ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 180–186
doi:10.15330/cmp.5.2.180-186

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №2, С.180–186

Бігун Г.С.[1], Осипчук М.М.[2]

ДИФУЗІЇ, ПОРОДЖЕНІ ВІНЕРОВИМ ПРОЦЕСОМ

У роботі розглядається питання можливості побудови дифузійного процесу в $\mathbb{R}^m$ шляхом перетворення вінерового процесу. Застосовуються гладке перетворення фазового простору та випадкова заміна часу з допомогою адитивного функціоналу інтегрального типу.

Ключові слова і фрази: дифузійний процес, марківський процес, вінерів процес, перетворення фазового простору, випадкова заміна часу.

[1] Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
[2] Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: freischunhaluna@yandex.ru (Бігун Г.С.), myosyp@gmail.com (Осипчук М.М.)

Вступ

Нехай $(\xi(t))_{t\geq 0}$ — строго марківський процес зі значеннями в $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B})$ відносно деякого потоку σ-алгебр $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$, де $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^m$. Вважатимемо, що процес ξ однорідний і $P(t, x, \Gamma)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ — його ймовірність переходу. Такий процес називається дифузійним, якщо виконуються наступні умови. Насамперед, при всіх $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(t, x, dy) = 0.$$

Крім того, існують такі функції $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ та $b : \mathbb{R}^m \to L_s^+(\mathbb{R}^m)$ (тут $L_s^+(\mathbb{R}^m)$ — множина симетричних додатно визначених квадратичних матриць розміру $m \times m$), що при всіх $x, \theta \in \mathbb{R}^m$ і деякому $\varepsilon > 0$ мають місце рівності:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x, \theta) P(t, x, dy) = (a(x), \theta), \quad \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x, \theta)^2 P(t, x, dy) = (b(x)\theta, \theta),$$

де $(\cdot, \cdot)$ означає скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$. При цьому, функцію $a(x)$ називають вектором переносу, функцію $b(x)$ — матрицею (оператором) дифузії, а їх сукупність — локальними характеристиками дифузійного процесу $\xi(t)$. Є значна бібліографія, присвячена дифузійним процесам, починаючи від роботи А. М. Колмогорова [1]. Різноманітні питання теорії дифузійних процесів розглядались в роботах М. І. Портенка [2, 3, 4].

Якщо $a(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv I$ (I — одинична матриця), то $\xi(t)$ є вінеровим процесом, який далі позначатимемо $w(t)$.

УДК 519.217.4+519.217.6
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60J60.

Нехай задана деяка вимірна функція $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Випадковий процес $f(\xi(t))$ є процесом, одержаним з $\xi(t)$ шляхом перетворення фазового простору. При певних умовах на f випадковий процес $\eta(t)$ є процесом Маркова.

Перетворення часу конструюватимемо наступним чином. Задавши додатну вимірну функцію $v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, розглянемо набір випадкових величин

$$\tau_t = \inf\left\{s \geq 0 : \int_0^s v(\xi(u))\,du \geq t\right\}.$$

Випадковий процес $(\xi(\tau_t))_{t\geq 0}$ є марківським відносно потоку σ-алгебр $\mathfrak{F}_{\tau_t}$ і називатимемо його таким, що одержаний з процесу $\xi(t)$ шляхом випадкової заміни часу. Перетворення марківських процесів детально описані в монографії Є. Б. Динкіна [5]

Означення. *Будемо казати, що однорідний дифузійний процес $\xi(t)_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}^m$ породжений вінеровим, якщо існує такий вінерів процес $(w(t))_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}^m$, що $\xi(t)$ може бути одержаний з $w(t)$ послідовним застосуванням до останнього перетворень фазового простору та випадкової заміни часу в розумінні збіжності локальних характеристик одержаного процесу та процесу $\xi(t)$.*

Відомо (див., наприклад, [4]), що в одновимірному випадку ($m = 1$) за умови локальної інтегровності функції $b^{-1}(x)a(x)$ відповідний дифузійний процес $\xi(t)$ породжений вінеровим.

Метою даної роботи є вивчення умов породжуваності дифузійних процесів вінеровим у випадках $m \geq 2$.

1 Перетворення простору та випадкова заміна часу

1.1 Перетворення фазового простору

Нехай $(\xi(t))_{t\geq 0}$ — дифузійний процес з вектором переносу $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^m}$ та матрицею дифузії $(b(x))_{x\in\mathbb{R}^m}$, а $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — двічі неперервно диференційовна взаємно однозначна функція.

Позначимо через $\mathfrak{U}_\xi$, $\mathfrak{U}_\eta$ характеристичні оператори процесів $\xi(t)$ та $\eta(t) = f(\xi(t))$ відповідно. Для кожної двічі неперервно диференційовної функції $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (див. [5]):

$$(\mathfrak{U}_\xi\varphi)(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(b(x)\nabla^2\varphi(x)) + (a(x))^T\nabla\varphi(x),$$

де $\nabla\varphi$ — ґрадієнт функції φ, $\nabla^2\varphi$ — матриця других похідних функції φ, символ Sp означає слід — суму діагональних елементів — матриці. Тут і далі домовимось вважати всі вектори стовпчиками.

Для деякого $x \in \mathbb{R}^m$ розглянемо послідовність околів U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ точки x, яка збігається до x, що позначатимемо $U_n \downarrow x,\ n \to \infty$. Тоді з неперервності та взаємно однозначності функції f випливає, що $f^{-1}(U_n) \downarrow f^{-1}(x),\ n \to \infty$, де, як звичайно, $f^{-1}(U)$ означає прообраз множини $U \subset \mathbb{R}^m$ при перетворенні f.

Нехай τ_n — момент першого виходу дифузійного процесу $\xi(t)$ з околу $f^{-1}(U_n)$ точки $f^{-1}(x)$. Якщо $\widehat{\tau}_n$ — момент першого виходу марківського процесу $\eta(t) = f(\xi(t))$ з околу U_n точки x, то, очевидно, $\widehat{\tau}_n = \tau_n$.

За означенням $(\mathfrak{U}_\xi\varphi)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbf{E}_x\varphi(\xi(\tau_n)) - \varphi(x)}{\mathbf{E}_x\tau_n}$, де $\mathbf{E}_x$ — символ умовного математичного сподівання при умові $\xi(0) = x$.

Для процесу $\eta(t)$ маємо

$$(\mathfrak{U}_\eta\varphi)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}_x\varphi(f(\xi(\widehat{\tau}_n))) - \varphi(x)}{\mathbf{E}_x\widehat{\tau}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}_{f^{-1}(x)}\varphi(f(\xi(\tau_n))) - \varphi(x)}{\mathbf{E}_{f^{-1}(x)}\tau_n} = (\mathfrak{U}_\xi\varphi(f))(f^{-1}(x))$$

Безпосередні обчислення дозволяють стверджувати, що для кожної двічі диференційовної функції φ

$$(\mathfrak{U}_\eta\varphi)(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\Big[((\nabla f)^T\, b\, \nabla f)(f^{-1}(x))\nabla^2\varphi(x)\Big] + \Big[(\nabla f)^T a + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,(b\,\nabla^2 f)\Big](f^{-1}(x))\nabla\varphi(x). \tag{1}$$

Зауважимо, що ∇f є матрицею ґрадієнтів (складених у стовпчики) елементів векторної функції f, а $\nabla^2 f$ — набір (вектор) матриць других похідних елементів цієї ж функції. Саме на ці матриці множиться матриця b в другому доданку формули (1) і обчислюється слід одержаних матриць.

Отже, випадковий процес $\eta(t)$ є дифузійним з вектором переносу

$$\Big[(\nabla f)^T a + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,(b\,\nabla^2 f)\Big]\,(f^{-1}(x))$$

та матрицею дифузії

$$\Big[(\nabla f)^T\, b\, \nabla f\Big]\,(f^{-1}(x)).$$

Застосуємо тепер описане перетворення до вінерового процесу $w(t)$. Для нього, як уже згадувалось, $a(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv I$. Тоді характеристичний оператор процесу $\eta(t) = f(w(t))$ матиме вигляд

$$(\mathfrak{U}_\eta\varphi)(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\Big[((\nabla f)^T\nabla f)(f^{-1}(x))\nabla^2\varphi(x)\Big] + \frac{1}{2}(\Delta f)^T(f^{-1}(x))\nabla\varphi(x), \tag{2}$$

де Δf — результат (вектор) дії оператора Лапласа на елементи векторної функції f.

1.2 Випадкова заміна часу

Розглянемо адитивний функціонал $\varphi_t = \int_0^t v(\xi(s))\,ds$ від дифузійного процесу $\xi(t)$, де $(v(x))_{x\in\mathbb{R}^m}$ — додатна неперервна функція. Побудуємо новий процес $\eta(t) = \xi(\tau_t)$, де $\tau_t = \inf\,\{s \geq 0 : \varphi_s \geq t\}$. Відомо [5], що між характеристичними операторами процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ існує зв'язок

$$(\mathfrak{U}_\eta\varphi)(x) = \frac{1}{v(x)}(\mathfrak{U}_\xi\varphi)(x), \tag{3}$$

причому області визначення обох операторів співпадають.

Таким чином, якщо дифузійний процес $\xi(t)$ має локальні характеристики $a(x)$ та $b(x)$, то процес $\eta(t)$ є дифузійним з вектором переносу $\dfrac{1}{v(x)}a(x)$ та матрицею дифузії $\dfrac{1}{v(x)}b(x)$.

2 Дифузійні процеси, породжені вінеровим

Нехай $(w(t))_{t\geq 0}$ — деякий вінерів процес в $\mathbb{R}^m$. Розглянемо перетворення простору $\mathbb{R}^m$ з допомогою деякої взаємно однозначної двічі неперервно диференційовної функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. В розділі 1 встановлено, що $\eta(t) = f(w(t))$, $t \geq 0$, є однорідним дифузійним процесом.

Перетворення часу в одержаному процесі $\eta(t)$ здійснюємо шляхом випадкової заміни часу з допомогою адитивного функціоналу $\int_0^s v^2(\eta(u))\,du$ з деякою числовою неперервною додатною функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}^m}$. Тут вибрано функцію v^2 для зручності подальших викладок.

Як встановлено в розділі 1 (див. (2), (3)) локальними характеристиками одержаного дифузійного процесу є вектор переносу з елементами $\frac{1}{2}(\Delta f_j)(f^{-1})\frac{1}{v^2}$ та матриця дифузії, яка має елементи $\left[(\nabla f_i)^T \nabla f_j\right](f^{-1})\frac{1}{v^2}$, де $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$.

Нехай задано функції $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ і $b : \mathbb{R}^m \to L_s^+(\mathbb{R}^m)$. Виникає питання — чи можна знайти такі функції f та v, для яких виконуються рівності ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$):

$$a_j(x) = \frac{1}{2}(\Delta f_j)(f^{-1}(x))\frac{1}{v^2(x)}, \qquad b_{ij}(x) = \left[\nabla f_i (\nabla f_j)^T\right](f^{-1}(x))\frac{1}{v^2(x)}\ ? \tag{4}$$

Позначимо через $(\sigma(x))_{x\in\mathbb{R}^m}$ матрицю, для якої $\sigma^T\sigma = b$. Тоді система рівнянь (4) в матричній формі запишеться наступним чином:

$$\Delta f = 2a(f)v^2(f), \tag{5}$$

$$\nabla f = \sigma(f)v(f). \tag{6}$$

Вона задає зв'язок між невідомими функціями f і v та локальними характеристиками породженого вінеровим процесу: вектором переносу a і матрицею дифузії $b = \sigma^T\sigma$.

При $m = 1$ таку систему рівнянь розв'язати відносно f і v легко. Після нескладних перетворень одержуємо

$$f^{-1}(x) = \int_0^x \exp\Big\{-2\int_0^y \frac{a(z)}{b(z)}\,dz\Big\}\,dy, \qquad v(x) = \frac{\exp\Big\{-2\int_0^x \frac{a(z)}{b(z)}\,dz\Big\}}{\sigma(x)}.$$

Дослідимо існування розв'язків системи (5), (6) у випадку $m \geq 2$.

Для початку припустимо, що елементи матриці $\sigma(x)$ є принаймні диференційовними. Необхідною умовою існування розв'язку рівняння (6) є потенціальність векторних полів, що є стовпчиками матриці $\sigma(f)v(f)$ (нагадаємо, що $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$), тобто, для всіх $1 \leq i < k \leq m$, $1 \leq j \leq m$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}[\sigma_{ij}(f)v(f)] = \frac{\partial}{\partial x_i}[\sigma_{kj}(f)v(f)].$$

Звідси, з врахуванням (6), одержуємо, що при всіх $1 \leq i < k \leq m$, $1 \leq j \leq m$

$$\sum_l \left(\sigma_{kj}\sigma_{il} - \sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)\frac{\partial \ln v}{\partial u_l} = \sum_l \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_l}\sigma_{kl} - \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial u_l}\sigma_{il}\right), \tag{7}$$

де вважаємо $\sigma = \sigma(u)$, $v = v(u)$ ($u \in \mathbb{R}^m$).

Система рівнянь (7) є лінійною відносно $\frac{\partial \ln v}{\partial u_l}$ і має $\frac{m^2(m-1)}{2}$ рівнянь та m невідомих.

Врахувавши рівність (6) та те, що $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$, з (5) одержуємо наступну систему рівнянь для невідомих $\frac{\partial \ln v}{\partial u_l}$, $1 \le l \le m$:

$$\sum_l \sum_i \sigma_{ij}\sigma_{il} \frac{\partial \ln v}{\partial u_l} = 2a_j - \sum_l \sum_i \sigma_{il} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_l},\ 1 \le j \le m. \tag{8}$$

Основна матриця системи (8) невироджена, оскільки $\sum_i \sigma_{ij}\sigma_{il} = (\sigma^T\sigma)_{jl} = b_{jl}$. Тому (8) завжди має єдиний розв'язок. Остаточно маємо, що функція v повинна задовольняти системи рівнянь (7) і (8).

Зауваження. *Кількість невідомих та кількість рівнянь в системі* (7) *рівні тільки при* $m = 2$. *Крім того, ця система взагалі відсутня, якщо* $m = 1$.

Випадок $m \ge 3$ *не дозволяє надіятись на існування таких функцій* f *і* v, *щоб дифузійний процес з їх допомогою був одержаний з вінерового.*

Вже при $m = 3$ *система рівнянь* (7) *містить дев'ять рівнянь з трьома невідомими. Крім того ранг розширеної матриці цієї системи дорівнює 4, якщо ж тільки система не є тотожно однорідною. Це можливо, наприклад, за умови сталої матриці дифузії. Але тоді* $v(x) \equiv const$ *і з системи* (8) *одержуємо, що* $a(x) \equiv 0$.

Тому зосередимся на розгляді випадку $m = 2$. Основна матриця системи (7) при цьому має вигляд $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$, де $\delta = \det \sigma \ne 0$, бо $b = \sigma^T\sigma \in L_s^+(\mathbb{R}^2)$. Тому система (7) має єдиний розв'язок. Цей розв'язок повинен бути розв'язком системи (8), яка, як зазначалось вище, завжди має єдиний розв'язок. Звідси одержуємо умови існування спільного розв'язку систем (7) та (8):

$$a_j(u) = \frac{1}{2}\Big(\sum_l \sum_i \sigma_{ij}\sigma_{il}\alpha_l + \sum_i \sum_l \sigma_{il} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_l} \Big)(u),\ \ 1 \le j \le m,\ u \in \mathbb{R}^m,\ \ \text{де } \alpha(u) = \nabla \ln v(u). \tag{9}$$

Припустивши існування других похідних елементів матриці $\sigma(x)$, запишемо умову існування функції v, для якої виконувалася б рівність (9):

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\alpha_2 = \frac{\partial}{\partial u_2}\alpha_1. \tag{10}$$

Зауважимо, що із системи (7) випливають рівності

$$\alpha_1 = \frac{1}{\delta}\left(\sigma_{22}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial u_2} - \sigma_{12}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial u_2} + \sigma_{21}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial u_1} - \sigma_{11}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial u_1} \right),$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\delta}\left(-\sigma_{22}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial u_2} + \sigma_{12}\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial u_2} - \sigma_{21}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial u_1} + \sigma_{11}\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial u_1} \right),$$

які після деяких перетворень можна записати у вигляді

$$\alpha = \sigma^{-1}\operatorname{div}(\sigma) - \nabla \ln \delta, \tag{11}$$

де $\operatorname{div}(\sigma)$ означає стовпчик дівергенцій рядків матриці σ. При виконанні умови (10) знайдеться така єдина функція $v(u) = \exp\{V(u)\}$, що задовольняє системи рівнянь (7) і (8). Тут V — потенціал (потенціального згідно (10)) векторного поля α.

Нехай надалі виконується умова (10) з α, що задається рівністю (11). Тоді з рівняння (6), врахувавши рівність $(\nabla f)(f^{-1}) = (\nabla f^{-1})^{-1}$, яка доводиться безпосереднім обчисленням, одержимо

$$\nabla f^{-1}(x) = \frac{1}{v(x)}(\sigma(x))^{-1}. \tag{12}$$

Умовою існування розв'язку рівняння (12) є, як не складно перевірити, рівність (11). Отже, можемо записати $f^{-1}(x) = F(x)$, де $F_j(x)$ $(j = 1, 2)$ — потенціал j-ого стовпчика матриці $\frac{1}{v}\sigma^{-1}$.

Залишилось зауважити, що за побудовою функція f задовольняє крім рівняння (6) ще і рівняння (5). Таким чином, ми можемо сформулювати основний результат цієї роботи.

Теорема. *Нехай дифузійний процес $(\xi(t))_{t\geq 0}$ має вектор переносу $a(x)$ та матрицю дифузії $b(x) = (\sigma(x))^T\sigma(x)$ $(x \in \mathbb{R}^2)$, причому елементи матриці $\sigma(x)$ є двічі диференційовними функціями. Якщо функції $a(x)$ і $\sigma(x)$ пов'язані співвідношенням* (9) *та має місце умова* (10) *з врахуванням* (11)*, то випадковий процес $\xi(t)$ є породженим вінеровим процесом.*

Розглянемо приклад дифузійного процесу, для якого не складно знайти відповідні перетворення вінерового процесу.

Приклад. *Нехай матриця дифузії діагональна, тобто $b(x,y) = \begin{pmatrix} r^2(x,y) & 0 \\ 0 & s^2(x,y) \end{pmatrix}$, де r і s — додатні двічі диференційовні функції. Тоді умова* (10) *має вигляд*

$$\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y} - \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\frac{1}{r^2} = \left(s\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y} - \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial y}\right)\frac{1}{s^2}$$

або ж $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\ln\frac{r}{s} = 0$, звідки одержуємо $\ln\frac{r}{s} = \varphi(x) + \psi(y)$, де $\varphi(x)$ і $\psi(y)$ — довільні диференційовні функції, або $\frac{r(x,y)}{s(x,y)} = e^{\varphi(x)}e^{\psi(y)}$. Отже, матриця дифузії може бути записана у вигляді

$$b(x,y) = s^2(x,y)\begin{pmatrix} e^{2\varphi(x)}e^{2\psi(y)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Із співвідношення (9) *випливає, що вектор переносу повинен дорівнювати*

$$a(x,y) = \frac{1}{2}s^2(x,y)\begin{pmatrix} e^{2(\varphi(x)+\psi(y))}\varphi'(x) \\ -\psi'(y) \end{pmatrix}.$$

При таких локальних характеристиках даного дифузійного процесу одержуємо представлення функції v

$$\nabla \ln v(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}\ln s(x,y) \\ -\frac{\partial}{\partial y}\ln s(x,y) - \psi'(y) \end{pmatrix}.$$

Тому $\ln v(x,y) = -\ln s(x,y) - \psi(y)$ і $v(x,y) = \frac{e^{-\psi(y)}}{s(x,y)}$.

Рівняння для функції f тепер приймає вигляд $\nabla f^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-\varphi(x)} & 0 \\ 0 & e^{\psi(y)} \end{pmatrix}$. *Звідси* $\left(f^{-1}(x,y)\right)^T = \left(\int_0^x e^{-\varphi(u)}du + C, \quad \int_0^y e^{\psi(u)}du + K \right)$, *де C і K — деякі сталі. Через інваріантність вінерового процесу відносно зсуву, можемо взяти $C = K = 0$. Таким чином функція f задовольняє систему рівнянь*

$$\int_0^{f_1(x,y)} e^{-\varphi(u)}du = x, \quad \int_0^{f_2(x,y)} e^{\psi(u)}du = y \ . \tag{13}$$

Зауважимо, що із (13) *випливає правильність наступних рівностей* $f_1(x,y) = g_1(x)$, $f_2(x,y) = g_2(y)$. *Тобто перетворення фазового простору вінерового процесу потрібно здійснювати покоординатно. Крім того легко зрозуміти, що* $xg_1(x) > 0$, $yg_2(y) > 0$ *при всіх* $x, y \in R \setminus \{0\}$, *а* $g_1(0) = g_2(0) = 0$.

References

[1] Kolmogorov A.N. *On analytical methods in probability theory.* Uspekhi Mat. Nauk 1938, **5**, 5–41. (in Russian)

[2] Portenko N.I. Generalized diffusion processes. In: Translations of Mathematical Monographs, **83**. Amer. Math. Soc., 1990.

[3] Portenko M.I. Diffusion processes in media with membranes. In: Samoilenko A.M. (Ed.) Proc. Inst. Math., **10**. Institute of Mathematics of NAS of Ukarine, Kyiv, 1995. (in Ukrainian)

[4] Al Farah H., Portenko M. Limit theorem for the number of level crossings of a fixed weakly convergent sequence of diffusion processes. Institute of mathematics of NAS of Ukarine, Kyiv, 2007. (in Ukrainian)

[5] Dynkin E.B. Markov Processes. Springer, Berlin, Heidelberg, 1965.

Надійшло 28.04.2013

Bigun G.S., Osypchuk M.M. *Diffusions generated by the Wiener process*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 180–186.

The article concerns the possibility of making a diffusion process in $\mathbb{R}^m$ by converting the Wiener process. Here we apply a smooth transformation of phase space and random time substitution with the help of additive functional of integral type.

Key words and phrases: diffusion process, Markov process, Wiener process, the transformation of the phase space, random replacement time.

Бигун Г.С., Осипчук М.М. *Диффузии, порожденные винеровским процессом* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 180–186.

В работе рассматривается вопрос возможности построения диффузионного процесса в $\mathbb{R}^m$ путем преобразования винеровскового процесса. Применяются гладкое преобразование фазового пространства и случайная замена времени с помощью аддитивного функционала интегрального типа.

Ключевые слова и фразы: диффузионный процесс, марковский процесс, винеровский процесс, преобразование фазового пространства, случайная замена времени.