беззупинними?
20. Охарактеризуйте беззупинні постійні ренти та беззупинні перемінні ренти.

ТЕСТИ

1. Укажіть правильні твердження відносно даного співвідношення $P(t) = S(t)(1 + i)^{-t}$:

а) величина $P(t)$ називається сучасною (поточною, приведеною) вартістю (величиною) (*present value*) суми $S(t)$;
б) процес відшукування сучасної вартості суми називається дисконтуванням (приведенням до моменту $t = 0$);
в) різницю $(S - P)$ називають дисконтом (*discount*).

2. Якщо сучасна вартість відсотків на капітал дорівнює 1, то відповідна їй вартість ефективної відсоткової ставки називається:
   а) ефективною ставкою дисконтування;
   б) номінальною ставкою дисконтування;
   в) реальною ставкою дисконтування.

3. Укажіть правильні твердження:
   а) потік платежів, усі складові якого є позитивними, а часовий інтервал між складовимии однаковим, – це перемінні ренти;
   б) часовий проміжок між двома послідовними платежами – термін ренти;
   в) часовий проміжок від початку першого періоду до кінця останнього – період ренти;
   г) розміри платежів змінюються за яким-небудь законом – це умовна рента;
   д) сплата платежів здійснюється безумовно і кількість складових такої ренти заздалегідь відома – правильні ренти;
   е) Що ставиться в залежність від настання деякої випадкової події: фінансова рента (рента), чи ануїтет (*annuity*).

4. Співвідношення $c_1 v^{\tau_1} + c_2 v^{\tau_2} + \ldots + b_k v^{t_k} = b_1 v^{\tau_1} + b_2 v^{t_2} + \ldots + b_k v^{t_k}$ називається рівнянням еквівалентності:
   а) так;
   б) ні.

5. Визначте правильні твердження:
   а) серія, виплати якої здійснюються в $t = m$, $t = m + 1$, $t = m + n - 1$, є відстроченою рентою пренумерандо;
   б) серія з n виплат, розміри яких дорівнюють одиниці, здійснюваних наприкінці кожного проміжку, – це рента постнумерандо;
   в) серія з n виплат, розміри яких дорівнюють одиниці, що здійснюються на початку кожного проміжку, – це рента пренумерандо;
   г) серія з n одиничних виплат, зроблених у момент $t = m + 1$, $t = m + 2$, $t = m + n - 1$ є відстроченою рентою постнумерандо.

6. Визначте правильні співвідношення:
   а) $ia_{\overline{n}|} + v^n = 1$;
   б) $iS_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n$;
   в) $d\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n = 1$;
   г) $d\ddot{S}_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n$.

7. Серія з *np*-виплат розміром 1 / *p*, зроблених наприкінці кожного частткового проміжку, називається:
   а) *p*-терміновою рентою постнумерандо;
   б) *p*-терміновою рентою пренумерандо;
   в) відстроченою *p*-терміновою рентою постнумерандо;
   г) відстроченою *p*-терміновою рентою пренумерандо.

8. Визначте правильні співвідношення:
   а) $a^{(p)}_{\overline{n}|} = S^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n$;
   б) $S^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n$;
   в) $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n$;
   г) $\ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n$.

9. Співвідношення $(la)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + ... + nv^n = v(1 + 2v + ... + nv^{n-1}) =$

   $= v(v + v^2 + ... + v^n) = v(\frac{v - v^{n+1}}{1-v}) = v\frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}$ описує:
   а) сучасну вартість зростаючої ренти постнумерандо;
   б) сучасну вартість зростаючої ренти пренумерандо;
   в) майбутню вартість зростаючої ренти постнумерандо;
   г) майбутню вартість зростаючої ренти пренумерандо.

10. Визначте правильні твердження:
   а) потік платежів з моментами виплат $t_k = m + k$ і відповідними величинами виплат $b_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ – це *p*-термінова рента пренумерандо;
   б) потік платежів, що здійснюються в моменти $t_k = m + k - 1$ з відповідними розмірами виплат $b_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, – це відстрочена зростаюча рента пренумерандо;
   в) потік платежів $b_k = k/ p$, що здійснюються в моменти $t_k = k / p$, $k = 1, 2, \ldots, np$, – це відсрочена зростаюча рента постнумерандо;
   г) потік платежів $b_k = k/ p$, що здійснюються в моменти $t_k = k / p$, $k = 1, 2, \ldots, np$, – це *p*-термінова зростаюча рента постнумерандо.

Тема 4. ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ РИЗИКУ У СТРАХУВАННІ

4.1. ПОНЯТТЯ РИЗИКУ, ЙОГО МІСЦЕ У СТРАХУВАННІ, КЛАСИФІКАЦІЯ СТРАХОВИХ РИЗИКІВ, МЕТОДИ ОЦІНКИ

Ризик. Страховий ризик. Методи оцінки ризиків. Метод індивідуальних оцінок. Метод середніх величин. Метод процентів. Класифікація ризиків. Критерії страхового ризику

4.2. МОДЕЛЮВАННЯ РИЗИКІВ У СТРАХУВАННІ

Математичне сподівання. Дисперсія. Середньоквадратичне відхилення. Розподіли виплат за портфелем: біноміальний розподіл, розподіл Пуассона, геометричний розподіл, негативний біноміальний розподіл

4.1. ПОНЯТТЯ РИЗИКУ, ЙОГО МІСЦЕ У СТРАХУВАННІ, КЛАСИФІКАЦІЯ СТРАХОВИХ РИЗИКІВ, МЕТОДИ ОЦІНКИ

З ризиком ми зустрічаємося щоденно: і на побутовому рівні, і в процесі будь-якої господарської діяльності. Як правило, ризик пов'язується з невпевненістю в можливому результаті. Незважаючи на довгочасну історію вивчення ризику, у науковій літературі немає єдиної думки щодо визначення цього поняття та теорій ризику.

Ризик як економічна категорія виник з появою товарно-грошових відносин і відображає подію, яка може відбутися або не відбутися. До того ж для події, що відбулася, можливі три варіанти економічного результату. А саме:

- позитивний (вигода, прибуток);
- нульовий (результат не отримано);
- від'ємний (збиток, втрата).

Науковці вважають, що вперше спроба визначення сутності та змісту поняття «ризик» була зроблена математиком Йоганом Тетенсом (XVIII ст). Його наукові праці з виміру ризику знайшли практичне застосування у страхуванні життя, хоча основи актуарних розрахунків, серед основних завдань яких є дослідження та групування ризиків, закладені в працях учених Д. Граунта, Я. Вітта, Е. Галлея ще в XVII ст. Термін «ризик» почав використовуватись спочатку у страховій теорії, а із зростанням впливу науково-технічного прогресу на фінансово-господарське та соціальне життя суспільства поширився й на економічну теорію.

Ризик у господарській діяльності – усвідомлена можливість небезпеки виникнення непередбачених втрат очікуваного прибутку, майна, грошей через випадкові зміни умов економічної діяльності, несприятливі обставини.

Вимірюють ризик частотою, імовірністю виникнення того чи іншого рівня втрат.

Досить повним є сучасне визначення ризику в навчальному посібнику «Фінансовий менеджмент» за редакцією проф. Г. Г. Кірейцева: «Під ***ризиком*** слід розуміти можливість виникнення збитку внаслідок дії в переважній більшості зовнішніх факторів, які при оцінці ситуації (перед прийняттям рішення) були невідомі та вплив яких може змінити ймовірність досягнення бажаного результату».

Ризик – це також імовірність виникнення збитків, втрат або недотримання прибутку порівняно з прогнозним варіантом.

Фактор ризику та необхідність покриття можливого збитку в результаті його прояву викликає потребу у страхуванні. Історично склалась уява про ризик як категорію, що лежить в основі страхування. Проте сьогодні страхування охоплює різні галузі наукових знань та практичного досвіду про природу явищ. Тому в літературі термін «ризик» тлумачиться по-різному.

Страховий ризик	– прогнозний збиток об'єкта страхування в результаті настання страхової події.

Для оцінки ризику в страховій практиці використовують різноманітні спеціальні методи, які постійно розвиваються та вдосконалюються. Найбільш поширеними є:

- метод індивідуальних оцінок;
- метод середніх величин;
- метод процентів.

Метод індивідуальних оцінок є одним з методів експертних оцінок, побудованих на використанні професійного досвіду та інтуїції фахівців. Цей метод належить до великої групи абстрактно-логічних методів дослідження. Метод індивідуальних оцінок у вимірюванні ризику використовується страховиком тоді, коли неможливо даний ризик порівняти із середнім типом ризику, коли можна здійснити тільки довільну його оцінку залежно від професіоналізму, досвіду та суб'єктивного погляду експерта.

Середні величини дозволяють дослідити типові ознаки, якісно однорідних явищ та виміряти їх коливання навколо середнього рівня розвитку. *Метод середніх величин* є одним із статистичних методів дослідження і в оцінці ризику передбачає розмежування окремих ризикових груп на більш дрібні підгрупи з метою створення аналітичної бази для визначення ризику.

Метод процентів також належить до групи методів статистичного аналізу і в системі оцінки ризику являє собою сукупність плюсових та від'ємних відхилень від середнього ризикового типу наявної аналітичної бази. Ці відхилення виражаються в процентах або в проміле від середнього ризикового типу.

Використовуються також економетричні, статистичні методи оцінки й аналізу ризиків, методи вербального аналізу тощо. Слід зазначити, що сьогодні вітчизняні та зарубіжні вчені володіють значним інструментарієм для оцінки та відстеження ризику, застосовують актуарні розрахунки, моніторинг, комплексне моделювання страхових процесів, емпіричний досвід, методи експертних оцінок, методи асоціацій та аналогій, експертиз тощо.

Для оцінки та аналізу ризиків необхідно їх класифікувати за відповідними ознаками в типи, види, групи тощо. Проте на сьогодні в страхуванні не існує чітко розробленої класифікації ризиків. У законодавчій та нормативній літературі також відсутні класифікація та поділ ризиків за видами, проте має місце вимога виконання актуарних (математичних) розрахунків при визначенні страхових тарифів, в основу яких покладена вартісна оцінка ризиків.

Узагальнюючи викладене, запропонуємо таку класифікацію ризиків у страхуванні (рис. 4.1).

Рис. 4.1. Класифікація ризиків у страхуванні

Безумовно, що найбільш поширену групу стновлять ризики, які можливо застрахувати. Страховий ризик – це такий ризик, який піддається вимірюванню, оцінці з позиції ймовірності настання страхової події та кількісних характеристик можливого збитку.

Основні *критерії страхового ризику*:

- ризик повинен бути можливим;
- ризик повинен мати випадковий характер;

- випадковість ризику повинна співвідноситися з певною сукупністю споріднених об’єктів;
- настання страхового випадку як реалізація ризику не повинне бути пов’язаним з волевиявленням страхувальника чи зацікавленої особи;
- факт настання страхового випадку невідомий у часі і просторі;
- страхова подія не повинна мати обсяги катастрофічного лиха;
- наслідки реалізації ризику повинні бути об’єктивно виміряні й оцінені.

Крім того, страхові ризики класифікуються за різними ознаками:

- за джерелом небезпеки – ризики прояву стихійних сил та цілеспрямованої дії людини;
- за обсягом відповідальності страховика – індивідуальні та універсальні ризики;
- специфічні ризики – аномальні та катастрофічні – ендемічні, якості землі, політичні, воєнні, а також екологічні, транспортні, спеціальні тощо;
- об’єктивні – ризики, пов’язані з неконтрольованими факторами;
- суб’єктивні – ризики, що заперечують або ігнорують об’єктивну реальність, тощо.

Кожна з цих груп ризиків має свій відповідний поділ на види чи підвиди.

У фінансово-економічній діяльності ризики поділяються за галузями економіки, сферами та видами діяльності тощо. Наприклад, фінансовий, банківський, кредитний, валютний, процентний, іпотечний, комерційний, підприємницький, моральний (виникає після укладання договору страхування) ризики тощо.

Ризик у страхуванні розглядають з певних позицій:

- як конкретне явище чи сукупність явищ;
- стосовно конкретного застрахованого об’єкта;
- імовірності втрати або ушкодження об’єкта, прийнятого на страхування;
- у зв’язку з діяльністю страховика.

З метою оцінки й аналізу виділяють також ризики діяльності страхової компанії:

- ризики, що передаються страхувальником страховій компанії за договором страхування;
- ризики, пов’язані з діяльністю самого страховика.

Така класифікація необхідна для формування спеціальних резервів та фондів страхової компанії для покриття ризиків. (У страхуванні комплексна діяльність з аналізу, оцінки ризиків, вибору оптимального покриття тощо називається андерайтингом). Найбільш відомими у світовій практиці є європейська та американська класифікації.

Європейська класифікація вважається найбільш вичерпною, ураховує специфіку більшості ризиків, обумовлених діяльністю страховика. При цьому застосовується економетричний метод аналізу ризиків. Проте недостатнє застосування статистичних методів не дозволяє вважати результати такої оцінки повністю адекватними, тобто кількісна оцінка ризиків є недостатньою.

Американська класифікація розрізняє ризики за етапами роботи страхової компанії, протягом якої вона піддається зазначеним ризикам:

- становлення;
- повноцінної активної діяльності;
- ліквідації страхової компанії.

При цьому для оцінки та аналізу ризиків використовується, головним чином, вербальний аналіз, коли застосовується не тільки вірогідні розрахунки щодо певних ризиків, що мають достатнє статистичне спостереження, а розглядаються й ті ризики, що не мають достатньої статистики. Тобто має місце недостатня якісна оцінка ризиків.

За європейською і американською класифікаціями ризиків страхової діяльності роль джерела виплати за ризиками страхових операцій виконують власні кошти страхової компанії.

Останнім часом усе більш популярною стає фінська класифікація ризиків, яка знаходить економічний компроміс між кількісним і якісним аналізом та оцінкою ризиків. За фінською класифікацією ризики у страхуванні поділяються на:

- основні;
- додаткові.

Основні ризики покриваються за рахунок спеціально сформованих страхових резервів, а *додаткові* за рахунок резерву стабілізації, а не власних вільних резервів. Власні вільні кошти використовуються для додаткового зниження негативного впливу додаткових ризиків.

Зрозуміло, що перед людством стоїть завдання попередження, компенсації та ліквідації ризиків, що можна досягти завдяки антиризиковій діяльності. Уникнути чи зменшити вплив ризиків, як зазначає Т. А. Ротова, можна за допомогою ризик-менеджмснту – системи управління ризиками та фінансовими відносинами, що виникають у процесі бізнесу. Управління ризиками, вплив на них може відбуватися при застосуванні певних форм антиризикової діяльності, наведених на рис. 4.2.

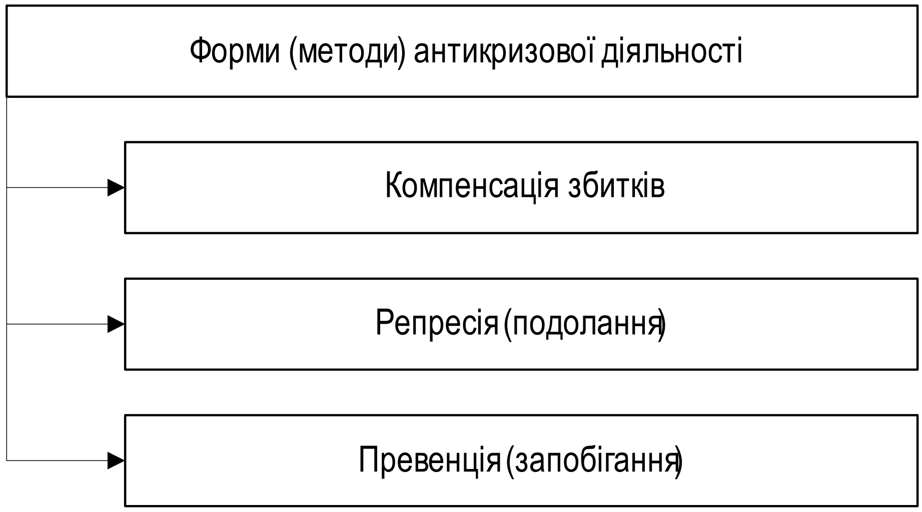


Рис. 4.2. Форми антикризової діяльності

Сьогодні з погляду фінансування пріоритетну роль в антиризиковій діяльності відіграє компенсаційна форма, яка відображає страховий захист. А превенція займає другорядне місце, хоча й переросла в самостійну функцію страхування.

Зазначені форми (методи) антиризикової діяльності проявляються у функціях страхування: компенсаційній, репресивній, превентивній. Слід зазначити, що здійснення вказаних функцій можливе за рахунок спеціальних коштів, які існують у відповідних фондах і називаються страховими.

4.2. МОДЕЛЮВАННЯ РИЗИКІВ У СТРАХУВАННІ

Із широкого спектру різних ризиків виділимо ті, які піддаються страхуванню. За ознаками таких явищ вкажемо головні характеристики цих ризиків: можуть розглядатися тільки масові явища, що мають тенденцію до нескінченного повторення; ці явища повинні мати об'єктивний характер, тобто залежати від прояву чиєї-небудь волі; збиток, викликаний даними подіями, повинен піддаватися виміру. Під цим розуміється не стільки існування верхньої оцінки втрат, скільки можливість виразити їх у грошових одиницях.

У теорії ризику розроблено системи понять, моделей і методів, що дозволяють кількісно оцінити, у т. ч. фінансові, ризики в діяльності страхової компанії.

Нехай випадкові величини N, Y, X описують: N – кількість страхових випадків на один договір, Y – величину можливих втрат на один страховий випадок (за умови, що він відбувся), X – розмір втрат страхової компанії в результаті настання страхових випадків.

Нехай настання страхового випадку за один період страхування характеризується ймовірнісним розподілом $F_N(x)$, а втрати, можливі в результаті однієї страхової події, описуються ймовірнісним розподілом $F_X(x)$.

Пару $(F_N(x); F_X(x))$ будемо називати *ризиком*.

Для зручності викладення розділимо ризик клієнта $(F_N(x); F_Y(x))$ і ризик страхової компанії, пов'язаний з договором даного клієнта $F_N(x); F_X(x))$. Цей розподіл має певне значення. Клієнт має ризик $(F_N(x); F_Y(x))$, який означає, що для нього страхова подія відбувається згідно з імовірнісним розподілом F_N кількості страхових випадків, а втрати, які можуть відбутися в результаті страхової події, описуються випадковою величиною Y, з розподілом F_Y. Для страхової компанії, що уклала договір страхування даного ризику клієнта, цей договір спонукає ризик $(F_N(x); F_X(x))$, який має той самий розподіл кількості випадків F_N, що й ризик клієнта, а втрати компанії полягають у виплатах, які вона робитиме за позовами даного клієнта. Ці виплати описує випадкова величина X, що має розподіл F_X. Випадкові величини Y і X залежні, але не однакові.

У практиці розрахунків використовуються біноміальний, пуасонів і геометричний розподіли кількості вимог. Розподіли втрат можуть бути як дискретними, так і безперервними.

Отже, етап перший – з’ясування ризику – передбачає такі кроки:

- визначення класу приналежності ризику, що вивчається.
- оцінку розподілів вірогідності втрат і кількості випадків, що визначають ризик;
- вибір методів перевірки адекватності, одержаної на першому кроці оцінки ризику.

Основні позначення і визначення. Розглянемо один вид страхування виходячи з того, що він повинен бути принаймні беззбитковим, тобто портфель об’єднаний одним страховим фондом.

Фінансові потоки зі створення й витрачання страхового фонду тісно пов’язані з категорією вірогідності. Тому можливо описати фінансову складову страхування в термінах теорії вірогідності. Введемо позначення, які використовуватимуться для описі всіх завдань:

n – кількість договорів у досліджуваному портфелі;

N_i – кількість позовів від договору з номером i;

$N = \sum_{i=1}^{n} N_i$ – загальна кількість позовів за портфелем;

M – кількість договорів, що подали хоча б один позов. Якщо за договором можливий не більш, ніж один позов, то $M = N$;

q_i – вірогідність страхового випадку для договору з номером i. Припустимо, що портфель є однорідним щодо вірогідності страхового випадку, тобто $q_i = q, \forall i = 1,\ ...,\ n$;

S_i – страхова сума за договором з номером i;

Y_i^j – розмір j-го за порядкому відшкодування, виплаченого за договором з номером i;

$X_i = \sum_{j=1}^{N_i} Y_i^j$ – загальне відшкодування за договором з номером i. $X_i = 0$, якщо кількість позовів $N_i = 0$;

$V_i = \dfrac{X_i}{S_i}$ – відносне страхове відшкодування за договором з номером i;

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ – загальне відшкодування за портфелем.

Більшість наведених характеристик страхового портфеля має випадкову природу, для аналізу якої буде потрібне застосування певних функцій і числових характеристик.

Нехай K – деяка дискретна випадкова величина, що набуває значення $K_0, K_1, \ldots$ з деякою вірогідністю $p_i = P(K = K_i)$:

$$K = \begin{cases} K_0 \ K_1 \ \ldots \ K_m \ \ldots \\ p_0 \ p_1 \ \ldots \ p_m \ \ldots \end{cases}, p_i \geq 0 \ \ \forall i = 0,\ldots, \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1. \quad (4.1)$$

Нехай Z – безперервна випадкова величина, що має щільність $f_Z(x)$ і функцію розподілу $F_Z(x)$.

Середні значення (математичне сподівання, перший момент) для K і Z рівні, відповідно, $EK = \sum_{i=0}^{\infty} p_i K_i$.

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Z(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_Z(x)\cdot \quad (4.2)$$

Математичне сподівання випадкової величини означає те, «що очікується в середньому за достатньо тривалий проміжок часу». Зокрема, для K математичне сподівання EK – середнє очікуване число позовів від однорідного портфеля за «звичний» інтервал часу.

Другі моменти для K і Z рівні, відповідно $EK^2 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i K_i^2$.

$$EZ^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_Z(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_Z(x). \quad (4.3)$$

Дисперсія випадкової величини визначається як різниця другого моменту і квадрата першого моменту:

$$VarK = EK^2 - (EK)^2. \quad (4.4)$$

Дисперсія є середнім квадратичним відхиленням значень випадкової величини від її математичного сподівання, тобто дисперсія оцінює рівень можливих флуктуацій випадкової величини.

Середньоквадратичним відхиленням випадкової величини називають арифметичний корінь з її дисперсії $\sigma K = \sqrt{VarK}$.

Коефіцієнтом варіації випадкової величини називають відношення її середньоквадратичного відхилення до середнього значення $WK = \sigma K / EK$.

Розподіли числа виплат за портфелем. Число виплат за портфелем є дискретною випадковою величиною і може приймати значення 0, 1, 2, 3, ... з деякою вірогідністю. Для визначення вірогідного числа виплат визначальне значення має така характеристика випадкової величини, як її розподіл $p_k = P(N = k)$.

$$K = \begin{cases} 0 & 1 & 2 \ldots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 \ldots & p_n \end{cases} \quad p_k \geq 0 \;, \sum_{i=0}^{N} p_k = 1. \quad (4.5)$$

Припустимо, що фактичні значення випадкової змінної N за деяку кількість періодів у минулому є відомими. На підставі наявних даних можна розрахувати вибіркові оцінки для середнього значення і дисперсії числа позовів. Позначимо їх як M_N і D_N відповідно. Тоді основне завдання полягає в підборі такого гіпотетичного розподілу вірогідності для N, яке відповідає з деякою заданою точністю спостережуваним значенням N.

Найбільш поширені такі розподіли:

1. ***Біноміальний розподіл.*** Припустимо, що для всіх договорів деякого портфеля страхова подія може реалізуватися за час дії договору тільки один раз і вірогідність того, що воно відбудеться, однакова для всіх і дорівнює q. Тоді загальна кількість позовів за даним портфелем за фіксований проміжок часу матиме біноміальний розподіл вірогідності. Це означає, що:

$$p_i = P(N = i) = C_i^n q^i (1-q)^{n-i}. \tag{4.6}$$

Числові характеристики – середнє значення і дисперсія біноміальної випадкової змінної

$$\begin{aligned} &EN = nq, \\ &VarN = nq(1-q). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Приклад 4.1. Для портфеля з 200 договорів з вірогідністю страхового випадку 0,01 графічний розподіл загальної кількості виплат за портфелем у діапазоні [0,1] наведений на рис. 4.3.

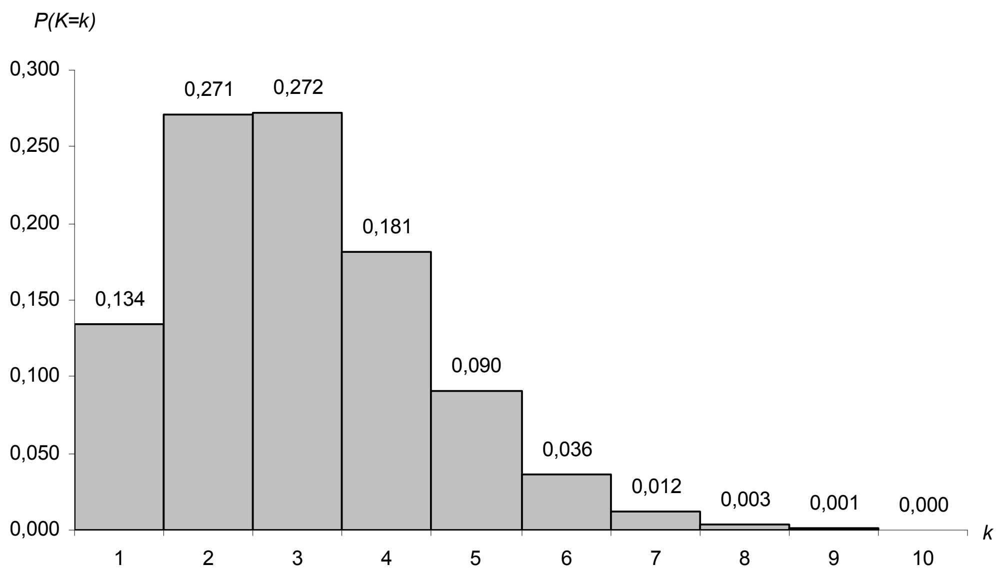


Рис. 4.3. Біноміальний розподіл загального числа виплат за портфелем

2. ***Розподіл Пуассона.*** На практиці в багатьох випадках кількість договорів є достатньо великою, а вірогідність страхового випадку q малою. У разі, якщо середнє число виплат nq за даний період є деяким постійним числом λ, то біноміальний розподіл можна наблизити розподілом Пуассона:

$$p_k = P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0,\ 1,\ 2,\ ... \tag{4.8}$$

Стосовно нашого прикладу розподіл Пуассона на інтервалі [0, 10] графічно виглядатиме як на рис. 4.4:

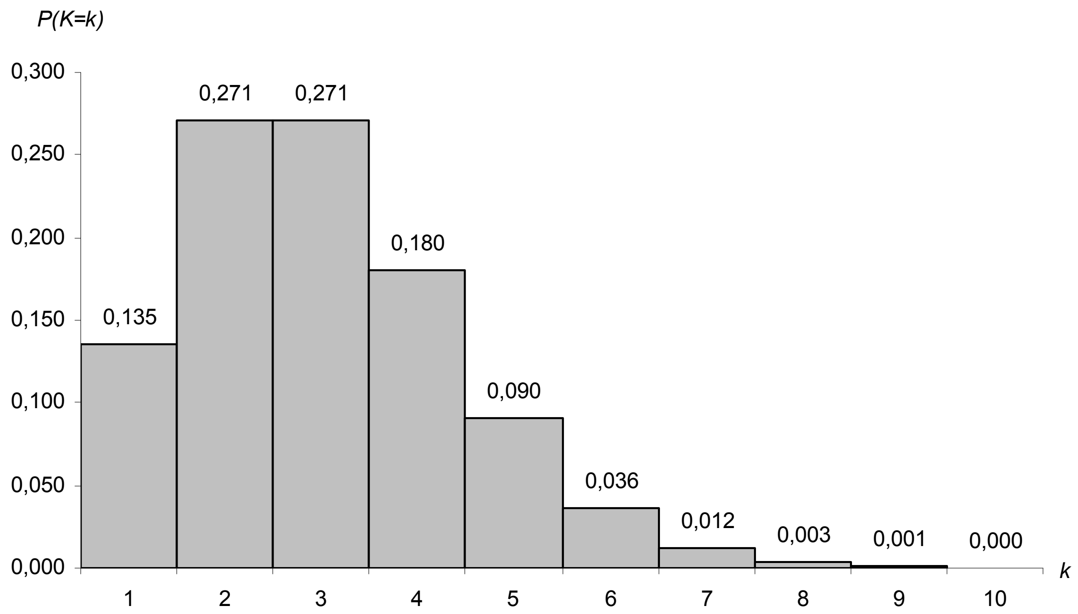


Рис. 4.4. Розподіл Пуассона

Середнє значення і дисперсія дорівнюють λ:

$$EN = \lambda,\ VarN = \lambda. \tag{4.9}$$

Пуассонів розподіл може застосовуватись і у тому випадку, якщо за договором може бути кілька виплат. У цьому випадку q дорівнює кількість виплат, віднесених до кількості договорів.

Пуасонів розподіл виконує дуже важливу роль у страховій математиці, оскільки може застосовуватися при дотриманні таких умов:

- під час коротких тимчасових інтервалів може бути висунута не більше ніж одна вимога про виплату;
- вірогідність висунення вимоги протягом тимчасового інтервалу пропорційна довжині інтервалу і не залежить від його положення в часі;
- кількість вимог, висунених в непересічні інтервали часу, незалежні.

Очевидно, що виконання цих умов можна з прийнятною точністю чекати від реального процесу висунення вимог про виплату страхових відшкодувань.

3. *Геометричний розподіл.* Дискретна випадкова величина N має геометричний розподіл вірогідності, якщо воно задане як:

$$p^i = P(N = i) = (1 - q)q^i,\ 0 < q < 1,\ i = 0, 1, \ldots \tag{4.10}$$

Середнє значення і дисперсія дорівнюють відповідно:

$$EN = \frac{q}{1-q},\ VarN = \frac{q}{1-q^2}. \tag{4.11}$$

Приклад 4.2. Нехай вибіркове середнє число позовів для деякого портфеля договорів дорівнює 0,2. Тоді $EN = q\ /\ (1 - q)$, отже, $q = 1/6$. Гістограма геометричного розподілу для цього випадку наведена на рис. 4.5.

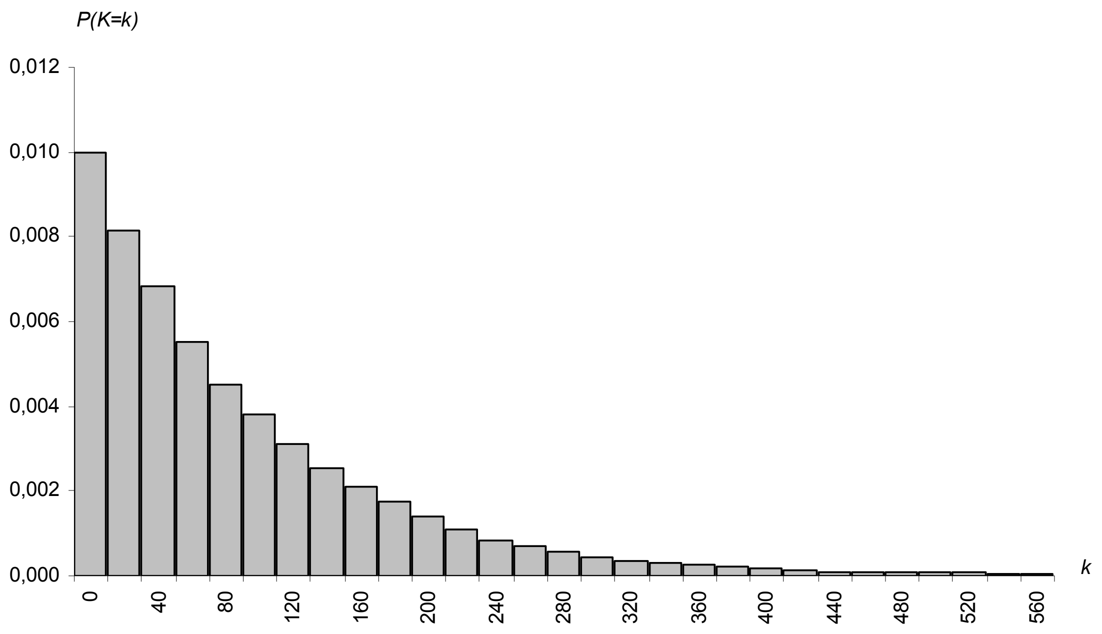


Рис. 4.5. Гістограма геометричного розподілу позовів для випадку прикладу 4.2

Геометричний розподіл є окремим випадком $\alpha = 1$ більш загального і складного розподілу – негативного біноміального.

4. ***Негативний біноміальний розподіл.*** Число виплат також можна наблизити негативним біноміальним розподілом з параметрами q і α:

$$p_i = P(N = i) = \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+i-1)}{i!}(1-q)^{\alpha} q^{i}, i = 0,1,.... \quad (4.12)$$

Середнє і дисперсія негативного біноміального розподілу дорівнюють відповідно

$$EN = \frac{\alpha q}{1-q},$$
$$VarN = \frac{\alpha q}{(1-q)^2}. \quad (4.13)$$

Для негативного біноміального розподілу дисперсія більша від середнього, що дає можливість у деяких випадках сподіватися на більш адекватний результат.

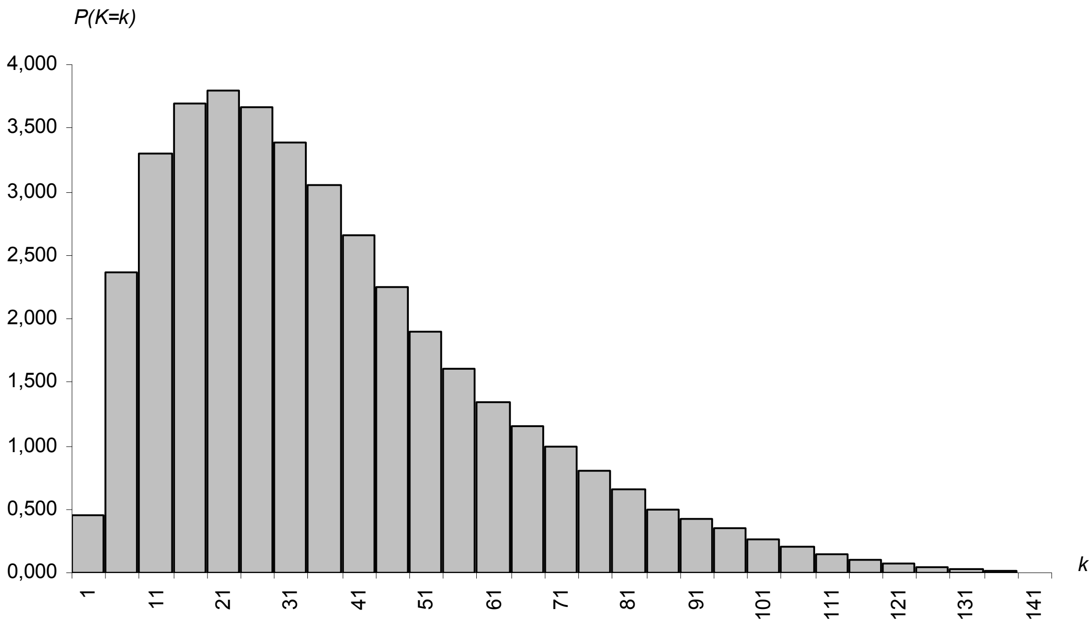


Рис. 4.6. Гістограма розподілу позик страхового портфеля

Приклад 4.3. Нехай для деякого портфеля відомо, що оцінки середнього значення і дисперсії становлять відповідно $M_N = 2$ і $D_N = 3$. Тоді параметри негативного біноміального розподілу можуть бути знайдені як рішення системи з двох рівнянь щодо змінних q і α:

$$\begin{cases} EN = \dfrac{\alpha q}{1-q} \approx 2, \\ VarN = \dfrac{\alpha q}{(1-q)^2} \approx 3. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо, що $q = 1/3$ і $\alpha = 3$. Гістограма розподілу для даного прикладу наведена на рис. 4.6.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте визначення поняття "ризику".
2. Що називається страховим ризиком?
3. Охарактеризуйте метод індивідуальних оцінок страхового ризику.
4. Охарактеризуйте метод середніх величин.
5. Охарактеризуйте метод процентів.
6. Наведіть класифікацію ризиків з позиції страхування.
7. Які основні критерії страхового ризику?

8. Охарактеризуйте позиції, з яких розглядається ризик у страхуванні.
9. У чому полягають особливості європейської та американської класифікацій ризиків?
10. Які ознаки страхового ризику?
11. Які етапи моделювання ризиків у страхуванні?
12. Які особливості застосування розподілів при моделюванні ризиків?

ТЕСТИ

1. Визначити правильні твердження:
   а) метод середніх величин є одним із методів експертної оцінки, побудованих на використанні професійного досвіду та інтуїції спеціалістів. Цей метод належить до великої групи абстрактно-логічних методів дослідження;
   б) метод індивідуальних оцінок є одним із статистичних методів дослідження і в оцінці ризику передбачає розмежування окремих ризикових груп на більш дрібні підгрупи з метою створення аналітичної бази для визначення ризику за певними відповідними ризиковими ознаками;
   в) метод процентів є одним із методів статистичного аналізу і в системі оцінки ризику являє собою сукупність додатних та від'ємних відхилень від середнього ризикового типу наявної аналітичної бази.

2. Основні критерії страхового ризику:
   а) ризик має бути можливим;
   б) ризик повинен мати випадковий характер;
   в) випадковість ризику повинна співвідноситися з певною сукупністю споріднених об'єктів;
   г) настання страхового випадку як реалізація ризику не повинне бути пов'язаним з волевиявленням страхувальника чи зацікавленої особи;
   д) факт настання страхового випадку невідомий у часі та просторі;
   е) страхова подія не повинна мати обсяги катастрофічного лиха;
   ж) наслідки реалізації ризику повинні бути об'єктивно виміряні й оцінені.

3. З'ясування ризику передбачає такі кроки:
   а) вибір методів перевірки адекватності оцінки ризику;
   б) визначення класу приналежності ризику, що вивчається;

   в) оцінку розподілів імовірності втрат і кількості випадків, що визначають ризик.

4. Наведені числові характеристики – середнє значення і дисперсія $EN = nq$, $VarN = nq/(1 - q)$ належать до:
   а) розподілу Пуассона;
   б) біноміального розподілу;
   в) геометричного розподілу.

5. Наведені числові характеристики – середнє значення і дисперсія $EN = \lambda$, $VarN = \lambda$ належать до:
   а) геометричного розподілу;
   б) біноміального розподілу;
   в) розподілу Пуассона.

6. Умови застосування розподілу Пуассона:
   а) під час коротких тимчасових інтервалів може бути висунуте не менше однієї вимоги про виплату;
   б) імовірність висунення вимоги протягом тимчасового інтервалу пропорційна довжині інтервалу і не залежить від його положення в часі;
   в) кількості вимог, висунутих в непересічні інтервали часу, незалежні.

7. Дискретна випадкова величина N, якщо вона задана виразом $p_k = P(N = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, має розподіл імовірності:
   а) розподіл Пуассона;
   б) геометричний розподіл;
   в) біноміальний розподіл.

8. Указати правильну відповідь:
   а) європейська класифікація поділяє ризики за етапами роботи страхової компанії, протягом якої вона піддається зазначеним ризикам: становлення; повноцінної активної діяльності; ліквідації страхової компанії. При цьому для оцінки та аналізу ризиків використовується, головним чином, вербальний аналіз, коли застосовується не тільки вірогідні розрахунки до певних ризиків, що мають достатнє статистичне спостереження, а розглядаються й ті ризики, що не мають достатньої статистики. Тобто недостатня якісна оцінка ризиків;

б) американська класифікація вважається найбільш вичерпною, ураховує специфіку більшості ризиків, обумовлених діяльністю страховика. При цьому застосовується економетричний метод аналізу ризиків. Проте недостатнє застосування статистичних методів не дозволяє вважати результати такої оцінки повністю адекватними, тобто існує недостатність кількісної оцінки ризиків.

9. Наведене співвідношення $V_i = \frac{X_i}{S_i}$ – це:

а) загальне число позовів по портфелю;
б) страхова сума за договором з номером *i*;
в) загальне відшкодування по портфелю;
г) відносне страхове відшкодування по договору з номером *i*.

10. Співвідношення $\int_{-\infty}^{\infty} x dF_z(x)$ описує:

а) середнє квадратичне відхилення кількості позовів від однорідного портфеля;
б) дисперсія кількості позовів від однорідного портфеля;
в) математичне сподівання кількості позовів від однорідного портфеля.

Тема 5. АНАЛІЗ І УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ У СТРАХУВАННІ

5.1. РОЗПОДІЛ ВТРАТ

Рівномірний розподіл. Експоненційний розподіл. Розподіл Парето. Гама-розподіл. Бета-розподіл. Квадратичний розподіл. Нормальний розподіл

5.2. РОЗПОДІЛ ВИПЛАТ

Середнє значення і дисперсія виплат. Сумарні виплати за портфелем

5.3. ПОРІВНЯННЯ РИЗИКОВИХ СИТУАЦІЙ

Метод середніх величин. Ступінь ризику. Імовірність розорення (нерівність Лундберга). Корисність страхування та корисність страхової діяльності. Функція корисності. Властивості функції корисності (нерівність Йенсена). Функція «сумління»

5.1. РОЗПОДІЛ ВТРАТ

У майновому страхуванні розмір відшкодування може приймати будь-яке значення від нуля до страхової суми. Це означає, що випадкові величини Y_i^j (j-е за порядком страхове відшкодування за договором з номером i) і X_i (сума страхового відшкодування, виплаченого за i-м договором за період його дії за умови, що страховий випадок відбувся) є безперервними випадковими величинами. Природа безперервної випадкової величини A може бути описана функцією розподілу ймовірності:

$$F_A(x) = P(A \leq x) \tag{5.1}$$

або щільністю розподілу імовірностей (якщо вона існує):

$$f_A(x) = F_A^{'}(x). \tag{5.2}$$

Розподіл випадкової величини – одне з основних понять теорії ймовірності, також відіграє дуже важливу роль в актуарній математиці.

Для страхової компанії ризик втрати, що приймається на страхування, – це негативна за своїми можливими економічними наслідками ви-падкова величина. Значення її характеристик дозволяє дати їй вартісну оцінку, а також – прогноз фінансового стану компанії.

Нехай є фактичні значення збитку, який був понесений однаковими об'єктами в результаті страхового випадку впродовж деякого часу. Тоді можна вважати, що відомі вибіркові оцінки для середнього значення і дисперсії випадкової величини Y, що описує можливі втрати в результаті страхового випадку. Позначимо їх значення як M_Y і D_Y відповідно. Тоді, як і раніше, виникає проблема підбору гіпотетичного розподілу $F_Y(x)$, що найкращим чином відповідає фактичним даним. В актуарній літературі застосовуються такі безперервні розподіли для опису збитку за одним договором і одним страховим випадком.

1. ***Рівномірний розподіл.*** Випадкова величина Y має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність постійна на цьому відрізку і дорівнює нулю поза ним:

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a,b], \\ 0, \textit{в іншому випадку} \end{cases}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, x \in [a,b]. \\ 1, x > b \end{cases} \qquad (5.3)$$

Графічно рівномірний розподіл збитку для цього випадку поданий на рис. 5.1.

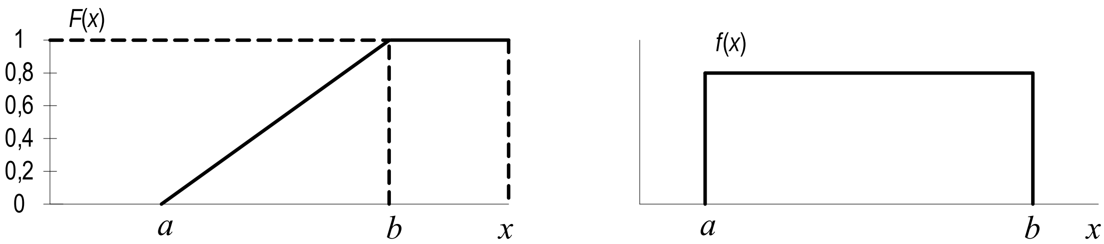


Рис. 5.1. Графіки функції розподілу імовірності і щільності імовірності рівномірно розподіленої на інтервалі [*a*, *b*] випадкової величини

Середні втрати і дисперсія дорівнюють відповідно:

$$EY = \frac{b-a}{2},$$

$$VarY = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

***Приклад* 5.1**. Нехай для деякого об’єкта страхування збитки, можливі в результаті, скажімо, пожежі, рівномірно розподілені від нуля до повної вартості об’єкта. Нехай вартість об’єкта оцінена в 120 гр. од. Тоді середні втрати для цього об’єкту становлять $EY = (120 - 0) / 2 = 60$, а дисперсія – $VarY = (120 - 0)^2 = 1\ 200$.

Очевидно, що в більшості реальних випадків рівномірний розподіл не підходить для опису розміру збитку. На практиці збитки різних розмірів мають різну ймовірність виникнення. Для їх опису використовуються такі види безперервних розподілів.

2. *Експоненціальний розподіл.* Випадкова величина має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda > 0$, якщо її щільність має вигляд:

$$f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0, \tag{5.4}$$

функція розподілу:

$$F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0. \tag{5.5}$$

Середнє значення і дисперсія дорівнюють відповідно:

$$EY = \frac{1}{\lambda}, \qquad VarY = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.6}$$

Для експоненціально розподіленої випадкової величини середнє дорівнює середньоквадратичному відхиленню, що є доволі жорсткою умовою.

Зазначимо, що, припускаючи експоненціальний розподіл для втрат, ми таким чином передбачаємо можливість катастрофічно великих значень збитків (немає обмеження на x зверху). Проте щільність експоненціального розподілу є швидко спадною функцією, що робить імовірність великих значень збитків дуже малою. У нашому прикладі ймовірність того, що можливі збитки перевищать середнє очікуване значення в 1,4 рази, менша ніж 0,5%.

Характерною межею експоненціального розподілу є значна кількість невеликих позовів і можливість рідкісних дуже великих позовів, тобто воно є асиметричним і «довгохвостим».

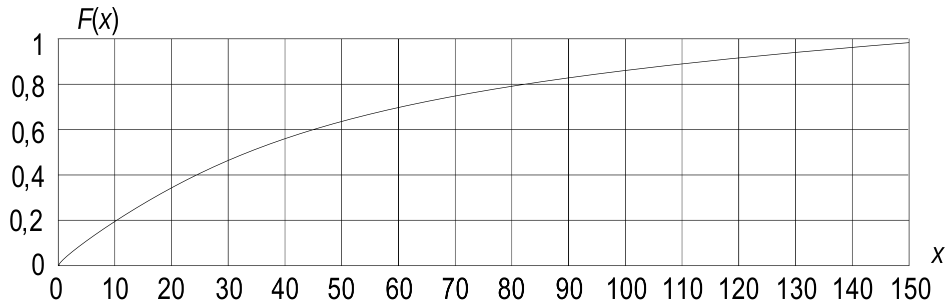


Рис. 5.2. Графік функції розподілу ймовірностей при експоненційному розподілі збитку

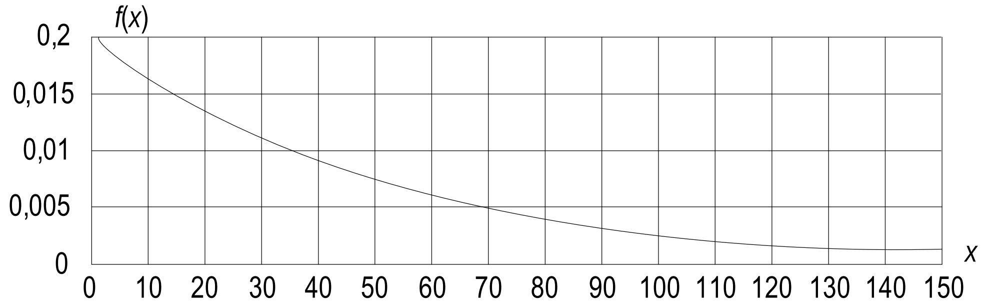


Рис. 5.3. Графік щільності розподілу ймовірностей
при експоненційному розподілі збитку

3. ***Розподіл Парето.*** Випадкова величина Y має розподіл Парето з параметрами $\lambda > 0$ і $\alpha > 0$, якщо її щільність задана як:

$$f_Y(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha+1}, x > 0. \qquad (5.7)$$

Функція розподілу в цьому випадку задана як:

$$F_Y(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha}. \qquad (5.8)$$

Середнє значення для випадкової величини, що має розподіл Парето, визначається як:

$$EY = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha+1} dx = \frac{\lambda}{\alpha - 1}. \qquad (5.9)$$

Для другого моменту маємо:

$$EY^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha+1} dx = \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}. \qquad (5.10)$$

Звідси одержуємо вираз для дисперсії:

$$VarY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}. \qquad (5.11)$$

Як було зазначено, кінцевий середній розподіл Парето маємо тільки за $\alpha > 1$, а кінцеву дисперсію – за $\alpha > 2$.

Коефіцієнт варіації випадкової величини, що має розподіл Парето, дорівнює $WY = \sigma Y / EY = \sqrt{\alpha / (\alpha - 2)}$.

Як бачимо, коефіцієнт варіації завжди більше одиниці. Це свідчить про те, що характерна особливість розподілу Парето – імовірність великих значень позовів – є достатньо великою.

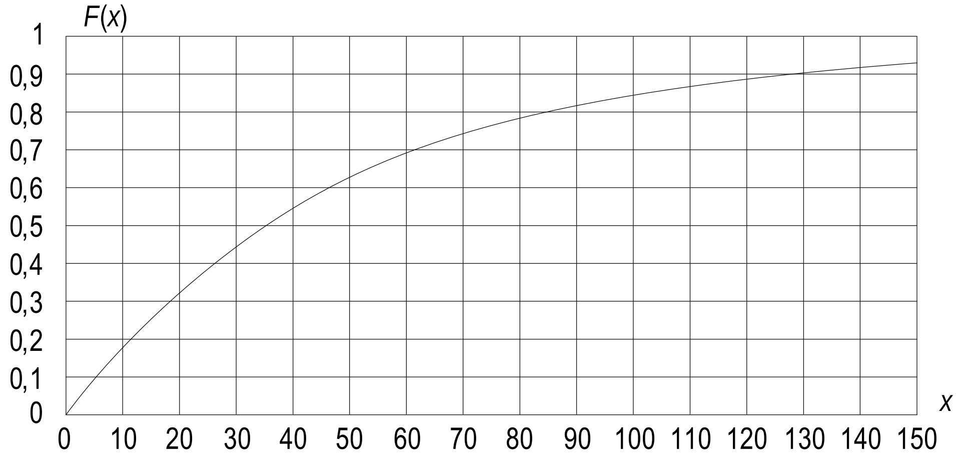


Рис. 5.4. Графік функції розподілу ймовірностей, якщо збиток має розподіл Парето

Розподіл Парето також є асиметричним, але «хвіст» у нього «важчий», ніж у експоненціального розподілу, тобто ймовірність значних розмірів відшкодувань є більшою, ніж у попередньому випадку.

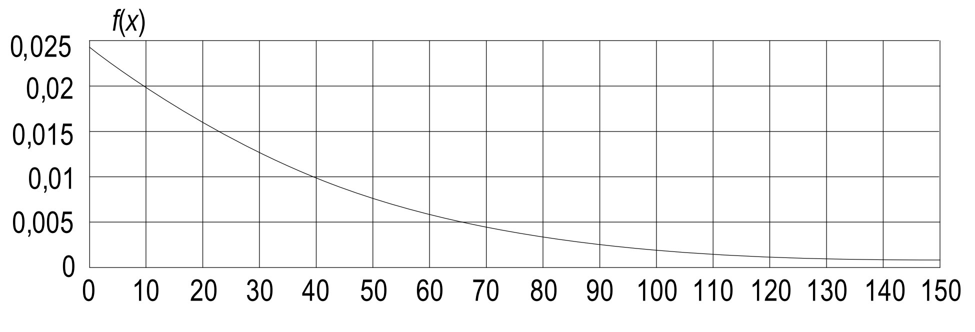


Рис. 5.5. Графік щільності розподілу імовірностей, якщо збиток має розподіл Парето

4. *Гамма-розподіл.* Випадкова величина Y має гамма-розподіл з параметрами $\lambda > 0$ і $\alpha > 0$, якщо:

$$f_Y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0,$$
$$F_Y(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt, \tag{5.12}$$

де Γ – гамма-функція, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$

Середнє значення для випадкової величини, що має гамма-розподіл, дорівнює:

$$EY = \frac{\alpha}{\lambda},$$
$$VarY = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \tag{5.13}$$

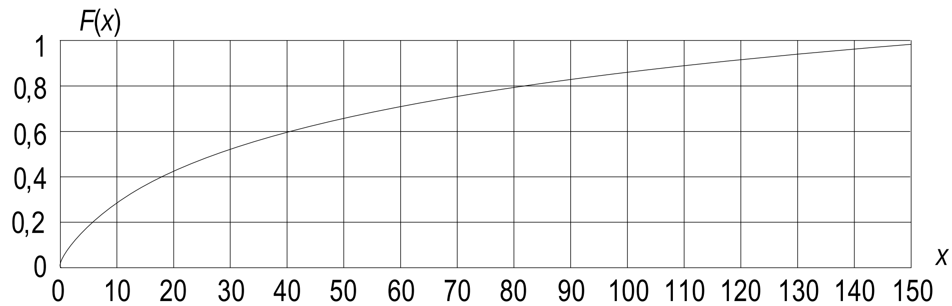


Рис. 5.6. Графік функції розподілу ймовірностей при гамма-розподілі збитку

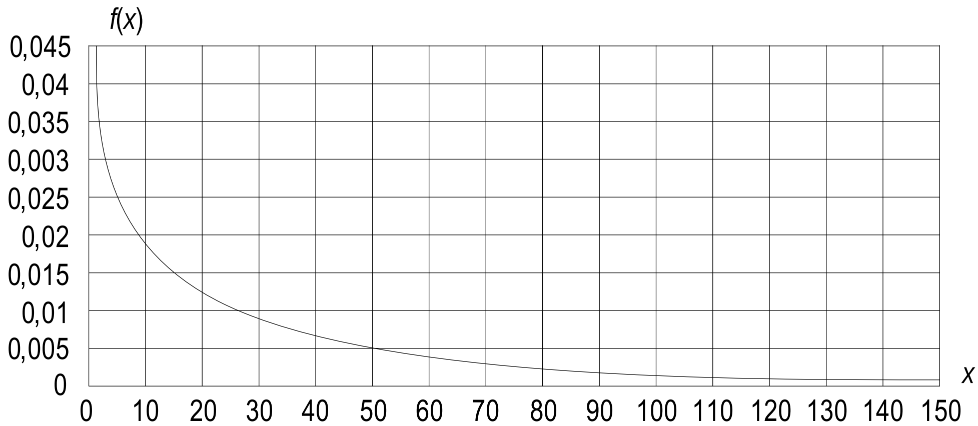


Рис. 5.7. Графік щільності розподілу ймовірностей при гамма-розподілі збитку

За умови $x \to \infty$ щільність гамма-розподілу спадає швидше, ніж щільність розподілу Парето, але повільніше, ніж експоненціальна щільність. Це означає, що для однакового розміру збитку ймовірність його виникнення при гамма-розподілі більша, ніж при експоненціальному розподілі, але менша, ніж при розподілі Парето. За умови $\alpha > 1$ гамма-розподіл відповідає ситуації, коли позови в основному згруповані навколо деякого значення, а невеликі позови можливі, але малоймовірні.

5. *Бета-розподіл.* Безперервна випадкова величина Y має бета-розподіл ймовірності, якщо її функції розподілу ймовірності і щільності імовірності задані як:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \le x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)} \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, 0 \le x \le 1, \\ f_Y(x) &= x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}, 1 \le \alpha < \infty, 1 \le \beta < \infty. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Середнє значення і дисперсія, відповідно, дорівнюють:

$$\begin{aligned} EY &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \\ VarY &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

6. *Квадратичний розподіл.* Безперервна випадкова величина Y має квадратичний розподіл імовірності, якщо її функції розподілу ймовірності та щільності ймовірності задані як

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \le x) = a\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx,\ 0 \le x \le 1, \\ f_Y(x) &= ax^2 + bx + c. \end{aligned} \tag{5.16}$$

з такими коефіцієнтами a, b і c, що $f_Y(x) > 0$ для $0 \le x \le 1$ і $\int f_Y(x)dx = 1$.

Середнє значення і дисперсія для випадкової величини, що має квадратичний розподіл імовірності, відповідно, дорівнюють:

$$EY = \frac{a}{15} + \frac{b}{8} + \frac{c}{4},$$
$$VarY = \frac{a}{18} + \frac{b}{10} + \frac{c}{4}. \qquad (5.17)$$

7. *Нормальний розподіл.* Випадкова величина Y має нормальний розподіл, якщо:

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-(x-A)|/2D},$$
$$F_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-A)|/2D} dt = \Phi\left[\frac{x-A}{\sqrt{D}}\right]. \qquad (5.18)$$

де Φ – стандартна нормальна функція розподілу.

Середнє значення $EY = A$, а дисперсія $VarY = D$.

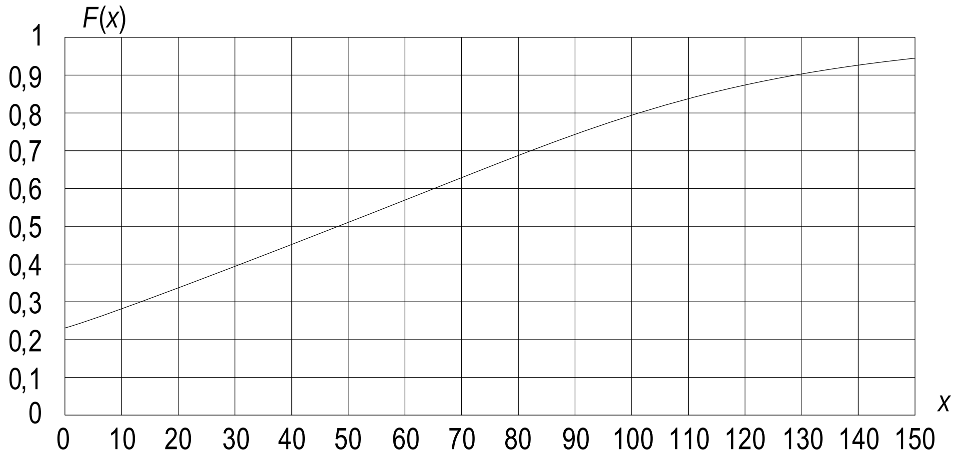


Рис. 5.8. Графік функції розподілу ймовірностей при нормальному розподілі збитку

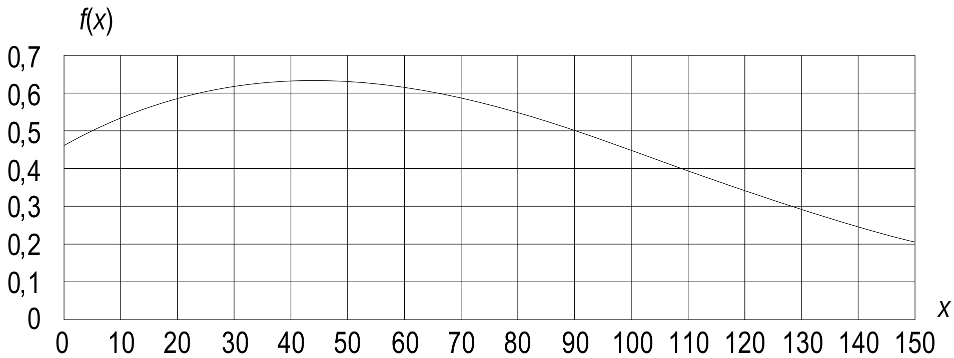


Рис. 5.9. Графік щільності розподілу ймовірностей при нормальному розподілі збитку

5.2. РОЗПОДІЛ ВИПЛАТ

Розподіл суми всіх виплат за портфелем X буде матиме назву складового (або складного), утвореного розподілом кількість виплат N і розміром можливих втрат Y у разі страхової події.

Нехай N_i описує розподіл страхових випадків для одного договору, а Y_i – розмір можливих втрат у разі страхової події. Тоді величина виплат X_i за даним договором є сумою випадкового числа випадкових доданків:

$$X_i = Y_i^1 + Y_i^2 + \ldots + Y_i^{N_i}, Y_i^j > 0, \tag{5.19}$$

де Y_i^j – розмір j-го за рахунком збитку.

Вище йшлося про розподіли кількості випадків і можливих втрат, а також зазначалося, що причини, які впливають на характер розподілів $F_{N_i}(x)$ і $F_{Y_i}(x)$, є різними. Таким чином, можна допустити, що випадкові величини N_i і Y_i є незалежними.

***Твердження* 1**. Середнє значення і дисперсія виплат для (2.8) дорівнюють відповідно

$$\begin{aligned} EX_i &= EN_i \cdot EY_i, \\ VarXi &= ENi \cdot VarY_i + VarN_i \cdot (EY_i)^2. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Сумарні виплати за портфелем X становлять випадкову величину такого самого типу, як (2.8). Різниця полягає в тому, що утворюють X інші випадкові величини (N – кількість позовів за портфелем і Y – розмір одиничного збитку) і їм відповідають свої числові характеристики.

5.3. ПОРІВНЯННЯ РИЗИКОВИХ СИТУАЦІЙ

Різноманітність понять ризику визначає і різноманітність форм та прийомів порівняння ризикових ситуацій. Охарактеризуємо деякі з них.

1. *Метод середніх величин.* При ньому порівняння ризикових ситуацій здійснюють, порівнюючи середньоочікувані значення втрат. Цей підхід до оцінювання ризику не можна назвати дуже вдалим, оскільки повністю ігнорується розкид можливих значень втрат, а це, як відомо, одна з головних характеристик ризику.

2. ***Ступінь ризику.*** Ступенем ризику називатимемо коефіцієнт варіації $W(X)$ виплат, які необхідно зробити за всіма страховими випадкамим, що відбулися за даним ризиком. Ризик заданий як (F_N, F_Y), отже, виплати за даним ризиком можна в загальному випадку записати як:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_N,\ X_i = N_i \cdot Y_i, \tag{5.21}$$

де i – номер вимоги про виплату (у порядку надходження);

Y_i – розмір i-ї вимоги про виплату $Y_i > 0$;

N_i – індикатор страхового випадку (виплата здійснюється, якщо страховий випадок відбувся і розмір виплати дорівнює втратам або реалізації випадкової величини Y на кроці i).

Звідси одержуємо вираз для ступеня ризику:

$$W(X) = \frac{\sigma X}{EX} = \frac{\sigma X}{\sum_i EX_i}. \tag{5.22}$$

Цей простий і доступний критерій застосовують для аналізу фінансової стійкості якого-небудь страхового портфеля. Зрозуміло, що перевищення значення ступеня ризику одиниці може служити деяким критерієм «ризиковості» даного портфеля, оскільки це означає, що розкид значень можливих виплат, що мають велику імовірність, перевищує середнє очікуване значення виплат.

Об’єднання кількох ризиків в один «страховий портфель» може зумовити зниження результуючого ступеня ризику (зазначимо, що ми говоримо тут про незалежні ризики). Окремі випадки розрахунку ступеня ризику будуть розглянуті нижче (у моделях індивідуального й колективного ризику).

3. ***Імовірність розорення.*** За своєю сутністю імовірність розорення не є характеристикою ризику і порівнювати ризики за ймовірністю розорення відповідно не можна. Для будь-якого ризику (F_N, F_Y), що піддається страхуванню, визначимо невипадкову величину U як розмір фонду страхового відшкодування за даним ризиком. Тоді величина $U - X$ характеризує те, на-скільки розрахований резерв U відповідає очікуваним відшкодуванням. Тут X – як і раніше – випадкова величина, що описує виплати за даним ризиком.

Нехай u_0 – власні засоби страховика, назвемо їх тут початковим резервом. Позначимо як:

$$\psi(u_0, U) = P(u_0 + U - X < 0) \quad (5.23)$$

і назвемо цю подію розоренням. Тоді $(\psi(u_0, U), F_X)$ – ризик розорення.

Розрізняють статистичні завдання оцінки ризику розорення і дина-мічні, де ризик розорення розглядається в часі.

Звичайно, на практиці неможливо точно обчислити ймовірність розорення $\psi(u_0, U)$. Проте існує деяка оцінка зверху для вірогідності розорення.

Твердження **2**. Нерівність Лундберга. Імовірність розорення як функція початкових резервів обмежена зверху:

$$\psi(u_0) \le e^{-Ru_0}, \quad (5.24)$$

де u_0 – початкові активи страховика;
R – поправочний коефіцієнт.

Перевага полягає в тому, що за великих значень u_0 апроксимація, що досягається, для імовірності розорення достатньо точна, крім того, нерівність є простою в застосуванні.

Поправочний коефіцієнт R нерівності Лундберга (5.24) знаходиться як єдине позитивне коріння рівняння:

$$Ee^{RX_i} = 1 + (1+\theta)EX_i \cdot R, \quad (5.25)$$

де $Ee^{RX_i} = \int_0^\infty e^{Rt} dF_{X_i}(t), \theta$ – надбавка безпеки;
EX_i – середнє очікуване значення виплат на один договір.

Позначимо через ε допустимий рівень імовірності розорення й отримаємо:

$$u_0 = \frac{EX_i^2 \ln \varepsilon}{2EX_i}. \quad (5.26)$$

Цю нерівність можна використовувати для оцінювання рівня початкових резервів, виходячи з допустимого рівня ймовірності розорення.

4. *Корисність страхування і корисність страхової діяльності.* У теорії ризику передбачається, що рішення, які приймаються в тих або інших ситуаціях, визначаються повністю або частково перевагами, що задаються на безлічі розподілів вірогідності величин можливого збитку (або доходу) ξ з урахуванням розподілу ймовірності випадку виникнення збитку (або доходу).

Корисність	1) якісна або порівняльна оцінка – перевага одного об'єкта порівняно з іншим; 2) кількісна оцінка у вигляді числа переваги.

У цілому, представлення корисності у вигляді числа є зручним кількісним виразом початкового якісного відношення переваги. Враховуючи цю подвійність, далі для відображення якісних характеристик використовуватиметься термін «перевага», а для кількісного представлення переваг – термін «корисність».

Основи сучасної теорії корисності були започатковані ще у XVIII сторіччі. Саме тоді кілька математиків, зацікавившись застосуванням теорії імовірності страхування, висунули принцип, відповідно до якого розсудлива людина, потрапивши в критичну ситуацію, що загрожує його добробуту, повинна поводитися так, щоб максимізувати розмір очікуваного багатства або грошового прибутку.

Сформулюємо таку гіпотезу.

Людина, вибираючи серед доступних їй ризикових або безризикових альтернатив поводиться так, ніби:

- дана альтернатива має стійкі переваги;
- для кожної з безризикових альтернатив переваги можуть бути виражені числовими величинами, які мають назву «корисність альтернативи»;
- мета людини – зробити очікувану корисність настільки великою, наскільки це можливо.

Нехай альтернативи споживача позначені як A, B, ...

Безліч безризикових альтернатив позначимо як χ, а безліч ризикових альтернатив– як μ. Відношення переваги альтернативи A до альтернативи B позначимо як $A \succ B$.

Дж. фон Нейман і О. Моргенштерн запропонували загальну формулу для гіпотези поведінки споживацької одиниці: особа робить вибір, керуючись деякою системою переваг, що має такі властивості:

а) *досконалість*. Це означає, що для будь-яких двох альтернатив A і B можна вказати, яка є більш переважною ($A \succ B$ чи $B \succ A$), або ж переваги непринципові $- A \sim B$, яку з них вибрати. Іншими словами, для особи, що вибирає, не існує альтернатив, які вона не могла б порівняти між собою або з іншими альтернативами;

б) *транзитивність* передбачає, що якщо для особи альтернатива A є більш переважною, ніж B, а B, у свою чергу, більш переважною, ніж C, то A є більш переважною, ніж C, тобто:

$$A \succ B, B \succ C \Rightarrow A \succ C. \qquad (5.27)$$

Ця властивість фактично виражає несуперечність оцінок;

в) *рефлексія.* Для особи будь-яка альтернатива не є переважною сама по собі – $A \succ A$;

г) *опуклість безлічі альтернатив щодо переваги.* Для будь-яких трьох альтернатив *A, B і C, якщо* $A \succ B \succ C$, *знайдуться такі числа α*, *β* > 0 і α + β = 1*, що* $\alpha A + \beta C \sim B$.

Для альтернатив, вважатимемо, що розподіл імовірності можливих доходів є відомим. Тоді можна вважати, що безліч μ є безліччю розподілів імовірності. Вважатимемо, що відношення переваги, визначене на ξ, породжує відношення переваги на μ, тобто виконані властивості а) – г). Хай альтернатива X задана як:

$$X = \begin{cases} x_1, x_2, \ldots, x_n, \\ p_1, p_2, \ldots, p_n. \end{cases} \qquad (5.28)$$

Кількісною оцінкою ризикової альтернативи назвемо величину очікуваної корисності, яка розраховується за формулою

$$U(X) = Eu(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i), \qquad (5.29)$$

де $u(x_i)$ – визначена вище корисність безризикової альтернативи (у даному випадку гарантованого доходу в розмірі x_i).

Нехай тепер певна особа має обирати між двома альтернативами.

Перша (A) не припускає ризику, її корисність дорівнює $a = u(A)$ (у разі вибору цієї альтернативи людина одержує надійний дохід a).

Друга альтернатива (X) припускає ризик, її очікувана корисність становить $U = U(X)$.

Нехай при цьому $a = EX$ – корисність надійного доходу дорівнює середньому значенню доходу від ризикової альтернативи. Якщо особа при цьому вибере *X,* тобто надасть перевагу ризиковій альтернативі, це свідчить схильність до ризику. Якщо буде обрано *A*, це свідчитиме про перевагу до визначеності.

***Твердження* 3**. Властивості функції корисності.

1. Якщо $u(x)$ – функція корисності, то $v(x) = au(x) + b$ також є функцією корисності, тобто функція корисності визначена з точністю до лінійного перетворення.
2. Функція корисності зростає зі зростанням доходу: $u'(x) > 0$. Першу похідну функції корисності називають «граничною корисністю». Тоді ця властивість означає, що гранична корисність є завжди позитивною.
3. Нерівність Йенсена. Якщо функція корисності на деякому інтервалі опукла вгору, що відповідає $u''(x) \le 0$, то:

$$U(X) \le u(EX). \tag{5.30}$$

Така функція корисності відповідає «неприйняттю ризику» (для значень доходів із указаного інтервалу).

Якщо ж функція корисності на деякому інтервалі опукла вниз, що відповідає $u''(x) \succ 0$, то:

$$U(X) \ge u(EX), \tag{5.31}$$

що відповідає «схильності до ризику» особи, яка використовує цю функцію корисності для значень доходів із указаного інтервалу.

Теорія прийняття рішень ґрунтується на припущенні про те, що вибір альтернатив повинен визначатися двома чинниками:

- уявленнями особи, що ухвалює рішення про ймовірність різних можливих результатів, які можуть мати місце при виборі того чи іншого варіанту рішення;
- перевагами, що надаються даною особою різним можливим результатам.

5. ***Корисність страхування***. Мотивування прийняття рішень потенційним страхувальником ґрунтується на таких економічних і психологічних передумовах:

- особа завжди прагне максимально задовольнити свої страхові інтереси за мінімальних фінансових витрат. При прийнятті рішення особа, звичайно, ретельно вивчає різні альтернативи задоволення (чи ні) своїх страхових інтересів;

- страхувальник діє більш-менш раціонально;
- за відсутності відповідної альтернативи людина вміє знаходити оптимальний у певному розумінні баланс між своїми бажаннями і можливостями їх задоволення з урахуванням наявності грошових коштів, якими вона має можливість оперувати для задоволення своїх страхових інтересів.

Таким чином, можна стверджувати, що страхувальник під час ухвалення рішень про вибір між різними альтернативами керується деякою системою переваг, на якій визначена функція корисності $u(X)$. Якщо страхувальник має ризик $A = (F_{N_j}, F_{Y_j})$, можна визначити «середню корисність ризику» аналогічно тому, як це було зроблено вище, за формулою

$$U(A) = Eu(A) = Eu(N_j \cdot Y_j). \qquad (5.32)$$

Ця величина може слугувати критерієм порівняння ризиків: ризик $B = (F_{N'_j}, F_{Y'_j})$ краще, ніж $C = (F_{N''_j}, F_{Y''_j})$, якщо $U(B) > U(C)$.

Якщо випадкова величина $X_j = N_j \cdot Y_j$ набуває значення $x_1, \ldots, x_n$ з імовірністю $p_1, \ldots, p_n$, то як критерій порівняння ризиків (5.32) приймається величина, яку можна розрахувати за такою формулою

$$U(A) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) p_i \ . \qquad (5.33)$$

Страхувальник має кілька альтернатив: звернутися до страхової компанії й купити страховий захист від впливу ризику A або ж залишатися під його впливом, сповідаючись, що реалізація цього ризику істотно не зашкодить його благополуччю.

Оцінимо благополуччя страхувальника деякою величиною K, яку назвемо первісним капіталом страхувальника.

У першому випадку страхувальник несе детерміновані втрати p, що дорівнюють ціні поліса. Корисність цього кроку становить $u(K - p)$. У другому випадку втрати людини є випадковими і, отже, їх корисність оцінюється за формулою (5.32) $U(K - X_j) = Eu(K - X_j)$.

Порівнюючи ці величини, страхувальник ухвалює рішення про страхування. Одночасно страховик за цією інформацією може оцінити максимальну ціну, яку готовий заплатити потенційний страхувальник за захист від свого ризику. Позначимо як $G_{\max}$ максимальну ціну, яку готовий заплатити страхувальник за повний страховий захист від даного ризику. Тоді, користуючись нерівністю Йенсена, для різних страхувальників можна оцінити $G_{\max}$ як:

- $G_{\max} \geq EX_j$, $u''(x) > 0$ у разі неприйняття особою ризику;
- $G_{\max} \leq EX_j$, $u''(x) < 0$ у разі прийняття особою ризику.

Ризикову ситуацію страховика ми визначали вище (імовірність розорення) як $A = (\psi(u_0, U), F_X)$. Наведені вище критерії можна застосовувати і для порівняння ризиків страхової компанії. Інакше кажучи, ми припускаємо, що страхова компанія має систему «переваг», що зумовлюються безліччю майбутніх доходів (втрат), пов'язаних з наявними ризиками, і ця система переваг задовольняє системі аксіом існування функції корисності.

Розглянемо як критерій порівняння ризиків критерій середньої очікуваної корисності і наведемо кілька прикладів.

Дохід компанії описується випадковою величиною $Y = u_0 + U - X$, де X, як і раніше, випадкові виплати з розподілом $F_X(x)$, а U – резервом, розрахованим як забезпечення виплат.

Тоді розподіл доходу визначається за формулою

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(u_0 + U - X \leq x) = P(X \geq u_0 + U - x) = \\ &= 1 - F_X(u_0 + U - x),\ F_Y(0) = \psi(u_0, U). \end{aligned} \tag{5.34}$$

6. *Функція «сумління».* Однією з найбільш узагальнених відомих моделей порівняння ризиків, запропонованих у 1982 році П. Фішберном і ін., є модель «очікуваного сумління». Авторами визначена так звана «функція сумління» – $r(y_1, y_2)$, функція порівняльної корисності детермінованих втрат y_1 і y_2.

Визначається функція таким чином.

Нехай певна особа має вибирати між двома ситуаціями, що мають ризикову природу. Припустимо, що вибраний варіант після реалізації ризику набуває значення y_1, а невибраний реалізується в y_2. Тоді $r(y_1, y_2)$ характеризує «сумління» даного індивідуума в тому випадку, якщо y_1 виявився більше, ніж y_2. Далі, для пари розподілів $P_1 = p_1, \ldots, p_n$ і $P_2 = q_1, \ldots, q_n$ на множині $y_1, \ldots, y_n$ визначається вираз для середнього очікуваного сумління

$$\sum_{i,j} r(y_i, y_j) p_i q_j. \tag{5.35}$$

Розподіл P_1 вважається «гіршим» ніж P_2, якщо середнє очікуване «сумління» позитивне. Якщо цей вираз дорівнює нулю, то ризики не мають значення.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Охарактеризуйте рівномірний розподіл випадкової величини та його числові характеристики.
2. Охарактеризуйте експоненційний розподіл випадкової величини та його числові характеристики.
3. Охарактеризуйте розподіл Парето та його числові характеристики.
4. Що таке гамма-розподіл? Які його числові характеристики?
5. Дайте визначення бета-розподілу. Які його числові характеристики?
6. Що таке квадратичний розподіл випадкової величини? Які його числові характеристики?
7. Назвіть види методів порівняння ризикових ситуацій.
8. У чому полягає метод середніх величин при порівняні ризикових ситуацій?
9. Дайте визначення поняття “ступінь ризику”.
10. Що таке імовірність розорення?
11. Дайте визначення терміна «корисність» та охарактеризуйте його.
12. Дайте визначення поняття корисності страхування та корисності страхової діяльності.
13. Охарактеризуйте функцію корисності.
14. Які властивості функції корисності?
15. Охарактеризуйте функцію сумління.

ТЕСТИ

1. Формули щільності і функції розподілу витрат $f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, $F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ характеризують:
   а) розподіл Парето;
   б) нормальний розподіл;
   в) рівномірний розподіл;
   г) гамма-розподіл;
   д) експоненціальний розподіл;
   е) бета-розподіл;
   ж) квадратичний розподіл.

2. Формули щільності і функції розподілу витрат $f_Y(x) = \frac{\alpha}{\lambda}(\frac{\lambda}{\lambda + x})^{\alpha+1}$, $x > 0$; $F_Y(x) = 1 - (\frac{\lambda}{\lambda + x})^{\alpha}$ характеризують:
   а) гамма-розподіл;

б) бета-розподіл;
в) експоненціальний розподіл;
г) нормальний розподіл;
д) рівномірний розподіл;
е) квадратичний розподіл;
ж) розподіл Парето.

3. Формули щільності і функції розподілу витрат $f_Y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0, F_Y(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt$ характеризують:
   а) гамма-розподіл;
   б) нормальний розподіл;
   в) експоненціальний розподіл;
   г) квадратичний розподіл;
   д) розподіл Парето;
   е) рівномірний розподіл;
   ж) бета-розподіл.

4. Середнє значення і дисперсія, що описуються формулами $EY = \frac{a}{15} + \frac{b}{8} + \frac{c}{4}, VarY = \frac{a}{18} + \frac{b}{10} + \frac{c}{4}$, характерні для:
   а) рівномірного розподілу;
   б) бета-розподілу;
   в) розподілу Парето;
   г) експоненційного розподілу;
   д) гамма-розподілу;
   е) квадратичного розподілу;
   ж) нормального розподілу.

5. Середнє значення і дисперсія, що описуються формулами $EY = \frac{1}{\lambda}, VarY = \frac{1}{\lambda^2}$, характерні для:
   а) квадратичного розподілу;
   б) гамма-розподілу;
   в) нормального розподілу;
   г) експоненційного розподілу;
   д) розподілу Парето;
   е) бета-розподілу;
   ж) рівномірного розподілу.

6. До методів порівняння ризикових ситуацій належать:
   а) імовірність розорення;
   б) корисність страхової діяльності;
   в) ступінь ризику;
   г) метод відносних величин;
   д) функція «сумління».

7. Імовірність розорення як функція початкових резервів обмежена зверху:
   а) нерівністю Лундберга;
   б) нерівністю Неймана;
   в) нерівністю Йенсена.

8. Коефіцієнтом варіації виплат $W(X)$, які необхідно буде зробити за всіма страховими випадками, що відбулися за даним ризиком, є:
   а) імовірність розорення;
   б) корисність страхової діяльності;
   в) ступінь ризику.

9. Вибір деякої системи переваг, яка має такі властивості:
   а) досконалість – будь-яка альтернатива не є переважною сама по собі;
   б) транзитивність – не існує альтернатив, які можна було порівняти між собою або з іншими альтернативами;
   в) рефлексія, тобто несуперечність оцінок людини.

10. Мотивування прийняття рішень потенційним страхувальником ґрунтується на таких економічних і психологічних передумовах:
   а) за відсутності відповідної альтернативи особа вміє знаходити оптимальний у певному розумінні баланс між своїми бажаннями і можливостями їх задоволення з урахуванням наявності грошових коштів, які вона має для задоволення своїх страхових інтересів;
   б) особа завжди прагне максимально задовольнити свої страхові інтереси за мінімальних фінансових витрат;
   в) страхувальник діє більш-менш раціонально;
   г) страхувальник в ухваленні рішень про вибір між різними альтернативами керується деякою системою переваг.

Тема 6. МОДЕЛЬ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ПОЗОВІВ

6.1. ОДНОРІДНИЙ ПОРТФЕЛЬ

Страховий портфель. Ознаки і параметри страхового портфеля. Однорідний страховий портфель. Коефіцієнт однорідності. Критерій однорідності

6.2. ОСНОВНІ ПРИПУЩЕННЯ МОДЕЛІ

Позначення, визначення і основні функції моделі

6.3. ФОРМАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ПОЗОВІВ (ІНДИВІДУАЛЬНОГО РИЗИКУ)

Велика кількість договорів у портфелі, що складається з однакових ризиків. Невелика кількість договорів у портфелі, що складаються з однакових ризиків. Портфель, неоднорідний за втратами. Неоднорідні за ймовірністю страхового випадку або за втратами

6.1. ОДНОРІДНИЙ ПОРТФЕЛЬ

Страховий портфель – сукупність застрахованих ризиків, об’єднаних з метою мінімізації.

Кожна така сукупність характеризується ознаками і відповідними їм параметрами:

- кількість об’єктів у сукупності (зручніше говорити про кількість договорів, що потрапили в дану сукупність);
- максимальна величина ймовірного збитку (якщо вона визначена);
- розподіли вимог і втрат, що характеризують ризики, які ввійшли до складу даної сукупності, і пов’язані з ними числові характеристики;
- характеристики залежності ризиків, що ввійшли до складу сукупності;
- числові характеристики загальної сукупності.

Спершу розглянемо стаціонарний портфель, тобто таку сукупність договорів, для якої зберігається рівновага між «притоком» і «відтоком» договорів.

Однорідний портфель. Далі застосовуватимемо термін «однорідний» портфель, вважаючи, що всі ризики цього портфеля є однаковими, тобто заданими як (F_N, F_{X_1}) або ж що даний портфель об’єднує кілька груп однакових ризиків. Це об’єднання принаймні не підвищує незбалансованість груп ризиків, які розглядаються окремо. На практиці, термін “однорідність” портфеля використовують, коли оцінюють у той або інший спосіб збалансованість даної сукупності. Найбільш поширеними завдяки простоті є так званий «коефіцієнт однорідності», що розраховується як відношення максимальної страхової суми даної сукупності до середньої страхової суми, і «критерій однорідності», який показує, що однорідним є той портфель, для якого відхилення страхових сум від середньої не перевершує 2.

Для формування однорідних портфелів виконують так зване «вирівнювання ризику», страховик поділяє ризик із страхувальником або перестрахувальником. Далі ми розглянемо те, як це виглядає з формальної точки зору.

Даний підхід застосовуємо для визначення теоретичних розмірів фондів страхових зобов’язань і премій. Як визначальний критерій однорідності портфеля розглядатимемо коефіцієнт варіації виплат за даним портфелем (ступінь ризику) і, крім того, розраховуватимемо значення «коефіцієнта однорідності» і «критерію однорідності» там, де це буде можливо.

***Приклад* 6.1**. Нехай портфель договорів складається з договорів двох типів. Втрати за одним договором першого типу описує випадкова величина Y, що приймає значення 8, 4 і 1 з імовірністю 1/16, 3/16, 3/4 відповідно:

$$Y_1 = \begin{cases} 8, \dfrac{1}{16} \\ 4, \dfrac{3}{16} \\ 1, \dfrac{3}{4} \end{cases} \text{ числові характеристики } Y: \begin{cases} EY_1 = 2 \\ EY_1^2 = 12\dfrac{3}{4} \\ VarY_1 = 10\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Втрати для договорів другого типу рівномірно розподілені на відрізку від 0 до 8. Страхова подія виникає з однаковою ймовірністю для всіх договорів даного портфеля, і ця ймовірність ця дорівнює 0,05. Для простоти припустимо, що договорів обох типів у портфелі порівну, припустимо, по 10. Тоді числові характеристики для тієї частини портфеля, що складається з договорів першого типу:

$$E_1 = n \cdot EX_1 = 10qEY_1 = 1,$$

$$V_1 = n \cdot VarX_1 = 10q(EY_1^2 - q(EY_1)^2) = 6{,}275,$$

$$W_1 = W(X^{(1)}) = \frac{\sqrt{V_1}}{E_1} \approx 2{,}05.$$

Для договорів другого типу числові характеристики визначаються за формулою

$$E_2 = n \cdot EX_2 = 10qEY_2 = 2,$$

$$V_2 = n \cdot VarX_2 = 10q(EY_2^2 - q(EY_2)^2) \approx 10{,}27,$$

$$W_2 = W(X^{(2)}) = \frac{\sqrt{V_2}}{E_2} \approx 1{,}6.$$

Ступінь ризику для портфеля оцінюється як:

$$E = E_1 + E_2 = 3,$$

$$V = V_1 + V_2 \approx 16{,}545,$$

$$W = W(X) = \frac{\sqrt{V}}{E} \approx 1{,}3559.$$

Величини $X^{(1)}$ і $X^{(2)}$ є випадковими, що описують виплати за першою і другою частинами портфеля відповідно. Як бачимо, при об'єднанні двох груп договорів в один портфель ступінь ризику W результуючого портфеля став меншим, ніж ступені ризику W_1 і W_2 для кожної з частин. Це свідчить про те, що результуючий портфель краще збалансований, ніж кожна з груп договорів, які розглядаються окремо. Але зрозуміло, що це поліпшення досягається за рахунок договорів другої групи. Це необхідно враховувати при обчисленні тарифів. Зауважимо, що в цьому випадку тарифи для договорів різних груп даного портфеля повинні бути різними, інакше менш вигідний ризик (перший) по розрахунках оплачуватиметься за рахунок другого. Це зробить розрахований тариф привабливішим для клієнтів, які мають ризик першого типу, що зрештою може призвести до перевищень виплат. Як уже зазначалося, у межах статичних моделей об'єкти, що вивчаються, розглядаються без урахування часової залежності. Таким чином, статична модель описує стан об'єктів, що вивчаються, в одиничному інтервалі часу.

6.2. ОСНОВНІ ПРИПУЩЕННЯ МОДЕЛІ

Наведемо найпростішу, у деякому розумінні типову, модель.

Розглянемо портфель договорів страхування, що мають однакову часову тривалість (що дорівнює одиниці часу), укладені у момент часу 0 і завершуються не пізніше моменту часу 1. Усі договори портфеля належать однієї страховій події. Нехай:

- кількість договорів у даному портфелі фіксоване і невипадкове;
- ризики клієнтів є незалежними між собою;
- плата за страховку вноситься страхувальником повністю на початку аналізованого періоду (у момент 0) і жодних додаткових надходжень від страхувальників протягом періоду часу до 1 немає;
- розподіл втрат для всіх договорів портфеля є однаковим;
- розмір вимоги в разі страхової події виплачується повністю і відразу після подання позову (до моменту 1).

У межах даної моделі вивчається стан активів страхової компанії до моменту завершення дії договорів, основне ж завдання полягає в розрахунку фонду страхового відшкодування, що забезпечує фінансову стійкість, і, отже, у визначенні страхового внеску за таким ризиком.

Позначення, визначення і використовувані функції. Для побудови моделі введемо такі позначення:

n – кількість договорів у портфелі;
j – номер договору (індекс клієнта);
q – імовірність страхової події для одного клієнта;

$N_j = \begin{cases} 1 & q, \\ 0 & 1-q; \end{cases}$ – індикатор страхової події для j клієнта;

$N = \sum_{j=1}^{n} N_j$ – загальна кількість вимог до моменту 1 за даним портфелем;

Y_j – можливі втрати одного клієнта;

$F_{Y\,j}$ – функція розподілу втрат для одного клієнта. Якщо існує щільність розподілу втрат, то позначимо її як $f_{Y\,j}$. Втрати однаково розподілені для всіх клієнтів портфеля, тому індекс клієнта j' у випадкової величини Y_j можна замінити, припустимо, 1.

X_j – виплати на одного клієнта ($X_j = N_j \cdot Y_j$;);

$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ – сумарні виплати до моменту 1 за даним портфелем;

γ – рівень надійності виконання зобов'язань страхової компанії по виплатах;

U – розмір фонду відшкодувань, який з надійністю γ забезпечує виплати за всіма вимогами для даного портфеля.

Таким чином, договори портфеля мають ризик $(F_{N\,j}, F_{Y\,j})$.

Сумарний ризик компанії за даним портфелем, відповідно, становить (F_N, F_Y).

6.3. ФОРМАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ ІНДИВІДУАЛЬНОГО РИЗИКУ

Розділимо розгляд моделі на чотири частини, що передбачають відмінності в підходах до побудови моделі, а загальну схему розгляду представимо такими кроками:

- обмеження, що обумовлюють даний випадок;
- розрахунок резерву страхових виплат;
- збалансованість.

Кількість договорів в портфелі велика. Портфель містить однакові ризики. Виконання страховою компанією своїх зобов'язань за вимогами про виплату з надійністю γ формально можна записати як

$$P(U - X \geq 0) = \gamma. \quad (6.1)$$

Тоді, якщо число договорів у портфелі багато, можна застосувати центральну граничну теорему для оцінки U.

$$P(X \le U) = P\left(\frac{X - EX}{\sigma X} \le \frac{U - EX}{\sigma X}\right) \to \int_{-\infty}^{\alpha(\gamma)} \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} dx = \gamma, \quad (6.2)$$

де $\alpha(\gamma)$ – відповідна γ квантіль стандартного нормального розподілу із середнім 0 і дисперсією 1;

EX – середні очікувані виплати за всім портфелем договорів;

σX – середньоквадратичне відхилення цих виплат.

Як і раніше, припустимо, що випадкові величини N і Y є незалежними. Тоді для розрахунку числових характеристик сумарних виплат можна скористатися результатом (6.2) і записати:

$$\begin{aligned}
&EX = EN \cdot EY_1 = E(\sum_{j=1}^{n} N_j) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) = nq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t),\\
&VarX = VarN \cdot (EY_1)^2 + VarY_1 \cdot EN =\\
&= nq(1-q) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t)\right)^2 + nq \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dF_{Y_1}(t) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t)\right)\right),\\
&\sigma X = \sqrt{VarX}.
\end{aligned} \quad (6.3)$$

Отже, резервний фонд, необхідний для покриття відшкодувань можна розрахувати як:

$$\frac{U - EX}{\sigma X} = \alpha(\gamma) \Rightarrow U = \alpha(\gamma)\sigma X + EX = L + EX. \quad (6.4)$$

Величину L називають фондом сумарного страхового навантаження. Слід зазначити, що умови застосування центральної граничної теореми в цьому випадку дотримані, а саме, випадкові величини X є незалежними й однаково розподіленими. Зазначимо, що справедливою є така оцінка похибки апроксимації нормальним розподілом:

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{X - EX}{\sigma X} \le x\right\} - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{1/t^2} dt \right| \le$$

$$\le \begin{cases} 0{,}7975 \dfrac{E|X_1|^3}{(VarX_1)^{3/2}\sqrt{n}}, & \text{якщо } X_i \text{ однаково розподілені},\\[2ex] \dfrac{33}{4} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} E|X_1|^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} VarX_1\right)^{3/2}}, & \text{якщо } X_i \text{ неоднаково розподілені}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Коефіцієнт варіації (ступінь ризику) у цьому випадку можна розрахувати як

$$W(X)=\frac{\sigma X}{EX}=\left(\frac{nq(1-q)\left(EY_1\right)^2+nqEY_1^2-nq\left(EY_1\right)^2}{n^2q^2\left(EY_1\right)^2}\right)^{1/2}=$$
$$=\left(\frac{q\left(EY_1\right)^2+EY_1^2}{nq\left(EY_1\right)^2}\right)^{1/2}=\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{EY_1^2}{q(EY_1)^2}\right)\right]^{1/2}=\left(\frac{1}{n}(1+A)\right)^{1/2}, \tag{6.6}$$

де як A ми позначили число $\frac{EY_1^2}{q(EY_1)^2}$, яке не залежить від об'єму портфеля n і характеризує ризик одного договору. Як бачимо, ступінь ризику портфеля спадає як $1/\sqrt{n}$ і зростає пропорційно (A + 1).

***Приклад* 6.2**. Нехай портфель складається із 40 незалежних договорів, втрати за кожним мають експоненціальний розподіл із середнім $\frac{1}{\lambda}=2$, а імовірність настання страхового випадку однакова для всіх договорів портфеля й дорівнює 0,04. Необхідна надійність забезпечення виплат y = 0,95. Тоді числові характеристики для втрат на один договір

$$EY_1=2, EY_1^2=\frac{2}{\lambda^2}=8,$$
$$VarY_1=EY_1^2-\left(EY_1\right)^2=4.$$

Отже, для числових характеристик загальних виплат можна записати

$$EX=nqEY_1=40\cdot 0{,}04\cdot 2=3{,}2;$$
$$VarX=nq(1-q)\left(EY_1\right)^2+nq\left(EY_1^2-\left(EY_1\right)^2\right)=40\cdot 0{,}04\cdot 0{,}96\cdot 4+$$
$$+40\cdot 0{,}04\cdot 4=7{,}936;$$
$$\sigma X=\sqrt{VarX}\approx 2{,}82.$$

Розмір страхового резерву, який з імовірністю γ забезпечить усі виплати, дорівнює

U = 1,645 · 2,82 + 3,2 = 7,8389.

Похибку гаусівського наближення можна розрахувати за формулою (6.5). Для цього необхідно розрахувати третій момент для величини X.

$$EX_1^3=EN_j^3\cdot EY_1^3=q\cdot\int_0^\infty x^3\lambda e^{-\lambda x}dx=q\frac{6}{\lambda^3}=0{,}04\cdot 48=1{,}92.$$

Тоді похибка апроксимації нормальним розподілом у цьому випадку оцінюється зверху числом

$$0{,}797\,5\frac{E|X_1|^3}{(VarX_1)^{3/2}\sqrt{n}}=0{,}797\,5\frac{1{,}92}{64\cdot\sqrt{40}}\approx 0{,}004\,8.$$

Ступінь ризику в цьому випадку можна розрахувати як

$$WX=\frac{\sigma X}{EX}=\left(\frac{VarX}{(EX)^2}\right)^{1/2}=0{,}775<1,$$

що свідчить про те, що даний портфель є більш-менш добре збалансованим.

Кількість договорів у портфелі незначна, але портфель, як і раніше, складається з однакових ризиків.

У цьому випадку використання центральної граничної теореми не дає надійного результату, оскільки різницею між інтегралом і ймовірністю, що стоять у правій і лівій частинах рівняння (6.7), нехтувати не можна. Проте, цей випадок не складніший за попередній, бо, скориставшись тим, що кількість вимог про виплату має біноміальний закон розподілу ймовірності, а саме

$$p_k=P(N=k)=C_n^k q^k(1-q)^{n-k}, \tag{6.7}$$

можна оцінити з надійністю γ максимальну кількість позовів s^*

$$s^*:\ s^*=\min_s\left\{\sum_{k=0}^{s}p_k\geq\gamma\right\} \tag{6.8}$$

які можуть надійти за всіма договорами даного портфеля.

Далі для розподілу загальних виплат можна записати

$$\begin{aligned}&P(X\leq x)=P(Y_1\leq x\mid N=1)P(N=1)+P(Y_1+Y_2\leq x\mid N=2)P(N=2)\\&+\ldots=\sum_{k=1}^{s^*}P(Y_1+Y_2+\ldots+Y_k\mid N=k)P(N=k)+P(N>s^*)P\left(\sum_{k=1}^{\infty}Y_k\leq x\right)\\&=\sum_{k=1}^{s^*}P(Y_1+Y_2+\ldots+Y_k\mid N=k)P(N=k)P(N=k)+(1-\gamma)\left(\sum_{k=1}^{\infty}Y_k\leq x\right).\end{aligned} \tag{6.9}$$

Другий доданок є малим і ним можна знехтувати. Звідси випливає, що достатньо розрахувати розподіл виплат по s^* позовах. Таким чином, із заданим порогом надійності оцінюється розмір резервного фонду, що забезпечує виплати за позовами.

***Приклад* 6.3**. Нехай портфель складається з 20 незалежних договорів страхування, втрати за якими в результаті страхової події можуть становити суми 1, 3 і 4 умовних одиниці грошей з імовірностями 0,7; 0,2 і 0,1 відповідно. Страхова подія відбувається з однаковою ймовірністю 0,03 для всіх договорів даного портфеля. Надійність забезпечення страхових виплат $\gamma = 0{,}97$. Числові характеристики для втрат дорівнюють

$$EY_1 = 1{,}7;\ EY_1^2 = 4{,}1;$$

$$VarY_1 = EY_1^2 - (EY_1)^2 = 1{,}21;$$

$$A = \frac{EY_1^2}{q(EY_1)^2} \approx 47{,}3.$$

Кількість позовів у цьому випадку має біноміальний закон розподілу імовірності

$$N = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 20 \\ 0{,}544 & 0{,}336 & 0{,}099 & 0{,}018 & 0{,}002 & \ldots & \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4	...
$P(N \le k)$	0,544	0,88	0,979	0,997	0,999	...

Таким чином, максимальна кількість вимог (у значенні надійності забезпечення виплат) дорівнює $s^* = 2$. Отже, залишилося розрахувати двовимірну згортку розподілу Y_1 із собою.

$Y_1 + Y_2$ може приймати значення 2, 4, ..., 8 з деякою ймовірністю

$$Y_1 + Y_2 = \begin{cases} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{cases}.$$

Щоб знайти ймовірність $p_k = P(Y_1 + Y_2 = k)$, складемо дві таблиці таким чином

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0{,}7 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}14 & 0{,}07 \\ 0{,}14 & 0{,}04 & 0{,}02 \\ 0{,}07 & 0{,}02 & 0{,}01 \end{pmatrix} \end{array}, B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матриця A має на перетині рядка j і стовпця i $P(Y_1 = j)$ і $P(Y_2 = i)$, а матриця B – суму відповідних $Y_1 + Y_2$. Тепер для розрахунку $p_k = P(Y_1 + Y_2 = k)$ залишилося скласти ті елементи матриці A, для яких відповідні елементи матриці B дорівнюють k. Наприклад, $p_4 = P(Y_1 + Y_2 = 4) = A_{12} + A_{21}$ $p_4 = P(Y_1 + Y_2 = 4) = A_{12} + A_{21}$ і т. д. У результаті одержуємо розподіл суми

$$Y_1+Y_2=\begin{cases} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0{,}49 & 0{,}28 & 0{,}14 & 0{,}04 & 0{,}04 & 0{,}01 \end{cases}.$$

Тепер можна скласти таблицю залежності ймовірності нерозорення від обсягу засобів U

U	2	4	5	6	7	8
$P(Y_1+Y_2\le U)$	0,49	0,77	0,91	0,95	0,99	1

.

Ступінь ризику розраховується як

$$WX=\left(\frac{1}{n}(1+A)\right)^{1/2}\approx 1.55>1,$$

що свідчить про незадовільну фінансову стійкість даного портфеля.

Портфель неоднорідний за втратами. Страхова подія має однакову частоту для всіх договорів даного портфеля (мається на увазі, що всі договори індивідуального ризику), але втрати клієнта в разі страхової події описуються різними законами розподілу ймовірностей F_{Y_j}. Цей випадок практично буквально повторює розглянуті ситуації для відповідних обсягів портфелів. Різниця полягає в розрахунку числових характеристик

$$\begin{aligned} &EX_j=EN_j\cdot EY_j=qEY_j,\\ &EX=q\sum_{j=1}^{n}EY_j,\\ &VarX_j=\sum_{j=1}^{n}Var\left(N_j\cdot Y_j\right)=nq(1-q)\sum_{j=1}^{n}\left(EY_j\right)^2+q\sum_{j=1}^{n}VarY_j, \end{aligned} \qquad (6.10)$$

для застосування центральної граничної теореми в першому випадку і розрахунку згорток розподілів

$$g_Y(t)=g_{Y_1}(t)\cdot g_{Y_2}(t)\cdot\ldots\cdot g_{Y_n}(t) \qquad (6.11)$$

у другому випадку. Звичайно, і розрахунок числових характеристик і розрахунок згортком у цьому випадку є трудомістким заняттям. У реальності таких подій, не буває а отже, великих досконало різнорідних за втратами і при цьому однакових за частотою відповідних даним подіям портфелів бути не може. Тобто портфель може складатися з двох-трьох груп договорів, що мають різні між собою, але однакові всередині групи розподіли втрат, а це істотно спростить обчислення. Можна поставити питання про розподіл даного портфеля на підпортфелі договорів з однаковим ризиком, але це не дуже коректно з погляду збільшення ступеня ризику.

Договори неоднорідні за ймовірністю страхового випадку або за втратами. У цьому випадку застосовується процедура рандомізації, яку позицію теорії можна пояснити так:

Нехай $F_\theta(x)$ – функція розподілу ймовірності, що залежить від пара-метра θ, і u – деяка щільність розподілу ймовірності. Тоді

$$W(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_\theta(x)u(\theta)d\theta, \qquad (6.12)$$

функція x, що монотонно зростає від 0 до 1 і, отже, функція розподілу.

Якщо $F_\theta(x)$ має безперервну щільність $f(\theta, x)$, то і $W(x)$ має безперервну щільність $w(x)$, що дорівнює:

$$W(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta,x)u(\theta)d\theta. \qquad (6.13)$$

Замість інтегрування відносно щільності u можна підсумовувати стосовно дискретного розподілу ймовірності: якщо θ_1, θ_2, … вибрані довільно і якщо $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$, то

$$w(x)=\sum_k f(x,\theta)p_k, \qquad (6.14)$$

визначає нову щільність імовірності. Процес може бути описаний імовірністю як рандомізація; параметр θ розглядається як випадкова величина і новий розподіл імовірності визначається в (x, θ) площині, яка слугує вибірковим простором. Ці щільності називають сумішами.

У нашому випадку ризики всередині портфеля є неоднорідними за ймовірність страхової події, але можна говорити про те, що, як і раніше, розподіл позовів має біноміальний закон, а вірогідність страхової події q не постійна, а є деякою випадковою величиною з розподілом $U_q(x) = P(q \leq x)$. Тоді безумовний розподіл позовів становить

$$P(N=k)=E_qN(q)=\int_0^{+\infty}N(q)dU(q)=\int_0^{+\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}q^k(1-q)^{n-k}dU(q). \qquad (6.15)$$

У простому випадку можна вважати, що початковий портфель складається з кількох груп договорів, таких, що всередині кожної групи ймовірність страхової події є постійною.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте визначення поняття «страховий портфель».
2. Дайте визначення поняття «Однорідний портфель».
3. Які припущення приймаються в моделі індивідуального ризику?
4. Як відбувається формалізація моделі за умови великої кількості договорів у портфелі?
5. Охарактеризуйте формалізацію моделі за малої кількості договорів у портфелі.
6. Як здійснюється формалізація моделі, якщо портфель однорідний за втратами?
7. Як здійснюється формалізація моделі за умови, що договори неоднорідні за ймовірністю страхового випадку або за втратами?

ТЕСТИ

1. Страховий портфель характеризується такими ознаками:
   а) мінімальна величина ймовірного збитку;
   б) характеристики залежності ризиків, що ввійшли до сукупності;
   в) максимальна величина ймовірно збитку;
   г) розподіли вимог і втрат, що характеризують ризики, які увійшли до складу даної сукупності, і пов’язані з ними числові характеристики;
   д) кількість об’єктів у сукупності.

2. Укажіть правильну відповідь:
   а) страховий портфель – сукупність застрахованих ризиків, об’єднаних з метою мінімізації;
   б) стаціонарний портфель – страховик поділяє ризик із страхувальником або перестрахувальником;
   в) однорідний портфель – сукупність договорів, для якої зберігається рівновага між «притоком» і «відтоком» договорів;
   г) вирівнювання ризику – об’єднання кількох груп однакових ризиків, причому це об’єднання, принаймні, не підвищує незбалансованість груп ризиків, що розглядаються окремо.

3. Укажіть правильну відповідь:
   а) коефіцієнтом однорідності є ступінь ризику;
   б) критерій однорідності передбачає, що однорідним є той портфель, для якого відхилення страхових сум від середньої не перевершує 2;
   в) коефіцієнтом варіації є відношення максимальної страхової суми даної сукупності до середньої страхової суми.

4. Формалізація моделі індивідуального ризику – це:
   а) розрахунок резерву страхових виплат;
   б) обмеження, що обумовлюють даний випадок;
   в) збалансованість.

5. За допомогою співвідношення $P(U - X \geq 0) = \gamma$ можна записати:
   а) необхідний для покриття відшкодувань резервний фонд;
   б) оптимальна кількість договорів у портфелі;
   в) виконання страховою компанією своїх зобов'язань за вимогами про виплату з певною надійністю.

6. Наведене співвідношення відображає
   $$P(N = k) = E_q N(q) = \int_0^{+\infty} N(q) dU(q) = \int_0^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} q^k (1-q)^{n-k} dU(q):$$
   а) імовірність страхової події за нормальним законом;
   б) безумовний розподіл позовів за нормальним законом;
   в) імовірність страхової події за біноміальним законом;
   г) безумовний розподіл позовів за біноміальним законом.

7. Числовим характеристикам $EX_j = EN_j \cdot EY_j = qEY_j$,
   $$EX = q\sum_{j=1}^{n} EY_j, \;\; VarX_j = \sum_{j=1}^{n} Var\left(N_j \cdot Y_j\right) = nq(1-q)\sum_{j=1}^{n}\left(EY_j\right)^2 + q\sum_{j=1}^{n} VarY_j$$
   відповідає твердження, що:
   а) договори неоднорідні за ймовірністю страхового випадку або за втратами;
   б) кількість договорів у портфелі є невеликим, але портфель складається з однакових ризиків;
   в) портфель неоднорідний за втратами.

8. Співвідношення оцінки похибки:

$$\sup_x \left| P\left\{ \frac{X - EX}{\sigma X} \le x \right\} - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{1/t^2} dt \right| \le$$

$$\begin{cases} 0{,}797\,5 \dfrac{E|X_1|^3}{(VarX_1)^{3/2}\sqrt{n}}, \text{якщо } X_i \text{ однаково розподілені} \\ \dfrac{33}{4} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} E|X_1|^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} VarX_1\right)^{3/2}}, \text{якщо } X_i \text{ неоднаково розподілені} \end{cases}$$

а) правильне;
б) неправильне.

9. Співвідношення $\dfrac{U - EX}{\sigma X} = \alpha(\gamma) \Rightarrow U = \alpha(\gamma)\sigma X + EX = L + EX$ описує:
а) необхідний для покриття відшкодувань резервний фонд;
б) виконання страховою компанією своїх зобов’язань за вимогами про виплату з певною надійністю;
в) оптимальну кількість договорів у портфелі.

10. Визначити правильне твердження:
а) при об’єднанні двох груп договорів в один портфель ступінь ризику W результуючого портфеля менша, ніж ступені ризику W_1 і W_2 для кожної зі складових;
б) при об’єднанні двох груп договорів в один портфель ступінь ризику W результуючого портфеля більший, ніж ступені ризику W_1 і W_2 для кожної з частин;
в) при об’єднанні двох груп договорів в один портфель ступінь ризику W результуючого портфеля менша, ніж ступінь ризику W_1 для однієї з частин.

Тема 7. МОДЕЛЬ КОЛЕКТИВНИХ ПОЗОВІВ

7.1. ПРИПУЩЕННЯ МОДЕЛІ

Основні припущення моделі. Позначення, визначення, функції, що використовуються в моделі. Ряд Тейлора. Перша і друга похідна

7.2. ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ КОМПАНІЄЮ СВОЇХ ЗОБОВ'ЯЗАНЬ ЗА ПОРТФЕЛЕМ ДОГОВОРІВ МАЙНОВОГО СТРАХУВАННЯ

Імовірність виконання страховою компанією своїх зобов'язань. Початковий резерв. Гаусівське (нормальне) наближення. Центральна гранична теорема

7.3. ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ НЕРОЗОРЕННЯ В БУДЬ-ЯКИЙ МОМЕНТ ВИСУНЕННЯ ВИМОГ ПРО ВИПЛАТУ СТРАХОВОГО ВІДШКОДУВАННЯ

Припущення моделі. Імовірність нерозорення страхової компанії. Надбавка безпеки

7.1. ПРИПУЩЕННЯ МОДЕЛІ

У моделях індивідуальних позовів розглядають окремі договори і пов'язані з ними можливі виплати. Для отримання характеристик портфеля в цілому підсумовуються характеристики окремих договорів. З формальної точки зору виходить проста модель у тому випадку, якщо один (будь-який) договір портфеля може зумовити тільки одну вимогу про виплату (або не зумовити її).

Тільки такі договори і пов'язані з ними ризики розглядає модель індивідуальних позовів. Проте, відомо, що в більшості видів майнового страхування один договір може містити більш ніж одну вимогу. Такі договори і пов'язані з ними ризики розглядають у моделях колективних позовів.

Тут як в моделі індивідуальних позовів основне завдання полягає в обґрунтуванні розміру страхового резерву, що забезпечує виплати по вимогах для одного портфеля договорів колективних позовів.

Основна ідея побудови моделі і проведення відповідних розрахунків є такою.

Увесь портфель розглядається як один договір типу договору майнового страхування. Розглядається процес надходження позовів за портфелем у цілому. Позови, що надходять, не пов'язують з конкретними договорами, а розглядають як результат сумарного ризику даного портфеля.

Основні припущення моделі. Розглянемо портфель договорів страхування, що мають однакову тривалість (дорівнює одиниці часу), укладені в момент часу 0 і завершуються не пізніше ніж у момент часу 1. Усі договори портфеля стосуються однієї страхової події.

Нехай:

- ризики клієнтів незалежні між собою;
- плата за страховку вноситься страхувальником повністю на початку аналізованого періоду (у момент 0), і жодних додаткових надходжень від страхувальників протягом періоду до 1 немає;
- розподіл втрат для всіх договорів портфеля є однаковим;
- розмір вимоги в разі страхової події виплачується повністю і відразу після подання позову (до моменту 1);
- виплати по вимогах є незалежними й однаково розподіленими.

У межах даної моделі вивчається стан активів страхової компанії до моменту завершення дії договорів, основне ж завдання полягає в розрахунку фонду страхового відшкодування, що забезпечує фінансову стійкість, і, отже, у визначенні страхового внеску за таким ризиком.

Позначення, визначення, функції, що використовуються. Позначимо як $X_j \geq 0$ величину j-ї за порядком вимоги про виплату. Тоді сумарні виплати можуть бути описані випадковою величиною

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_N, \tag{7.1}$$

де N – випадкова величина, що описує загальну кількість позовів за аналізований період.

Інакше кажучи, маємо справу із сумою випадкового числа однаково розподілених доданків. Функція для випадкової величини, що описує розмір збитку і кількість випадків має вигляд

$$g_X(t) = g_N(\varphi_{X_j}(t)), \tag{7.2}$$

де $\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dF_{X_i}(x)$ – перетворення Лапласа неперервної випадкової величини X_i.

Розподіл виплат за портфелем можна спробувати встановити шляхом розкладання функції (7.2) у ряд Тейлора в точці 0. У деяких випадках (розподіл виплат дискретний або можливі значення N малі) розрахунок розподілу загальних виплат спрощується шляхом використання згорток

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq x \mid N = k) \times \\ \times P(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (F_{X_1}^*)^k P(N = k), \tag{7.3}$$

де $(F_{X_1}^*)^k$ – позначена k-кратна згортка розподілу втрат на один договір.

Числові характеристики для загальних виплат можна розрахувати, використовуючи першу і другу похідні функції (7.2), узятих у 0. У результаті елементарних перетворень похідних утворюються вирази для розрахунку числових характеристик загальних виплат у моделі колективного ризику

$$EX = EN \cdot EY_1,$$
$$Var = VarN(EY_1)^2 + VarY \cdot EN. \tag{7.4}$$

Зазначимо, що, незважаючи на зовнішню схожість формул

$$\begin{aligned} &EX = EN \cdot EY_1 = E(\sum_{j=1}^{n} N_j) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) = nq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t), \\ &VarX = VarN \cdot (EY_1)^2 + VarY_1 \cdot EN = \\ &= nq(1-q) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) \right)^2 + nq \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dF_{Y_1}(t) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) \right) \right), \end{aligned} \tag{7.5}$$

і (7.4) для обчислення характеристик, відмінність між ними виявляє принципову відмінність моделей. В індивідуальній моделі розраховуються характеристики за одним договором, а потім результати підсумовуються за відомою кількістю договорів. У колективній же моделі кількість договорів не потрібно знати з тієї причини, що моделюється кількість вимог про виплату.

7.2. ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ КОМПАНІЄЮ СВОЇХ ЗОБОВ'ЯЗАНЬ ЗА ПОРТФЕЛЕМ ДОГОВОРІВ МАЙНОВОГО СТРАХУВАННЯ

Імовірність виконання страховою компанією своїх зобов'язань за портфелем на момент завершення всіх договорів математично виражається як

$$P(X \le u_0) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_N \le u_0) = P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N \le u_0), \tag{7.6}$$

де u_0 – це сума, яку компанія може виплатити за даним портфелем (назвемо її початковим резервом).

Тобто точне розв'язання завдання знаходження ймовірності $P(X \le u_0)$ полягає у визначенні функції $F_X(x) = P(X \le x)$. Цей розподіл має такий вигляд

$$\begin{aligned} &F_X(x) = P(X \le x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N \le x \mid N = k) \cdot P(N = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_Y^{*k}(x) \cdot P(N = k), \end{aligned} \tag{7.7}$$

де $F_Y^{*k}(x)$ – згортка k-го порядку розподілу $F_Y(x)$, що визначена для безперервної випадкової величини Y як

$$F_Y^{*2}(x) = F_{Y+Y}(x) = \int_0^x F_Y(x-y)dF_Y(y). \tag{7.8}$$

Застосовуючи цю формулу (n – 1) разів, можна визначити функцію розподілу n доданків. Але оскільки визначення ймовірності нерозорення припускає розрахунок функції розподілу значної кількості доданків, то це дає можливість простого наближеного розрахунку. Наближений розрахунок ґрунтується на гаусівському (нормальному) наближенні, яке, у свою чергу, засноване на центральній граничній теоремі (ЦГТ) теорії ймовірності. Застосування ЦГТ можливе за умови великої кількості договорів страхування (при $nq \geq 5$ і $n(1-q) \geq 5$). Страхування передбачає масове охоплення, що пояснюється його змістом – перерозподілом збитку небагатьох постраждалих між усіма застрахованими. Тому гауссівське наближення неадекватно відображає ситуацію для невеликих страхових компаній, проте слід зауважити, що доцільність існування невеликих страхових компаній сама по собі є проблематичною. Страхова компанія, яка всерйоз займається страхуванням в умовах справжньої конкуренції, є швидше винятком, ніж правилом. З таких позицій можливе застосування гауссівського наближення для визначення ймовірності нерозорення страхової компанії.

Припустимо, що всі договори даного портфеля мають однакові ризики, тобто розподіл втрат $F_Y(x)$ на один страховий випадок є однаковим для всіх договорів, а страхова подія для всіх характеризується розподілом імовірності F_N. Тоді гаусівське наближення виглядає як

$$P(X \leq u_0) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{VarX}} \leq \frac{u_0 - E(X)}{\sqrt{VarX}}\right) = \Phi\left(\frac{u_0 - E(X)}{\sqrt{VarX}}\right). \tag{7.9}$$

Крім розглянутої статичної постановки завдання про нерозорення залежно від початкового резерву, розв’язаного за допомогою двох методів – точного розрахунку й оцінки, заснованої на гаусівському наближенні, розглянемо дещо іншу його постановку. Наше завдання буде полягати в знаходженні ймовірніості нерозорення залежно від двох початкових параметрів – початкового резерву (u_0) і нетто-ставки ($T_н$).

Для цього випадку приймемо умову, що нетто-ставки є однаковими для всіх договорів даної групи.

Спочатку за допомогою гаусівського наближення (P_0) оцінимо ймовірність того, що різниця між зібраними нетто-преміями і виплатами за договорами страхування буде меншою від деякого числа r, що. Введемо такі позначення:

S_i – страхова сума договору з номером i; будемо вважати величини S_i випадковими. Для деякого спрощення припустимо, що даний портфель складається з договорів індивідуального ризику, тобто за час дії договору від нього не може надійти більше ніж одна вимога про виплату відшкодування;

q – імовірність страхової події;

X_i – відшкодування на один договір;

$R_Y = \dfrac{\sqrt{VarY}}{EY}$ – коефіцієнт варіації можливих в результаті страхового випадку втрат на один договір;

$R_S = \dfrac{\sqrt{VarS}}{ES}$ – коефіцієнт варіації страхових сум;

$m = EV_i = E\dfrac{X_i}{S_i}$ – середнє очікуване відносне відшкодування на один договір.

$d^2 = Var\dfrac{X_i}{S_i}$ – дисперсія відносного страхового відшкодування на один договір.

При допущенні незалежності страхової суми і відшкодування за одним договором можна зазначити, що

$$m = E\frac{X_i}{S_i} = q\frac{EX_i}{ES_i},$$
$$d^2 = Var\frac{X_i}{S_i} = \frac{m^2(1 - q + R_W^2 - qR_S^2)}{q + qR_S^2}, \tag{7.10}$$

$Пн_i$ – нетто-премія за i-м договором, $Пн_i = Т_н \cdot S_i$.

Тоді для ймовірності нерозорення при $n \to \infty$ можна записати, що

$$P\left[\sum_i (Пн_i - X_i) \le r\right] = \Phi\left\{\frac{r - n \cdot E(Пн_i - X_i)}{\sqrt{nd^2}}\right\} =$$
$$= \Phi\left\{\frac{r - N \cdot ES_i \cdot [Тн - m])}{\sqrt{nd^2}}\right\}. \tag{7.11}$$

Відповідно, імовірність нерозорення $\varphi = 1 - P\left[\sum (Пн_i - X_i) \le r\right]$.

Таким чином, завдання визначення ймовірності виконання страховою компанією своїх зобов'язань за всім портфелем до моменту завершення всіх договорів може бути розв'язане за допомогою математичних методів.

Залежно від переваг компанії і наявних даних можна використовувати точний розрахунок або різні оцінки. Чим менш детальним статистичними даними володіє компанія, тим більш приблизним буде розрахунок. Але в разі масового страхування точність наближення буде дуже великою.

Унаслідок відносної простоти і достатньої точності при досить великій кількості договорів найчастіше застосовується гаусівське наближення. Перевага гаусівського наближення полягає в тому, що не потрібно шукати розподіли розміру окремої виплати і кількості виплат. У такому разі ми нехтуємо цим етапом і відразу розпочинаємо розв'язувати поставлене завдання – визначати ймовірність нерозорення.

7.3. ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ НЕРОЗОРЕННЯ В БУДЬ-ЯКИЙ МОМЕНТ ВИСУНЕННЯ ВИМОГ ПРО ВИПЛАТУ СТРАХОВОГО ВІДШКОДУВАННЯ

Завдання полягає у визначенні ймовірності виконання компанією своїх зобов'язань за договорами страхування в динаміці, тобто в моменти висунення кожної конкретної вимоги про виплату страхового відшкодування. На відміну від статичної постановки завдання, визначимо ймовірність нерозорення не тільки залежно від початкового резерву (u_0), але і від поточних надходжень страхових премій. Як і раніше, ми не враховуватимемо інфляцію й інвестиційний дохід, щоб не ускладнювати модель.

Введемо такі позначення:

$П_t$ – сума одержаних премій за портфелем з моменту часу 0 до моменту t;

X_t – сума страхових відшкодувань, що виплатять, з моменту часу 0 до моменту t;

$N(t_1, t_2)$ – кількість виплат страхових відшкодувань з моменту часу t_1 до моменту t_2.

Розглянемо так звану «безперервну нескінченну версію» постановки завдання динамічного нерозорення, тобто передбачається, що підсумки діяльності підбиваються безперервно і що розорення не повинне настати в тимчасовому інтервалі $0 \le t \le \infty$. На практиці підсумки підбиваються через певні проміжки часу, наприклад, щоквартально. У такому разі ми могли б контролювати факт розорення тільки на відповідний момент підведення підсумків, але для спрощення припустимо їх безперервне підбиття. Установимо такі припущення:

- розподіл величини $N(t_1, t_2)$ залежить від довжини проміжку (t_1, t_2) і не залежить від його положення в часі;
- процес надходження позовів є ординарним, тобто надходження двох або більш вимог про виплату страхового відшкодування протягом короткого проміжку часу є практично неможливим;
- величини $N(t_1, t_2)$, $N(t_2, t_3)$, …, $N(t_{N-1}, t_N)$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$ є незалежними, тобто процес надходження вимог не має наслідків;
- договори є незалежними, тобто виплата страхового відшкодування за одним договором жодним чином не впливає на виплату за іншими договорами.

Будемо називати активами компанії на момент часу t величину A_t

$$A_t = u_0 + \Pi_t - X_t. \tag{7.12}$$

Тоді математично ймовірність нерозорення описується як

$$P(A_t \ge 0 \mid 0 < t < \infty). \tag{7.13}$$

Економічне значення цього виразу полягає в тому, що жодна виплата не вилучає із страхового фонду компанії таку суму, що суми початкового резерву і страхових премій, які залишилася, не вистачить на наступну виплату.

Страхові премії надходять набагато частіше, ніж висуваються вимоги, і їх розмір звичайно є набагато меншим, ніж розмір відшкодувань. Тому ми вважатимемо в межах даної моделі надходження премій безперервним детермінованим процесом, що характеризується одним параметром – швидкістю надходження грошових коштів C. Тобто $\Pi_t = C_t$.

Таким чином, ми маємо деякий процес A_t, який складається з двох певних процесів – u_0 і Π_t і одного невизначеного – X_t. З цього випливає, що процес A_t також буде випадковим.

При дотриманні допущень, що стосуються процесу надходження вимог, він буде пуасонівським з параметром λ (де λ – середня кількість вимог, що висуваються в одиницю часу)

$$P(N(0,\ t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,\ 1,\ 2,\ 3... \qquad (7.14)$$

Відповідно, процес X_t буде пуасонівським з параметрами λ і $F_Y(x) = P(Y \leq x)$.

Припустимо, що страхові премії, що збираються в одиницю часу, перевищують очікувані середні виплати в одиницю часу, тобто $C > \lambda E(Y)$. Нехай $C = (1 + \theta)\lambda E(Y)$, де θ – частка перевищення швидкості надходження премій над швидкістю виплат страхових відшкодувань, $\theta = (C / (\lambda E(Y)))^{-1}$, назвемо цю величину надбавкою небезпеки.

Таким чином, у динамічній постановці завдання нерозорення залежить від двох параметрів – початкового резерву u_0 і надбавки безпеки θ.

Визначивши за емпіричними даними параметр θ і потім розрахувавши залежно від рівня початкового резерву u_0 поправочний коефіцієнт R, оцінимо верхню межу розорення e^{-Ru_0} і нижню межу ймовірності нерозорення $\varphi(u_0)$ відповідно.

Завершуючи розгляд цієї моделі, зауважимо, що ймовірність нерозорення тим більше, чим вищий поправочний коефіцієнт. Тобто поправочний коефіцієнт, що охоплює швидкість надходження вимог, швидкість надходження премій та розподіл розмірів збитків, є інтегральною характеристикою можливості виконання страховою компанією своїх зобов'язань. Ця модель має істотну особливість: досліджується динамічний процес, який передбачає надходження премій за договорами, що знову укладаються, і виплати страхових відшкодувань за всіма діючими на даний момент договорами. Тому дана модель орієнтована швидше не на замкнене солідарне розкладення збитку, а на ліквідність компанії на даний конкретний момент.

Застосування цієї моделі є коректним в умовах достатньо стабільного функціонування страхової компанії.

Слід зазначити, що неприпустимо здійснювати виплати за раніше укладеними договорами за рахунок надходження премій за знову укладеними, що фактично являє собою в такому разі «фінансову піраміду». Тому застосування нерівності Лундберга має сенс, якщо фінансове положення компанії не погіршується. При цьому слід чітко бачити різницю між імовірністю виконання зобов'язань на момент завершення всіх договорів портфеля і на момент висунення будь-якої вимоги про виплату через різні принципи, на яких ґрунтуються ці методи. Перший орієнтований на принцип замкнутого страхового фонду, а другий – на принцип обчислень поточної ліквідності компанії.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Охарактеризуйте основні припущення моделі колективних ризиків.
2. Яким є основне завдання моделі колективних ризиків?
3. Як виконується розкладання функції в ряд Тейлора?
4. Наведіть числові характеристики для загальних виплат.
5. Наведіть формулу для визначення ймовірності використання страховою компанією своїх зобов'язань за портфелем на момент завершення всіх договорів.
6. Дайте визначення поняття гаусівського наближення.
7. Що таке ймовірність нерозорення?
8. Припущення моделі визначення ймовірності нерозорення в будь-який момент висунення вимог страхувальником.
9. Дайте визначення поняття надбавки безпеки.

ТЕСТИ

1. Основна ідея побудови моделі колективних позовів полягає в таких аспектах:
   а) розглядається процес надходження позовів за портфелем у цілому;
   б) позови, що надходять, не пов'язують з конкретними договорами, а розглядають як результат сумарного ризику даного портфеля;
   в) увесь портфель розглядається як один договір типу договору майнового страхування.

2. Визначити припущення моделі колективних позовів:
   а) плата за страховку вноситься страхувальником повністю на початку аналізованого періоду (у момент 0) і жодних додаткових надходжень від страхувальників протягом періоду до 1 немає;
   б) ризики клієнтів залежать між собою;
   в) розподіл втрат для всіх договорів портфеля характеризується певним законом розподілу;
   г) виплати за вимогами є незалежними й однаково розподіленими;
   д) розмір вимоги в разі страхової події виплачується повністю і відразу після подання позову (до моменту 1).

3. За допомогою співвідношення

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_N \le x \mid N = k) \cdot P(N = k) =$$

$= \sum_{k=0}^{\infty} F_Y^{*k}(x) \cdot P(N = k)$ можна визначити:

а) розподіл збитків за портфелем;
б) розподіл виплат за портфелем;
в) розподіл платежів за портфелем.

4. За допомогою формули

$nq(1-q) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) \right)^2 + nq \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dF_{Y_1}(t) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) \right) \right)$ можна розрахувати:

а) математичне сподівання загальних виплат у моделі колективного ризику;
б) середнє квадратичне відхилення загальних виплат у моделі колективного ризику;
в) дисперсію загальних виплат у моделі колективного ризику.

5. За допомогою формули $\varphi = 1 - P(\sum(Пн_i - X_i) \le r)$ можна визначити ймовірність виконання компанією своїх зобов'язань за всім портфелем до моменту завершення всіх договорів:

а) так;
б) ні.

6. Величина $\theta = (C / (\lambda E(Y)))^{-1}$ – це:

а) частка перевищення швидкості надходження премій над швидкістю виплат страхових відшкодувань;
б) надбавка небезпеки;
в) початковий резерв;
г) очікувані середні виплати в одиницю часу.

7. Імовірність виконання страховою компанією своїх зобов'язань за портфелем на момент завершення всіх договорів математично виражається як $P(X \le u_0) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_N \le u_0) = P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N \le u_0)$:

а) так;
б) ні.

8. Співвідношення $d^2 = Var\frac{X_i}{S_i} = \frac{m^2(1 - q + R_W^2 - qR_S^2)}{q + qR_S^2}$ виражає:

   а) коефіцієнт варіації страхових сум;
   б) середнє очікуване відносне відшкодування на один договір;
   в) коефіцієнт варіації можливих у результаті страхового випадку втрат на один договір;
   г) дисперсію відносного страхового відшкодування на один договір.

9. Співвідношення $R_S = \frac{\sqrt{VarS}}{ES}$ виражає:

   а) середнє очікуване відносне відшкодування на один договір;
   б) дисперсію відносного страхового відшкодування на один договір;
   в) коефіцієнт варіації страхових сум;
   г) коефіцієнт варіації можливих у результаті страхового випадку втрат на один договір.

10. Жодна виплата не вилучає зі страхового фонду компанії таку суму, що суми початкового резерву і страхових премій, які залишилася, не вистачить на наступну виплату. Наведене твердження характеризує економічний зміст:

   а) швидкості здійснення страхових виплат;
   б) імовірності розорення;
   в) імовірності нерозорення;
   г) швидкості надходження страхових сум.

Тема 8. СТАТИЧНІ МОДЕЛІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВИХ КОМПАНІЙ

8.1. ДІАГНОСТИКА БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Банкрутство. Етапи провадження справи про банкрутство. Експрес-діагностика. Фундаментальна діагностика. Коефіцієнт Бівера. СВОТ-аналіз. Коефіцієнт можливої нейтралізації загрози банкрутства в короткостроковому перспективному періоді. Масштаби кризового фінансового стану підприємства і можливі шляхи виходу з нього

8.2. МОДЕЛІ ПРОГНОЗУВАННЯ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ НА ОСНОВІ «БАЛІВ Z»: ДВОФАКТОРНА МОДЕЛЬ, П’ЯТИФАКТОРНА МОДЕЛЬ

Кореляційна лінійна функція. Коефіцієнт поточної ліквідності. Коефіцієнт питомої ваги позикових засобів в активах

8.3. МОДЕЛЬ СПРІНГЕЙТА. ФОРМУЛА ЛІСА

Дискримінантний аналіз

8.4. МОДЕЛЬ ТАФФЛЕРА

Прибутковість, відповідність обігового капіталу, фінансового ризику та ліквідності

8.5. МОДЕЛЬ *CREDITMEN*

8.6. МОДЕЛЬ R

8.7. УНІВЕРСАЛЬНА ДИСКРИМІНАНТНА МОДЕЛЬ

8.8. КРИТЕРІЇ ІМОВІРНОСТІ ФІНАНСОВОЇ КРИЗИ В СТРАХОВІЙ КОМПАНІЇ

8.1. ДІАГНОСТИКА БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Банкрутство – визнане судовими органами незадовільне господарське становище фізичної чи юридичної особи, ознакою якого є припинення розрахунків за зобов'язаннями через нестачу активів у ліквідній формі.

Згідно із Законом України «Про відновлення платоспроможності боржника або визнання його банкрутом» банкрутство – визнана господарським судом неспроможність боржника відновити свою платоспроможність та задовольнити визнані судом вимоги кредиторів не інакше, як через застосування ліквідаційної процедури.

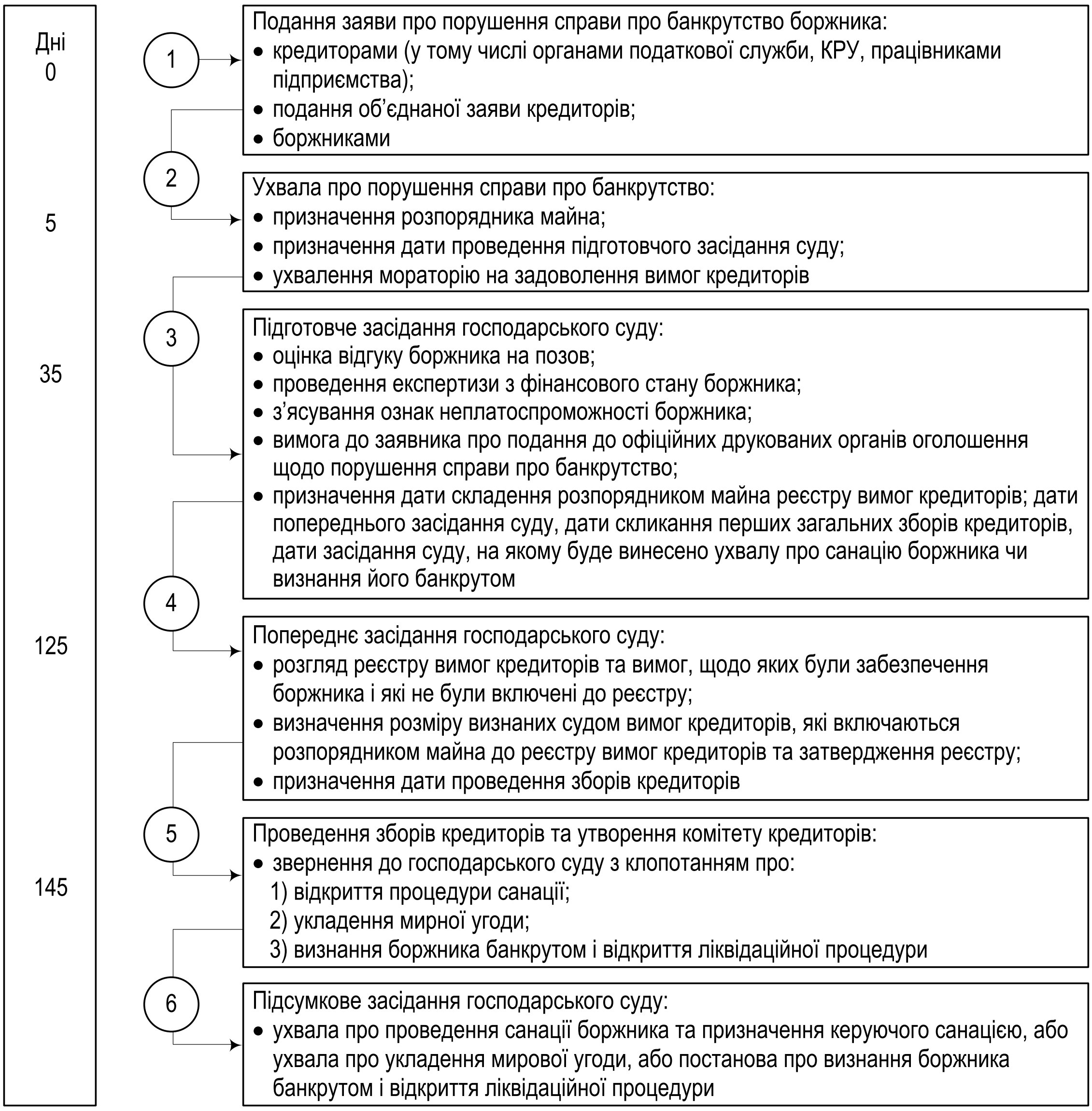


Рис. 8.1. Етапи провадження справи про банкрутство

Під банкрутством також можна розуміти засвідчену судом абсолютну неплатоспроможність суб'єкта господарювання, тобто це неспроможність боржника, спричинена відсутністю або нестачею коштів, якими би він мав змогу розпоряджатися під час настання строку платежу, за умови відсутності можливості отримати необхідні кошти.

Діагностика банкрутства являє собою систему цільового фінансового аналізу, спрямованого на виявлення параметрів кризового розвитку підприємства, що генерують загрозу його банкрутства в майбутньому періоді.

Залежно від цілей і методів здійснення діагностика банкрутства поділяється на дві основні системи: експрес-діагностику і фундаментальну діагностику.

З метою своєчасного виявлення тенденцій формування незадовільної структури балансу у прибутково працюючого суб'єкта господарювання експрес-діагностика банкрутства в Україні здійснюється за допомогою коефіцієнта Бівера

$$K = \frac{ЧП + А}{З}, \qquad (8.1)$$

де K – коефіцієнт Бівера;

$ЧП$ – чистий прибуток;

$А$ – амортизація;

$З$ – довгострокові і поточні зобов'язання.

Ознакою формування незадовільної структури балансу є таке фінансове становище компанії, у якого протягом тривалого часу (1,5–2 роки) коефіцієнт Бівера не перевищує 0,2.

У табл. 8.1 наведено шкалу попередньої оцінки масштабів кризового фінансового стану компанії за основними індикаторами окремих об'єктів спостереження «кризового поля».

Попереджувальний характер експрес-діагностики найбільш відчутний на стадії легкої фінансової кризи. За інших масштабів кризового стану вона обов'язково має доповнюватися системою фундаментальної діагностики.

Фундаментальна діагностика банкрутства здійснюється за такими основними етапами:

1. Систематизація основних факторів, що обумовлюють кризовий фінансовий розвиток підприємства.
2. Проведення комплексного фундаментального аналізу впливу окремих факторів на кризовий фінансовий розвиток компанії. У процесі

цього аналізу використовуються такі основні методи оцінки ймовірності банкрутства:

- повний комплексний аналіз фінансових коефіцієнтів;
- кореляційний аналіз;
- СВОТ-аналіз (*SWOT-analysis*) – дослідження характеру сильних та слабких сторін компанії щодо окремих внутрішніх факторів, а також позитивного або негативного впливу окремих зовнішніх факторів, що обумовлюють її кризовий фінансовий розвиток;
- розрахунок індексу кредитоспроможності (модель Альтмана, модель Тафлера, Ліса тощо).

3. Прогнозування розвитку кризового фінансового стану підприємства під негативним впливом окремих факторів, що являють собою найбільшу загрозу банкрутства в майбутньому періоді.
4. Прогнозування здатності підприємства до нейтралізації загрози банкрутства за рахунок внутрішнього потенціалу.

Таблиця 8.1. Експрес-діагностика масштабів кризової ситуації

Обєкти спостереження «кризового поля»	Масштаби фінансового стану компанії		
	Легка фінансова криза	Глибока фінансова криза	Фінансова катастрофа
I. Чистий грошовий потік	Зниження ліквідності грошового потоку	Від'ємне значення чистого грошового потоку	Значне від'ємне значення чистого грошового потоку
II. Ринкова вартість компанії	Стабілізація ринкової вартості компанії	Тенденція до зниження ринкової вартості компанії	Обвальне зниження ринкової вартості компанії
III. Структура капіталу підприємства	Зниження коефіцієнта автономії	Зростання коефіцієнта і зниження ефекту фінансового левериджу	Гранично високий коефіцієнт і відсутність ефекту фінансового левериджу
IV. Склад фінансових зобов'язань компанії за терміновістю погашення	Підвищення суми і питомої ваги короткострокових фінансових зобов'язань	Високий коефіцієнт негайних (термінових) фінансових зобов'язань	Дуже високий коефіцієнт негайних (термінових) фінансових зобов'язань
V. Склад активів компанії	Зниження коефіцієнта абсолютної платоспроможності	Істотне зниження коефіцієнтів абсолютної і поточної платоспроможності	Абсолютна неплатоспроможність через відсутність грошових активів
VI. Склад поточних витрат підприємства	Тенденція до зростання змінних витрат	Високий коефіцієнт операційного левериджу за наявності тенденції до зростання рівня змінних витрат	Дуже високий коефіцієнт операційного левериджу за наявності тенденції до зростання загального рівня поточних витрат
VII. Рівень концентрації фінансових операцій у зонах підвищеного ризику	Підвищення коефіцієнта вкладення капіталу в зоні критичного ризику	Переважне вкладення капіталу в зоні критичного ризику	Значна частка вкладення капіталу в зоні катастрофічного ризику

У процесі такого прогнозування визначається, наскільки швидко та в якому обсязі підприємство здатне:

- забезпечити зростання чистого грошового потоку;
- знизити загальну суму фінансових зобов'язань;
- реструктуризувати свої фінансові зобов'язання шляхом переводу їх з короткострокової форми в довгострокову;
- знизити рівень поточних витрат і коефіцієнт операційного левериджу;
- знизити рівень фінансових ризиків у своїй діяльності;
- позитивно змінити інші фінансові показники, незважаючи на негативний вплив окремих факторів.

Узагальнюючу оцінку здатності підприємства до нейтралізації загрози банкрутства в короткостроковому перспективному періоді дозволяє отримати коефіцієнт можливої нейтралізації поточної загрози банкрутства, який розраховується за формулою

$$K_{НЗБ} = \frac{ЧГП}{\overline{ФЗ}}, \qquad (8.2)$$

де $K_{НЗБ}$ – коефіцієнт можливої нейтралізації загрози банкрутства в короткостроковому перспективному періоді;

$ЧГП$ – очікувана сума чистого грошового потоку;

$\overline{ФЗ}$ – середня сума фінансових зобов'язань.

У табл. 8.2 наведені критерії характеристик масштабів кризового фінансового стану компанії, а також найбільш адекватні їм способи реагування.

Таблиця 8.2. Масштаби кризового фінансового стану компанії і можливі шляхи виходу з нього

Імовірність банкрутства	Масштаб кризового стану компанії	Спосіб реагування
Можлива	Легка фінансова криза	Нормалізація поточної фінансової діяльності
Висока	Глибока фінансова криза	Повне використання внутрішніх механізмів фінансової стабілізації
Дуже висока	Фінансова катастрофа	Пошук ефективних форм санації або ліквідація підприємства

В Україні з метою забезпечення однозначності підходів при оцінці фінансової неспроможності підприємств затверджено «Методичні рекомендації щодо виявлення ознак неплатоспроможності підприємства та ознак дій з приховування банкрутства, фіктивного банкрутства чи доведення до банкрутства» (Наказ Міністерства економіки України № 14 від 19.01.2006).

8.2. МОДЕЛІ ПРОГНОЗУВАННЯ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ НА ОСНОВІ «БАЛІВ Z»: ДВОФАКТОРНА МОДЕЛЬ, П'ЯТИФАКТОРНА МОДЕЛЬ

У світовій практиці для прогнозування стійкості роботи компанії, вибору її фінансової політики, а також визначення ризику банкрутства використовуються різні економіко-математичні моделі.

Найбільш уживаними методами оцінки ймовірності банкрутства підприємства є *Z*-моделі, запропоновані відомим західним економістом Е. Альтманом у 1968 р. Під час побудови індексу Е. Альтман обстежив 66 компаній, половина з яких збанкрутувала в 1946–1965 рр, а половина працювала успішно, і досліджував 22 аналітичних коефіцієнти, що могли бути корисні для прогнозування можливого банкрутства. З цих показників він відібрав п'ять найбільш значущих і побудував багатофакторне регресійне рівняння.

Проведені дослідження довели можливість певних комбінацій відносних показників характеризувати ймовірність швидкого банкрутства тієї чи іншої компанії. На основі використання прийомів статистичного методу, названого аналізом множинних дискримінант, було розраховано параметри кореляційної лінійної функції

$$Z = E + A_n X_n, \tag{8.3}$$

де Z – показник неплатоспроможності підприємства;

A – параметри, що показують ступінь впливу показників на ймовірність банкрутства;

X – показники (фактори впливу) діяльності підприємства.

Порівняно простим способом швидкого експрес-аналізу надійності компанії, у т. ч. і страхової, є застосування так званих балів *Z*, які дозволяють спрогнозувати банкрутство. Відомі такі моделі прогнозування банкротства.

1. *Двофакторна модель.*

У межах цієї моделі *Z*-бал знаходиться за допомогою використання двох коефіцієнтів: коефіцієнта поточної ліквідності ($K_{Тл}$) і питомої ваги позикових засобів в активах (*ПВПЗ*) за формулою

$$Z_1 = -0{,}387\,7 + K_n \cdot (-1{,}073\,6) + 0{,}0579 \cdot (\text{ПВПЗ}). \quad (8.4)$$

При цьому K_n розраховується як відношення поточних активів до поточних зобов'язань. Під останніми розуміються короткострокові позики і строкова кредиторська заборгованість.

Вагові коефіцієнти, використані в цій методиці, знайдені емпіричним шляхом, також як і постійна величина (– 0,387 7).

Значення балу: якщо $Z_1 > 0$, імовірність банкрутства є високою інакше – імовірність низька.

Застосування цієї методики в чистому вигляді в Україні є досить проблематичним через відмінності в темпах інфляції, циклічності макро- і мікроекономіки, а також специфіки вітчизняного податкового законодавства (дана методика розроблена для американської економіки). Крім цього, двофакторна модель ураховує тільки два чинники, у той час як фінансовий стан компанії характеризується набагато більшою кількістю параметрів. З цієї причини одержаний на основі даної моделі прогноз може значно відхилятися від реального стану компанії.

2. *П'ятифакторна модель (індекс кредитоспроможності Альтмана).*

У межах даної моделі *Z*-бал знаходиться за допомогою використання п'яти коефіцієнтів

$$Z_2 = 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}3x_3 + 0{,}6x_4 + 0{,}999x_5, \quad (8.5)$$

де x_1 – відношення різниці поточних активів і короткострокових зобов'язань до активів,

x_2 – відношення чистого прибутку до активів,

x_3 – відношення прибутку до виплати відсотків за позиками і податків до активів,

x_4 – відношення ринкової ціни акціонерного капіталу до позикових коштів, відношення продажів до активів,

x_5 – відношення виручки до суми активів.

Значення балів наведені в табл. 8.3. Формули розрахунку балів у вказаних моделях наведені для промислових підприємств. Незважаючи на те, що для страхових організацій можна обчислити всі ці показники, найбільший інтерес при прогнозуванні банкрутства становлять числові коефіцієнти, використані при розрахунку. Для кожної окремо взятої країни використовуються свої коефіцієнти і критерії оцінки одержаних результатів. В Україні *Z*-бали для страхових компаній не розраховуються і подібні моделі не застосовуються.

Таблиця 8.3. Значенні балів Z

Значення балу Z_2	Імовірність банкрутства
Менше 1,81	Підприємство стане банкротом через один рік з імовірністю 95%, через два роки з імовірністю 72%, через три роки з імовірністю 48%, через чотири роки з імовірністю 30%, через п'ять років з імовірністю 30%
1,81–2,7	Середня, перехідна в незначну
2,7–2,99	Незначна
Більше 2,99	Висновки утруднені

Z-коефіцієнт Альтмана використовується для великих компаній, що котирують свої акції на біржах.

У 1983 р. Е. Альтман отримав модифікований варіант своєї формули для компаній, акції яких не котируються на біржі

$$Z = 0{,}717X_1 + 0{,}847X_2 + 3{,}107X_3 + 0{,}42X_4 + 0{,}995X_5, \tag{8.6}$$

де X_4 – балансова вартість власного капіталу/зобов'язання.

Якщо $Z > 1{,}23$, ризик банкрутства є мінімальним, інакше підприємству найімовірніше загрожує банкрутство.

Досвід використання цієї моделі в деяких країнах (США, Канаді, Бразилії, Австрії, Японії) показав, що спрогнозувати ймовірність банкрутства за її допомогою за один рік можна з точністю 95%, за два роки – 70%, за три – 48%, за чотири-п'ять років – 30%.

Узагалі відповідно до цієї формули підприємства з рентабельністю, вищою від деякої межі, стають «занадто сильними». В умовах України рентабельність окремого підприємства значною мірою зазнає небезпеки з боку зовнішніх коливань. Очевидно, ця формула в наших умовах повинна мати менші параметри за різних показників рентабельності.

8.3. МОДЕЛЬ СПРІНГЕЙТА. ФОРМУЛА ЛІСА

Модель Спрінгейта була побудована Гордоном Л.В. Спрінгейтом в університеті Симона Фрейзера в 1978 р. за допомогою покрокового дискримінантного аналізу методом, який розробив Е. Альтман у 1968 р. При створенні моделі Спрінгейт використовував дані 40 компаній і досяг 92,5% точності прогнозування неплатоспроможності на рік уперед, проте з часом цей показник зменшується.

Пізніше Бодерас, використовуючи модель Спрінгейта, за даними 50 підприємств із середнім балансом у 2,5 млн дол., досяг 88% точності прогнозування.

У процесі створення моделі з 19 фінансових коефіцієнтів в остаточному варіанті залишилося тільки чотири

$$Z = 1{,}03X_1 + 3{,}02X_2 + 0{,}66X_3 + 0{,}4X_4, \qquad (8.7)$$

де X_1 – оборотні активи / загальна вартість активів;

X_2 – прибуток до виплат / загальна вартість активів;

X_3 – прибуток до виплат / поточні зобов'язання;

X_4 – виручка / загальна вартість активів.

Якщо $Z < 0{,}862$, то підприємство є потенційним банкрутом.

Формула Ліса для Великобританії, за якою лімітне значення дорівнює 0,037, має такий вигляд

$$Z = 0{,}063X_1 + 0{,}092X_2 + 0{,}057X_3 + 0{,}001X_4, \qquad (8.8)$$

де X_1 – обіговий капітал / сума активів;

X_2 – прибуток від реалізації / сума активів;

X_3 – нерозподілений прибуток / сума активів;

X_4 – власний капітал / позиковий капітал.

8.4. МОДЕЛЬ ТАФФЛЕРА

Цю модель запропоновував британський учений Таффлер у 1977 р. Дана прогнозна модель є чотирифакторною; у ній при використанні комп'ютерної техніки на першій стадії обчислюються 80 відношень за даними збанкрутілих і платоспроможних компаній. Потім, використовуючи статистичний метод, відомий як аналіз багатомірного дискримінанта, можна побудувати модель платоспроможності, визначаючи частки співвідношення, що якнайкраще виділяють дві групи компаній, та їх коефіцієнти. Такий вибірковий підрахунок співвідношень типовий для визначення деяких ключових вимірів діяльності корпорації – прибутковості, відповідності обігового капіталу, фінансового ризику та ліквідності. Поєднуючи ці показники і об'єднуючи їх відповідним чином, модель платоспроможності дає точну картину фінансового стану корпорації. Типова модель для аналізу компаній має такий вигляд

$$Z = 0{,}53X_1 + 0{,}13X_2 + 0{,}18X_3 + 0{,}16X_4, \qquad (8.9)$$

де X_1 – прибуток до виплат / поточні зобов'язання;

X_2 – поточні активи / зобов'язання;

X_3 – поточні зобов'язання / загальна вартість активів;

X_4 – інтервал кредитування.

Якщо $Z > 0,3$, то фірма має гарні довгострокові перспективи.

8.5. МОДЕЛЬ *CREDITMEN*

Модель *Creditmen* є одним з варіантів інтегрального підходу до оцінювання фінансового стану підприємства, розробленого у Франції Ж. Де Паляном, відповідно до якого фінансова ситуація під-приємства може бути точно охарактеризована показником

$$Z = 25X_1 + 25X_2 + 10X_3 + 20X_4 + 20X_5, \qquad (8.10)$$

де X_1 – високоліквідні активи / поточні зобов'язання;

X_2 – власний капітал / зобов'язання;

X_3 – високоліквідні активи / баланс;

X_4 – виручка / дебіторська заборгованість;

X_5 – виручка / дебіторська заборгованість.

Коефіцієнти рівняння [25, 25, 10, 20, 20] позначають частку впливу кожного показника.

Якщо $Z = 100$ – фінансова ситуація нормальна;

$Z > 100$ – фінансова ситуація добра;

$Z < 100$ – фінансова ситуація викликає тривогу.

8.6. МОДЕЛЬ R

Модель R запропонували вчені Іркутської державної економічної академії. Це чотирифакторна модель прогнозу ризику банкрутства, що має такий вигляд

$$R = 0,838X_1 + X_2 + 0,054X_3 + 0,63X_4, \qquad (8.11)$$

де X_1 – обігові активи / загальна вартість активів;

X_2 – чистий прибуток / власний капітал;

X_3 – виручка / загальна вартість активів;

X_4 – чистий прибуток / сумарні витрати.

Імовірність банкрутства компанії відповідно до значення моделі R визначається, як показано в табл. 8.4.

Таблиця 8.4. Визначення ймовірності банкрутства

Значення *R*	Імовірність банкрутства, %
Менше ніж 0	Максимальна (90–100)
0–0,18	Висока (60–80)
0,18–0,32	Середня (35–50)
0,32–0,42	Низька (15–20)
Більше ніж 0,42	Мінімальна (до 10)

До очевидних переваг цієї моделі слід віднести те, що механізм її розроблення і всі основні етапи розрахунків досить докладно описані в джерелі.

При використанні наведених моделей для українських компаній слід враховувати деякі обставини. Так, показник «Власний капітал» відповідно до чинних в Україні методик переоцінювання активів штучно завищується сумами за субрахунком 423 «Дооцінка активів». Старим, зношеним основним фондам надається таке саме значення, як і новим. Як наслідок, співвідношення між власним і позиковим капіталом не відповідає дійсності. Тому моделі, що використовують цей показник, можуть не відображати реального стану справ.

Умовам діяльності українських підприємств більше відповідає універсальна дискримінантна модель.

8.7. УНІВЕРСАЛЬНА ДИСКРИМІНАНТНА МОДЕЛЬ

Універсальна дискримінантна модель була побудована на основі кількох методик прогнозування банкрутства, вона має такий вигляд

$$Z = 1{,}5X_1 + 0{,}08X_2 + 10X_3 + 5X_4 + 0{,}3X_5 + 0{,}1X_6, \qquad (8.12)$$

де X_1 – *cash-flow* / зобов’язання;
X_2 – баланс / зобов’язання;
X_3 – чистий прибуток / баланс;
X_4 – чистий прибуток / виручка;
X_5 – виробничі запаси / виручка;
X_6 – виручка / баланс (обіговість основного капіталу).

Для обчислення коефіцієнта X_1 використовують показник *cash-flow*, запроваджений на початку 50-х років XX ст. для аналізу фінансового стану підприємства та аналізу оцінки привабливості цінних паперів. Фактологічною базою аналізу *cash-flow* є дані звіту про фінансові результати та їх використання. Показник *cash-flow* характеризує величину чистих грошових потоків, які утворюються внаслідок операційної та інвестиційної діяльності і залишаються в розпорядженні підприємства в певному періоді.

Отримані за формулою (8.12) результати після обрахунків можна інтерпретувати так:

$Z > 2$ – підприємство вважається фінансово стійким, йому не загрожує банкрутство;

$1 < Z < 2$– фінансова рівновага (фінансова стійкість) порушена, але за умови переходу до антикризового управління банкрутство йому не загрожує;

$0 < Z < 1$ – підприємству загрожує банкрутство, якщо воно не здійснить санаційних заходів;

$Z < 0$ – підприємство є напівбанкрутом.

8.8. КРИТЕРІЇ ІМОВІРНОСТІ ФІНАНСОВОЇ КРИЗИ В СТРАХОВІЙ КОМПАНІЇ

У аналітичному дослідженні та прогнозуванні використовуються й інші критерії ймовірності фінансової кризи страхової компанії.

До них належать:

- істотні втрати в основній діяльності;
- підвищення собівартості продукції (послуг);
- зниження продуктивності праці;
- збільшення обсягу неліквідності оборотних коштів;
- неповне завантаження потужності, неритмічність виробничого процесу;
- втрата клієнтів, тобто несприятливі зміни у портфелі замовлень;
- перевищення критичного рівня простроченої кредиторської заборгованості;
- надмірне використання короткострокових позикових коштів як джерела фінансування довгострокових вкладень;
- постійне зростання до небезпечних меж частки позикових коштів у загальній сумі джерел коштів;
- хронічне невиконання зобов’язань перед інвесторами, кредиторами, акціонерами;
- неправильна реінвестиційна політика і т. д.

У разі надходження сигналів про ймовірність настання банкрутства організації слід розробити заходи для виходу з несприятливої ситуації. До них належать:

- упровадження нових, ефективних технологій;
- розроблення нових видів страхових продуктів, які користуються попитом у клієнтів;
- проведення інноваційної маркетингової кампанії;
- цінова конкуренція;
- ефективна організація збуту страхових продуктів, висока якість обслуговування;
- зниження витрат;
- удосконалення управління.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте визначення поняття «банкрутство».
2. Які етапи провадження справи про банкрутство? Охарактеризуйте кожен етап.
3. Охарактеризуйте експрес-діагностику банкрутства за допомогою коефіцієнта Бівера.
4. Назвіть етапи фундаментальної оцінки банкрутства.
5. Що таке СВОТ-аналіз?
6. Що показує коефіцієнт нейтралізації загрози банкрутства. Наведіть формулу його розрахунку.
7. Охарактеризуйте модель Альтмана.
8. Охарактеризуйте двофакторну та пятифакторну моделі.
9. Охарактеризуйте модель Спрінгейта.
10. Наведіть формулу Ліса та поясніть її.
11. Охарактеризуйте модель Таффлера.
12. Охарактеризуйте модель *Creditmen*.
13. Охарактеризуйте модель R.
14. Що таке універсальна дискримінантна модель?
15. Які критерії ймовірності фінансової кризи у страховій компанії?
16. Які заходи уникнення загрози банкрутства страхової компанії?

ТЕСТИ

1. За допомогою коефіцієнта Бівера здійснюється:
   а) експрес-діагностика банкрутства страхової компанії;
   б) фундаментальна діагностика банкрутства страхової компанії;
   в) визначення фінансового стану страхової компанії.

2. Фундаментальна діагностика банкрутства здійснюється за такими етапами (так, ні):
   а) проведення комплексного фундаментального аналізу впливу окремих факторів на кризовий фінансовий розвиток страхової компанії;
   б) прогнозування розвитку кризового фінансового стану страхової компанії під негативним впливом окремих факторів, що становлять собою найбільшу загрозу банкрутства підприємства в майбутньому періоді;
   в) систематизація основних факторів, що спричиняють кризовий фінансовий розвиток у страховій компанії;
   г) прогнозування здатності страхової компанії до нейтралізації загрози банкрутства за рахунок внутрішнього потенціалу;
   д) остаточне визначення масштабів кризового фінансового стану страхової компанії.

3. Яку модель описує наведене рівняння
   $Z = 1{,}5X_1 + 0{,}08X_2 + 10X_3 + 5X_4 + 0{,}3X_5 + 0{,}1X_6$:
   а) двофакторну модель Альтмана;
   б) п'ятифакторну модель Альтмана;
   в) модель Спрінгейта;
   г) модель Таффлера;
   д) модель *Creditmen*;
   е) модель R;
   ж) універсальну дискримінантну модель.

4. Яку модель описує наведене рівняння
   $Z_2 = 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}3x_3 + 0{,}6x_4 + 0{,}999x_5$:
   а) двофакторну модель Альтмана;
   б) п'ятифакторну модель Альтмана;
   в) модель Спрінгейта;
   г) модель Таффлера;
   д) модель *Creditmen*;
   е) модель *R*;
   ж) універсальну дискримінантну модель.

5. Банкрутство – це:
   а) визнане судовими органами незадовільне господарське становище фізичної чи юридичної особи, ознакою якого є припинення розрахунків за зобов'язаннями через нестачу активів у ліквідній формі;

б) визнана господарським судом неспроможність боржника відновити свою платоспроможність та задовольнити визнані судом вимоги кредиторів не інакше як через застосування ліквідаційної процедури;
в) засвідчена судом абсолютна неплатоспроможність суб'єкта господарювання, тобто неспроможність боржника, спричинена відсутністю або нестачею коштів, якими би він мав змогу розпоряджатися під час настання строку платежу, за умови відсутності можливості отримати необхідні кошти;

6. До методів оцінки ймовірності банкрутства належать:
а) повний комплексний аналіз фінансових коефіцієнтів;
б) кореляційний аналіз;
в) СВОТ-аналіз;
г) прогнозування розвитку кризового фінансового стану компанії;
д) прогнозування здатності підприємства до нейтралізації загрози банкрутства за рахунок внутрішнього потенціалу.

7. Узагальнювальну оцінку здатності підприємства до нейтралізації загрози банкрутства в короткостроковому перспективному періоді дозволяє отримати коефіцієнт можливої нейтралізації поточної загрози банкрутства:
а) так;
б) ні.

8. Яку модель описує наведене рівняння
$Z = 0{,}53X_1 + 0{,}13X_2 + 0{,}18X_3 + 0{,}16X_4$:
а) двофакторну модель Альтмана;
б) п'ятифакторну модель Альтмана;
в) модель Спрінгейта;
г) модель Таффлера;
д) модель *Creditmen*;
е) модель R;
ж) універсальну дискримінантну модель.

Тема 9. ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

9.1. ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ ЗА ФОРМУЛОЮ БАЙЄСА

Система показників для визначення ймовірності банкрутства страхової компанії. Оцінка фінансового стану страхової компанії. Методика визначення ймовірності банкрутства страхових компаній на основі застосування формули Байєса

9.2. ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПЛАТОСПРОМОЖНОСТІ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Фактичний запас платоспроможності страхової компанії. Нормативний запас платоспроможності страхової компанії

9.1. ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ ЗА ФОРМУЛОЮ БАЙЄСА

На основі аналізу даних статистичної звітності страховиків можна сформувати фінансові показники, за допомогою яких визначається ймовірність банкрутства страхових компаній.

Пропонуємо таку систему базових показників:

- частка валових надходжень страхових платежів у сумарних активах;
- співвідношення сплаченого статутного капіталу та сумарних активів;
- частка страхових платежів, які повертаються страхувальникам;
- частка страхових платежів, які повертаються перестраховикам;
- коефіцієнт фінансової стабільності страхової компанії

$$K_{ф.с} = \frac{Доходи + Середня\ вартість\ активів\ компанії}{Витрати\ страхової\ компанії}, \quad (9.1)$$

- коефіцієнт фінансової стійкості страхової компанії

$$K_{ф.ст} = \frac{\begin{pmatrix}Сплачений \\ статутний\ капітал\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}Інші \\ власні\ кошти\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}Страхові \\ резерви\end{pmatrix}}{Загальна\ сума\ страхових\ внесків, що\ надійшли}, \quad (9.2)$$

Оцінку фінансового стану страхової компанії пропонується проводити на основі такої системи показників

$$K_1 = \frac{Прибуток}{Навантаження - Витрати};$$

$$K_2 = \frac{Прибуток}{Обсяг\ страхових\ платежів};$$

$$K_3 = \frac{Прибуток}{Сума\ страхових\ відшкодувань}; \quad (9.3)$$

$$K_4 = \frac{Прибуток}{Резервний\ фонд};$$

$$K_5 = \frac{Прибуток}{Витрати};$$

$$K_6 = \frac{Прибуток + Резервний\ фонд}{Обсяг\ ризиків};$$

$$K_7 = \frac{Навантаження}{Резервний\ фонд};$$

$$K_8 = \frac{Навантаження}{Обсяг\ страхових\ платежів};$$

$$K_9 = \frac{Страхові\ виплати\ за\ всіма\ видами\ страхування}{Загальна\ сума\ страхових\ премій, що\ надійшли};$$

$$K_{10} = \frac{Сума\ внесків, передана\ за\ договором\ страхування}{Загальна\ сума\ страхових\ внесків, що\ надійшли};$$

$$K_{11} = \frac{Сплачений\ статутний\ капітал + Інші\ власні\ кошти}{Страхові\ резерви};$$

$$K_{12} = \frac{\begin{matrix}Видатки\ за\ страховою\ діяльністю \\ (ут.ч.\ комісійні\ винагороди)\end{matrix}}{Загальна\ сума\ страхових\ внесків, що\ надійшли}.$$

Методика визначення ймовірності банкрутства страхових компаній на основі застосування формули Байєса передбачає такі кроки:

- формування і розрахунок показників, що характеризують стійкість (надійність) страхових організацій;
- визначення бінарних характеристик на основі співвідношення значень отриманих показників та допустимих значень за відповідною сукупністю показників (якщо відповідний показник знаходиться в допустимих межах для певної групи, ставиться 0, в іншому випадку – 1);
- визначення ймовірності банкрутства на основі використання формули Байєса.

Оскільки страхові компанії в загальній сукупності не є порівнюваними між собою, тобто сукупність не є однорідною, вважаємо за доцільне розбити їх на групи, однорідні за показником загальної суми активів. Для цього в сукупності визначається середній розмір активів, за яким страхові компанії поділяються на групи. У кожній із зазначених груп знаходимо середні значення. На основі отриманих чотирьох груп страхових компаній проводимо визначення рейтингової оцінки.

Для кожного показника визначаємо середнє значення за кожною виділеною за обсягами активів групою страхових компаній

$$Xcp_j = \frac{\sum_i Ack_{ij}}{Kck_j}, \qquad (9.4)$$

де Xcp_j – середня значення показника за $j = 1 \div 4$ групою страхових компаній;

$\sum_i Ack_{ij}$ – загальна сума значень показника за $j = 1 \div 4$ групою страхових компаній;

Kck_j – загальна кількість страхових компаній за $j = 1 \div 4$ групою страхових компаній.

Для визначення бінарних характеристик за кожним показником щодо кожної страхової компанії певної групи $j = 1 \div 4$ скористаємось формулою

$$Xбін_j \begin{cases} = 0, X_j > Xcp_j \\ = 1, X_j < Xcp_j \end{cases}, \qquad (9.5)$$

де $Xбін_j$ – бінарні характеристики щодо кожної страхової компанії певної групи $j = 1 \div 4$;

X_j – значення показника щодо кожної страхової компанії певної групи $j = 1 \div 4$;

Xcp_j – середня значення частки фінансових операцій, зареєстрованих за ознаками внутрішнього фінансового моніторингу за $i = 1 \div 4$ – групою страхових компаній.

Розглянемо методику розрахунку ймовірності виконання страховою компанією показників, що характеризують її стійкість, використовуючи формулу Байєса. Це можливе, якщо ми можемо отримати певний набір характеристик страхової компанії – $P_C(H1)$, (відповідно $P_C(H2)$ –страхова компанія є стійкою), $C = (c_1, c_2, \ldots, c_{18})$.

За теоремою Байєса

$$P_C(H1) = \frac{P(H1) \cdot P_{H1}(C)}{P(C)} = \frac{P(H1) \cdot p_{H1}(C)}{\sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P_{Hi}(C)} =$$

$$= \frac{P(H1) \cdot P_{H1}(C)}{p(H1) \cdot p_{H1}(C) + p(H2) \cdot p_{H2}(C)} = \frac{1}{1 + \dfrac{P(H2) \cdot P_{H2}(C)}{P(H1) \cdot P_{H1}(C)}},$$

$P(H1) = y_i$, $P(C) = h_i$,

де $y_i (i = 1 \div n)$ – імовірність банкрутства страхової компанії в разі настання події;

b_i – імовірність події C_i для нестійкої страхової компанії.

Коли страхова компанія є стійкою, то отримаємо

$$\frac{P(H2)\cdot p_{H2}(C)}{P(H1)\cdot p_{H1}(C)} = \frac{P(H2)}{P(H1)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} P_{H2}(C_i)}{\prod_{i=1}^{n} P_{H1}(C_i)} = \frac{P(H2)}{P(H1)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{P_{H2}(C_i)}{P_{H1}(C_i)} =$$

$$= \frac{P(H2)}{P(H1)} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{Ci} \left(\frac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-Ci} = \frac{1-y_i}{y_i} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{Ci} \left(\frac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-Ci}.$$

Отже, імовірність банкрутства страхової компанії за умови, що про неї ми можемо отримати певний набір характеристик, розраховується за формулою

$$P_C(H1) = \frac{1}{1 + \frac{1-y_i}{y_i} \prod_{i=1}^{4} \left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{Ci} \left(\frac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-Ci}}. \qquad (9.6)$$

Для формування чотирьох однорідних груп страхових компаній визначимо інтервали значень загальних активів (межі інтервалів – середні значення сукупності, першої і другої груп, які утворені діленням всієї сукупності середнім значенням), які будуть визначати приналежність кожної страхової компанії до певної групи:

- 1 група – обсяг активів від 351 330 тис. грн;
- 2 група – обсяг активів від 137 351 до 351 330 тис. грн;
- 3 група – обсяг активів від 51 237 до 137 351 тис. грн;
- 4 група – обсяг активів до 51 237 тис. грн.

Використання байєсовського аналізу для визначення ймовірності банкрутства страхових компаній в динаміці є ефективним економіко-математичним методом підвищення якості нагляду за страховим ринком України, дозволяє на основі характеристики роботи страхової компанії отримати перспективну оцінку ймовірності банкрутства, виявити приховані недоліки в роботі страхових компаній, провести групування за рівнем стійкості, а головне – отримати числові характеристики рівня стійкості страхових компаній (як поточну, так і в динаміці), на відміну від традиційних методів, які дають лише описову характеристику. Але існує необхідність постійного корегування даного методу відповідно до потреб поточної економічної ситуації.

9.2. ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПЛАТОСПРОМОЖНОСТІ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

В умовах сучасної економічної нестабільності особливо актуальною є проблема підтримки платоспроможності страхової компанії, оскільки забезпечення взятих на себе страховиком зобов’язань є не тільки необхідною складовою його репутації та позиції на страховому ринку, але і визначальним при прогнозуванні ймовірності його банкрутства.

Згідно із законодавством України та директивами Європейського Союзу страховики для забезпечення достатнього рівня платоспроможності повинні відповідно до обсягів страхової діяльності підтримувати належний рівень фактичного запасу платоспроможності (F), який визначається на основі формули (9.7)

$$F = A - bN_A - cZ, \tag{9.10}$$

де A – загальна сума активів страхової компанії;

N_A – сума нематеріальних активів;

Z – сума зобов’язань;

$b > 0$, $c > 0$ – параметри, які показують, на скільки відсотків зменшиться фактичний запас платоспроможності страхової компанії в разі збільшення нематеріальних активів та зобов’язань на 1% відповідно.

Для забезпечення достатнього для ефективного функціонування на фінансовому ринку рівня платоспроможності страхової компанії має виконуватися така умова

$$F > H : F - H \to \max, \tag{9.11}$$

де H – нормативний запас платоспроможності страхової компанії.

Тобто максимізація різниці фактичного та нормативного запасів платоспроможності забезпечуватиме збільшення прибутковості та рентабельності діяльності страхової компанії.

Для забезпечення ефективного функціонування страхової компанії на фінансовому ринку необхідно розглянути формування нормативного запасу платоспроможності для ризикового та лайфового видів страхування. Так, для ризикових видів страхування формування нормативного запасу платоспроможності (H_{NL}) передбачає використання максимального з двох підходів, розрахованих на основі страхових премій (H_1) або страхових виплат (H_2)

$$H_{NL} = \max\{H_1, H_2\},$$
$$H_1 = h_{11}(S - h_{12}S_p),\ H_2 = h_{21}(B - h_{22}B_p), \quad (9.12)$$

де S – сума страхових премій за попередні 12 місяців;

$S_p = \sum_{i=1}^{k} S_{pi}$ – страхові премії, що належать перестраховикам;

B – сума страхових виплат за попередні 12 місяців;

$B_p = \sum_{j=1}^{l} B_{pj}$ – сума страхових виплат, що компенсуються перестраховиками згідно з укладеними договорами перестрахування;

h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14} – параметри встановлення нормативного запасу платоспроможності страхової компанії для ризикових видів страхування.

Визначення нормативного запасу платоспроможності (H_L) для страхування життя базується на використанні математичних резервів

$$H_L = qM, \quad (9.13)$$

де q – параметр встановлення нормативного запасу платоспроможності страхової компанії для страхування життя;

M – математичний резерв (загальна величина резерву довгострокових зобов'язань).

Рівень платоспроможності страхової компанії, який визначається як різниця фактичного і нормативного запасів платоспроможності, визначених раніше, установлюється таким чином:

- для ризикових видів страхування (R_{NL})

$$R_{NL} = A - bN_A - cZ - \max\left\{h_{11}(S - h_{12}\sum_{i=1}^{k} S_{pi}); h_{21}(B - h_{22}\sum_{j=1}^{l} B_{pj})\right\} \to \max; \quad (9.14)$$

- для лайфових видів страхування (R_{NL})

$$R_L = A - bN_A - cZ - qM \to \max. \quad (9.15)$$

На основі запропонованої вище методики можна визначити та ідентифікувати рівень платоспроможності страхової компанії:

а) для ризикових видів страхування (R_{NL}):

- $R_{NL} > 0$ – критичний рівень платоспроможності;
- $R_{NL} = 0$ – мінімальний рівень платоспроможності.

$$R_{NL} \in \left(0; \frac{1}{2} \max_k \left[\min \left\{ A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{11} \left(S_k - h_{12} \sum_{i=1}^{k} S_{pik} \right), A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{21} \left(B_k - h_{22} \sum_{j=1}^{l} B_{pjk} \right) \right\} \right] \right), \quad (9.16)$$

де k – період складання страховою компанією фінансової звітності;

- достатній рівень платоспроможності;

$$R_{NL} \in \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \max\limits_k \left[\min \left\{ A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{11} \left(S_k - h_{12} \sum_{i=1}^{k} S_{pik} \right), A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{21} \left(B_k - h_{22} \sum_{j=1}^{l} B_{pjk} \right) \right\} \right] \\ \max\limits_k \left[\min \left\{ A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{11} \left(S_k - h_{12} \sum_{i=1}^{k} S_{pik} \right), A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{21} \left(B_k - h_{22} \sum_{j=1}^{l} B_{pjk} \right) \right\} \right] \end{array} \right); \quad (9.17)$$

- високий рівень платоспроможності;

б) для лайфових видів страхування (R_{NL}):

- $R_{NL} < 0$ – критичний рівень платоспроможності;
- $R_{NL} = 0$ – мінімальний рівень платоспроможності:

$$R_L \in \left(0; \frac{1}{2} \max_k \left[A_k - bN_{Ak} - cZ_k - qM_k \right] \right); \quad (9.18)$$

- достатній рівень платоспроможності;

$$R_L \in \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \max\limits_k \left[A_k - bN_{Ak} - cZ_k - qM_k \right] \\ \max\limits_k \left[A_k - bN_{Ak} - cZ_k - qM_k \right] \end{array} \right), \quad (9.19)$$

- високий рівень платоспроможності.

Отже, наведена методика надає можливість визначити оптимальний рівень платоспроможності на основі перестрахової діяльності страхової компанії та визначити основні чинники (страхові премії та страхові виплати), які на нього впливають. Це дозволяє оперативно реагувати на зміни платоспроможності та здійснювати її подальше регулювання.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які показники використовуються для визначення ймовірності банкрутства?
2. За допомогою розрахунку яких показників здійснюється оцінка фінансового стану страхової компанії?
3. Які етапи методики визначення банкрутства на основі формули Байєса?

ТЕСТИ

1. Які з перерахованих показників використовуються для визначення ймовірності банкрутства страхової компанії:
   а) частка валових надходжень страхових платежів у сумарних активах;
   б) співвідношення сплаченого статутного капіталу та сумарних активів;
   в) частка страхових платежів, які повертаються страхувальникам;
   г) частка страхових платежів, які повертаються перестраховикам;
   д) коефіцієнт фінансової стабільності страхової компанії;
   е) коефіцієнт фінансової стійкості страхової компанії.

2. Методика визначення ймовірності банкрутства страхових компаній на основі застосування формули Байєса передбачає такі кроки (так, ні):
   а) формування і розрахунок показників, що характеризують стійкість (надійність) страхових організацій;
   б) визначення бінарних характеристик на основі співвідношення значень отриманих показників та допустимих значень за відповідною сукупністю показників: якщо відповідний показник знаходиться в допустимих межах для певної групи, ставиться 0, в іншому випадку – 1;
   в) визначення ймовірності банкрутства на основі використання формули Байєса;
   г) поділ страхових компаній на однорідні групи.

3. Імовірність банкрутства страхової компанії за умови, що про неї можна отримати певний набір характеристик, розраховується за формулою $P_C(H1)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1-y_i}{y_i}\prod\limits_{i=1}^{4}\left(\dfrac{b_i}{g_i}\right)^{C_i}\left(\dfrac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-C_i}}$:
   а) так;
   б) ні.

4. Показник
$$K_{ф.ст}=\frac{\begin{pmatrix}\textit{Сплачений}\\ \textit{статутний капітал}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\textit{Інші}\\ \textit{власні кошти}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\textit{Страхові}\\ \textit{резерви}\end{pmatrix}}{\textit{Загальна сума страхових внесків, що надійшли}}-\text{це}:$$
   а) коефіцієнт фінансової стійкості страхової компанії;
   б) коефіцієнт фінансової стабільності страхової компанії;
   в) оцінка фінансового стану страхової компанії.

Тема 10. ВИЗНАЧЕННЯ СТРАХОВОГО ТАРИФУ В СТРАХУВАННІ ЖИТТЯ

10.1. ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ТАРИФНОЇ СТАВКИ ЗІ СТРАХУВАННЯ ЖИТТЯ ТА ЇЇ СТРУКТУРА

Тарифна ставка. Брутто-ставка. Нетто-ставка. Навантаження. Структура тарифної ставки змішаного страхування життя

10.2. ТАБЛИЦЯ СМЕРТНОСТІ

Таблиця смертності

10.3. НОРМА ПРИБУТКОВОСТІ

Поняття норми прибутковості. Таблиця відсоткових множників. Дисконтувальний множник. Таблиця дисконтувальних множників

10.4. ТАРИФНІ СТАВКИ ЗА ЗМІШАНИМ СТРАХУВАННЯМ ЖИТТЯ

Нетто-ставка на дожиття. Нетто-ставка на випадок смерті. Нетто-ставка на випадок втрати працездатності. Навантаження

10.5. РІЧНА НЕТТО-СТАВКА

10.6. БРУТТО-СТАВКА

10.7. АНАЛІТИЧНІ ЗАКОНИ СМЕРТНОСТІ

Модель де Муавра. Модель Гомпертца. Модель Мейкхама. Модель Вейбулла

10.1. ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ТАРИФНОЇ СТАВКИ ЗІ СТРАХУВАННЯ ЖИТТЯ І ЇЇ СТРУКТУРА

Побудова тарифів зі страхування життя має свої особливості:

- розрахунки провадяться з використанням демографічної статистики і теорії ймовірності;
- для розрахунків застосовуються способи довгострокових фінансових розрахунків;
- тарифні нетто-ставки складаються з кількох частин, кожна з яких покликана сформувати страховий фонд за одним з видів страхової відповідальності, який включений в умови страхування.

Тарифна ставка визначає, скільки грошей кожний зі страхувальників повинен внести в загальний страховий фонд з одиниці страхової суми. Тому тарифи повинні бути розраховані так, щоб сума зібраних внесків виявилася достатньою для виплат, передбачених умовами страхування. Таким чином, тарифна ставка – це ціна послуги, що надається страховиком, тобто своєрідна ціна страхового захисту. Від чого ж залежать її розміри, як установити ціну на той чи інший вид страхування життя?

Повна тарифна ставка називається брутто-ставкою. Вона складається з нетто-ставки і навантаження. Завдання нетто-ставки – забезпечити виплати страхових сум, тобто виконання фінансових зобов’язань страховика за договорами страхування. Навантаження призначене компенсувати витрати на проведення страхових операцій.

Своєрідність операцій страхування життя виявляється при побудові нетто-ставки. Умови страхування життя звичайно передбачають виплати у зв’язку з дожиттям застрахованого до закінчення терміну дії договору страхування чи у випадку його смерті протягом цього терміну. Крім того, передбачаються виплати внаслідок втрати здоров’я через травму та деякі хвороби.

Таким чином, для розрахунку обсягу страхового фонду потрібно мати відомості про те, скільки осіб із застрахованих доживе до закінчення терміну дії їх договорів страхування і скільки з них щороку може вмерти; скільки з них і якою мірою втратять здоров’я. Кількість виплат, помножена на відповідні страхові суми, дозволить визначити розміри майбутніх виплат, тобто з’явиться можливість дізнатися, у яких розмірах потрібно буде акумулювати страховий фонд.

Тривалість життя окремих людей коливається в широких межах. Вона належить до категорії випадкових величин, кількісне значення яких залежить від багатьох факторів, настільки віддалених і складних, що, здавалося б, їх неможливо виявити і вивчити. Теорія ймовірності і статистика досліджують випадкові явища, що мають масовий характер, у тому числі смертність населення. Установлено, що демографічний процес зміни поколінь, що виражається в зміні рівня повікової смертності, підпорядкований закону великих чисел, настільки одноманітному у своїх проявах і настільки достовірному в результатах, що він може бути основою фінансових розрахунків у страхуванні.

Демографічною статистикою виявлена і виражена за допомогою математичних формул залежність смертності від віку людей. Розроблено спеціальну методику складання так званих таблиць смертності, де на конкретних цифрах показується послідовна зміна смертності внаслідок віку. Цими таблицями страхові компанії користуються для розрахунку тарифів.

Крім закономірностей, пов'язаних із процесом дожиття і смертності, при побудові тарифів враховується довгостроковий характер операцій страхування життя, оскільки ці договори укладаються на тривалі терміни від трьох років. Протягом усього часу їх дії (чи на самому початку терміну страхування при одноразовій сплаті) страхові компанії одержують внески. Виплати ж страхових сум проводяться протягом терміну страхування чи після закінчення певного періоду від початку дії договору, якщо настане смерть застрахованого чи він втратить здоров'я.

Тимчасово вільні кошти акумулюються страховою компанією і використовуються як кредитні ресурси. За користування ними сплачується позичковий відсоток. Але якщо в ощадній операції дохід від відсотків приєднується до внеску, то в страхуванні на суму цього доходу заздалегідь зменшуються (дисконтуються) внески страхувальника, що підлягають сплаті. Для того щоб заздалегідь понизити тарифні ставки на той дохід, що буде утворюватися протягом кількох років, використовуються методи теорії довгострокових фінансових розрахунків.

Тарифні ставки у страхуванні життя складаються з кількох частин. Візьмемо для прикладу змішане страхування життя. У ньому поєднуються кілька видів страхування, які могли б бути й самостійними:

- страхування на дожиття;
- страхування на випадок смерті;
- страхування від нещасних випадків.

За кожним з них за допомогою тарифу створюється страховий фонд, тому тарифна ставка в змішаному страхуванні складається з трьох частин, що входять у нетто-ставку, і четвертої частини – навантаження.

Аналогічний склад має структура тарифних ставок і за іншими видами страхування життя.

Структура тарифної ставки наведена на рис. 10.1.

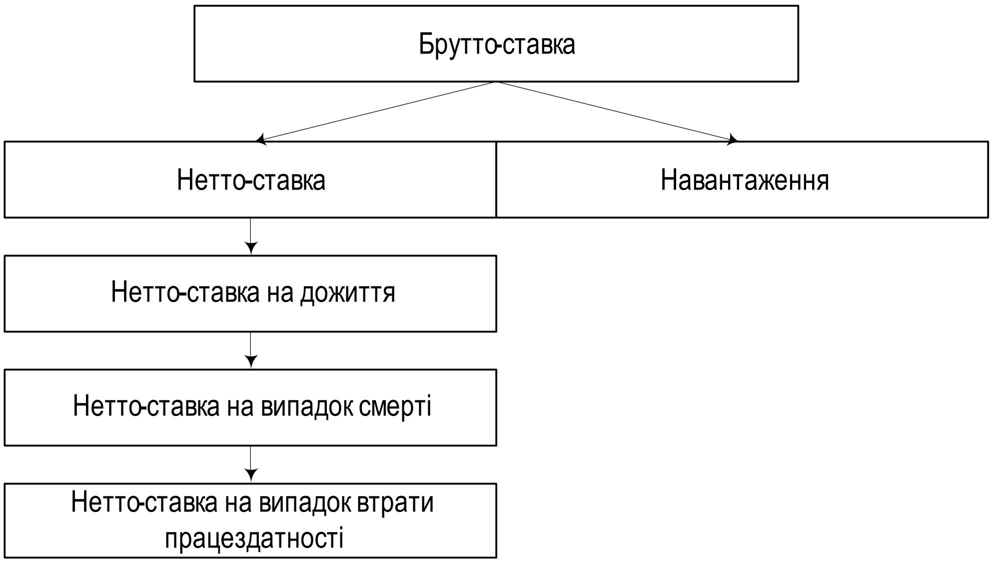


Рис. 10.1. Структура тарифної ставки змішаного страхування життя

10.2. ТАБЛИЦЯ СМЕРТНОСТІ

Страхові операції ґрунтуються на принципі еквівалентності фінансових зобов’язань страховика і страхувальника. Тому перш ніж визначити, скільки кожен страхувальник повинен внести в загальний страховий фонд, необхідно встановити розмір виплат страховика.

Оскільки умови договорів страхування життя звичайно передбачають виплати в зв’язку з дожиттям застрахованого до визначеного терміну чи його смертю, для розрахунку відповідних витрат страховій компанії потрібно мати відомості про те, скільки осіб доживе до закінчення терміну дії договору і скільки з них щороку може померти.

Математика і статистика досліджують випадкові явища, що мають масовий характер, у тому числі смертність населення. Як установлено науковими дослідженнями, так званий процес вимирання покоління підпорядкований закону великих чисел.

Демографічною статистикою розроблена спеціальна методологія складання так званих таблиць смертності. Вона містить розрахункові показники, що характеризують смертність населення в окремих вікових групах і дожиття при переході від одного віку до наступного. Табл. 10.1 показує, як покоління одночасно народжених (умовно прийняте за 100 000) зі збільшенням віку поступово зменшується.

Такими таблицями (власними чи складеними на основі переписів населення) користуються страхові компанії для розрахунків тарифних ставок зі страхування життя.

У цій таблиці прийняті позначення: l_x – число осіб, що доживає до кожного наступного віку, яке показує, скільки зі 100 000 одночасно народжених доживає до 1 року, 5 років,..., 20, ..., 50 років тощо; d_x – число вмираючих при переході від віку x до віку $(x + 1)$ років. Вони показують, скільки з доживаючих до кожного віку вмирає, не доживши до наступного віку. Сума чисел умираючих від нульового і до граничного віку дорівнює вихідному числу таблиці смертності, тобто 100 000; q_x – імовірність померти протягом майбутнього року життя, не до-живши до наступного віку $(x + 1)$ років. Ця ймовірність показує, яка частка тих, що дожили до даного віку, помирає, не доживши до наступного, і є відношенням числа вмираючих при переході від віку x до віку $(x + 1)$ до числа тих, що доживають до даного віку x

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \tag{10.1}$$

Величина ймовірності померти звичайно виражається стотисячними частками одиниці. Наприклад, імовірність померти у віці 40 років дорівнює 0,00358. Це означає, що в середньому на кожні 100 000 осіб у віці 40 років припадає 358 осіб, що помирають протягом найближчого року. Показник імовірності померти можна виразити також у проміле чи відсотках. Для 40-річних він дорівнюватиме 3,58‰ чи 0,358%; P_x – імовірність дожити до $x + 1$ років.

Наведена таблиця показує, що з абстрактної сукупності 100 000 народжених через рік залишається в живих 98 719 осіб, оскільки 1 281 особа. помирає на першому році життя. До 20 років з них залишиться в живих 97 464 особи, до 30 років – 95 982, до 40 – 93 597 тощо. Первісна сукупність народжених 100 000 чол. щороку скорочується і поступово вимирає.

Для того, щоб читати таблицю смертності, беремо, наприклад, рядок для віку 40 років, тобто коли $x = 40$, $l_x = 93\,597$ (це означає, що зі 100 000 народжених до 40 років доживе 93 597 осіб); $d_{40} = 335$. Отже, у віці 40 років, або на 41-у році життя, помирає 335 осіб. До 41 року доживе тільки 93 262 (93 597 – 335), або $l_{40} - d_{40} = l_{41}$; $q_{40} =$

= 0,00358 й означає відношення числа осіб, що помирають на 41-му році життя (d_{40} = 335), до числа осіб, що дожили до 40 років: l_x = 93 597.

Таблиця 10.1. Зразок таблиці смертності

Вік у роках	Число тих, що доживають до віку *x* років	Число вмираючих при переході від *x* до (*x* + 1) років	Імовірність померти протягом наступного року життя	Імовірність дожити до (*x* + 1) років
0	100 000	1281	0,012 81	0,987 19
1	98 719	172	0,001 74	0,998 26
2	98 547	93	0,000 94	0,999 06
3	98 454	69	0,000 70	0,999 30
4	98 385	59	0,000 60	0,999 40
5	98 326	53	0,000 54	0,999 46
6	98 273	48	0,000 49	0,999 51
7	98 225	45	0,000 46	0,999 54
8	98 180	42	0,000 43	0,999 57
9	98 138	39	0,000 40	0,999 60
10	98 099	37	0,000 38	0,999 62
11	98 062	36	0,000 37	0,999 63
12	98 026	38	0,000 39	0,999 61
13	97 988	43	0,000 44	0,999 56
14	97 945	51	0,000 52	0,999 48
15	97 894	61	0,000 62	0,999 38
16	97 833	73	0,000 75	0,999 25
17	97 760	86	0,000 88	0,999 12
18	97 674	99	0,001 01	0,998 99
19	97 575	111	0,001 14	0,998 86
20	97 464	122	0,001 25	0,998 75
…	…	…	…	…
30	95 982	179	0,001 86	0,998 14
…	…	…	…	…
40	93 597	335	0,003 58	0,996 42
41	93 262	360	0,003 86	0,996 14
42	92 902	390	0,004 20	0,995 80
43	92 512	422	0,004 56	0,995 44
44	92 090	259	0,004 98	0,995 02
45	91 631	298	0,005 43	0,994 57
…	…	…	…	…

Показники ймовірності померти є основними в таблиці смертності, від них залежать усі інші числа. У них сконцентрована закономірність процесу вимирання покоління. А вся таблиця детально характеризує цей процес.

Маючи показники ймовірності померти, страховик із достатнім ступенем упевненості може очікувати, що протягом найближчого року з числа застрахованих у віці 40 років може померти 0,36%, у віці 41 року – 0,39%, 50 років – 0,71%. У окремі роки ці числа можуть бути трохи більшими чи меншими, але ймовірність занадто великих відхилень є надзвичайно низькою, і чим більша величина відхилення, тим менша ймовірність того, що воно може відбутися.

Таблиця смертності дає можливість також із достатнім ступенем упевненості стверджувати, що із 40-літніх осіб до 45 років не доживуть 1966, тобто

$$(d_{40} + d_{41} + \ldots + d_{44}), \text{ чи } (l_{40} - l_{45}), \text{ тобто } (l_x - l_{x+n}) = \sum_{i=x}^{x+n-1} di.$$

Показники з таблиці смертності використовуються для розрахунків тарифних ставок зі страхування життя.

Маючи таблицю смертності, страхова компанія одержує для кожного періоду, який її цікавить, необхідні відомості про найбільш імовірну кількість помираючих і осіб, що доживають, з числа застрахованих, тобто вона може довідатися, скільком приблизно особам у якомусь певному році необхідно буде виплатити страхові суми за випадками смерті чи дожиття, у скількох осіб припиняться тимчасові страхування на випадок смерті чи рентні страхування і т. ін.

Вибір таблиці смертності для кожної страхової компанії є дуже важливою проблемою, тому що від цього залежать розміри тарифних ставок, утворення резерву страхових внесків, фінансова стійкість операцій.

У міжнародній страховій практиці відомі загальні, усічені і збірні таблиці смертності.

У загальних таблицях наводяться повікові показники ймовірності померти, що виявилися протягом першого року після укладання договору страхування окремо для кожного року страхування, в усічених таблицях – повікові показники ймовірності померти тільки тих осіб, що вже були застраховані протягом кількох років, і дані медичного огляду вже не діють. Узагалі медичний огляд осіб, прийнятих на страхування, не дає тривалого ефекту.

У збірних таблицях містяться повікові показники ймовірності померти для всіх застрахованих незалежно від терміну страхування.

Користуючись різними таблицями, страхові компанії прагнуть зміцнити фінансову стійкість операцій. Справа в тому, що в тих країнах, де страхуванням охоплена значна частина населення і діє багато його різновидів, відбувається процес стихійного самодобору застрахованих.

За умови значної різноманітності видів страхування життя доцільним є застосування загальних, усічених і збірних таблиць смертності.

Багато страхових компаній здійснюють власні статистичні спостереження і на їх основі будують таблиці смертності. Ураховуються також причини випадків смерті з метою введення тих чи інших пільг або обмежень в умовах страхування.

Сьогодні побудова тарифних ставок ґрунтується на даних державної статистики, заснованих на матеріалах переписів населення. Це цілком правомірно, оскільки в країні переважає змішане страхування, що поєднує в собі страхування на дожиття і на випадок смерті.

Отже, використовуючи таблицю смертності, можна встановити ймовірну кількість виплат за договорами страхування, а в разі знання страхових сум – розмір фонду, який повинна мати страхова компанія, щоб виплатити страхові суми, тобто розмір страхового фонду.

Однак, перш ніж визначити частку участі кожного зі страхувальників у створенні такого фонду, тобто обчислити розмір страхових внесків, необхідно взяти до уваги ще один показник – норму прибутковості.

10.3. НОРМА ПРИБУТКОВОСТІ

Операції зі страхування життя відрізняються довготерміновістю. Договори можуть укладатися, наприклад, на 5, 10, 15, 20 років. Протягом усього часу їх дії страхові компанії одержують внески. Виплати ж страхових сум провадяться в більшості випадків після закінчення цих термінів, а також (набагато рідше) – після втрати застрахованим працездатності чи його смерті протягом терміну дії договору.

Тимчасово вільні кошти акумулюються страховими компаніями та використовуються в економіці. У разі розміщення їх у банку на ці кошти страховим компаніям нараховуються складні відсотки річного доходу. На величину одержуваного доходу страхові компанії зменшують тарифні ставки.

Нормою прибутковості називається розмір принесеного за рік кожною одиницею грошової суми доходу, що нараховується на кошти зі страхування життя, тимчасово використовувані банками як кредитні ресурси.

Норму прибутковості прийнято позначати символом i. Так, вираз $i = 0{,}03$ означає, що кожна грошова одиниця за рік приносить 3% доходу, $i = 0{,}05 = 5\%$ тощо. У страхуванні дохід розраховується відносно однієї грошової одиниці, а не сотні одиниць, як це робиться в інших випадках.

Абсолютний розмір доходу, одержуваного страховими компаніями, крім норми прибутковості, залежить ще й від розміру тієї суми, яку вони розміщують у економіці, і від часу, протягом якого ця сума була в обігу.

Для прикладу підрахуємо у що перетвориться грошова сума у 100 грн через 10 років.

Ту грошову суму, що буде давати дохід (у нашому прикладі 100 грн), позначимо як A; час, протягом якого вона знаходиться в обігу (10 років), – n, норму прибутковості (3%) – літерою i. Розрахунок провадиться за формулою складних відсотків, тобто наприкінці кожного року дохід, що утворився за цей рік, приєднується до грошової суми на початок року, тому в наступному році дохід дає вже нова, нарощена сума.

За норми прибутковості i через рік, кожна грошова одиниця, наприклад 1 грн, перетвориться в $(1 + i)$, тобто якщо $i = 0{,}03$, то 1 грн 03 коп. (1 грн + 0,03 грн).

Якщо одна грошова одиниця перетворилася в $(1 + i)$, то A таких одиниць – в $A(1 + i)$, чи 103 грн.

Суму, що утвориться до кінця першого року (103 грн), позначимо літерою B_1, тоді $B_1 = A(1 + i)$.

Через 10 років первісна грошова сума A дасть нарощену суму $B_{10} = A(1 + i)^{10}$, *а* через n років перетвориться в

$$B_n = A(1 + i)^n. \qquad (10.2)$$

Величина $(1 + i)$ називається відсотковим множником, який за n років становитиме $(1 + i)^n$.

У нашому прикладі сума в 100 грн через 10 років за $i = 0{,}03$ дорівнюватиме:

$B_{10} = 100(1 + 0{,}03)^{10} = 100\ 1{,}03^{10} = 134$ грн 39 коп.

Практикою страхової справи напрацьовані спеціальні таблиці, що полегшують повсякденні актуарні розрахунки. Серед них є таблиця зі значеннями чисел $(1 + i)^n$ при заданій нормі прибутковості. Наведемо таку таблицю, яка для прикладу вмістить кілька термінів (табл. 10.2).

Звіримо отриманий у наведеному прикладі результат 134 грн 39 коп. з даними таблиці. Для цього знайдемо, у що перетворюється за 10 років кожна гривня за $i = 0{,}03$. Відповідно до таблиці – у 1,34392 грн, а 100 грн – у 134 грн 39 коп.

Очевидно, що вища норма прибутковості, то швидше зростає початкова сума. Так, грошова сума збільшується вдвічі за 5% норми прибутковості приблизно за 14 років, за 4% – за 18, за 3% – за 23 роки.

*Таблиця 10.2.*Таблиця відсоткових множників

Кількість років, n	Значення чисел $(1 + i)^n$ за:		
	$i = 0{,}3$	$i = 0{,}4$	$i = 0{,}5$
1	1,030 00	1,040 00	1,050 00
2	1,060 90	1,081 60	1,102 50
3	1,092 73	1,124 86	1,157 63
4	1,125 51	1,169 86	1,215 51
5	1,159 27	1,216 65	1,276 28
10	1,343 94	1,488 24	1,628 89
14	1,512 59	1,731 68	1,979 93
15	1,557 97	1,800 94	2,078 93
18	1,702 43	2,025 82	2,406 62
20	1,806 11	2,191 12	2,653 30
23	1,973 59	2,464 72	3,071 52
30	2,427 26	3,243 40	4,321 94
50	4,383 91	7,106 68	11,467 40

На основі формули $B_n = A(1 + i)^n$ можна встановити ще одну дуже важливу для розрахунків тарифів залежність.

Використовуючи таблицю смертності, страховик визначає розмір страхового фонду, необхідного для виплат в узгоджений термін страхових сум. Позначимо його як величину B_n. Далі йому потрібно знайти величину A, тобто визначити, яким повинен бути розмір страхового фонду на початок терміну страхування.

$$A = \frac{B_n}{(1+i)^n}. \tag{10.3}$$

Для спрощення розрахунків вводиться додатковий показник v, який називається дисконтувальним множником:

$$v = \frac{1}{1+i}. \tag{10.4}$$

Показник, піднесений до ступеня *n*, є дисконтувальним множником за *n* років, тобто

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n}. \qquad (10.5)$$

Він дозволяє довідатися, скільки потрібно внести сьогодні, щоб через кілька років мати грошовий фонд певного розміру з урахуванням заданої норми прибутковості, тобто визначити сучасну вартість цього фонду.

Тарифні ставки в страхуванні життя обчислюються з урахуванням того, що грошові суми, які надійшли у вигляді страхових внесків, протягом певного проміжку часу, даючи якийсь дохід, збільшаться, тобто вони визначаються на підставі сучасної вартості страхового фонду.

Із застосуванням показника v^n формула для визначення величини *A* набуває такого вигляду

$$A = B_n \cdot v^n. \qquad (10.6)$$

Таблиця 10.3. Таблиця дисконтуючих множників

Кількість років, *n*	Дисконтувальні множники за		
	i = 0,3	*i* = 0,4	*i* = 0,5
1	0,970 87	0,961 54	0,952 38
2	0,942 60	0,924 56	0,907 03
3	0,915 14	0,839 00	0,863 84
4	0,888 49	0,854 80	0,822 70
5	0,862 61	0,821 93	0,783 53
10	0,744 09	0,675 56	0,613 91
14	0,661 12	0,577 48	0,505 07
15	0,641 86	0,555 26	0,481 02
18	0,587 39	0,493 63	0,415 52
20	0,553 68	0,456 39	0,376 89
23	0,506 69	0,405 73	0,325 57
30	0,411 99	0,308 32	0,231 38
40	0,306 56	0,208 29	0,142 05
50	0,228 11	0,140 71	0,087 20

Абсолютні значення показника v^n містяться в спеціальній таблиці (табл. 10.3), що використовується потім для розрахунку тарифів.

Зі збільшенням норми прибутковості i і терміну страхування n абсолютні значення множників, що дисконтують, зменшуються.

Формула $B_n = A(1 + i)^n$ дає можливість визначати й інші показники, які входять до неї (n, i).

Таким чином, залежність тарифних ставок від рівня смертності застрахованих і норми прибутковості складається об'єктивно і не може довільно змінюватися.

При визначенні тарифів зі страхування життя необхідно враховувати об'єктивні закономірності руху рівня смертності застрахованих, норми прибутковості, їх взаємозв'язок і вплив на величину тарифних ставок.

10.4. ТАРИФНІ СТАВКИ ЗА ЗМІШАНИМ СТРАХУВАННЯМ ЖИТТЯ

Уклавши договір страхування життя, страхувальник і страховик починають виконувати свої фінансові зобов'язання.

Фінансові зобов'язання полягають у сплаті страхових внесків. Якщо страхувальник сплачує їх одразу при укладанні договору, то такий внесок називається одноразовим. Якщо ж він виконує свої зобов'язання протягом усього терміну страхування, застосовуються річні внески, які потім можуть сплачуватись у розстрочку щомісяця.

Умови змішаного страхування життя передбачають виплату страхової суми в разі дожиття, смерті та внаслідок утрати працездатності від нещасного випадку. Для виплат за кожним видом страхової відповідальності страховик повинен створити в себе страховий фонд. Крім того, йому необхідні кошти для компенсації витрат на проведення страхових операцій. Тому тарифна ставка за змішаним страхуванням життя складається:

- з нетто-ставки на дожиття;
- з нетто-ставки на випадок смерті;
- з нетто-ставки на випадок утрати працездатності;
- з навантаження.

Розглянемо послідовно процес побудови тарифних ставок.

Одноразова нетто-ставка на дожиття. Візьмемо конкретний приклад: особа у віці 40 років (x = 40) укладає договір страхування на дожиття терміном на 5 років на суму 100 грн. Яким повинен бути для неї розмір одноразового страхового внеску?

Уявимо, що такі договори страхування уклали всі сорокарічні особи з наведеної вище таблиці смертності. Після закінчення п'яти років страховій компанії необхідно буде виплатити певну кількість страхових сум тим, хто доживе до закінчення терміну дії договору. За допомогою таблиці смертності знаходимо, що до 45 років доживе 91 631 особа. Тобто й виплат буде 91 631. Страхова сума кожного договору – 100 грн. Отже, страховий фонд, призначений для цих виплат, повинен становити

100 грн · 91 631 = 9 163 100 грн.

Однак на початку страхування він може мати менші розміри, ураховуючи, що щороку на нього буде наростати 3% (складних) доходу. Щоб відповідним чином зменшити цей фонд, тобто знайти його сучасну вартість, застосуємо дисконтувальний множник за 5 років, який дорівнює при 3% нормі прибутковості 0,862 61.

9 163 100 грн · 0,862 61 = 7 904 182 грн.

Отже, щоб через 5 років мати кошти для виплати страхових сум з дожиття, страхова компанія на початку страхування повинна мати у своєму розпорядженні фонд у 7 904 182 грн. Цю суму й потрібно одноразово зібрати зі страхувальників. Різниця між сумою збору і сумою виплат буде покрита за рахунок 3% доходу на зібрані кошти. 7 904 182 грн є сучасною вартістю 9 163 100 грн, що будуть виплачені через 5 років.

Щоб визначити розмір внеску кожного із застрахованих у цей загальний фонд, розділимо отриману суму на число осіб на початку страхування (див. таблицю смертності, $x = 40$). Одержимо

7 904 182 грн / 93 597 = 84 грн 45 коп.

Це й буде одноразова нетто-ставка на дожиття. Розмір тарифної ставки було, відповідно, обчислено таким чином:

(91 631 · 0,862 61 : 93 597) · 100 = 84,45.

91 631 – це кількість осіб, що доживають до 45 років, яке позначається символом l_{x+n}, де x – вік на початку страхування, n – термін страхування, 0,862 61 – дисконтний множник, 93 597 – кількість осіб на початку страхування l_x, 100 – страхова сума S.

Звідси отримаємо формулу

$$ {}_nE_x = \frac{(l_{x+n} \cdot v^n)}{l_x \cdot S}, \qquad (10.7) $$

де ${}_nE_x$ – одноразова нетто-ставка зі страхування на дожиття для осіб у віці x років терміном на n років.

Підставляючи в цю формулу відповідні значення, можна обчислити розмір тарифної ставки зі страхування на дожиття для будь-якого віку і терміну. Наприклад, для особи віком 30 років, застрахованої на 10 років, одноразова нетто-ставка зі страхування на дожиття становитиме

$$ {}_{10}E_{30} = \frac{(l_{40} \cdot v^{10})}{l_{30}} S = \frac{93\ 597 \cdot 0{,}744\ 09}{95\ 982} \cdot 100 = 72 \text{ грн } 56 \text{ коп.} $$

Одноразова нетто-ставка на випадок смерті. Припустимо, що особа у віці 40 років укладає договір страхування на випадок смерті терміном на 5 років на 100 грн. Якщо, обчислюючи нетто-ставку на дожиття, необхідно було знайти число осіб, що доживають до 45 років, то тепер слід визначити кількість застрахованих, які не доживуть до 45 років.

За таблицею смертності знаходимо, що у віці 40 років звичайно помирає 335 осіб, у віці 41 року – 360, 42 років – 390, 43 років – 422, 44 років – 459 осіб. Отже, страховій компанії необхідно виплатити внаслідок випадків смерті на першому році страхування 33 500 грн, на другому – 36 000 грн тощо. Перемноживши ці суми на відповідні (для одного року, двох років і т. ін.) дисконтувальні множники знайдемо сучасну вартість майбутніх п'ятирічних виплат за випадками смерті:

33 500 · 0,970 87 + 36 000 · 0,942 60 + 39 000 · 0,915 14 + 42 200 · · 0,888 49 +...+ 45 900 · 0,862 61 = 179 237 грн.

Розділимо отриману суму на число осіб, що вступають у страхування

179 237 : 93 597 = 1 грн 91 коп.

Отже, особи у віці 40 років, уклавши договір страхування на випадок смерті на страхову суму 100 грн, повинні при укладанні договору внести в загальний страховий фонд 1 грн 91 коп.

Розмір тарифної ставки був обчислений за допомогою таких дій

(335 · 0,970 87 + 360 · 0,942 60 + ...+ 459 · 0,862 61) / 93 597 · 100 = = 1,91,

де 335 – число осіб, що помирають у віці 40 років, або d_x;

360 – число осіб, що помирають у віці 41 року, або d_{x+1};

459 – число осіб, що помирають на останньому році страхування, або d_{n+m-1};

0,970 87; 0,942 60, ... і т.д. – дисконтувальні множники, для відповідних років страхування: (v, v^2, …, v^n);

93 597 – число осіб при вступі в страхування l_x;

100 – страхова сума, або S.

Одноразова нетто-ставка зі страхування на випадок смерті для осіб у віці d_x років за терміну страхування n років позначається символом A

$$ {}_nA_x = \frac{(d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + \ldots + d_{x+n-1} \cdot v^n)}{l_x} \cdot S. \qquad (10.8) $$

Користуючись цією формулою, можна обчислити розмір тарифної ставки зі страхування на випадок смерті для осіб будь-якого віку на будь-який термін.

Виводячи формули, ми переконуємося, що одноразові нетто-ставки дорівнюють сучасній вартості взаємних фінансових зобов’язань страховика і страхувальника.

10.5. РІЧНА НЕТТО-СТАВКА

Для більшості страхувальників зручніше робити внески протягом усього періоду страхування. Для цього обчислюються річні нетто-ставки.

Визначаючи розмір річної нетто-ставки, не можна механічно ділити одноразову ставку на число років страхування. Необхідний особливий розрахунок, що враховує як втрату доходу на відсотках, так і зменшення числа застрахованих через смертність. У випадку одноразової сплати більша грошова сума надходить одразу в обіг, і на неї наростають відсотки. У разі ж річних внесків частина доходу, одержаного за рахунок відсотків, втрачається. Крім того, у випадку одноразового внеску всі страхувальники погашають свої внески одразу, а в разі річної сплати за низкою договорів внески не будуть виплачені повністю, оскільки певна кількість застрахованих протягом терміну дії договорів може померти (див. таблицю смертності).

Для обчислення річних ставок застосовуються спеціальні коефіцієнти розстрочки (ануїтети).

Розглянемо конкретний приклад. Уявімо: усі 93 597 осіб 40-річного віку, що значаться в таблиці смертності, зобов’язалися протягом п’яти років наприкінці кожного року вносити страховій компанії по 1 грн. Але, оскільки протягом п’яти років частина застрахованих може померти, страхова компанія одержить відповідно до таблиці смертності: наприкінці першого року – 93 262 грн; другого року – 92 902 грн; третього року – 92 512 грн; четвертого року – 92 090 грн; п’ятого року – 91 631 грн.

Сучасна вартість суми, внесеної в першому році, дорівнює 93 262 · 0,970 87 (0,970 87 – дисконтувальний множник за один рік). Сучасна вартість внесків другого року дорівнює 92 902 · 0,942 60 (0,942 60 – дисконтувальний множник за 2 роки) і т.д. Перемноживши суми внесків кожного року на відповідні дисконтувальні множники, знайдемо сучасну вартість загальної суми внесків усіх застрахованих. Розділивши отриману величину на 93 597 (кількість осіб, що вступили у страхування), розраховуємо сучасну вартість річних внесків у розмірі 1 грн, сплачених протягом п'яти років кожним із 40-річних застрахованих. У результаті підрахунку отримаємо 4 грн 53 коп. Це означає, що протягом п'яти років страхувальник буде вносити страховій компанії по 1 грн і всього він внесе 5 грн. Сучасна вартість цих 5 грн у момент укладання договору страхування дорівнює 4 грн 53 коп. Сучасна вартість річних внесків у розмірі 1 грн називається коефіцієнтом розстрочки (ануїтетом) і позначається символом ${}_na_n$.

Якщо в наведеному розрахунку замінити цифрові значення літерними позначеннями, отримаємо формулу

$$ {}_na_x = \frac{(l_x + 1 \cdot v + l_x + 2 \cdot v^2 + ... + l_x + n \cdot v^{x+n})}{l_x}. \qquad (10.9)$$

У ній враховується і норма прибутковості, і природне зменшення через смертність числа застрахованих осіб протягом терміну страхування.

Як відомо, одноразова нетто-ставка дорівнює сучасній вартості взаємних фінансових зобов'язань страховика і страхувальника. Якщо страхувальник погашає свої фінансові зобов'язання річними внесками, одноразова ставка дорівнює сучасній вартості суми річних внесків.

Коефіцієнт розстрочки дорівнює сучасній вартості річних внесків у розмірі 1 грн. Отже, одноразова ставка так відноситься до річної, як коефіцієнт розстрочки до 1 грн. Складемо пропорцію.

Одноразова ставка: $ {}_na_x = \dfrac{\textit{Річна ставка}}{\dfrac{{}_nP_x}{1}}.$

Звідси річна ставка дорівнює одноразовій, помноженій на 1 грн і поділеній на коефіцієнт розстрочки, або ${}_nP_x$ = *одноразова ставка* / ${}_na_x$.

Абсолютні значення коефіцієнтів розстрочки близькі до значення n – терміну страхування, але трохи нижчі за нього. У результаті розміри річних ставок виходять більш високими, ніж при механічному діленні одноразової ставки на кількість років страхування. Так відшкодовуються втрати на відсотках і враховується зменшення протягом терміну страхування кількості осіб, що роблять внески.

Застосувавши коефіцієнт розстрочки в розмірі 4,53, обчислимо річні ставки для особи у віці 40 років за терміну страхування 5 років.

Річна нетто-ставка на дожиття дорівнює 18 грн 64 коп. (84 грн 45 коп. / 4,53); річна нетто-ставка зі страхування на випадок смерті становитиме 42 коп. (1 грн 91 коп. / 4,53), а зі змішаного страхування (без відповідальності за втрату працездатності) – 19 грн 06 коп.

Таким чином, договір змішаного страхування життя терміном на 5 років для сорокарічної особи характеризується такими даними: 100 грн – страхова сума; 95 грн 30 коп. – сума річних внесків – нетто; 86 грн 36 коп. – одноразовий внесок – нетто.

Формула для обчислення річних нетто-ставок на дожиття

$$ {}_nP_x = \frac{{}_nE_x}{{}_na_x} \cdot S \, . \qquad (10.10) $$

10.6. БРУТТО-СТАВКА

Одержуючи внески в розмірі нетто-ставок, страховик акумулює стільки коштів, скільки йому знадобиться для виплати страхових сум. Але він несе витрати, пов'язані з проведенням страхування, тобто повинен оплатити діяльність працівників з укладання договорів страхування та інші витрати.

Оскільки страхування проводиться за рахунок самих страхувальників, кошти на покриття цих витрат також передбачаються в тарифній ставці. Тому до нетто-ставки приєднується навантаження.

У тарифних ставках зі змішаного страхування життя в навантаження включені лише чисті витрати страхових компаній на проведення страхових операцій. Річна брутто-ставка зі змішаного страхування життя на 100 грн для особи у віці 40 років і терміном на 5 років становить 21 грн 11 коп.

Брутто-ставки обчислюються за формулою

$$ {}_nП_x = \frac{{}_nH_x}{(1-f)}, \qquad (10.11) $$

де ${}_nП_x$ – брутто-ставка;

${}_nH_x$ – нетто-ставка;

f – питома вага навантаження у брутто-ставці.

Аналізуючи брутто-ставки, доходимо таких висновків: розмір тарифів збільшується зі збільшенням віку особи, що укладає договір страхування; чим більш тривалим є термін страхування, тим нижча тарифна ставка; одноразовий внесок менший від страхової суми і нижчий ніж сума місячних внесків; перевищення загальної суми сплачених у розстрочку внесків буде тим меншим або його зовсім не буде, чим більш тривалим є термін страхування і молодшою особа, що укладає договір.

10.7. АНАЛІТИЧНІ ЗАКОНИ СМЕРТНОСТІ

У основі актуарних розрахунків лежить щільність імовірностей $f(x)$ й обумовлені нею функції $S(x)$, μ_x та інші характеристики. Ясно, що ці розрахунки будуть більш простими, якщо є відомим аналітичний вигляд функції $f(x)$ з точністю низки параметрів, які можна оцінити за статистичними даними про тривалість життя людей.

Модель де Муавра. У 1729 р. Абрахам де Муавр запропонував вважати, що тривалість життя рівномірно розподілена на інтервалі $[0, \omega]$, де ω – це граничний вік людини, тобто

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1/\omega, \ \ x \in [0,\omega], \\ 0, \ \ x \notin [0,\omega]. \end{array} \right\}. \qquad (10.12)$$

Це найбільш проста апроксимація кривої життя $f(x)$. У рамках моделі Муавра легко знайти функції виживання $S(x)$, розподіл $F(x)$, інтенсивність смертності μ_x і необхідні числові характеристики (середнє, дисперсія та ін.).

Очевидно, що $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (1/\omega)dt = x/\omega$, при $x \le \omega$,

якщо $x > \omega$, тоді $F(x) = \int_0^\omega (1/\omega)dt + \int_\omega^x 0dt = 1$.

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{l} x/\omega, \ \ x \in [0,\omega], \\ 1, \ \ x \notin [0,\omega]. \end{array} \right\},$$

$$S(x) = 1 - F(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1-(x/\omega), x \in [0,\omega] \\ 0, x > \omega \end{array} \right\}, \qquad (10.13)$$

$$\mu(x)=\frac{f(x)}{s(x)}=\frac{\frac{1}{\omega}}{1-\frac{x}{\omega}}=\frac{1}{\omega-x},\quad \text{при}\quad x\in(0,\omega].$$

Для інших значень x інтенсивність смертності не визначена. За формулами середнього часу життя та дисперсії тривалості життя одержуємо

$$\overset{0}{e}_0=\int_0^{\omega}S(x)dx=\frac{\omega}{2},$$

$$EX^2=2\int_0^{\omega}x\left(1-\frac{x}{\omega}\right)dx=\frac{\omega^2}{3}, \tag{10.14}$$

$$\sigma^2=\frac{\omega^2}{12},\ \sigma=\frac{\omega}{2\sqrt{3}}.$$

На підставі дослідних і статистичних даних про тривалість життя модель Муавра можна вважати дуже грубою. Реально її можна використовувати для апроксимації функції виживання на певному інтервалі часу.

Модель Гомпертца. У 1825 р. Гомпертц запропонував інтенсивність смертності μ_x апроксимувати експонентою

$$\mu(x)=Be^{\alpha x}, \tag{10.15}$$

де $\alpha>0$, $B>0$ – деякі параметри.

Тоді можна записати формули для функції смертності, виживання, кривої смертей.

Визначимо криву смертності і функцію виживання

$$\int_0^x \mu_x dx=\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1),$$

$$F(x)=1-\exp\left(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)\right), \tag{10.16}$$

$$S(x)=\exp\left(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)\right).$$

Диференціюванням $F(x)$ знаходимо криву смертей

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = B\exp(\alpha x - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)). \tag{10.17}$$

Визначимо точку максимуму цієї функції. Оскільки

$$\frac{df(x)}{dx} = B(\alpha x - Be^{\alpha x})\exp(\alpha x - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)) = 0 \tag{10.18}$$

лише при

$$\bar{x} = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\alpha}{B}, \tag{10.19}$$

і функція $f(x)$ є додатною, $\bar{x}$ – це точка максимуму.

Визначення середнього і дисперсії в моделі Гомпертца призводить до інтегралів, що не беруться, тому можуть бути обчислені наближено. Тому знаходженням виразів для $\overset{0}{e}_0$ та σ^2 нехтуємо.

Модель Мейкхама. У 1860 р. Мейкхам узагальнив модель Гомперца

$$\mu_x = A + Be^{\alpha x}, x > 0. \tag{10.20}$$

Призначення додаткового доданка A пояснимо нижче.

Легко переконатися, що в рамках моделі Гомпертца виконуються співвідношення

$$S(x) = \exp\left\{-Ax - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right\},$$

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-Ax - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right\}, \tag{10.21}$$

$$f(x) = \left[A + Be^{\alpha x}\right]\exp\left\{-Ax - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right\}.$$

Розглянемо граничний випадок $B = 0$. Тоді одержимо експоненціальний закон

$$f(x) = Ae^{-Ax}\ f(x) = Ae^{-Ax}, \tag{10.22}$$

з інтенсивністю смертності A, що не залежить від віку x. Таке можна чекати, якщо смерть спричинена нещасними випадками. Для опису частки таких смертей уведено параметр A, який ураховує ризики, пов'язані з нещасними випадками.

Результатом розрахунків середнього і дисперсії в моделях Мейкхама також є інтеграли, що не беруться.

Модель Вейбулла. У 1939 р. Вейбулл запропонував апроксимувати інтенсивність смертності показниковою функцією

$$\mu x = kx^b,\ k > 0,\ b > 0. \tag{10.23}$$

Відповідно до цієї моделі

$$\begin{aligned} S(x) &= \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\}, \\ F(x) &= 1 - \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\}, \\ f(x) &= kx^b \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\}. \end{aligned} \tag{10.24}$$

Похідна має вигляд

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(kbx^{b-1} - x^{b^2}\right)\exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\} = 0 \tag{10.25}$$

при

$$\bar{x} = \left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{b^2}{b-1}}, \tag{10.26}$$

яка є точкою максимуму графіка смертей, якщо $b > 0$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. У чому полягають особливості побудови тарифів зі страхування життя?
2. Яка структура тарифної ставки у страхуванні життя?
3. Охарактеризуйте таблицю смертності у страхуванні життя.
4. Дайте визначення поняття «норма прибутковості».
5. Що таке відсотковий множник? Наведіть таблицю відсоткових множників.
6. Дайте визначення одноразової нетто-ставки зі страхування на дожиття.
7. Дайте визначення одноразової нетто-ставки на випадок смерті.
8. Охарактеризуйте поняття річної нетто-ставки.
9. Що таке брутто-ставка зі змішаного страхування життя?
10. Охарактеризуйте модель Муавра.
11. Охарактеризуйте модель Гомпертца.
12. Охарактеризуйте модель Мейкхама.
13. Охарактеризуйте модель Вейбулла.

ТЕСТИ

1. Побудова тарифів зі страхування життя має свої особливості:
   а) розрахунки провадяться з використанням демографічної статистики і теорії ймовірності;
   б) у розрахунках застосовуються способи короткострокових фінансових розрахунків;
   в) тарифні нетто-ставки складаються з кількох частин, кожна з яких має сформувати страховий фонд за одним з видів страхової відповідальності, який включений в умови страхування.

2. Тарифні ставки в страхуванні життя складаються з кількох частин:
   а) страхування на дожиття;
   б) страхування на випадок смерті;
   в) страхування від нещасних випадків;
   г) медичного страхування;
   д) ризикового страхування.

3. Таблиця смертності містить показники, що характеризують:
   а) смертність населення в окремих вікових групах;
   б) дожиття при переході від одного віку до наступного;

в) імовірність померти протягом майбутнього року життя;
г) дожиття до окремої вікової групи;

4. За допомогою формули $B_n = A(1 + i)^n$ можна визначити:
а) страховий фонд, необхідний для виплат в визначений термін страхових сум;
б) страховий фонд на початку терміну страхування;
в) тарифна ставка при страхуванні життя.

5. Формула ${}_nE_x = \dfrac{(l_{x+n} \cdot v^n)}{l_x \cdot S}$ описує:
а) одноразову нетто-ставку зі страхування на дожиття для осіб у віці x років терміном на n років;
б) одноразову нетто-ставку зі страхування на випадок смерті для осіб у віці x років терміном на n років;
в) сучасну вартість річних внесків (коефіцієнт розстрочки);
г) річну нетто-ставку зі страхування на дожиття для осіб у віці x років терміном на n років;
д) річну нетто-ставку зі страхування на випадок смерті для осіб у віці x років терміном на n років.

6. Формула ${}_na_x = \dfrac{(l_x + 1 \cdot v + l_x + 2 \cdot v^2 + ... + l_x + n \cdot v^{x+n})}{l_x}$ описує:
а) одноразову нетто-ставку зі страхування на дожиття для осіб у віці x років терміном на n років;
б) одноразову нетто-ставку зі страхування на випадок смерті для осіб у віці x років терміном на n років;
в) сучасну вартість річних внесків (коефіцієнт розстрочки));
г) річну нетто-ставку зі страхування на дожиття для осіб у віці x років терміном на n років;
д) річну нетто-ставку зі страхування на випадок смерті для осіб у віці x років терміном на n років.

7. Яку модель характеризує аналітичний закон смертності (показник інтенсивності смертності)

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{\frac{1}{\omega}}{1 - \frac{x}{\omega}} = \frac{1}{\omega - x}, \quad при \quad x \in (0, \omega):$$

а) модель де Муавра;

б) модель Гомпертца;
в) модель Мейкхама;
г) модель Вейбулла.

8. Яку модель характеризує аналітичний закон смертності (показник інтенсивності смертності) $\mu_x = A + Be^{\alpha x}$, $x > 0$:
   а) модель Мейкхама;
   б) модель Вейбулла;
   в) модель де Муавра;
   г) модель Гомпертца.

9. Результатом аналізу брутто-ставки є такі висновки:
   а) розмір тарифів збільшується зі збільшенням віку особи, що укладає договір страхування;
   б) чим більш тривалий термін страхування, тим нижча тарифна ставка;
   в) одноразовий внесок є меншим від страхової суми і нижчим від суми місячних внесків;
   г) перевищення загальної суми сплачених у розстрочку внесків буде тим меншим або його зовсім не буде, чим більш тривалим є термін страхування і молодшою особа, що укладає договір.

Тема 11. СИСТЕМА СТРАХОВИХ РЕЗЕРВІВ

11.1. РЕЗЕРВИ СТРАХОВИКА, ЇХ ВИДИ ТА ПОРЯДОК ФОРМУВАННЯ

Резерви страховика. Види резервів. Порядок формування резервів. Методи формування резервів

11.2. РЕЗЕРВ НЕЗАРОБЛЕНОЇ ПРЕМІЇ

Резерв незаробленої премії для одноразової страхової премії; метод «1/365»; метод «1/24»; метод «1/8». Резерв незаробленої премії для премії, що сплачується в розстрочку. Середній рівень резерву незаробленої премії

11.3. РЕЗЕРВ КОЛИВАНЬ ЗБИТКОВОСТІ

Нормативний рівень виплат. Розрахунок збитковості за звітними даними

11.4. ОЦІНКА ІНВЕСТИЦІЙНОГО ДОХОДУ

11.1. РЕЗЕРВИ СТРАХОВИКА, ЇХ ВИДИ ТА ПОРЯДОК ФОРМУВАННЯ

Для забезпечення діяльності страховик створює певні резерви, призначені забезпечити виконання зобов’язань страховика за майбутніми виплатами страхових сум і страхового відшкодування, підвищити надійність та платоспроможність страхової компанії.

Крім того, страховики можуть створювати резерви для фінансування заходів з попередження настання страхових випадків та інші резерви. А із нерозподіленого прибутку створюються вільні резерви.

Для забезпечення виконання страховиками зобов’язань щодо окремих видів обов’язкового страхування страховики можуть утворювати централізовані страхові резервні фонди та органи, які здійснюють управління цими фондами.

Основні види резервів, що формує страхова компанія, наведені на рис. 11.1.

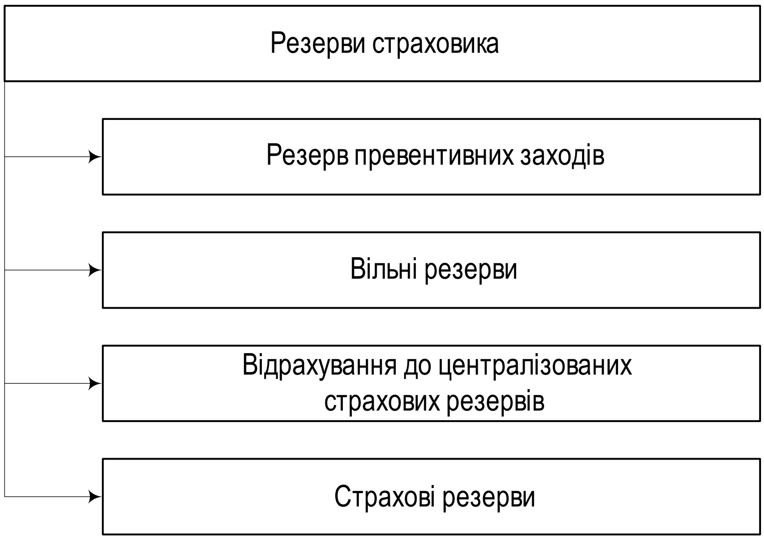


Рис. 11.1. Резерви страховика

Резерв превентивних заходів (РПЗ) – резерв, що забезпечує реалізацію попереджувальної функції страхування, фінансування витрат на заходи із запобігання нещасних випадків, втрат чи пошкодження майна.

Резерв превентивних заходів формується шляхом відрахувань від страхової премії, що надійшла за договорами страхування протягом звітного періоду. Розмір таких відрахувань визначається за відсотком, що передбачений у структурі тарифної ставки ($\%T_b$) за кожним договором страхування на зазначені цілі. Величина *РПЗ* за певний період складається із суми передбачених відсотків, збільшеної на розмір *РПЗ* на початок звітного періоду ($РПЗ_{поч}$) і зменшеної на суму використаних коштів на превентивні заходи у звітному періоді ($РПЗ_{вик}$).

Тобто

$$РПЗ = \%T_b + РПЗ_{поч} - РПЗ_{вик}. \tag{11.1}$$

Формування та використання коштів *РНП* за добровільними видами страхування здійснюється страховиком на базі розробленого ним та узгодженого з уповноваженим органом контролю за страховою діяльністю Положення про резерв превентивних заходів.

Вільні резерви	– частина власних коштів страховика, яка резервується з метою додаткового забезпечення платоспроможності відповідно до прийнятої методики страхування.

Їх джерелом є нерозподілений прибуток організації. Слід зазначити, що платоспроможність передбачає здатність страховика відповідати за своїми зобов’язаннями.

Відрахування до централізованих страхових фондів	– відрахування, що мають на меті забезпечити виконання страховиками своїх зобов’язань щодо окремих видів страхування, як правило, визначених законодавством.

Джерелом відрахувань до централізованих страхових фондів є:

- відрахування від надходжень страхових платежів;
- внески власних коштів страховика (частина прибутку);
- доходи від розміщення тимчасово вільних коштів централізованих страхових резервних фондів.

Страхові резерви поділяються на:

- резерви за ризиковими видами страхування (технічні);
- резерви для страхування життя й накопичувального страхування (математичні).

Згідно з таким поділом та відповідно до Закону України «Про страхування» для забезпечення виконання зобов’язань перед страховиками страхові компанії формують із отриманих страхових внесків необхідні страхові резерви для особистого, майнового страхування та страхування відповідальності. Страхові резерви поділяються на технічні та резерви зі страхування життя (математичні), які, у свою чергу, поділяються на види та підвиди (рис. 11.2).

Технічні резерви передбачають за законодавчою нормою необхідність створення резервів премій та резервів збитків. До резервів премій належить обов'язкове створення резервів незароблених премій.

Резерв незароблених премій складається з відповідної частини нетто-ставки, яка надійшла у звітному періоді й використовується для страхових виплат протягом періоду, що виходить за межі звітного.

Рис. 11.2. Види страхових резервів

Нєзароблена премія – це частина страхової премії, яка надійшла за договорами страхування, укладеними у звітному періоді, термін дії яких припадає на наступний звітний період (виплати майбутніх періодів).

У практиці страхування для розрахунку незаробленої премії використовується кілька методів формування резервів незароблених премій.

Метод «1/365» – метод розрахунку по днях. Застосовується за кожним договором страхування окремо, коли терміни сплати страхової премії розподілені в часі довільно. Визначається як добуток страхової премії і частки від ділення строку дії договору страхування (у днях), який ще не закінчився, до всього терміну дії договору страхування. Формула розрахунку має вигляд

$$РНП_i = П_{бі} \cdot \frac{т - д}{т}, \quad (11.2)$$

де $РНП_i$ – резерв незароблених премій за i-м договором страхування;

$П_{бі}$ – базова страхова премія за i-м договором;

$т$ – термін дії i-го договору страхування;

$д$ – кількість днів з моменту початку дії i-го договору до звітної дати.

***Методи* «1/4», «1/8», «1/12», «1/24»** є «паушальними». Страхова премія може розроблятися на півріччя, квартали, місяці, декади, щоб відділити зароблену страхову премію від незаробленої у звітний період. Використовуються, коли термін дії договорів страхування розпочинається до початку звітного періоду. Порядок розрахунку є таким: базова страхова премія групується за місяцем початку виникнення відповідальності страховика, далі розподіляється на термін дії поліса (премію ділять на рівні частини).

***Метод* «40%»** використовують, коли укладаються договори з невизначеними термінами початку та закінчення дії договорів; розмір *РНП* визначається за кожним окремим договором страхування в розмірі 40% базової страхової премії на звітну дату.

Метод «плаваючих кварталів» застосовує спрощений спосіб розрахунку *РНП*, який використовується згідно із Законом України «Про страхування» всіма українськими страховиками і виконується на основі брутто-ставки. При цьому вважається, що витрати на ведення страхової справи становлять 20–28%, а всі договори страхування укладені в середині року, а відтак, розмір *РНП* на звітну дату встановлюється залежно від суми страхових премій, що надійшли, за відповідним видом страхування в кожному із трьох кварталів періоду, що передує цій звітній даті. Порядок розрахунку *РНП* методом «плаваючих кварталів» є таким: сума страхових премій, що надійшли в I кварталі, множиться на 1/4 ($\sum П_1 \cdot 1/4$), у II кварталі – на 1/2 ($\sum П_2 \cdot 1/2$), у III кварталі – на 3/4 ($\sum П_3 \cdot 3/4$), всі отримані значення додаються

$$РНП = 1/4\sum П_1 + 1/2\sum П_2 + 3/4\sum П_3 \, . \quad (11.3)$$

Резерви збитків	– зобов'язання по виплаті страхових відшкодувань за тими страховими випадками, що відбулися до звітної дати (тобто відбулися до кінця фінансового року). Для інших – призначений *РНП*.

Резерв збитків у світовій практиці складається з одного або кількох компонентів. Наприклад, відповідно до СААР резерв збитків складається:

- з резерву подій, що відбулися;
- з резерву розвитку збитків;
- з резерву збитків, що відбулися, але не заявлені;
- з резерву під можливе перевідкриття збитку;
- з резерву під видатки неврегульованих збитків.

В Україні відповідно до чинного законодавства резерви збитків містять:

- резерв заявлених, але невиплачених збитків;
- резерв збитків, які виникли, але не заявлені;
- резерв коливань збитковості;
- резерв катастроф.

Резерв заявлених, але невиплачених збитків (РЗНВ)	резерв, що формується для забезпечення виконання зобов'язань, невиконаних та неврегульованих або виконаних не повністю страховиком на звітну дату.

При цьому страхові зобов'язання виникли за випадками, що мали місце у звітному періоді або навіть напередодні і про факт настання яких було відомо страховику. Розмір *РЗНВ* визначається за кожною неврегульованою претензією і відповідає сумі заявлених збитків за звітний період ($ЗЗ_{зв}$), які зареєстровані в Журналі обліку збитків, збільшеної на суму неврегульованих збитків за попередні періоди ($ЗЗ_{п}$) та зменшеної на вже виплачені протягом звітного періоду збитки ($ЗВ_{зв.}$) плюс витрати на врегулювання збитку (*ВВЗ*). Як правило, останні приймаються в розмірі 3% суми певрегульованих претензій за звітний період. Таким чином

$$РЗНВ = ЗЗ_{зв} + ЗЗ_{п} + ЗВ_{зв} + ВВЗ. \qquad (11.4)$$

Резерв збитків, які виникли, але не заявлені (РЗНЗ)	– резерв, що формується у зв'язку із можливими страховими подіями, що відбулися, проте страховику не заявлені збитки за ними на звітну дату.

На практиці для розрахунків *РЗНЗ* застосовують 10% страхової премії, що надійшла протягом звітного періоду, якщо вважати таким фінансовий рік.

Крім того, на додаток до резервів премій та резервів збитків страховики можуть створювати додаткові технічні резерви, а саме:

- резерв коливань збитковості;
- резерв катастроф;
- резерв незакінчених (неминулих) ризиків.

Зазначені додаткові технічні резерви створюються і формуються відповідно до Статуту страхової компанії та розробленого Положення страховика про порядок формування технічних резервів, який погоджено з органами державного нагляду за страховою діяльністю.

Резерв коливань збитковості	– резерв, призначений для компенсації витрат страховика на здійснення страхових виплат у випадках, коли значення збитковості страхової суми у звітному періоді перевищують очікуваний рівень збитковості, який є основою для розрахунку тарифу-нетто за відповідним видом страхування.

Резерв коливань збитковості (*РКЗ*) є складовою технічних резервів страховика.

Коливання збитковості звичайно фіксуються та враховуються за тими видами страхування, які пов’язані зі значними змінами рівня ризику (від дуже низького до надто високого), під впливом якого знаходяться застраховані об’єкти під час дії договору страхування. Наприклад, якщо протягом певного періоду ризик несприятливих кліматичних умов, що впливають на врожайність сільськогосподарських культур, є досить низьким, то страховик не виплачує страхових відшкодувань, оскільки відсутні страхові випадки. Тоді накопичені страхові резерви спрямовуються не на поповнення прибутку, а в резерв коливання збитковості (*РКЗ*), тобто зберігаються з метою виплат у періоди, коли ризик підвищиться.

Резерв коливання збитковості дозволяє підвищувати фінансову стійкість страховика, а отже, і рівень його надійності, який є сприятливим фактором стабілізації економіки в цілому. Проте нормативна база для формування *РКЗ* сьогодні в Україні відсутня. Страховики самостійно визначають порядок та умови формування зазначеного резерву й узгоджують їх з уповноваженим органом нагляду за страховою діяльністю. До того ж при формуванні власної методики досить проблематичним є віднесення ризику за певним видом страхування до відповідного типу, а також розподіл цього ризику в часі.

Безумовно, за нормального типу ризику значення збитковості коливається навколо середнього показника, що характерно для традиційного майнового страхування. Відхилення від середньої вбік зниження ризику, як правило, супроводжується капіталізацією страхових резервів, що збільшує прибуток страховика. Відхилення вбік підвищення ризику компенсується ризиковою надбавкою в структурі страхового тарифу.

Для видів страхування, де застосовуються страхові тарифи без ризикової надбавки, з метою підвищення фінансової стійкості страхових операцій доцільно створювати резерв коливання збитковості. Указаний резерв також доцільно створювати, якщо має місце постійне підвищення рівня ризику (у таких видах страхування, як медичне, екологічне).

Якщо має місце значна нерівномірність розподілу збитковості страхової суми й висока частота коливання ризику в часі, то такі ризики вважають катастрофічними, які поділяються, у свою чергу, на нормальні і власне катастрофічні. Нормальна частина катастрофічного ризику покривається за рахунок звичайного страхового резерву, а власне катастрофічний ризик – за рахунок спеціального фонду катастроф або передається перестраховику.

Слід зазначити, що у складі технічних резервів передбачається створення резерву катастроф (*РК*).

Резерв катастроф – резерв, призначений для покриття надзвичайного збитку, що є наслідком непереборної сили або масштабної аварії, і який вимагає страхових виплат за великою кількістю договорів

Цей резерв, як і резерв коливання збитковості, формується без спеціально рекомендованої методики. Його створення залежить від страховика. До того ж у законодавчій, довідниковій та науковій літературі відсутнє чітке визначення поняття «непереборної сили». Непереборна сила діє як надзвичайне явище, яке неможливо подолати, проте можна передбачити. А отже, існує ймовірність його настання з одночасною невизначеністю у просторі та часі, що дозволяє віднести ризики непереборної сили до категорії страхових. Катастрофічність зазначеного ризику полягає не в тому, що відбулися передбачені страхові події, а саме в тому, що ці небезпеки вплинули відразу на багато застрахованих об’єктів, що призводить до флуктуаційних коливань збитковості. До того ж, ці коливання збитковості можуть відбуватися як протягом одного тарифного періоду, так і кількох. Отже, резерв катастроф доцільно створювати в тих страхових компаніях, які спеціалізуються на страхуванні катастрофічних ризиків або включають їх в обсяг своєї відповідальності.

Резерв незакінчених ризиків	– резерв, який створюється як доповнення до резерву незароблених премій з метою компенсації дефіциту фінансових ресурсів у технічних резервах через можливе чи вимушене заниження тарифів в умовах ринкової економіки.

Визначаючи резерви незакінчених ризиків, страховики повинні письмово повідомити уповноважений орган про запровадження формування та ведення обліку таких технічних резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя, не пізніше, ніж за 45 днів до початку календарного року.

Спеціальні резерви	– резерви, що формуються залежно від специфіки зобов'язань страховика.
Резерви зі страхування життя	– резерви, що формуються окремо для забезпечення виконання зобов'язань по страхових виплатах із страхування життя та медичного страхування за рахунок надходження страхових платежів і доходів від інвестування коштів сформованих резервів за цими видами страхування.

Кошти резервів зі страхування життя не є власністю страховика і повинні бути відокремлені від його іншого майна. Вони не можуть використовуватися страховиком для погашення будь-яких інших зобов'язань, не можуть бути включені до ліквідаційної маси в разі банкрутства страховика чи його ліквідації.

Страховики повинні створювати такі резерви зі страхування життя:

- резерв довгострокових зобов'язань (математичні резерви);
- резерв належних виплат страхових сум.

Величина резервів довгострокових зобов'язань обчислюється окремо за кожним договором страхування відповідно до Методики формування резервів зі страхування життя, затвердженої Наказом Комітету у справах нагляду за страховою діяльністю № 46 від 23 липня 1997 р., з урахуванням темпів зростання інфляції. Мінімальні строки дії договорів страхування життя встановлюються уповноваженим органом (на сьогодні – Кабінетом Міністрів України).

Резерви довгострокових зобов'язань та належних виплат страхових сум формуються шляхом відрахування частини страхової премії, призначеної для страхових виплат, та частини інвестиційного доходу від розміщення тимчасово вільних коштів страховика. Загальний розмір страхових резервів зі страхування життя визначається як сума резервів кожного окремого договору страхування життя.

Розрахунки виконуються на базі таблиць смертності та норм дохідності з інвестування тимчасово вільних коштів.

Отже, страховик при здійсненні страхової діяльності створює технічні резерви для забезпечення зобов'язань за ризиковими видами страхування та резерви зі страхування життя для забезпечення зобов'язань зі страхування життя, накопичувального страхування та медичного страхування. Порядок формування, використання та розміщення зазначених страхових резервів встановлюється відповідно до норм чинного законодавства та затверджених правил страхування.

Види страхових резервів. Необхідність наявності страхових резервів зумовлена часовим розривом між надходженням страхової премії і її витрачанням на страхові виплати. Оскільки страхова премія за договорами страхування завжди надходить раніше, ніж відбуваються страхові випадки і здійснюються страхові виплати за цими договорами, то необхідно резервувати її на майбутнє для забезпечення страхових виплат шляхом створення страхового фонду.

Існує аналогія між динамікою величини страхового фонду і динамікою рівня рідини в резервуарі, у який рідина спочатку надходить впорядкованими порціями (внески), а потім неврегульовано, випадковими порціями і у випадкові моменти часу витікає (виплати). У страхуванні стік має випадковий, або стохастичний, характер з двох причин: по-перше, наперед невідомо, коли відбудеться страховий випадок, по-друге, невідомим є розмір страхового відшкодування. Рівень рідини в резервуарі весь час знаходиться в русі, він то підвищується внаслідок накачування рідини (надходження страхової премії), то знижується за рахунок стоку (страхових виплат).

Необхідною умовою функціонування страхової компанії є достатня величина страхового фонду в будь-який момент часу. Для цього необхідно, принаймні, щоб за фіксований інтервал часу (квартал, рік) притік гарантовано перевищував або хоча б компенсував витік. Виходячи з цього й визначається розмір страхової премії: оцінюється максимальний розмір сумарної виплати за всіма страховими випадками за термін дії договору, а сумарне надходження страхової премії прирівнюється до цієї величини.

Формування страхового фонду відбувається за рахунок тієї частини страхової премії, яка покриває реальну вартість страхових виплат, а також внутрішні адміністративні витрати, пов'язані із забезпеченням діяльності страхової компанії (це так звана технічна, або інвентарна, премія).

Технічна премія дорівнює страховій премії, що надійшли, за вирахуванням відрахувань у резерв попереджувальних заходів і виплати комісійних агентам за продажу полісів. Технічна премія є джерелом формування технічних резервів, необхідних для забезпечення страхових виплат за страховими випадками, що вже відбулися і майбутніми. Унаслідок цього технічні резерви поділяються на два відповідні класи: резерви збитків і резерви премій. Резерви збитків містять резерв заявлених, але неврегульованих збитків (*РЗНЗ*) і резерв збитків, що відбулися, але незаявлених (*РВНЗ*).

Резерви премій складаються з резерву незаробленої премії, резерву коливань збитковості і резерву катастроф. Кожен тип резерву премій пов’язаний з відповідним характером часового розподілу ризику.

Резерв незаробленої премії (*РНП*) розраховується в припущенні про рівномірний розподіл ризику протягом терміну дії договору страхування. Така ситуація має місце, коли кількість страхових випадків протягом періоду страхування є значною, тобто виплати відбуваються майже безперервно. Рівень виплат при цьому приймається таким, що дорівнює нормативному рівню виплат, узятому за основу для розрахунку тарифів. Якщо дія договорів страхування розпочинається й закінчується, то до моменту закінчення договорів величина *РНП* повинна бути дорівнювати нулю.

Резерв коливань збитковості (*РКЗ*) призначений для згладжування коливань рівня виплат (збитковості) на рівні нормативного значення протягом тарифного періоду. При цьому після закінчення тарифного періоду та його частина, яка сформувалася внаслідок відхилення рівня виплат від середнього значення, повинна дорівнювати нулю, залишок же буде зумовлений накопиченням ризикової надбавки протягом цього терміну.

Резерв катастроф (*РК*) призначений для накопичення коштів на випадок рідкісних (раз у 50–100 років) катастрофічних подій, за яких можливе пошкодження значної частини застрахованих об’єктів і потрібна одномоментна виплата значної суми. Через свою рідкісність і унікальність подібні події не вкладаються в статистику, і тому можна лише експертним шляхом оцінити необхідну величину резерву катастроф і часу його накопичення.

11.2. РЕЗЕРВ НЕЗАРОБЛЕНОЇ ПРЕМІЇ

Під незаробленою премією на сьогодні розуміють частину технічної премії, призначеної для здійснення майбутніх страхових виплат за діючими договорами страхування з урахуванням адміністративних витрат. У свою чергу зароблена премія являє собою нормативний (розрахунковий) рівень страхових виплат за період від моменту вступу в силу цих договорів до теперішнього моменту часу (також з урахуванням адміністративних витрат). У сумі зароблена і незароблена премії складають технічну премію.

Резерв незаробленої премії для одноразової страхової премії. Обчислимо резерв незаробленої премії (*РНП*) для простого випадку, коли всі договори страхування, що діють на даний момент часу, почалися одночасно і так само одночасно закінчаться. Оскільки ризик рівномірно розподілений упродовж терміну дії договорів, розрахункова (нормативна) сума страхових виплат (використана нетто-премія) є пропорційною часу з моменту укладення договорів

$$Z(t) = Z\frac{t}{T}, \tag{11.5}$$

де Z – сумарна нетто-премія за весь термін дії договорів.

Розмір сумарного нетто-резерву, або резерву незаробленої нетто-премії, дорівнює

$$RZ(t) = Z - Z(t) = Z(1 - \frac{t}{T}) = Z\frac{T-t}{T}. \tag{11.6}$$

З формули (11.5) випливає, що величина нетто-резерву пропорційна інтервалу часу, який залишився до закінчення терміну договорів. Тому метод розрахунку страхових резервів за формулою (11.6) називається методом розрахунку пропорційно часу. Сам же резерв називають нетто-резервом незаробленої премії. У момент, коли розпочинається дія договору, величина резерву дорівнює нетто-премії, що надійшла в момент закінчення договору – нулю.

Страхова компанія резервує засоби не тільки для майбутніх страхових виплат, але і на майбутні адміністративні витрати, які рівномірно розподілені протягом часу, що залишився до закінчення договорів.

Сумарний резерв незаробленої премії (технічний резерв) дорівнює нетто-резерву плюс резерв майбутніх адміністративних витрат, який також пропорційний часу, що залишився до закінчення договорів

$$RZ_t(t) = Z_t(1 - \frac{t}{T}) = Z_t \frac{T-t}{T}, \tag{11.7}$$

де $Z_t = Z\left[1 + f_a/(1-f)\right]$ – технічна премія;

f_a – частка адміністративних витрат у брутто-премії.

Насправді всі договори, що укладаються, мають різні дати початку, терміни дії, страхові суми, страховий тариф. Проте оскільки збитки за будь-яким з договорів зразу ж розкладаються на всіх учасників страхування, можна вважати, що, як і у страхуванні життя, премії кожного учасника формують індивідуальний резерв V, що зменшується після кожного страхового випадку пропорційно частині цього учасника в загальній премії. Адміністративні витрати також розкладаються пропорційно страховим преміям. Формула для індивідуального резерву має вигляд

$$\begin{aligned} V(t) &= P_t k(t), \\ k(t) &= \frac{T-t}{T}, \end{aligned} \tag{11.8}$$

де $k(t)$ – коефіцієнт, що показує, яка частина технічної премії «ще не зароблена».

Зароблена страхова премія становить

$$W(t) = P_t \frac{t}{T}. \tag{11.9}$$

Сумарний резерв незаробленої премії за всіма договорами, що діють на момент часу t, дорівнює

$$RZ(t) = \sum_q V_q(t) = \sum_q P_{tq} \frac{T_q - (t - t_q)}{T_q}, \tag{11.10}$$

де t_q, T_q– момент початку і тривалість q-го договору страхування відповідно;

P_{tq} – технічна премія за цим договором.

Для розрахунку *РНП* традиційно використовуються чотири пропорційні методи. Вони залежать від дат початку договору, які можуть бути, наприклад, щоденними, щомісячними і т.д.

1. *Метод 365-х часток.*

Є найбільш точним із уживаних методів. Дати початку договорів групуються за днями. Тривалість року приймається такою, що дорівнює 365 дням.

***Приклад* 1**. Першого серпня страхова компанія уклала договір страхування строком на один рік з оплатою страхової премії одноразовим внеском у розмірі 60 тис. грн. Частка страхової премії, призначеної для виплати комісійних за укладення договору, – 20%; частка відрахувань на превентивні заходи – 10%. Визначити резерв незаробленої премії: а) на кінець III кварталу; б) на кінець року.

Величина технічної премії: 60·(1 – 0,3) = 42 тис. грн.

а) Інтервал часу від початку договору до звітної дати (1 жовтня) становить 61 день. Коефіцієнт *k* (1 – 61 / 365) = 0,833; резерв незаробленої премії дорівнює 42 · 10 / 12 = 34,981 тис. грн.

б) Інтервал часу від початку договору до звітної дати (1 січня) становить 153 дні. Коефіцієнт *k* (1 – 153 / 365) = 0,581; резерв незаробленої премії – 24,395 тис. грн.

2. *Метод 24 часток.*

Цей метод дає дещо менш точний результат, оскільки прив'язує початок усіх укладених протягом якого-небудь місяця договорів до середини місяця. Одиницею вимірювання часу є півмісячний інтервал, тривалість року приймається такою, що дорівнює 24 таким відрізкам. Наприклад, якщо річний договір страхування укладений у першому місяці року, то він вважається оформленим у середині місяця, тобто від початку року пройшла 24-та частка року. Якщо звітна дата – кінець року, то коефіцієнт *k* = 1 – 1/24 = 23/24. Якщо ж договір укладений в останній місяць року, k = 1 – 23/24 – 1/24.

***Приклад* 2**. Розрахувати *РНП* методом 24 часток. Договір страхування вважається укладеним у середині серпня.

До звітної дати (1 жовтня) пройшло три 24-ті частки року. Коефіцієнт *k* = 1 = 3/24 = 21/24 ; *РНП* – 42,21/24 = 36,75 тис. грн.

До звітної дати (1 січня) пройшло дев'ять 24-х часток року. Коефіцієнт *k* = 1 = 9/24 = 15/24 ; *РНП* – 42,15/24 тис. грн.

3. *Метод 8 часток.*

Є аналогічний попереднім, але передбачає, що договори згруповані по кварталах року і розпочинають свою дію в середині відповідного квар-талу.

Цей метод є подальшим спрощенням і припускає, що всі договори розпочинаються в середині року.

4. *РНП для премії, сплачуваної в розстрочку.*

Якщо страхова премія сплачується в кілька прийомів, резерв незаробленої премії дорівнює різниці між технічною премією за договором, що надійшля до моменту звіту, і заробленою премією

$$V(t) = P_t(t) - P_t \frac{t}{T}. \qquad (11.11)$$

***Приклад* 3**. Умови ті самі, що і в прикладі 1, лише з тією відмінністю, що страхова премія вноситься у два прийоми: перша половина премії – у момент укладання договору, друга – три місяці по тому.

До моменту оцінки резерву внесено половину технічної премії:

$P_t(t) = P_t / 2;$

$$V(t) = P_t / 2 - P_t \frac{t}{T} = 21 - 42 \cdot \frac{61}{365} = 13{,}981 \text{ тис. грн.}$$

До моменту оцінки резерву внесено всю технічну премію:

$P_t(t) = P_t;$

$$V(t) = P_t (1 - \frac{t}{T}) = 42(1 - \frac{153}{365}) = 24{,}395 \text{ тис. грн.}$$

Результати прикладів наведені на рис. 11.1.

На верхньому графіку показана динаміка надходження технічної премії: а) у випадку одноразової сплати страхової премії; б) у разі сплати першої половини премії на початку терміну, а другої – три місяці по тому.

На середньому графіку зображена наростаючим підсумком залежність розрахункового (нормативного) рівня виплат (у т.ч. адміністративних витрат) від часу. Оскільки виплати не залежать від способу сплати страхової премії, то крива є одна й та ж для обох прикладів.

На нижньому графіку, що показує відмінність між середнім і верхнім графіками, наведена динаміка резерву незаробленої премії.

Визначимо зміну *РНП* протягом період, що ропочинається в момент t_0 і завершується в момент t (звітний період)

$$\delta V = V(t) - V(t_0) = \left[P_t(t) - P_t(t_0)\right] - W(t) - W(t_0) \,. \tag{11.12}$$

Якщо договір діє до початку звітного періоду і його дія закінчується пізніше за звітну дату t, то зароблена премія дорівнює

$$W(t) - W(t_0) = P_t \frac{t - t_0}{T}. \tag{11.13}$$

Якщо договір діє не весь звітний період, то

$$W(t) - W(t_0) = P_t \frac{\tau}{T} = Pn \frac{\tau}{T} + Pbf_a \frac{\tau}{T}, \tag{11.14}$$

де τ – час дії договору у звітному періоді.

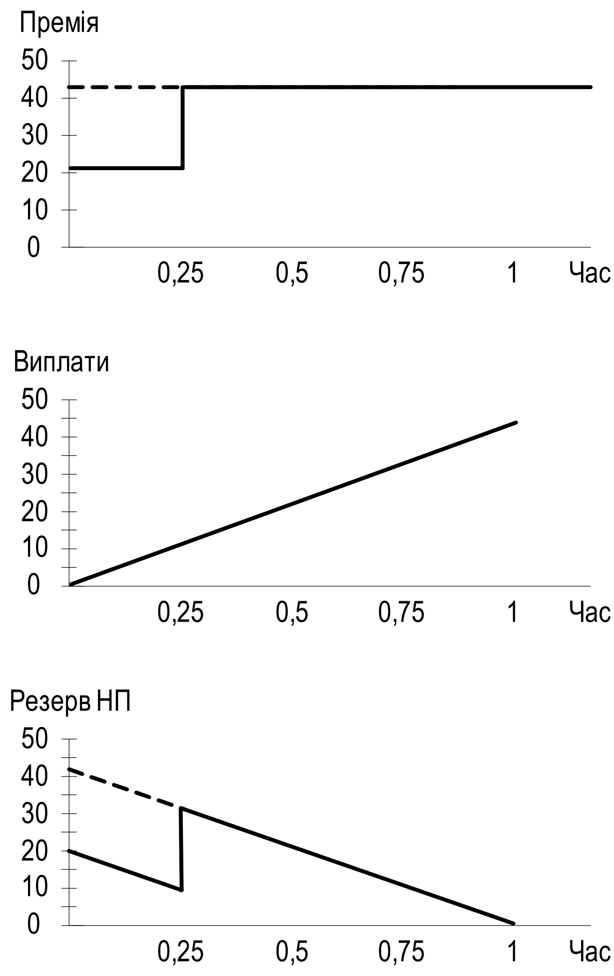


Рис. 11.3. Премія, номінальні виплати, резерв незаробленої премії (одночасна премія (штрихова лінія); перша половина премії вноситься на початку строку, друга – через 3 місяці (суцільна лінія))

Середній рівень резерву незаробленої премії. Оцінимо середній рівень резерву незаробленої премії протягом терміну дії договору. Середнє значення резерву визначається за формулою

$$\overline{V} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[P(t) - P_t \frac{t}{T} \right] dt. \qquad (11.15)$$

Повертаючись до прикладів 1 і 3, одержимо (при $T = 1$).

$$\overline{V} = \int_0^1 P_t(1-t)dt = \frac{P_t}{2} = 21 \text{ тис. грн;}$$

$$\overline{V} = \int_0^{1/4} (\frac{P_t}{2} - t)dt + \int_{1/4}^1 (P_t - t)dt = \frac{3P_t}{8} = 15{,}75 \text{ тис. грн.}$$

Як бачимо, у разі сплати страхової премії у два прийоми середній рівень страхового резерву є нижчим, ніж за одноразової сплати страхової премії. Цей факт є відображенням загального результату: при розстроченні страхової премії на кілька платежів середній рівень страхового резерву знижується, причому тим сильніше, чим більша кількість платежів.

Як ілюстрацію розглянемо приклад, коли страхова премія сплачується в n рівних платежів, що вносяться в моменти часу k / n, де k = 1, 2, …, n – 1. Тоді середній рівень страхового резерву дорівнює

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \frac{1}{T}\left\{ \int_0^{T/n} \frac{P_t}{n} dt + \int_{T/n}^{2T/n} \frac{2P_t}{n} dt + \ldots + \int_{T(n-1)/n}^{T} P_t dt - \int_0^T P_t \frac{t}{T} dt \right\} = \\ &= \frac{1}{T}\left\{ \frac{P_t T}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) - P_t \frac{T}{2} \right\} = \frac{P_t}{2n}. \end{aligned} \qquad (11.16)$$

Результат очевидний: середній рівень страхового резерву обернено пропорційний кількості платежів страхової премії.

11.3. РЕЗЕРВ КОЛИВАНЬ ЗБИТКОВОСТІ

Нормативний рівень виплат. Резерв коливань збитковості (*РКЗ*) призначений для згладжування коливань рівня виплат на рівні нормативного значення протягом тарифного періоду. При цьому після закінчення тарифного періоду та його частина, яка сформувалася внаслідок відхилення рівня виплат від середнього значення, повинна дорівнювати нулю, залишок же буде зумовлений накопиченням ризикової надбавки протягом терміну.

Якщо фактичний рівень страхових виплат протягом звітного періоду перевищує нормативний рівень, то перевищення оплачується з *РКЗ*, накопиченого за сприятливі періоди часу, коли рівень виплат був нижчим від нормативного. Якщо ж фактичні виплати нижчі ніж розрахунковий (нормативного) рівень, то надлишок страхової премії поповнює *РКЗ* на випадок несприятливих майбутніх виплат.

Нормативний рівень виплат за звітний період дорівнює сумарній величині заробленої за цей період премії, яка визначається підсумовуванням індивідуально зароблених нетто-премій за всіма діючими договорами

$$WZ(t) = \sum_q Pn_q \frac{\tau_q}{T_q}, \tag{11.17}$$

де Pn_q, T_q – страхова нетто-премія і тривалість q-го договору страхування відповідно;

τ_q – тривалість дії q-го договору страхування у звітному періоді.

Сума відрахувань у резерв коливань збитковості за звітний період становить

$$Q\widehat{Z} = WZ - Z_f = \sum_q Pn_q \frac{\tau_q}{T_q} - Z_f, \tag{11.18}$$

де Z_f – фактичний рівень виплат.

З'ясуємо, як розподіляється технічна премія, що надійшла протягом звітного періоду. Сумуючи зміну *РНП* і суму відрахувань у *РКЗ* (11.18), одержимо

$$P(t) - P(t_0) = Q\widehat{Z} + RZ(t) - RZ(t_0) + WZ\frac{f_a}{1-f} + Z_f. \tag{11.19}$$

Технічна премія, що надійшла протягом звітного періоду, дорівнює сумі відрахувань у *РКЗ*, величині зміни *РНП*, заробленій за період офісної премії, і сумі фактичних виплат.

Розрахунок збитковості за звітними даними. Разом з визначенням величини відрахувань у резерв коливань збитковості часто виникає потреба у визначенні фактичної збитковості за звітними даними і її порівнянні із розрахунковим значенням, використовуваним для розрахунку тарифної нетто-ставки. Для цього виділимо групу договорів з однаковим ризиком, причому терміни дії договорів можуть бути різними. Через рівномірність розподілу ризику протягом року величину нетто-премії для всіх договорів можна подати в такому вигляді

$$Pn_q = TnS_qT_q, \tag{11.20}$$

де Tn – річна тарифна нетто-ставка.

Нормативний рівень виплат за звітний період за цією групою договорів можна записати як добуток річної тарифної нетто-ставки на зважену сукупну страхову суму за всіма діючими протягом звітного періоду договорами страхування

$$WZ = Tn\sum_q S_q\tau_q. \tag{11.21}$$

Вага кожної страхової суми визначається часом дії відповідного договору у звітному періоді.

Якщо замість нормативного рівня виплат узяти фактичний рівень виплат у звітному періоді, то за аналогією з формулою (11.21) можна визначити фактичну збитковість як

$$y_f = \frac{Z_f}{\sum_q S_q\tau_q}. \tag{11.22}$$

Визначення фактичного рівня виплат є непростим завданням. Адже після збитку, що мав місце, може пройти якийсь час до того, як повністю стануть відомі вимоги, що підлягають оплаті. Важливо, щоб ці вимоги були віднесені до періоду, коли відбувся страховий випадок. Крім того, може пройти багато років, перш ніж стануть відомі остаточні суми по вимогах виплат. Тому і розраховані значення збитковості слід уточнювати в міру того, як уточнюються суми збитків.

11.4. ОЦІНКА ІНВЕСТИЦІЙНОГО ДОХОДУ

Дохід від інвестування страхових резервів є одним з основних джерел отримання прибутка страховою компанією. Тому оцінка величини цього доходу є необхідною умовою планування фінансової діяльності страховика. Специфічна особливість розрахунку доходу від інвестування полягає в тому, що величина страхового резерву, що слугує базою для нарахування відсотків, змінюється в часі через нерівномірність надходження страхової премії і здійснення страхових виплат.

Оцінимо процентний дохід для простої моделі, вважаючи, що індивідуальний страховий фонд $V(t)$за кожним договором страхування лінійно зменшується залежно від значення технічної премії, що надійшла, на початку дії договору до нуля, а після його закінчення відповідно до формули (11.22). Якщо термін дії договору дорівнює T, а процентний дохід за інтервал часу dt становить $iV(t)dt$, де i – річна процентна ставка, під яку інвестуються страхові резерви, то інвестиційний дохід протягом терміну дії договору становитиме

$$I = i\int_0^T V(t)dt = iT\overline{V}, \tag{11.23}$$

де $\overline{V}$ – середній рівень резерву незаробленої премії протягом терміну дії договору.

Зміст формули є очевидним: страховик одержує в тимчасове користування на термін T кошти, середній розмір яких становить $\overline{V}$, і інвестує їх на цей термін під процентну ставку i, одержуючи дохід I. Якщо страхова премія сплачується одноразово, то відповідно до формули (11.23) (при $n = 1$) одержимо

$$I = iTP_t / 2. \tag{11.24}$$

Якщо ж страхова премія вноситься в розстрочку n рівними платежами величиною Pt / n через проміжки часу T / n, то процентний дохід дорівнюватиме

$$I = iTP_t / 2n. \tag{11.25}$$

З формули (11.25) випливає, що чим більша кількість платежів страхової премії, тим нижчий процентний дохід. При n платежів страховик недоотримує порівняно з одноразовою сплатою премії процентний дохід у розмірі

$$\Delta I = iTR_t(1 - 1 / n) / 2. \tag{11.26}$$

Страховик, що погоджується на сплату страхової премії в розстрочку, має право поставити питання про компенсацію недоотриманої частини процентного доходу. Логічно частину премії, не сплачену при укладенні договору, розглядати як кредит страховика страхувальнику, виплачуваний у розстрочку з відсотками. При цьому відсотки нараховуються з поточної величини заборгованості, тобто із суми несплачених внесків. Так, наприклад, якщо страхова премія сплачується двома рівними платежами, причому другий внесок – через період $T / 2$, то протягом цього часу величина заборгованості становить $P_t / 2$, відсотки дорівнюють $i\, TP_t / 2$, процентний дохід від інвестування страхових резервів відповідно до формули (11.26) становить таку саму величину; у результаті в сумі отримаємо такий самий процентний дохід (11.26), як при одноразовій сплаті страхової премії. Аналогічно при сплаті страхової премії n рівними платежами через інтервали часу T / n заборгованість за k-й інтервал часу становить $D_k = P_t(1 - k / n)$, відсотки – iD_k, сума відсотків за термін дії договору

$$I = iP_t \frac{T}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (1 - k / n) = \frac{iP_t T}{2} (1 - 1 / n). \qquad (11.27)$$

Додаючи до (11.27) процентний дохід від інвестування страхових резервів, набудемо значення (11.24) – величину інвестиційного доходу від страхових резервів при одноразовій сплаті страхової премії.

У класичному варіанті погашення заборгованості відсотки виплачуються разом з частиною боргу, що погашається, тобто разом з черговими внесками, причому в розмірі, пропорційному величині поточної заборгованості. Для розрахунків зручніше, щоб процентні платежі становили постійну добавку до кожного внеску. Розмір цієї добавки дорівнює частці від ділення (11.27) на кількість внесків

$$\Delta = I / n = \frac{iP_t T}{2n^2} (n - 1). \qquad (11.28)$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Охарактеризуйте основні види резервів страхової компанії.
2. Що таке резерв превентивних заходів? Наведіть формулу його розрахунку.
3. Дайте визначення поняття технічного резерву.
4. У чому полягає сутність резерву незароблених премій.
5. Охарактеризуйте методи формування страхових резервів.
6. Що таке резерв збитків? Які його складові?

7. Дайте визначення резерву заявлених, але невиплачених збитків.
8. Охарактеризуйте резерв збитків, які виникли, але не заявлені.
9. У чому полягає сутність резерв коливань збитковості?
10. Що таке резерв незакінчених ризиків?
11. Охарактеризуйте спеціальні резерви.
12. Що таке резерв із страхування життя?
13. Охарактеризуйте резерв катастроф.

ТЕСТИ

1. Визначити правильні твердження:
   а) резерв превентивних заходів – частина страхової премії, яка надійшла за договорами страхування, укладеними у звітному періоді, а термін їх дії припадає на наступний звітний період (виплати майбутніх періодів);
   б) вільний резерв – частина власних коштів страховика, яка резервується з метою додаткового забезпечення платоспроможності відповідно до прийнятої методики страхування;
   в) незароблена премія – премія, що забезпечує реалізацію попереджувальної функції страхування, забезпечує фінансування витрат на заходи із запобігання нещасних випадків, втрат чи пошкодження майна.
2. Співвідношення $RZ_t(t) = Z_t(1 - \frac{t}{T}) = Z_t \frac{T-t}{T}$ описує:
   а) сумарний резерв незаробленої премії;
   б) технічну премію;
   в) частку адміністративних витрат у брутто-премії;
   г) сумарну нетто-премію за весь термін дії договорів.

3. Формула $I = i\int_0^T V(t)dt = iT\overline{V}$ описує:
   а) інвестиційний дохід протягом терміну дії договору;
   б) середній рівень резерву незаробленої премії протягом терміну дії договору;
   в) річну тарифну нетто-ставку;
   г) нормативний рівень виплат;
   д) резерв незароблених премій.

4. Страхові резерви містять:
   а) резерви за ризиковими видами страхування (технічні);
   б) резерви зі страхування життя і накопичувального страхування (математичні);
   в) відрахування від надходжень страхових платежів;
   г) внески власних коштів страховика (частина прибутку);
   д) доходи від розміщення тимчасово вільних коштів.

5. За формулою $РНП = 1/4\sum П_1 + 1/2\sum П_2 + 3/4\sum П_3$ розраховується *РНП* методом:
   а) «1/365»;
   б) «1/4», «1/8», «1/12», «1/24»;
   в) «40%»;
   г) «плаваючих кварталів».

6. Першого серпня страхова компанія уклала договір страхування строком на один рік з оплатою страхової премії одноразовим внеском у розмірі 80 тис. грн. Частка страхової премії, призначеної для виплати комісійних за укладення договору, – 30%, частка відрахувань на превентивні заходи – 10%. Величина технічної премії становить:
   а) 48%;
   б) 38%;
   в) 55%;
   г) 45%.

7. Формула $\overline{V} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[P(t) - P_t \frac{t}{T} \right] dt$ описує:
   а) інвестиційний дохід за термін дії договору;
   б) середній рівень резерву незаробленої премії протягом терміну дії договору;
   в) річну тарифну нетто-ставку;
   г) нормативний рівень виплат;
   д) резерв незароблених премій.

8. Технічна премія, що надійшла у звітному періоді, дорівнює сумі відрахувань у резерв коливань збитковості, величині зміни РНП, заробленій за період офісної премії, і сумі фактичних виплат:
   а) так;
   б) ні.

9. До додаткових резервів належать:
   а) резерв коливань збитковості;
   б) резерв катастроф;
   в) резерв незакінчених ризиків;
   г) резерв заявлених, але невиплачених збитків;
   д) резерв збитків, які виникли, але не заявлені;
   е) резерв довгострокових зобов'язань.

10. Який показник визначається за кожною неврегульованою претензією і відповідає сумі заявлених збитків за звітний період, які зареєстровані в Журналі обліку збитків, що збільшена на суму неврегульованих збитків за попередні періоди та зменшена на вже виплачені протягом звітного періоду збитки плюс витрати на врегулювання збитку?
   а) резерв заявлених, але невиплачених збитків;
   б) резерв збитків, які виникли, але не заявлені;
   в) резерв коливань збитковості;
   г) резерв катастроф.

Тема 12. МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

12.1. СУТНІСТЬ, ВИДИ ТА ФУНКЦІЇ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

Поняття перестрахування. Цедент. Цедування. Цесія. Ретроцесія. Ретроцесіонарій. Вартість перестрахування. Коефіцієнт професора Ф.В. Коньшина. Види перестрахування

12.2. ПЕРЕСТРАХУВАННЯ ЯК МЕТОД УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ

Сумарний позов. Імовірність розорення страхової компанії

12.3. ДИВЕРСИФІКАЦІЯ РИЗИКІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

Загальний рівень ризику. Модель Васічека. Коваріація випадкових величин. Метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа

12.1. СУТНІСТЬ, ВИДИ ТА ФУНКЦІЇ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

Прийнято вважати, що перший договір перестрахування було укладено в Генуї в 370 році. Предметом договору були товари, які перевозилися на морському судні з Генуї до Брюгге. Під дію договору підпала частина цього рейсу: від Каделсса до Брюгге.

Систематично використовувати перестрахування почали з кінця XVI століття, коли страховики – купці розподіляли між собою ризики в певних частках. Проте початок формування сучасного ринку перестрахування відносять до середини XIX сторіччя, коли процес економічного розвитку і зростання промисловості сприяли появі більш значних і складних ризиків, реалізація яких могла призвести до катастрофічних наслідків. З'являються спеціалізовані перестрахувальні компанії в Німеччині, Росії.

В Україні перші такі компанії виникли на початку XX століття (1910–1915). Це були земські страхові компанії (перестрахування вогневих ризиків).

Можна стверджувати, що *перестрахування* виникло як спосіб підтримки страховиків, зумовлений збільшенням обсягів і використанням нових форм страхування. Необхідність такої підтримки полягає в тому, що індивідуальні можливості страховика зі страхування, а також гарантії повної та своєчасної виплати за великим одиночним ризиком є досить обмеженими.

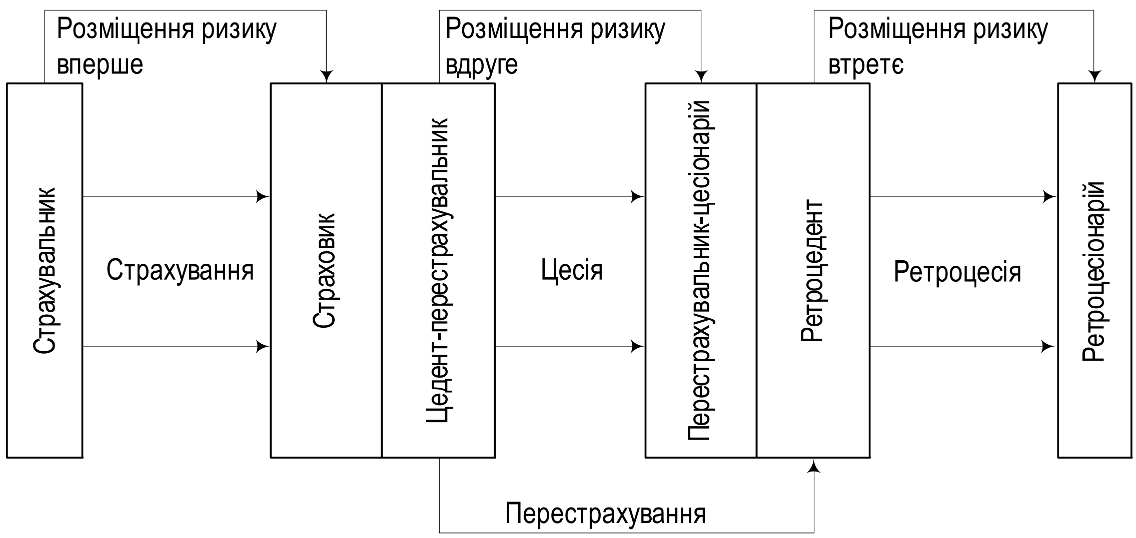


Рис. 12.1. Схема передачі страхового ризику

Система перестрахування, як і система прямого страхування, побудована на розподілі ризику між кількома учасниками (рис. 12.1). Це дозволяє прямому страховику, з одного боку, повністю виконати прийняті на себе страхові зобов'язання перед страхувальником, а з іншого, полегшити навантаження за виплатою в будь-якому страховому випадку, зберігаючи при цьому свою фінансову надійність.

Перестрахування – це страхування ризику, узятого на себе страховиком.

У перестрахуванні застосовується своя термінологія та відповідні умови страхування.

Цедент – страховик, який перестраховує прийняті на себе ризики.

Цедування (цесія) – процес передачі ризику або його частини.

Процес подальшої передачі даного ризику наступному перестраховику називається ***ретроцесією***, а сторона, яка приймає такий ризик – ***ретроцесіонарієм.***

Здійснюючи перестрахування, кожна страхова компанія виходить з того, що даний процес повинен бути економічно ефективним після досягнення поставленої цілі, а також повинен враховувати вартість перестрахування.

Вартість перестрахування складається із:

- частини страхової премії, що передається перестраховику;
- витрат компанії на ведення справи внаслідок передачі ризиків.

У самому процесі перестрахування закладене певне протиріччя. З одного боку, перестраховик, підтримуючи фінансово страхову компанію, сприяє збалансуванню її страхового портфеля, розширенню страхової діяльності, з іншого – перестрахування пов'язане з передачею доволі значної частки страхової премії, а отже, існує ймовірність погіршення підсумкових показників діяльності страхової компанії.

Отже, правильне визначення розміру перестрахування має важливе значення для кожної страхової компанії. Тому, визначальним є *власне утримання цедента*, яке являє собою економічно обґрунтований рівень суми, у межах якої страхова компанія відповідає за певну частку ризиків, які страхує, та передає в перестрахування суми, що перевищують даний рівень. Існує багато теорій та практичних рекомендацій щодо встановлення лімітів власного утримання. Проте вони не враховують специфіки кожної окремої страхової компанії. Вирішуючи цю проблему, ураховувати багато факторів (середню збитковість за ризиками, що страхуються, обсяг премії, середню доходність або прибутковість операцій за відповідним видом страхування, територіальний розподіл застрахованих об’єктів, величину витрат на ведення страхової справи) та професійний рівень андерайтерів.

Страховик зобов’язаний передавати в перестрахування частину ризику (своїх зобов’язань перед страхувальником) у разі невиконання такої умови

$$S = \frac{(A - Y)10\%}{100\%}, \tag{12.1}$$

де S – сума, на яку страховик має право укладати договори за даним видом страхування;

A – величина активів страхувальника;

Y – розмір сплаченого статутного капіталу;

10% – нормальне процентне відношення страхових надходжень до сплаченого статутного капіталу за даним видом страхування.

Теоретичною основою визначення ступеня ймовірності дефіцитності коштів є коефіцієнт професора Ф.В. Коньшина

$$K = \sqrt{\frac{1 - \bar{q}}{n \cdot \bar{q}}}, \tag{12.2}$$

де K – коефіцієнт Коньшина;

$\bar{q}$ – середня тарифна ставка за всім страховим портфелем;

n – кількість застрахованих об’єктів.

Чим менше значення K, тим нижча ймовірність дефіцитності коштів і тим вища фінансова стійкість страхової компанії.

Для оцінки фінансової стійкості страхового фонду як відношення доходів до витрат за тарифний період використовується формула

$$K_{фс} = \frac{Д + C_{зф}}{P}, \tag{12.3}$$

де $K_{фс}$– коефіцієнт фінансової стійкості;

$Д$ – сума доходів страхувальника за тарифний період;

P – сума витрат за тарифний період;

$C_{зф}$ – сума коштів у запасних фондах.

Нормальним станом фінансової стійкості страхової організації слід вважати, якщо $K_{фс}$ більший 1, тобто коли сума доходів з урахуванням залишку коштів у запасних фондах перевищує всі витрати страхувальника.

Передача ризиків у перестрахування здійснюється постійно або одноразово.

За *методом передавання ризиків у* перестрахування перестрахувальні операції поділяються на три види:

1) факультативні;
2) облігаторні (договорні);
3) факультативпо-облігаторні.

Факультативні перестрахувальні операції характеризуються певною свободою сторін договору перестрахування, наявністю можливості регулювання страховиком розміру власного утримання. Попередньою умовою для укладання договору факультативного перестрахування є певна інформація про наміри сторін перестрахувальних відносин.

Облігаторне страхування передбачає обов'язкову передачу в перестрахування раніше узгодженої частини ризику за всіма покриттями, визначення меж відповідальності, перестрахувальної комісії, обмеження щодо покриття. Цей метод перестрахування має свої переваги він сприяє:

- досягненню рівномірності розподілу ризиків;
- автоматичності прийняття ризиків;
- розвитку довгострокових взаємовідносин між сторонами;
- збільшенню обсягів страхових операцій;
- гарантії підтримки перестраховика.

Факультативно-облігаторне перестрахування поєднує риси факультативного та облігаторного, воно використовується за наявності особливо значних, небезпечних ризиків з можливістю кумуляції збитків та можливими катастрофічними наслідками.

Перерозподіл ризику в перестрахувальних операціях відбувається у двох *формах*:

1) пропорційній;
2) непропорційній.

Пропорційна форма перестрахування історично є першою й до кінця XIX ст. єдиною загальною формою перерозподілу ризиків. Сторони частково беруть участь у розподілі відповідальності. Інтереси цсдента й перестраховика в цілому збігаються. Ця форма застосовується в обов'язковому страхуванні відповідальності, в автокаско.

Перерозподіл ризику в пропорційній формі здійснюється за такими видами договорів перестрахування:

- *квотним* – цедент зобов'язується передати перестраховику частку у всіх ризиках даного виду, а перестраховик зобов'язується їх прийняти;
- *ексцедентної суми* – використовується, коли застраховані ризики є різними за страховими сумами; цедент є відповідальним за всіма ризиками в розмірі страхової суми, яка менша чи дорівнює власному утриманню, а перестраховик – за всіма ризиками, де страхова сума перевищує розмір власного утримання;
- *квотно-ексцендентним* – змішаного типу, використовується дуже рідко, поєднує риси двох попередньо зазначених договорів.

Непропорційне перестрахування широко стало застосовуватися після Другої світової війни. Інтереси сторін можуть приймати суперечливий характер. Найчастіше використовується в договорах страхування цивільної відповідальності власників транспортних засобів за збиток, спричинений третім особам у результаті ДТП. Ця форма страхування застосовується також і там, де немає верхньої межі відповідальності страховика. Здійснюється за такими *видами договорів*:

- ексцедента збитку – застосовується тоді, коли страховик намагається не вирівняти окремі ризики даного виду страхування, а спрямовує свою діяльність безпосередньо на забезпечення фінансової рівноваги страхових операцій;
- ексцедента збитковості – перестрахування стосується всього страхового портфеля, має на меті захистити фінансові інтереси страховика перед наслідками занадто великої збитковості.

Обслуговування договорів непропорційного перестрахування є доволі простим, не потребує особливих витрат.

Залежно від ролей, які відіграють цедент і перестраховик в укладеному між ними договорі, перестрахування поділяється на:

- активне – означає передачу ризику;
- пасивне – означає приймання ризику.

Отже, перестрахування – це вторинний розподіл ризику, що відбувається в певній формі за відповідними методами.

12.2. ПЕРЕСТРАХУВАННЯ ЯК МЕТОД УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ

Нехай клієнт страхує свій ризик у певній компанії. Позначимо через θ відносну страхову надбавку, пов'язану зі страховою компанією. Нехай θ^* – відносна страхова надбавка, пов'язана з договором перестрахування.

Розглянемо перший тип договору: пропорційне перестрахування.

Введемо величину $0 \leq \alpha \leq 1$.

Нехай ζ – позов клієнта до передавальної компанії. Передавальна компанія частину суми позову ($\alpha\zeta$) оплачує сама, а іншу частину ($(1 - \alpha)\zeta$) оплачує перестрахувальна компанія. Нехай α – це граничне значення суми утримання.

Розглянемо ситуацію до перестрахування.

Сумарний позов $S = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i$, імовірність розорення $P(S > U)$. Тоді капітал компанії дорівнює

$$U = (1 + \theta)p_0 = (1 + \theta)E[S]. \tag{12.4}$$

Розглянемо тепер ситуацію після перестрахування з позиції передавальної компанії.

Сумарний позов дорівнює αS, а капітал

$$\begin{aligned} U &= (1 + \theta)E[S] - (1 + \theta^*)(1 - \alpha)\, E[S] = \\ &(1 + \theta - 1 - \theta^* + \alpha + \alpha\theta^*)E[S] = \\ &= (\theta - \theta^* + \alpha(1 + \theta^*)E[S]). \end{aligned} \tag{12.5}$$

Імовірність розорення дорівнює

$$\begin{aligned} &P(\alpha S > (\theta - \theta^* + \alpha(1 + \theta^*)E[S]) = \\ &= P(S > (1 + \theta^* + (\theta - \theta^*) / \alpha)E[S]. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Перестрахування передбачає зменшення цієї ймовірності, тобто потрібно знайти таке α таке, за якого вираз $(1 + \theta^* + (\theta - \theta^*) / \alpha)$ набуде максимального значення.

Розглянемо випадки:

- якщо $\theta - \theta^* > 0$, то $\alpha \to 0$ ($\alpha = 0$ граничний випадок) і весь позов передається перестрахувальній компанії;
- якщо $\theta - \theta^* < 0$, тоді $\alpha \to 1$ ($\alpha = 1$ граничний випадок) і весь позов залишається в передавальній компанії;
- якщо $\theta = \theta^*$, тоді $0 \leq \alpha \leq 1$ і ймовірність розорення не залежить від α.

Розглянемо другий тип договору: перестрахування перевищення втрат.

Введемо величини: r – граничне значення суми утримання; ζ – індивідуальний позов.

Якщо $\zeta \leq r$, то весь позов залишається в передавальній компанії (тобто весь позов задовольняється без перестрахування).

Якщо $\zeta > r$, то передавальна компанія задовольняє позов на r одиниць, а перестрахувальна компанії – на $(\zeta - r)$ одиниць.

Знайдемо ймовірність розорення в цьому випадку.

Позов $\zeta^{(r)}$ передавальній компанії від клієнта становить $\zeta^{(r)} = \min\{\zeta, r\}$.

Сумарний позов $S^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^{(r)}$.

Індивідуальний позов перестрахувальній компанії становить $\zeta - \zeta^{(r)}$, при цьому $\zeta - \zeta^{(r)} = \max\{0; \zeta - 0\}$.

Капітал перестрахувальної компанії становить

$$
\begin{aligned}
U &= N(1 + \theta)E[\zeta] - N(1 + \theta^*)E[\zeta - \zeta^{(r)}] = \\
&= N((\theta - \theta^*)\, E[\zeta] + (1 + \theta^*)\, E[\,\zeta^{(r)}]).
\end{aligned}
\tag{12.7}
$$

Імовірність розорення, використовуючи наближення Гаусса, можна обчислити за формулою

$$
\begin{aligned}
&(S^{(r)} > U) = P(S^{(r)} > N((\theta - \theta^*)E[\zeta] + (1 + \theta^*)E[\zeta^{(r)}])) = \\
&= P\left(\frac{S^{(r)} - E[S^{(r)}]}{\sqrt{Var[S^{(r)}]}} > \frac{U - E[S^{(r)}]}{\sqrt{Var[S^{(r)}]}}\right) = \gamma = 1 - \Phi\left(\frac{U - NE[\zeta^{(r)}]}{\sqrt{NVar[\zeta^{(r)}]}}\right),
\end{aligned}
\tag{12.8}
$$

де $E[S^{(r)}] = NE[\zeta^{(r}]$, $Var[S^{(r)}] = NVar[\zeta^{(r}]$.

Завдання полягає в тому, щоб мінімізувати значення ймовірності розорення компанії, тому вираз, що є аргументом функції Φ, повинен набувати максимального значення.

Введемо функцію, для якої потрібно знайти максимум

$$
\varphi(r) = \frac{U - NE[\zeta^{(r)}]}{\sqrt{NVar[\zeta^{(r)}]}} = \frac{N(\vartheta - \vartheta^*)(E[\zeta] + \vartheta^* E[\zeta^{(r)}])}{\sqrt{NVar[\zeta^{(r)}]}}.
\tag{12.9}
$$

Для того, щоб мінімізувати ймовірність розорення, потрібно знайти r за умови максимуму функції $\varphi(r) \to \max$, $0 < r < +\infty$. За цієї умови знайдемо необхідне граничне значення суми утримання.

Якщо виявиться, що максимум досягається в нулі, то весь позов потрібно передати перестрахувальній компанії, якщо ж максимум досягається на нескінченності, тоді весь позов залишається в передавальній компанії.

12.3. ДИВЕРСИФІКАЦІЯ РИЗИКІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

На діяльність будь-якого суб'єкта господарювання впливають певні ризики. Ризик виникає тоді, коли рішення вибирається з кількох можливих варіантів без упевненості, що воно є найефективнішим. Щоб знизити рівень ризиків та компенсувати заподіяний збиток, використовують такі методи управління ризиками: уникнення ризиків, мінімізацію ризиків, лімітування ризиків за операціями або диверсифікацію ризиків.

Диверсифікація ризиків дозволяє знизити рівень концентрації ризиків. Диверсифікація видів діяльності передбачає використання альтернативних можливостей отримання доходу і прибутку від різноманітних фінансових операцій.

Одним з основних принципів роботи страхової компанії є диверсифікація ризиків, яка передбачає те, що страховик не повинен включати у страховий портфель ризики лише одного виду або здійснювати перестрахування ризиків лише в одній страховій компанії. Припустимо, W_0 – загальний рівень ризику, узятого на страхування, який визначається як

$$W_0 = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_lp_l, \quad (12.10)$$

де l – вид ризику;

x_l – кількість договорів перестрахування l-го виду;

$p_k, k = 1 \div l$ – рівень ризику k-го виду.

Якщо поділити ліву та праву частини рівняння (12.10) на W_0, отримаємо $1 = \frac{x_1 p_1}{W_0} + \frac{x_2 p_2}{W_0} + \ldots + \frac{x_l p_l}{W_0}$. Позначимо частку договорів перестрахування k-го виду $\frac{x_k p_k}{W_0}$ через $W_k, (k = 1 \div l)$. Необхідно знайти $W_k, (k = 1 \div l)$, яке мінімізує ризик портфеля $\sigma^2_{портф}$ страхової компанії за умови, що $\sum_{k=1}^{l} W_k = 1$ та наявне середнє значення доходності $MR_{портф}$.

Для визначення стохастичних процентних ставок звернемося до моделі Васічека, у якій короткострокова процентна ставка визначається рівнянням

$$dr(t) = a - br(t)dt + \sigma dW(t), \quad (12.11)$$

де $[t, T]$ – інтервал часу;

$r(t) = r$ – короткострокова процента ставка;

a, $a > 0$ – довгострокове середнє значення спот-ставки;

b, $b > 0$ – параметр дрейфа (характеризує швидкість повернення процесу до довгострокового середнього значення);

σ – параметр дисперсії;

$dW(t)$ – вектор прирощення q-мірного стандартного вінерівського процесу. Вінерівський процес – приклад марківського процесу, тобто процесу, значення якого в даний момент t повністю визначає його майбутню поведінку незалежно від минулого.

Нехай рівень ризику описується моделлю виду

$$P(t, T) = \exp\{\alpha(t, T) - r(t)\beta(t, T)\},\ t \in [t, T], \quad (12.12)$$

де функції $\alpha(t, T)$, $\beta(t, T)$ – стохастичні процентні ставки за договорами перестрахування, що задаються моделлю Васічека.

$\alpha(t, T)$, $\beta(t, T)$ визначаються формулами

$$\alpha(t,T) = \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)\left(\beta(t,T) - (T-t)\right) - \frac{\sigma^2\beta^2(t,T)}{4a}, \quad (12.13)$$

та

$$\beta(t,T) = \frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)}). \quad (12.14)$$

Середнє значення процентної ставки визначається формулою

$$Mr(t) = \exp(-bt)\left[r(0) + \frac{a}{b}(\exp(bt) - 1)\right]. \quad (12.15)$$

Дисперсія визначається формулою

$$Dr(t) = \exp(-2bt)c^2 D(\textstyle\int_0^t \exp(bt)W(t)) = \exp(-2bt)c^2\,\dfrac{1}{2b}(r^{2bt} - 1). \quad (12.16)$$

Дохідність договору перестрахування визначається формулою

$$i(t)=\frac{g(t)N+P(t)-P_0}{P_0},\qquad (12.17)$$

де $g(t)$ – норма річного доходу від перестрахування ризиків;
P_0 – початковий рівень ризику, переданого у перестрахування;
N – страхова сума за переданим у перестрахування договором.

Після перетворень отримаємо дохідність договору перестрахування

$$i(t)=\frac{g(t)N}{P_0}+\frac{1}{P_0}\exp(\alpha-\beta r(t))-1,\forall t\in[0,T].\qquad (12.18)$$

Середня дохідність договору перестрахування дорівнюватиме

$$Mi=\frac{gN}{P_0}+\frac{e^{\alpha}}{P_0}Me^{-\beta r(t)}-1=\frac{gN}{P_0}+\frac{e^{\alpha}}{P_0}Me^{-\beta\left(\frac{r-Mr}{\sqrt{Dr}}\sqrt{Dr}+Mr\right)}-1=$$
$$=\frac{gN}{P_0}+\frac{e^{\alpha-\beta Mr+\frac{\beta^2 Dr}{2}}}{P_0}.\qquad (12.19)$$

А середня дохідність портфеля дорівнюватиме

$$MR_{портф}=\sum_{j=1}^{l}W_j Mi_j,\qquad (12.20)$$

де i_j – дохідність договору перестрахування j-го виду. Очікуваний ризик становить:

$$\sigma^2_{портф}=\sum_{k=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}W_k W_m\, cov(i_k;\, i_m)\qquad (12.21)$$

Коваріація випадкових величин i_k, i_m розраховується за формулою

$$cov(i_k;\, i_m)=M(i_k;\, i_m)-Mi_k Mi_m.\qquad (12.22)$$

Вибір оптимальної структури портфеля, тобто вибір оптимального вектора $(W_1^*;W_2^*;...;W_l^*)$, передбачає з находження значень $W_j\,(j=1\div l)$, що мінімізують ризик портфеля, якщо $\sum_{k=1}^{l}W_k=1$.

Цю задачу можна розв'язати методом множників Лагранжа. Перепишемо середню дохідність та ризик у матричній формі

$$\begin{aligned} \sigma^2_{портф} &= W^T \cdot v \cdot W, \\ MR_{портф} &= m^T \cdot W, \end{aligned} \qquad (12.23)$$

де W – стовбчик невідомих часток $W_j (j = 1 \div l), v = \text{cov}(i_k; i_m)$ – матриця коваріацій;

m – стовбчик, що складається з $M(i_j), (j = 1 \div l)$.

Функція Лагранжа має вигляд

$$\begin{aligned} L &= W^T V W + \mu_0 (I^T W - 1) + \mu_1 (m^T W - MR), \\ L &= W^T V W + \mu_0 (I^T W - 1) + \mu_1 (m^T W - MR), \end{aligned} \qquad (12.24)$$

де I – одинична матриця-стовбчик.

Оптимальний набір часток $(W_1^*; W_2^*; ...; W_l^*)$ визначається за формулою

$$W^* = V^{-1} \frac{R(I(I^T V^{-1} m) - m(I^T V^{-1} I)) + m(I^T V^{-1} m) - I(m^T V^{-1} m)}{(I^T V^{-1} m)^2 - (I^T V^{-1} I)(m^T V^{-1} m)}. \qquad (12.25)$$

Таким чином, страховику необхідно укладати $X_k = \frac{W_k^* W_0}{P_k}$ договорів перестрахування k-го виду $(k = 1 \div l)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте визначення поняття «перестрахування».
2. Охарактеризуйте схему передачі страхового ризику.
3. Дайте визначення поняття цесії та ретроцесії.
4. Наведіть складові вартості перестрахування.
5. Які види операцій перестрахування за методом передавання ризиків?
6. Охарактеризуйте пропорційну та непропорційну форми перерозподілу ризику.
7. Що таке активне та пасивне перестрахування.
8. Наведіть формулу визначення доходності договору перестрахування.
9. Наведіть формули визначення середньої дохідності договору перестрахування та портфеля.

ТЕСТИ

1. Перестрахування – це:
   а) страхування ризику, узятого на себе страховиком;
   б) страхування ризику, узятого на себе перестраховиком;
   в) страхування ризику, узятого на себе співстрахувальником;
   г) економічний механізм перерозподілу ризиків.

2. Вибрати правильні твердження:
   а) цедент – сторона, яка приймає ризик при перестрахуванні;
   б) цесія – процес передачі ризику або його частини;
   в) ретроцесія – процес подальшої передачі даного ризику наступному перестраховику;
   г) ретроцесіонарій – страховик, який перестраховує прийняті на себе ризики.

3. Теоретичною основою визначення ступеня ймовірності дефіцитності коштів є:
   а) коефіцієнт професора Ф.В. Коньшина;
   б) сума, на яку страховик має право укладати договори за даним видом страхування;
   в) коефіцієнт фінансової стійкості;
   г) сума коштів в запасних фондах.

4. Вибрати правильну відповідь:
   а) факультативне перестрахування використовується за наявності особливо значних, небезпечних ризиків з можливістю кумуляції збитків та можливими катастрофічними наслідками;
   б) облігаторне перестрахування передбачає обов'язкову передачу в перестрахування раніше узгодженої частки ризику за всіма покриттями, визначення межі відповідальності, перестрахувальної комісії, обмеження щодо покриття;
   в) факультативно-облігаторне перестрахування характеризується певною свободою сторін договору перестрахування, наявністю можливості регулювання страховиком розміру власного утримання.

5. Видами пропорційної форми перестрахування виступають:
   а) квотна;
   б) ексцедента суми;
   в) квотно-ексцендентна;

г) ексцедента збитку;
д) ексцедента збитковості.

6. Формула $MR_{портф} = \sum_{j=1}^{l} W_j Mi_j$ описує:
   а) середню дохідність портфеля;
   б) очікуваний ризик;
   в) оптимальний набір часток перестрахування;
   г) дохідність договору перестрахування.

7. Формула
$$W^* = V^{-1} \frac{R(I(I^T V^{-1} m) - m(I^T V^{-1} I)) + m(I^T V^{-1} m) - I(m^T V^{-1} m)}{(I^T V^{-1} m)^2 - (I^T V^{-1} I)(m^T V^{-1} m)}$$ описує:
   а) середню дохідність портфеля;
   б) очікуваний ризик;
   в) оптимальний набір часток перестрахування;
   г) дохідність договору перестрахування.

8. Формула $U = (1 + \theta)E[S] - (1 + \theta^*)(1 - \alpha)\, E[S] =$
   $= (1 + \theta - 1 - \theta^* + \alpha + \alpha\theta^*)E[S] = (\theta - \theta^* + \alpha(1 + \theta^*)E[S])$ описує:
   а) сумарний позов;
   б) імовірність розорення;
   в) капітал компанії;
   г) граничне значення суми утримання.

9. Увесь позов передається перестрахувальній компанії за умови, що:
   а) відносна страхова надбавка, пов’язана зі страховою компанією, більша від відносної страхової надбавки, пов’язаної з договором перестрахування;
   б) відносна страхова надбавка, пов’язана зі страховою компанією, менша ніж відносна страхова надбавка, пов’язана з договором перестрахування;
   в) відносна страхова надбавка, пов’язана зі страховою компанією, дорівнює відносній страховій надбавці, пов’язаній з договором перестрахування.

10. Визначити правильну відповідь:
   а) активне перестрахування – передача ризику;
   б) пасивне перестрахування – приймання ризику.

Тема 13. МОДЕЛІ РІВНОВАГИ УЧАСНИКІВ СВІТОВОГО РИНКУ

13.1. АНАЛІЗ РІВНОВАГИ ОСОБИ, ЯКА СТРАХУЄТЬСЯ

Математична модель клієнта. Рівновага клієнта страхової компанії

13.2. АНАЛІЗ ТАКТИКИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Прибуток страхової компанії та його корисність. Нейтральність до ризику страхової компанії. Умови прибутковості страхової компанії

13.1. АНАЛІЗ РІВНОВАГИ ОСОБИ, ЯКА СТРАХУЄТЬСЯ

Математична модель клієнта. Будемо використовувати такі позначення: A – грошова оцінка об'єкта страхування; π – імовірність страхового випадку; r – питомий страховий внесок (плата страховій компанії за кожну одиницю застрахованого майна); q – питома страхова винагорода (відшкодування страховою компанією в розрахунку на кожну одиницю застрахованого активу).

Додатково позначимо через x величину страхованого активу (її обирає клієнт страхової компанії); $u(x)$ – функцію корисності клієнта, визначену на залишок активу після страхового випадку.

Якщо матиме місце страховий випадок, то страхова компанія відшкодовує клієнтові величину qx. Для спрощення аналізу вважатимемо також, що компанія повертає клієнтові і його страховий платіж. Отже, якщо клієнт застрахував x одиниць активу й мав місце страховий випадок, то в клієнта залишається qx. За решту компанія не є відповідальною. Якщо ж страхового випадку не буде, то залишок активу становитиме $(A - qx)$.

Корисність у разі страхового випадку становитиме величину $u(qx)$, інакше – $u(A - qx)$. Очікувана корисність за обсягу страхування x дорівнюватиме величині $U(x) = \pi u(qx) + (1 - \pi)u(A - rx)$. Поведінка клієнта описуватиметься моделлю

$$U(x) = \pi u(qx) + (1 - \pi)u(A - rx) \to \max,\ 0 \le x \le A. \qquad (13.1)$$

Рівновага клієнта страхової компанії. Дотримуватимемося припущення про несхильність клієнта страхової компанії до ризику, тобто про увігнутість його функції корисності. Отже, очікувана корисність також буде увігнутою функцією (рис. 13.1).

Можливі три варіанти поведінки клієнта:
1) клієнт не страхується взагалі;
2) клієнт страхує об'єкт страхування, але не повністю;
3) клієнт страхує весь обсяг об'єкта страхування.

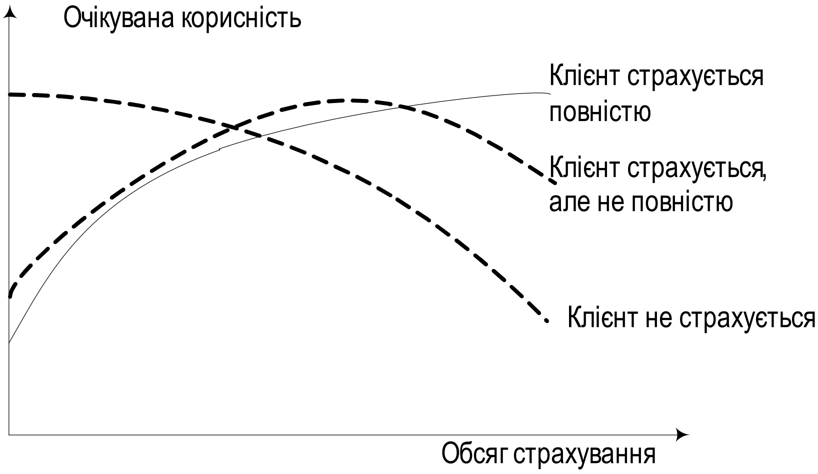


Рис. 13.1. Варіанти поведінки клієнта страхової компанії

Використовуючи похідну функції очікуваної корисності (1), усі три випадки можна повністю описати:

- якщо $u'(A) > 0$, то клієнт страхується повністю;
- якщо $u'(0) < 0$, то клієнт не страхується взагалі;
- якщо $u'(0) > 0$, а $u'(A) > 0$, то обсяг рівноваги x знаходять з рівняння $u'(x^*) = 0$.

Припускаючи диференційованість функції корисності й здобувши похідну $u'(x) = \pi u'(qx)q - (1-\pi)u'(A - rx)r$, можна повністю кваліфікувати рівновагу клієнта страхової компанії. Отже, умови рівноваги є такими

- якщо $\dfrac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} > \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q}$, то клієнт страхується повністю:
- якщо $\dfrac{u'(0)}{u'(A)} < \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q}$,то клієнту страхуватися взагалі не вигідно;
- якщо ж $\dfrac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} < \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q} < \dfrac{u'(0)}{u'(A)}$, то клієнт страхує частку, але не весь об'єкт страхування, причому обсяг страхування, що максимізує його очікувану корисність, знаходиться з рівняння (рівність похідної сподіваної корисності дорівнює нулю)

$$\pi u'(qx)q = (1-\pi)u'(A - rx)r. \qquad (13.2)$$

Рівняння (13.2) допускає таке його тлумачення: у стані рівноваги гранична корисність страхування в разі страхового випадку, перемножена на його ймовірність, збігається з граничною шкодою від страхування за відсутності страхового випадку, перемноженою на його ймовірність.

Отже, клієнт застосовує величини граничної шкоди і граничної корисності для визначення найпривабливішого для себе обсягу страхування з урахуванням при цьому ймовірності страхового випадку.

Аналогічно можна інтерпретувати першу та другу умови.

Умови рівноваги клієнта страхової компанії дають змогу дослідити реакцію клієнта на зміну параметрів страхування (на додаток до чисельного аналізу). Звернемося, наприклад, до другої умови. З неї випливає, що в разі зростання ймовірності страхового випадку π нерівність умови може бути порушена, що свідчитиме про вигідність страхування.

13.2. АНАЛІЗ ТАКТИКИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Прибуток страхової компанії та його корисність.

Прибуток страхової компанії – різниця між страховими внесками клієнтів і їх винагородами в разі настання страхових випадків.

З цього визначення випливає, що прибуток страхової компанії є випадковою величиною, оскільки кожен клієнт може як збільшувати, так і зменшувати прибуток страхової компанії залежно від того, трапився чи ні страховий випадок.

Позначимо через s індекс клієнта страхової компанії, а їх кількість – через N. Запровадимо спеціальну випадкову величину I_s – індекс страхового випадку клієнта s. I_s дорівнює одиниці, якщо настає страховий випадок для клієнта s, і нулю у протилежному випадку. Тоді прибуток страхової компанії становитиме таку величину

$$\sum_{s=1}^{N}\left[rI_s-(q-r)(1-I_s)\right]x_s(r,q), \qquad (13.3)$$

де $x_5(r, q)$ – обсяг страхування клієнта s за питомого страхового внеску r та питомої страхової винагороди q.

Виходитимемо з того, що страхова компанія прагне до максимізації очікуваної корисності прибутку й обирає параметри страхування r, q саме з цих міркувань. Якщо; через v функцію корисності прибутку страхової компанії позначити, то очікувана корисність прибутку дорівнюватиме

$$V(r,q) = Mv(\sum_{s=1}^{N}\left[rI_s - (q-r)(1-I_s)\right]x_s(r,q)). \qquad (13.4)$$

Метою страхової компанії є підбір параметрів страхування таким чином, щоб максимізувати очікувану корисність прибутку.

Це завдання є – досить складним. Напевно можна стверджувати лише одне: для знаходження параметрів страхування з боку страхової фірми потрібно дотримуватися «золотої середини». Перша думка, яка може виникнути в недосвідченого менеджера страхової компанії, – зменшити страхову винагороду q й збільшити страховий внесок r. Цей шлях небезпечний через можливість залишитися без клієнтів узагалі й збанкрутувати.

Водночас, завелика страхова винагорода та замалий страховий внесок також можуть призвести до банкрутства компанії, оскільки сумарна страхова винагорода може перевищити сумарний страховий внесок, отже потрібен розрахунок.

Нейтральність до ризику страхової компанії. Дотримуватимемося припущення про *нейтральність до ризику страхової компанії*, яке є основним. Для забезпечення своєї нейтральності до ризику компанія повинна мати солідний капітал.

За умови нейтральності до ризику функція корисності компанії буде лінійною, а очікувана корисність просто збігатиметься з математичним очікуванням прибутку страхової компанії. У страховому випадку компанія повертає клієнтові на кожну одиницю страхованого об'єкта страхову винагороду й страховий платіж, тобто $r + q$, а за відсутності – отримає від клієнта страховий платіж. Надалі вважатимемо, що страхова компанія має монопольну владу, тобто вона надає унікальні послуги, або до інших компаній звертатися незручно. Отже, очікуване значення прибутку в розрахунку на одного клієнта становитиме величину: $(\pi_s(-r - q) + (1 - \pi_s)r)x_s(r, q)$. Якщо припускати, що всі клієнти є однаковими, а компанія відшкодовує клієнтові всі збитки в разі страхового випадку $q = 1$, то очікуване значення прибутку компанії може бути записане в такому вигляді

$$N((1 - \pi)r - \pi(1 + r))x(r). \qquad (13.5)$$

Проблема знаходження максимуму очікуваного прибутку (13.5) наочно виявляє дилему, що виникає перед страховою компанією: цей прибуток є добутком співмножників, один з яких $((1 - \pi)r - \pi(1 + r))$

за більш жорстких правил страхування (більший питомий страховий внесок) збільшується, а другий $x(r)$ – зменшується.

Умови прибутковості страхової компанії. Визначимо умови, за яких страхова компанія в середньому буде прибутковою. Розглянемо випадок, коли страхова компанія повністю відшкодовує збитки клієнта, тобто $q = 1$. Очікуваний прибуток компанії в розрахунку на одного клієнта в цьому випадку становитиме величину

$$((1 - \pi)r - \pi(x(r)). \tag{13.6}$$

Як і раніше, дотримуватимемося припущення, що всі клієнти страхової компанії є однаковими. Отже, за певних умов страхування вони всі разом страхуватимуться в однакових обсягах або взагалі ухилятимуться від страхування. Це дозволяє розглядати питання про прибутковість страхової компанії з погляду взаємовідносин компанії та одного клієнта.

З формули (13.6) випливає, що страхова компанія буде прибутковою (у середньому), якщо одночасно виконуватимуться дві умови:

1) клієнт страхує хоча б частку свого активу, тобто

$$x(r) > 0, \tag{13.7}$$

2) очікуваний страховий платіж клієнта компанії перевищує очікувану страхову компенсацію компанії клієнтові, тобто

$$(1 - \pi)r > \pi. \tag{13.8}$$

Поєднавши формули (13.7), (13.8) та умови рівноваги, дійдемо висновку, що за умови повного відшкодування всіх збитків клієнта внаслідок страхового випадку страхова фірма буде прибутковою, якщо

$$1 < \frac{1-\pi}{\pi} r < \frac{u'(0)}{u'(A)}. \tag{13.9}$$

Проведений нами аналіз базувався на істотних спрощеннях, зокрема, на припущенні, що всі клієнти є однаковими. Основну схему розрахунків можна застосувати для більш загального випадку, зокрема за наявності кількох груп клієнтів з різним ставленням до ризику.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Охарактеризуйте модель поведінки клієнта.
2. Які можливі варіанти поведінки клієнта страхової компанії?
3. Які умови рівноваги моделі поведінки клієнта?
4. Дайте визначення поняття «прибуток страхової компанії».
5. Якою буде діяльність страхової компанії за умови нейтральності до ризику?
6. Які умови прибутковості страхової компанії?

ТЕСТИ

1. Модель $U(x) = \pi u(qx) + (1 - \pi)u(A - rx) \to \max$, $0 \le x \le A$ описує поведінку:
   а) клієнта страхової компанії;
   б) страхової компанії;
   в) компанії перестраховика.

2. Співвідношення $\dfrac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} < \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q} < \dfrac{u'(0)}{u'(A)}$ описує умови рівноваги клієнта страхової компанії в разі, якщо:
   а) клієнт страхується повністю;
   б) клієнту страхуватися взагалі невигідно;
   в) клієнт страхує частку, але не весь об’єкт страхування.

3. Чи є правильним твердження, що у стані рівноваги гранична корисність страхування в разі страхового випадку, помножена на його ймовірність, збігається з граничною шкодою від страхування за відсутності страхового випадку, помноженою на його ймо-вірність:
   а) так;
   б) ні.

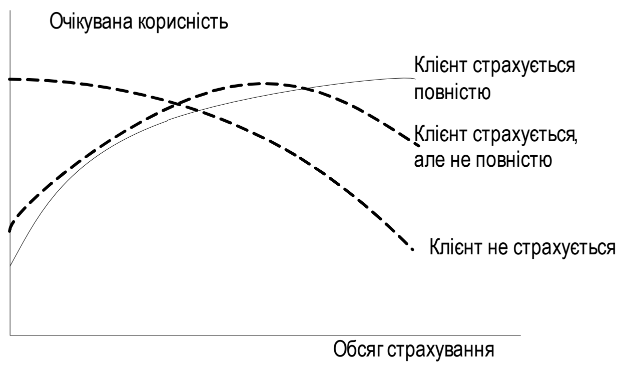
4. Співвідношення $Mv(\sum_{s=1}^{N}\left[rI_s - (q-r)(1-I_s)\right]x_s(r,q))$ за умови аналізу тактики страхової компанії описує:
   а) індекс страхового випадку клієнта;
   б) прибуток страхової компанії;
   в) очікувана корисність прибутку страхової компанії;
   г) обсяг страхування клієнта страхової компанії.

5. Співвідношення $\sum_{s=1}^{N}\left[rI_s-(q-r)(1-I_s)\right]x_s(r,q)$ за умови аналізу тактики страхової компанії описує:
   а) індекс страхового випадку клієнта;
   б) прибуток страхової компанії;
   в) сподівану корисність прибутку страхової компанії;
   г) обсяг страхування клієнта страхової компанії.

6. Вибрати правильні твердження за умови нейтральності до ризику страхової компанії:
   а) функція корисності компанії є лінійною;
   б) очікувана корисність збігається з математичним очікуванням прибутку страхової компанії;
   в) очікувана корисність збігається з математичним очікуванням страхових платежів страхової компанії.

7. Умовами прибутковості страхової компанії є такі:
   а) клієнт страхує хоча б частку свого активу;
   б) очікуваний страховий платіж клієнта компанії перевищує очікувану страхову компенсацію компанії клієнтові;
   в) клієнт страхує хоча б частку свого активу; очікуваний страховий платіж клієнта компанії перевищує очікувану страхову компенсацію компанії клієнтові.

8. На рисунку наведені випадки поведінки клієнта страхової компанії:



   а) клієнт страхує весь обсяг об’єкта страхування; клієнт страхує об’єкт страхування, але не повністю; клієнт не страхується взагалі;
   б) клієнт страхує об’єкт страхування, але не повністю; клієнт страхує весь обсяг об’єкта страхування; клієнт не страхується взагалі;

в) клієнт не страхується взагалі; клієнт страхує весь обсяг об'єкта страхування; клієнт страхує об'єкт страхування, але не повністю.

9. Співвідношення $\dfrac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} > \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q}$ описує умови рівноваги клієнта страхової компанії у випадку, якщо:
   а) клієнт страхується повністю;
   б) клієнту страхуватися взагалі невигідно;
   в) клієнт страхує частку, але не весь об'єкт страхування.

10. Виберіть правильні твердження за умови нейтральності до ризику страхової компанії:
   а) за відсутності страхового випадку страхова компанія отримує від клієнта страховий платіж;
   б) страхова компанія має монопольну владу;
   в) у страховому випадку компанія повертає клієнтові на кожну одиницю страхованого об'єкта страхову винагороду й страховий платіж.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Абрамов В. Ю. Страхование : теория и практика / Абрамов В. Ю. − М. : Волтерс Клувер, 2007. − 512 с.
2. Агеев Ш. Р. Страхование : теория, практика и зарубежный опыт / Ш. Р. Агеев, Н. М. Васильев, С. Н. Катырин. − М. : Экспертное бюро, 1998. − 376 с.
3. Александрова М. М. Страхування : навч.-метод. посібник. – К. : ЦУЛ, 2002 – 208 с.
4. Архипов А. П. Основы страхового дела : учебное пособие / А. П. Архипов, В. Б. Гомеля. − М. : Маркет ДС, 2002. − 402 с.
5. Архипов А. П. Страхование. Современный курс : учебник / А. П. Архипов, В. Б. Гомелля, Д. С. Туленты ; под ред. Е. В. Коломина. − М. : Финансы и статистика, 2007. − 416 с.
6. Архипов А. П. Страховое дело : учебно-метод. комплекс / А. П. Архипов, А. С. Адонин – М. : Изд. центр ЕАОИ, 2008. − 424 с.
7. Базилевич В. Д. Страхова справа / В. Д. Базилевич, К. С. Базилевич. – К. : Товариство "Знання", КОО, 1997. – 216 с.
8. Базилевич В. Д. Страховий ринок України. – К. : Товариство "Знання", КОО, 1998. – 374 с.
9. Базилевич В. Д. Страхування: підручник / за ред. В. Д. Базилевича. – К. : Знання, 2008. – 1019 с.
10. Балабанов И. Т. Страхование / И. Т. Балабанов, А. И. Балабанов. – СПб. : Питер, 2002. – 256 с.
11. Бігдаш В. Д. Страхування : навч. посібник [для студ. вищ. навч. закл.] / В. Д. Бігдаш. – К. : МАУП, 2006. – 448 с.
12. Бланд Д. Страхование : принципы и практика : учебное пособие / сост. Д. Бланд ; пер. с англ. / Финансовая академия при правительстве РФ. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 416 с.
13. Бойко А. О. Ідентифікація фінансових потоків страхової компанії / А. О. Бойко : зб. наук. праць Донецького державного університету управління. – Том 11. Серія «Економіка». – Випуск 176 «Фінансово-банківські механізми державного управління економікою України». – Донецьк, 2010. – С. 377–388.
14. Бойко А. О. Перестрахування як необхідний фактор забезпечення платоспроможності страхової компанії / А. О. Бойко // II Міжнародна наук.-практ. конф. «Якість економічного розвитку: глобальні та локальні аспекти» : Зб. наук. праць (27–28 серпня 2009 р., м. Дніпропетровськ). – Дніпропетровськ ПДАБА, 2009. – С. 52–54.

15. Бойко А. О. Сучасні тенденції розвитку ринку перестрахування в Україні / А. О. Бойко // Актуальные проблемы и перспективы развития экономики Украины : сб. тезисов выступлений VIII Международной научн.-практ. конф. (1–3 октября 2009 р.) / Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского. – Алушта, 2009. – С. 114–115.
16. Бойко А. О. Теоретичні основи та практичний досвід забезпечення фінансової стійкості страхової компанії / А. О. Бойко // Економічні науки. Серія «Облік і фінанси» : зб. наук. праць / Луцький національний технічний університет. – Випуск 7(25). – Ч. 4. – Луцьк, 2010. – С. 36–49.
17. Бойко А. О. Управління перестраховими операціями при здійсненні ризикових та лайфових видів страхування / А. О. Бойко, О. О. Капшук // Современные проблеми управления производством тезисы докладов IV Междунар. научн.-практ. конф., (Донецк, ДонНТУ, 22–23 октября 2009 г.) – Донецк : ГВУЗ «ДонНТУ», 2009. – С. 200–203.
18. Бойко А. О. Формалізації впливу перестрахування на рівень платоспроможності страхової компанії / А. О. Бойко // Всеукраїнський науково-виробничий журнал "Інноваційна економіка". – 2011. – № 20. – С. 226–230.
19. Борисова В. А. Організаційно-економічний механізм страхування / В. А. Борисова, О. В. Огаренко – Суми : Довкілля, 2001. – 194 с.
20. Василенко А. В. Інвестиційна стратегія страхових компаній : навчальний посібник / А. В. Василенко. – К. : КНЕУ, 2006. – 168 с.
21. Василишин Р. Д. Економічні основи страхування / Р. Д. Василишин, О. Л. Кашенко, В. А. Борисова; за ред. д.е.н., проф. А.В. Чупіса – Суми : Довкілля, 2001. – 412 с.
22. Економічний ризик : ігрові моделі : навчальний посібник / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко, А. В. Сігал, Я. С. Наконечний; за ред. д-ра екон. наук, проф. В. В. Вітлінського. – К. : КНЕУ, 2002. – 446 с.
23. Страхування : теорія та практика : навч.-метод. посібник / Н. М. Внукова, В. І. Успаленко, Л. В. Єременко та ін.; за ред. проф. Н. М. Внукової. – Х.; Бурун Книга, 2004. – 376 с.
24. Вовчак О. Д. Страхування : навчальний посібник / О. Д. Вовчак. – 3-тє вид. – Л. : Новий Світ-2000, 2006. – 480 с.
25. Гаманкова О. О. Ринок страхових послуг України: теорія, методологія, практика : монографія / О. О. Гаманкова. – К. : КНЕУ, 2009. – 283 с.

26. Гаманкова О. О. Фінанси страхових організацій : навчальний посібник / О. О. Гаманкова. – К. : КНЕУ, 2007. – 328 с.
27. Гаманкова О. О. Фінансова стійкість та платоспроможність страхової організації / О. О. Гаманкова // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія «Економіка». – К : КНЕУ, 2007. – Вип. 94–95. – С. 18–23.
28. Гвозденко А. А. Основы страхования : учебник / А. А. Гвозденко. – М. : Финансы и статистика, 1998. – 304 с.
29. Гвозденко А. А. Страхование : учебник / А. А. Гвозденко. – М. : ТК "Велби", Изд-во "Проспект", 2006. – 464 с.
30. Гинзбург А. И. Страхование : учебное пособие / А. И. Гинзбург. – СПб. : Питер, 2002. – 176 с.
31. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1998. – 479 с.
32. Гомелля В. Б. Страхование : учебное пособие / В. Б. Гомелля. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Маркет ДС Корпорейшн, 2006. – 488 с.
33. Горбач Л. М. Страхова справа: навчальний посібник / Л.М. Горбач. – 2-ге вид., випр. – К. : Кондор, 2003. – 252 с.
34. Граве К. А. Страхование / К. А. Граве, Л. А. Лунц. – М. : Госюриздат, 1960. – 175 с.
35. Грищенко Н. Б. Основы страховой деятельности : учебное пособие. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2001. – 274 с.
36. Дедиков С. В. Факторы оценки надежности перестраховых компаний на российском страховом рынке / С. В. Дедиков, А. А. Шумилин // Финансы. – 2007. – № 1. – С. 48–51.
37. Моделювання оцінки операційного ризику комерційного банку : монографія / С. О. Дмитров, К. Г. Гончарова, О. В. Меренкова, А. О. Бойко та ін.; за заг. ред. С. О. Дмитрова. – Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2010. – 264 с.
38. Дубовик В. П. Вища математика : навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2001. – 648 с.
39. Дьячкова Ю. М. Страхування : навчальний посібник / Ю. М. Дьячкова. – К. : Центр учбової літератури, 2008. – 240 с.
40. Ермакова С. М. Математические методы в социально-экономических исследованиях : сб. научн. статей / под ред. проф. С. М. Ермакова и д-ра физ.-мат. наук В. Б. Меласа. – СПб. : ТОО ТК «Петрополис», 1996. – С. 8–33.
41. Ермасов С. В. Страхование : учебник / С. В. Ермасов, Н. Б. Ермасова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшее образование, 2008. – 613 с.

42.Єпіфанов А. О. Страхування : навчальний посібник / А. О. Єпіфанов, В. В. Коваленко – Суми : Слобожанщина, 1997. – 96 с.
43.Єрмошенко А. М. Нова політика у сфері платоспроможності страхових компаній Європейського співтовариства / А. М. Єрмошенко, В. В. Поплавська // Фінанси України. – 2007. – № 11. – С. 103–109.
44.Жеребко А. Э. Совершенствование финансового менеджмента рисковых видов страхования / А. Э. Жеребко. – М. : Анкил, 2003. – 128 с.
45.Заруба О. Д. Страхова справа : підручник / О. Д. Заруба. – К. : Товариство "Знання", КОО, 1998. – 321 с.
46.Зміни до правил розміщення страхових резервів із страхування життя : Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 23.07.2009 № 576 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217.html?&tx_ttnews[tt_news]=11097&tx_ttnews[backPid]=64&cHash=a608ce9dad.
47.Зміни до правил формування, обліку та розміщення страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя : Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 14.12.2005 № 5117 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://zakon.rada.gov.ua/cgi-bin/laws/main.cgi?nreg=z1541-05.
48.Зміни до правил формування, обліку та розміщення страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя, затверджених розпорядженням Держфінпослуг від 17.12.2004 № 3104 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217. html?&tx_ ttnews[pointer]=37&tx_ttnews[tt_news]=2829&tx_ttnews[backPid]=792&cHash= 33681c3712
49.Зміни до правил формування, обліку та розміщення страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя : Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 07.08.2007 р. № 7791 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217.html?&tx_ttnews[pointer]=3&tx_ttnews[tt_news]=8112&tx_ttnews[backPid]=64&cHash=2726bd1fd9
50.Іванюк І. С. Теоретичні підходи до визначення категорії «фінансова стійкість страхової компанії» / І. С. Іванюк, Д. С. Маруженко // Фінанси України. – 2006. – № 11. – С. 77–89.

51. Кашенко О. Л. Соціально-економічні основи страхування : навчальний посібник / О. Л. Кашенко, В. А. Борисова. – Суми : Університетська книга, 1999. – 252 с.
52. Кириллова Н. Финансовая устойчивость и несостоятельность страховых компаний / Кириллова Н. // Страховое дело. – 2001. – № 5. – С. 17–21.
53. Кнейслер О. Прагматизм фінансової стійкості страховика / О. Кнейслер // Світ фінансів. – 2009. – № 4. – С. 191–197.
54. Ковтун І. О. Основи актуарних розрахунків : навчальний посібник / І. О. Ковтун, М. П. Денисенко, В. Г. Кабанов ; Мін-во освіти і науки України. – К. : Професіонал, 2008. – 480 с.
55. Козьменко О. В. Порівняльна характеристика видів страхування в Україні, Росії, Франції та країнах ЄС / О. В. Козьменко, А. О. Бойко // Зовнішня торгівля: право та економіка. Науковий журнал. – К., УДУФМТ. – 2009. – № 1(42). – С. 53–59.
56. Козьменко О. В. Страховий ринок України у контексті сталого розвитку : монографія / О. В. Козьменко. – Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. – 350 с.
57. Козьменко О. В. Управління конкурентоспроможністю страхових компаній / О. В. Козьменко, А. О. Бойко, О. О. Капшук // Управління фінансами в умовах вступу до СОТ : зб. матеріалів Всеукраїнської наук.-практ. конф. (15 жовтня 2009 р.) – Х. : ХНЕУ, 2009. – С. 69–71.
58. Коломин Е. В. Словарь страховых терминов / Е. В Коломин, В. В. Шахов. – М. : Финансы и статистика, 1991. – 305 с.
59. Котлобовский И. Б. Рисковый подход к оценке платежеспособности страховой компании / И. Б. Котлобовский, А. Е. Сметанин // Финансы. –2007. – № 6. – С. 39–43.
60. Кудрявцев А. А. Актуарные модели финансовой устойчивости страховых компаний / А. А. Кудрявцев. – СПб. : Институт страхования, 1997. – 62 с.
61. Куликов С. В. Финансовый анализ страховых организаций : учеб. пособие / С. В. Куликов. – Ростов н/Д : Феникс ; Новосибирск : Сибирское соглашение, 2006. − 224 с.
62. Кучма М. І. Математичне програмування : приклади і задачі : навчальний посібник. – Л. : Новий Світ-2000, 2007, – С. 344 (273–279).
63. Луконин С. В. Финансовая устойчивость страховых компаний и пути ее повышения / С. В. Луконин. – Страховое дело. – 2003. – № 5. – С. 28–31.

64. Мак Т. Математика рискового страхования / Т. Мак ; пер. с нем. – М. : Олим-Бизнес, 2005. − 432 с.
65. Манес А. Основы страхового дела /А. Манес. − М., 1992. −112 с.
66. Матвійчук А. В. Аналіз і управління економічним ризиком: навчальний посібник ; МОН.– К. : Центр навчальної літератури, 2005.– 224 с.
67. Машина Н. І. Міжнародне страхування / Н. І. Машина. – К. : Центр навчальної літератури, 2006. – 504 с.
68. Меренкова О. В. Факторний аналіз імовірнісної оцінки ризику використання послуг банків для легалізації кримінальних доходів або фінансування тероризму / О. В. Меренкова, Т. А. Медвідь, А. О. Бойко // Вісник Національного банку України. – 2010. – № 11(177). – С. 46–52.
69. Методика формування резервів із страхування життя : Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 27.01.2004 № 24 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217.html?&tx_ttnews[pointer]=40&tx_ttnews[tt_news]=4459&tx_ttnews[backPid]=792&cHash=32d5b62393.
70. Мних М. В. Страхування як механізм надання гарантій підприємницької діяльності та соціального захисту населення : навчальний посібник для студ. вищ. навч. закладів / М. В. Мних. − К. : Знання України, 2004. − 428 с.
71. Морозко Н. Й. Методология управления финансами страховой системы : автореф. дис. на соискание научн. степени докт. экон. наук : спец. 08.00.10 / Н. Й. Морозко. – М., 2007. – 49 с.
72. Мурина Н. Н. Страховое дело: учебное пособие / Н. Н. Мурина, А. А. Роговская. – Минск : ИВЦ Минфина, 2005. – 246 с.
73. Нагайчук Н. Г. Управління капіталом страхової компанії / Н. Г. Нагайчук // Фінанси України. – 2008. – № 11. – С. 106–116.
74. Нечипорук Л. В. Теорія та практика страхового ринку в Україні : монографія / Л. В. Нечипорук. – Х. : Вид-во нац. ун-ту внутр. справ, 2004. – 300 с.
75. Никулина Н. Н. Страхование. Теория и практика : учебное пособие / Н. Н. Никулина, С. В. Березина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 511 с.
76. Орланюк-Малицкая Л. А. О понятиях и факторах финансовой устойчивости страховых компаний / Л. А. Орланюк-Малицкая // Вестник финансовой академии. – 1998. – № 1. – С. 33–39.
77. Орланюк-Малицкая Л. А. Платежеспособность страховой организации / Л. А. Орланюк-Малицька. – М. : Анкил, 1994. – 245 с.

78.Осадець С. С. Страхування : підручник / кер. авт. кол. і наук. ред. С. С. Осадець. – 2-ге вид. перероб. і доп. – К. : КНЕУ, 2002. – 599 с.
79.Основи актуарних розрахунків : навчально-методичний посібник / за ред. чл. Українського Товариства актуаріїв І. О. Ковтуна. – К. : Алтера, 2004. – 328 с.
80.Основи довгострокового страхування : навчальний посібник / за ред. А. Т. Головко. – Алтера, 2007. – С. 30–53.
81.Плиса В. Й. Страхування : навчальний посібник – К. : Каравела, 2005. – 392 с.
82.Положення про обов'язкові критерії та нормативи достатності, диверсифікованості та якості активів, якими представлені страхові резерви з видів страхування, інших, ніж страхування життя : Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 08.10.2009 № 741 [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://www.dfp.gov.ua/217. html? &tx_ttnews [tt_news]=11551&tx_ttnews[backPid]=64&cHash=7447873722.
83.Порядок і правила формування, розміщення та обліку страхових резервів з обов'язкового страхування цивільної відповідальності за ядерну шкоду : Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 13.11.2003 № 123 [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://www.dfp.gov.ua/217.html?&tx_ttnews[pointer]=41&tx_ttnews[tt_news]=4535&tx_ttnews[backPid]=792&cHash=1a680093e0.
84.Правила розміщення страхових резервів із страхування життя : Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 26.11.2004 № 2875 [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://www.dfp.gov.ua/217.html?&tx_ttnews[pointer]=38&tx_ttnews[tt_news]=2856&tx_ttnews[backPid]=792&cHash=24772ec5bc
85.Правила формування, обліку та розміщення страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя : Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 17.12.2004 № 3104 [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://www.dfp.gov.ua/ 217.html? &tx_ttnews[pointer]=37&tx_ttnews[tt_news]=2829&tx_ttnews[backPid] =792&c Hash= 33681c3712.
86.Про вимоги до рейтингу фінансової надійності (стійкості) страховиків та перестраховиків-нерезидентів : Проект розпорядження Держфінпослуг [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://www.dfp.gov.ua.

87. Про затвердження Вимог до рейтингів фінансової надійності (стійкості) страховиків та перестраховиків-нерезидентів : Розпорядження Держфінпослуг від 03.12.2004 № 2885 [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://www.dfp.gov.ua
88. Про затвердження Вимог до рейтингу фінансової надійності (стійкості) страховика-нерезидента, який має право здійснювати страхову діяльність в Україні : Розпорядження Держфінпослуг від 28.08.2007 № 7924 [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://www.dfp.gov.ua.
89. Про затвердження Положення про Державну комісію з регулювання ринків фінансових послуг України Постанові Кабінету Міністрів від 3 лютого 2010 р. № 157 [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://zakon.rada.gov.ua.
90. Про затвердження Порядку надання страховиками (цедентами, перестрахувальниками) інформації про укладені договори перестрахування з страховиками (перестраховиками) нерезидентами до Держфінпослуг : Розпорядження Держфінпослуг від 04.06.2004 № 914 [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://www.dfp.gov.ua
91. Про затвердження Порядку погодження в Державній комісії з регулювання ринків фінансових послуг України договорів перестрахування з перестраховиками-нерезидентами для перерахування (купівлі) іноземної валюти страховиками-резидентами та страховими (перестраховими) брокерами-резидентами : Розпорядження Держфінпослуг від 03.06.2005 № 4123 [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://www.dfp.gov.ua.
92. Про затвердження Порядку реєстрації договорів перестрахування : Проект розпорядження Держфінпослуг [Електронний ресурс]. – Режим доступу :
http://www.dfp.gov.ua
93. Про страхування : Закон України від 7 березня 1996 року № 85/96-ВР // Відомості Верховної Ради України. – 1996. – № 18.
94. Пфайффер К. Введение в перестрахование / К. Пфайффер. – М. : Анкил, 2002. – 328 с.
95. Рейтман Л. И. Страховое дело : учебник; под общ. ред. проф. Л. И. Рейтмана. – М. : Банковский и биржевой центр, 1992. – 524 с.

96.Самойловський А. Л. Комплексна оцінка фінансового стану страховика / А. Л. Самойловський // Формування ринкових відносин в Україні. – 2004. – № 4. – С. 7–10.
97.Сербиновский Б. Ю. Страховое дело : учебное пособие для вузов / Б. Ю. Сербиновский, В. Н. Гарькуша. – Ростов н/Д : Феникс, 2000. – 384 с.
98.Сплетухов Ю. А. Страхование: учебное пособие / Ю. А. Сплетухов, Е. Ф. Дюжиков – М. : ИНФРА-М, 2006. – 312 с.
99.Таркуцяк А. О. Страхування : навч. посіб. / А. О. Таркуцяк ; Європейський ун-т фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу. − К. : Вид-во Європ. ун-ту фінансів, інф. систем, менеджм. і бізнесу, 2000. − 115 с.
100. Ткаченко Н. В. До визначення поняття «платоспроможність страхової компанії» / Н. В. Ткаченко // Регіональна економіка. − 2010. − № 2. − С. 100−105.
101. Ткаченко Н. В. Забезпечення фінансової стійкості страхових компаній : теорія, методологія та практика : монографія / Н. В. Ткаченко ; Нац. банк України. Ун-т банк, справи. − Черкаси : Черкаський ЦНТЕГ, 2009. − 570 с.
102. Ткаченко Н. В. Розвиток перестрахування як важіль забезпечення фінансової стійкості страховиків / Н. В. Ткаченко // Фінанси України. − 2007. − № 3. − С. 118−123.
103. Ткаченко Н. В. Страхування : навчальний посібник. − К. : Ліра-К, 2007. − 376 с.
104. Ткаченко Н. В. Фінансова стійкість страхових компаній : теоретичні підходи / Н. В. Ткаченко // Фінанси України. − 2009. − № 6. − С. 104−121.
105. Тронин Ю. Н. Основы страхового бизнеса / Ю. Н. Тронин. – М. : Альфа-Пресс, 2006. – 472 с.
106. Турбиной К. Е. Теория и практика страхования : учебное пособие / К. Е. Турбиной. − М. : Анкил, 2003 – 704 с.
107. Федорова Т. А. Основы страховой деятельности : учебник / отв. ред. проф. Т. А. Федорова. – М. : Издательство БЕК, 2002. − 768 с.
108. Федорова Т. А. Страхование : учебник / под ред. Т. А. Федоровой. − 2-е изд., перераб. и доп. − М. : Экономистъ, 2004. − 875 с.
109. Фурман В. М. Страхування : теоретичні засади та стратегія розвитку : монографія / В. М. Фурман. − К. : КНЕУ, 2005. − 296 с.
110. Хэмптон Д. Финансовое управление в страховых компаниях / Д. Хэмптон ; перевод с англ. − М. : Анкил, 1995. − 263 с.
111. Шахов В. В. Страхование : учебник для вузов / В. В. Шахов. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 311 с.

112. Шахов В. В. Теория и управление рисками в страховании / В. В. Шахов, В. Г. Медведев, А. С. Миллерман. − М. : Финансы и статистика, 2003. − 224 с.
113. Шелехов К. В. Страхование : учебное пособие / К. В. Шелехов, В. Д. Бигдаш. − К. : МАУП, 1998. − 424 с.
114. Шихов А. К. Страхование: учебное пособие для вузов. − М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. − 431 с.
115. Шірінян Л. В. Фінансова надійність і фінансова стійкість страховиків / Л. В. Шірінян // Актуальні проблеми економіки. − 2007. − № 9. − С. 173–179.
116. Шумелда Я. Основи актуарних розрахунків : навчальний посібник / Я. Шумелда. − Тернопіль : Підручники і посібники, 2003. − 160 с.
117. Шумелда Я. П. Страхування : навчальний посібник / Я. П. Шумелда. 2-ге вид., розш. – К. : Міжнародна агенція „БІЗОН", 2007. − 384 с.
118. Щербаков В. А. Страхование : учебное пособие / В. А. Щербаков, Е. В. Костяева. − М. : КНОРУС, 2007. − 312 с.
119. Юрченко Л. А. Финансовый менеджмент страховика : учебное пособие для вузов / Л. А. Юрченко. − М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. − 199 с.
120. Яковлева Т. А. Страхование : учебное пособие / Яковлева Т. А., О. Ю. Шевченко. – М : Экономистъ, 2004. − 217 с.
121. Kozmenko O. Forecasting of principal directions of Ukrainian insurance market development based on German insurance market indices / O. Kozmenko, O. Merencova, A. Boyko, H. Kravchuk // Innovative Marketing. – Volume 5, Issue 4, 2009. – P. 51−54.
122. Kozmenko O. V. Analysis of insurance market structure and dynamics in Ukraine, Russia and countries members of European insurance and reinsurance federation (CEA) / O. V. Kozmenko, O. V. Merenkova, A. O. Boyko // Problem and Perspectives in Management International Research Journal Volume 7, Issue 1, 2009. – P. 30−41.