ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 298–304 Карпатськi матем. публ. 2013, Т.5, №2, С.298–304
doi:10.15330/cmp.5.2.298-304

Мулява О.М.[1], Шеремета М.М.[2]

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ДОСТАТНIХ УМОВ НАЛЕЖНОСТI АНАЛIТИЧНИХ ФУНКЦIЙ ДО КЛАСIВ ЗБIЖНОСТI

Добре вiдомо, що якщо тейлоровi коефiцiєнти f_k цiлої функцiї f задовольняють умови $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k \to \infty$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_k|^{k/\varrho} < +\infty$, то f належить до валiронового класу збiжностi. Доведено, що у цьому твердженнi умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ можна замiнити умовою $(l_{k-1}l_{k+1}/l_k^2)|f_k|/|f_{k+1} \nearrow +\infty$, де додатна послiдовнiсть (l_k) така, що $\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \asymp 1$ при $k \to \infty$. Подiбнi результати отримано для iнших класiв збiжностi цiлих та аналiтичних в одиничному крузi функцiй.

Ключовi слова i фрази: цiла функцiя, аналiтична в крузi функцiя, клас збiжностi.

[1] National University of Food Technologies, 68 Volodymyrska str., 01601, Kyiv, Ukraine
[2] Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
E-mail: info@nuft.edu.ua (Мулява О.М.), m_m_sheremeta@list.ru (Шеремета М.М.)

Вступ

Для степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$

з радiусом збiжностi $R[f] \in (0, +\infty)$ i $0 \le r < +\infty$ нехай $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Якщо $R[f] = +\infty$, тобто f — цiла функцiя, то величину $\varrho = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}$ називають її порядком, а за умови $0 < \varrho < +\infty$ належнiсть до валiронового класу збiжностi означають [10] умовою

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^{\varrho+1}} dr < +\infty. \tag{2}$$

З доведеної П.Камсеном [4] теореми про належнiсть цiлого ряду Дiрiхле до класу збiжностi випливає такий результат.

Теорема 1. *Для того, щоб цiла функцiя* (1) *належала до валiронового класу збiжностi необхiдно, а у випадку, коли* $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ *при* $k_0 \le k \to \infty$, *i достатньо, щоб* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_k|^{k/\varrho} < +\infty$.

УДК 517.576
2010 *Mathematics Subject Classification:* 3D15.

Якщо функція f аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, то порядок її зростання переважно вводять за формулою $\varrho^0 = \overline{\lim\limits_{r\uparrow 1}} \dfrac{\ln\ln M(r,f)}{-\ln(1-r)}$, а за умови $0 < \varrho^0 < +\infty$ належність до класу збіжності означають [2] умовою

$$\int_0^1 (1-r)^{\varrho^0-1} \ln^+ M(r,f) dr < +\infty. \tag{3}$$

З доведеної в [2] теореми випливає наступний результат.

Теорема 2. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{D}$ *функція* (1) *належала до означеного умовою* (3) *класу збіжності необхідно, а у випадку, коли* $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow 1$ *при* $k \to \infty$, *і досить, щоб* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\ln^+ |f_k|}{k}\right)^{\varrho^0+1} < +\infty$.

У запропонованій замітці буде показано, що у теоремах 1 і 2 умову неспадання послідовності можна замінити дещо слабшою умовою. Подібну заміну можна здійснити і у випадках узагальнених класів збіжності.

1 Доповнення теорем 1 і 2

Почнемо з цілих функцій.

Теорема 3. *У теоремі 1 умову* $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ *при* $k \to \infty$ *можна замінити умовою* $\dfrac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\dfrac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ *при* $k_0 \le k \to \infty$, *де додатна послідовність* (l_k) *така, що*

$$0 < \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \le \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} < +\infty. \tag{4}$$

Доведення. Нехай $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$. Тоді степеневий ряд

$$D_l^{(1)} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+1}} f_{k+1} z^k$$

називається [3] похідною Гельфонда-Леонтьєва. Якщо $l(z) = e^z$, то $D_l^{(1)} f(z) = f'(z)$. Зауважимо, що не завжди радіус збіжності похідної Гельфонда-Леонтьєва ряду (1) збігається з радіусом збіжності цього ряду, а [5, 6] умова (4) є необхідною і достатньою умовою для того, щоб рівності $R[f] = +\infty$ і $R[D_l^{(1)} f] = +\infty$ були рівносильними. В [6] доведено, що за умови (4) f і $D_l^{(1)} f$ належать до валіронового класу збіжності одночасно. За теоремою 1 для того, щоб $D_l^{(1)} f$ належала до валіронового класу збіжності досить, щоб $\dfrac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\dfrac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{l_k}{l_{k+1}} |f_{k+1}|\right)^{\varrho/k} < +\infty$. З (4) випливає, що остання умова рівносильна умові $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_{k+1}|^{k/\varrho} < +\infty$. Оскільки $f_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $|f_{k+1}|^{\varrho/k} = |f_{k+1}|^{\varrho/(k+1)} |f_{k+1}|^{\varrho/k - \varrho/(k+1)} < |f_{k+1}|^{\varrho/(k+1)}$ для всіх $k \ge k_0$, тобто з умови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_k|^{k/\varrho} < +\infty$ випливає умова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_{k+1}|^{k/\varrho} < +\infty$. Теорему 3 доведено. □

Для аналітичних в одиничному крузі функцій правильна наступна теорема.

Теорема 4. *У теоремі 2 умову* $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow 1$ *при* $k_0 \leq k \to \infty$ *можна замінити умовою* $\dfrac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\dfrac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 1$ *при* $k_0 \leq k \to \infty$*, де додатна послідовність* (l_k) *така, що*

$$0 < \varliminf_{k\to\infty} \frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}} \leq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}} < +\infty. \tag{5}$$

Доведення. В [7] доведено, що за умов (5) аналітична в $\mathbb{D}$ функція (1) та її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(1)}$ належить чи не належить до означеного умовою (3) класу збіжності одночасно. За теоремою 2 для того, щоб $D_l^{(1)}f$ належала до цього класу збіжності досить, щоб $\dfrac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\dfrac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow$ при $k_0 \leq k \to \infty$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}\ln^+\left(\dfrac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|\right)\right)^{\varrho^0+1} < +\infty$. Але з огляду на (5)

$$\frac{1}{k}\ln^+\left(\frac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|\right) \leq \frac{\ln^+|f_k|}{k} + \frac{1}{k}\ln\frac{l_k}{l_{k+1}} + \ln 2 \leq \frac{\ln^+|f_k|}{k} + C\frac{\ln k}{k},$$

де C — додатна стала, і оскільки $\varrho^0 > 0$, то

$$\left(\frac{1}{k}\ln^+\left(\frac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|\right)\right)^{\varrho^0+1} \leq \left(\frac{\ln^+|f_k|}{k}\right)^{\varrho^0+1} + C\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{\varrho^0+1}.$$

Тому остання умова випливає з умови $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\ln^+|f_k|}{k}\right)^{\varrho^0+1} < +\infty$. Теорему 4 доведено. □

2 Узагальнені класи збіжності

Через L^0 позначимо клас таких додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій α, що $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. З наведеної у [8] теореми 1 випливає наступний результат.

Теорема 5. *Нехай* α *— вгнута неперервно диференційовна на* $[x_0, +\infty)$ *функція,* $\alpha(e^x) \in L^0$, $\alpha'(x+O(1)) \asymp \alpha'(x)$ *при* $x \to +\infty$*, а функція* $\beta \in l^0$ *така, що* $x\dfrac{\beta'(x)}{\beta(x)} \geq h > 0$ *для* $x \geq x_0$ *і* $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}dx < +\infty$*. Тоді для того, щоб для цілої функції* (1)

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(\ln M(r,f))}{r\beta(\ln r)}dr < +\infty \tag{6}$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(|f_k|/|f_{k+1})$ *для* $k \geq k_0$ *є неспадною, і досить, щоб*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha'(k)\beta_1\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|f_k|}\right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{\infty}\frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}. \tag{7}$$

З іншого боку, в [6] доведено, що якщо $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$, то за умови (4) ціла функція (1) та її похідна Гельфонда-Леонтьєва належать чи не належать до означеного умовою (6) узагальненого класу збіжності одночасно. За теоремою 5 для того, щоб (1) належала до цього класу досить, щоб $\dfrac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\dfrac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 0$ при $k_0 \leq k \to \infty$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha'(k)\beta_1\left(\frac{1}{k}\ln\frac{l_{k+1}}{l_k|f_{k+1}|}\right) < +\infty. \tag{8}$$

Оскільки $\beta \in L^0$, то $\beta_1((1+o(1))x) = (1+o(1))\beta_1(x)$ при $x \to +\infty$, і з огляду на умову (4) при $k \to \infty$

$$\beta_1\left(\frac{1}{k}\ln\frac{l_{k+1}}{l_k|f_{k+1}|}\right) = \beta_1\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|f_{k+1}|} + O(1)\right) = (1+o(1))\left(\frac{1}{k+1}\ln\frac{1}{|f_{k+1}|}\right),$$

то з (7) випливає (8), і, отже, доведено наступну теорему.

Теорема 6. *У теоремі 5 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \to \infty$ можна замінити умовою $\dfrac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\dfrac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \to \infty$, де послідовність (l_k) задовольняє умову* (4).

Для аналітичних в одиничному крузі функцій наслідком з теореми 2 з [8] є наступний результат.

Теорема 7. *Нехай функція α така, як у теоремі 5, а функція $\beta \in L^0$ задовольняє умови $x\dfrac{\beta'(x)}{\beta(x)} - 2 \geq h > 0$ для $x \geq x_0$ і $\int_{x_0}^{\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}dx < +\infty$. Тоді для того, щоб для аналітичної в одиничному крузі функції* (1)

$$\int_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln M_f(r))}{(1-r)^2\beta(1/(1-r))}dr < +\infty \tag{9}$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(|f_{k-1}/f_k|)$ для $k \geq k_0$ є неспадною, і досить, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha'(k)\beta_1\left(\frac{k}{\ln^+|f_k|}\right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{\infty}\frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}. \tag{10}$$

З іншого боку, з доведеної в [6] теореми 5 неважко отримати, що якщо функції α і β задовольняють умови теореми 7, а

$$0 < p_1 \leq \frac{l_{k+1}}{l_k} \leq p_2 < +\infty, \tag{11}$$

то аналітична в $\mathbb{D}$ функція f та її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(1)}(f)$ належать чи не належать до означеного умовою (9) узагальненого $\alpha\beta$-класу збіжності. За теоремою 7 для того, щоб $D_l^{(1)}f$ належала до цього класу досить, щоб$\dfrac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\dfrac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 0$ для $k_0 \leq k \to \infty$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha'(k)\beta_1\left(\frac{k}{\ln^+((l_k/l_{k+1})|f_{k+1})|)}\right) < +\infty. \tag{12}$$

Але з огляду на (11) маємо $\ln^+((l_k/l_{k+1})|f_{k+1})|) = \ln^+|f_{k+1}| + O(1)$ при $k \to \infty$ і, оскільки $\beta_1((1+o(1))x) = (1+o(1))\beta_1(x)$ при $x \to +\infty$, то

$$\beta_1\left(\frac{k}{\ln^+((l_k/l_{k+1})|f_{k+1})|)}\right) = (1+o(1))\beta_1\left(\frac{k}{\ln^+|f_{k+1}|}\right)$$

при $k \to \infty$. Тому з (10) випливає (12), і, отже, доведено наступну теорему.

Теорема 8. *У теоремі 7 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$, де додатна послідовність (l_k) задовольняє умову* (11).

3 Ф-КЛАС ЗБІЖНОСТІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Через Ω позначимо клас таких додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ, що похідна Φ' є додатною, неперервною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Як в [1] будемо говорити, що ціла функція (1) належить до Φ-класу збіжності, якщо

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\Phi'(\ln r)\ln M(r,f)}{r\Phi(\ln r)} dr < +\infty. \tag{13}$$

З доведеної в [9] теореми 1 випливає наступний результат.

Теорема 9. *Нехай $\Phi \in \Omega$ і*

$$0 < h \le \frac{\Phi''(x)\Phi(x)}{(\Phi'(x))^2} \le H < +\infty, \quad x \ge x_0. \tag{14}$$

Тоді для того, щоб ціла функція (1) *належала до Φ-збіжності, необхідно, а у випадку, коли послідовність $(|f_{k-1}/f_k|)$ є неспадною для $k_0 \le k \ge k_0$, і досить, щоб*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi'\left(\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{1}{|f_k|}\right)} < +\infty. \tag{15}$$

З іншого боку, в [6] доведено, що якщо

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi'(x)\ln\Phi'(x)}{\Phi^2(x)} dx < +\infty, \tag{16}$$

а послідовність (l_k) задовольняє умову (11), то ціла функція f та її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D^{(1)}$ належать чи не належать до Φ-класу одночасно.

Зауважимо, що з (14) випливає (16), бо, інтегруючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi'(x)\ln\Phi'(x)}{\Phi^2(x)} dx &= \int_{x_0}^{\infty} \ln\Phi'(x) d\left(-\frac{1}{\Phi(x)}\right)\\ &\le \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)\Phi(x)} dx + \text{const} \le \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi'(x)}{\Phi^2(x)} dx + \text{const}.\end{aligned}$$

Тому за теоремою 9 для того, щоб $D_l^{(1)} f$ належала до Ф-класу збіжності, досить, щоб $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 0$ при $k_0 \le k \to \infty$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi'\left(\frac{1}{k}\ln\frac{l_{k+1}}{l_k|f_{k+1})|}\right)} < +\infty. \tag{17}$$

Але з огляду на (11) маємо $\frac{1}{k}\ln\frac{l_{k+1}}{l_k|f_{k+1})|} = \frac{1}{k}\left(\ln\frac{1}{|f_{k+1}|} + O(1)\right) = \frac{1+o(1)}{k+1}\ln\frac{1}{|f_{k+1}|}$ при $k_0 \le k \to \infty$. Тому, якщо $\Phi' \in L^0$, то з (5) випливає (17), і, отже, доведено наступну теорему.

Теорема 10. *Якщо $\Phi' \in L^0$, то у теоремі 9 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$, де додатна послідовність (l_k) задовольняє умову* (11).

4 Зауваження

Покажемо, що існують такі послідовності (f_k) і (l_k), що умова $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ не виконується, але $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}\frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ і f належить, наприклад, до валіронового класу збіжності.

Нехай (k_n) — досить швидко зростаюча послідовність натуральних чисел, наприклад, $k_{n+1} - k_n \ge 5$, а $f_k = \left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right)^k$ для $2 \le k \ne k_n$ і $f_{k_n} = \sqrt{\frac{k_n^2-1}{k_n^2} f_{k_{n-1}} f_{k_{n+1}}}$. За формулою Адамара ціла функція f з такими коефіцієнтами має порядок $\varrho = 1$. Неважко перевірити, що $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^{1/k} < +\infty$. Оскільки $\frac{f_{k_n}}{f_{k_{n+1}}} = \frac{k_n^2-1}{k_n^2}\frac{f_{k_{n-1}}}{f_{k_n}}$, то умова $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ не виконується і використати теорему 1 для того, щоб показати, що f належить до валіронового класу збіжності з $\varrho = 1$ неможливо. Проте, якщо виберемо $l_k = 1/k!$, то умова (4) виконується, $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} = \frac{k}{k+1}$, і неважко перевірити, що $\frac{k|f_k|}{(k+1)|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$, тобто за теоремою 3 f належить до валіронового класу збіжності з $\varrho = 1$.

References

[1] Filevych P.V., Sheremeta M.M. *On a convergence class for entire functions*. Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz **53** Ser. Rech. Deform. 2003, **40**, 5–16.

[2] Gal' Yu.M., Sheremeta M.M. *Belonging of analytic functions to a convergence class*. Dokl. AN Ukr. SSR, Ser. A 1985, **7**, 11–14. (in Russian)

[3] Gelfond A.O., Leont'ev A.F. *On a generalisation of Fourier series*. Matem. Sbornik 1957, **23** (3), 477–500. (in Russian)

[4] Kamthan P.K. *A theorem of step functions*. Istambul Univ. Fen. Fac. Mecm. 1963, **28**, 65–69.

[5] Luhova L.L., Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Properties of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions*. Ufa Math. J. 2010, **2** (32), 90–101. (in Russian)

[6] Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *On belonging of Gelfond-Leont'ev derivative to a convergence class*. Sci. Bull. Chernivtsi Univ. 2009, **485**, 71–77. (in Ukrainian)

[7] Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Belonging to convergence classes of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions*. Carpathian Math. Publ. 2012, **4** (1), 11–115. (in Ukrainian)

[8] Mulyava O.M. *Convergence classes in the theory of Dirichlet series*. Dopovidi NAN Ukraine, ser. A 1999, **2**, 35–39. (in Ukrainian)

[9] Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *On a convergence class for Dirichlet series*. Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz **50** Ser. Rech. Deform. 2000, **30**, 23–30.

[10] Valiron G. General theory of integral functions. Toulouse, 1923.

Надійшло 29.08.2013

Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Remarks on sufficient conditions of belonging of analytic functions to convergence classes*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 298–304.

It is well known that if Taylor's coefficients f_n of an entire functions f satisfy the conditions $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ as $k \to \infty$ and $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|^{\varrho/k} < +\infty$ then f belongs to Valiron convergence class. It is proved that in the statement the condition $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ one can replace on the condition $l_{k-1}l_{k+1}l_k^{-2}|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$, where (l_k) is a positive sequence such that $\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \asymp 1$ as $k \to \infty$. Analogous problems are solved for another convergence classes of entire and analytic functions in the unit disk.

Key words and phrases: entire function, analytic function in a disk, convergence class.

Мулява О.М.,Шеремета М.Н. *Замечания о достаточных условиях принадлежности аналитических функций классам сходимости* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 298–304.

Хорошо известно, что если тейлоровские коэффициенты f_n целой функции f удовлетворяют условиям $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k \to \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|^{\varrho/k} < +\infty$, то f принадлежит валироновскому классу сходимости. Доказано, что в этом утверждении условие $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ можно заменить условием $l_{k-1}l_{k+1}l_k^{-2}|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$, где положительная последовательность (l_k) такая, что $\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \asymp 1$ при $k \to \infty$. Аналогичные задачи решены для других классов сходимости целых аналитических в единичном круге функций.

Ключевые слова и фразы: целая функция, аналитическая в круге функция, класс сходимости.