Карпатські математичні
публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.4, №1

УДК 517.982

Красікова І.В.[1], Попов М.М.[2]

ЗАМІТКА ПРО ОПЕРАТОРИ З ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРІВ КЕТЕ У ПРОСТІР $C_0(\Gamma)$

Красікова І.В., Попов М.М. *Замітка про оператори з функціональних просторів Кете у простір* $c_0(\Gamma)$ // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 67–71.

Метою замітки є узагальнення відомого результату про вузькість будь-якого оператора з простору $E = L_p$ в c_0 при $1 \le p < \infty$ на випадок загальнішого класу просторів Кете E.

Вступ

Поняття вузького оператора, як узагальнення компактного оператора, введено в роботі [7] у 1990 р. В цій же роботі проведено перше систематичне дослідження вузьких операторів. Проте, окремі результати про вузькі оператори були відомі раніше. Наприклад, як допоміжний результат, у статті Дж. Бургейна і Х. Розенталя [1] отримано, що кожний оператор з L_1 в c_0 вузький. В статті В. Кадецем і М. Поповим [2] доведено, що кожний оператор з простору L_p в c_0 є вузьким при довільному $p \in [1, +\infty)$. У роботі [4] автори встановили, що кожний порядково-нормовано неперервний оператор $T : L_\infty(\mu) \to c_0(\Gamma)$ вузький. Із сучасним станом теорії вузьких операторів можна ознайомитися у недавньому огляді [8].

1 Вузькість операторів з просторів Кете у простір $c_0(\Gamma)$

Наведемо необхідну інформацію. F-простором називається повний метричний лінійний простір з інваріантною відносно зсуву метрикою (детальніше про F-простори див. у [9]). Множину всіх лінійних неперервних операторів $T : X \to Y$ між F-просторами X, Y позначатимемо через $\mathcal{L}(X, Y)$. Термінологія та загальновідомі факти про банахові простори запозичені з двотомника [5, 6]. Так, якщо X — банахів простір, то через B_X ми позначаємо одиничну кулю простору X.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46B20, 46E30.
Ключові слова і фрази: простір Кете, вузький оператор, корозмірність підпростору, слабко компактна множина, крайова точка множини.

Означення 1.1. *Нехай* (Ω, Σ, μ) *— простір зі скінченною безатомною додатною мірою. Позначимо через* $L_0(\mu)$ *лінійний простір всіх класів еквівалентності вимірних функцій* $x : \Omega \to \mathbb{K}$ *(де* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*).* F*-простір (банахів простір)* $E \subseteq L_0(\mu)$ *називається* F*-простором Кете (банаховим простором Кете), якщо виконуються такі умови:*

(*i*) *для довільних* $x \in L_0(\mu)$ *та* $y \in E$ *з умови* $|x(\omega)| \le |y(\omega)|$ *для майже всіх* $\omega \in \Omega$ *випливає, що* $x \in E$ *і* $\|x\| \le \|y\|$*;*

(*ii*) $\mathbf{1}_\Omega \in E$*.*

Тут і надалі $\mathbf{1}_A$ *— характеристична функція множини* $A \in \Sigma$*.*

Означення 1.2. *Нехай* E *—* F*-простір Кете на* (Ω, Σ, μ) *і* X *— довільний* F*-простір. Оператор* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *називається вузьким, якщо для довільних* $A \in \Sigma$ *та* $\varepsilon > 0$ *існує така функція* $x \in L_0(\mu)$*, що*

$$x^2 = \mathbf{1}_A, \quad \int_\Omega x\, d\mu = 0 \quad \text{та} \quad \|Tx\| < \varepsilon.$$

Основний результат цієї замітки — наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* (Ω, Σ, μ) *— простір зі скінченною безатомною додатною мірою,* E *— дійсний* F*-простір Кете на* (Ω, Σ, μ)*, для якого існує рефлексивний банахів простір Кете* E_1 *на* (Ω, Σ, μ) *з неперервним вкладенням* $E_1 \subseteq E$*,* Γ *— довільна множина. Тоді кожний оператор* $T \in \mathcal{L}(E, c_0(\Gamma))$ *є вузьким.*

Для доведення теореми потрібні допоміжні елементарні факти (ці факти використовувалися в [4]). Оскільки доведення займають мало місця, ми наведемо їх для повноти.

Нагадаємо, що корозмірністю підпростору Y лінійного простору X називається розмірність (тобто потужність базису Гамеля) фактор-простору X/Y. Записують це так: $\operatorname{codim} Y = \dim X/Y$.

Лема 1.1. *Нехай* $S : X \to Y$ *— лінійний оператор, що діє між лінійними просторами. Якщо лінійний підпростір* $Y_0 \subseteq Y$ *має скінченну корозмірність у* Y*, тоді* $X_0 = T^{-1}Y_0$ *має скінченну корозмірність у просторі* X*.*

Доведення. Нехай $m = \dim Y/Y_0$ та $x_1, x_2, ..., x_{m+1}$ — довільні елементи простору X. Згідно з означенням числа m, існують такі скаляри $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m+1}$, які не всі одночасно дорівнюють нулю, що $\alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 + ... + \alpha_{m+1} T x_{m+1} \in Y_0$. Але оскільки

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{m+1} x_{m+1} \in X_0,$$

за рахунок довільності вибору $x_1, x_2, ..., x_{m+1} \in X_0$, ми отримаємо, що $\dim X/X_0 \le m$, тобто підпростір X_0 має скінченну корозмірність у просторі X. □

Лема 1.2. *Нехай* X *— лінійний простір, а* Y, Z *— його підпростори. Якщо* $\dim Y > \mathit{codim}\, Z$*, то* $Y \bigcap Z \ne \{0\}$*.*

Доведення. Нехай $\tau : X \to X/Z$ — фактор-відображення, а $\tau|_Y : Y \to X/Z$ — його звуження на підпростір Y. Оскільки $\dim Y > \dim X/Z$, то існує такий $y \in Y\setminus\{0\}$, для якого $\tau y = 0$. Це в свою чергу означає, що $y \in Y \bigcap Z\setminus\{0\}$. $\square$

Доведення теореми 1. Очевидно, достатньо довести, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий елемент $x \in E$, що

$$|x| = \mathbf{1}_\Omega, \quad \int\limits_\Omega x\,d\mu = 0 \quad \text{та} \quad \|Tx\| < \varepsilon.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та розглянемо множину

$$K = \left\{x \in B_{L_\infty(\mu)} : \int_\Omega x\,d\lambda = 0, \|Tx\| \le \varepsilon\right\}.$$

Зазначимо, що K — непорожня опукла обмежена замкнена підмножина простору E. З означення простору Кете випливає, що множина K обмежена також в E_1, а за рахунок неперервності вкладення $E_1 \subseteq E$ отримуємо, що K замкнена в E_1. Отже, за теоремою Банаха-Алаоглу, множина K є опуклою слабко компактною підмножиною простору E_1. За теоремою Крейна-Мільмана, існує принаймні одна крайня точка $x_0 \in K$. Доведемо, що саме ця функція x_0 є такою, існування якої стверджується в теоремі. Для цього достатньо показати, що $|x_0(t)| = 1$ майже скрізь на Ω.

Припустимо, що це не так, тобто існує таке число $\delta > 0$ і така множина $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$, що $|x_0(t)| \le 1 - \delta$ для всіх $t \in A$. Нехай $Tx_0 = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma e_\gamma$, де $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — числова напрямленість, для якої $\lim\limits_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = 0$, а $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — стандартний базис у просторі $c_0(\Gamma)$ з біортогональними функціоналами $(e^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Виберемо скінченну підмножину $\Gamma_0 \subset \Gamma$, таку, що $|a_\gamma| < \varepsilon/2$ для кожного $\gamma \in \Gamma\setminus\Gamma_0$. За лемою 1.1, підпростір $T^{-1}([e_\gamma]_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma_0})$ має скінченну корозмірність у просторі E. Оскільки перетин двох підпросторів скінченної корозмірності є підпростором скінченної корозмірності, отримаємо, що підпростір

$$X = T^{-1}\Big([e_\gamma]_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma_0}\Big) \bigcap \left\{x \in E : \int_\Omega x\,d\mu = 0\right\}$$

має скінченну корозмірність у просторі E. З леми 2.1 випливає, що $L_\infty(A) \bigcap X \ne \{0\}$. Виберемо довільний елемент $x \in L_\infty(A) \bigcap X$, $x \ne 0$, для якого $\|x\|_\infty \le \delta$ та $\|Tx\| \le \varepsilon/2$. З того, що $x \in X$ та $x_0 \in K$ випливає, що $\int_\Omega (x_0 \pm x)\,d\lambda = 0$. Із припущення $|x_0(t)| < 1-\delta$ для всіх $t \in A$, $x \in L_\infty(A)$ та $\|x\|_\infty \le \delta$, випливає, що $(x_0 \pm x) \in B_{L_\infty(\mu)}$. Зауважимо, що якщо $\gamma \in \Gamma_0$, то

$$\big|e^*_\gamma(Tx_0 \pm x)\big| = |a_\gamma| \le \varepsilon,$$

а якщо $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, то

$$\left|e_\gamma^*(Tx_0 \pm x)\right| \le |a_\gamma| + |e_\gamma^*(Tx)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином, справджується нерівність $\|T(x_0 \pm x)\| \le \varepsilon$, а, отже, $(x_0 \pm x) \in K$. Це суперечить тому, що точка x_0 є крайньою для множини K. Отримана суперечність завершує доведення теореми. $\square$

Далі ми наведемо наслідок теореми 1 для класу нелокально опуклих просторів Кете. Кажуть, що F-простір Кете E на безатомному скінченному просторі з мірою (Ω, Σ, μ) *має властивість* (q), якщо

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \left\| \frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)} \right\| = 0.$$

Наприклад, класичні F-простори $L_p(\mu)$ при $0 < p < 1$ мають цю властивість (в цьому легко переконатися безпосередньо). Відомо, що якщо простір Кете E має властивість (q), то $E^* = \{0\}$ [9, p. 194], а також, що єдиний вузький оператор з E у довільний F-простір X — це 0 [7]. Таким чином, отримуємо наступний наслідок.

Наслідок. *Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною безатомною додатною мірою, E — дійсний F-простір Кете на (Ω, Σ, μ) з властивістю (q), для якого існує рефлексивний банахів простір Кете E_1 на (Ω, Σ, μ) з неперервним вкладенням $E_1 \subseteq E$, Γ - довільна множина. Тоді $\mathcal{L}(E, c_0(\Gamma)) = \{0\}$.*

Зазначимо, що наслідок 1 не цікавий саме для просторів $L_p(\mu)$ при $0 < p < 1$, оскільки, згідно з результатом Калтона [3], має місце сильніший результат: кожний ненульовий оператор з $L_p(\mu)$ при $0 < p < 1$ у довільний топологічний векторний простір є ізоморфним вкладенням при звуженні на деякий підпростір, ізоморфний ℓ_2.

Література

1. Bourgain J., Rosenthal H. P. *Applications of the theory of semi-embeddings to Banach space theory*, J. Funct. Anal., **52**, 2 (1983), 149–188.

2. Kadets V. M., Popov M. M. *On the Liapunov convexity theorem with applications to sign-embeddings*, Ukr. Math. J., **44**, 9 (1992), 1192–1200.

3. Kalton N. J. *Compact and strictly singular operators in Orlicz spaces*, Isr. J. Math., **26**, (1977), 126–136.

4. Krasikova I., Martín M., Merí J., Mykhaylyuk V., Popov M. *On order structure and operators in $L_\infty(\mu)$.*, Cent. Eur. J. Math., **7**, 4 (2009), 683–693.

5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. I, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977.

6. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. II, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1979.

7. Plichko A. M., Popov M. M. *Symmetric function spaces on atomless probability spaces*, Diss. Math. (Rozpr. mat.) (1990), 306 p. — P. 1–85.

8. Popov M. M. *Narrow operators (a survey)*, Function Spaces IX, Banach Center Publ. Inst. Math Polish Acad. Sci., Warszawa, **92**, (2011), 299–326.

9. Rolewicz S. Metric linear spaces, Warszawa, PWN, 1985.

[1] Запорізький національний університет,
Запоріжжя, Україна
e-mail: *yudp@mail.ru*

[2] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
e-mail: *misham.popov@gmail.com*

Надійшло 21.03.2012

Krasikova I.V., Popov M.M. *A note on operators from Köthe function spaces to* $c_0(\Gamma)$, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 67–71.

It is well known that every operator from $E = L_p$, $1 \le p < \infty$ to c_0 is narrow. We show that this result can be extended to a more general class of Köthe function spaces E.

Красикова И.В., Попов М.М. *Заметка об операторах из функциональных пространств Кёте в пространство* $c_0(\Gamma)$ // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 67–71.

Целью данной статьи является обобщение известного результата о том, что каждый оператор из пространства $E = L_p$ в c_0 при $1 \le p < \infty$ является узким, на случай более общего класса пространств Кёте.