Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

Н.В. Превисокова

Практикум для самостійної роботи студентів з навчальної дисципліни «Завадозахищені методи інфообміну»

Івано-Франківськ
2022

УДК 004.056.4, 519.725
П-58

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» як навчальний посібник для самостійної роботи студентів галузі “Інформаційні технології”, спеціальностей “Комп’ютерні науки” та “Інформаційні системи та технології” (протокол № 6 від 27 січня 2022.).

Рецензенти:

Ровінський В. А., кандидат технічних наук, доцент, ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»
Никифорчин О. Р, доктор фізико-математичних наук, професор, ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

П-58 Практикум для самостійної роботи студентів з навчальної дисципліни «Завадозахищені методи інфообміну» / Н.В. Превисокова. – Івано-Франківськ, 2022. – 56 с.

У навчальному посібнику – практикумі для самостійної роботи студентів систематизовані задачі із розв’язаннями та короткими теоретичними відомостями з теорії та методів завадозахищеного кодування. Задачі згруповані у теми, що відображають різні класи завадозахищених кодів та їх застосування в цифрових системах при реалізації інформаційного обміну. Розглядаються двійкові та недвійкові коди, методи кодування, декодування, виявлення та виправлення помилок у повідомленнях.

Для студентів різних форм навчання галузі “Інформаційні технології”, спеціальностей “Комп’ютерні науки” та “Інформаційні системи та технології” освітнього рівня магістр.

УДК 004.056.4, 519.725

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА

На самостійне вивчення виноситься частина навчального матеріалу з кожної дисципліни. Мета самостійної роботи: активізувати засвоєння знань, розвинути вміння студентів самостійно мислити та застосовувати теоретичні знання на практиці.

Самостійна робота студентів полягає у вивченні з допомогою навчальної та методичної літератури окремих питань тієї чи іншої теми, виконання з цих тем навчальних завдань. Самостійна робота студентів реалізується у формі обов'язкових аудиторних занять та індивідуальних консультацій, а також передбачає вивчення всієї теми або її окремих питань в результаті опрацювання рекомендованої літератури. Результатами самостійної роботи можуть бути конспект, реферат, ессе, повідомлення, доповідь, презентація, розв’язок практичної задачі, побудована модель, моделювання (або симуляція) пристрою в середовищі тощо, які оцінюються викладачем.

Самостійна робота включає наступні види робіт:

1) теоретичний, який передбачає самостійне опрацювання матеріалів лекцій, навчальної та методичної літератури, конспектування відповідного матеріалу тощо;

2) практичний, що передбачає виконання практичних завдань та індивідуальних завдань у лабораторних роботах;

3) науково-дослідний – виконання науково-дослідної роботи, підготовка та участь студентів у наукових семінарах, студентських конференціях, олімпіадах.

У даних методичних вказівках систематизовані задачі з розв’язками з різних тем дисципліни “Завадозахищені методи інфообміну”. До кожної теми наведено перелік питань, які вивчаються у даній темі, літературні джерела та методичні приклади розв’язування задач різних типів.

РОЗДІЛ 2. ЗМІСТ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА І МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЇЇ ВИКОНАННЯ

ТЕМА 1. ДВІЙКОВІ КОДИ, ЩО ВИЯВЛЯЮТЬ ПОМИЛКИ

Питання, які вивчаються в даній темі

1.1Код із перевіркою на парність.

1.2 Код з перевіркою на непарність

1.3 Код з прямим повторенням.

1.4 Коди з інверсним повторенням (інверсні коди, Бауера).

1.5 Кореляційний код.

1.6 Код Бергера

1.7 Код зі сталою вагою.

1.8 Код із кількістю одиниць у комбінації, кратною трьом.

Приклади розв’язування задач

Задача 1.1

Закодувати комбінацію 1110101 двійкового простого коду з кількістю інформаційних символів k = 7 двійковими кодами, що виявляють помилки: з перевіркою на парність і простим повторенням. Виявити однократну помилку, визначити та порівняти надмірності цих кодів.

Розв’язання. Код з перевіркою на парність містить лише один надлишковий символ. Вибирається надлишковий символ таким чином, щоб загальна кількість одиниць у кодовій комбінації була парною.

У коді з прямим повторенням додається до інформаційної кодової комбінації двійкового коду така ж сама комбінація (повторюється), збільшуючи загальну кількість двійкових символів вдвічі.

Оскільки кількість одиниць в комбінації 1110101 є непарною, то кодова комбінація коду з перевіркою на парність утворюється приєднанням ще одного символа 1 наступним чином, щоб загальна кількість одиниць стала парною: A_1 = 11101011, а коду з простим повторенням утворюється дублюванням інформаційних символів – A_2= 11101011110101.

Нехай у комбінації коду з перевіркою на парність виникла однократна помилка, вектор якої E_1 = 00000100. Тоді сума $A_1 \oplus E_1$ = 11101111.

У цьому випадку сума за модулем 2 елементів одержаної на приймальному боці кодової комбінації дорівнює 1, тобто непарна, що вказує на наявність у ній помилки. Надмірність коду R_1= 1 – 7 / 8 = 1 / 8=0,125.

Нехай в комбінації коду з простим повторенням вектор однократної помилки буде E_2 = 00000100000000. Тоді сума $A_2 \oplus E_2$ = 11101111110101. Порівнюючи першу і другу половини кодової комбінації і обчислюючи їх суму за модулем 2, отримаємо остачу, яка не буде дорівнювати нулю ($1110111 \oplus 1110101 = 0000010$), що вказує на наявність помилки у прийнятій кодовій комбінації. Надмірність даного коду R_2 =7/14=0,5. Таким чином $R_2 > R_1$.

Задача 1.2

Закодувати комбінацію 01000 двійкового простого коду з кількістю інформаційних символів k = 5 двійковими кодами, що виявляють помилки: з числом одиниць у комбінації, кратним трьом, та інверсним (Бауера). Виявити однократну помилку і порівняти надмірності цих кодів.

Розв'язання. Код із кількістю одиниць у комбінації, кратною трьом можна утворити або додаванням до кожної комбінації початкового коду $r = 2$ перевірних елементів, або зменшенням кількості дозволених комбінацій початкового коду з накладанням додаткової угоди: кількість одиниць у кожній комбінації має бути кратною трьом.

Коди з інверсним повторенням інформаційної двійкової кодової комбінації утворюються за таким правилом: якщо кількість одиниць в інформаційній комбінації парна, то до неї автоматично додається така сама комбінація (пряме повторення) і якщо кількість одиниць в інформаційній комбінації непарна, до неї додається інвертована інформаційна комбінація.

Кодова комбінація коду з числом одиниць, кратним трьом, буде мати вигляд: $A_1 = 0100011$, а інверсного коду – $A_2 = 0100010111$.

Нехай у комбінації коду з числом одиниць, кратним трьом, виникла однократна помилка, вектор якої $E_1 = 0000100$. Тоді сума $A_1 \oplus E_1 = 0100111$. У цьому разі вага одержаної кодової комбінації $w^* = 4$, тобто відрізняється від $w = 3$, що вказує на наявність у ній помилки. Надмірність коду $R_1 = 1 - 5/7 = 2/7$.

Нехай у комбінації інверсного коду виникла однократна помилка, вектор якої $E_2 = 0000100000$. Тоді сума $A_2 \oplus E_2 = 0100110111$. У декодері виконується перевірка кількості одиниць у першій половині кодової комбінації, яка дорівнює 2. Це означає, що друга половина комбінації повинна прийматися без інверсії. Порівнюючи першу і другу (неінвертовану) частини прийнятої кодової комбінації одержимо незбіг у чотирьох розрядах, що вказує на наявність у ній помилки. Надмірність коду $R_2 = 0{,}5$. Таким чином $R_2 > R_1$.

Задача 1.3

Закодувати комбінацію 010101 двійкового простого коду з кількістю інформаційних символів $k = 6$ двійковими кодами, що виявляють помилки: з перевіркою на непарність і кореляційним. Виявити однократну помилку та порівняти надмірності цих кодів.

Розв'язання. У коді з перевіркою на непарність кожна кодова комбінація має непарне число одиниць, тобто додатковий перевірочний елемент формують виходячи з числа одиниць у первинній кодовій комбінації: при парному числі одиниць перевірочний елемент дорівнює одиниці, при непарному – нулю.

У кореляційному коді до кожного інформаційного символу додається по одному контрольному "0" чи "1" і значення якого утворюється за правилом:

інформаційний нуль перетворюється в 01, інформаційна одиниця перетворюється в 10.

Кодова комбінація коду з перевіркою на непарність буде мати вигляд: A_1 = 0101010, а кореляційного – A_2 = 011001100110.

Нехай у комбінації коду з перевіркою на непарність виникла однократна помилка, вектор якої E_1 = 0000100. Тоді сума $A_1 \oplus E_1$ = 0101110. У декодері перевіряється за модулем 2 сума елементів одержаної кодової комбінації. У цьому разі вона буде дорівнювати 0, тобто парна, що вказує на наявність в комбінації помилки. Надмірність коду $R_1 = 1 - 6 / 7 = 1 / 7$.

Нехай у комбінації кореляційного коду виникла однократна помилка, вектор якої E_2 = 000010000000. Тоді сума $A_2 \oplus E_2$ = 011011100110. Як відомо, декодування кодової комбінації у декодері ведуть тактами по два елементи у кожному такті. При цьому два елементи одного такту не повинні мати однакове значення, тобто не повинно бути сполучень 00 та 11. У даному разі у третьому такті (парі елементів) буде отримано сполучення 11, що вказує на наявність помилки у прийнятій комбінації. Надмірність коду R_2 = 0,5. Таким чином $R_2 > R_1$.

Задача 1.4

Закодувати комбінацію 1001111 двійкового простого коду з кількістю інформаційних елементів $k = 7$ двійковими кодами, що виявляють помилки: інверсним (Бауера) та Бергера. Виявити однократну помилку і порівняти надмірності цих кодів.

Розв'язання. Коди з інверсним повторенням інформаційної двійкової кодової комбінації утворюються за таким правилом: якщо кількість одиниць в інформаційній комбінації парна, то до неї автоматично додається така сама комбінація (пряме повторення) і якщо кількість одиниць в інформаційній комбінації непарна, до неї додається інвертована інформаційна комбінація.

У коді Бергера перевірочні елементи, які дописуються у кінці первинної кодової комбінації, – це інвертований запис двійкового числа, яким записується сума одиниць у кодовій комбінації k – елементного первинного коду, що кодується кодом Бергера. При цьому число r перевірочних елементів визначається як найменше ціле, для якого виконуються умови $r \geq log\,2\,(\,k + 1\,).$

Кодова комбінація інверсного коду, з огляду на непарну кількість одиниць у первинній комбінації, буде мати вигляд: $A_1 = 10011110110000$, а коду Бергера – $A_2 = 1001111010$ (тому що, $r = log_2(\,7 + 1\,) = log_2 8 = 3$, $5_{10} = 101_2$, інверсія $101 \rightarrow 010$).

Нехай у комбінації інверсного коду виникла однократна помилка, вектор якої $E_1 = 00000100000000$.Тоді сума $A_1 \oplus E_1 = 10011010110000$. У декодері підраховується кількість одиниць у першій половині кодової комбінації, яка у даному разі дорівнює 4. Це означає, що друга половина комбінації повинна прийматися у позитиві. Порівнюючи першу та другу (неінвертовану) частини прийнятої кодової комбінації, одержимо незбіг у шести розрядах, що вказує на наявність у ній помилки. Надмірність коду $R_1 = 0{,}5$.

Нехай у комбінації коду Бергера виникла однократна помилка, вектор якої $E_2 = 0010000000$. Тоді сума $A_2 \oplus E_2 = 1011111010$.

При прийманні у декодері підраховується кількість одиниць в інформаційній частині кодової комбінації, яка дорівнює шести. У двійковій формі запису це буде 110, інвертуючи яку одержуємо – 001. Порівнюємо перевірочні елементи прийнятої кодової комбінації та одержані у декодері шляхом обчислення кількості одиниць в інформаційній частині прийнятої комбінації. Їх неспівпадання (010 – 001) вказує на наявність помилки у прийнятій кодовій комбінації. Надмірність коду $R_2 = 0{,}3$ і $R_1 > R_2$.

Література до виконання самостійної роботи

1. Бондаренко І.М., Глушко А.П., Меньков О.М. Коди та кодування. Навч. посібник. – Харків. ХІ ВПС, 2003. – 116с.

2. Банкет В. Л. Помехоустойчивое кодирование в телекоммуникационных системах: учеб. пособ. по изучению модуля 4 дисциплины ТЭС / В.Л. Банкет, П.В. Иващенко, Н.А. Ищенко. – Одесса: ОНАС им. А. С. Попова, 2011. – 104 с.
3. Кодування сигналів в електронних системах. Частина 3. Способи кодування сигналів: Том 1. Натуральні, ефективні та лінійні коди [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні прилади та пристрої» / С.В. Денбновецький, І.В. Мельник, Л.Д. Писаренко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 6,32 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021.
4. Жураковський Ю. П., Гніліцький В. В. Теорія інформації та кодування в задачах: Навчальний посібник. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 230 с.
5. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки/У. Питерсон; пер. с англ. – М.:Мир, 1964. – 338 с.
6. Кларк Дж., мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1987. — 392 с.

ТЕМА 2. ДВІЙКОВІ КОДИ, ЩО ВИПРАВЛЯЮТЬ ОДНОКРАТНІ ПОМИЛКИ

Питання, які вивчаються в даній темі

2.1 Двійкові систематичні групові коди.

2.2 Коди Хеммінга.

2.3 Двійковий код з багатократним повторенням.

2.4 Ітеративний код.

Приклади розв'язування задач

Задача 2.1

Побудувати твірну матрицю і визначити всі комбінації двійкового систематичного (групового) коду, здатного виправляти поодинокі помилки для $N_0 = 8$ повідомлень.

Розв'язання. Кількість інформаційних розрядів коду $k = log_2 8 = 3$. Кількість перевірочних розрядів визначається як найменше ціле r, яке задовольняє нерівності

$2^r \geq = k + r + 1$; таким значенням буде $r = 3$. Довжина коду $n = k + r = 6$. Таким чином, твірна матриця $G_{n,k}$ має 6 стовпців та 3 рядка, а перевірочна підматриця $C_{r,k}$ має 3 стовпця та 3 рядка.

Згідно з правилом побудови підматриці $C_{r,k}$ кількість одиниць у кожному рядку цієї підматриці повинно бути не менша за $d_{min} - 1 = = 3 - 1 = 2$, а кодова відстань між окремими рядками цієї підматриці – не менша за $d_{min} - 2 = 3 - 2 = 1$. Тому, з триелементних комбінацій для підматриці $C_{3,3}$ вибираємо тільки ті, які задовольняють цим умовам, тобто 110, 101, 011.

За інформаційну підматрицю E_k твірної матриці обирають одиничну підматрицю. Дописавши до неї перевірочну підматрицю, одержимо твірну матрицю систематичного коду, здатного виправляти однократні помилки,

$$G_{6,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

За допомогою одержаної твірної матриці $G_{6,3}$ визначимо всі 8 кодових комбінацій, які належать до цього систематичного коду: $1 - 000000$; $2 - 100110$; $3 - 010101$; $4 - 001011$; $5 - 110011\ (2 \oplus 3)$; $6 - 101101\ \ (2 \oplus 4)$; $7 - 011110\ (3 \oplus 4)$; $8 - 111000\ (2 \oplus 3 \oplus 4)$.

Задача 2.2

Побудувати перевірочну матрицю двійкового систематичного коду, здатного виправляти однократні помилки з $d_{min} = 3$. Закодувати за допомогою одержаної перевірочної матриці комбінації первинного двійкового коду 111 та 011.

Розв'язання. Для побудови перевірочної матриці систематичного коду, здатного виправляти однократні помилки, скористаємось твірною матрицею, побудованою для одержання 8 комбінацій систематичного коду в задачі 2.1.

Перевірочна матриця $H_{n,r}$ повинна мати $r = 3$ рядки та $n = 6$ стовпців. Вона утворюється з двох підматриць: $D_{3,3}$, яка містить три стовпці і три рядки, кожний рядок якої відповідає стовпцю перевірочної підматриці $C_{3,3}$ твірної матриці $G_{6,3}$, та одиничної підматриці E_3. Інакше $C_{3,3}$ – це транспонована матриця до матриці $D_{3,3.}$ Таким чином,

$$H_{6,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перевірочні елементи, згідно матриці $H_{6,3}$, можна визначити так: $b_1 = a_1 \oplus a_2$; $b_2 = a_1 \oplus a_3$; $b_3 = a_2 \oplus a_3$.

За допомогою одержаної перевірочної матриці $H_{6,3}$ виконуємо кодування систематичним (груповим) кодом комбінацій первинного коду 111 та 011, для чого визначаємо перевірочні елементи для заданих комбінацій. Для комбінації 111:

$b_1 = 1 \oplus 1 = 0$; $b_2 = 1 \oplus 1 = 0$; $b_3 = 1 \oplus 1 = 0$,

а для комбінації 011:

$b_1 = 0 \oplus 1 = 1$; $b_2 = 0 \oplus 1 = 1$; $b_3 = 1 \oplus 1 = 0$.

Таким чином, кодові комбінації систематичного (групового) коду будуть мати вигляд: 111000 та 011110.

Задача 2.3

Для групового $(7, 4)$ - коду, що виправляє однократні помилки, закодувати комбінацію двійкового простого коду 1101, якщо твірна матриця систематичного коду в стандартній формі запису

$$G_{7,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Якщо $a = |a_0, a_1, ..., a_k|$ – матриця-рядок первинного коду, то правило кодування блокового коду визначається добутком:

$$b = a \cdot G,$$

де: $a = |a_0, a_1, ..., a_k|$ – матриця-рядок первинного коду на вході кодера;

$b = |b_0, b_1, ..., b_n|$ – матриця-рядок кодового слова на виході кодера;

G – матриця, що породжує лінійний (n, k) код.

Елементи кодового слова $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$ визначаються наступними рівностями:

$b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $b_3 = a_3$, $b_4 = a_4$, $b_5 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4$, $b_6 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4$, $b_7 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$.

Користуючись ними, закодуємо комбінацію $[a_1 a_2 a_3 a_4] = 1101$, тобто визначимо перевірочні елементи: $b_5 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$; $b_6 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$; $b_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$; таким чином, комбінація групового коду буде мати вигляд 1101100 .

Задача 2.4

Для групового $(7, 4)$ - коду, що виправляє однократні помилки, побудувати перевірочну матрицю $H_{7,3}$, якщо твірна матриця має вигляд

$$G_{7,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Визначити синдром для виправлення однократних помилок в комбінації двійкового коду 1101100. Визначити чи містить дана комбінація помилки. Показати на прикладі виправлення однократної помилки.

Розв'язання. Перевірочна матриця $H_{7,3}$ для $(7,4)$ - коду буде складатись з двох підматриць: $D_{4,3}$, кожний рядок якої відповідає транспонованому стовпцю перевірочної підматриці $C_{3,4}$ твірної матриці $G_{7,4}$, та одиничної підматриці E_3. Отже, перевірочна матриця $H_{7,3}$ буде мати вигляд:

$$H_{7,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для виявлення і виправлення однократної помилки у прийнятій кодовій комбінації систематичного групового коду виконують перевірку – визначають синдром помилки. Вектор синдрому обчислюється $S = b \cdot H^T$

Елементи синдрому, згідно матриці $H_{7,3}$, будуть визначатись за такими виразами:

$s_1 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_3^* \oplus b_1^*$; $s_2 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_4^* \oplus b_2^*$; $s_3 = a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus b_3^*$.

Визначимо кодовий синдром помилки: $s_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$; $s_2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$; $s_3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$, тобто синдром має вигляд 110, що відповідає другому стовпцю перевірочної матриці $H_{7,3}$. Синдром показує, що помилка знаходиться у другому розряді прийнятої кодової комбінації. Для виправлення помилки інвертуємо значення даного розряду, тобто замість "0" записуємо "1". Виправлена кодова комбінація групового коду буде мати вигляд 1001100 , інформаційні елементи повідомлення 1001.

Задача 2.5

Для групового $(7,4)$ - коду, що виправляє однократні помилки, побудувати перевірочну матрицю $H_{7,3}$ і закодувати за її допомогою комбінацію двійкового простого коду 1101, якщо твірна матриця має вигляд

$$G_{7,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Визначити синдром для виправлення однократних помилок в комбінаціях цього коду. Показати на прикладі виправлення однократної помилки.

Розв'язання. Перевірочна матриця $H_{7,3}$ для $(7, 4)$ - коду буде складатись з двох підматриць: $D_{4,3}$, кожний рядок якої відповідає транспонованому стовпцю перевірочної підматриці $C_{3,4}$ твірної матриці $G_{7,4}$, та одиничної підматриці E_3. Отже, перевірочна матриця $H_{7,3}$ буде мати вигляд:

$$H_{7,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перевірочні елементи, згідно матриці $H_{7,3}$, будуть визначатись за такими виразами:

$b_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$; $b_2 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4$; $b_3 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4$.

Користуючись ними, закодуємо комбінацію $[a_1 a_2 a_3 a_4] = 1101$, тобто визначимо перевірочні елементи:

$b_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$; $b_2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$; $b_3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$; таким чином, комбінація групового коду буде мати вигляд 1101010 .

У декодері для виявлення і виправлення однократної помилки у прийнятій кодовій комбінації систематичного групового коду виконують перевірку – визначають синдром помилки. Для одержаної перевірочної матриці елементи синдрому помилки визначаються таким чином: $s_1 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_3^* \oplus b_1^*$; $s_2 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_4^* \oplus b_2^*$; $s_3 = a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus b_3^*$.

Знайдемо і виправимо однократну помилку, наприклад, у комбінації $[a_1^* a_2^* a_3^* a_4^* b_1^* b_2^* b_3^*] = 1001010$. Для цього визначимо кодовий синдром помилки: $s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$; $s_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$; $s_3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$, тобто синдром має вигляд 110, що відповідає другому стовпцю перевірочної матриці $H_{7,3}$. Синдром показує, що помилка знаходиться у другому розряді прийнятої кодової комбінації. Для виправлення помилки інвертуємо значення даного розряду, тобто замість “0” записуємо “1”. Виправлена кодова комбінація групового коду буде мати вигляд 1101010.

Задача 2.6

Закодувати традиційним двійковим кодом Хеммінга комбінацію двійкового простого коду 10110 і показати на прикладі процес виправлення будь-якої однократної помилки. Визначити надмірність коду.

Розв’язання. Згідно умови, що для систематичного (n,k) - коду з $d_{min} = 3$ кількість перевірочних символів вибирають як найменше ціле r, що відповідає умовам $2^r \geq n + 1 = k + r + 1$, при $k = 5$ кількість перевірочних елементів $r = 4$; довжина коду $n=k + r = 5 + 4 = 9$. Відповідно до правила побудови перевірочної матриці коду Хеммінга перевірочні елементи b_j будуть розташовані на позиціях 1, 2, 4, і 8. Побудуємо перевірочну матрицю коду Хеммінга розмірами $r = 4$ рядків та $n = 9$ стовпців:

$$H_{9,4} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 & a_1 & b_3 & a_2 & a_3 & a_4 & b_4 & a_5 \end{matrix} \end{array}.$$

Під матрицею для полегшення процесу кодування записана у загальному вигляді кодова комбінація, де через a_i та b_j позначені інформаційні та перевірочні елементи відповідно. Користуючись побудованою перевірочною матрицею $H_{9,4}$, визначимо значення перевірочних елементів для $[a_1 a_2 a_3 a_4 a_5] = 10110$:

$b_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$;

$b_2 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$;

$b_3 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$;

$b_4 = a_5 = 0$.

Кодова комбінація традиційного коду Хеммінга буде мати вигляд: 011001100.

Виконаємо декодування одержаної кодової комбінації з виправленням однократної помилки. Припустимо, що при передачі сталося спотворення і замість 011001100 була прийнята кодова комбінація 011001000.

Для виявлення і виправлення помилки у декодері виконують перевірки на парність з урахуванням перевірочних елементів, тобто знаходять синдром помилки згідно перевірочній матриці $H_{9,4}$:

$s_1 = b_1 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$

$s_2 = b_2 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1;$

$s_3 = b_3 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1;$

$s_4 = b_4 \oplus a_5 = 0 \oplus 0 = 0.$

Маємо синдром 0111. Таким чином , визначаємо, що спотворено елемент із порядковим номером $0111_2 = 7_{10}$, тобто елемент a_4. Виправляємо його за допомогою інверсії та одержуємо правильну кодову комбінацію – 011001100.

Надмірність коду $R = 1 - k / n = 1 - k / (k + r) = r / n = 4 / 9$.

Задача 2.7

Закодувати кодову комбінацію 01101 двійкового простого коду двійковим кодом з багатократним повторенням, здатним виправляти однократні помилки. Виправити будь-яку однократну помилку та визначити надмірність коду.

Розв'язання. Число m повторень при виправленні однієї помилки визначається з виразу $d_{min} = m + 1$. Кодова відстань при виправленні однократної помилки повинна бути не менша за $d_{min} = 3$, тому $m = d_{min} - 1 = 3 - 1 = 2$. Кодова комбінація коду з багатократним повторенням буде мати вигляд: 011010110101101.

Покажемо процес виправлення однократної помилки. Для цього припустимо, що при передачі комбінації коду з багатократним повторенням виникла однократна помилка, вектор якої 000010000000000. Тоді прийнята кодова комбінація буде мати вигляд: 011000110101101.

У декодері прийнята кодова комбінація розбивається на три частини по 5 елементів у кожній і виконується порозрядне їх порівняння:

01100

01101

01101,

у результаті якого виявляється помилка у п’ятому розряді. Застосувавши “голосування за більшістю”, можна виправити цю помилку. Виправлена комбінація двійкового первинного коду буде мати вигляд 01101.

Надмірність коду $R = m / (m + 1) = r / n = 2 / 3$.

Задача 2.8

Закодувати ітеративним кодом (Елайеса), що виправляє однократні помилки, комбінацію 011010110101 двійкового первинного коду з $k = 12$ інформаційними елементами. Виправити будь-яку однократну помилку та визначити надмірність коду.

Розв’язання. Розбиваємо комбінацію первинного коду на три частини, записуємо у вигляді матриці з трьома рядками та робимо перевірку на парність елементів кожного рядка і кожного стовпця, дописуючи перевірочні елементи:

$$
\begin{array}{c|c}
0\ 1\ 1\ 0 & 0 \\
1\ 0\ 1\ 1 & 1 \\
0\ 1\ 0\ 1 & 0 \\
\hline
1\ 0\ 0\ 0 & 1
\end{array}
$$

Таким чином отримали кодовий двовимірний масив (комбіна-цію) ітеративного коду з перевірками на парність, який має мінімальну кодову відстань $d_{min} = 2 \times 2 = 4$ (добуток мінімальних кодових відстаней кодів, якими захищаються рядки та стовпці). У лінію (канал) зв’язку передаються послідовно рядок за рядком двійкові елементи отриманого масиву: 01100101110101010001. Довжина цієї комбінації $n = 20$, вона містить $k = 12$ інформаційних та $r = 8$ перевірочних елементів.

Припустімо, що при передачі у результаті спотворень виникла помилка і на приймач прийшла комбінація 01100101010101010001. При декодуванні у декодері прийняту двійкову послідовність знову записують у вигляді матриці, структура якої співпадає зі структурою масиву після кодування, і виконують перевірку на парність кожного рядка і кожного стовпця цієї матриці :

$$\begin{array}{c|c}
0\;1\;1\;0\;0 & 0 \\
1\;0\;1\;0\;1 & 1 \\
0\;1\;0\;1\;0 & 0 \\
1\;0\;0\;0\;1 & 0 \\
\hline
0\;0\;0\;1\;0 &
\end{array}$$

Помилка знаходиться на перетині рядка та стовпця, які мають непарну кількість одиниць. В даному випадку це другий рядок та четвертий стовпець. Для виправлення помилки цей елемент інвертуємо, тобто замість прийнятого “0” записуємо “1”. Тоді виправлена інформаційна частина комбінації буде мати вигляд 011010110101, що збігається із комбінацією первинного коду, яка підлягала кодуванню.

Надмірність коду $R = r / n = 8 / 20 = 2 / 5$.

Задача 2.9

Закодувати несистематичним кодом Бергера, що виправляє однократні помилки, комбінацію двійкового первинного коду 10111 з $k = 5$. Виправити будь-яку однократну помилку та визначити надмірність коду.

Розв’язання. Для побудови коду Бергера визначимо кількість перевірочних елементів з виразу

$$r \geq log_2 \sum_{i=1}^{5} w_i = log_2 (3 + 5 + 6 + 7 + 9) = log_2 30 = 4{,}907, \text{ тобто } r = 5.$$

Визначимо сумарну вагу комбінації первинного коду, для чого треба додати послідовно вагу першого, третього, четвертого і п’ятого розрядів, одержане десяткове число записати у двійковій формі п’ятьма двійковими розрядами, інвертувати його і дописати до комбінації первинного коду:

$3 + 6 + 7 + 9 = 25$, $25_{10} = 11001_2 \rightarrow 00110$; тоді комбінація коду Бергера буде мати вигляд 1011100110. Таким чином комбінація складається з двох частин: інформаційної (перші 5 елементів) і перевірочної (6...10 елементи).

Припустимо, що при передачі по лінії зв'язку в результаті дії завад у кодовій комбінації виникає помилка і на приймач надходить комбінація 1001100110. Для виявлення помилки у декодері спочатку виконуються такі ж операції, що і у кодері, тобто визначається сума вагів тих інформаційних елементів, на місцях яких розташовані "1": $S^* = 3 + 7 + 9 = 19$; це число записується у двійковій формі п'ятьма розрядами $\rightarrow 10011$ та інвертується $\rightarrow$ 01100. Перевірочна частина прийнятої комбінації і обчислена у декодері не збігаються, що вказує на наявність помилки у прийнятій кодовій комбінації. Далі для виправлення помилки інвертується двійковий запис перевірочної частини прийнятої кодової комбінації, одержане двійкове число переводиться у десяткову форму (воно дорівнює 25) і від нього віднімається обчислене число S^*. Маємо $25 - 19 = 6$; це свідчить про те, що у прийнятій кодовій комбінації був спотворений третій елемент, оскільки саме йому відповідає вага 6. Виправлення виконується інвертуванням спотвореного елемента у прийнятій комбінації. Таким чином, правильний запис первинної комбінації має вигляд: 10111.

Надмірність коду $R = r / n = 5 / 10 = 1 / 2$.

Література до виконання самостійної роботи

1. Банкет В. Л. Помехоустойчивое кодирование в телекоммуникационных системах: учеб. пособ. по изучению модуля 4 дисциплины ТЭС / В.Л. Банкет, П.В. Иващенко, Н.А. Ищенко. – Одесса: ОНАС им. А. С. Попова, 2011. – 104 с.
2. Жураковський Ю. П., Гніліцький В. В. Теорія інформації та кодування в задачах: Навчальний посібник. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 230 с.

3. Муттер В.М. Основы помехоустойчивой телепередачи информации. Л.: Энергоатомиздат, 1990, 288 с.
4. Кодування сигналів в електронних системах. Частина 3. Способи кодування сигналів: Том 1. Натуральні, ефективні та лінійні коди [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні прилади та пристрої» / С.В. Денбновецький, І.В. Мельник, Л.Д. Писаренко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 6,32 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021.
5. Бондаренко І.М., Глушко А.П., Меньков О.М. Коди та кодування. Навч. посібник. – Харків. ХІ ВПС, 2003. – 116с.
6. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки/У. Питерсон; пер. с англ. – М.:Мир, 1964. – 338 с.
7. Кларк Дж., Мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1987. — 392 с.

ТЕМА 3. ЦИКЛІЧНІ КОДИ

Питання, які вивчаються в даній темі

1. Алгебраїчні основи теорії циклічних кодів.
2. Основні дії над многочленами у полі двійкових чисел та їх реалізація.
3. Циклічні коди.
4. Згорткові коди.

Приклади розв'язування задач

Задача 3.1

Закодувати двійковим циклічним кодом, що виправляє однократні помилки, кодову комбінацію двійкового простого коду 1110 та показати процес виправлення будь-якої однократної помилки в одержаній комбінації циклічного коду. Визначити надмірність коду.

Розв'язання. Для того, щоб закодувати комбінацію простого коду циклічним кодом, необхідно вибрати твірний поліном. Степінь твірного поліному $P(x)$ визначається кількістю перевірочних елементів r у комбінації циклічного коду, а величина r при $d_{min}=3$ визначається з виразу $2^r-1\geq n$. Тобто, при k = 4 маємо r = 3. Таким чином з табл. вибираємо поліном степені 3: $P(x)=x^3\oplus x\oplus 1$.

Таблиця 1 Твірні поліноми

Кількість перевірочних елементів r	Твірний поліном $P(x)$	Двійковий запис полінома
3	$x^3\oplus x\oplus 1$	1011
3	$x^3\oplus x^2\oplus 1$	1101
4	$x^4\oplus x\oplus 1$	10011
4	$x^4\oplus x^3\oplus 1$	11001
5	$x^5\oplus x^2\oplus 1$	100101
5	$x^5\oplus x^3\oplus 1$	101001
5	$x^5\oplus x^3\oplus x^2\oplus x\oplus 1$	101111
5	$x^5\oplus x^4\oplus x^2\oplus x\oplus 1$	110111
6	$x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus 1$	1110001
8	$x^8\oplus x^7\oplus x^6\oplus x^5\oplus x^2\oplus x\oplus 1$	111100111
9	$x^9\oplus x^5\oplus x^3\oplus 1$	1000101001

Виконуємо кодування комбінації двійкового простого коду 1110. Для цього

– записуємо її у вигляді полінома: $Q(x)=x^3 \oplus x^2 \oplus x$;

– помножимо $Q(x)$ на x^r; оскільки $r = 3$, то

$Q(x)x^3 = (x^3 \oplus x^2 \oplus x)x^3 = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4$;

– поділимо $Q(x)x^3$ на $P(x)$ з метою визначення остачі $R(x)$, коефіцієнти при степенях x якого є перевірочними елементами комбінації циклічного коду:

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\
\oplus \quad x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & x^3 \oplus x^2 \\
\hline
x^5 \oplus x^3 & \\
\oplus \quad x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\
\hline
x^2 &
\end{array}
.
$$

Одержуємо остачу $R(x) = x^2$, якій відповідає трирозрядний вектор ($r = 3$) – 100 ; додаємо остачу $R(x)$ до $Q(x)x^3$ і отримуємо кодову комбінацію двійкового циклічного коду $F(x) = = Q(x)x^3 \oplus R(x) = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 \rightarrow F =$ 1110100.

Покажемо процес виправлення однократної помилки. Для цього припустимо, що при передачі виникла однократна помилка, поліном та вектор якої відповідно $E(x) = x^3$ та 0001000. Тоді поліном $F^*(x)$ прийнятої комбінації $F^*(x) = F(x) \oplus E(x) = x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \rightarrow$ 1111100.

Декодер виконує перевірочне ділення $F^*(x)$ на той же твірний поліном $P(x)$, який був використаний при кодуванні:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2 & x^3\oplus x\oplus 1 \\ \cline{3-3}
\oplus & x^6\oplus x^4\oplus x^3 & x^3\oplus x^2\oplus 1 \\ \cline{2-2}
 & x^5\oplus x^2 & \\
\oplus & x^5\oplus x^3\oplus x^2 & \\ \cline{2-2}
 & x^3 & \\
\oplus & x^3\oplus x\oplus 1 & \\ \cline{2-2}
 & x\oplus 1 &
\end{array}
.
$$

Отже, остача $R(x) = x\oplus 1$ або $R = 011$.

Оскільки остача від ділення не дорівнює нулю, робимо висновок про наявність помилки у прийнятій комбінації $F^*(x)$.

Для визначення місця помилки скористуємося методом гіпотез.

Крок 1. Висуваємо гіпотезу про помилку у молодшому розряді комбінації циклічного коду $F^*(x)$, тобто вважаємо, що поліном та вектор помилки відповідно $E_1(x) = 1$ та $E_1 = 0000001$. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x)\oplus E_1(x)$:

$F^*(x)\oplus E_1(x) = (x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2)\oplus 1 = x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2\oplus 1$;

ділимо отриману суму на $P(x)$ з метою підтвердження (у разі нульової остачі) або спростування (у разі ненульової остачі) висунутої гіпотези:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2\oplus 1 & x^3\oplus x\oplus 1 \\ \cline{3-3}
\oplus & x^6\oplus x^4\oplus x^3 & x^3\oplus x^2\oplus 1 \\ \cline{2-2}
 & x^5\oplus x^2\oplus 1 & \\
\oplus & x^5\oplus x^3\oplus x^2 & \\ \cline{2-2}
 & x^3\oplus 1 & \\
\oplus & x^3\oplus x\oplus 1 & \\ \cline{2-2}
 & x &
\end{array}
.
$$

Остача $R(x) = x$, тобто $R(x) \neq 0$, і гіпотеза відхиляється.

Крок 2 . Висуваємо гіпотезу про помилку у другому розряді $F^*(x)$, тобто вважаємо, що $E_2(x) = x \rightarrow E_2 = 0000010$. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x)\oplus E_2(x)$:

$F^*(x)E_2(x) = (x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2)\oplus x = x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2\oplus x$;

ділимо цю суму на $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$\begin{array}{rl|l} & x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2\oplus x & x^3\oplus x\oplus 1 \\ \oplus & x^6\oplus x^4\oplus x^3 & x^3\oplus x^2\oplus 1 \\ \hline & x^5\oplus x^2\oplus x & \\ \oplus & x^5\oplus x^3\oplus x^2 & \\ \hline & x^3\oplus x & \\ \oplus & x^3\oplus x\oplus 1 & \\ \hline & 1 & \end{array}.$$

Остача $R(x) = 1$, тобто $R(x) \neq 0$, і гіпотеза відхиляється.

Крок 3. Висуваємо гіпотезу про помилку у третьому розряді $F^*(x)$, тобто вважаємо, що $E_3(x) = x^2 \rightarrow E_3 = 0000100$. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x)\oplus E_3(x)$:

$$F^*(x)\oplus E_3(x) = (x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2)\oplus x^2 = x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3;$$

ділимо цю сумму на $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$\begin{array}{rl|l} & x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3 & x^3\oplus x\oplus 1 \\ \oplus & x^6\oplus x^4\oplus x^3 & x^3\oplus x^2\oplus 1 \\ \hline & x^5 & \\ \oplus & x^5\oplus x^3\oplus x^2 & \\ \hline & x^3\oplus x^2 & \\ \oplus & x^3\oplus x\oplus 1 & \\ \hline & x^2\oplus x\oplus 1 & \end{array}.$$

Остача $R(x) = x^2\oplus x\oplus 1$, тобто $R(x) \neq 0$, і гіпотеза відхиляється.

Крок 4. Висуваємо гіпотезу про помилку у четвертому розряді $F^*(x)$, тобто вважаємо, що $E_4(x) = x^3 \rightarrow E_4 = 0001000$. Беремо суму за модулем 2 $F^*(x)\oplus E_4(x)$:

$$F^*(x)\oplus E_4(x) = (x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^3\oplus x^2)x^3 = x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^2;$$

ділимо отриману суму на $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^2 & x^3 \oplus x \oplus 1 \\ \cline{3-3}
\oplus & x^6 \oplus x^4 \oplus x^3 & x^3 \oplus x^2 \\ \cline{2-2}
 & x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\
\oplus & x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 & \\ \cline{2-2}
 & 0 & .
\end{array}
$$

Остача $R(x) = 0$, тобто помилка дійсно була у четвертому розряді, а вихідна комбінація циклічного коду має вигляд:

$F(x)=F^*(x)\oplus E_4(x)= x^6\oplus x^5\oplus x^4\oplus x^2 \rightarrow F = 1110100$.

Надмірність коду $R = r / n = 3 / 7$.

Задача 3.2

Закодувати двійковим циклічним кодом, що виправляє однократні помилки, кодову комбінацію двійкового простого коду $Q(x) = x^5 \oplus x^2$ і виправити будь-яку однократну помилку в одержаній комбінації циклічного коду. Визначити надмірність коду.

Розв'язання. Щоб закодувати задану кодову комбінацію $Q(x) = x^5\oplus x^2$ ($Q = 100100$) циклічним кодом, що виправляє однократні помилки ($d_{min} = 3$) необхідно вибрати твірний поліном. Степінь твірного поліному $P(x)$ визначається кількістю перевірочних елементів r, яку визначаємо з виразу $2^r-1 \geq n$ (для $d_{min} = 3$). При $k = 6$ одержуємо $r = 4$ та вибираємо з таблиці 9.1 поліном четвертого степеня: $P(x) = x^4\oplus x\oplus 1$.

Виконаємо кодування первинної кодової комбінації $Q(x) = = x^5\oplus x^2$, для чого знайдемо остачу $C(x)$ від ділення $Q(x)x^4$ на $P(x)$, а потім помножимо її на $P(x)$. Маємо

$$Q(x)x^4 = (x^5\oplus x^2)x^4 = x^9\oplus x^6.$$

Поділимо отриманий добуток на $P(x)$ з метою визначення частки $C(x)$ від ділення:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^9 \oplus x^6 & x^4 \oplus x \oplus 1 \\
\oplus & x^9 \oplus x^6 \oplus x^5 & x^5 \oplus x \\
\hline
 & x^5 & \\
\oplus & x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\
\hline
 & x^2 \oplus x & .
\end{array}
$$

Тобто $C(x) = x^5 \oplus x$. Помножимо $C(x)$ на $P(x)$ і одержимо кодову комбінацію циклічного коду:

$$F(x) = C(x)P(x) = (x^5 \oplus x)(x^4 \oplus x \oplus 1) = x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x,$$

або у двійковому вигляді F = 1001000110.

Виправляємо однократну помилку.

Припустимо, що при передачі по каналу зв'язку виникла однократна помилка, поліном якої $E(x) = 1$. Тоді поліном прийнятої кодової комбінації циклічного коду $F^*(x) = x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$.

Декодер виконує перевірочне ділення $F^*(x)$ на твірний поліном $P(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1 & x^4 \oplus x \oplus 1 \\
\oplus & x^9 \oplus x^6 \oplus x^5 & x^5 \oplus x \\
\hline
 & x^5 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1 & \\
\oplus & x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\
\hline
 & 1 & .
\end{array}
$$

Тобто $R(x) = 1 \neq 0$. Це вказує на наявність помилки у прийнятій кодовій комбінації.

Для визначення місця помилки скористуємося методом гіпотез, першим кроком якої є гіпотеза про наявність помилки у молодшому розряді прийнятої кодової комбінації $F^*(x)$, тобто вважаємо, що поліном та вектор помилки відповідно $E_1(x) = 1$ та E_1= 0000000001. Визначаємо суму за модулем 2 $F^*(x)E_1(x)$ та ділимо цю суму на $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези:

$F^*(x)E_1(x) = (x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1) \oplus 1 = x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x$;

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x & x^4 \oplus x \oplus 1 \\
\oplus & x^9 \oplus x^6 \oplus x^5 & \overline{x^5 \oplus x} \\
\hline
 & x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\
\oplus & x^5 \oplus x^2 \oplus x & \\
\hline
 & 0 & .
\end{array}
$$

Тобто $R(x) = 0$, що вказує на те, що помилка дійсно була у першому розряді.

Таким чином, вихідна комбінація циклічного коду $F(x) = x^9 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus x$ $\rightarrow$ $F = 1001000110$.

Надмірність коду $R = r / n = 4 / 10 = 2 / 5$.

Задача 3.3

Проаналізувати роботу кодера згорткового коду, якщо на його вхід подана послідовність бітів 1 0 1. Схема кодера наведена на рис.1

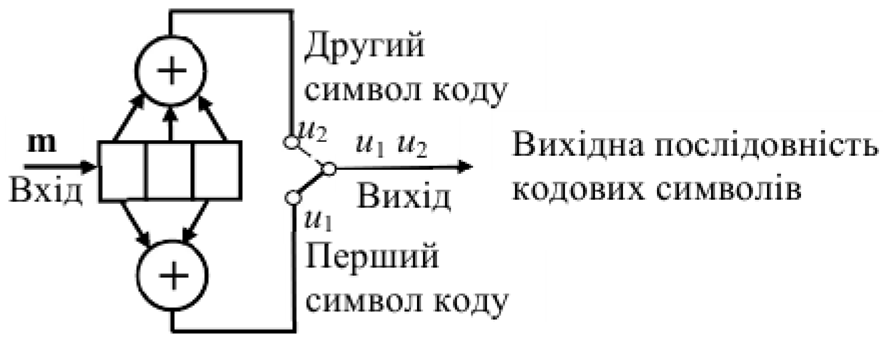

Рис. 1 Схема, яка формує згортковий код з параметрами K = 3 та з коефіцієнтом надлишковості $\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Параметри схеми формування загорткового коду K = 3 та коефіцієнт надлишковості $\frac{1}{2}$. означають, що регістр зсуву має 3 розряди, а кількість суматорів за модулем 2 становить 2. В результаті виконання операцій сумування формуються пари бітів вихідних кодових символів, а в загальному результати сумування залежать від вмісту вхідного регістру.

Під час надходження до вхідного регістру наступного біту здійснюється зсув послідовності символів на одну позицію праворуч, відповідно один із прийнятих бітів втрачається.

Аналіз роботи схеми:

На початку роботи схеми вхідний регістр заповнений нулями, тому на виході схеми формуються два нулі. У момент часу $t = t_1$ перший символ повідомлення становить $m_1 = 1$, в результаті чого перший біт регістру набуває значення 1, а два інших біти, як і раніше, дорівнюють 0. У цьому разі на виході першого суматора отримуємо значення $u_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$, а на виході другого – $u_2 = 1 \oplus 0 = 1$.

У наступний момент часу $t = t_2$ надходить другий символ повідомлення $m_2 = 0$, і це значення завантажується в перший біт вхідного регістру, а решта значень зсуваються у регістрі на 1 біт праворуч із відкиданням останнього значення. В результаті цієї операції вміст регістру змінюється на значення 0 1 0. На виході першого суматора одержане значення $u_1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$, а на виході другого – $u_2 = 0 \oplus 0 = 0$.

У момент часу $t = t_3$ надходить третій символ вхідного повідомлення $m_3 = 1$, і це значення завантажується в перший біт вхідного регістру, а решта значень зсуваються на 1 біт праворуч. Результат цієї операції буде наступним.

1. Вміст регістру – 101, що відповідає вхідній кодовій послідовності.
2. Результат на виході першого суматора – $u_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$.
3. Результат на виході другого суматора – $u_2 = 1 \oplus 1 = 0$.
4. Вихідна послідовність – 00.

У момент часу $t = t_4$ передавання вхідного повідомлення закінчується, тому ліві біти вхідного регістру тепер заповнюються нулями. Для моменту часу $t = t_4$ маємо такий результат.

1. Вміст регістру – 010.
2. Результат на виході першого суматора – $u_1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$.
3. Результат на виході другого суматора – $u_2 = 0 \oplus 0 = 0$.

4. Вихідна послідовність – 00.

Для моменту часу $t = t_5$, відповідно, маємо.

1. Вміст регістру – 001.

2. Результат на виході першого суматора – u_1 = 0⊕0⊕1 = 1.

3. Результат на виході другого суматора – u_2 = 0⊕1 = 1.

4. Вихідна послідовність – 11.

Для моменту часу $t = t_6$ можна записати.

1. Вміст регістру – 000.

2. Результат на виході першого суматора – u_1 = 0⊕0⊕0 = 0.

3. Результат на виході другого суматора – u_2 = 0⊕0 = 0.

4. Вихідна послідовність – 00.

Для згорткового коду у разі, якщо вхідний регістр містить послідовність, яка складається лише з нулів, введення повідомлення можна вважати закінченим.

В результаті роботи кодеру згортковий код з параметрами K = 3 та $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. для вхідної послідовності 1 0 1 складає 11 10 00 10 11.

Література до виконання самостійної роботи

1. Когновицкий, О.С. Теория помехоустойчивого кодирования. Ч 1. Циклические коды: /О.С. Когновицкий, В.М. Охорзин; – СПб.: СПбГУТ, 2013. –84 с.
2. Банкет В. Л. Помехоустойчивое кодирование в телекоммуникационных системах: учеб. пособ. по изучению модуля 4 дисциплины ТЭС / В.Л. Банкет, П.В. Иващенко, Н.А. Ищенко. – Одесса: ОНАС им. А. С. Попова, 2011. – 104 с.
3. Жураковський Ю. П., Гніліцький В. В. Теорія інформації та кодування в задачах: Навчальний посібник. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 230 с.
4. Кодування сигналів в електронних системах. Частина 3. Способи кодування сигналів. Том 2. Групові, ітеративні та згорткові коди.

[Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні пристрої та системи» та «Електронні прилади та пристрої» / С.В. Денбновецький, І.В. Мельник, Л.Д. Писаренко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 10,3 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021.

5. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки/У. Питерсон; пер. с англ. – М.:Мир, 1964. – 338 с.
6. Охорзин, В.М. Циклические коды: практикум/ В.М. Охорзин; – СПб. : СПбГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, 2010. – 56 с.

ТЕМА 4. КОДИ БОУЗА-ЧОУДХУРІ-ХОКВІНГЕМА (БЧХ)

Питання, які вивчаються в даній темі

1. Двійковий код БЧХ, здатний виправляти двократні і трикратні помилки.
2. Коди БЧХ над скінченними полями Галуа GF(p^m).

Приклади розв'язування задач

Задача 4.1

Знайти твірний поліном $P(x)$ двійкового коду БЧХ, здатного виправляти двократні помилки та призначеного для передачі символів деякого алфавіту, потужність якого дорівнює 128.

Розв'язання. Мінімальна кодова відстань для коду БЧХ, здатного виправляти трикратні помилки, $d_{min} = 2s + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$. Для передачі символів алфавіту потужністю 16 повідомлень достатньо мати $k = 7$ двійкових інформаційних символів ($2^7 = 128$).

Для визначення твірного полінома $P(x)$ коду БЧХ, що має $d_{min} = 5$ та $k = 7$, скористаємося таблицею 2. У таблиці 2 наведені основні параметри деяких кодів БЧХ .

В останньому стовпці таблиці наведено запис твірного полінома в вісімковій системі.

Одержимо із таблиці, що мінімальна довжина коду БЧХ з заданими параметрами $n = 15$ ($k = 7$, $r = 8$, $d_{min} = 5$), для якого твірний поліном у вісімковій системі числення записується як $P_8 = 721$, або у двійковій системі числення $P_2 = 111010001$. Таким чином твірний поліном коду БЧХ буде мати вигляд $P(x) = x^8 \oplus x^7 \oplus x^6 \oplus x^4 \oplus 1$.

Таблиця 2 - Основні параметри деяких кодів БЧХ

n	k	r	d_{min}	Твірний поліном P_8
7	4	3	3	13
15	11	4	3	23
	7	8	5	721
	5	10	7	2467
31	26	5	3	45
	21	10	5	3551
	16	15	7	107657
	11	20	11	5423325
	6	25	15	313365047
63	57	6	3	103
	51	12	5	12471
	45	18	7	1701317
	39	24	9	166623567
	36	27	11	1033500423
	30	33	13	1574641656547
	24	39	15	17323260404441
	18	45	21	1363026512351725

Задача 4.2

Побудувати твірний поліном для коду БЧХ із довжиною 15 символів, який виправляє подвійні помилки.

Розв'язання. I спосіб. Для визначення твірного полінома $P(x)$ коду БЧХ, що має $d_{min} = 5$ та $k = 7$, скористаємося таблицею 2.

Одержимо із таблиці, що мінімальна довжина коду БЧХ з заданими параметрами $n = 15$ ($k = 7$, $r = 8$, $d_{min} = 5$), для якого твірний поліном у вісімковій системі числення записується як $P_8 = 721$, або у двійковій системі числення $P_2 = 111010001$. Таким чином твірний поліном коду БЧХ буде мати вигляд $P(x) = x^8 \oplus x^7 \oplus x^6 \oplus x^4 \oplus 1$.

Тобто, маємо твірний поліном восьмого порядку. Оскільки довжина коду БЧХ *n* становить 15 символів, кількість інформаційних розрядів k = 15 – 8 = 7.

Таким чином, параметри сформованого коду БЧХ (15, 7).

II спосіб.

Твірний поліном для такого коду формується через пошук найменшого спільного кратного 2t=2*2=4 dmin=5 НСК $[f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)]$ для незвідних поліномів четвертого порядку. Відповідно, згідно із таблицями незвідних поліномів, наведеними в таблиці 1, можна записати:

$$g(x) = \text{НСК}\,[f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)] = \text{НСК}\,[x^4 + x + 1, x^4 + x + 1,$$
$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^4 + x + 1] = (x^4 + x + 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) =$$
$$= x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1.$$

Із таблиці 1 зрозуміло, що функції $f_j(x)$ для твірного поліному, який сформований $x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$, відповідають степеням α^j примітивного елемента α.

Задача 4.3

Побудувати несистематичний код БЧХ для послідовності 1010111 з використанням твірного поліному, який був отриманий в задачі 4.2.

Розв'язання. Код БЧХ формується як результат множення кодового інформаційного слова $d(x)$ на твірний поліном g(x). Враховуючи, що

$d(x) = 1010111 = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1,$

одержимо:

$$c(x) = d(x) \cdot g(x) = (x^6 + x^4 + x^2 + x + 1) \cdot (x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1) = x^{14} + x^{13} +$$
$$+ x^{12} + x^{10} + x^{12} + x^6 + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^4 + x^{10} + x^9 + x^8 + x^6 + x^2 +$$
$$+ x^9 + x^8 + x^7 + + x^5 + x + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 = x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} +$$
$$+ x^{10} + x^8 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1 = 111110101100111.$$

Задача 4.4

Побудувати твірний поліном для коду БЧХ із довжиною 15 символів, який виправляє потрійні помилки.

Розв'язання. Для даного випадку 2t=2*3=6 d_{min}=7, згідно із таблицею 2, можна записати:

$g(x)$ = НСК $[f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x)]$ = НСК $[x^4 + x + 1, x^4 + x + 1, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^4 + x + 1, x^2 + x + 1, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1] = (x^4 + x + 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) = = (x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1) \cdot (x^2 + x + 1) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^6 + x^2 + x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 = x^{10} + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$.

Враховуючи те, що твірний поліном має порядок m = 10, для даного випадку параметри коду БЧХ становлять (15, 5).

Задача 4.5

Виконати дії додавання і множення для елементів поля Галуа GF(4).

Розв'язання. Виконання операцій в полях Галуа. Наприклад, у таблиці 3 наведені результати розкладання поля Галуа GF(16) через елементи поля GF(4).

Результати додавання для елементів поля Галуа GF(4) записуються наступним чином:

0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1; 0 + 2 = 2; 0 + 3 = 3; 1 + 0 = 1; 1 + 1 = 0; 1 + 2 = 3; 1 + 3 = 2;
2 + 0 = 2; 2 + 1 = 3; 2 + 2 = 0; 2 + 3 = 1; 3 + 0 = 3; 3 + 1 = 2; 3 + 2 = 1; 3 + 3 = 0;

Результати множення для елементів поля Галуа GF(4) записуються наступним чином:

0 · 0 = 0; 0 · 1 = 0; 0 · 2 = 0; 0 · 3 = 0; 1 · 0 = 0; 1 · 1 = 1; 1 · 2 = 2; 1 · 3 = 3;
2 · 0 = 0; 2 · 1 = 2; 2 · 2 = 3; 2 · 3 = 1; 3 · 0 = 0; 3 · 1 = 3; 3 · 2 = 1; 3 · 3 = 2.

Таблиця 3 – Подання поля Галуа GF(16) через поля Галуа GF(4)

Через степінь примітивного елемента α	Через поліном $s(z)$	У четверковому коді	У десятковому коді	Через мінімальні поліноми $r(x)$
0	0	00	0	–
α^0	1	01	1	$x + 1$
α^1	z	10	4	$x^2 + x + 2$
α^2	$z + 2$	12	6	$x^2 + x + 3$
α^3	$3z + 2$	32	14	$x^2 + 3x + 1$
α^4	$z + 1$	11	5	$x^2 + x + 2$
α^5	2	02	2	$x + 2$
α^6	$2z$	20	8	$x^2 + 2x + 1$
α^7	$2z + 3$	23	11	$x^2 + 2x + 2$
α^8	$z + 3$	13	7	$x^2 + x + 3$
α^9	$2z + 2$	22	10	$x^2 + 2x + 1$
α^{10}	3	03	3	$x + 3$
α^{11}	$3z$	30	12	$x^2 + 3x + 3$
α^{12}	$3z + 1$	31	13	$x^2 + 3x + 1$
α^{13}	$2z + 1$	21	9	$x^2 + 2x + 2$
α^{14}	$3z + 3$	33	15	$x^2 + 3x + 3$

Задача 4.6

Побудувати твірний поліном для коду БЧХ над полем Галуа GF(4), який виправляє одиночні помилки.

Розв'язання. Згідно із співвідношенням для знаходження твірного полінома можна записати: $g(x)$ = НСК $[f_1(x), f_2(x)]$.

Тоді, враховуючі поліноміальне подання, яке наведено у таблиці 3, з урахуванням алгебраїчних операцій, заданих у полі GF(4) переписується наступним чином:

$g(x)$ = НСК $[f_1(x), f_2(x)] = (x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 3) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x^3 + x^2 +$
$+ 3x + 2x^2 + 2x + 1 = x^4 + (1 + 1) \cdot x^3 + (3 + 1 + 2) \cdot x^2 + (3 + 2) \cdot x + 1 =$
$= x^4 + (2 + 2) \cdot x^2 + (3 + 2) \cdot x + 1 = x^4 + x + 1.$

В результаті отриманий твірний поліном g(x) для коду БЧХ (15, 11) над полем Галуа GF(4), який виправляє одиночні помилки. У даному випадку параметри (15, 11) означають, що кодуються 11 двобітових послідовностей, тобто 22 біти, а результуючий код БЧХ має 15 · 2 = 30 бітів.

Задача 4.7

Побудувати над полем Галуа GF(4) код БЧХ, який виправляє одиночні помилки, для інформаційного слова 23113020321.

Розв'язання. Будемо шукати код БЧХ $c(x)$ як добуток визначеного інформаційного слова $d(x)$ = 23113020321 на твірний поліном $g(x) = x^4 + x + 1$, визначений у попередньому завданні. Під час множення поліномів для зведення подібних доданків будемо використовувати співвідношення додавання і множення над елементами поля Галуа GF(4). Відповідно маємо:

$$
\begin{aligned}
c(x) = d(x) \cdot g(x) = {} & (2{\cdot}x^{10} + 3{\cdot}x^9 + x^8 + x^7 + 3{\cdot}x^6 + 2{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x + 1) \cdot (x^4 + \\
& + x + 1) = 2{\cdot}x^{14} + 3{\cdot}x^{13} + x^{12} + x^{11} + 3{\cdot}x^{10} + 2{\cdot}x^8 + 3{\cdot}x^6 + 2{\cdot}x^5 + x^4 + \\
& \quad + 2{\cdot}x^{11} + 3{\cdot}x^{10} + x^9 + x^8 + 3{\cdot}x^7 + 2{\cdot}x^5 + 3{\cdot}x^3 + 2{\cdot}x^2 + x + \\
& \quad + 2{\cdot}x^{10} + 3{\cdot}x^9 + x^8 + x^7 + 3{\cdot}x^6 + 2{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x + 1 = \\
& = 2{\cdot}x^{14} + 3{\cdot}x^{13} + x^{12} + (1 + 2)\,{\cdot}x^{11} + (3 + 3 + 2)\,{\cdot}x^{10} + (3 + 1)\,{\cdot}x^9 + \\
& + (2 + 1 + 1)\,{\cdot}x^8 + (3 + 1)\,{\cdot}x^7 + (3 + 3)\,{\cdot}x^6 + (2 + 2)\,{\cdot}x^5 + (1 + 2)\,{\cdot}x^4 + \\
& + 3{\cdot}x^3 + (2 + 3){\cdot}x^2 + (1 + 2)\,{\cdot}x + 1 = 2{\cdot}x^{14} + 3{\cdot}x^{13} + x^{12} + 3{\cdot}x^{11} + 2{\cdot}x^{10} + \\
& + 2{\cdot}x^9 + 2{\cdot}x^8 + 2{\cdot}x^7 + 0{\cdot}x^6 + 0{\cdot}x^5 + 3{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^3 + x^2 + 3{\cdot}x + 1 = \\
& = 231322220033131.
\end{aligned}
$$

Тобто, п'ятнадцятирозрядний код БЧХ для інформаційного слова з 11 символів $d(x)$=23113020321 становить $c(x)$= 231322220033131. Коректувальна здатність такого коду полягає у можливості виправлення будь-якої одиночної помилки.

Задача 4.8

Побудувати твірний поліном для коду БЧХ над полем Галуа GF(4), який виправляє подвійні помилки.

Розв'язання. Для цього прикладу, маємо:

$g(x)$ = НСК $[f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)]$.

Використовуючи мінімальні поліноми перепишемо співвідношення наступним чином:

$g(x) =$ НСК $[x^2 + x + 2, x^2 + x + 3, x^2 + 3x + 1, x^2 + x + 2] = (x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 3) \cdot (x^2 + 3x + 1) = (x^4 + x^3 + 2x^2 + x^3 + x^2 + 2x + 3x^2 + 3x + 3\cdot 2) \cdot (x^2 + 3x + 1) = (x^4 + (1+1) \cdot x^3 + (2+1+3) \cdot x^2 + (2+3) \cdot x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1) = (x^4 + (3+3) \cdot x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1) = (x^4 + x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1) = x^6 + x^3 + x^2 + 3x^5 + 3x^2 + 3x + x^4 + x + 1 = x^6 + 3x^5 + x^4 + x^3 + (1+3)x^2 + (1+3)x + 1 = x^6 + 3x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

В результаті виконання цього завдання отриманий твірний поліном $g(x) = x^6 + 3\cdot x^5 + x^4 + x^3 + 2\cdot x^2 + 2\cdot x + 1$ для коду БЧХ (15, 9) над полем Галуа GF(4), який виправляє подвійні помилки.

Задача 4.9

Побудувати над полем Галуа GF(4) код БЧХ, який виправляє подвійні помилки, для інформаційного слова 203010021.

Розв'язання. Для розв'язування поставленої задачі використаємо твірний поліном $g(x)$ задається співвідношенням $g(x) = x^6 + 3\cdot x^5 + x^4 + x^3 + 2\cdot x^2 + 2\cdot x + 1$ із попередньої задачі

Відповідно, враховуючи співвідношення для алгебраїчних операцій над елементами поля Галуа GF(4), маємо:

$$c(x) = d(x) \cdot g(x) = (2\cdot x^8 + 3\cdot x^6 + x^4 + 2\cdot x + 1) \cdot (x^6 + 3\cdot x^5 + x^4 + x^3 +$$
$$+ 2\cdot x^2 + 2\cdot x + 1) = 2\cdot x^{14} + 3\cdot x^{12} + x^{10} + 2\cdot x^7 + x^6 + (2\cdot 3)\cdot x^{13} +$$
$$+ (3\cdot 3)\cdot x^{11} + 3\cdot x^9 + (2\cdot 3)\cdot x^6 + 3\cdot x^5 + 2\cdot x^{12} + 3\cdot x^{10} + x^8 + 2\cdot x^5 + x^4 +$$
$$+ 2\cdot x^{11} + 3\cdot x^9 + x^7 + 2\cdot x^4 + x^3 + (2\cdot 2)\cdot x^{10} + (3\cdot 2)\cdot x^8 + 2\cdot x^6 + (2\cdot 2)\cdot x^3 +$$
$$+ 2\cdot x^2 + (2\cdot 2)\cdot x^9 + (3\cdot 2)\cdot x^7 + 2\cdot x^5 + (2\cdot 2)\cdot x^2 + 2\cdot x + 2\cdot x^8 + 3\cdot x^6 + x^4 +$$
$$+ 2\cdot x + 1 = 2\cdot x^{14} + 3\cdot x^{12} + x^{10} + 2\cdot x^7 + x^6 + x^{13} + 2\cdot x^{11} + 3\cdot x^9 +$$

$$+ x^6 + 3\cdot x^5 + 2\cdot x^{12} + 3\cdot x^{10} + x^8 + 2\cdot x^5 + x^4 + 2\cdot x^{11} + 3\cdot x^9 + x^7 +$$
$$+ 2\cdot x^4 + x^3 + 3\cdot x^{10} + x^8 + 2\cdot x^6 + 3\cdot x^3 + 2\cdot x^2 + 3\cdot x^9 + x^7 + 2\cdot x^5 +$$
$$+ 3\cdot x^2 + 2\cdot x + 2\cdot x^8 + 3\cdot x^6 + x^4 + 2\cdot x + 1 = 2\cdot x^{14} + x^{13} + (3 + 2)\cdot x^{12} +$$
$$+ (2 + 2)\cdot x^{11} + (1 + 3 + 3)\cdot x^{10} + (3 + 3 + 3)\cdot x^9 + (1 + 1 + 3)\cdot x^8 +$$

$$+ (2 + 1 + 1) \cdot x^7 + (1 + 2 + 3) \cdot x^6 + (3 + 2 + 2) \cdot x^5 + (1 + 2 + 1) \cdot x^4 +$$
$$+ (1 + 3) \cdot x^3 + (2 + 3) \cdot x^2 + (2 + 2) \cdot x + 1 = 2 \cdot x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{10} +$$
$$+ 3 \cdot x^9 + 3 \cdot x^8 + 2 \cdot x^7 + (3 + 3) \cdot x^6 + 3 \cdot x^5 + 2 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 + x^2 + 1 =$$
$$= 2 \cdot x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{10} + 3 \cdot x^9 + 3 \cdot x^8 + 2 \cdot x^7 + x^5 + 2 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 + x^2 + 1 =$$
$$= 211013320122101.$$

Тобто, $c(x)$ = 211013320122101. Це п’ятнадцятирозрядний чотирьохпозиціний код БЧХ для дев’ятирозрядного чотирьохпозиціного числа $d(x)$ = 203010021, який виправляє подвійні помилки.

Література до виконання самостійної роботи

1. Когновицкий, О.С. Теория помехоустойчивого кодирования. Ч 1. Циклические коды: /О.С. Когновицкий, В.М. Охорзин; – СПб.: СПбГУТ, 2013. –84 с.
2. Кодування сигналів в електронних системах. Частина 3. Способи кодування сигналів. Том 2. Групові, ітеративні та згорткові коди. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні пристрої та системи» та «Електронні прилади та пристрої» / С.В. Денбновецький, І.В. Мельник, Л.Д. Писаренко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 10,3 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021.
3. Жураковський Ю. П., Гніліцький В. В. Теорія інформації та кодування в задачах: Навчальний посібник. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 230 с.
4. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки/У. Питерсон; пер. с англ. – М.:Мир, 1964. – 338 с.
5. Банкет В. Л. Помехоустойчивое кодирование в телекоммуникационных системах: учеб. пособ. по изучению модуля 4 дисциплины ТЭС / В.Л. Банкет, П.В. Иващенко, Н.А. Ищенко. – Одесса: ОНАС им. А. С. Попова, 2011. – 104 с.

ТЕМА 5. НЕДВІЙКОВІ КОДИ

Питання, які вивчаються в даній темі

Недвійкові коди (q-коди, багатопозиційні) за аналогією з двійковими поділяються на наступні:

1. Первинні коди:

– Код на перестановки.

– Код на певне число розміщень.

– Код на певне число сполучень.

– Код на всі сполучення.

– Змінно-якісний код.

2. Коди, що виявляють помилки:

– Код з перевіркою за модулем q.

– Код із повторенням.

– Незвідні змінно-позиційні коди.

3. Коди, що виправляють помилки:

– Код з багатократним повторенням.

– Код з простим повторенням та перевіркою за $\mathrm{mod}\, q$.

– Лінійний блоковий код.

– Узагальнений код Хеммінга.

– Код Ріда-Соломона (РС).

– Коди Боуза-Чоудхурі-Хоквінгема (БЧХ).

Приклади розв’язування задач

Задача 5.1

Побудувати трійкові первинні коди ($q = 3$): на перестановки при $n = 3$, на певне число розміщень при $n = 2$, на певне число сполучень при $n = 2$, на всі сполучення при $n = 2$ та змінно-якісний при $n = 3$.

Розв'язання. Визначимо кількість комбінацій при заданих параметрах та подамо їх для всіх цих кодів:

трійковий код на перестановки: $N_0 = q! = 1\times 2 \times 3 = 6 \rightarrow$ 012, 021, 102, 120, 201, 210;

трійковий код на певне число розміщень: $N_0 = q! / (q - n)! = = 3! / (3 - 2)! = 6 \rightarrow$ 01, 02, 10, 20, 12, 21;

трійковий код на певне число сполучень: $N_0 = C_q^n = C_3^2 = 3 \rightarrow$ 01, 02, 12;

трійковий код на всі сполучення: $N_0 = q^n = 3^2 = 9 \rightarrow$ 00, 11, 22, 01, 02, 10, 12, 20, 21;

трійковий змінно-якісний код: $N_0 = q (q - 1)^{n-1} = 3 (3 - 1)^{3-1} = = 12 \rightarrow$ 010, 020, 012, 021, 101, 121, 120, 102, 202, 212, 201, 210.

Задача 5.2

Закодувати комбінацію трійкового коду на всі сполучення 102 трійковими кодами, що виявляють помилки: з перевіркою за $mod\ q$ (при q = 3) та з повторенням. Показати процес виявлення однократної помилки, визначити та порівняти надмірності цих кодів.

Розв'язання. Кодова комбінація трійкового коду з перевіркою за mod 3 буде мати вигляд A_1 = 1020, а трійкового коду з повторенням – A_2 = 102102.

Припустимо, що у комбінації трійкового коду з перевіркою за mod 3 виникла однократна помилка, вектор якої E_1 = 0200. Тоді сума за mod 3 $A_1 \oplus E_1$ = 1220. У декодері перевіряється за mod 3 сума елементів одержаної кодової комбінації. У цьому разі вона буде дорівнювати 2, тобто відрізнятися від 0, що вказує на наявність помилки у комбінації. Надмірність коду $R_1 = 1 / (k + 1) = 1 / 4 = 0{,}25$.

Припустимо, що у комбінації трійкового коду з повторенням виникла однократна помилка, вектор якої E_2 = 020000. Тоді сума за mod 3 $A_2 \oplus E_2$ = 122102. Порівнюючи першу (1...3 розряди) і другу (4...6 розряди) частини кодової комбінації побачимо, що вони відрізняються у другому і п'ятому розрядах. Це вказує на наявність помилки у прийнятій кодовій комбінації. Надмірність коду R_2 = 0,5.

Таким чином $R_2 > R_1$.

Задача 5.3

Кодування і декодування (за допомогою перевірочної матриці в систематичній формі) для коду над полем раціональних чисел. Закодувати повідомлення a= { 4, 6} за допомогою лінійного блокового коду. Визначити синдром для виправлення однократних помилок в комбінаціях цього коду. Показати на прикладі виправлення однократної помилки.

Твірна матриця коду $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Розв'язання. Нехай задано повідомлення a= {a_2=4, a_1=6}. Закодуєм його:

$$v=(a_2\ a_1\ b_2\ b_1)=aG=(a_2\ a_1)\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

де $b_2=a_2+a_1$=10; $b_1=a_2+2a_1$=16;

Таким чином, кодове слово має вигляд v= (4, 6, 10,16). Припустимо, що символ a_1 спотворений аддитивною завадою e= -5, т.т. прийняте кодове слово $v`$ = (4, 1, 10, 16). Скористаємося наступним алгоритмом декодування:

1. Перевірочна матриця

   $H^T=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\text{т}}$

2. Обчислюємо синдром

   S=(S_2, S_1)= $v`H^T$=(4, 1, 10, 16)$\cdot$ $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\text{т}}$

тобто S_2 = -4-1 + 10 = 5; S_1= -4-2 + 16 = 10.

3. Так як $S_2 \neq 0$, $S_1 \neq 0$, то якийсь інформаційний символ спотворений.
4. Знайдемо S_2 / S_1 = 5/10 = 1/2.
5. Так як відношення 1/2 виконується для другого зліва стовпчика в матриці H, тобто S_2 / S_1= *-1*/ *(-2)*, то помилковий символ a_1.
6. Величина помилки e = S_2 / *(H(2,1))* =5/(-1)= -5.

7. Скоректоване повідомлення [4, 1 - (-5)] = (4,6) співпадає з вихідним a= (a_2 a_1) .

Задача 5.4

Знайти максимальну кількість кодових комбінацій незвідного змінно-позиційного коду з розділенням алфавіту коду на групи з однаковим числом символів у кожній, що можна одержати для алфавіту коду з потужністю q = 12, при кількості елементів у кодовій комбінації n = 2 та кількості позицій у одному елементі, що дорівнює числу груп $m = v = 2$.

Розв'язання. Розрізняють два варіанти побудови даного коду: код з розділенням q позицій на v груп з m позиціями в одному елементі, які беруться з різних груп, та аналогічний код, у якого m позицій беруться тільки з однієї (за номером відповідного елемента) групи.

Визначимо кількість комбінацій для двох варіантів побудови НЗЗПК. Для НЗЗПК, побудованому за першим варіантом, кількість кодових комбінацій визначиться за формулою

$$N_{01} = [\,C_v^m \ l^{\,m} / n\,]^{\,n} \ ,$$

де l – кількість позицій у кожній групі.

У даному прикладі $l = q / v$ = 12 / 2 = 6. Тоді

$$N_{01} = [\,C_2^2 (\,6\,)^2 / 2\,]^2 = 324.$$

Для НЗЗПК, побудованому за другим варіантом, кількість кодових комбінацій

$$N_{02} = (\,C_{q/v}^m\,)^v = (\,C_{12/2}^2\,)^2 = 225\,.$$

Тобто $N_{01} > N_{02}$. Таким чином максимальна кількість кодових комбінацій НЗЗПК з розділенням алфавіту коду на групи може бути одержана при використанні для формування m - позиційного елемента позицій різних груп алфавіту.

Задача 5.5

Знайти кількість кодових комбінацій незвідного змінно-позиційного коду без розділення алфавіту коду на групи, яку можна одержати для алфавіту коду, який має потужність q = 7, при кількості елементів у кодовій комбінації n = 2 і кількості позицій у одному елементі m = 2. Записати всі одержані комбінації НЗЗПК.

Розв'язання. Для визначення кількості комбінацій для НЗЗПК без розділення алфавіту коду на групи спершу обчислимо число сполучень C_7^2 = 21. Одержане число не ділиться на n = 2 без остачі. У тому разі, коли вся кількість сполучень розподіляється між групами сполучень не нарівно з-за остачі деякої кількості сполучень, треба використати формулу:

$$N_0 = (\,C_q^m - Q\,)^{\,n-Q} \times (\,C_q^m - Q + n\,)^{Q} / \,n^{\,n},$$

де Q – остача від ділення C_q^m/n ; у даному випадку це остача від ділення 21 / 2 дорівнює, тобто Q = 1. Тоді

$$N_0 = (\,21 - 1\,) \times (\,21 - 1 + 2\,) / \,2^{\,2} = 110\,.$$

Якщо 21 сполучення розділити на дві групи: перша група з 10 сполучень: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 12, 13, 14, 15 та друга група з 11 сполучень: 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56, тоді одержимо 110 кодових комбінацій НЗЗПК. Кодові комбінації НЗЗПК зведемо до таблиці 4.

Таблиця 4

№ комбі-нації	Комбінація НЗЗПК	№ комбі-нації	Комбінація НЗЗПК	№ комбі-нації	Комбінація НЗЗПК	№ комбі-нації	Комбінація НЗЗПК
1	01-16	29	03-35	57	06-23	85	13-36
2	01-23	30	03-36	58	06-24	86	13-45
3	01-24	31	03-45	59	06-25	87	13-46
4	01-25	32	03-46	60	06-26	88	13-56
5	01-26	33	03-56	61	06-34	89	14-16
6	01-34	34	04-16	62	06-35	90	14-23
7	01-35	35	04-23	63	06-36	91	14-24
8	01-36	36	04-24	64	06-45	92	14-25
9	01-45	37	04-25	65	06-46	93	14-26
10	01-46	38	04-26	66	06-56	94	14-34
11	01-56	39	04-34	67	12-16	95	14-35
12	02-16	40	04-35	68	12-23	96	14-36
13	02-23	41	04-36	69	12-24	97	14-45
14	02-24	42	04-45	70	12-25	98	14-46
15	02-25	43	04-46	71	12-26	99	14-56
16	02-26	44	04-56	72	12-34	100	15-16
17	02-34	45	05-16	73	12-35	101	15-23
18	02-35	46	05-23	74	12-36	102	15-24
19	02-36	47	05-24	75	12-45	103	15-25
20	02-45	48	05-25	76	12-46	104	15-26
21	02-46	49	05-26	77	12-56	105	15-34
22	02-56	50	05-34	78	13-16	106	15-35
23	03-16	51	05-35	79	13-23	107	15-36
24	03-23	52	05-36	80	13-24	108	15-45
25	03-24	53	05-45	81	13-25	109	15-46
26	03-25	54	05-46	82	13-26	110	15-56
27	03-26	55	05-56	83	13-34		
28	03-34	56	06-16	84	13-35		

Задача 5.6

Закодувати недвійковим кодом з багатократним повторенням, який здатен виправляти усі однократні помилки, комбінацію трійкового первинного змінно-якісного коду A = 120. Визначити надмірність одержаного коду та показати процес виправлення будь-якої однократної помилки.

Розв'язання. Кількість перевірочних елементів у трійковому коді з багатократним повторенням визначається кратністю помилки, яку код повинен виправити. При виправленні однократної помилки мінімальна кількість повторень $m = 2$. Тоді кількість перевірочних елементів $r = km = 3 \times 2 =$ 6. Довжина кодової комбінації трійкового коду з багатократним повторенням, що виправляє однократні помилки, визначається за формулою $n = k(1 + m) = 3(1 + 2) = 9$. Кодова комбінація буде мати вигляд: 120120120.

Надмірність коду $R = m/(1 + m) = 2/(1 + 2) = 2/3$.

Припустимо, що при передачі по каналу в результаті дії завад у кодовій комбінації виникла помилка, вектор якої $E = 002000000$. Тоді кодова комбінація, яка надходить до декодера, буде мати вигляд: $A \oplus E = 122120120$.

Для виправлення помилки у декодері виконується порівняння інформаційної частини прийнятої кодової комбінації з її повтореннями

$$\begin{array}{c} 1\,2\,2 \\ 1\,2\,0 \\ 1\,2\,0, \end{array}$$

яке ясно вказує на незбіг у третьому розряді. Для виправлення помилки у комбінації застосовується мажоритарний принцип виправлення для кожного інформаційного елемента, тобто " голосування за біль-шістю ", коли за істинне значення приймається те, яке частіше зустрічається у цьому інформаційному і відповідних йому перевірочних елементах. Таким чином треба виправити 2 у третьому розряді прийнятої кодової комбінації на 0. Тоді виправлена кодова комбінація трійкового коду з багатократним повторенням буде мати вигляд: 120120120.

Задача 5.7

Закодувати недвійковим кодом з простим повторенням та перевіркою за mod 4 комбінацію четвіркового первинного змінно-якісного коду A = 122. Визначити надмірність одержаного коду та показати процес виправлення будь-якої однократної помилки.

Розв'язання. Кількість перевірочних елементів у четвірковому коді з простим повторенням та перевіркою за $mod\, q$ визначається кількістю інформаційних елементів первинної кодової комбінації та додатковим перевірочним елементом. Тоді кількість перевірочних елементів $r = k + 1 = 3 + 1 = 4$, а довжина кодової комбінації $n = = k + r = 3 + 4 = 7$.

Визначимо значення перевірочного елемента як різницю між 4 та сумою значень всіх елементів первинної кодової комбінації за $mod\,4$: $4 - 1 - 2 - 2 = -1 = 3\ (mod\,4)$.Тоді кодова комбінація буде мати вигляд: 1221223.

Надмірність коду $R = k / r = 4 / 7$.

Припустимо, що при передачі по каналу в результаті дії завад у кодовій комбінації виникла помилка, вектор якої $E = 0030000$. Тоді кодова комбінація, яка надходить до декодера, буде мати вигляд:

$A \oplus E = 1211223$.

Для виправлення помилки у декодері виконується порівняння інформаційної частини прийнятої кодової комбінації з її повтореннями

$$\begin{matrix} 121 \\ 122 \end{matrix}\ ,$$

яке ясно вказує на незбіг у третьому розряді. Для визначення, в якій частині прийнятої кодової комбінації виникла помилка: в інформа-ційній чи повтореній, робимо перевірку кожної з цих частин за *mod* 4. При цьому у перевірку повинен входити і перевірочний елемент, який міститься в кінці прийнятої кодової комбінації. Одержуємо значення контрольного елемента для інформаційної частини комбінації: $1 + 2 + 1 + 3 = 3 \neq 0\ (mod\,4)$, що вказує на наявність в ній помилки. Вірне значення інформаційного елемента отримаєм як різницю за $mod\,4$ між спотвореним інформаційним елементом та одержаним при перевірці у декодері контрольним елементом: $1 - 3 = -2 = 2\ (mod\,4)$.

Тоді виправлена кодова комбінація четвіркового коду з простим повторенням та перевіркою за mod 4 буде мати вигляд: 122122

Задача 5.8

Закодувати вісімковим узагальненим кодом Хеммінга кодову комбінацію вісімкового первинного коду A = 3275524461, k = 10. Показати процес виправлення однократної помилки.

Розв'язання. У відповідності з виразом (10.1) при q = 8 та r = 2 маємо $n_{max} = (8^2 – 1) / (8 – 1) = 9$, що недостатньо для побудови коду з $k = 10$. При $r = 3$ максимальна довжина коду n_{max} = 73. Таким чином, вибираемо $r = 3$, $n = k + r = 10 + 3 = 13$ і матриця H має розміри 3 × 13.

Довільно надаємо значення $\delta = 2$ і будуємо матрицю H:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Кодова комбінація A = 3275524461 закодована УКХ буде мати вигляд X = $b_1b_2b_3$3275524461.Обчислюємо значення перевірочних елементів за алгоритмом (10.3). Множення і додавання виконуємо у відповідності з табл. 10.1.1 та 10.1.2:

$b_1 = (1/2)(2×3+2×2+2×7+2×5+2×5+2×2+2×4+2×4+2×6+2×1)=$

$= (1/2)(6+4+5+1+1+4+3+3+7+2) = 6/2 = 3,$

$b_2 = (1/2)(1×3+2×2+3×7+4×5+5×5+6×2+7×4+0×4+1×6+2×1) =$

$= (1/2)(3+4+2+2+7+7+1+0+6+2) = 2/2 = 1,$

$b_3 = (1/2)(0×3+1×2+2×7+3×5+4×5+5×2+6×4+7×4+1×6+2×1) =$

$= (1/2)(0+2+5+4+2+1+5+1+6+2) = 0/2 = 0.$

Тобто одержуємо значення $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$. Таким чином, у канал з кодера подається вектор X = 3103275524461.

Виправимо однократну помилку. Для цього припустимо, що вектор прийнятої кодової комбінації має вигляд $Y = X \oplus E$ = = 3103275524411.

Декодування починаємо з обчислення перевірочного синдрому:

$s_1 = 2\times3+0\times1+0\times0+2\times3+2\times2+2\times7+2\times5+2\times5+2\times2+2\times4+2\times4+2\times1+$

$+2\times1 = 6+0+0+6+4+5+1+1+4+3+3+2+2 = 5,$

$s_2 = 0\times3+2\times1+0\times0+1\times3+2\times2+3\times7+4\times5+5\times5+6\times2+7\times4+0\times4+1\times1+$

$+2\times1 = 0+2+0+3+4+2+2+7+7+1+0+1+2 = 7,$

$s_3 = 0\times3+0\times1+2\times0+0\times3+1\times2+2\times7+3\times5+4\times5+5\times2+6\times4+7\times4+1\times1+$ $+2\times1 = 0+0+0+0+2+5+4+2+1+5+1+1+2 = 7,$

Тобто синдром є таким $S = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Значення помилки, у відповідності із співвідношенням (10.4):
$e = s_1\delta^{-1} = 5\times2^{-1} = 5\times5 = 7$ (оберненим до 2 числом є 5, оскільки із табл. 5.2 маємо $2\times5 = 1$), а локатор помилки, згідно із (10.5):

$$L = S/e = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} / 7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Виконуючи упорядковане перебирання стовпців матриці H і порівнюючи їх з локатором L, виявляємо по збігу, що було спотворено дванадцятий елемент у комбінації Y, значення якого $y^*_{12} = 1$. Для виправлення помилки до значення $y^*_{12} = 1$ прийнятої кодової комбінації додамо значення помилки $e = 7$ і одержимо вірне значення: $y_{12} = 1 \oplus 7 = 6$. Після заміни спотвореного значення y^*_{12} елемента на істинне, видаємо одержувачу повідомлення інформаційну частину виправленої кодової комбінації: $A = 3275524461$.

Задача 5.9

Закодувати кодом Ріда-Соломона, що виправляє дві помилки, комбінацію $Q(0,F) = [B\ B\ 9\ F\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2]$ шістнадцяткового первинного коду довжиною $k = 11$.

Розв'язання. Для зручності у подальших обчисленнях запишемо комбінацію шістнадцяткового коду у вигляді

$Q(0,15) = [11\ \ 11\ \ 9\ \ 15\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2]$,

та $Q(x) = 11x^{10} \oplus 11x^9 \oplus 9x^8 \oplus 15x^7 \oplus x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus 2x^2 \oplus 2x \oplus 2 =$
$= \beta^7 x^{10} \oplus \beta^7 x^9 \oplus \beta^{14} x^8 \oplus \beta^{12} x^7 \oplus x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus x^3 \oplus \beta x^2 \oplus \beta x \oplus \beta.$

Як випливає з умови задачі, потужність алфавіту коду $q = 16$. Тоді РС-код може мати довжину $n = q - 1 = 16 - 1 = 15$. Кількість перевірочних елементів $r = 2s = 2 \times 2 = 4$.

Твірний поліном $P(x)$ коду РС, що виправляє $s = 2$ помилок, є добутком $r = 4$ мінімальних поліномів (10.6):

$$P(x) = (x - \beta^j)(x - \beta^{j+1})(x - \beta^{j+2})(x - \beta^{j+3}).$$

Приймаємо $j = 0$; тоді твірний поліном буде мати вигляд:

$$P(x) = (x - \beta^0)(x - \beta^1)(x - \beta^2)(x - \beta^3).$$

Скориставшись для виконання розрахунків табл. 10.1.3, одержимо:

$P(x) = x^4 + 15x^3 + 3x^2 + x + 12 = x^4 \oplus \beta^{12} x^3 \oplus \beta^4 x^2 \oplus x \oplus \beta^6.$

Кодування первинної кодової комбінації $Q(x)$ виконуємо за одним з правил побудови циклічного коду: $F(x) = x^r Q(x)/P(x) \oplus R(x)$:

1) $x^r Q(x) = x^4(\beta^7 x^{10} \oplus \beta^7 x^9 \oplus \beta^{14} x^8 \oplus \beta^{12} x^7 \oplus x^6 \oplus x^5 \oplus x^4 \oplus$ $\oplus x^3 \oplus \beta x^2 \oplus \beta x \oplus \beta) = \beta^7 x^{14} \oplus \beta^7 x^{13} \oplus \beta^{14} x^{12} \oplus \beta^{12} x^{11} \oplus x^{10} \oplus x^9 \oplus$ $\oplus x^8 \oplus x^7 \oplus \beta x^6 \oplus \beta x^5 \oplus \beta x^4$;

2) ділення $x^r Q(x)/P(x) = (\beta^7 x^{14} \oplus \beta^7 x^{13} \oplus \beta^{14} x^{12} \oplus \oplus \beta^{12} x^{11} \oplus x^{10}$ $\oplus x^9 \oplus x^8 \oplus x^7 \oplus \beta x^6 \oplus \beta x^5 \oplus \beta x^4)/(x^4 \oplus \beta^{12} x^3 \oplus \oplus \beta^4 x^2 \oplus x \oplus \beta^6)$ дає остачу $R(x) = \beta^{10} x^3 \oplus \beta^2 x^2 \oplus \beta^5 x \oplus 1$.

3) $F(x) = x^r Q(x)/P(x) \oplus R(x) = \beta^7 x^{14} \oplus \beta^7 x^{13} \oplus \beta^{14} x^{12} \oplus \beta^{12} x^{11} \oplus x^{10} \oplus x^9$ $\oplus x^8 \oplus x^7 \oplus \beta x^6 \oplus \beta x^5 \oplus \beta x^4 \oplus \beta^{10} x^3 \oplus \beta^2 x^2 \oplus \beta^5 x \oplus 1 =$
$= 11x^{14} + 11x^{13} + 9x^{12} + 15x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 6x + 1.$

Таким чином, кодова комбінація коду РС буде мати вигляд:

$$F(0,15) = [11\ \ 11\ \ 9\ \ 15\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 7\ \ 4\ \ 6\ \ 1],$$

або $F(0, F) = [B\ \ B\ \ 9\ \ F\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 7\ \ 4\ \ 6\ \ 1]$.

Задача 5.10

Закодувати інформаційну послідовність 240743514467021 вісімковим ітеративним кодом, що виправляє однократні помилки. Показати процес виправлення однократної помилки та визначити надмірність коду.

Розв'язання. Для того, щоб ітеративний код виправляв однократні помилки, досить для кодування по стовпцям і рядкам використати код з перевіркою за *mod q*, тобто у даному разі – за *mod* 8.

Запишемо задану інформаційну послідовність у вигляді матриці 4 × 4 та закодуємо кожний стовпець та кожний рядок одержаної матриці кодом з перевіркою за *mod* 8:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ \hline 6 & 3 & 4 & 4 & \end{array}$$

Таким чином кодована послідовність вісімкового ітеративного коду буде мати вигляд: 24073435134467302150634 4.

Надмірність коду $R = 8/24$.

Припустимо, що при передачі по каналу зв'язку у кодованій послідовності виникла одна помилка і до декодера надходить така послідовність: 240734351347673021506344. Для виявлення та виправлення помилки у декодері кодована послідовність, що надійшла з каналу, записується у вигляді матриці по 5 елементів у кожному рядку і виконується перевірка кожного рядка та кожного стовпця матриці за *mod* 8:

$$\begin{array}{ccccc|c}
2 & 4 & 0 & 7 & 3 & 0 \\
4 & 3 & 5 & 1 & 3 & 0 \\
4 & \boxed{7} & 6 & 7 & 3 & 5 \\
0 & 2 & 1 & 5 & 0 & 0 \\
6 & 3 & 4 & 4 & 7 & 0 \\
\hline
0 & 5 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

В результаті перевірки бачимо, що для третього рядка та другого стовпця перевірка не дає нульового результату. Це говорить про те, що на перетинанні третього рядка та другого стовпця знаходиться спотворений елемент.

Виправлення спотвореного елемента виконують таким чином. У зв'язку з тим, що не виконується перевірка для 3-го рядка і 2-го стовпця, елемент, що знаходиться на перетинанні 3-го рядка і 2-го стовпця, замінюють елементом, який є сумою за $mod\,8$ прийнятого (помилкового) елемента та перевірочного елемента 3-го рядка (або 2-го стовпця), який був одержаний у декодері, тобто $7+5=4\,(mod\,8)$. Таким чином, виправлена послідовність на виході декодера буде мати вигляд: 2407435144670215.

Задача 5.11

Знайти параметри каскадного коду, якщо як внутрішній код використовується код РС(7, 3) над полем Галуа GF(2^3), а як зовнішній – код РС(511, 505) над полем Галуа GF(2^9).

Розв'язання. Загальний принцип роботи системи із подвійним кодуванням оснований на тому, що спочатку інформаційне повідомлення кодується одним типом коду, а потім отримане кодове слово кодується кодом іншої структури, який має більшу коректувальну здатність. Каскадний код – це блоковий код, який будується як результат послідовного використання двох групових кодів із різною коректувальною здатністю.

Із загальної теорії кодів Ріда – Соломона одержимо, що код РС(7, 3) виправляє подвійну помилку, а код РС(511, 505) – потрійну помилку.

Параметри блокових кодів обчислюються наступним чином.

1. Кількість інформаційних розрядів:

$k_{бл.} = k_{вн.} \cdot k_{зов.}$

2. Загальна кількість розрядів:

$n_{бл.} = n_{вн.} \cdot n_{зов}$,

де в формулах індекси бл. відповідають блоковому коду, індекси вн. – внутрішньому коду, а індекси зов. – зовнішньому.

Результатом формування каскадного коду буде РС-код над полем Галуа $GF(2^3)$ із наступними параметрами:

1. $k_{бл.} = k_{вн.} \cdot k_{зов} = 3 \cdot 505 = 1515$.

2. $n_{бл.} = n_{вн.} \cdot n_{зов.} = 7 \cdot 511 = 3577$.

Тобто, параметри розглянутого каскадного коду Ріда – Соломона становлять РС(3577, 1515). Отримана коректувальна здатність каскадного коду РС(3577, 1515) наступна - код гарантовано виправляє 11 помилок, хоча для багатьох кодових послідовностей визначає й більшу їхню кількість.

Загальна кількість помилок t, які виправляються, залежить від структури каскадного коду. В загальному випадку для параметрів блокового коду завжди виконуються наступні тотожності:

$$r_{бл.} = n_{бл.} - k_{бл.},$$

$$t_{бл.} < r_{бл.} / 2.$$

Значення кількості помилок, які виправляються побудованим каскадним кодом $t_{бл.} = 11$.

Література до виконання самостійної роботи

1. Когновицкий, О.С. Теория помехоустойчивого кодирования. Ч 1. Циклические коды: /О.С. Когновицкий, В.М. Охорзин; – СПб.: СПбГУТ, 2013. –84 с.
2. Кодування сигналів в електронних системах. Частина 3. Способи кодування сигналів. Том 2. Групові, ітеративні та згорткові коди.

[Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні пристрої та системи» та «Електронні прилади та пристрої» / С.В. Денбновецький, І.В. Мельник, Л.Д. Писаренко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 10,3 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021.

3. Жураковський Ю. П., Гніліцький В. В. Теорія інформації та кодування в задачах: Навчальний посібник. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 230 с.
4. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки/У. Питерсон; пер. с англ. – М.:Мир, 1964. – 338 с.
5. Банкет В. Л. Помехоустойчивое кодирование в телекоммуникационных системах: учеб. пособ. по изучению модуля 4 дисциплины ТЭС / В.Л. Банкет, П.В. Иващенко, Н.А. Ищенко. – Одесса: ОНАС им. А. С. Попова, 2011. – 104 с.
6. Муттер В.М. Основы помехоустойчивой телепередачи информации. Л.: Энергоатомиздат, 1990, 288 с.