Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Т. П. Гой, О. В. Махней

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
спеціальностей
111 Математика, 113 Прикладна математика

Івано-Франківськ
2021

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів спеціальностей «математика», «прикладна математика» (протокол № 1 від 28 серпня 2021 року).

Рецензенти:

Шарин С. В., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника,

Дмитришин М. І., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Гой Т. П., Махней О. В.

Г59 Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2021. 357 с.

У посібнику викладено основи теорії звичайних диференціальних рівнянь, а також деякі споріднені питання (рівняння з частинними похідними першого порядку, основи стійкості розв'язків рівнянь). Кожна тема супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування. Наведено також приклади застосування математичного пакета Maple для інтегрування диференціальних рівнянь.

Для студентів спеціальностей «математика», «прикладна математика». Може бути корисним для студентів природничих та інженерно-технічних спеціальностей.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовують у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні рівняння» займає чільне місце у підготовці фахівців з математики, прикладної математики тощо.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних рівнянь для здобувачів вищої освіти спеціальностей «математика», «прикладна математика», але може бути використаний також студентами інженерно-технічних закладів вищої освіти.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 24 лекцій, які умовно можна поділити на 5 розділів: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції, відповідного практичного заняття або як матеріал для самостійної роботи.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом $\blacksquare$, але у тих випадках, де було ймовірним «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу чи задачі.

Знак ► означає завершення доведення теореми.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які у поєднанні з іншими збірниками можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми. Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У додатках до розділів для майже всіх розв'язаних у відповідних темах прикладів наводяться їх розв'язання з допомогою пакета символьних обчислень Maple. З основами роботи з ним читач може ознайомитись у додатку 6.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

Розділ 1
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння та диференціальні моделі

План

1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання.
2. Основні означення й поняття.
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих.

1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання. Досліджуючи різноманітні фізичні явища, технологічні процеси у багатьох галузях науки і техніки, деякі процеси, які виникають в економіці, екології та інших соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність між величинами, що описують певний процес чи явище. Однак у багатьох випадках можна виявити функціональну залежність між визначальними характеристиками процесу (функціями), швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та/або їхні похідні. Такі рівняння називають ***диференціальними***, а знаходження невідомої функції (розв'язку) — ***інтегруванням*** диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння, одержане у процесі дослідження деякого реального явища або процесу, називають ***диференціальною моделлю*** цього явища, процесу. Диференціальні моделі називають ще ***динамічними математичними моделями***. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться також похідні шуканих залежностей, наприклад, швидкості, прискорення та ін.

Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища і процеси, дають можливість установити якісні та кількісні характеристики їхніх станів, з використанням моделей можна описати механізм розвитку процесу, а також передбачити його подальший розвиток без натуральних експериментів, проведення яких часто є надто дорогим або просто неможливим.

Диференціальні моделі є важливою складовою математичного моделювання, яке включає в себе не тільки побудову і дослідження математичних моделей, але й створення обчислювальних алгоритмів і програм, що реалізують ці моделі на електронно-обчислювальних машинах.

У процесі побудови диференціальних моделей важливе значення має знання законів тієї області науки, з якою пов'язана природа задачі, що вивчається. Наприклад, у механіці це може бути другий закон Ньютона[1)] ($F = ma$, де m — маса тіла, a — прискорення руху тіла, F — сума сил, що діють на тіло); у електротехніці — закон Кірхгофа (алгебрична сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю); у хімії — закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу) тощо.

Питання про відповідність математичної моделі й реального явища вивчається на основі аналізу результатів досліду та їх порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння[2)].

Розглянемо декілька прикладних задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

Задача 1. *Знайти закон зростання інформаційних потоків у науці* (*зростання кількості наукових публікацій*), *якщо відомо*, *що швидкість зростання прямо пропорційна досягнутому рівню кількості публікацій. Визначити*, *за який час*

[1)] Бібліографічні дані про вчених, прізвища яких зустрічаються у посібнику, можна знайти на с. 347–351.

[2)] Детальніше про диференціальні моделі та методику їх складання йтиметься в лекції 9.

кількість публікацій подвоїться порівняно з початковою кількістю, якщо відносна швидкість зростання складає 7%.

Розв'язання. Нехай $y(t)$ — кількість публікацій у момент часу t, а y_0 — початкова кількість публікацій, тобто $y(0) = y_0$. Швидкість зростання інформаційних потоків як швидкість зміни функції є похідною цієї функції. Отже, закон зростання інформаційних потоків можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$y'(t) = k\,y(t), \tag{1.1}$$

де $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності, що характеризує відгуки на публікації у певній галузі знань.

Диференціальне рівняння (1.1) разом з умовою $y(0) = y_0$ є математичною моделлю зростання інформаційних потоків. Розв'яжемо це рівняння, враховуючи, що $y'(t) = \frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} - ky = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} - k\,dt = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad d\,(\ln y - kt) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln y - kt = C_1 \quad \Rightarrow \quad y = e^{C_1 + kt},$$

де C_1 — довільна стала. Якщо перепозначити e^{C_1} через C, то $y(t) = Ce^{kt}$. Оскільки $y(0) = y_0$, то $C = y_0$, тобто шуканий закон зростання інформаційних потоків у науці визначається формулою

$$y(t) = y_0 e^{kt}. \tag{1.2}$$

Знайдемо тепер час T, за який потік наукової інформації у порівнянні з початковою кількістю збільшиться вдвічі. За умовою задачі, відносна швидкість y'/y зростання інформаційних потоків складає 7%, а тому $k = 0{,}07$. Оскільки $y(T) = 2y_0$, то

$$y(T) = y_0 e^{kT} = 2y_0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\ln 2}{0{,}07} \approx 10\,\text{років}. \ \blacksquare$$

Відзначимо, що через стримуючі фактори, пов'язані з різкими змінами зовнішніх умов, експоненціальний характер зростання потоку наукової інформації зберігатися не може. Зростання рівня обмежується певним його значенням, і механізм зростання кількості публікацій виражатиметься диференціальним рівнянням

$$y' = ky(M-y),$$

де $k > 0$, M — максимально можливе значення функції y, тобто $0 < y < M$. Розв'яжемо це рівняння. Маємо:

$$\frac{dy}{y(M-y)} = kdt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}\right) dy - kdt = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad d\big(\ln y - \ln(M-y) - kMt\big) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \ln \frac{y}{M-y} = kMt + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{Me^{Mkt+C_1}}{1+e^{Mkt+C_1}} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{M}{1+Ce^{-Mkt}},$$

де, враховуючи довільність сталої C_1, перепозначено e^{-C_1} через C. Надалі у такій ситуації використовуватимемо знак $:=$, наприклад, $C := e^{-C_1}$.

Криву, визначену останнім рівнянням, називають ***логістичною кривою***. У початкові моменти часу, коли y значно менше від M, логістична крива практично збігається з графіком показникової функції $y = Me^{Mkt}$. Прямі $y = M$ і $y = 0$ є асимптотами логістичної кривої (на рис. 1.1 побудована логістична крива при $M = 4C = 8k$).

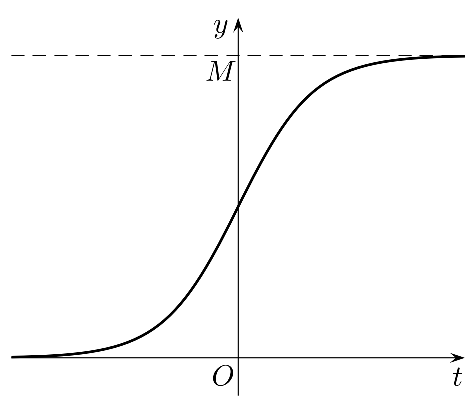


Рис. 1.1

Закон зростання інформаційних потоків, визначений формулою (1.2), є доволі універсальним. Ним можна скористатися для опису процесів радіоактивного розпаду, хімічних реакцій, для розв'язування багатьох задач екології, задачі про ефективність реклами тощо [8, 10, 18, 20]. У банківській справі нарахування заборгованості за кредитом або доходів за вкладами також відбувається відповідно до цього закону, але у цих випадках час відраховується не неперервно, а через дискретні проміжки.

Задача 2. *Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний квадрату швидкості човна. Початкова швидкість човна 3 м/с, а його швидкість через 4 с складає 1 м/с. Через який час швидкість човна зменшиться до 1 см/с?*
Розв'язання. Згідно з другим законом Ньютона $ma = F$, де m — маса човна, $a = \frac{dv}{dt}$ — його прискорення (похідна швидкості $v(t)$ за часом t), F — сила опору води. За умовою задачі, $F = kv^2$. Отже, маємо таке диференціальне рівняння:

$$m\frac{dv}{dt} = kv^2. \tag{1.3}$$

З (1.3) одержуємо:

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m}dt \quad \Rightarrow \quad d\left(-\frac{1}{v} - \frac{k}{m}t\right) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v} - \frac{k}{m}t = C \quad \Rightarrow \quad v = \frac{-m}{kt + Cm}.$$

З умови $v(0) = 3$ знаходимо $C = -1/3$, а тому

$$v(t) = \frac{3m}{m - 3kt}. \tag{1.4}$$

З (1.4), враховуючи, що $v(4) = 1$, одержуємо, що $\frac{3m}{m-12k} = 1$, $\frac{m}{k} = -6$, а отже,

$$v(t) = \frac{3m}{m - 3kt} = \frac{3\frac{m}{k}}{\frac{m}{k} - 3t} = \frac{3(-6)}{-6 - 3t} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad v(t) = \frac{6}{t + 2}. \tag{1.5}$$

Якщо тепер в (1.5) підставити $t = T$ (T — шуканий час), а також $v = 0{,}01$, то звідси знаходимо $T = 598$ с. ■

Задача 3. *Визначити форму дзеркала, яке збирає в одну точку спрямований на нього потік паралельних променів.*
Розв'язання. Зробимо переріз дзеркала площиною Oxy, щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат, а вісь Ox — паралельною до променів, які падають на дзеркало. У перерізі одержуємо деяку криву $y = f(x)$ (рис. 1.2).

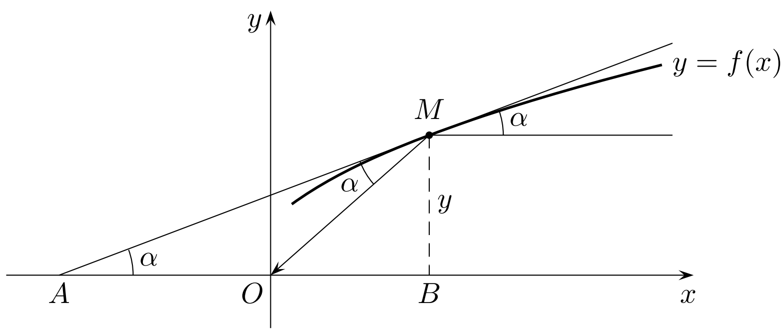


Рис. 1.2

Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя дорівнює куту його відбиття (цей кут позначено через α). Нехай $M(x, y)$ — довільна точка кривої $y = f(x)$. Проведемо у цій точці дотичну MA. Трикутник MOA — рівнобедрений. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $y > 0$. Оскільки $y' = \operatorname{tg}\alpha$ (геометричний зміст похідної), то одержуємо

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

або, домножуючи чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{x^2 + y^2} - x$,

$$y' = \frac{1}{y}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right). \tag{1.6}$$

Диференціальне рівняння (1.6) є диференціальною моделлю задачі й описує форму перерізу дзеркала площиною Oxy. З

(1.6) одержуємо:

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = x + C,$$

де C — довільна стала. Отже, маємо рівняння осьового перерізу дзеркала площиною Oxy: $y^2 = 2Cx + C^2$. Одержали сім'ю парабол з вершинами у точках $(-C/2; 0)$, а тому поверхня дзеркала як поверхня обертання осьового перерізу навколо осі Ox має вигляд $y^2 + z^2 = 2Cx + C^2$, тобто шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання. ■

2. Основні означення й поняття. ***Звичайним диференціальним рівнянням*** називають співвідношення

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.7}$$

між незалежною змінною x, шуканою функцією $y = y(x)$ цієї змінної і похідними $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Позначення, використані у наведеному означенні, не є суттєвими: незалежна змінна може позначатися через t, шукана функція — через s, f, φ, F тощо.

Порядком звичайного диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить у рівняння. У рівнянні n-го порядку (1.7) вважається, що похідна n-го порядку шуканої функції справді входить у це рівняння, тоді як наявність решти аргументів необов'язкова.

Наведемо приклади звичайних диференціальних рівнянь:

$$y = xy' + y'^3, \quad y' + |y'| = 0, \quad y'' + y = \cos x,$$
$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + y = xe^x, \quad y^{(10)} = x.$$

Перші два з наведених рівнянь мають перший порядок, третє рівняння має другий порядок, четверте рівняння — четвертий порядок, п'яте — десятий порядок.

Якщо диференціальне рівняння містить частинні похідні невідомої функції від кількох незалежних змінних, то його називають ***рівнянням з частинними похідними***. Наведемо приклади таких рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Надалі, крім лекцій 21 і 22, розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння, причому завжди незалежну змінну і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Розв'язком рівняння (1.7) на деякому інтервалі (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, називають функцію $y = y(x)$, яка має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно та задовольняє рівняння (1.7). Це означає, що для всіх $x \in (a, b)$ справджується тотожність $F\big(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big) \equiv 0$.

Наприклад, функція $y = \cos 2x$ є розв'язком диференціального рівняння другого порядку $y'' + 4y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є також $y = \sin 2x$, $y = 3\cos 2x$, $y = \cos 2x - \sin 2x$ й, узагалі, всі функції $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Нижче буде встановлено, що звичайне диференціальне рівняння n-го порядку у загальному випадку має сім'ю розв'язків, залежну від n довільних сталих. Наприклад, усі розв'язки диференціального рівняння $y^{(n)} = 0$ містяться у формулі $y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$, де $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

З геометричної точки зору розв'язку диференціального рівняння у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яку називають ***інтегральною кривою***. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають ***сім'єю інтегральних кривих***. Наприклад, розв'язки рівняння $y'' = 2$ утворюють двопараметричну сім'ю парабол $y = x^2 + C_1 x + C_2$, кожна з яких є інтегральною кривою.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають ***інтегруванням*** цього рівняння. Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції або у ***квадратурах*** (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння зінтегроване ***у скінченному вигляді***. Розглядатимемо переважно саме такі рівняння, хоча значно більше диференціальних рівнянь не інтегруються у скінченному вигляді й для представлення їхніх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

Основною задачею теорії інтегрування диференціальних рівнянь є знаходження всіх розв'язків заданого диференціального рівняння та дослідження їхніх властивостей.

3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих. Нехай маємо рівняння сім'ї кривих, залежної від одного дійсного параметра C:

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1.8}$$

Побудуємо диференціальне рівняння сім'ї кривих (1.8), тобто рівняння, яке описує властивості, притаманні всім кривим цієї сім'ї. Для цього здиференціюємо за змінною x обидві частини рівності (1.8), враховуючи, що $y = y(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.9}$$

Якщо співвідношення (1.9) не містить C, то воно буде виражати ту загальну властивість, яка притаманна усім кривим сім'ї (1.8) (наприклад, якщо $y = x + C$, то $y' = 1$). У загальному випадку рівність (1.9) залежатиме від параметра C. Тоді, виключаючи цей параметр із системи, складеної з рівнянь (1.8), (1.9), одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.10}$$

Рівняння (1.10) називають ***диференціальним рівнянням сім'ї кривих*** (1.8). Воно виражає спільну властивість кривих (1.8) незалежно від сталої C.

Приклад 1. *Знайти диференціальне рівняння сім'ї парабол, які проходять через початок координат і мають осі симетрії, паралельні до осі ординат.*
Розв'язання. Сім'ю парабол з умови задачі можна описати з допомогою формули $y = x^2 - Cx$, де C — довільна стала. Складемо систему

$$\begin{cases} y = x^2 - Cx, \\ y' = 2x - C \end{cases}$$

і виключимо з неї сталу C. Для цього знайдемо C з першого рівняння системи і підставимо у друге:

$$C = \frac{x^2 - y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = 2x - \frac{x^2 - y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^2 + y}{x}.$$

***Відповідь*:** $xy' = x^2 + y$.

Аналогічно, маючи сім'ю кривих $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, залежну від n довільних сталих, можна при певних умовах одержати диференціальне рівняння, для якого ці криві будуть інтегральними. Для цього потрібно здиференціювати співвідношення $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ n разів за змінною x і виключити з нього та отриманих унаслідок диференціювання n рівнянь сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$. У результаті одержимо диференціальне рівняння сім'ї кривих, яке виражатиме загальну властивість цих кривих.

Приклад 2. *Знайти диференціальне рівняння сім'ї кривих* $(x - C_1)^2 + C_2 y^2 = 1$.
Розв'язання. Двічі здиференціюємо за змінною x тотожність $(x - C_1)^2 + C_2 y^2 - 1 = 0$:

$$2(x - C_1) + 2C_2 yy' = 0, \quad 1 + C_2 \left(y'^2 + yy''\right) = 0.$$

Виключаючи з трьох рівностей сталі C_1, C_2, після нескладних перетворень одержуємо диференціальне рівняння другого порядку $y^3 y'' + \left(y'^2 + yy''\right)^2 = 0$. ■

***Рекомендована література*:** [8, с. 3–13, 22–25], [9, с. 9–19], [10, с. 4–8], [20, с. 6–15].

Питання до лекції 1

1. Яке рівняння називають звичайним диференціальним рівнянням? Чим відрізняються звичайні диференціальні рівняння від рівнянь з частинними похідними?

2. Як визначити порядок диференціального рівняння?

3. Яку функцію називають розв'язком диференціального рівняння? Як називають операцію знаходження розв'язків диференціального рівняння? Яку криву називають інтегральною кривою диференціального рівняння?

4. У чому полягає основна задача теорії інтегрування диференціальних рівнянь?

5. У чому полягає математичне моделювання реальних процесів і явищ, яка його роль у вивченні процесу? Що називають диференціальною моделлю? Наведіть декілька прикладних задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

6. Який вигляд має рівняння сім'ї кривих, залежних від одного параметра (n параметрів)? Як знайти диференціальне рівняння заданої сім'ї однопараметричних кривих (n-параметричних кривих)?

Вправи до лекції 1

1. Перевірте, чи є функції

$$\text{а) } y = x \cdot \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt; \quad \text{б) } 5x = \ln 5y; \quad \text{в) } y = 3x + \ln x + 2$$

розв'язками відповідних диференціальних рівнянь

$$\text{а) } y' = \frac{y + x \sin x}{x}; \quad \text{б) } y' = e^{xy'/y}; \quad \text{в) } x^2 y'' \ln x = xy' - y.$$

2. Знайдіть криві, в яких кожний відрізок дотичної, що лежить між координатними осями, точкою дотику ділиться навпіл.

3. Складіть диференціальне рівняння сім'ї кривих:

$$\text{а) } x^2 - y^2 = C; \quad \text{б) } y = \sin(x + C); \quad \text{в) } y = C_1 x^2 + C_2 e^x.$$

4. Складіть диференціальне рівняння:

а) усіх кіл, які дотикаються до осі абсцис;

б) усіх прямих на площині;

в) парабол, які проходять через точку (1; 2) і мають вісь, паралельну до осі абсцис.

5. Знайдіть криві, нормалі до яких в усіх точках проходять через початок координат.

Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної (загальна теорія)

План

1. Основні означення й поняття.
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.
3. Класифікація розв'язків.
4. Геометричне та механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків.

1. Основні означення й поняття. Диференціальне рівняння першого порядку в загальному випадку можна записати у вигляді

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

де x — незалежна змінна, y — невідома функція від x, $F(x, y, y')$ — задана функція змінних x, y, $y' = \frac{dy}{dx}$.

Якщо рівняння (2.1) можна розв'язати відносно похідної, то його записуватимемо у вигляді

$$y' = f(x, y). \tag{2.2}$$

Таку форму запису диференціального рівняння називають ***нормальною***.

Найпростішим з диференціальних рівнянь у нормальній формі є рівняння $y' = f(x)$. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому інтервалі (a, b), то, як відомо з математичного аналізу, $y = \int f(x)dx + C$, де C — довільна стала.

У багатьох випадках рівняння (2.2) зручно записувати у вигляді $dy - f(x, y)dx = 0$, який є окремим випадком рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2.3}$$

де $M(x, y)$, $N(x, y)$ — відомі функції (***коефіцієнти*** рівняння). Рівняння (2.3) зручне тим, що змінні x і y у ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію від іншої.

Розв'язком диференціального рівняння (2.2) на інтервалі (a,b) називають неперервно диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = y(x)$, яка перетворює рівняння (2.2) у тотожність, тобто $y'(x) \equiv f(x, y(x))$.

Розв'язок рівняння (2.2) може бути заданий не тільки явно, тобто як $y = y(x)$, але й у неявному вигляді $\Phi(x,y) = 0$ (у вигляді, не розв'язаному відносно y) або у параметричній формі: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Наприклад, функція $y = \sqrt{1-x^2}$, де $x \in (-1; 1)$, є розв'язком рівняння $y' = -x/y$, однак цей самий розв'язок можна подати у неявному вигляді $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$, а також у параметричній формі $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 < t < \pi$.

2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Вже зазначалось, що диференціальні рівняння зазвичай мають безліч розв'язків. Однак у багатьох задачах теоретичного і прикладного характеру серед усіх розв'язків диференціального рівняння (2.2) потрібно знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.4}$$

де x_0, y_0 — задані числа, тобто розв'язок, який для заданого значення незалежної змінної $x = x_0$ набуває заданого значення y_0.

Задачу відшукання розв'язку рівняння (2.2), який задовольняє умову (2.4), називають ***задачею Коші*** (або ***початковою задачею***). Умову (2.4) називають ***початковою***, а числа x_0, y_0 — ***початковими даними*** задачі (2.2), (2.4).

З геометричної точки зору задача Коші (2.2), (2.4) полягає у відшуканні інтегральної кривої рівняння (2.2), яка проходить через задану точку (x_0, y_0) площини Oxy.

Відповідь на питання про те, за яких умов задача Коші (2.2), (2.4) має розв'язок, дає теорема Пеано, доведення якої можна знайти, наприклад, в [3, с. 44–46].

Теорема 1 (Пеано). *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в деякій області D площини Oxy, то існує неперервна разом зі* *своєю похідною функція* $y = y(x)$, *яка є розв'язком задачі Коші* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, *де* $(x_0, y_0) \in D$.

Однак для багатьох задач важливо знати не тільки факт існування розв'язку диференціального рівняння, але також і те, чи є цей розв'язок єдиним. Відповідь на це питання має виняткове значення як для самої теорії диференціальних рівнянь, так і для багатьох її застосувань. Справді, якщо знати, що розв'язок задачі Коші єдиний, то знайшовши розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, дослідник може бути впевненим у відсутності інших розв'язків, які задовольняють ті самі початкові умови. У задачах природознавства це приводить до одержання єдиного закону явища, який визначається тільки диференціальним рівнянням і початковими умовами. Ілюстрацією до цього можуть бути задачі з лекції 1.

Виявляється, що умова неперервності функції $f(x, y)$ з теореми Пеано не гарантує єдиності розв'язку задачі Коші (2.2), (2.4). Розглянемо, наприклад, рівняння $y' = 2\sqrt{y}$. Його права частина визначена і неперервна у верхній частині площини Oxy ($y \geqslant 0$). З допомогою підстановки легко переконатись, що інтегральними кривими є півпараболи $y = (x+C)^2$, де $x \geqslant -C$, а також пряма $y = 0$ (вісь Ox). Очевидно, що у кожній точці $(x_0, 0)$ осі Ox єдиність розв'язку порушується, бо через цю точку проходять дві інтегральні криві, а саме: парабола $y = (x - x_0)^2$ і пряма $y = 0$ (рис. 2.1).

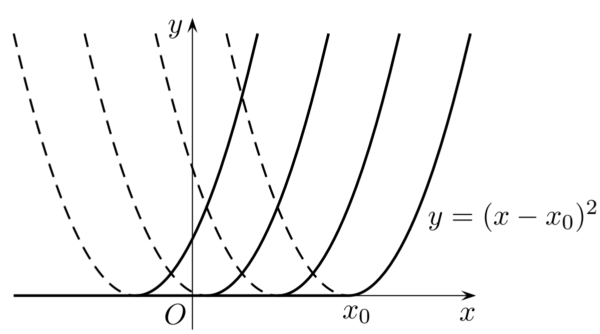


Рис. 2.1

Основною теоремою, яка забезпечує не тільки існування, але й єдиність розв'язку задачі Коші, є теорема Коші, яка у дещо іншій постановці буде доведена в лекції 8.

Теорема 2 (Коші). *Нехай функція $f(x, y)$ визначена у прямокутнику*

$$G = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}, \quad a, b > 0,$$

і задовольняє у ньому такі умови:

1) *$f(x, y)$ неперервна, а, отже, й обмежена, тобто*

$$|f(x, y)| \leqslant M, \quad M > 0;$$

2) *частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ існує та обмежена.*

Тоді задача Коші (2.2), (2.4) *має єдиний розв'язок принаймні на відрізку $|x - x_0| \leqslant h$, де $h = \min(a, b/M)$.*

За виконання умов теореми Коші можна гарантувати, що через кожну внутрішню точку області G проходить єдина інтегральна крива.

Теорема Коші має велике значення в теорії звичайних диференціальних рівнянь, бо дозволяє за виглядом правої частини рівняння (2.2) відповісти на питання про існування та єдиність розв'язку цього рівняння при заданих початкових умовах. Це особливо важливо у тих випадках, коли неможливо вказати точну формулу, що визначає розв'язок рівняння, а тому потрібно застосовувати методи наближеного розв'язування диференціального рівняння.

3. Класифікація розв'язків. ***Загальним розв'язком*** диференціального рівняння (2.2) у деякій області G площини Oxy називають функцію

$$y = y(x, C), \tag{2.5}$$

яка залежить від однієї довільної сталої C, якщо:

1) вона є розв'язком рівняння (2.2) для довільного фіксованого значення сталої C;

2) для довільної початкової умови (2.4), де $(x_0, y_0) \in G$, існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що функція $y = y(x, C_0)$ задовольняє умову (2.4).

Якщо неможливо знайти загальний розв'язок у вигляді (2.5), його шукають у неявному вигляді $F(x, y, C) = 0$. Такий розв'язок називають ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння. Часто загальний інтеграл одержують як $\Psi(x, y) = C$, тобто у вигляді, розв'язаному відносно довільної сталої C. Функцію $\Psi(x, y)$ у цьому випадку називають ***інтегралом*** диференціального рівняння. Аналогічно визначають сім'ю інтегральних кривих (розв'язків) рівняння, залежну від довільної сталої C, у параметричній формі $x = \varphi(t, C)$, $y = \psi(t, C)$ як ***загальний розв'язок у параметричній формі***.

Якщо у точці (x_0, y_0) порушуються умови теореми Коші, то через цю точку проходять декілька інтегральних кривих (розв'язок не єдиний) або не проходить жодна інтегральна крива (розв'язок не існує). Такі точки називають ***особливими точками*** диференціального рівняння.

Шукати особливі точки потрібно серед точок, у яких має розрив функція $f(x, y)$ або її частинна похідна $f'_y(x, y)$, а потім, аналізуючи загальний розв'язок, необхідно перевірити, чи будуть ці точки особливими. Така перевірка обов'язкова, бо теорема Коші дає лише достатні умови й, отже, може існувати єдиний розв'язок задачі Коші (2.2), (2.4) навіть тоді, коли в точці (x_0, y_0) не виконується одна або обидві умови теореми.

Розглянемо приклади.

1. $y' = y\cos x + e^{3x}$. Функція $f(x, y) = y\cos x + e^{3x}$ неперервна, а похідна $f'_y = \cos x$ обмежена в усіх точках площини Oxy. Згідно з теоремою Коші через кожну точку площини Oxy проходить одна інтегральна крива.

2. $y' = \sqrt{1 - y^2}$. Права частина визначена і неперервна в усіх точках площини Oxy, де $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Частинна похідна $f'_y = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ стає необмеженою, якщо $y \to \pm 1$. Легко переконатись, що кожна з функцій $y = \sin(x + C)$ є розв'язком

рівняння. Окрім того, маємо також розв'язки $y = \pm 1$. Таким чином, через кожну точку прямих $y = \pm 1$ проходять принаймні дві інтегральні криві, а тому у точках цих прямих порушується єдиність розв'язку (рис. 2.2).

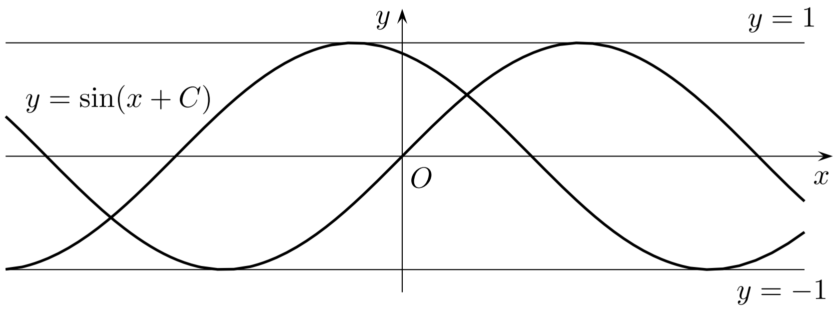


Рис. 2.2

3. $y' = y^{-4}$. В усіх точках $(x_0, 0)$ осі Ox функції $f(x, y) = y^{-4}$, $f'_y = -4y^{-5}$ розривні й необмежені при $y \to 0$, але через кожну точку цієї осі проходить єдина інтегральна крива $y = \sqrt[5]{5(x - x_0)}$. Рисунок інтегральних кривих диференціального рівняння $y' = y^{-4}$ пропонуємо читачам зробити самостійно.

Частинним розв'язком рівняння (2.2) в області G називають функцію $y = y(x, C_0)$, утворену з загального розв'язку (2.5) при певному значенні сталої $C = C_0$.

Якщо кожна точка розв'язку диференціального рівняння є особливою, то такий розв'язок називають ***особливим***. Особливий розв'язок неможливо отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) диференціального рівняння при жодному значенні сталої C.

З геометричної точки зору загальним розв'язком $y = y(x, C)$ є сім'я інтегральних кривих на площині Oxy, яка залежить від однієї довільної сталої C, а частинний розв'язок — це інтегральна крива цієї сім'ї, що проходить через задану точку. Графіком особливого розв'язку є інтегральна крива, яка у кожній своїй точці має спільну дотичну з однією з інтегральних кривих. Таку інтегральну криву називають

обвідною сім'ї інтегральних кривих. Наприклад, для рівняння $y' = 2\sqrt{y}$ обвідною є пряма $y = 0$, тобто вісь Ox (рис. 2.1), а для рівняння $y' = \sqrt{1 - y^2}$ обвідними є прямі $y = \pm 1$ (рис. 2.2).

4. Геометричне та механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків. Якщо розглядати x і y як декартові координати точки, то диференціальне рівняння (2.2) встановлює зв'язок між координатами довільної точки $M(x, y)$ площини і кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{dy}{dx}$ до інтегральної кривої у цій точці (рис. 2.3):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Якщо функція $f(x, y)$ визначена в області G, то кожній точці $M(x, y)$ цієї області відповідає деякий напрям, кутовий коефіцієнт якого дорівнює $f(x, y)$. Вказуючи цей напрям вектором (для визначеності вважатимемо його одиничним) з початком у точці M, одержимо в області G ***поле напрямів***, визначене рівнянням (2.2) (рис. 2.4).

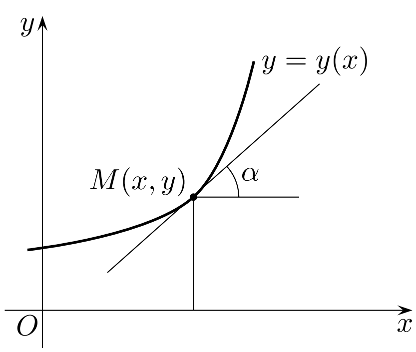


Рис. 2.3

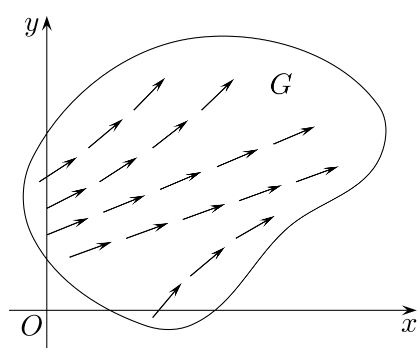


Рис. 2.4

Інтегральна крива, яка проходить через точку $M(x, y) \in G$, характерна тим, що у кожній її точці напрям дотичної збігається з напрямом поля у цій точці. Тому з геометричної точки зору інтегрування диференціального рівняння (2.2) полягає у знаходженні кривих, дотичні до яких у кожній своїй точці збігаються з напрямом поля.

Якщо у деякій точці (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ стає нескінченно великою, то напрям поля буде паралельний до осі Oy. Якщо $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) перетворюється в невизначеність $0/0$, то через цю точку не проходить жодна інтегральна крива.

Для побудови поля напрямів диференціального рівняння зручно використовувати геометричні місця точок, у яких дотичні до інтегральних кривих мають сталий напрям. Такі лінії називають ***ізоклінами***. Рівняння ізоклін диференціального рівняння (2.2) має вигляд

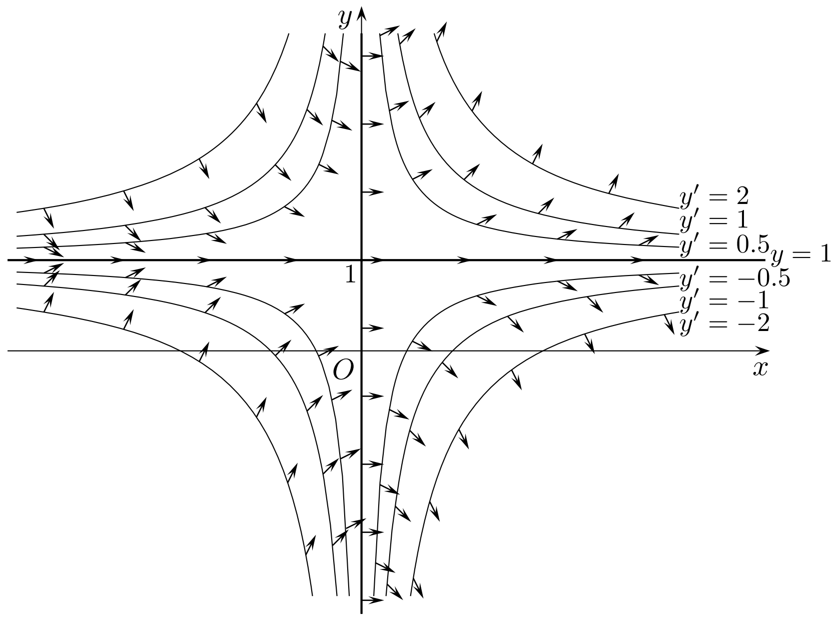
$$f(x, y) = k, \tag{2.6}$$

де k — довільна стала. Змінюючи в (2.6) значення k, одержимо множину ізоклін в області G. З допомогою ізоклін і відомих сталих кутів α $(k = \operatorname{tg} \alpha)$ нахилу дотичних до інтегральних кривих, які їх перетинають, можна схематично побудувати інтегральні криві диференціального рівняння. Такий метод дослідження диференціальних рівнянь називають ***методом ізоклін***.

З допомогою методу ізоклін можна визначити також такі характерні лінії й області поля інтегральних кривих: області зростання (при $k > 0$), спадання $(k < 0)$ інтегральних кривих та лінії їхніх екстремумів $(k = 0)$. Якщо функція $f(x, y)$ у рівнянні (2.2) диференційовна, то з допомогою другої похідної $y'' = f'_x + y' \cdot f'_y = f'_x + f \cdot f'_y$ можна визначити області опуклості та лінії точок перегину інтегральних кривих.

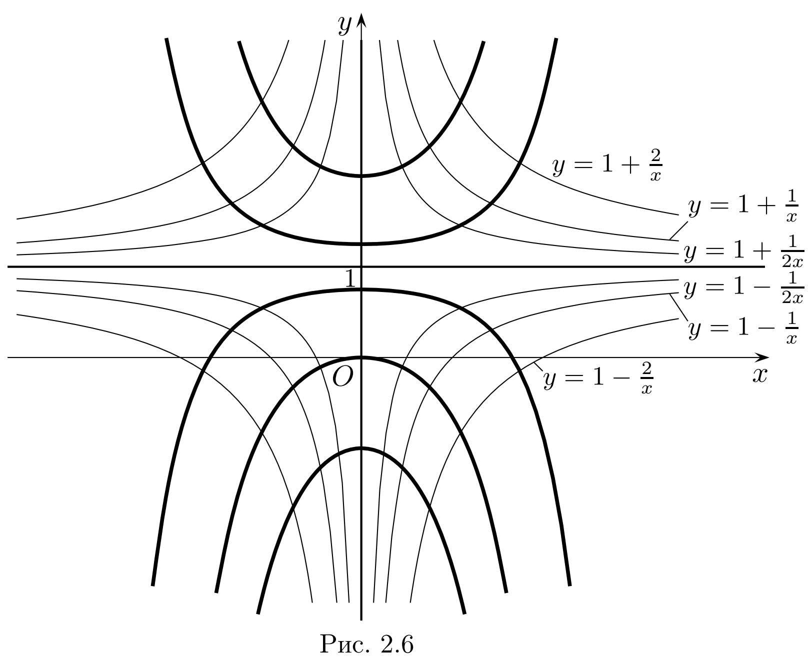
Приклад 1. *З допомогою ізоклін наближено зобразити інтегральні криві рівняння* $y' = x(y - 1)$.

Розв'язання. Згідно з (2.6) рівняння ізоклін має вигляд $x(y - 1) = k$, $k \in \mathbf{R}$. Якщо $k = 0$, то ізоклінами є прямі $x = 0$ і $y = 1$. Уздовж них $y' = \operatorname{tg} \alpha = 0$. Якщо $k \neq 0$, то ізоклінами є гіперболи $y = \frac{k}{x} + 1$. Якщо, наприклад, $k = \pm 1$, то $\operatorname{tg} \alpha = \pm 1$, а, отже, $\alpha = \pm 45°$. Якщо $k = \pm 0{,}5$, то $\alpha = \pm \operatorname{arctg} 0{,}5 \approx \pm 27°$ і т. д. Поле напрямів диференціального рівняння $y' = x(y - 1)$ зображене на рис. 2.5.



y
y′ = 2
y′ = 1
y′ = 0.5
y = 1
y′ = −0.5
y′ = −1
y′ = −2
1
O
x

Рис. 2.5



y
$y = 1 + \frac{2}{x}$
$y = 1 + \frac{1}{x}$
$y = 1 + \frac{1}{2x}$
1
$y = 1 - \frac{1}{2x}$
$y = 1 - \frac{1}{x}$
O
$y = 1 - \frac{2}{x}$
x

Рис. 2.6

Якщо поле напрямів диференціального рівняння побудоване, то для того, щоб накреслити інтегральну криву рівняння, потрібно, як уже зазначалось, узяти на площині будь-яку точку і провести через неї криву так, щоб вона у кожній своїй точці збігалась із напрямом поля, тобто дотична до кривої у кожній точці повинна мати напрям вектора у цій точці. Інтегральні криві заданого рівняння схематично зображені на рис. 2.6. ■

Розглянемо задачу про рух матеріальної точки P вздовж осі Ox. Позначимо швидкість точки P через $v(t,x)$ — функцію, залежну від часу t і положення x, яке займає точка у момент часу t. Диференціальним рівнянням цього руху буде

$$\frac{dx}{dt} = v(t,x). \tag{2.7}$$

Будь-який розв'язок $x = x(t)$ рівняння (2.7) визначає певний закон руху (його називатимемо просто ***рухом***). Задача Коші для рівняння (2.7) полягає у знаходженні такого руху $x = x(t)$, який визначається рівнянням (2.7) і задовольняє початкову умову $x(t_0) = x_0$.

Руху $x = x(t)$ відповідає на площині (t,x) крива M_0M_1 (рис. 2.7), яка зображує залежність x від t. Цю криву називають ***графіком руху*** (не треба плутати графік руху з траєкторією руху точки P — відрізком P_0P_1 на рис. 2.7).

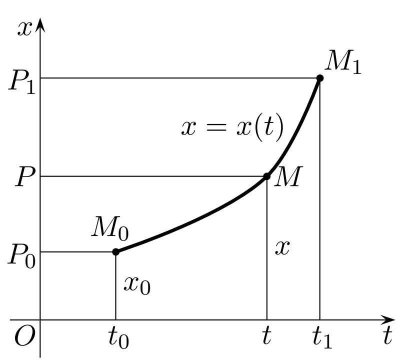


Рис. 2.7

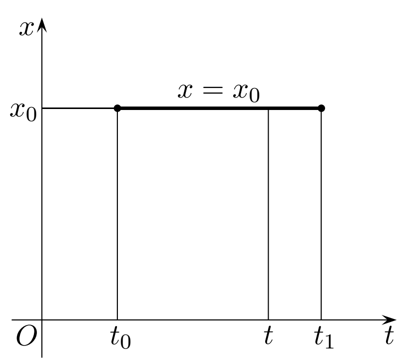


Рис. 2.8

Якщо у рівнянні (2.7) функція $v(t,x)$ не залежить від t, тобто

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \tag{2.8}$$

то таке рівняння називають ***стаціонарним*** або ***автономним***. У рівнянні (2.8) швидкість залежить тільки від положення точки.

Якщо права частина рівняння (2.7) перетворюється в нуль при $x = x_0$ для всіх значень t, що розглядаються, тобто швидкість руху у точці x_0 в будь-який момент часу дорівнює нулю, то рівняння (2.7) має розв'язок $x = x_0$ (рис. 2.8). Цьому руху відповідає ***стан спокою***. Траєкторією цього руху є точка x_0, яку називають ***точкою спокою*** або ***точкою рівноваги***.

Рекомендована література: [3, с. 9–11, 36–59], [4, с. 9–15], [6, с. 7–14], [8, с. 14–22, 25–27, 97–104], [10, с. 8–25, 76–85].

Питання до лекції 2

1. Який загальний вигляд має звичайне диференціальне рівняння першого порядку? Яку функцію називають розв'язком цього рівняння на інтервалі (a,b)?

2. Яку форму звичайного диференціального рівняння першого порядку називають нормальною? Як звести рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ до нормальної форми?

3. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння першого порядку? Який її геометричний і механічний зміст?

4. Сформулюйте теорему Пеано про існування розв'язку задачі Коші для рівняння $y' = f(x,y)$. Чи можуть інтегральні криві рівняння $y' = f(x,y)$ з неперервною правою частиною перетинатися або дотикатися одна до одної?

5. Чи гарантує неперервність функції $f(x,y)$ існування єдиного розв'язку задачі Коші для рівняння $y' = f(x,y)$? Сформулюйте теорему Коші. Чи може існувати єдиний розв'язок цієї задачі при невиконанні будь-якої умови теореми Коші?

6. Дайте означення загального розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x,y)$ у деякій області існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Який розв'язок називають загальним інтегралом, загальним розв'язком у параметричній формі?

7. Що таке частинний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$? Який розв'язок називають особливим? Дайте геометричне тлумачення цих розв'язків.

8. Який геометричний зміст мають рівняння $y' = f(x, y)$ та його розв'язки? Як визначити нахил інтегральної кривої у заданій точці за виглядом правої частини рівняння? Як побудувати поле напрямів, визначене рівнянням $y' = f(x, y)$? У чому полягає геометричний зміст інтегрування цього рівняння?

9. Що таке ізокліна? Яким є рівняння ізоклін для диференціального рівняння $y' = f(x, y)$? Як знайти лінії екстремумів і лінії точок перегину інтегральних кривих цього рівняння? У чому полягає метод ізоклін наближеного розв'язування диференціального рівняння?

10. Який механічний зміст мають диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ та його розв'язки? Як пов'язаний між собою графік руху (розв'язку), визначений цим рівнянням, і траєкторія цього руху? Який рух називають станом спокою, якими є графік і траєкторія цього руху?

Вправи до лекції 2

1. Розв'яжіть задачі Коші:

$$\text{а) } y' + x^3 = 1,\ y(0) = 5; \quad \text{б) } y' = \operatorname{ctg} x,\ y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 3;$$
$$\text{в) } y' = \ln x,\ y(e) = 1.$$

2. Користуючись теоремою Коші, виділіть області, в яких кожне з диференціальних рівнянь має єдиний розв'язок:

$$\text{а) } y' = \cos y - 2x; \quad \text{б) } y' = \sqrt{x^2 - y} + x^3; \quad \text{в) } y' = 2y\sqrt{y} + e^x.$$

3. З допомогою методу ізоклін побудуйте поле напрямів диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2 - 4$ та наближено зобразіть декілька інтегральних кривих.

4. Напишіть рівняння, яке задовольняють:

а) усі точки екстремуму інтегральних кривих рівняння $y' = x^3 + y$;

б) усі точки перегину інтегральних кривих рівняння $y' = y^3 e^{3x} - 9$.

Лекція 3. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, інтегровні у квадратурах

План

1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.
2. Однорідні рівняння.
3. Рівняння, звідні до однорідних.

1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \tag{3.1}$$

де кожен з коефіцієнтів біля диференціалів є добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а інша — тільки від y. Рівняння (3.1) називають ***рівнянням з відокремлюваними змінними***.

Для інтегрування рівняння (3.1) потрібно домогтися того, щоб коефіцієнт біля dx залежав тільки від x, а коефіцієнт біля dy — тільки від y. Це досягається діленням обох частин рівняння на добуток $M_2(x)N_1(y)$, причому вважаємо, звичайно, що $M_2(x) \neq 0$ і $N_1(y) \neq 0$. Після цього одержуємо:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{3.2}$$

Рівняння (3.2) можна розглядати як рівність диференціалів, тому інтеграли від диференціалів відрізняються на сталу, тобто

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C, \tag{3.3}$$

де C — довільна стала, x_0, y_0 — деякі числа з області неперервності коефіцієнтів рівняння (3.2). Співвідношення (3.3) є загальним інтегралом рівняння (3.1). Його можна записати також у вигляді

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C,$$

бо визначені інтеграли зі змінної верхньою межею й невизначені інтеграли є первісними для тих самих підінтегральних функцій, а тому відрізняються лише сталими, які можна включити в C.

Якщо a — корінь рівняння $M_2(x) = 0$, то $x = a$ є розв'язком рівняння (3.1), бо $dx = 0$, а $M_2(a) = 0$. Так само, якщо b — корінь рівняння $N_1(y) = 0$, то $y = b$ — розв'язок рівняння (3.1).

Диференціальне рівняння (3.2) можна записати у більш загальному вигляді:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \tag{3.4}$$

Рівняння (3.4) називають ***рівнянням з відокремленими змінними***, а перехід від рівняння (3.1) до рівняння вигляду (3.4) — ***відокремленням змінних***.

Загальним інтегралом рівняння (3.4) є

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

Рівняння з відокремлюваними змінними можна записати також у вигляді

$$y' = f_1(x)f_2(y). \tag{3.5}$$

Для інтегрування рівняння (3.5) потрібно поділити обидві його частини на $f_2(y)$ (якщо $f_2(y) \neq 0$) і помножити на dx (врахувавши, що $dy = y'dx$). Отже,

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx,$$

а після інтегрування одержуємо загальний інтеграл рівняння (3.5):

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C.$$

Тут, як і для рівняння (3.1), якщо $f_2(a) = 0$, то $y = a$ є розв'язком рівняння (3.5).

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння*

$$(y - x^2 y)dy = (x - xy^2)dx.$$

Розв'язання. Рівняння можна записати у вигляді

$$y(1 - x^2)dy = x(1 - y^2)dx.$$

Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на $(1 - x^2)(1 - y^2)$. Тоді

$$\frac{y}{1-y^2}dy = \frac{x}{1-x^2}dx \quad (x \neq \pm 1,\ y \neq \pm 1) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-y^2)}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \ln|1-y^2| = \ln|1-x^2| + C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad |1-y^2| = e^C|1-x^2| \quad \Rightarrow \quad 1 - y^2 = C(1-x^2),$$

де $C := \pm\, e^C$, враховуючи довільність вибору сталої C.

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є

$$y^2 = 1 + C(x^2 - 1). \tag{3.6}$$

З'ясуємо можливість появи особливих розв'язків заданого рівняння. Легко перевірити, що функції $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ є розв'язками рівняння, однак у загальному інтегралі містяться лише два останніх (їх можна отримати з формули (3.6), якщо $C = 0$). Функції $x = -1$ і $x = 1$ є особливими розв'язками.
Відповідь: $y^2 = 1 + C(x^2 - 1)$, $x = -1$, $x = 1$.

До рівняння з відокремлюваними змінними зводяться рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by), \tag{3.7}$$

де a, b — деякі сталі. Справді, якщо виконати заміну $z = ax+by$, то

$$y = \frac{z - ax}{b} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{b}z' - \frac{a}{b}$$

і для знаходження функції z одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними $z' = bf(z) + a$.

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $y' = (4x + y + 5)^2$.
Розв'язання. Нехай $z = 4x + y$. Тоді

$$z' = 4 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = z' - 4 \quad \Rightarrow \quad z' - 4 = (z+5)^2 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad z' = (z+5)^2 + 4.$$

Звідси, якщо $(z+5)^2 + 4 \neq 0$, то

$$\frac{dz}{(z+5)^2+4} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d(z+5)}{(z+5)^2+4} = x + C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z+5}{2} = x + C \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}\frac{4x+y+5}{2} = 2x + 2C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 4x + y + 5 = 2\operatorname{tg}(2x + C) \qquad (C := 2C).$$

Отже, загальним розв'язком є $y = 2\operatorname{tg}(2x + C) - 4x - 5$.

Оскільки $(z+5)^2+4 \neq 0$ у множині дійсних чисел, то інших розв'язків немає.
***Відповідь*:** $y = 2\operatorname{tg}(2x + C) - 4x - 5$.

2. Однорідні рівняння. Функцію $f(x,y)$ називають ***однорідною функцією виміру m***, якщо для будь-яких x, y, t справджується тотожність

$$f(tx, ty) = t^m f(x,y).$$

Наприклад, $f_1(x,y) = \sqrt[3]{2x^3 + y^3}$, $f_2(x,y) = \arcsin\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ є однорідними функціями вимірів 1 і 0 відповідно, бо

$$f_1(tx,ty) = \sqrt[3]{2(tx)^3 + (ty)^3} = t \cdot \sqrt[3]{2x^3 + y^3} = t^1 \cdot f_1(x,y),$$
$$f_2(tx,ty) = \arcsin\frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2} = \arcsin\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = t^0 \cdot f_2(x,y).$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x,y) \tag{3.8}$$

називають ***однорідним***, якщо $f(x,y)$ є однорідною функцією виміру 0.

Покажемо, що однорідне рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо права частина рівняння (3.8) — однорідна функція виміру 0, то, за означенням, $f(tx, ty) = f(x, y)$. Якщо підставити $t = 1/x$, то $f(x, y) = f(1,\ y/x)$, а тому рівняння (3.8) можна записати у вигляді $y' = f(1,\ y/x)$, звідки видно, що в однорідному рівнянні (3.8) права частина фактично залежить тільки від частки y/x. З огляду на це виконаємо заміну $u = y/x$, тобто

$$y = ux,$$

де $u = u(x)$ — нова шукана функція. Тоді

$$y' = u'x + u \quad \Rightarrow \quad u'x + u = f(1, u) \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = f(1, u) - u.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x} \quad (f(1,u) \neq u,\ \ x \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{du}{f(1,u) - u} = \ln|x| + C.$$

Якщо позначити $F(u) \equiv \int \frac{du}{f(1,u)-u}$, то загальний інтеграл однорідного рівняння (3.8) можемо записати у вигляді

$$F\,(y/x) = \ln|x| + C.$$

Розв'язками однорідного рівняння (3.8) можуть бути також функції $y = ax$ $(x \neq 0)$, де $f(1, a) = a$, та $x = 0$ $(y \neq 0)$, які могли бути втрачені при відокремленні змінних. Ці розв'язки можуть виявитись особливими.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $y dx + 2\sqrt{xy} dy = x dy$.
Розв'язання. Записавши рівняння у вигляді

$$y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x - 2\sqrt{xy}} \quad (x \neq 0,\ y \neq x/4),$$

переконуємось, що воно є однорідним, бо функція $f(x,y) = \frac{y}{x-2\sqrt{xy}}$ є однорідною функцією виміру 0. Виконаємо заміну $y = ux$. Тоді $y' = u'x + u$, і підставляючи ці вирази для y і y' у рівняння, одержуємо:

$$u'x + u = \frac{ux}{x - 2\sqrt{ux^2}} \quad \Rightarrow \quad u'x + u = \frac{u}{1 - 2\sqrt{u}} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}x = \frac{2u\sqrt{u}}{1 - 2\sqrt{u}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 - 2\sqrt{u})du}{2u\sqrt{u}} = \frac{dx}{x} \quad (u \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int u^{-3/2}du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{u}} - \ln|u| = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| + C = 0.$$

Якщо $u = 0$, то $y = 0$ — особливий розв'язок. Особливим розв'язком є також $x = 0$. Функція $y = x/4$ не є розв'язком рівняння.
***Відповідь*:** $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| + C = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

Якщо диференціальне рівняння першого порядку записане у вигляді

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{3.9}$$

то воно буде однорідним, якщо $M(x,y)$, $N(x,y)$ є однорідними функціями однакового виміру. Пропонуємо читачам самостійно переконатись, що диференціальні рівняння

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0, \quad 3xy\,dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

є однорідними.

Зауважимо, що диференціальне рівняння

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}, \tag{3.10}$$

одержане в лекції 1 у задачі 3 про форму дзеркала, яке збирає паралельні промені в одну точку, є однорідним. Розв'яжемо його з допомогою заміни $y = ux$. Тоді

$$u'x + u = \frac{\sqrt{x^2 + u^2x^2} - x}{ux} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+u^2} - 1}{u} - u \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2} - 1 - u^2} = \int \frac{dx}{x} + C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{d(1+u^2)}{\sqrt{1+u^2} - 1 - u^2} = \ln|x| + C.$$

В інтегралі $\int \frac{d(1+u^2)}{\sqrt{1+u^2}-1-u^2}$ зробимо заміну $p^2 = 1 + u^2$:

$$\int \frac{d(1+u^2)}{\sqrt{1+u^2} - 1 - u^2} = \int \frac{2p\,dp}{p - p^2} =$$
$$= 2\int \frac{dp}{1-p} = -\,2\ln|p-1| = -2\ln\left|\sqrt{1+u^2} - 1\right|.$$

Тоді

$$-\ln\left|\sqrt{1+u^2} - 1\right| = \ln|x| + C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+u^2} - 1 = C/x \quad \Rightarrow \quad u^2 = (C/x)^2 + 2C/x \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C^2 + 2Cx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2Cx + C^2.$$

Отже, загальним інтегралом рівняння (3.10) є $y^2 = 2Cx + C^2$ (порівняйте з результатом, одержаним у лекції 1).

3. Рівняння, звідні до однорідних. Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \tag{3.11}$$

де a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — деякі сталі. Якщо c_1 і c_2 одночасно не дорівнюють нулю, то права частина рівняння (3.11) не є однорідною функцією виміру 0, а тому це рівняння не є однорідним. Однак, якщо

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_1b_2 \neq a_2b_2, \tag{3.12}$$

то рівняння (3.11) можна звести до однорідного з допомогою замін

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0, \tag{3.13}$$

де числа x_0 і y_0 потрібно вибрати так, щоб

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = -\,c_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = -\,c_2. \end{cases} \tag{3.14}$$

Згідно з (3.12) $\Delta \neq 0$, а тому лінійна неоднорідна система (3.14) має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера. Підставляючи у (3.11) замість x і y відповідні вирази з (3.13), одержуємо рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2},$$

або, враховуючи (3.14),

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}. \tag{3.15}$$

Диференціальне рівняння (3.15) є, очевидно, однорідним.

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння*

$$(x - 2y + 3)y' = 1 - y - 2x.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$y' = -\frac{2x + y - 1}{x - 2y + 3} \quad (y \neq (x + 3)/2).$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то виконаємо заміни

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0,$$

де числа x_0 і y_0 знаходимо із системи

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 1, \\ x_0 - 2y_0 = -3, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{5},\ y_0 = \frac{7}{5}.$$

Таким чином, після замін $x = \xi - 1/5$, $y = \eta + 7/5$ одержуємо однорідне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2\xi + \eta}{\xi - 2\eta}.$$

Нехай $\eta = u\xi$. Тоді

$$u'\xi + u = \frac{2+u}{2u-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\xi}\xi = \frac{-2u^2 + 2u + 2}{(2u-1)} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{(2u-1)du}{u^2 - u - 1} = -2\frac{d\xi}{\xi} \quad (u^2 - u - 1 \neq 0).$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо:

$$\ln|u^2 - u - 1| = C - 2\ln|\xi| \quad \Rightarrow \quad |u^2 - u - 1| = e^C/\xi^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\eta^2}{\xi^2} - \frac{\eta}{\xi} - 1 = \frac{C}{\xi^2} \quad (C := \pm e^C) \quad \Rightarrow \quad \eta^2 - \eta\xi - \xi^2 = C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 - \left(y - \frac{7}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right) - \left(x + \frac{1}{5}\right)^2 = C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y^2 - x^2 - xy + x - 3y + 57/25 = C.$$

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є $y^2 - x^2 - xy + x - 3y = C$ $(C := C - 57/25)$.

Якщо $u^2 - u - 1 = 0$, то $u = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, звідки $\eta = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\xi$, тобто $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$ і $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$. Безпосередньою підстановкою переконуємося у тому, що дві останні функції є розв'язками заданого диференціального рівняння. Нарешті, якщо $\xi = 0$, то $x = -1/5$, але ця функція не є розв'язком рівняння.

Відповідь: $y^2 - x^2 - xy + x - 3y = C$, $y = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}x + \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}$.

Якщо для коефіцієнтів рівняння (3.11) не виконується умова (3.12), тобто

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda, \tag{3.16}$$

то $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, а тому з рівняння (3.11) випливає, що

$$y' = \frac{\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} = f(a_2 x + b_2 y),$$

тобто одержали рівняння вигляду (3.7), яке зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними з допомогою заміни $z = a_2x + b_2y$.

Зауважимо, що за виконання умови (3.16) для зведення рівняння (3.11) до рівняння з відокремлюваними змінними можна застосовувати також заміни $z = a_1x + b_1y$, $z = a_1x + b_1y + c_1$ або $z = a_2x + b_2y + c_2$.

Приклад 5. *Зінтегрувати рівняння*

$$y' = \frac{x - 2y + 3}{2x - 4y - 1}.$$

Розв'язання. Оскільки $\Delta = 0$, то виконаємо заміну $z = x - 2y$. Тоді $y = \frac{x-z}{2}$, $y' = \frac{1-z'}{2}$ і, підставляючи у рівняння, одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{1 - z'}{2} = \frac{z + 3}{2z - 1} \quad \Rightarrow \quad z' = 1 - \frac{2z + 6}{2z - 1} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{-7}{2z - 1} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (2z - 1)dz = -7\,dx.$$

Зінтегруємо його:

$$z^2 - z = -7x + C.$$

Замінивши z на $x - 2y$, знаходимо загальний інтеграл:

$$(x-2y)^2-(x-2y) = -7x+C \quad \Rightarrow \quad x^2-4xy+4y^2+6x+2y = C. \ \blacksquare$$

Аналогічно інтегруються рівняння більш загального вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{3.17}$$

де $f(u)$ — неперервна функція свого аргументу.

Зауважимо, що деякі рівняння можна звести до однорідних з допомогою заміни $y = z^m$, де $z = z(x)$ — нова функція, а m — деяке число. Такі рівняння називають ***узагальнено-однорідними***. Наприклад, у рівнянні

$$y' = x + \frac{y^2}{x^3}$$

зробимо заміну $y = z^m$ (тоді $y' = mz^{m-1}z'$) і виберемо m таким, щоб одержане рівняння

$$mz^{m-1}z' = x + \frac{z^{2m}}{x^3} \quad \Rightarrow \quad mz' = \frac{x}{z^{m-1}} + \frac{z^{m+1}}{x^3}$$

було однорідним. Для цього потрібно, щоб права частина рівняння була однорідною функцією виміру 0, тобто число m повинне задовольняти рівняння $m - 1 = 1$ і $m + 1 = 3$, звідки $m = 2$. Отже, з допомогою підстановки $y = z^2$ задане рівняння вдалося звести до однорідного рівняння

$$2z' = \frac{x}{z} + \frac{z^3}{x^3},$$

зінтегрувати яке пропонуємо читачам самостійно.

Рекомендована література: [1, с. 11–39], [4, с. 15–30], [6, с. 23–27], [8, с. 28–33, 56–61], [10, с. 27–37], [20, с. 16–177].

Питання до лекції 3

1. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням з відокремленими змінними? Як знайти загальний інтеграл такого рівняння?
2. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням з відокремлюваними змінними? Як інтегрується таке рівняння? Які функції можуть виявитися особливими розв'язками?
3. З допомогою яких замін рівняння $y' = f(ax + by + c)$ можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними?
4. Коли функція $f(x, y)$ буде однорідною функцією виміру m? Наведіть приклади однорідних функцій виміру 0, 1, 2, 3, а також приклади неоднорідних функцій.
5. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають однорідним? З допомогою якої заміни таке рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
6. Якою має бути права частина рівняння $y' = f(x, y)$, щоб воно було однорідним?
7. Якщо функції $M(x, y)$, $N(x, y)$ однорідні, то чи досить цього для того, щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було однорідним?
8. Якими повинні бути числа $c_1,\ c_2$, щоб диференціальне рівняння (3.17) було однорідним?

9. Якими повинні бути числа $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$, щоб рівняння (3.17) можливо було звести до однорідного рівняння? Коли це рівняння можливо звести відразу до рівняння з відокремлюваними змінними?

10. Які рівняння називають узагальнено-однорідними? Яка заміна використовується для інтегрування таких рівнянь?

Вправи до лекції 3

1. Зінтегруйте диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\text{а) } y' = e^{2x+y}; \quad \text{б) } x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0;$$
$$\text{в) } (xy^2 - y^2)y' = yx^2 + x^2.$$

2. Знайдіть розв'язки задач Коші:

$$\text{а) } (1+e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1; \quad \text{б) } y' \operatorname{tg} x = y + 3, \quad y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1.$$

3. Зінтегруйте диференціальні рівняння, звідні до рівнянь з відокремлюваними змінними:

$$\text{а) } y' = 2x + 3y + 10; \quad \text{б) } (2x+y)y' = 1; \quad \text{в) } y' = \frac{x - 2y - 1}{4y - 2x + 6}.$$

4. Обґрунтуйте, що рівняння є однорідними, та зінтегруйте їх:

$$\text{а) } xdy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx; \quad \text{б) } y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}; \quad \text{в) } y' = \frac{x + 2y}{2x + y}.$$

5. Зінтегруйте рівняння, звідні до однорідних рівнянь:

$$\text{а) } (x+1)y' + 3x + 2y + 5 = 0;$$
$$\text{б) } (7x - 3y + 2)dx + (4y - 3x - 5)dy = 0; \quad \text{в) } (4x^2 + y^4)dy = 2xydx.$$

Лекція 4. Лінійні диференціальні рівняння та звідні до них

План

1. Лінійне диференціальне рівняння та методи його розв'язування.
2. Властивості розв'язків лінійних рівнянь.
3. Рівняння Я. Бернуллі.
4. Рівняння Ріккаті.

1. Лінійне диференціальне рівняння та методи його розв'язування. ***Лінійним*** диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \tag{4.1}$$

де $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — неперервні функції. В області, де $A(x) \neq 0$, рівняння (4.1) рівносильне рівнянню

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4.2}$$

у якому позначено $p(x) = B(x)/A(x)$, $q(x) = -C(x)/A(x)$.

Якщо ж $A(x_0) = 0$, то розв'язком рівняння (4.1), записаного у диференціальній формі $A(x)dy + B(x)ydx + C(x)dx = 0$, є $x = x_0$, у чому легко переконатися з допомогою підстановки. Наприклад, розв'язками рівняння $x(x-\pi)y' + \sin x \cdot y = \operatorname{tg} x$ є $x = 0$ і $x = \pi$.

Якщо функції $p(x)$ та $q(x)$ у рівнянні (4.2) неперервні на деякому інтервалі (a, b), то згідно з теоремою Коші через кожну точку смуги $a < a_1 \leqslant x \leqslant b_1 < b$, $-\infty < y < +\infty$ проходить єдина інтегральна крива. Справді, якщо рівняння (4.2) записати у вигляді $y' = q(x) - p(x)y$, то його права частина $f(x, y) = q(x) - p(x)y$ є, очевидно, неперервною функцією, а частинна похідна $f'_y(x, y) = -p(x)$ обмежена у цій області. У цьому випадку рівняння (4.2) особливих розв'язків не має.

Якщо функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (4.2) називають ***лінійним однорідним***, а якщо тотожно не дорівнює нулю, то ***лінійним неоднорідним***.

Покажемо, що лінійне неоднорідне рівняння першого порядку завжди інтегрується у квадратурах. Розглянемо два способи інтегрування таких рівнянь.

Метод варіації довільної сталої (метод Лаґранжа). Зінтегруємо спочатку лінійне однорідне рівняння

$$y' + p(x)y = 0, \tag{4.3}$$

яке є водночас рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -\,p(x)y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\,p(x)dx \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = Ce^{-\int p(x)\,dx}. \tag{4.4}$$

Формула (4.4) описує всі розв'язки рівняння (4.3), бо розв'язок $y = 0$, який міг бути втраченим при відокремленні змінних, міститься у формулі загального розв'язку (якщо $C = 0$).

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.2) шукаємо у вигляді (4.4), замінивши довільну сталу C деякою функцією $C(x)$, тобто

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{4.5}$$

Підставляючи (4.5) у рівняння (4.2), одержуємо:

$$C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,dx} +$$
$$+\,p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} = q(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\,dx} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C,$$

де C — довільна стала. Підставляючи тепер знайдену функцію $C(x)$ у (4.5), одержуємо формулу для загального розв'язку лінійного рівняння (4.2):

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\cdot\left(\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C\right). \tag{4.6}$$

Метод підстановки (метод Й. Бернуллі). Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.2) шукатимемо у вигляді добутку двох диференційовних функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, тобто

$$y = uv. \tag{4.7}$$

Підставляючи (4.7) в (4.2), одержуємо:

$$\begin{gathered} u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad u'v + u\big(v' + p(x)v\big) = q(x). \end{gathered} \tag{4.8}$$

Користуючись довільністю функції v, виберемо її такою, щоб вона була розв'язком рівняння $v' + p(x)v = 0$, звідки

$$v = Ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

Знайдену функцію v при $C = 1$ підставимо в (4.8). Тоді

$$u' \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = q(x) \quad \Rightarrow \quad u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} dx + C.$$

Підставляючи знайдені функції u і v у (4.7), знову одержуємо формулу (4.6).

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння*

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Розв'язання. *Метод варіації довільної сталої.* Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння:

$$\begin{gathered} y' + 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int 2x\,dx + C \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \ln|y| = -x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x^2}. \end{gathered}$$

Розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{-x^2}$. Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$\begin{gathered} C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad C'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad C(x) = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = (x^2 + C)\,e^{-x^2}. \end{gathered}$$

Метод підстановки. Нехай $y = uv$. Тоді
$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2}.$$
Для знаходження функцій u і v одержуємо систему
$$\begin{cases} v' + 2xv = 0, \\ u'v = 2xe^{-x^2}. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо $v = Ce^{-x^2}$. Покладемо $C = 1$ і підставимо функцію v у друге рівняння. Тоді
$$u' = 2x \quad \Rightarrow \quad u = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = (x^2 + C)\, e^{-x^2}. \ \blacksquare$$

Наведені методи розв'язування лінійних рівнянь можна застосовувати також до рівнянь вигляду $\big(p(y)x + q(y)\big) \cdot y' = 1$, якщо y прийняти за незалежну змінну, а x — за функцію цієї змінної. Наприклад, рівняння $2yy'\big(e^{-y^2} - x\big) = 1$ є нелінійним відносно функції $y = y(x)$. Однак, якщо записати його у вигляді
$$y' = \frac{1}{2y\left(e^{-y^2} - x\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x'} = \frac{1}{2y\left(e^{-y^2} - x\right)} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x' + 2xy = 2ye^{-y^2},$$
то маємо лінійне відносно функції $x = x(y)$ рівняння з прикладу 1.

2. Властивості розв'язків лінійних рівнянь. Наведемо деякі властивості розв'язків лінійних рівнянь, які можуть бути корисними для практичного розв'язування рівнянь.

Властивість 1. *Якщо відомий деякий частинний розв'язок* $y_1(x)$ *лінійного однорідного рівняння* (4.3), *то його загальний розв'язок знаходиться без квадратур.*

Цим загальним розв'язком є $y = Cy_1(x)$, адже він задовольняє рівняння (4.2) і містить довільну сталу.

Властивість 2. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння* (4.2) *є сумою його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння* (4.3).

Справді, відкриваючи дужки у формулі (4.6), маємо два доданки: $Ce^{-\int p(x)\,dx}$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (4.3) і $e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}dx$ — розв'язок неоднорідного рівняння (4.2) (його одержуємо з формули загального розв'язку, якщо $C = 0$). Отже, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1 = y_1(x)$ лінійного неоднорідного рівняння, то його загальний розв'язок знаходиться з допомогою однієї квадратури:

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

Властивість 3. *Якщо відомі два непропорційні частинні розв'язки* $y_1 = y_1(x)$ *і* $y_2 = y_2(x)$ *рівняння* (4.2), *то його загальний розв'язок одержуємо без квадратур за формулою*

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1). \tag{4.9}$$

Справді, оскільки $y_1' + p(x)y_1 \equiv q(x)$ і $y_2' + p(x)y_2 \equiv q(x)$, то

$$(y_1 - y_2)' + p(x)(y_1 - y_2) \equiv 0,$$

звідки випливає, що $y_1 - y_2$ є частинним розв'язком лінійного однорідного рівняння (4.3). Загальним розв'язком рівняння (4.3) згідно з властивістю 1 буде $C(y_1 - y_2)$, а формулу (4.9) остаточно одержуємо на підставі властивості 2.

3. Рівняння Я. Бернуллі. Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \tag{4.10}$$

де m — деяке число, називають ***рівнянням Я. Бернуллі***. Якщо у (4.10) $m = 0$, то одержуємо лінійне неоднорідне рівняння (4.2), а якщо $m = 1$, — то рівняння з відокремлюваними змінними, тому надалі вважатимемо, що $m \neq 0$, $m \neq 1$.

Для розв'язування рівняння Я. Бернуллі, так само, як лінійного рівняння, використаємо метод варіації довільної сталої. Зінтегруємо спочатку рівняння $y' + p(x)y = 0$. Його загальний розв'язок подається формулою (4.4):

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

Розв'язок рівняння Я. Бернуллі шукаємо у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{4.11}$$

де $C(x)$ — деяка функція. Підставляючи (4.11) у рівняння (4.10), одержуємо:

$$C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} =$$
$$= q(x)C^m(x)e^{-m\int p(x)\,dx} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C'(x) = q(x)C^m(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{dC(x)}{C^m(x)} = \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C_1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{C^{1-m}(x)}{1-m} = \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C_1.$$

Таким чином,

$$C(x) = \left((1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)^{\frac{1}{1-m}},$$

а підставляючи цю функцію у (4.11), одержуємо загальний розв'язок рівняння Я. Бернуллі:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left((1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

При цьому міг бути втрачений розв'язок $y = 0$, якщо $m > 0$. Для $m \leqslant 0$ функція $y = 0$ не є розв'язком рівняння Я. Бернуллі.

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння Я. Бернуллі*

$$y' + 2xy = 2xe^{x^2}y^2.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння $y' + 2xy = 0$ був знайдений при розв'язуванні прикладу 1: $y = Ce^{-x^2}$, а тому розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C(x)e^{-x^2}.$$

Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{x^2}C^2(x)e^{-2x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = 2xC^2(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dC(x)}{C^2(x)} = 2x\,dx \quad (C(x) \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{C(x)} = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\frac{1}{x^2 + C} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{e^{-x^2}}{x^2 + C}.$$

Якщо $C(x) = 0$, то $y = 0$. Ця функція є особливим розв'язком заданого рівняння.
***Відповідь*:** $y = -\,e^{-x^2}(x^2 + C)^{-1},\ y = 0.$

Зауважимо, що наведений метод можна застосовувати також до рівнянь вигляду

$$\big(p(y)x + q(y)x^m\big) \cdot y' = 1,$$

якщо y прийняти за незалежну змінну, а x — за функцію цієї змінної. Наприклад, якщо рівняння $2xy(xe^{y^2} - 1)\,y' = 1$ записати у вигляді

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{2xy(xe^{y^2} - 1)} \quad \Rightarrow \quad x' + 2yx = 2ye^{y^2}x^2,$$

то маємо рівняння Я. Бернуллі з прикладу 2 (якщо вважати, що $x = x(y)$).

Задача 1. *Знайти криві, в яких довжина відрізка, який відтинає дотична на осі Oy, дорівнює квадрату ординати точки дотику.*
Розв'язання. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка шуканої кривої $y = f(x)$. У точці M проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$, і нехай A — точка перетину цієї дотичної з віссю Oy, B — проекція точки M на вісь Ox (рис. 4.1).

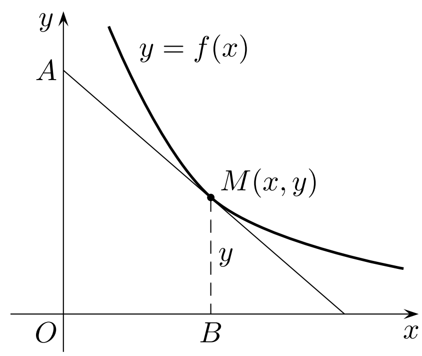


Рис. 4.1

За умовою задачі, $OA = BM^2$, причому $BM = y$. Відрізок OA знайдемо з рівняння дотичної

$$Y - y = f'(x) \cdot (X - x),$$

у яке підставимо $X = 0$. Тоді $OA = Y = y - y'x$.

Таким чином, одержуємо рівняння $y - y'x = y^2$, яке є рівнянням Я. Бернуллі, у чому легко переконатись, якщо записати його у вигляді

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2.$$

Зінтегруємо спочатку рівняння $y' - y/x = 0$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad y = Cx.$$

Розв'язок рівняння Я. Бернуллі шукаємо у вигляді $y = C(x)\,x$. Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$C'(x)\,x + C(x) - C(x) = -\,C^2(x)\,x \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C'(x) = -\,C^2(x) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dC}{C^2} = -\int dx \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{C(x)} = -\,x + C \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{1}{x - C} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{x - C}.$$

Шуканими кривими є гіперболи $y = 1 + C/(x - C)$. ■

4. Рівняння Ріккаті. До рівняння Я. Бернуллі за певних умов зводиться ***рівняння Ріккаті***. Так називають рівняння вигляду

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{4.12}$$

де функції $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ неперервні на деякому інтервалі $a < x < b$. Рівняння (4.12) містить як окремі випадки розглянуті вище рівняння: лінійне рівняння, якщо $p(x) \equiv 0$, і рівняння Я. Бернуллі, якщо $r(x) \equiv 0$.

Розглянемо деякі випадки інтегровності у квадратурах рівняння Ріккаті:

1. Якщо p, q і r — сталі, то (4.12) — рівняння з відокремлюваними змінними, а його загальний інтеграл виражається через елементарні функції.

2. $y' = \varphi(x)\cdot(ay^2 + by + c)$, де a, b і c — сталі і $a^2 + b^2 \neq 0$, — рівняння з відокремлюваними змінними.

3. $y' = a\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c$, де $a^2 + b^2 \neq 0$, — однорідне рівняння.

4. $y' = ay^2 + b\frac{y}{x} + \frac{c}{x^2}$ — узагальнено-однорідне рівняння ($m = -1$). Після заміни $y = zx^{-1}$ одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними $xz' = az^2 + (b+1)z + c$.

У загальному випадку рівняння Ріккаті (4.12) не інтегрується у квадратурах, хоча згідно з теоремою Коші воно має єдиний розв'язок для довільної початкової умови $y(x_0) = y_0$, де точка $x = x_0$ належить інтервалу неперервності функцій $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$.

Якщо відомо деякий розв'язок рівняння Ріккаті, то це рівняння можна звести до рівняння Бернуллі. Справді, нехай $y_1 = y_1(x)$ — розв'язок рівняння (4.12), тобто

$$y_1' = p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x). \tag{4.13}$$

Зробимо заміну шуканої функції

$$y = y_1 + z,$$

де $z = z(x)$ — нова функція. Тоді, з урахуванням (4.13), маємо:

$$y_1' + z' = p(x)y_1^2 + 2p(x)y_1 z + p(x)z^2 + q(x)y_1 + q(x)z + r(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z' - \big(2p(x)y_1 + q(x)\big)z = p(x)z^2.$$

Останнє рівняння є рівнянням Я. Бернуллі відносно функції z, яке завжди інтегрується у квадратурах. Особливим розв'язком рівняння Ріккаті може бути функція $y = y_1(x)$.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння Ріккаті*

$$y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{4}{x^2}.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо деякий розв'язок $y_1(x)$ заданого рівняння. Припустимо, що $y_1(x) = a/x$, де a — деяка стала. Підставляючи у задане рівняння, одержуємо, що

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{a^2}{x^2} - \frac{a}{x^2} - \frac{4}{x^2} \quad \Rightarrow \quad a = \pm 2,$$

а, отже, задане рівняння можна зінтегрувати у квадратурах з допомогою, наприклад, заміни $y = z + 2/x$. Тоді

$$z' - \frac{2}{x^2} = z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{z}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{3z}{x} = z^2.$$

Пропонуємо читачам самостійно переконатись у тому, що загальним розв'язком одержаного рівняння Я. Бернуллі є $z = \frac{-4x^3}{x^4+C}$. Тому

$$y = \frac{-4x^3}{x^4 + C} + \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2C - 2x^4}{x(x^4 + C)}.$$

Розв'язок $y_1(x) = 2/x$ неможливо одержати із загального розв'язку при жодному значенні сталої, а тому він є особливим.

***Відповідь*:** $y = \dfrac{2C - 2x^4}{x(x^4 + C)}$, $y = \dfrac{2}{x}$.

Рекомендована література: [1, с. 39–52, 67–73], [4, с. 30–40], [6, с. 28–33], [8, с. 69–86], [9, с. 31–36, 40–42], [10, с. 37–46].

Питання до лекції 4

1. Який загальний вигляд має лінійне диференціальне рівняння першого порядку? Яка різниця між лінійними неоднорідним і однорідним рівняннями?

2. Чи має лінійне неоднорідне рівняння з неперервними коефіцієнтами особливі розв'язки? Відповідь обґрунтуйте з використанням теореми Коші.

3. У чому полягає метод варіації довільної сталої інтегрування лінійного неоднорідного рівняння? З допомогою скількох квадратур у загальному випадку інтегрується це рівняння?

4. У чому полягає метод підстановки інтегрування лінійного неоднорідного рівняння?

5. Який загальний вигляд рівняння Я. Бернуллі? У чому полягає метод інтегрування цього рівняння? Чи може рівняння Я. Бернуллі мати особливі розв'язки? Від чого це залежить?

6. Який вигляд має рівняння Ріккаті? За якої умови це рівняння інтегрується у квадратурах? До якого рівняння у цьому випадку зводиться рівняння Ріккаті?

Вправи до лекції 4

1. Серед наведених рівнянь відшукайте лінійне рівняння та зінтегруйте його методом варіації довільної сталої і методом підстановки:

а) $y' = (x-y)^2$; б) $xy' + 2y - xy^2 = 0$; в) $y' = 4y + e^{2x}$.

2. Доведіть, що рівняння $f'(y)\,y' + p(x)f(y) = q(x)$ зводиться до лінійного рівняння з допомогою заміни $z = f(y)$. Зінтегруйте таким способом рівняння $\cos y \cdot y' + \frac{1}{x}\sin y = 2x$.

3. Доведіть, що рівняння $y' + p(x) = q(x)e^{ny}$ зводиться до лінійного рівняння з допомогою заміни $z = e^{-ny}$. Зінтегруйте таким способом рівняння $e^{-x}y' - e^{-x} = e^{y}$.

4. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння Я. Бернуллі та зінтегруйте його:

а) $y' + xy = y^2 \sin x$; б) $y' + 2y = x^5$; в) $y' = (x+y)^2$.

5. Доведіть, що рівняння Я. Бернуллі $y' + p(x)y = q(x)y^m$ можна звести до лінійного рівняння з допомогою заміни $z = y^{1-m}$. Зінтегруйте цим способом рівняння $xy' = y + x^2y^{-2}$.

6. Зінтегруйте рівняння Ріккаті $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$, знаючи, що воно має розв'язок вигляду $y_1(x) = ax + b$.

Лекція 5. Рівняння у повних диференціалах та звідні до них

План

1. Рівняння у повних диференціалах.

2. Інтегрувальний множник та деякі способи його знаходження.

3. Теореми про існування, неєдиність та загальний вигляд інтегрувального множника.

1. Рівняння у повних диференціалах. Диференціальне рівняння першого порядку

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{5.1}$$

називають ***рівнянням у повних диференціалах***, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто якщо

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = dU(x,y). \tag{5.2}$$

З (5.1), (5.2) випливає, що рівняння (5.1) можна записати у вигляді $dU = 0$, а тому загальним інтегралом рівняння у повних диференціалах є

$$U(x,y) = C.$$

У загальному випадку складно безпосередньо з'ясувати, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Укажемо ознаку, яка дозволить відповісти на це питання, а також наведемо один із способів знаходження функції $U(x,y)$.

Припустимо, що функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ у рівнянні (5.1) є неперервними у деякому прямокутнику з центром у точці (x_0, y_0) і не перетворюються одночасно в нуль у цій точці. Окрім того, вважатимемо, що у згаданому прямокутнику існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$ і $\frac{\partial N}{\partial x}$.

Припустимо, що справджується умова (5.2), тобто ліва частина рівняння (5.1) є повним диференціалом. Згідно з означенням диференціала функції двох змінних

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

а тому

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y). \tag{5.3}$$

Диференціюючи першу з рівностей за змінною y, а другу — за змінною x, одержуємо, що

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

З теореми про рівність мішаних похідних випливає необхідна умова того, що (5.1) є рівнянням у повних диференціалах:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5.4}$$

Покажемо, що умова (5.4) є також достатньою, тобто за виконання цієї умови ліва частина рівняння (5.1) є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$. Згідно з (5.3) шукана функція $U(x,y)$ повинна задовольняти умову $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y)$. Усі такі функції можна описати формулою

$$U(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y), \tag{5.5}$$

де $C(y)$ — довільна неперервно диференційовна функція від y. Оскільки функція $U(x,y)$ повинна також задовольняти другу умову з (5.3), то

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + C'(y) = N(x,y). \tag{5.6}$$

Для виконання умови (5.5) потрібно відповідним чином підібрати функцію $C(y)$, причому такий вибір за виконання умови (5.4) завжди можливий. Справді, з (5.6) маємо

$$C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx.$$

Ліва частина цієї рівності є функцією тільки від y і, отже, права частина не залежить від x, тобто похідна за змінною x від правої частини повинна дорівнювати нулю. Переконаємося у цьому, враховуючи умову (5.4):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right)=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right)=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx\right)=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=0.$$

Наведене доведення достатності умов (5.4) дає водночас і спосіб відшукання функції $U(x,y)$. Отже, спочатку потрібно знайти функцію $U(x,y)$ за формулою (5.5) (розглядаючи y як сталу), а потім з рівності (5.6) знайти $C'(y)$ і здійснити інтегрування для визначення $C(y)$. Підставляючи знайдену функцію $C(y)$ у формулу (5.5), матимемо функцію $U(x,y)$. Для одержання загального інтеграла рівняння у повних диференціалах (5.1), як було доведено вище, функцію $U(x,y)$ потрібно прирівняти до довільної сталої C.

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння*

$$(x+y^2+\sin x)\,dx+(2xy+\cos y)\,dy=0.$$

Розв'язання. Оскільки $M(x,y)=x+y^2+\sin x$, $N(x,y)=2xy+\cos y$, то $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2y$, тобто умова (5.4) справджується. Для знаходження функції $U(x,y)$ маємо систему

$$\frac{\partial U}{\partial x}=x+y^2+\sin x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=2xy+\cos y.$$

Знайдемо вираз для шуканої функції з першого рівняння системи і підставимо його у друге рівняння:

$$U(x,y)=\int(x+y^2+\sin x)\,dx+C(y)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ U(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy^2-\cos x+C(y)\ \Rightarrow\ \frac{\partial U}{\partial y}=2xy+C'(y)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad 2xy+C'(y)=2xy+\cos y\quad\Rightarrow\quad C'(y)=\cos y\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad C(y)=\sin y+C.$$

Оскільки досить знайти одну функцію $U(x,y)$, то в останній формулі довільну сталу інтегрування можна прийняти рівною нулю.

Отже, $U(x,y)=x^2/2+xy^2-\cos x+\sin y$, а загальним інтегралом є

$$\frac{x^2}{2}+xy^2-\cos x+\sin y=C.\ \blacksquare$$

2. Інтегрувальний множник та деякі способи його знаходження. У багатьох випадках рівняння (5.1), яке не є рівнянням у повних диференціалах (не виконується умова (5.4)), можна з допомогою множення на деяку функцію $\mu(x,y)$ звести до рівняння у повних диференціалах. Функцію $\mu(x,y)$ у цьому випадку називають ***інтегрувальним множником*** рівняння (5.1).

Нехай для коефіцієнтів рівняння (5.1) не справджується умова (5.4) і припустимо, що $\mu(x,y)$ — інтегрувальний множник цього рівняння. Тоді для коефіцієнтів рівняння

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx+\mu(x,y)N(x,y)\,dy=0$$

повинна справджуватись умова

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}.\tag{5.7}$$

Таким чином, інтегрувальний множник $\mu(x,y)$ є розв'язком рівняння з частинними похідними (5.7), розв'язати яке у загальному випадку значно складніше, ніж звичайне диференціальне рівняння (5.1). Проте в окремих випадках знайти інтегрувальний множник удається доволі легко. Розглянемо деякі з цих випадків.

Випадок 1. Нехай рівняння (5.1) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від x, тобто $\mu = \mu(x)$. Тоді, враховуючи, що $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$, з (5.7) маємо:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{d\mu}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx.$$

Якщо функція у правій частині останнього рівняння залежить тільки від x, тобто

$$\frac{1}{N}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \varphi(x),$$

то, зінтегрувавши це рівняння, одержуємо

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx}. \tag{5.8}$$

Випадок 2. Нехай рівняння (5.1) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від y, тобто $\mu = \mu(y)$. Тоді $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$ і з (5.7) знаходимо:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\,M\frac{d\mu}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{-\,M}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy.$$

Якщо функція у правій частині останнього рівняння залежить тільки від y, тобто

$$\frac{1}{-M}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \psi(y),$$

то інтегрувальним множником є

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)\,dy}. \tag{5.9}$$

Випадок 3. Припустимо, що інтегрувальний множник рівняння (5.1) залежить від заданої функції $\omega(x, y)$, тобто $\mu = \mu\left(\omega(x, y)\right)$. Тоді з (5.7) одержуємо:

$$N\,\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\,\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot\mu(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mu(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}}d\omega \qquad \left(N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0\right).$$

Якщо позначити

$$\psi(\omega) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}}, \tag{5.10}$$

то

$$\mu(\omega) = e^{\int \psi(\omega)\, d\omega} \equiv f(\omega) = f\left(\omega(x,y)\right). \tag{5.11}$$

Очевидно, що інтегрувальні множники $\mu(x)$ та $\mu(y)$, визначені формулами (5.8), (5.9), є окремими випадками стосовно випадку 3.

Приклад 2. *Знайти інтегрувальний множник рівняння* $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$ *та зінтегрувати це рівняння.*
Розв'язання. Очевидно, що $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Оскільки

$$-\frac{1}{M} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{4xy - 1 - 1}{y - 2xy^2} = -\frac{2}{y} \equiv \psi(y),$$

то інтегрувальний множник знаходимо за формулою (5.9):

$$\mu(y) = e^{-2\int \frac{dy}{y}} = e^{-2\ln|y|} = y^{-2}.$$

Якщо помножити обидві частини заданого рівняння на $\mu(y) = y^{-2}$, то одержуємо рівняння у повних диференціалах $(2x - 1/y)\,dx + \left(1 + x/y^2 + 1/y\right)dy = 0$.

Справді,

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = d\left(x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y|\right)$$

і, отже, загальним інтегралом є

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C. \ \blacksquare$$

Приклад 3. *Знайти інтегрувальний множник* $\mu(xy)$ *рівняння* $(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0$.

Розв'язання. Оскільки $\omega = xy$, то згідно з (5.10)

$$\psi(xy) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3y^2 - y\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y^3 - x\right)}{\left(2x^2y^3 - x\right)y - (2x^3y^2 - y)x} =$$
$$= \frac{4xy(x^2 - y^2)}{2x^2y^2(y^2 - x^2)} = -\frac{2}{xy}.$$

Тоді, на підставі (5.11), маємо:

$$\mu(xy) = \mu(\omega) = e^{\int \frac{-2d\omega}{\omega}} = \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{(xy)^2}.$$

Пропонуємо читачам переконатись, що інтегрувальний множник знайдено правильно, і з його допомогою зінтегрувати задане рівняння. ■

Замість того, щоб користуватися складними для запам'ятовування формулами (5.8)–(5.11), можна шукати інтегрувальний множник, повторюючи міркування, наведені для випадків 1–3.

Знаючи інтегрувальний множник, можна знайти не тільки загальний інтеграл диференціального рівняння, але й усі його особливі розв'язки. Справді, нехай $\mu = \mu(x, y)$ — інтегрувальний множник рівняння (5.1), тобто $dU = \mu\,(M\,dx + N\,dy)$. Тоді

$$\frac{1}{\mu}\,dU = M\,dx + N\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad dU = 0 \ \text{ або } \ \frac{1}{\mu} = 0.$$

Перше з одержаних рівнянь визначає загальний інтеграл рівняння (5.1) $U = C$, а друге — приводить до особливого розв'язку, якщо вздовж нього інтегрувальний множник перетворюється в безмежність.

Звідси одержуємо ***правило знаходження особливих розв'язків***:

– знаходять лінії, вздовж яких функція μ перетворюється в ∞;

– перевіряють, чи є знайдені лінії інтегральними кривими;

– перевіряють, чи містяться знайдені розв'язки у формулі загального розв'язку.

Ті зі знайдених розв'язків, які не містяться в загальному розв'язку, будуть особливими.

3. Теореми про існування, неєдиність та загальний вигляд інтегрувального множника. З'ясуємо деякі властивості інтегрувального множника і наведемо один загальний метод знаходження інтегрувального множника, який ґрунтується на використанні цих властивостей.

Оскільки функції $M(x,y)$, $N(x,y)$ неперервні разом зі своїми першими частинними похідними у деякій області G і у жодній точці цієї області не перетворюються в нуль, а інтегрувальний множник $\mu(x,y)$ не перетворюється в нуль і має неперервні частинні похідні першого порядку, то у кожній точці області G маємо єдиність розв'язку задачі Коші. Крім того, інтеграл $U(x,y)$, який відповідає інтегрувальному множнику $\mu(x,y)$, має неперервні частинні похідні другого порядку. Це твердження випливає з того, що якщо $dU = \mu\cdot(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy)$, то

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu N,$$

і оскільки праві частини мають неперервні частинні похідні за змінними x і y, то похідні від лівих частин також існують і є неперервними.

Доведемо, що за деяких умов, які гарантують існування загального інтеграла рівняння (5.1), існує також інтегрувальний множник цього рівняння.

Теорема 1. *Якщо рівняння* (5.1) *має загальний інтеграл* $U(x,y) = C$, *де функція* $U(x,y)$ *— двічі неперервно диференційовна, то це рівняння має також інтегрувальний множник.*
Доведення. Оскільки $dU \equiv 0$, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy \equiv 0,$$

де dy визначається рівнянням (5.1), то dx і dy задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = 0, \\ M\,dx + N\,dy = 0. \end{cases}$$

Оскільки диференціал незалежної змінної dx є довільним, то існує ненульовий розв'язок отриманої лінійної однорідної системи. Тому

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial y} \equiv \mu(x,y). \tag{5.12}$$

Звідси

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu\, M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu\, N$$

і, отже,

$$\mu(M\,dx + N\,dy) = \mu\, M\, dx + \mu\, N\, dy = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = dU,$$

тобто після множення на функцію μ з формули (5.12) ліва частина рівняння (5.1) є повним диференціалом функції U. Це й означає, що μ є інтегрувальним множником рівняння (5.1). ▶

З означення інтегрувального множника μ рівняння (5.1) випливає, що функція $C\mu$ для довільного C також є інтегрувальним множником цього рівняння. З наступної теореми випливає, що існують інтегрувальні множники рівняння (5.1) більш загального вигляду, ніж $C\mu$.

Теорема 2. *Якщо $U(x,y) = C$ — загальний інтеграл рівняння (5.1), а $\mu_0(x,y)$ — його інтегрувальний множник, то існує безліч інтегрувальних множників цього рівняння, які виражаються формулою*

$$\mu(x,y) = \mu_0(x,y)\varphi\big(U(x,y)\big), \tag{5.13}$$

де φ — довільна функція, яка не дорівнює тотожно нулю і має неперервну похідну.

Доведення. Помножимо ліву частину рівняння (5.1) на функцію (5.13). Тоді

$$\mu_0\varphi(U)\cdot(Mdx + Ndy) = \varphi(U)\cdot\big(\mu_0(Mdx+Ndy)\big) =$$
$$= \varphi(U)\,dU = d\left(\int\varphi(U)\,dU\right),$$

тобто ліва частина рівняння (5.1) є повним диференціалом функції $\int \varphi(U)\,dU$. Отже, кожна функція μ, визначена формулою (5.13), є інтегрувальним множником рівняння (5.1). ▶

Формула (5.13) містить у собі безліч інтегрувальних множників, породжених μ_0 і відповідним йому інтегралом. Виникає питання: чи всі інтегрувальні множники містяться у цій формулі? Відповідь на це питання дає теорема, яку наведемо без доведення (її доведення можна знайти, наприклад, у [7, с. 110–111]).

Теорема 3. *Два довільні інтегрувальні множники* $\mu_1(x, y)$ *і* $\mu_2(x, y)$ *рівняння* (5.1) *пов'язані співвідношенням*

$$\mu_2(x, y) = \mu_1(x, y)\,\varphi\big(U(x, y)\big). \tag{5.14}$$

Теорему 3 можна використати для практичного відшукання інтегрувального множника рівняння (5.1) методом розбиття рівняння на дві групи. Припустимо, що це рівняння можна записати у вигляді

$$(M_1\,dx + N_1\,dy) + (M_2\,dx + N_2\,dy) = 0,$$

причому для кожної групи можна знайти інтегрувальний множник. Нехай μ_1 і $U_1 = U_1(x, y)$ інтегрувальний множник і загальний інтеграл рівняння

$$M_1\,dx + N_1\,dy = 0,$$

а μ_2 і $U_2 = U_2(x, y)$ — інтегрувальний множник і загальний інтеграл рівняння

$$M_2\,dx + N_2\,dy = 0.$$

Тоді згідно з (5.14) усі інтегрувальні множники першої групи містяться у формулі $\mu = \mu_1\varphi(U_1)$, а всі інтегрувальні множники другої групи — у формулі $\mu = \mu_2\psi(U_2)$. Якщо вдасться вибрати функції φ і ψ так, щоб

$$\mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2), \tag{5.15}$$

то функція $\mu = \mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2)$ буде інтегрувальним множником усього рівняння (5.1).

Часто вдається розбити рівняння на дві групи, у кожній з яких є рівняння з відокремлюваними змінними. Для рівняння з відокремлюваними змінними

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0$$

інтегрувальним множником, зокрема, є функція $\frac{1}{M_2(x)N_1(y)}$.

Приклад 4. *Знайти інтегрувальний множник рівняння*

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$$

Розв'язання. Розіб'ємо ліву частину рівняння на дві групи:

$$\left(\frac{y}{x}\,dx + \,dy\right) + \left(3x^2\,dx + \frac{x^3}{y}\,dy\right) = 0$$

і знайдемо для рівнянь

$$\frac{y}{x}\,dx + \,dy = 0, \quad 3x^2\,dx + \frac{x^3}{y}\,dy = 0$$

інтегрувальні множники та відповідні інтеграли:

$$\mu_1 = x,\ \ U_1 = xy;\ \ \mu_2 = y,\ \ U_2 = x^3y.$$

З (5.15) маємо, що $x\varphi(xy) = y\psi(x^3y)$. Візьмемо $\varphi(U) = U^2$, $\psi(U) = U$, тоді $x(xy)^2 = y(x^3y) = x^3y^2$. Отже, $\mu(x,y) = x^3y^2$. ■

Рекомендована література: [4, с. 41–48], [6, с. 33–41], [7, с. 96–112], [8, с. 86–96], [9, с. 89–101], [10, с. 46–57].

Питання до лекції 5

1. Якими повинні бути функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$, щоб рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ було рівнянням у повних диференціалах? Як формулюється необхідна і достатня ознака того, щоб це рівняння було у повних диференціалах?

2. Як зінтегрувати рівняння у повних диференціалах? Який вигляд має загальний інтеграл такого рівняння?

3. Що називають інтегрувальним множником? Наведіть формули для знаходження інтегрувальних множників вигляду $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(\omega(x,y))$.

4. Як знайти особливі розв'язки рівняння, для якого є відомим його інтегрувальний множник?

5. Чи кожне диференціальне рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ має інтегрувальний множник?

6. Яким співвідношенням пов'язані два інтегрувальні множники μ_1 і μ_2 рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$?

Вправи до лекції 5

1. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння у повних диференціалах та зінтегруйте його:

$$\text{а) } (ye^x - e^y)dx = (xe^y - e^x)dy; \quad \text{б) } 3x^2e^y dx + (x^3e^y - x)dy = 0;$$
$$\text{в) } (y\sin 2x + x)dx + (y^2 - \cos 2x)dy = 0.$$

2. Знайдіть інтегрувальний множник лінійного неоднорідного рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ та розв'яжіть це рівняння з допомогою цього множника (такий метод називають методом Ейлера).

3. Зінтегруйте рівняння з допомогою інтегрувального множника $\mu(\omega)$:

$$\text{а) } \left(4xy - \frac{y^2}{x^2} + 3\right)dx + \left(x^2 - \frac{2y}{x}\right)dy = 0, \quad \omega = x;$$
$$\text{б) } (3x^2 - 1)\,dx + \frac{2x^3 - 2x + 3y}{y}\,dy = 0, \quad \omega = y;$$
$$\text{в) } (3y - 2x^2y^2)\,dx = (x^3y - x)\,dy, \quad \omega = xy.$$

4. Знайдіть інтегрувальний множник рівняння, використовуючи метод розбиття на дві групи (с. 68–69):

$$\text{а) } y(x + y^2)\,dx + x^2(y - 1)\,dy = 0; \quad \text{б) } (x^2 - y)\,dx + x(y + 1)\,dy = 0.$$

Лекція 6. Неявні диференціальні рівняння першого порядку

План

1. Основні означення й поняття.
2. Задача Коші. Класифікація розв'язків.
3. Рівняння степеня n.

1. Основні означення й поняття. ***Неявним диференціальним рівнянням першого порядку*** (*диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної*) називають співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6.1}$$

де функція $F(x, y, y')$ неперервна в деякій області D тривимірного простору.

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна на інтервалі (a, b), називають ***розв'язком*** рівняння (6.1), якщо на цьому інтервалі вона перетворює його у тотожність.

Якщо рівняння (6.1) можна розв'язати через елементарні функції відносно y', то одержимо одне або декілька рівнянь, розв'язаних відносно похідної

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.2}$$

де $f_k(x, y)$ — дійсні функції, тобто інтегрування рівняння (6.1) зводиться до інтегрування кожного з рівнянь (6.2), основні типи яких розглядались у лекціях 2–5.

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $y'^2 - 9\sqrt[3]{y^4} = 0$.
Розв'язання. Задане рівняння розпадається на два рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ і $y' = -3\sqrt[3]{y^2}$.

Загальними розв'язками цих рівнянь є $y = (x + C)^3$ і $y = -(x+C)^3$ відповідно. З геометричної точки зору це означає, що кожна з ліній $y = (x+C)^3$ та $y = -(x+C)^3$ є інтегральною кривою. Окрім того, розв'язком рівняння є $y = 0$ (рис. 6.1).

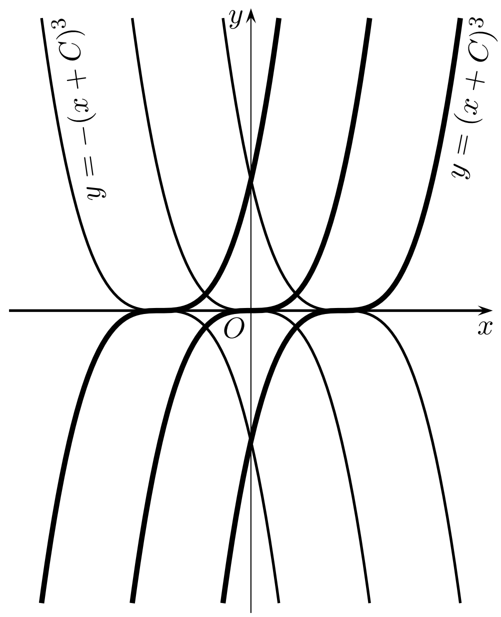


Рис. 6.1

Задане рівняння має також безліч розв'язків, які можна «склеїти» з частин наведених вище розв'язків. Наприклад, такими розв'язками будуть функції

$$y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ (x-1)^3, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -(x+1)^3, & \text{якщо } x < -1, \\ 0, & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)^3, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

графіки яких зображені на рис. 6.2 і 6.3 відповідно. Однак надалі такі розв'язки ми не розглядатимемо.

***Відповідь*:** $y = (x + C)^3$, $y = -(x + C)^3$, $y = 0$.

Неявне диференціальне рівняння (6.1), так само, як і рівняння, розв'язане відносно похідної, визначає на площині Oxy деяке поле напрямів. Але тепер, як правило, у заданій точці (x_0, y_0) матимемо не один, а декілька напрямів поля, бо, розв'язуючи рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$ відносно y', зазвичай одержуватимемо декілька дійсних розв'язків. Наприклад, рівняння з прикладу 1 визначає у кожній точці (x_0, y_0), де $y_0 > 0$, два напрями поля: $y' = 3\sqrt[3]{y_0^2}$ і $y' = -3\sqrt[3]{y_0^2}$. У кожній точці $(x_0, 0)$ осі Ox це рівняння визначає тільки один напрям поля: $y'|_{(x_0,0)} = 0$.

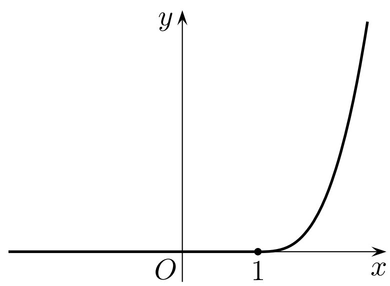


Рис. 6.2

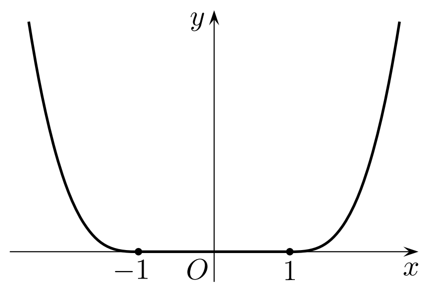


Рис. 6.3

2. Задача Коші. Класифікація розв'язків. ***Задача Коші*** для рівняння (6.1) формулюється так само, як і для рівняння, розв'язаного відносно похідної: потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ рівняння (6.1), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{6.3}$$

При цьому, якщо розв'язків, які задовольняють початкову умову (6.3), не більше, ніж кількість напрямів поля, визначеного рівнянням (6.1) у цій точці, тобто не більше від кількості розв'язків y_0' рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$, то кажуть, що задача Коші (6.1), (6.3) має єдиний розв'язок. Інакше вважають, що єдиність розв'язку цієї задачі порушується.

Нехай y_0' — один з дійсних коренів рівняння (6.1). З'ясуємо умови, за яких існує єдина інтегральна крива цього рівняння, що проходить через точку (x_0, y_0), причому дотична до неї у цій точці утворює з додатним напрямом Ox кут α_0, тангенс якого дорівнює y_0'.

Теорема 1. *Нехай ліва частина рівняння* (6.1) *задовольняє такі умови*:

1) *функція* $F(x, y, y')$ *визначена і неперервна разом з частинними похідними* $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ *в деякому замкненому околі точки* (x_0, y_0, y_0');

2) $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;
3) $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0, y_0, y_0')} \neq 0$.

Тоді рівняння (6.1) *має єдиний розв'язок* $y = y(x)$, *визначений і неперервно диференційовний у деякому околі точки* $x = x_0$, *який задовольняє початкову умову* $y(x_0) = y_0$, *і такий, що* $y'(x_0) = y_0'$.

Доведення. Умови, накладені на функцію $F(x, y, y')$, гарантують існування неявної функції двох змінних. Тому рівняння (6.1) у деякому замкненому околі $\overline{D}$ точки (x_0, y_0, y_0') визначає y' як однозначну функцію

$$y' = f(x, y), \tag{6.4}$$

причому функція $f(x, y)$ — неперервна разом зі своїми частинними похідними першого порядку і

$$f(x_0, y_0) = y_0'.$$

Отже, $f(x, y)$ — неперервна функція в $\overline{D}$ і в цій замкненій області має обмежену похідну за змінною y. Тоді права частина рівняння (6.4) задовольняє умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку. Тому на деякому інтервалі існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (6.4), а, отже, і рівняння (6.1), такий, що

$$y(x_0) = y_0.$$

Покажемо тепер, що $y'(x_0) = y_0'$. Якщо в рівності (6.4) покласти $x = x_0$, то одержимо:

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) = y_0'. \quad \blacktriangleright$$

Припустимо, що рівняння (6.1) в околі точки (x_0, y_0) може бути розв'язане відносно похідної, тобто розпадається на сукупність рівнянь (6.2). Нехай кожне з цих рівнянь має загальний розв'язок

$$y = \varphi_k(x, C), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.5}$$

або загальний інтеграл

$$\Phi_k(x, y) = C, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{6.6}$$

де C — довільна стала. Тоді сукупність загальних розв'язків (6.5) (або сукупність загальних інтегралів (6.6)) називають ***загальним інтегралом*** рівняння (6.1).

Частинним розв'язком рівняння (6.1) називають функцію, утворену з якогось загального розв'язку (6.5) при певному значенні сталої C.

Особливим розв'язком називають розв'язок, у кожній точці якого порушується умова його єдиності. Особливий розв'язок не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) диференціального рівняння при жодному значенні сталої C.

З теореми 1 випливає, що особливі розв'язки можуть існувати лише у тих точках, де порушуються умови цієї теореми. Тобто якщо $F(x, y, y')$ неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку, то особливі розв'язки потрібно шукати серед тих точок, координати яких задовольняють систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \quad p = y'.$$

Якщо ця система сумісна, то, виключаючи параметр p, отримаємо деяку множину точок $\varphi(x, y) = 0$, яка може бути особливим розв'язком рівняння (6.1). Однак потрібно ще перевірити, чи геометричне місце точок $\varphi(x, y) = 0$ є розв'язком заданого рівняння, і чи у кожній його точці порушується властивість єдиності розв'язку (тобто чи знайдений розв'язок справді є особливим).

Крім наведеного способу знаходження особливого розв'язку диференціального рівняння (6.1) існує інший спосіб, що ґрунтується на понятті обвідної. Нагадаємо, що ***обвідною*** називають інтегральну криву, яка у кожній точці має спільну дотичну з однією з інтегральних кривих, але на жодній ділянці не збігається з жодною з інтегральних кривих.

Виведемо необхідні умови існування обвідної. Нехай

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{6.7}$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння (6.1) і сім'я кривих (6.7) має обвідну, рівняння якої запишемо у параметричній формі

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{6.8}$$

де $x(t)$, $y(t)$ — диференційовні функції на деякому проміжку (α, β). Оскільки обвідна для різних t дотикається до різних кривих із сім'ї (6.7), то величину C можна розглядати як функцію змінної t, тобто $C = C(t)$. Припустимо, що $C'(t) \neq 0$, $t \in (\alpha, \beta)$, оскільки інакше обвідна у кожній своїй точці буде дотикатися до однієї й тієї самої інтегральної кривої з сім'ї (6.7), а тому збігатиметься з цією кривою.

Підставимо (6.8) у (6.7) та здиференціюємо отриману тотожність

$$\Phi\bigl(x(t), y(t), C(t)\bigr) = 0$$

за змінною t:

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) + \Phi'_C C'(t) = 0. \tag{6.9}$$

Кутовий коефіцієнт k дотичної до кривої із сім'ї (6.7) визначається формулою

$$k = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y} \quad (\Phi'_y \neq 0),$$

а кутовий коефіцієнт k_1 дотичної до обвідної як

$$k_1 = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Оскільки $k = k_1$, то

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) = 0.$$

Тоді з (6.9) маємо:

$$\Phi'_C\bigl(x(t), y(t), C(t)\bigr) = 0,$$

бо $C'(t) \neq 0$. Отже, якщо сім'я кривих (6.7) має обвідну і в кожній точці кривих з цієї сім'ї $\Phi'_x(x,y,C) \neq 0$ або $\Phi'_y(x,y,C) \neq 0$, то умови

$$\begin{cases} \Phi\big(x(t), y(t), C(t)\big) = 0, \\ \Phi'_C\big(x(t), y(t), C(t)\big) = 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

є необхідними для того, щоб крива (6.8) була обвідною для сім'ї кривих (6.7).

Покажемо, що умови (6.10) у випадку, коли в кожній точці кривої (6.8) Φ'_x і Φ'_y одночасно не дорівнюють нулю, є також достатніми для того, щоб ця крива була обвідною для сім'ї кривих (6.7). Нехай, наприклад, $\Phi'_y\big(x(t), y(t), C(t)\big) \neq 0$. Тоді, диференціюючи першу тотожність системи (6.10) за змінною t, матимемо (6.9). Звідси, згідно з другим рівнянням системи (6.10),

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) = 0.$$

Отже,

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y},$$

звідки й випливає потрібне твердження. Таким чином, одержали таке ***правило відшукання обвідної***:

1) складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0, \end{cases} \tag{6.11}$$

де $\Phi(x,y,C) = 0$ — загальний інтеграл диференціального рівняння (6.1);

2) із системи (6.11) з допомогою виключення параметра C знаходимо криву $\varphi(x,y) = 0$;

3) із кривої $\varphi(x,y) = 0$ вилучаємо точки, де Φ'_x і Φ'_y одночасно дорівнюють нулю. Решта кривої $\varphi(x,y) = 0$ і буде обвідною заданої сім'ї інтегральних кривих.

3. Рівняння степеня *n*. Розглянемо деякі типи неявних диференціальних рівнянь вигляду (6.1), для яких існують загальні методи розв'язання. Диференціальне рівняння вигляду

$$(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0 \quad (6.12)$$

називають ***рівнянням першого порядку степеня n***. Як відомо з алгебри, рівняння (6.12) визначає n значень для y'. Якщо не враховувати комплексні корені, то матимемо m $(m \leqslant n)$ диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = f_1(x,y),\ y' = f_2(x,y),\ \ldots,\ y' = f_m(x,y). \quad (6.13)$$

Сукупність загальних розв'язків $y = \varphi_k(x,C)$ або загальних інтегралів $\Phi_k(x,y,C) = 0$, $k = 1,2,\ldots,m$, рівнянь (6.13) є загальним інтегралом рівняння (6.12). Його можна записати також у вигляді

$$\big(y - \varphi_1(x,C)\big) \cdot \big(y - \varphi_2(x,C)\big) \cdot \ldots \cdot \big(y - \varphi_m(x,C)\big) = 0$$

або

$$\Phi_1(x,y,C) \cdot \Phi_2(x,y,C) \cdot \ldots \cdot \Phi_m(x,y,C) = 0.$$

Якщо хоча б одне з рівнянь (6.13) має особливі розв'язки, то вони будуть також особливими розв'язками рівняння (6.12).

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння*

$$x^2y'^2 + 2xyy' + y^2 - 4x = 0.$$

Розв'язання. Маємо квадратне рівняння відносно y'. Нехай D — дискримінант цього рівняння. Тоді

$$D/4 = x^2y^2 - x^2(y^2 - 4x) = 4x^3.$$

Розв'язуючи квадратне рівняння, одержуємо два лінійні диференціальні рівняння (лекція 4):

$$y' = -\frac{y}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{і} \quad y' = -\frac{y}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Зінтегруємо перше з них методом Лаґранжа. Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння $y' + \frac{y}{x} = 0$ є $y = \frac{C}{x}$. Отже, розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = \frac{C(x)}{x}$. Підставивши цю функцію у рівняння, одержуємо:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} = -\frac{C(x)}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 2\sqrt{x} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{C}{x}.$$

Аналогічно можна показати, що загальним розв'язком рівняння $y' = -\frac{y}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ є $y = -\frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{C}{x}$, де C — довільна стала.
***Відповідь*:** $y = \pm\frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{C}{x}$.

Легко інтегрується ***рівняння, яке містить тільки похідну***, тобто рівняння вигляду

$$F(y') = 0. \tag{6.14}$$

Це рівняння може, зокрема, бути окремим випадком рівняння (6.12). Нехай рівняння (6.14) має деяку (скінченну або нескінченну) кількість дійсних розв'язків $y' = k_j$, $j = 1, 2, \ldots$, де k_j — сталі. Далі, оскільки

$$y' = k_j \quad \Rightarrow \quad y = k_j x + C \quad \Rightarrow \quad k_j = \frac{y - C}{x},$$

то одержуємо загальний інтеграл цього рівняння

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \tag{6.15}$$

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $y'^3 - 5y'^2 + 7 = 0$.
Розв'язання. Загальний інтеграл знаходимо за формулою (6.15):

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^3 - 5\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + 7 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (y - C)^3 - 5x(y - C)^2 + 7x^3 = 0. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: Citelavrenjuk59–67, [4, с. 51–67], [6, с. 42–49], [9, с. 125–126, 131–150], [10, с. 58–86].

Питання до лекції 6

1. Який загальний вигляд має неявне диференціальне рівняння першого порядку? Яку функцію називають розв'язком такого рівняння?

2. Як побудувати поле напрямів, задане неявним диференціальним рівнянням першого порядку?

3. Як формулюється задача Коші для неявного диференціального рівняння першого порядку? Коли розв'язок цієї задачі єдиний?

4. Як формулюється теорема про існування єдиного розв'язку задачі Коші для неявного диференціального рівняння першого порядку?

5. Яке неявне диференціальне рівняння називають рівнянням першого порядку степеня n? Як воно інтегрується?

6. Який вигляд має загальний інтеграл рівняння $F(y') = 0$?

Вправи до лекції 6

1. Зінтегруйте рівняння та виділіть інтегральні криві, які проходять через задану точку:

$$\text{а) } y'^2 = 4y,\ \ M(1,0);\quad \text{б) } yy'^2 - (xy+1)y' + x = 0,\ \ M(1,1).$$

2. Знайдіть за виглядом рівнянь криві, підозрілі на особливі розв'язки, і перевірте, чи будуть вони особливими розв'язками:

$$\text{а) } y'^2 = y^2;\quad \text{б) } y'^2 - 2yy' + x^2 = 0.$$

3. Зінтегруйте рівняння, розв'язавши їх спочатку відносно похідної:

$$\text{а) } y'^2 - (2x+y)y' + 2xy = 0;\quad \text{б) } y'^3 - y'e^{4x} = 0.$$

4. Зінтегруйте рівняння:

$$\text{а) } e^{y'} + 2y' = 1;\quad \text{б) } y'^3 + 2y'^2 - y' + 3 = 0.$$

Лекція 7. Неявні диференціальні рівняння першого порядку (продовження)

План

1. Метод уведення параметра.
2. Рівняння Лаґранжа та рівняння Клеро.
3. Задача про ізогональні траєкторії.

1. Метод уведення параметра. Нехай неявне диференціальне рівняння

$$F(x, y, y') = 0 \tag{7.1}$$

можна розв'язати відносно y, тобто

$$y = f(x, y'). \tag{7.2}$$

Тоді можна використати ***метод уведення параметра***. Якщо позначити $y' = p(x)$, то з (7.2) маємо співвідношення

$$y = f(x, p), \tag{7.3}$$

диференціюючи яке, одержуємо:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \Rightarrow \quad y'dx = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad pdx = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp. \tag{7.4}$$

Припустимо, що вдалось знайти загальний розв'язок $x = \varphi(p, C)$ рівняння (7.4). Тоді, підставляючи його у (7.3), одержуємо загальний розв'язок рівняння (7.2) у параметричній формі

$$x = \varphi(p, C), \quad y = f\big(\varphi(p, C), p\big).$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (7.4) у вигляді $p = h(x, C)$, то, підставивши його у (7.3), отримаємо загальний розв'язок рівняння (7.2) у явному вигляді $y = f(x, h(x, C))$.

Якщо рівняння (7.4) має особливий розв'язок $p = \psi(x)$, то функція $y = f(x, \psi(x))$ може бути особливим розв'язком рівняння (7.2).

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $y = y'^2 - 3xy' + 3x^2$.
Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = p^2 - 3xp + 3x^2. \tag{7.5}$$

Здиференціюємо (7.5), враховуючи, що $dy = y'dx = pdx$:

$$\begin{gathered} dy = 2pdp - 3xdp - 3pdx + 6xdx \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad pdx = (2p - 3x)dp - (3p - 6x)dx \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (2p - 3x)dp - 2(2p - 3x)dx = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (2p - 3x)(dp - 2dx) = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = 2dx \text{ або } 2p - 3x = 0. \end{gathered}$$

Отже, одержали два рівняння. З першого із них знаходимо $p = 2x + C$. Підставляючи знайдене значення p у (7.5), одержуємо загальний розв'язок

$$y = (2x + C)^2 - 3x(2x + C) + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + Cx + C^2.$$

З рівняння $2p - 3x = 0$ знаходимо $p = 3x/2$, а тому $y = 3x^2/4$. Цей розв'язок — особливий.
Відповідь: $y = x^2 + Cx + C^2$, $y = 3x^2/4$.

Нехай рівняння (7.1) можна розв'язати відносно x, тобто воно має вигляд

$$x = f(y, y'). \tag{7.6}$$

Це рівняння також можна розв'язувати методом уведення параметра. Позначимо $y' = p(y)$. Тоді, враховуючи, що $dx = \frac{dy}{y'}$, маємо:

$$\begin{gathered} x = f(y, p) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{dy}{p} = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Припустимо, що знайдено загальний розв'язок $y = \varphi(p, C)$ рівняння (7.7). Підставляючи його у рівняння $x = f(y, p)$, одержуємо загальний розв'язок рівняння (7.6) у параметричній формі

$$x = f\big(\varphi(p, C), p\big), \quad y = \varphi(p, C).$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (7.7) у вигляді $p = h(y, C)$, то матимемо загальний розв'язок рівняння (7.6) у явному вигляді $x = f(y, h(y, C))$.

Якщо рівняння (7.7) має особливий розв'язок $p = \psi(y)$, то функція $x = f\,(y, \psi(y))$ може бути особливим розв'язком рівняння (7.6).

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $x = y'^4 + 2y'$.
Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді $x = p^4 + 2p$. Далі маємо:

$$dx = 4p^3 dp + 2dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{p} = 4p^3 dp + 2dp \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad dy = (4p^4 + 2p)dp \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4p^5}{5} + p^2 + C.$$

***Відповідь*:** $x = p^4 + 2p,\ y = 4p^5/5 + p^2 + C.$

2. Рівняння Лаґранжа та рівняння Клеро. Окремим випадком рівняння (7.2) є рівняння вигляду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \tag{7.8}$$

Якщо функція $\varphi(y')$ тотожно не збігається з y', то (7.8) називають ***рівнянням Лаґранжа***. Як бачимо, рівняння Лаґранжа лінійне відносно x і y.

Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{7.9}$$

Здиференціюємо (7.9), беручи до уваги, що $dy = pdx$:

$$dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (p - \varphi(p))dx = (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp \quad (p \neq \varphi(p)) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} - \frac{x\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Останнє рівняння є лінійним відносно функції $x(p)$. Інтегруючи його за формулою (4.6) з лекції 4, одержимо $x = \omega(p, C)$, що разом з (7.9) визначатиме загальний розв'язок рівняння Лаґранжа у параметричній формі.

Якщо рівняння $p = \varphi(p)$ має дійсні корені $p = p_i$, то, підставляючи їх у рівняння (7.8), одержуємо $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$. Ці розв'язки рівняння Лаґранжа (з геометричної точки зору — прямі) можуть бути особливими.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $y = 2xy' - \ln y'$.
Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = 2xp - \ln p \quad \Rightarrow \quad dy = 2xdp + 2pdx - \frac{1}{p}dp \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad pdx = (2x - \frac{1}{p})dp + 2pdx \quad \Rightarrow \quad pdx + (2x - \frac{1}{p})dp = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^2} \quad (p \neq 0).$$

Розв'язуючи одержане лінійне рівняння (лекція 4), знаходимо, що $x = (p + C)/p^2$. Підставляючи цей вираз x у рівність $y = 2xp - \ln p$, знаходимо $y = 2(p + C)/p - \ln p$. Отже, загальним розв'язком у параметричній формі є

$$x = \frac{p + C}{p^2}, \quad y = \frac{2(p + C)}{p} - \ln p.$$

Якщо $p = 0$, то, підставляючи його у $y = 2xp - \ln p$, переконуємось, що ця функція не є розв'язком, бо $\ln 0$ не існує.
***Відповідь*:** $x = (p + C)/p^2,\ y = 2xp - \ln p$.

Розглянемо окремий випадок рівняння Лаґранжа, коли $\varphi(y') \equiv y'$:

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{7.10}$$

Рівняння (7.10) називають ***рівнянням Клеро***. Інтегруючи його за тією самою схемою, що і рівняння Лаґранжа, маємо:

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad y = xp + \psi(p) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad pdx = xdp + pdx + \psi'(p)dp \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dp \cdot (x + \psi'(p)) = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = 0 \quad \text{або} \quad x + \psi'(p) = 0.$$

З першого рівняння знаходимо $p = C$ і, підставляючи у формулу $y = xp + \psi(p)$, одержуємо загальний розв'язок рівняння Клеро:

$$y = xC + \psi(C). \tag{7.11}$$

Легко бачити, що з геометричної точки зору загальний розв'язок рівняння Клеро є однопараметричною сім'єю прямих, а для його одержання потрібно у рівнянні (7.10) замінити похідну y' на сталу C.

З рівняння $x + \psi'(p) = 0$ знаходимо $x = -\psi'(p)$. Підставляючи цей вираз у формулу $y = xp + \psi(p)$, одержуємо, що $y = \psi'(p)p + \psi(p)$. Таким чином, маємо розв'язок

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = \psi'(p)\cdot p + \psi(p). \end{cases} \tag{7.12}$$

Розв'язок (7.12) зазвичай є особливим, і у цьому випадку з геометричної точки зору маємо обвідну сім'ї (7.11). Справді, відшукуючи криву, підозрілу на обвідну сім'ї (7.11), за правилом, указаним наприкінці другого пункту лекції 6, маємо систему

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C), \\ 0 = x + \psi'(C), \end{cases}$$

друге рівняння якої одержане з першого диференціюванням за параметром C. Звідси знаходимо

$$\begin{cases} x = -\,\psi'(C), \\ y = -\,\psi'(C)\,C + \psi(C), \end{cases}$$

тобто систему, яка відрізняється від (7.12) тільки позначенням параметра.

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння* $y = xy' - y'^3$.
Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = xp - p^3 \quad \Rightarrow \quad dy = xdp + pdx - 3p^2dp \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (x - 3p^2)dp = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = 0 \text{ або } x - 3p^2 = 0.$$

З рівняння $dp = 0$ знаходимо, що $p = C$. Підставляючи $p = C$ у рівність $y = xp - p^3$, одержуємо загальний розв'язок заданого рівняння $y = Cx - C^3$.

Якщо $x = 3p^2$, то $y = 3p^3 - p^3 = 2p^3$. Таким чином, особливим розв'язком є $x = 3p^2$, $y = 2p^3$. Виключивши звідси параметр p, одержуємо особливий розв'язок у явному вигляді $y = \pm 2\sqrt{\frac{x^3}{27}}$ або в неявній формі $27y^2 = 4x^3$.

***Відповідь*:** $y = Cx - C^3,\ 27y^2 = 4x^3$.

3. Задача про ізогональні траєкторії. Як ще один приклад одного з багатьох геометричних застосувань диференціальних рівнянь першого порядку розглянемо задачу про ізогональні траєкторії.

Якщо крива L_1 перетинає усі криві L заданої сім'ї під однаковим кутом α, то її називають ***ізогональною траєкторією*** цієї сім'ї[3] (рис. 7.1). Якщо, зокрема, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то ізогональну траєкторію називають ***ортогональною***.

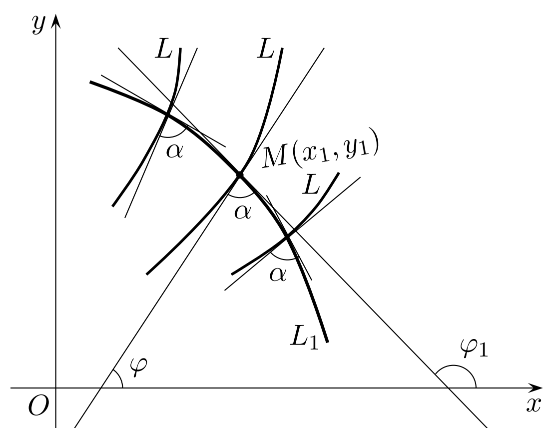


Рис. 7.1

Знайдемо сім'ю ізогональних траєкторій заданої однопараметричної сім'ї кривих

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{7.13}$$

[3] Кутом між двома кривими у точці їх перетину називають кут між дотичними до них у цій точці.

де C — параметр. Для цього спочатку складемо диференціальне рівняння сім'ї (7.13) (п. 3 лекції 1), виключивши параметр C із системи

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0, \\ \frac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial x} + \frac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial y} \cdot y' = 0. \end{cases}$$

У результаті одержимо диференціальне рівняння сім'ї (7.13) вигляду

$$F(x,y,y') = 0. \tag{7.14}$$

Тепер визначимо співвідношення між кутовими коефіцієнтами дотичних до кривої сім'ї (7.14) і до ізогональної траєкторії в точці їх перетину. Нехай $M(x_1,y_1)$ — довільна точка ізогональної траєкторії, φ і φ_1 — кути, які утворюють з віссю Ox дотичні до деякої кривої сім'ї (7.14) в точці M і до ізогональної траєкторії в цій самій точці відповідно (рис. 7.1). Тоді

$$\varphi_1 = \varphi + \alpha,$$

причому

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{dy_1}{dx_1}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Припустимо спочатку, що $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, і позначимо $\operatorname{tg}\alpha$ через k. Маємо $\varphi = \varphi_1 - \alpha$, а тому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi_1}$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{1 + k\frac{dy_1}{dx_1}}. \tag{7.15}$$

Рівність (7.15) установлює шуканий зв'язок між напрямом дотичної в будь-якій точці M траєкторії L_1 і напрямом дотичної до кривої L сім'ї (7.14), що проходить через цю точку.

Тоді диференціальне рівняння сім'ї ізогональних траєкторій має вигляд

$$F\left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{1 + k\frac{dy_1}{dx_1}}\right) = 0$$

або, перепозначивши x_1 і y_1 відповідно через x і y,

$$F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0. \tag{7.16}$$

Зінтегрувавши рівняння (7.16), знайдемо шукану сім'ю ізогональних траєкторій.

Якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = -\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$$

і, отже, замість (7.15) маємо співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}.$$

Замінивши в (7.14) y' на $-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}$, отримуємо диференціальне рівняння сім'ї ортогональних траєкторій

$$F\left(x_1, y_1, -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right) = 0$$

або, перепозначивши x_1 і y_1 через x і y,

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0. \tag{7.17}$$

Зінтегрувавши рівняння (7.17), знайдемо шукану сім'ю ортогональних траєкторій.

Приклад 5. *Скласти диференціальне рівняння ізогональних траєкторій сім'ї кіл $x^2 + y^2 = C$, що перетинають їх під кутом $\alpha = \frac{\pi}{4}$.*

Розв'язання. Складемо диференціальне рівняння заданої сім'ї кіл. Позначимо

$$\Phi(x, y, C) \equiv x^2 + y^2 - C,$$

тоді
$$\Phi'_x + \Phi'_y y' \equiv 2x + 2yy'.$$
Виключаючи параметр C із системи
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C, \\ 2x + 2yy' = 0, \end{cases}$$
одержуємо диференціальне рівняння $x + yy' = 0$.

З формули (7.16) випливає, що шуканим диференціальним рівнянням ізогональних траєкторій є
$$x + y\frac{y' - 1}{1 + y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + xy' + yy' - y = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x - y + (x + y)y' = 0. \ \blacksquare$$

Приклад 6. *Скласти диференціальне рівняння ортогональних траєкторій сім'ї кіл* $x^2 + y^2 = C$.
Розв'язання. Диференціальне рівняння
$$x + yy' = 0$$
заданої сім'ї кіл було одержане у попередньому прикладі. З формули (7.17) випливає, що шуканим диференціальним рівнянням ортогональних траєкторій є
$$x + y\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad xy' = y. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [1, с. 73–81, 106–112], [6, с. 42–49], [7, с. 125–147], [8, с. 112–131], [10, с. 66–76, 86–89].

Питання до лекції 7

1. Яка заміна використовується для інтегрування рівняння $y = f(x, y')$? Чи може це рівняння мати особливі розв'язки?
2. Яка заміна використовується для інтегрування рівняння $x = f(y, y')$?

3. Який вигляд має рівняння Лаґранжа? Яку заміну використовують для інтегрування цього рівняння? Які криві можуть бути його особливими розв'язками?

4. Який вигляд має рівняння Клеро? Як знайти загальний і особливий розв'язки цього рівняння?

5. Що таке ізогональна траєкторія заданої сім'ї кривих на площині? Як побудувати диференціальне рівняння сім'ї ізогональних траєкторій?

6. Що таке ортогональна траєкторія заданої сім'ї кривих на площині? Як побудувати диференціальне рівняння сім'ї ортогональних траєкторій?

Вправи до лекції 7

1. Зінтегруйте рівняння:

$$\text{а) } y = (y' - 1)e^{y'}; \quad \text{б) } x({y'}^2 - 1) = 2y'.$$

2. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння Лаґранжа та зінтегруйте його:

$$\text{а) } y' = 2xy - 3y'^2; \quad \text{б) } y = 2xy' - 3y'^2; \quad \text{в) } y = xy' - 3y'^2.$$

3. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння Клеро та зінтегруйте його:

$$\text{а) } y' = 2xy + 3y'^2; \quad \text{б) } y = xy' + 3xy'^2; \quad \text{в) } y - xy' - \sqrt{1 - y'^2} = 0.$$

4. Знайдіть ізогональні траєкторії сім'ї прямих $y = Cx$, які перетинають ці прямі під кутом $60°$.

5. Знайдіть ортогональні траєкторії сім'ї прямих $y = Cx$.

Лекція 8. Основні властивості розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку

План

1. Принцип стискаючих відображень.
2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші.
3. Продовження розв'язку задачі Коші.
4. Коректність задачі Коші.

1. Принцип стискаючих відображень. ***Метричним простором*** називають множину $W = \{x\}$ елементів x довільної природи, якщо для будь-якої пари елементів $x, y \in W$ за певним правилом уведено ***метрику*** (***відстань***), тобто числову функцію $\rho(x, y)$, яка задовольняє такі властивості (аксіоми):

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, причому $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (для будь-яких $x, y, z \in W$).

Елементи метричного простору називатимемо також ***точками*** цього простору.

Наведемо два важливі приклади метричних просторів.

1. Множина дійсних n-вимірних векторів $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з метрикою

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

є метричним простором. Його називають ***n-вимірним евклідовим простором*** і позначають $\mathbf{R}^n$.

2. Множина дійсних неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $y(t)$ з метрикою

$$\rho\left(x(t), y(t)\right) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

також є метричним простором. Цей простір позначають $C[a, b]$.

Для обох просторів властивості з означення метрики легко перевіряються.

Послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ елементів метричного простору W називають ***фундаментальною***, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+p}) = 0$$

для довільного цілого p.

Метричний простір W називають ***повним***, якщо у ньому будь-яка фундаментальна послідовність x_1, x_2, x_3, $\ldots$ збігається до деякого елемента цього ж простору. Важливими прикладами повних просторів є простори $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ і $C[a, b]$.

Нехай у повному метричному просторі W заданий ***оператор*** (відображення, функція) A, який кожному елементу простору W ставить у відповідність елемент цього ж простору:

$$y = Ax, \quad x, y \in W.$$

Тоді кажуть, що оператор A відображає простір W у себе.

Оператор A називають ***стискаючим***, якщо існує таке число α, $0 \leqslant \alpha < 1$, що для будь-яких елементів $x, y \in W$

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y). \tag{8.1}$$

Число α при цьому називають ***коефіцієнтом стиснення***.

Елемент $\varphi \in W$ називають ***нерухомою точкою*** оператора A, якщо $A\varphi = \varphi$. Інакше кажучи, нерухомі точки — це розв'язки рівняння $Ax = x$.

Відзначимо, що багато питань, пов'язаних з існуванням та єдиністю розв'язків рівнянь різних типів, можна звести до питання про існування нерухомої точки деякого відображення A метричного простору у себе. Однією з найважливіших умов існування нерухомої точки є ***принцип стискаючих відображень***, уперше сформульований С. Банахом. Цей принцип є теоретичною основою ***методу послідовних наближень*** (***методу ітерацій***), який широко використовується для наближеного розв'язування диференціальних, інтегральних та алгебричних рівнянь.

Теорема 1 (принцип стискаючих відображень). *Якщо стискаючий оператор A відображає повний метричний простір W у себе, то існує єдина нерухома точка φ цього оператора. Її знаходять за формулою*

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} x_n \quad (x_n = Ax_{n-1},\ \ n = 1, 2, \dots),$$

причому елемент x_0 у просторі W вибирають довільно.

Доведення. Візьмемо довільний елемент $x_0 \in W$ і побудуємо послідовність елементів

$$\left.\begin{array}{c} x_0, \quad x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0, \ \ \dots, \\ x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \ \ \dots \end{array}\right\} \tag{8.2}$$

Покажемо, що ця послідовність фундаментальна. Для цього, використовуючи (8.1), оцінимо спочатку відстані між сусідніми елементами простору W:

$$\left.\begin{array}{c} \rho(x_2, x_1) = \rho(Ax_1, Ax_0) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_0), \\ \rho(x_3, x_2) = \rho(Ax_2, Ax_1) \leqslant \alpha\rho(x_2, x_1) \leqslant \alpha^2\rho(x_1, x_0), \\ \dots, \\ \rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leqslant \\ \leqslant \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \dots \leqslant \alpha^n\rho(x_1, x_0), \ \ \dots \end{array}\right\} \tag{8.3}$$

Використовуючи оцінки (8.3), а також $(p-1)$ разів властивість 3 з означення метрики, одержуємо

$$\begin{gathered} \rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \\ \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant \\ \leqslant \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+p-1}\right)\rho(x_1, x_0) = \\ = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \end{gathered}$$

для достатньо великого n. Отже,

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0). \tag{8.4}$$

Оскільки $0 \leqslant \alpha < 1$, то з (8.4) випливає, що для досить великих n величина $\rho(x_n, x_{n+p})$ є як завгодно малою, тобто

$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \varepsilon$ і, отже, x_1, x_2, x_3, $\ldots$ — фундаментальна послідовність. Оскільки W — повний простір, то ця послідовність має границю, яку позначимо $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Із співвідношень

$$\rho(A\varphi, \varphi) \leqslant \rho(A\varphi, x_n) + \rho(x_n, \varphi) = \rho(A\varphi, Ax_{n-1}) + \rho(x_n, \varphi) \leqslant \\ \leqslant \alpha\rho(\varphi, x_{n-1}) + \rho(x_n, \varphi) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

випливає, що $\rho(A\varphi, \varphi) = 0$ і, отже, $A\varphi = \varphi$, тобто φ є нерухомою точкою відображення A.

Для доведення єдиності нерухомої точки припустимо, що існує ще одна нерухома точка ψ відображення A, тобто $A\psi = \psi$. Тоді

$$\rho(\varphi, \psi) = \rho(A\varphi, A\psi) \leqslant \alpha\rho(\varphi, \psi) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \rho(\varphi, \psi)(1-\alpha) \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\varphi, \psi) = 0.$$

З рівності $\rho(\varphi, \psi) = 0$, враховуючи першу властивість метрики, одержуємо, що $\psi = \varphi$, тобто φ — єдина нерухома точка відображення A. ▶

Елементи x_0, x_1, x_2, $\ldots$ у послідовності (8.2) називають ***послідовними наближеннями*** нерухомої точки φ.

Наголошуємо, що вибір початкового наближення $x_0 \in W$ є довільним і впливає лише на швидкість збіжності послідовності x_1, x_2, x_3, $\ldots$ до своєї границі φ.

2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Використовуючи принцип стискаючих відображень, доведемо теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної[4]:

$$y' = f(x, y), \tag{8.5}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{8.6}$$

[4] Ця теорема без доведення наведена у п. 2 лекції 2.

Теорема 2 (Коші). *Нехай функція $f(x,y)$ визначена у прямокутнику*

$$D = \{(x,y):\ x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a,\ \ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\},$$

де $a, b > 0$, і задовольняє у ньому такі умови:

1) *$f(x,y)$ неперервна, а, отже, й обмежена ($|f(x,y)| \leqslant M$);*

2) *частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ існує та обмежена $\left(\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant L\right)$.*

Тоді задача Коші (8.5), (8.6) має єдиний розв'язок $y = y(x)$ принаймні на відрізку $G = \{x : x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h\}$, де

$$h < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right).$$

Доведення. Покажемо спочатку, що задача Коші (8.5), (8.6) рівносильна інтегральному рівнянню[5)]

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{8.7}$$

Справді, якщо неперервна функція $y(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння (8.7), то, диференціюючи (8.7), одержуємо, що $y' = f\left(x, y(x)\right)$ і, очевидно, $y(x_0) = y_0$. Таким чином, функція $y(x)$ є розв'язком задачі Коші (8.5), (8.6).

Навпаки, нехай $y(x)$ — розв'язок задачі (8.5), (8.6), тобто $y'(x) \equiv f\left(x, y(x)\right)$ і $y(x_0) = y_0$. Тоді, інтегруючи цю тотожність у межах від x_0 до x, одержуємо:

$$\int\limits_{x_0}^{x} y'(t)\, dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad \Rightarrow \quad y(x) - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt,$$

тобто $y(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння (8.7).

Надалі досліджуватимемо рівняння (8.7).

[5)] Інтегральне рівняння — це рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком інтеграла.

Позначимо через W множину неперервних функцій $y = y(x)$, які задані на відрізку G і задовольняють на ньому нерівність $|y(x) - y_0| \leqslant b$. На множині W введемо метрику

$$\rho(y, z) = \max_{x \in G} |y(x) - z(x)|, \quad y, z \in W.$$

Таким чином, W — метричний простір. Цей простір є повним. Справді, якщо послідовність функцій $y_n = y_n(x)$, $y_n \in W$, є фундаментальною, то вона, як відомо з математичного аналізу, рівномірно збігається на відрізку G до деякої неперервної на цьому відрізку функції $y = y(x)$. Для функцій $y_n \in W$ виконуються нерівності

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant b, \quad x \in G, \ n = 1, 2, \ldots,$$

після переходу до границі при $n \to \infty$ у яких отримуємо $|y(x) - y_0| \leqslant b$. Але тоді $y \in W$, звідки випливає, що W — повний простір.

Праву частину інтегрального рівняння (8.7) природно розглядати як деяке інтегральне перетворення неперервної функції $y(x)$. Рівність

$$z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt \tag{8.8}$$

ставить у відповідність кожній функції $y \in W$ деяку функцію $z \in W$. Справді, якщо $y \in W$, то $y(x)$ — неперервна функція, графік якої належить прямокутнику

$$D_1 = \bigl\{(x, y) : \ x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h, \ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\bigr\},$$

тому на підставі неперервності функції $f(x, y)$ в D_1 права частина рівняння (8.8) є неперервною функцією від x, тобто $z(x)$ — неперервна функція на відрізку G. Далі, використовуючи відому з математичного аналізу нерівність

$$\left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |g(x)|\,dx\right|, \tag{8.9}$$

одержуємо, що

$$|z(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant M\,|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant M \cdot \frac{b}{M} = b,$$

звідки випливає, що $z \in W$.

Отже, кожній неперервній функції $y(x)$ формула (8.8) ставить у відповідність неперервну функцію $z(x)$. Результат виконання цього перетворення позначимо через Ay:

$$Ay \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Таким чином, можемо вважати, що рівність (8.8) визначає оператор

$$z = Ay \quad (y, z \in W),$$

який переводить повний простір W у себе (такий оператор називають ***інтегральним оператором Фредгольма***). Покажемо, що цей оператор є стискаючим. Справді, якщо $z_1 = Ay_1$, $z_2 = Ay_2$ $(y_1, y_2 \in W)$, то, використовуючи (8.8), (8.9), умову теореми про обмеженість частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$, а також теорему Лаґранжа про скінченні прирости, одержуємо:

$$|z_1 - z_2| = \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)| \cdot \left| f'_y(t, \omega(t)) \right| dt \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \rho(y_1, y_2) L\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \rho(y_1, y_2) L\, |x - x_0| \leqslant Lh\, \rho(y_1, y_2) = \alpha \rho(y_1, y_2), \qquad (8.10)$$

де $\omega \in [y_1, y_2]$, а число $\alpha = Lh$ задовольняє нерівність $0 \leqslant \alpha < 1$ (за умовою, $h < 1/L$).

З (8.10) випливає, що

$$\rho(z_1, z_2) = \max_{x \in G} |z_1(x) - z_2(x)| \leqslant \alpha \rho(y_1, y_2)$$

і, отже, згідно з принципом стискаючих відображень (теорема 1) у просторі W існує єдина функція (нерухома точка) $y \in W$, для якої $y = Ay$, інакше кажучи, функція, яка є розв'язком рівняння (8.7), а, отже, й розв'язком задачі Коші (8.5), (8.6). ►

Зауваження 1. Застосовуючи метод послідовних наближень, можна отримати наближений розв'язок задачі Коші (8.5), (8.6):

$$y_n(x) = Ay_{n-1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\bigl(t, y_{n-1}(t)\bigr)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $y_0 \in W$.

Зауваження 2. Умову теореми 2 про обмеженість частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$ можна замінити ***умовою Ліпшіца***:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|,$$

де $(x, y_1), (x, y_2) \in D$, L — стала Ліпшіца. Покажемо, що з обмеженості частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$ в області D випливає виконання умови Ліпшіца. Справді, нехай $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant L$. Тоді, використовуючи формулу Лаґранжа про скінченні прирости, одержуємо:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|f'_y(x, \omega(x))\right| \cdot |y_1 - y_2| \leqslant L\,|y_1 - y_2|,$$

де $\omega \in [y_1, y_2]$.

Якщо виконуються умови теореми 2 і в деякому околі точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має неперервні похідні до k-го порядку включно, то розв'язок $y(x)$ задачі Коші (8.5), (8.6) неперервно диференційовний $(k + 1)$ разів. Справді, оскільки функція $f(x, y(x))$ неперервно диференційовна, то з (8.5) випливає, що

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \equiv f_1(x, y).$$

За умовою, $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ — неперервно диференційовні, тому

$$y''' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f = f_2(x, y)$$

також неперервно диференційовна функція. Повторюючи аналогічні міркування k разів, одержимо, що $y^{(k+1)} = f_k(x, y)$ — неперервна функція.

3. Продовження розв'язку задачі Коші. Нехай Q — деяка область у $\mathbf{R}^2$ і функція $f(x, y)$ неперервна у цій області. Для довільної точки (x_0, y_0) прямокутника D теорема Пеано (лекція 2) встановлює існування розв'язку задачі Коші (8.5), (8.6) на деякому, можливо досить малому, відрізку з центром у точці x_0. Інакше кажучи, теорема Пеано — це локальна теорема існування розв'язку диференціального рівняння (8.5). Для її застосування параметри a і b прямокутника D (вони можуть залежати від координат центра x_0, y_0) потрібно вибрати такими, щоб $D \subset Q$. Після цього можна визначити число $h = h(x_0, y_0)$ і відповідний відрізок G, на якому існує розв'язок задачі (8.5), (8.6).

Кінцеві точки графіка розв'язку задачі (8.5), (8.6), існування якого гарантує теорема Пеано, належать області Q. Розглядаючи їх як нові початкові дані, можна знову застосувати теорему Пеано й розширити область існування цього розв'язку. Це випливає з наступного твердження.

Теорема 3. *Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в області Q, а функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — неперервні розв'язки рівняння (8.5) на відрізках $[x_0, x_1]$ і $[x_1, x_2]$ відповідно, причому $y_1(x_1) = y_2(x_1)$. Тоді функція*

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & \text{якщо } x \in [x_0, x_1], \\ y_2(x), & \text{якщо } x \in (x_1, x_2], \end{cases}$$

є розв'язком рівняння (8.5) на відрізку $[x_0, x_2]$.

Доведення. Очевидно, що так визначена функція $y(x)$ задовольняє рівняння (8.5) як на проміжку $[x_0, x_1)$, так і на $(x_1, x_2]$. Лівостороння і правостороння похідні функції $y(x)$ у точці x_1

існують і набувають значень $f\big(x_1, y_1(x_1)\big)$ і $f\big(x_1, y_2(x_1)\big)$ відповідно. Але з умови теореми випливає, що ці значення збігаються з $f(x_1, y(x_1))$, а тому $y(x)$ — розв'язок рівняння (8.5) на всьому відрізку $[x_0, x_2]$. ▶

Може трапитись, що інтегральну криву неможливо буде продовжити через наближення до точки, в якій порушені умови теореми Коші (існування та єдиності розв'язку), або інтегральна крива наблизиться до асимптоти, яка паралельна до осі Oy. Ці випадки проілюструємо прикладами:

1) $x\,dx + y\,dy = 0$, $y(0) = 3$. Інтегруючи рівняння і використовуючи початкову умову, одержуємо:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1, \quad y(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{C^2 - x^2}, \quad C = 3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Розв'язок неможливо продовжити за межі інтервалу $-3 < x < 3$ (рис. 8.1). У межових точках $(-3, 0)$ і $(3, 0)$ права частина рівняння $y' = -\frac{x}{y}$ розривна. Умови теореми Пеано (існування розв'язку) порушені.

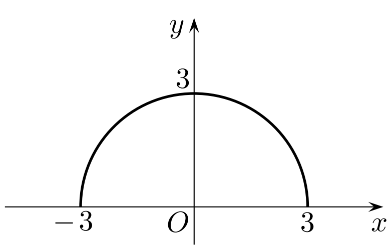


Рис. 8.1

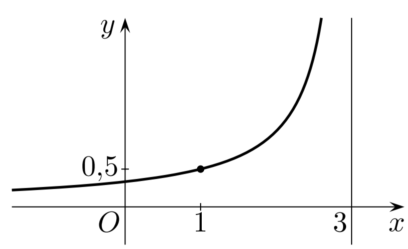


Рис. 8.2

2) $y' = y^2$, $y(1) = 1/2$. Інтегруючи рівняння та використовуючи початкову умову, одержуємо:

$$\frac{dy}{y^2} = dx, \;\; y(1) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{x-3}.$$

Інтегральну криву можна продовжити лише до асимптоти $x = 3$ $(-\infty < x < 3)$ (рис. 8.2).

4. Коректність задачі Коші. У прикладних задачах, що моделюються й розв'язуються з допомогою диференціальних рівнянь вигляду (8.5), початкові умови, а також права частина — функція f, як правило, відомі з деяким наближенням. Окрім того, функція f може залежати від одного або кількох параметрів (маси, температури, заряду тощо), які характеризують природу задачі й завжди вимірюються з деякою похибкою, тобто наближено. Тому важливими є питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, а також про те, як змінюється цей розв'язок на скінченному проміжку за малих змін (збурень) початкових значень, параметрів і самої функції f. Вимоги існування та єдиності розв'язку, його неперервної залежності від початкових умов, параметрів і функції f на скінченному проміжку становлять зміст поняття ***коректності задачі Коші***.

Використовуючи теорему 2 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, розглянемо теореми, що описують якісну поведінку розв'язків.

Теорема 4 (про неперервну залежність розв'язків від параметра). *Якщо права частина диференціального рівняння*

$$y' = f(x, y, \mu) \tag{8.11}$$

неперервна за змінною μ, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, і для кожного фіксованого μ задовольняє умови теореми 2 з тими самими сталими a, b, L, M, то розв'язок $y = y(x, \mu)$ рівняння (8.11), *який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, неперервно залежить від μ.*

Доведення. Оскільки члени послідовності

$$y_n(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t, \mu)\big)\, dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

є неперервними функціями змінних x і μ, а стала $\alpha = Lh < 1$ не залежить від μ, то послідовність $y_1(x, \mu)$, $y_2(x, \mu)$, ... збігається до $y(x, \mu)$ рівномірно по μ. Як відомо з математичного аналізу, рівномірно збіжна послідовність неперервних функцій збігається до неперервної функції, тобто $y = y(x, \mu)$ — функція, неперервна за аргументом μ. ▶

Теорема 5 (про неперервну залежність від початкових умов). *Нехай виконані умови теореми 2. Тоді розв'язок задачі Коші* (8.5), (8.6) $y = y(x, x_0, y_0)$ *неперервно залежить від початкових умов.*

Доведення. Якщо зробити заміни $z = y(x, x_0, y_0) - y_0$ і $t = x - x_0$, то відносно функції $z(t)$ одержимо диференціальне рівняння $z' = f(t + x_0, z + y_0)$ з нульовими початковими умовами. Згідно з теоремою 4 маємо неперервну залежність розв'язків від x_0, y_0 як від параметрів. ▶

Рекомендована література: [3, с. 36–57], [6, с. 71–90], [9, с. 63–78].

Питання до лекції 8

1. Що називають метричним простором? Які властивості задовольняє метрика такого простору? Наведіть приклади метричних просторів.

2. Яку послідовність елементів метричного простору називають фундаментальною? Який метричний простір називають повним?

3. Що таке оператор, заданий у повному метричному просторі? Коли оператор відображає метричний простір у себе? Який оператор називають стискаючим? Що називають нерухомою точкою оператора?

4. Як формулюється принцип стискаючих відображень? Яке його практичне значення?

5. Як формулюється теорема Коші про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної? Наведіть основні ідеї доведення цієї теореми.

6. Як, використовуючи метод послідовних наближень, можна знайти наближений розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної?

7. Чи можна продовжити розв'язок задачі Коші за межі відрізка, визначеного теоремою Коші? Наведіть приклади.

8. Що становить зміст поняття коректності задачі Коші? Наведіть теореми про неперервну залежність розв'язків від параметра та

про неперервну залежність від початкових умов. У чому практична важливість цих теорем?

Вправи до лекції 8

1. Побудуйте послідовні наближення y_0, y_1, y_2 до розв'язку задачі Коші $y' = x^3 - 2y^3$, $y(0) = 0$.

2. Укажіть який-небудь відрізок, на якому існує розв'язок задачі Коші $y' = 3x + y^4$, $y(0) = 0$.

3. Користуючись якою-небудь достатньою умовою єдиності, виділіть на площині Oxy ті точки, через які проходить єдиний розв'язок рівняння $y' = 5 + \sqrt[3]{2y + x}$.

4. Чи можуть графіки двох розв'язків рівняння $y' = x + y^3$ перетинатися (дотикатися) в деякій точці?

5. Скільки похідних мають розв'язки рівнянь:

$$\text{а) } y' = x^2 + y^{8/3}; \quad \text{б) } y' = 2x|x| - y^2?$$

Лекція 9. Диференціальні моделі

План

1. Побудова диференціальних моделей природничих наук.
2. Розв'язування геометричних задач з допомогою диференціальних рівнянь.
3. Розв'язування задач з допомогою інтегральних рівнянь.

1. Побудова диференціальних моделей природничих наук. У лекції 1 зазначалось, що диференціальні рівняння є одним з найбільш ефективних засобів математичного моделювання багатьох прикладних задач. Особливо широко вони використовуються у теоретичній механіці, фізиці, інших природничих науках.

Розв'язуючи прикладні задачі з допомогою диференціальних рівнянь, виділяють такі три етапи:

1) побудова диференціального рівняння;

2) інтегрування рівняння;

3) дослідження отриманого розв'язку.

При цьому дотримуються, наприклад, такої послідовності дій:

а) визначають величини, які змінюються у заданому явищі чи процесі, і виявляють закони (формули) відповідної науки, які ці величини пов'язують;

б) вибирають незалежну змінну і функцію цієї змінної, яку потрібно знайти;

в) виходячи з умов задачі, визначають початкові або інші умови, які накладаються на шукану функцію;

г) виражають усі величини з умови задачі через незалежну змінну, шукану функцію та її похідні;

ґ) виходячи з умови задачі та закону, який описує задане явище, складають диференціальне рівняння;

д) інтегрують одержане диференціальне рівняння;

е) якщо задано початкові чи інші умови, знаходять частинний розв'язок;

є) проводять дослідження одержаного розв'язку.

У багатьох випадках побудова диференціального рівняння першого порядку ґрунтується на так званій «лінійності процесу в малому», тобто на диференційовності функцій, які виражають залежність величин. Як правило, можна вважати, що всі величини, які беруть участь у певному процесі протягом малого проміжку часу, змінюються зі сталою швидкістю. Це дозволяє застосувати відомі закони, які описують явища з рівномірним перебігом для утворення співвідношення між значеннями t, $t + \Delta t$, тобто величинами, які беруть участь у процесі, та їхніми приростами. У результаті одержуємо рівність, яка має лише наближений характер, бо навіть за короткий проміжок часу величини змінюються переважно нелінійно. Однак якщо поділити обидві частини одержаної рівності на Δt і перейти до границі при $\Delta t \to 0$, то отримуємо точну рівність. Ця рівність міститиме час t, залежні від часу величини та їхні похідні, тобто буде диференціальним рівнянням, яке описує задане явище. Те саме рівняння у диференціальній формі можна отримати, якщо замінити приріст Δt на диференціал dt, а прирости функцій — відповідними диференціалами.

Таким чином, складаючи диференціальне рівняння, ми робимо ніби «миттєвий кадр» процесу в заданий момент часу, а потім, розв'язуючи рівняння, відновлюємо перебіг процесу. Отже, у процесі розв'язування прикладних задач наведеним методом лежить загальна ідея ***лінеаризації*** — заміни функцій на малих проміжках зміни аргументу лінійними функціями. І хоча зустрічаються процеси, для яких лінеаризація неможлива (наприклад, броунівський рух, коли неможливо визначити швидкості зміни певних величин у заданий момент часу), у переважній більшості випадків побудувати диференціальну модель явища чи процесу у такий спосіб удається.

Задача 1. *У дні вертикальної циліндричної посудини з висотою H і з радіусом основи R, заповненої водою, утворився невеликий отвір площею S (рис. 9.1). Через який час через отвір витече уся вода, якщо третина води витікає через t_1 с?*

Розв'язання. Якщо б витікання води відбувалось рівномірно, то вся вода витекла б з посудини за $3t_1$ с. Однак досліди показують, що зі зменшенням рівня води у посудині швидкість витікання води зменшується. Тому потрібно врахувати залежність між швидкістю витікання v і висотою h стовпа води над отвором. Згідно із законом Торрічеллі

$$v = k\sqrt{2gh},$$

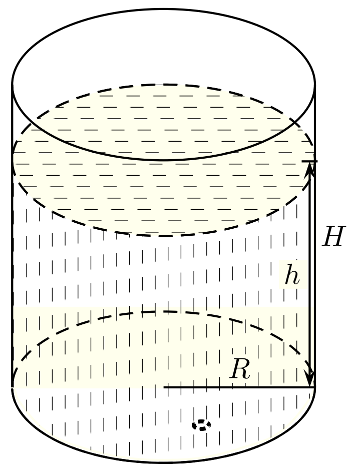


Рис. 9.1

де g — прискорення вільного падіння, k — коефіцієнт, який залежить від в'язкості рідини та форми отвору (для води у випадку круглого отвору $k = 0{,}6$).

Розглянемо досліджуваний процес на відрізку $[t; t+\Delta t]$. Нехай у момент часу t висота води над отвором складала h, а через Δt с вона зменшилась і становила $h + \Delta h$, де Δh — приріст висоти (очевидно, $\Delta h < 0$). Тоді об'єм води, який витік з посудини, дорівнює об'єму відповідного циліндра, тобто

$$\Delta V = -\pi R^2 \Delta h.$$

Припустимо, що вода з посудини виливається у вигляді циліндричного струменя, площа основи якого S, а висота дорівнює шляху, який пройшла вода за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$. На початку і наприкінці цього відрізка швидкість витікання води згідно із законом Торрічеллі дорівнювала $k\sqrt{2gh}$ і $k\sqrt{2g(h + \Delta h)}$ відповідно. Якщо Δt досить мале, то $\Delta h(t)$ також мале і отримані вирази для швидкості майже однакові. Тому шлях, пройдений водою за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$, виражається формулою $\big(k\sqrt{2gh} + \alpha(\Delta t)\big)\Delta t$, де $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta t) = 0$. Отже, об'єм рідини, яка виллється за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$, можна знайти за формулою

$$\Delta V = \Big(k\sqrt{2gh} + \alpha(\Delta t)\Big) S\Delta t.$$

Прирівнюючи два вирази для об'єму рідини, яка вилилась з посудини за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$, одержуємо рівняння

$$-\pi R^2 \Delta h = \Big(k\sqrt{2gh} + \alpha(\Delta t)\Big) S\Delta t. \tag{9.1}$$

Поділимо обидві частини (9.1) на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Оскільки $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \alpha(\Delta t) = 0$, а $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta h(t)}{\Delta t} = h'(t)$, то одержуємо диференціальне рівняння першого порядку

$$-\pi R^2 h'(t) = k\sqrt{2gh}\, S. \tag{9.2}$$

Отримати рівняння (9.2) можна й інакше. Досліджуючи процес протягом нескінченно малого проміжку часу dt, припустимо, що за цей проміжок швидкість витікання води є незмінною. Тому замість наближеного рівняння (9.1) відразу одержуємо рівняння

$$-\pi R^2 dh = k\sqrt{2gh}\, S dt, \tag{9.3}$$

яке, очевидно, є просто іншою формою запису рівняння (9.2).

Рівняння (9.3) — рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$dt = \frac{-\pi R^2}{\sqrt{2g}kS}\frac{dh}{\sqrt{h}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-\sqrt{2}\pi R^2}{\sqrt{g}kS}\sqrt{h} + C \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad t = C - A\sqrt{h}, \tag{9.4}$$

де стала $A = \frac{\sqrt{2}\pi R^2}{\sqrt{g}kS}$ залежить від розмірів і форми отвору, в'язкості рідини та деяких інших фізичних параметрів, а стала C є довільною (це стала інтегрування). Знайдемо ці сталі.

За умовою задачі, $h(0) = H$ (на початку відліку висота стовпа води дорівнювала H). Підставляючи у (9.4) $t = 0$ і $h = H$, знаходимо сталу $C = A\sqrt{H}$.

Сталу A знайдемо з умови задачі $h(t_1) = \frac{2}{3}H$. Звідси

$$t_1 = A\sqrt{H} - A\sqrt{\frac{2H}{3}} \quad \Rightarrow \quad A = (3+\sqrt{6})\frac{t_1}{\sqrt{H}}.$$

Підставляючи знайдені значення сталих A і C у формулу (9.4), одержуємо закон зміни часу витікання від висоти стовпа води:

$$t = (3+\sqrt{6})\frac{\sqrt{H}-\sqrt{h}}{\sqrt{H}}t_1. \tag{9.5}$$

З (9.5) легко знаходимо час T повного витікання рідини з посудини:

$$h(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad T = (3+\sqrt{6})\, t_1.$$

Зауважимо, що знайдене значення T приблизно у 1,82 разу більше від значення $3t_1$, яке одержали у припущенні, що рідина з посудини витікає рівномірно. ■

Звичайно, що розв'язок задачі 1 не є точним, адже ми знехтували, наприклад, явищем капілярності (а воно є суттєвим, якщо діаметр отвору малий), завихреннями рідини та деякими іншими факторами.

У багатьох задачах складання диференціальних моделей полегшується тим, що відповідний закон науки пов'язує між собою значення деякої величини і швидкості її зміни або пов'язує значення величини, швидкості її зміни чи прискорення. Наведемо декілька таких законів:

– другий закон Ньютона ($F = ma$, де m — маса тіла, a — прискорення руху, F — сума сил, що діють на тіло) і похідні від нього закони збереження енергії, кількості руху, імпульсу тощо;

– закон всесвітнього тяжіння ($F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$, де m_1, m_2 — маси двох тіл, r — відстань між ними, k — коефіцієнт пропорційності);

– закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу);

– закон Кірхгофа (алгебрична сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю);

– закон Фур'є ($q = -\lambda(T)\frac{dT}{dx}$, де q — питомий потік теплоти, $\lambda(T)$ — коефіцієнт теплопровідності середовища, $\frac{dT}{dx}$ — швидкість зміни температури T) і аналогічний закон Нернста про дифузію речовини;

– закон Ньютона про охолодження тіла (швидкість охолодження тіла прямо пропорційна різниці температур тіла та оточуючого середовища);

– закон Гука (сила пружності пружини пропорційна її видовженню) тощо.

Задача 2. *Тіло, яке в початковий момент часу має температуру T_0, помістили в середовище, в якому підтримується температура T_1. Визначити закон зміни температури тіла.*
Розв'язання. Нехай $T(t)$ — температура тіла в момент часу t. За законом Ньютона про охолодження тіла функція $T(t)$ повинна задовольняти рівняння

$$\frac{dT}{dt} = -k\big(T(t) - T_1\big), \tag{9.6}$$

де $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності (знак «мінус» у правій частині рівняння (9.6) відповідає експериментальним даним: якщо $T(t) > T_1$, то температура тіла зменшується і швидкість її зміни від'ємна, і навпаки).

Оскільки (9.6) — рівняння вигляду $y' = f(ax + by + c)$, яке розглядалось у лекції 3, то виконаємо заміну $u(t) = k(T_1 - T(t))$:

$$T' = k(T_1 - T) \quad \Rightarrow \quad -\frac{u'}{k} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -kdt \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \ln|u| = -kt + C \quad \Rightarrow \quad u = Ce^{-kt} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad T(t) = T_1 - Ce^{-kt}, \tag{9.7}$$

де C — довільна стала.

Врахувавши початкову умову $T(0) = T_0$, з (9.7) знаходимо $C = T_1 - T_0$ і, отже, остаточно виводимо закон зміни температури тіла залежно від часу:

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}. \ \blacksquare$$

2. Розв'язування геометричних задач з допомогою диференціальних рівнянь. У багатьох задачах геометричної оптики, картографії та інших областей науки виникає необхідність у знаходженні кривих за певними властивостями проведених до них дотичних. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції дорівнює значенню похідної цієї функції у точці дотику, то такі задачі зручно розв'язувати з допомогою диференціальних рівнянь.

Розв'язуючи геометричні задачі з допомогою диференціальних рівнянь, рекомендуємо дотримуватись такого алгоритму:

1) зробити рисунок і ввести позначення;

2) відокремити умови, які справджуються в довільній точці шуканої лінії, від умов, які справджуються лише в окремих точках, тобто від початкових умов;

3) виразити всі величини задачі через координати довільної точки і значення похідної у цій точці, враховуючи геометричний зміст похідної;

4) за умовою задачі скласти диференціальне рівняння, яке задовольняє шукана крива;

5) знайти загальний розв'язок цього рівняння й отримати з нього певний частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови.

Задача 3. *Знайти криву, в якої відстань від довільної дотичної до початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.*
Розв'язання. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка кривої $y = f(x)$. Проведемо у цій точці дотичну MA, тоді $y' = \operatorname{tg}\alpha$ (геометричний зміст похідної) (рис. 9.2).

Трикутники OCM і OBM рівні (за умовою, $OC = OB$, а гіпотенуза OM — спільна), а тому $\angle MOB = \angle MOC$. Оскільки $\angle AOC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, то

$$\angle MOB = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

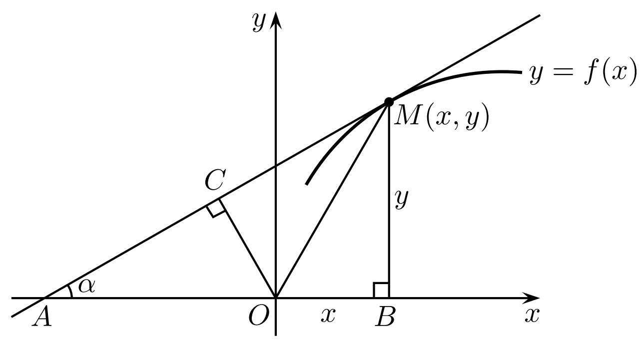


Рис. 9.2

Тепер з трикутника OBM маємо:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{y - x}{y + x}.$$

Нарешті, використовуючи формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ і співвідношення $\operatorname{tg}\alpha = y'$, одержуємо диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Оскільки це рівняння однорідне (лекція 3), то виконаємо заміну $y = ux$:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2udu}{u^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|x| + \ln(u^2+1) = \ln 2|C| \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \pm Cx \quad \Rightarrow \quad (x \pm C)^2 + y^2 = C^2.$$

Отже, наведеною в умові задачі властивістю володіє кожне коло з радіусом C і з центром у точці $(\pm C; 0)$. ■

3. Розв'язування задач з допомогою інтегральних рівнянь. У деяких випадках розв'язування задач приводить до рівнянь, які містять шукану функцію під знаком інтеграла, тобто ***інтегральних рівнянь***. Інтегральні рівняння з'являються, зокрема, коли використовується геометричний зміст визначеного інтеграла як площі криволінійної трапеції та інші інтегральні формули (довжини дуги, площі поверхні, об'єму тіла тощо). У простіших випадках після диференціювання інтегральні рівняння вдається звести до диференціальних.

Задача 4. *Знайти криву, для кожної точки M якої абсциса центра ваги криволінійної трапеції, обмеженої осями координат, дугою цієї кривої і відрізком, що з'єднує точку M з її проекцією на вісь абсцис, дорівнює третині абсциси цієї точки.*

Розв'язання. Відомо, що абсциса центра ваги утвореної криволінійної трапеції (рис. 9.3) виражається формулою

$$x_0 = \frac{\int\limits_0^x t y(t)\,dt}{\int\limits_0^x y(t)\,dt},$$

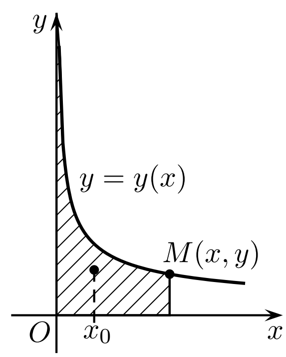


Рис. 9.3

де t — змінна інтегрування, а $y = y(t)$ — рівняння шуканої кривої.

За умовою задачі $x_0 = \frac{x}{3}$, тобто

$$\int\limits_0^x t y(t)\,dt = \frac{x}{3}\int\limits_0^x y(t)\,dt.$$

Здиференціюємо обидві частини одержаного інтегрального рівняння за змінною x:

$$xy(x) = \frac{xy(x)}{3} + \frac{1}{3}\int\limits_0^x y(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad 2xy(x) = \int\limits_0^x y(t)\,dt.$$

Диференціюючи ще один раз, одержуємо диференціальне рівняння

$$2xy' + y = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними, його загальним розв'язком є $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$. ■

Рекомендована література: [4, с. 220–257], [8, с. 37–56], [10, с. 9–26], [18, с. 8–44], [20, с. 5–226].

Питання до лекції 9

1. Якими є основні етапи розв'язування задач природничих наук з допомогою диференціальних рівнянь?

2. Наведіть приклади законів фізики, які використовуються при побудові диференціальних моделей.

3. Як з допомогою диференціальних рівнянь розв'язують геометричні задачі?

Вправи до лекції 9

1. Кількість світла, що поглинає шар води малої товщини, пропорційна до кількості світла, що падає на нього, і товщині шару. Шар води товщиною 35 см поглинає половину світла, що падає на нього. Яку частину світла поглинає шар товщиною 2 м?

2. Куля, рухаючись зі швидкістю $v_0 = 350$ м/с, пробиває стіну товщиною $h = 0,25$ м і вилітає з неї зі швидкістю $v_1 = 90$ м/с. Вважаючи, що сила опору стіни пропорційна квадрату швидкості кулі, знайдіть тривалість руху кулі у стіні.

3. Визначте криву, всі дотичні до якої проходять через початок координат.

4. Визначте криву, кожна дотична до якої утворює з осями координат трикутник площею S.

5. Визначте криву, яка проходить через точки $(0; 0)$ і $(1; 1)$ і обмежує криволінійну трапецію з основою $[0; x]$ і площею, яка пропорційна y^4.

Додаток 1

Застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

Існує чимало спеціальних математичних пакетів комп'ютерних програм, які дозволяють розв'язувати різноманітні математичні задачі. Математичний пакет MathCad орієнтований, перш за все, на здійснення числових розрахунків. Пакети MATLAB, Scilab, Octave і FreeMat створені передовсім для роботи з числовими матрицями й векторами і є зручними для інженерно-технічних працівників. Математичні пакети Maple, Mathematica, Maxima і MuPAD розраховані на здійснення символьних (тобто аналітичних) обчислень.

Практично всі ці пакети дозволяють розв'язувати диференціальні рівняння числовими (наближеними) методами. Але остання група математичних пакетів дозволяє також знайти точний (аналітичний) розв'язок у тих випадках, коли рівняння інтегруються у скінченному вигляді.

Одним з найбільш популярних і потужних є пакет аналітичних обчислень і числових розрахунків Maple. Розглянемо застосування саме його до розв'язування задач теорії диференціальних рівнянь. З основами роботи з цим пакетом можна ознайомитись у додатку 6 (с. 339).

Для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь у пакеті Maple використовують команду

`dsolve`(рівняння, невідома, опції)

Параметр «невідома» визначає невідому функцію (розв'язок) диференціального рівняння, а необов'язковий параметр «опції» — форму подання розв'язку і метод його відшукання.

Для задання похідної у диференціальному рівнянні можна використовувати команду `diff` або оператор `D`, причому саму функцію треба записувати з явним указуванням незалежної змінної, наприклад, $y(x)$. Оператор `D` має наступний синтаксис:

`(D@@`n`)(функція)(змінна)`

У цьому записі n — порядок похідної. Якщо $n = 1$, то замість першого виразу у дужках можна писати просто `D`. Команда `dsolve`, як правило, знаходить лише загальний розв'язок і не завжди наводить особливі. Згенеровані величини $\_C1$, $\_C2$ і т. д. позначають довільні сталі.

Якщо потрібно розв'язати задачу Коші, то першим параметром команди `dsolve` повинна бути множина, яка складається з рівняння і початкових умов (через кому у фігурних дужках).

Продемонструємо використання Maple для розв'язування прикладів з цього розділу. У деяких випадках Maple дає розв'язки, які зводяться до отриманих вище відповідей шляхом перетворень.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $(y - x^2y)dy = (x - xy^2)dx$ з відокремлюваними змінними (приклад 1 лекції 3, с. 38):

```
> dsolve((y(x)-x^2*y(x))*D(y)(x)=x-x*y(x)^2,y(x));
```

$$y(x) = \sqrt{1 - \_C1 + \_C1\,x^2}, \quad y(x) = -\sqrt{1 - \_C1 + \_C1\,x^2}.$$

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $y' = (4x + y + 5)^2$ (приклад 2 лекції 3, с. 39):

```
> dsolve(D(y)(x)=(4*x+y(x)+5)^2,y(x));
```

$$y(x) = -5 - 4\,x - 2\,\tan(-2\,x + 2\,\_C1).$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння $ydx + 2\sqrt{xy}dy = xdy$ (приклад 3 лекції 3, с. 40):

```
> dsolve(y(x)+2*sqrt(x*y(x))*D(y)(x)=x*D(y)(x),y(x));
```

$$\ln(y(x)) + \frac{x}{\sqrt{xy(x)}} - \_C1 = 0.$$

Приклад 4. Розв'язати однорідне рівняння

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

з лекції 3 (с. 41), це рівняння було отримане при розв'язуванні задачі про форму дзеркала (задача 3 лекції 1, с. 18):

```
> dsolve(D(y)(x)=y(x)/(sqrt(x^2+(y(x))^2)+x),y(x));
```

$$2\,\frac{\sqrt{x^2+(y(x))^2}}{(y(x))^2}+2\,\frac{x}{(y(x))^2}-\_C1=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння відносно $y(x)$:

```
> isolate(%,y(x));
```

$$y\,(x)=-2\,\frac{\sqrt{1+\_C1\,x}}{\_C1}.$$

Приклад 5. Зінтегрувати рівняння $(x-2y+3)y'=1-y-2x$ (приклад 4 лекції 3, с. 43):

```
> dsolve((x-2*y(x)+3)*D(y)(x)=1-y(x)-2*x,y(x));
```

$$y(x)=\frac{7}{5}-\frac{-\frac{(5\,x+1)\,\_C1}{2}+\frac{\sqrt{5\,(5\,x+1)^2\,\_C1^2+4}}{2}}{5\,\_C1}. \qquad (1)$$

Переконаємось, що отримана функція задовольняє загальний інтеграл цього рівняння $y^2-x^2-xy+x-3y=C$, знайдений на с. 44. Для цього підставимо її у його ліву частину, скориставшись командою `simplify`:

```
> y:=7/5-1/5*(-1/2*(5*x+1)*_C1+1/2*(5*(5*x+1)^2*_C1^2+
  4)^(1/2))/_C1: simplify(y^2-x^2-x*y+x-3*y);
```

$$-\frac{55\,\_C1^2-1}{25\,\_C1^2}.$$

Отриманий вираз справді є сталою. Оскільки загальний інтеграл є багаточленом другого степеня відносно y, то повинен бути ще один розв'язок, який відрізнятиметься від (1) знаком перед квадратним коренем. Цей розв'язок, як і два особливих розв'язки рівняння ($y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}$, $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}$), Maple відшукати не зміг.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'= =\frac{x-2y+3}{2x-4y-1}$ (приклад 5 лекції 3, с. 45):

```
> dsolve(D(y)(x)=(x-2*y(x)+3)/(2*x-4*y(x)-1),y(x));
```

$$y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{1 - 28\,x + 28\,\_C1}}{4},$$
$$y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{1 - 28\,x + 28\,\_C1}}{4}.$$

Зрозуміло, що отримані функції — розв'язки відносно змінної y квадратного рівняння $x^2-4xy+4y^2+6x+2y=C$, яке є знайденим на с. 45 загальним інтегралом заданого диференціального рівняння. У цьому легко переконатись, розв'язавши загальний інтеграл відносно змінної y з допомогою команди `solve`:

```
> solve(x^2-4*x*y+4*y^2+6*x+2*y=C,y);
```

$$-\frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{1 - 28\,x + 4C}}{4}, \quad y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{1 - 28\,x + 4C}}{4}.$$

Приклад 7. Зінтегрувати лінійне рівняння $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ (приклад 1 лекції 4, с. 50):

```
> dsolve(D(y)(x)+2*x*y(x)=2*x*exp(-x^2),y(x));
```

$$y(x) = (x^2 + \_C1)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння Я. Бернуллі $y' + 2xy = 2xe^{x^2}y^2$ (приклад 2 лекції 4, с. 53):

```
> dsolve(D(y)(x)+2*x*y(x)=2*x*exp(x^2)*y(x)^2,y(x));
```

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{-x^2 + \_C1}.$$

Приклад 9. Знайти рівняння кривих із задачі 1 лекції 4.

На с. 55 було отримано диференціальне рівняння шуканої сім'ї кривих $y' - y/x = -y^2/x$. Зінтегруємо його:

```
> dsolve(D(y)(x)-y(x)/x=-y(x)^2/x,y(x));
```

$$y(x) = \frac{x}{x + \_C1}.$$

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння Ріккаті $y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{4}{x^2}$ (приклад 3 лекції 4, с. 57):

```
> dsolve(D(y)(x)=y(x)^2-y(x)/x-4/x^2,y(x));
```

$$y(x) = \frac{2\,x^4 + 2\,\_C1}{x(\_C1 - x^4)}.$$

Приклад 11. Зінтегрувати рівняння у повних диференціалах $(x + y^2 + \sin x)\,dx + (2xy + \cos y)\,dy = 0$ (приклад 1 лекції 5, с. 61):

```
> dsolve(x+y(x)^2+sin(x)+(2*x*y(x)+cos(y(x)))*D(y)(x)=
  0,y(x));
```

$$\frac{x^2}{2} + y(x)^2 x - \cos(x) + \sin(y(x)) + \_C1 = 0.$$

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок рівняння $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$ (приклад 2 лекції 5, с. 64):

```
> dsolve(2*x*y(x)^2-y(x)+(y(x)^2+x+y(x))*D(y)(x),y(x),
  implicit);
```

$$x^2 - \frac{x}{y(x)} + \ln(y(x)) + y(x) + \_C1 = 0.$$

Додаткова опція `implicit` дозволяє знаходити розв'язок у неявній формі. Відсутність модуля в аргументу логарифма не є помилкою, бо всі обчислення у Maple за замовчуванням здійснюються у полі комплексних чисел, знайдений розв'язок теж може бути комплекснозначним. Підібравши відповідним чином довільну сталу, яка може бути комплексною, легко виділити дійснозначний розв'язок. Знайдемо також інтегрувальний множник цього рівняння, скориставшись командою `intfactor` з пакета `DEtools`:

```
> DEtools[intfactor](2*x*y(x)^2-y(x)+(y(x)^2+x+y(x))*
  D(y)(x));
```

$$\frac{1}{y(x)^2}.$$

Приклад 13. Зінтегрувати рівняння $(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0$ (приклад 3 лекції 5, с. 64):

```
> dsolve(2*x^3*y(x)^2-y(x)+(2*x^2*y(x)^3-x)*D(y)(x)=0,
  y(x),implicit);
```

$$\_C1 + x^2 + \frac{1}{y(x)x} + y(x)^2 = 0.$$

Знайдемо також інтегрувальний множник цього рівняння:

```
> DEtools[intfactor](2*x^3*y(x)^2-y(x)+(2*x^2*y(x)^3-
  x)*D(y)(x)=0);
```

$$\frac{1}{y(x)^2x^2}, \quad \frac{1}{x\,(1 + xy(x)^3 + x^3y(x))\,y(x)}.$$

Програма знайшла два інтегрувальних множники.

Приклад 14. Знайти інтегрувальний множник рівняння $(y/x + 3x^2)dx + (1 + x^3/y)dy = 0$ (приклад 4 лекції 5, с. 69):

```
> DEtools[intfactor](y(x)/x+3*x^2+(1+x^3/y(x))*D(y)(x)=
  0);
```

$$\frac{1}{2y(x) + 3x^3}.$$

У цьому випадку програма навела інтегрувальний множник, який відрізняється від інтегрувального множника, знайденого у прикладі 4 лекції 5. Але це й не дивно, бо інтегрувальний множник не є єдиним (теорема 2 лекції 5).

Приклад 15. Зінтегрувати неявне рівняння $y'^2 - 9\sqrt[3]{y^4} = 0$ (приклад 1 лекції 6, с. 71):

```
> dsolve(D(y)(x)^2-9*y(x)^(4/3)=0,y(x));
```

$$y(x)^{\left(\frac{1}{3}\right)} - x - \_C1 = 0, \quad y(x)^{\left(\frac{1}{3}\right)} + x - \_C1 = 0.$$

Знайшовши з останніх рівностей $y(x)$, отримаємо загальний розв'язок прикладу 1 лекції 6. Особливий розв'язок $y = 0$ програма не знайшла.

Приклад 16. Зінтегрувати неявне рівняння $x^2y'^2 + 2xyy' + y^2 - 4x = 0$ (приклад 2 лекції 6, с. 78):

```
> dsolve(x^2*D(y)(x)^2+2*x*y(x)*D(y)(x)+y(x)^2-4*x=0,
  y(x));
```

$$y(x) = -\frac{4\sqrt{x}}{3} + \frac{\_C1}{x}, \quad y(x) = \frac{4\sqrt{x}}{3} + \frac{\_C1}{x}.$$

Пропонуємо читачам самостійно зінтегрувати рівняння $y'^3 - 5y'^2 + 7 = 0$ з прикладу 3 лекції 6 (с. 79) з допомогою пакета Maple і пересвідчитись, що програма шукає розв'язок у явному вигляді навіть при використанні опції `implicit`.

Приклад 17. Зінтегрувати рівняння $y = y'^2 - 3xy' + 3x^2$ (приклад 1 лекції 7, с. 82):

```
> dsolve(y(x)=D(y)(x)^2-3*x*D(y)(x)+3*x^2,y(x));
```

$$y(x) = \frac{3\,x^2}{4},\ \ y(x) = \frac{\_C1^2x^2 + \_C1(x\_C1 + 2)x + 2}{2\_C1^2},$$
$$y(x) = \frac{\_C1^2x^2 + \_C1(x\_C1 - 2)x + 2}{2\_C1^2},$$
$$y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{(-x - 2\,\_C1)x}{2} + \_C1^2,$$
$$y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{(-x + 2\,\_C1)x}{2} + \_C1^2.$$

На перший погляд, тут є п'ять різних розв'язків, але насправді всі, крім першого, розв'язки шляхом нескладних перетворень і перепозначення сталих можна звести один до одного. У цьому легко переконатись з допомогою команди `simplify`:

```
> simplify({%});
```

$$\Big\{y(x) = x^2 - x\_C1 + \_C1^2,\ \ y(x) = \frac{3\,x^2}{4},$$
$$y(x) = \frac{\_C1^2x^2 - x\_C1 + 1}{\_C1^2},\ \ y(x) = x^2 + x\_C1 + \_C1^2,$$
$$y(x) = \frac{\_C1^2x^2 + x\_C1 + 1}{\_C1^2}\Big\}.$$

Приклад 18. Зінтегрувати рівняння $x = y'^4 + 2y'$ (приклад 2 лекції 7, с. 83).

Скористаємося опціями `implicit` і `parametric`:

```
> dsolve(x=D(y)(x)^4+2*D(y)(x),y(x),implicit,
  parametric);
```

$$x(\_T) = \_T^4 + 2\,\_T,\ \ y(\_T) = \frac{4}{5}\,\_T^5 + \_T^2 + \_C1.$$

Величина $\_T$ позначає параметр (розв'язок знайдено у параметричній формі).

Приклад 19. Знайти загальний розв'язок рівняння Лаґранжа $y = 2xy' - \ln y'$ (приклад 3 лекції 7, с. 84).

Скористаємося опцією `implicit`:

```
> dsolve(y(x)=2*x*D(y)(x)-ln(D(y)(x)),y(x),implicit);
```

$$x(\_T) = \frac{\_T + \_C1}{\_T^2}, \quad y(\_T) = 2\frac{\_T + \_C1}{\_T} - \ln(\_T).$$

Приклад 20. Зінтегрувати рівняння Клеро $y = xy' - y'^3$ (приклад 4 лекції 7, с. 85):

```
> dsolve(y(x)=x*D(y)(x)-(D(y)(x))^3,y(x));
```

$$y(x) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}, \quad y(x) = \frac{2}{9}\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}, \quad y(x) = x\_C1 - \_C1^3.$$

Приклад 21. Розв'язати задачу про зростання кількості наукових публікацій (задача 1 лекції 1).

На с. 15 отримано диференціальне рівняння, яке описує зростання кількості наукових публікацій:

$$y'(t) = k\,y(t).$$

Зінтегруємо це рівняння, враховуючи початкову умову $y(0) = y_0$:

```
> dsolve({D(y)(t)=k*y(t),y(0)=y0},y(t));
```

$$y(t) = y0\, e^{kt}.$$

Знайдемо тепер з допомогою команди `solve` невідомий час T з додаткової умови $y(T) = 2y_0$, якщо коефіцієнт $k = 0{,}07$:

```
> solve(y0*exp(0.07*T)=2*y0,T);
```

$$9.902102579.$$

Приклад 22. Зінтегрувати рівняння $y' = ky(M - y)$ (приклад після задачі 1 лекції 1, с. 16):

```
> dsolve(D(y)(t)=k*y(t)*(M-y(t)),y(t));
```

$$y(t) = \frac{M}{1 + \mathrm{e}^{-kMt}\_C1\,M}.$$

Приклад 23. Розв'язати задачу про рух човна (задача 2 лекції 1).

На с. 17 було отримано диференціальне рівняння, яке описує рух човна:

$$m\frac{dv}{dt} = kv^2.$$

Зінтегруємо його, врахувавши початкову умову $v(0) = 3$:

```
> dsolve({m*D(v)(t)=k*v(t)^2,v(0)=3},v(t));
```

$$v(t) = -\frac{3m}{3\,kt - m}.$$

Знайдемо тепер невідоме співвідношення між m і k з додаткової умови $v(4) = 1$:

```
> solve(-3*m/(3*k*4-m)=1,m);
```

$$-6k.$$

Тоді невідомий час T з умови $v(T) = 0{,}01$ визначити легко:

```
> m:=-6*k:solve(-3*m/(3*k*T-m)=0.01,T);
```

$$598.$$

Приклад 24. Наближено побудувати інтегральні криві рівняння $y' = x(y-1)$ (приклад 1 з лекції 2, с. 31).

Побудуємо поле напрямів, визначене цим рівнянням, та сім інтегральних кривих, які задовольняють початкові умови $y(0) = -1$, $y(0) = 0$, $y(0) = 0{,}5$, $y(0) = 1$, $y(0) = 1{,}5$, $y(0) = 2$, $y(0) = 3$. Для цього потрібно скористатись командою `DEplot` з пакета `DEtools` (команда описана у додатку 6 на с. 344):

```
> DEtools[DEplot](D(y)(x)=x*(y(x)-1),y(x),x=-3..3,
  [[y(0)=-1],[y(0)=0],[y(0)=0.5],[y(0)=1],[y(0)=1.5],
  [y(0)=2],[y(0)=3]],y=-2.5..3.5,scaling=constrained,
  stepsize=0.1,linecolor=black);
```

Результат виконання команди наведений на рис. 1.

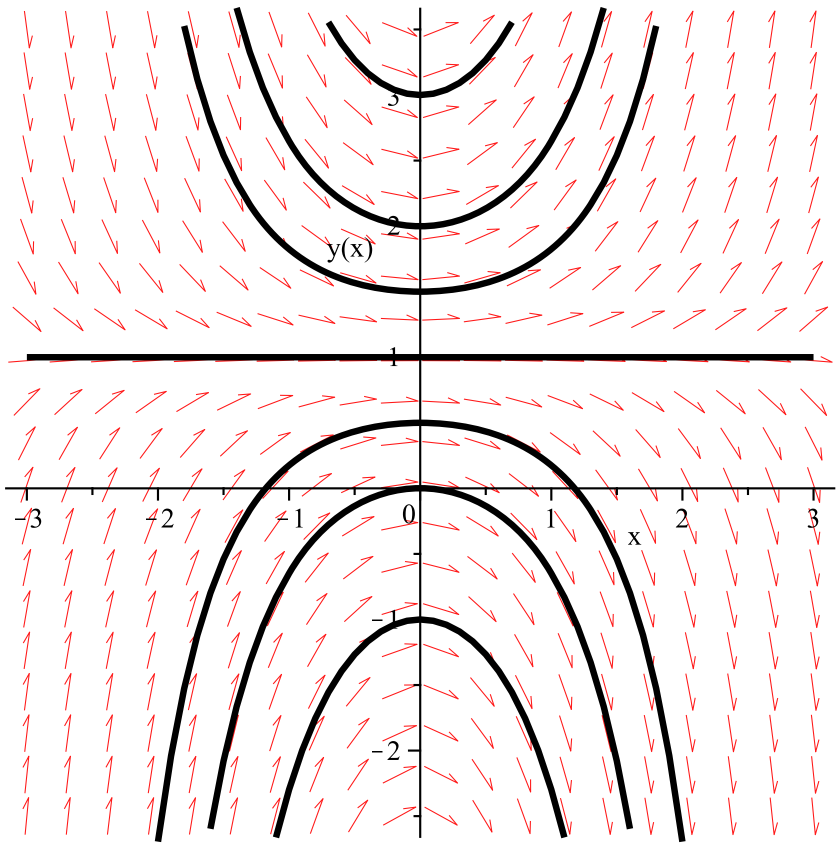


Рис. 1

Інші приклади застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку можна знайти в [11, 16, 17, 19]. Пропонуємо читачам самостійно з допомогою пакета Maple зінтегрувати інші диференціальні рівняння з розділу 1, які не ввійшли до цього додатка.

Розділ 2
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Лекція 10. Диференціальні рівняння вищих порядків

План

1. Основні поняття й означення. Задача Коші.

2. Класифікація розв'язків.

3. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку n.

1. Основні поняття й означення. Задача Коші. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\Big) = 0. \tag{10.1}$$

Якщо рівняння (10.1) можна розв'язати відносно старшої похідної, то його записуватимемо у вигляді

$$y^{(n)} = f\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\Big). \tag{10.2}$$

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна n разів на інтервалі (a, b), називають ***розв'язком*** рівняння (10.2) на цьому інтервалі, якщо вона для всіх $x \in (a, b)$ перетворює це рівняння у тотожність.

Для рівняння (10.2) ***задача Коші*** формулюється так: серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \ \ldots, \ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{10.3}$$

Число x_0 називають ***початковим значенням незалежної змінної***, числа y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ — ***початковими значеннями розв'язку*** $y = y(x)$, сукупність чисел x_0, y_0, y_0', …,

$y_0^{(n-1)}$ — ***початковими даними розв'язку*** $y = y(x)$, а умови (10.3) — ***початковими умовами***.

Зокрема, для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{10.4}$$

задача Коші полягає у знаходженні розв'язку $y = y(x)$, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0'. \tag{10.5}$$

З геометричної точки зору задача Коші (10.4), (10.5) полягає у знаходженні такої інтегральної кривої, яка проходить через точку (x_0, y_0) і має у цій точці заданий напрям дотичної y_0', тобто $\operatorname{tg} \alpha_0 = y_0'$.

Зауважимо, що єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння n-го порядку (10.2) не означає, що через точку (x_0, y_0) проходить тільки одна інтегральна крива, як це було для рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної (лекція 2). Наприклад, єдиність розв'язку задачі Коші (10.4), (10.5) означає, що через кожну точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива рівняння (10.4), дотична до якої у цій точці утворює з додатним напрямом осі Ox кут α_0, для якого $\operatorname{tg} \alpha_0 = y_0'$. Водночас, крім цієї інтегральної кривої через точку (x_0, y_0) можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної у цій точці.

Приклад 1. *Знайти розв'язок задачі Коші* $y'' + y = 0$, $y(0) = 1, \; y'(0) = 0$.

Розв'язання. Можна довести, що всі розв'язки рівняння містяться у формулі

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі. Звідси $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Виберемо C_1 і C_2, щоб задовольнити початкові умови. Очевидно, що $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Отже, шуканим розв'язком є $y = \cos x$. Цей розв'язок єдиний. Однак через точку (0,1), окрім кривої

$y = \cos x$, проходить безліч інших інтегральних кривих, які можна описати формулою $y = \cos x + C_2 \sin x$, де C_2 — довільна стала, відмінна від нуля, але жодна з дотичних до них у точці $(0,1)$ не збігається з дотичною до кривої $y = \cos x$ у цій точці. ■

Розглянемо питання про механічне трактування диференціального рівняння другого порядку, його розв'язків та задачі Коші. Нехай матеріальна точка з масою m рухається по прямій, яку приймемо за вісь Ox, під дією сили $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$, залежної від часу t, положення x і швидкості $\frac{dx}{dt}$ у момент часу t. Згідно з другим законом Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

де $\frac{d^2x}{dt^2}$ — прискорення точки в момент часу t, або

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{10.6}$$

де $f = F/m$.

Кожному розв'язку $x = x(t)$ рівняння (10.6) відповідає певний ***закон руху***, тому часто розв'язок $x = x(t)$ називають ***рухом***, який визначений рівнянням (10.6). Задача інтегрування рівняння (10.6) полягає у знаходженні всіх рухів, визначених цим рівнянням, та у вивченні їхніх властивостей.

З механічної точки зору задача Коші для рівняння (10.6) полягає у знаходженні такого руху $x = x(t)$, який задовольняє початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0',$$

тобто в початковий момент часу $t = t_0$ точка повинна займати задане положення x_0 і мати задану швидкість x_0'.

Достатня умова існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку поширюється і на випадок рівняння n-го порядку: *для існування* (*неперервного разом з похідними до порядку n включно*) *розв'язку задачі Коші*

(10.2), (10.3) *досить припустити, щоб права частина рівняння* (10.2) *була неперервною в околі початкових даних* (***теорема Пеано***).

Відповідь на питання про існування єдиного розв'язку задачі Коші (10.2), (10.3) дає така теорема [10, с. 93–99].

Теорема (Коші). *Якщо функція* $f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)$ *з рівняння* (10.2) *у деякому околі точки* $\big(x_0,\, y_0,\, y_0',\, \dots,\, y_0^{(n-1)}\big)$ *неперервна за всіма аргументами і має обмежені частинні похідні за змінними* y, y', $\dots$, $y^{(n-1)}$, *то існує єдиний розв'язок задачі Коші* (10.2), (10.3), *який визначений і неперервний разом з похідними до порядку* n *включно на деякому відрізку* $|x - x_0| \leqslant h$.

2. Класифікація розв'язків. ***Загальним розв'язком*** рівняння (10.2) називають сім'ю розв'язків цього рівняння, залежну від n довільних сталих:

$$y = \varphi\,(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

З геометричної точки зору на площині (x, y) маємо сім'ю інтегральних кривих, залежну від n параметрів $C_1, C_2, \dots, C_n$, причому рівняння цієї сім'ї розв'язане відносно y.

Загальний розв'язок рівняння (10.2) у неявному вигляді $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ називають ***загальним інтегралом*** цього рівняння.

У деяких випадках, інтегруючи рівняння (10.2), шукають сім'ю інтегральних кривих, яка залежить від n довільних сталих C_1, C_2, $\dots$, C_n, у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y = \psi(p, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases}$$

Таку сім'ю інтегральних кривих називають ***загальним розв'язком у параметричній формі***.

Поняття частинних та особливих розв'язків для диференціальних рівнянь вищих порядків уводяться аналогічно, як і для рівняння першого порядку.

Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (10.2) називають ***частинним***, якщо у кожній його точці зберігається єдиність розв'язку задачі Коші, тобто через кожну точку $(x_0, y(x_0))$ інтегральної кривої $y = y(x)$ не проходить інший розв'язок $y = y_1(x)$, який би задовольняв початкові умови

$$y_1(x_0) = y(x_0), \;\; y_1'(x_0) = y'(x_0), \; \ldots, \; y_1^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$

Кожний розв'язок, який можна одержати з формули загального розв'язку для певних допустимих числових значень сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, буде, очевидно, частинним.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називають ***особливим***. Такий розв'язок неможливо одержати з формули загального розв'язку для жодних значень сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Зауважимо, що диференціальне рівняння n-го порядку може мати сім'ю особливих розв'язків, залежну від довільних сталих, кількість яких може бути $n-1$. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $y'' = 2\sqrt{y'}$.
Розв'язання. Зробимо заміну $y' = z$, де $z = z(x)$ — нова шукана функція. Тоді

$$z' = 2\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int dx \quad (z \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{z} = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad z = (x + C_1)^2 \quad \Rightarrow \quad y' = (x + C_1)^2.$$

Інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок

$$y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2.$$

Особливому розв'язку $z = 0$ рівняння $z' = 2\sqrt{z}$ відповідає сім'я $y = C$ особливих розв'язків заданого рівняння.
***Відповідь*:** $y = (x + C_1)^3 / 3 + C_2, \; y = C$.

3. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку *n*. У цьому пункті лекції, а також у наступній лекції розглядатимемо деякі класи звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку, загальний розв'язок (загальний інтеграл) яких можна знайти з допомогою квадратур. Зведення до квадратур виконується або з допомогою спеціальних прийомів, або шляхом попереднього зниження порядку рівняння (якщо отримане при цьому рівняння інтегрується у квадратурах).

Розглянемо спочатку рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку n, тобто рівняння вигляду

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0. \tag{10.7}$$

Розглянемо два можливі випадки.

Випадок 1. *Рівняння* (10.7) *можна розв'язати відносно* $y^{(n)}$. Тоді

$$y^{(n)} = f(x). \tag{10.8}$$

Для рівняння (10.8) з неперервною функцією $f(x)$ завжди можна знайти загальний розв'язок у квадратурах, послідовно зменшуючи порядок рівняння на одиницю. Справді, інтегруючи обидві частини цього рівняння, маємо:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Аналогічно одержуємо:

$$y^{(n-2)} = \int\!\!\int f(x)\,dx\,dx + C_1 x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int\!\!\int\!\!\int f(x)\,dx\,dx\,dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$y = \underbrace{\int\!\!\int\dots\int}_{n \text{ разів}} f(x)\,dx\,dx\dots dx + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n, \tag{10.9}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі. Формула (10.9) визначає загальний розв'язок рівняння (10.8).

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $y''' = \sin^2 x$.
Розв'язання. Права частина рівняння неперервна для всіх значень x. Двічі послідовно інтегруючи обидві частини рівняння, одержуємо:

$$y'' = \int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C_1 \right) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C_1 x + C_2.$$

Інтегруючи ще один раз, знаходимо загальний розв'язок:

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{\sin 2x}{16} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі, $C_1 := C_1/2$.
***Відповідь*:** $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{\sin 2x}{16} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

Інтегруючи послідовно рівняння (10.8), можна замість невизначених інтегралів використовувати визначені інтеграли зі змінною верхньою межею, беручи як нижню межу довільне число x_0 з інтервалу неперервності правої частини цього рівняння. Тоді загальний розв'язок рівняння (10.8) запишеться у вигляді

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n \text{ разів}} f(x)\, dx\, dx \ldots dx +$$
$$+ \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі. Перший доданок у цій формулі містить n квадратур (інтегралів), але їх можна замінити однією квадратурою згідно з ***формулою Коші*** ([7, с. 164–165])

$$\underbrace{\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\ldots\int\limits_{x_0}^{x}}_{n \text{ разів}} f(x)\,dx\,dx\ldots dx = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

Тому загальний розв'язок рівняння (10.8) можемо записати у вигляді

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + \\ + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n, \qquad (10.10)$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні (перепозначені) сталі.

Приклад 4. *Знайти розв'язок рівняння* $y''' = e^{x^2}$, *який задовольняє нульові початкові умови.*

Розв'язання. Права частина рівняння неперервна для всіх $x \in \mathbf{R}$. Використовуючи формулу (10.10), у якій беремо $x_0 = 0$, знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} e^{t^2}(x-t)^2\,dt + C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

З того, що $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, знаходимо сталі $C_1 = = C_2 = C_3 = 0$, а тому шуканим розв'язком є

$$y = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} e^{t^2}(x-t)^2\,dt. \blacksquare$$

Випадок 2. *Рівняння* (10.7) *неможливо розв'язати через елементарні функції відносно* $y^{(n)}$ *або вираз для* $y^{(n)}$ *є надто* *складним.* Такі рівняння можна розв'язувати ***методом уведення параметра***. Припустимо, що у цьому випадку існують такі функції

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t), \tag{10.11}$$

де t — деякий параметр, що $F\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \equiv 0$.

Виразимо y через параметр t. Оскільки

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)\,dt,$$

то

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1).$$

Далі, враховуючи, що

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx = \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)\,dt,$$

знаходимо

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)\,dt + C_2 \equiv \psi_2(t, C_1, C_2).$$

Міркуючи аналогічно, врешті-решт зможемо знайти

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Отже, загальним розв'язком у параметричній формі рівняння (10.7) є

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Відзначимо, що особливо легко знайти функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ з (10.11) у тому випадку, коли рівняння (10.7) можна розв'язати відносно незалежної змінної, тобто якщо

$$x = \varphi\big(y^{(n)}\big).$$

У цьому випадку замість $y^{(n)}$ можна взяти довільну неперервну функцію $\psi(t)$ і тоді $x = \varphi(\psi(t))$. Зокрема, якщо $\psi(t) = t$, то $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = t$.

Приклад 5. *Зінтегрувати рівняння* $x\sqrt{1+y''^2} = y''$.
Розв'язання. Покладемо $y'' = \operatorname{tg} t$. Тоді

$$x = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{\sin t |\cos t|}{\cos t} = \pm \sin t,$$

причому знак плюс беремо тоді, коли $\cos t > 0$, а знак мінус — коли $\cos t < 0$.

Виразимо y через параметр t. Нехай $\cos t > 0$. Тоді

$$dy' = y''\,dx = \operatorname{tg} t\, d(\sin t) = \sin t\, dt \quad \Rightarrow \quad y' = -\cos t + C_1;$$
$$dy = y'\,dx = (-\cos t + C_1)\cos t\, dt \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = -\int \cos^2 t\, dt + C_1 \int \cos t\, dt \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = -\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C_1 \sin t + C_2.$$

Отже, якщо $\cos t > 0$, то загальним розв'язком (у параметричній формі) заданого рівняння є

$$x = \sin t, \quad y = -\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C_1 \sin t + C_2.$$

Аналогічно можна показати, що якщо $\cos t < 0$, то загальним розв'язком є

$$x = -\sin t, \quad y = -\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} - C_1 \sin t + C_2.$$

Відповідь: $x = \sin t$, $y = -\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C_1 \sin t + C_2$, якщо $\cos t > 0$; $x = -\sin t$, $y = -\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} - C_1 \sin t + C_2$, якщо $\cos t < 0$.

У динаміці матеріальної точки рівняння вигляду $x'' = f(t)$, де t — час, $x = x(t)$, зустрічається при вивченні прямолінійного руху, якщо сила, що діє на точку, залежить тільки від часу.

Задача 1. *Знайти закон руху* $x(t)$ *матеріальної точки з масою* m, *яка рухається по прямій під дією сили, що змінюється за формулою* $F = k\, e^{-pt}$, *де* $p > 0$, *якщо початкові положення та швидкість руху дорівнюють нулю.*

Розв'язання. Згідно з другим законом Ньютона

$$mx'' = k\,e^{-pt} \quad \Rightarrow \quad x'' = \frac{k}{m}e^{-pt},$$

тобто маємо рівняння вигляду $x'' = f(t)$. Двічі послідовно інтегруючи, одержуємо:

$$x' = -\frac{k}{mp}\,e^{-pt} + C_1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k}{mp^2}\,e^{-pt} + C_1 t + C_2.$$

Оскільки, за умовою задачі,

$$x(0) = 0, \quad v(0) = x'(0) = 0,$$

то $C_1 = \frac{k}{mp}$, $C_2 = -\frac{k}{mp^2}$, а тому

$$x = \frac{k}{mp^2}e^{-pt} + \frac{k}{mp}\,t - \frac{k}{mp^2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{k}{mp^2}\left(e^{-pt} + pt - 1\right).$$

Зауважимо, що оскільки

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-pt} = 0,$$

то для великих значень t знайдений рух наближається до рівномірного руху

$$x(t) = \frac{k}{mp}\,t - \frac{k}{mp^2}.$$

***Відповідь*:** $x(t) = \dfrac{k}{mp^2}\left(e^{-pt} + pt - 1\right)$.

Рекомендована література: [4, с. 69–75], [6, с. 15–17, 50–53], [7, с. 148–168], [8, с. 136–151], [10, с. 91–108].

Питання до лекції 10

1. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної? Що називають розв'язком цього рівняння на деякому інтервалі?

2. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку? Яка достатня умова існування розв'язку такої задачі? Наведіть теорему Коші про існування та єдиність розв'язку задачі Коші.

3. Який геометричний і механічний зміст диференціального рівняння другого порядку, його розв'язків та відповідних задач Коші?

4. Що називають загальним розв'язком (загальним інтегралом) диференціального рівняння n-го порядку? Який розв'язок називають частинним, який — особливим? Чи може диференціальне рівняння n-го порядку мати безліч особливих розв'язків?

5. Який вигляд має загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ з неперервною правою частиною? Яка формула дозволяє цей розв'язок записати через одну квадратуру?

6. Як можна зінтегрувати рівняння, яке містить лише незалежну змінну та n-у похідну шуканої функції, якщо розв'язати його відносно похідної шуканої функції неможливо?

Вправи до лекції 10

1. Зінтегруйте рівняння:

$$\text{а) } y'' = 2^x; \quad \text{б) } y''' = \frac{1}{x}; \quad \text{в) } y^{(4)} = \sin x^2.$$

2. Знайдіть частинний розв'язок рівняння $y''' = \cos x$, який задовольняє початкові умови $y(0) = -5$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 4$.

3. Зінтегруйте методом уведення параметра рівняння:

$$\text{а) } e^{y''} - y''^2 = x; \quad \text{б) } x = \sin y'' + 2y''.$$

Лекція 11. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

План

1. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних.
2. Рівняння, яке не містить незалежної змінної.
3. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних.
4. Рівняння з точними похідними.

1. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних. Розглянемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\Big(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\Big) = 0, \tag{11.1}$$

де $1 \leqslant k < n$. Уведемо нову невідому функцію $z = z(x)$ за формулою

$$y^{(k)} = z. \tag{11.2}$$

З (11.1), (11.2) випливає, що функція z є розв'язком рівняння

$$F\Big(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\Big) = 0. \tag{11.3}$$

Звичайно, не гарантовано, що рівняння (11.3) можна зінтегрувати у скінченному вигляді, але його порядок на k одиниць менший від порядку рівняння (11.1). Таким чином, з допомогою заміни (11.2) вдалося знизити порядок рівняння (11.1) на k одиниць. Якщо $z = \omega\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ — загальний розв'язок або $\Phi(x, z, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0$ — загальний інтеграл рівняння (11.3), то для знаходження функції y одержуємо диференціальні рівняння k-го порядку

$$y^{(k)} = \omega\,(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$$

або

$$\Phi\Big(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\Big) = 0,$$

які розглядались у лекції 10 (це окремі випадки рівнянь вигляду $y^{(n)} = f(x)$ і $\Phi\big(x, y^{(n)}\big) = 0$ відповідно).

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $xy''' = y'' - xy''$.
Розв'язання. Зробимо заміну $y'' = z$. Тоді для знаходження функції $z = z(x)$ маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$xz' = z(1 - x).$$

Зінтегруємо це рівняння:

$$\frac{dz}{z} = \frac{1-x}{x}dx \quad (z \neq 0,\, x \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| - x + C_1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad z = C_1 x e^{-x} \ \big(C_1 := e^{C_1}\big) \quad \Rightarrow \quad y'' = C_1 x e^{-x}.$$

Одержали диференціальне рівняння вигляду $y'' = f(x)$. Двічі інтегруючи частинами, знаходимо:

$$y' = C_1 \int x e^{-x} dx + C_2 = -C_1\big(xe^{-x} + e^{-x}\big) + C_2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = -C_1 \int x e^{-x} dx + C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = C_1(x+2)e^{-x} + C_2 x + C_3.$$

Якщо $z = 0$, то $y'' = 0$, тобто $y = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$. Кожна з цих функцій (прямих) є частинним розв'язком заданого рівняння. Функція $x = 0$ не є розв'язком рівняння.
Відповідь: $y = C_1(x+2)e^{-x} + C_2 x + C_3$.

Задача 1. *Точка з масою* m *рухається по прямій під дією сили, яка змінюється за формулою* $F_1 = A\sin\omega t$. *Вважаючи, що опір середовища пропорційний швидкості точки, тобто* $F_2 = -kv$, *вивести закон руху* $x(t)$ *точки, якщо її початкові положення та швидкість дорівнюють нулю.*
Розв'язання. За умовою задачі, $F = F_1 + F_2$. Згідно з другим законом Ньютона

$$ma = A\sin\omega t - kv,$$

а оскільки $v = x'$, $a = x''$, то одержуємо диференціальне рівняння вигляду (11.1):

$$mx'' + kx' = A\sin\omega t.$$

Початковими умовами є $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ (за умовою задачі, початкові положення та швидкість точки дорівнюють нулю).

Уводимо нову функцію $x' = u$ (тоді $x'' = u'$) і одержуємо лінійне рівняння першого порядку

$$u' + \frac{k}{m}u = \frac{A}{m}\sin\omega t$$

з початковою умовою $u(0) = 0$. Розв'язок цього рівняння можна знайти за формулою (4.6) з лекції 4. Пропонуємо читачам самостійно переконатися в тому, що

$$u = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2}\left(\frac{k}{m}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right).$$

З умови $u(0) = 0$ знаходимо $C_1 = \frac{Am\omega}{k^2+\omega^2 m^2}$, а тому

$$u = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2}\left(\omega e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right).$$

Оскільки $u = x'$, то функція $x(t)$ є розв'язком рівняння

$$x' = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2}\left(\omega e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right),$$

інтегруючи яке, знаходимо:

$$x(t) = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2}\left(-\frac{m\omega}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m\omega}\cos\omega t - \sin\omega t\right) + C_2.$$

Оскільки $x(0) = 0$, то

$$C_2 = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2}\left(\frac{m\omega}{k} + \frac{k}{m\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{A}{k\omega}.$$

Таким чином,

$$x(t) = \frac{A}{k\omega} - \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2}\left(\frac{m\omega}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m\omega}\cos\omega t + \sin\omega t\right). \ \blacksquare$$

2. Рівняння, яке не містить незалежної змінної. Розглянемо рівняння

$$F\Big(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\Big) = 0. \tag{11.4}$$

Покажемо, що порядок цього рівняння можна знизити на одиницю. Для цього введемо нову функцію z за формулою

$$y' = z,$$

уважаючи y новою незалежною змінною, тобто $z = z(y)$. Виразимо похідні y'', $y''', \ldots, y^{(n)}$ через функцію z та її похідні за змінною y:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} = (z''z + z'^2)z,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$y^{(n)} = \omega\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big).$$

Отже, для знаходження функції z одержали диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку

$$F\Big(y, z, z'z, \ldots, \omega\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big)\Big) = 0. \tag{11.5}$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (11.5)

$$z = \varphi\,(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}),$$

то загальний інтеграл рівняння (11.4) зможемо знайти, зінтегрувавши рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = \varphi\,(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}),$$

а саме:

$$\int \frac{dy}{\varphi\,(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n.$$

Зауважимо, що приймаючи y за незалежну змінну, можна втратити розв'язки рівняння (11.4) вигляду $y = C$. Безпосередньою підстановкою у рівняння (11.4) легко з'ясувати, чи має воно такі розв'язки.

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $yy'' = y'^2 - y'^3$.
Розв'язання. Оскільки рівняння явно не містить x, то зробимо заміну $y' = z(y)$. Тоді $y'' = z'z$ і, підставляючи в рівняння, маємо:

$$yz\frac{dz}{dy} = z^2 - z^3 \quad\Rightarrow\quad z\left(y\frac{dz}{dy} - z + z^2\right) = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad z = 0 \quad \text{або} \quad y\frac{dz}{dy} = z - z^2.$$

З першого рівняння випливає, що $y' = 0$ і, отже, $y = C$, а з другого:

$$y\frac{dz}{dy} = z - z^2 \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dz}{z - z^2} = \int\frac{dy}{y} \quad \big(z - z^2 \neq 0,\ \ y \neq 0\big) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \int\left(\frac{1}{1 - z} + \frac{1}{z}\right)dz = \int\frac{dy}{y} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \ln|z| - \ln|1 - z| = \ln|y| + C_1 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z}{1 - z} = C_1 y \quad\Rightarrow\quad z = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y}.$$

Оскільки $z = y'$, то

$$y' = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1 + C_1 y}{y}dy = C_1 dx \quad (y \neq 0) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \int\left(\frac{1}{y} + C_1\right)dy = C_1 x + C_2 \quad\Rightarrow\quad \ln|y| + C_1 y = C_1 x + C_2.$$

Якщо $z - z^2 = 0$, то $z = 0$ або $z = 1$. Випадок $z = 0$ уже розглянуто, а якщо $z = 1$, то $y' = 1$, $y = x + C$. Усі ці прямі є особливими розв'язками.
Відповідь: $\ln|y| + C_1(y - x) = C_2\,,\ y = x + C\,,\ y = C.$

3. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних. Диференціальне рівняння

$$F\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\Big) = 0 \tag{11.6}$$

називають ***однорідним*** відносно шуканої функції та її похідних, якщо його ліва частина для довільного $t \neq 0$ справджує умову

$$F\Big(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}\Big) = t^m \cdot F\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\Big), \tag{11.7}$$

де число m — вимір однорідності функції F. Покажемо, що з допомогою підстановки

$$z = \frac{y'}{y} \quad \Rightarrow \quad y = e^{\int z(x)\, dx}, \tag{11.8}$$

де $z = z(x)$ — нова невідома функція, порядок рівняння (11.6) можна знизити на одиницю. Справді, оскільки

$$y' = yz, \quad y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$
$$y''' = y \cdot (z'' + 3zz' + z^3), \ \ldots,$$
$$y^{(n)} = y \cdot \psi\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big),$$

то, підставляючи ці вирази в (11.6), маємо співвідношення

$$F\Big(x, y, y\, z, y \cdot (z^2 + z'), \ldots, y \cdot \psi\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big)\Big) = 0,$$

яке, враховуючи (11.7), можемо записати у вигляді

$$y^m \cdot F\Big(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, \psi\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big)\Big) = 0.$$

Після скорочення на y^m $(y \neq 0)$ одержуємо диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку:

$$F\Big(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, \psi\Big(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\Big)\Big) = 0. \tag{11.9}$$

Якщо $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ — загальний розв'язок рівняння (11.9), то, беручи до уваги (11.8), знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння (11.6):

$$y = C_n \cdot e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\, dx},$$

де C_1, C_2, $\ldots$, C_n — довільні сталі.

Інтегруючи рівняння (11.6), ми припускали, що $y \neq 0$. Функція $y = 0$ теж є розв'язком цього рівняння, але її можна отримати з формули загального розв'язку при $C_n = 0$.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $yy'' - y'^2 - 30\sqrt{x}y^2 = 0$.
Розв'язання. Легко переконатися, що ліва частина рівняння є однорідною функцією (виміру 2), а тому рівняння є однорідним. Нехай $y' = yz$. Тоді $y'' = (z' + z^2)\, y$ і, підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$y^2(z' + z^2) = y^2 z^2 + 30\sqrt{x}y^2 \quad \Rightarrow \quad z' = 30\sqrt{x} \;\; (y \neq 0) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad z = 20x\sqrt{x} + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 20x\sqrt{x} + C_1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \ln|y| = 8x^2\sqrt{x} + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = C_2 e^{8x^2\sqrt{x} + C_1 x}.$$

Функція $y = 0$ є частинним розв'язком.
***Відповідь*:** $y = C_2 e^{8x^2\sqrt{x} + C_1 x}$.

4. Рівняння з точними похідними. Так називають рівняння вигляду

$$F\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\Big) = 0, \tag{11.10}$$

ліва частина якого є точною (повною) похідною деякої функції, тобто

$$F\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\Big) = \frac{d}{dx}\Phi\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\Big).$$

При цьому одержуємо рівняння

$$\Phi\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\Big) = C_1, \tag{11.11}$$

де C_1 — довільна стала, тобто порядок рівняння (11.10) вдалося знизити на одиницю.

Рівність (11.11) називають ***першим інтегралом*** рівняння (11.10).

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння*

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} - yy' = 0.$$

Розв'язання. Ліву частину рівняння можемо записати як

$$\left(\frac{y'}{x} - \frac{1}{2}y^2\right)' = 0,$$

звідки знаходимо перший інтеграл рівняння:

$$\frac{y'}{x} - \frac{1}{2}y^2 = C_1. \tag{11.12}$$

Співвідношення (11.12) — це рівняння з відокремлюваними змінними, тому

$$\frac{dy}{y^2 + C_1} = \frac{x}{2}dx \quad (C_1 := 2C_1) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2 + C_1} = \frac{x^2}{4} + C_2,$$

причому інтеграл залежить від сталої C_1, яка може набувати значення різних знаків.

Якщо $C_1 = 0$, то одержуємо особливі розв'язки

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{4} + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{x^2 + C} \quad (C := 4C_2).$$

Якщо $C_1 > 0$, то

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} = \frac{x^2}{4} + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = 4C_1 \operatorname{tg}(C_1 x^2 + C_2) \quad \left(C_1 := \sqrt{C_1}/4,\ C_2 := C_2\sqrt{C_1}\right).$$

Якщо $C_1 < 0$, то

$$\frac{1}{2\sqrt{|C_1|}} \ln \left| \frac{y - \sqrt{|C_1|}}{y + \sqrt{|C_1|}} \right| = \frac{x^2}{4} + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{C_1} \ln \left| \frac{y - C_1}{y + C_1} \right| = x^2 + C_2 \quad \left(C_1 := \sqrt{|C_1|},\ C_2 := 4C_2 \right).$$

***Відповідь*:** $y = 4C_1 \operatorname{tg}(C_1 x^2 + C_2)$, $\frac{2}{C_1} \ln \left| \frac{y-C_1}{y+C_1} \right| = x^2 + C_2$, $y = -\frac{4}{x^2+C}$.

Якщо (11.10) не є рівнянням з точними похідними, то у багатьох випадках удається знайти таку функцію

$$\mu = \mu \left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)} \right),$$

після множення на яку ліва частина цього рівняння буде точною похідною. Функцію μ називають ***інтегрувальним множником*** рівняння (11.10). Потрібно пам'ятати, що виконуючи множення на інтегрувальний множник, можна отримати зайві розв'язки (розв'язки рівняння $\mu = 0$), а також втратити деякі розв'язки (розв'язки, вздовж яких функція μ перетворюється у нескінченність).

Ми не розглядатимемо питання про знаходження інтегрувального множника у загальному випадку (що досить складно), а обмежимося розглядом прикладу.

Приклад 5. *Зінтегрувати рівняння* $yy'' - y'^2 = y'$.

Розв'язання. Інтегрувальним множником цього рівняння є функція y^{-2}. Справді, поділивши обидві частини рівняння на y^2 ($y \neq 0$), одержуємо:

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} - \frac{y'}{y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y'}{y} + \frac{1}{y} \right)' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} + \frac{1}{y} = C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 y - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{C_1 y - 1} = dx.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Якщо $C_1 \neq 0$, то маємо загальний розв'язок:

$$y = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1}.$$

Якщо $C_1 = 0$, то одержуємо особливі розв'язки $y = -x + C$. Крім того, особливим розв'язком є функція $y = 0$.
***Відповідь*:** $y = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1},\ y = -x + C,\ y = 0.$

З допомогою інтегрувального множника легко зінтегрувати рівняння

$$y'' = f(y), \tag{11.13}$$

яке є окремим випадком (11.4). Справді, якщо помножити обидві частини рівняння (11.13) на $\mu = 2y'$, то

$$2y'y'' = 2f(y)y' \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y'^2\right) = \frac{d}{dx}\left(2\int f(y)\,dy\right) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C_1.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (11.13) можемо записати у вигляді

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}} = \pm x + C_2.$$

Рекомендована література: [1, с. 114–135], [4, с. 76–85], [7, с. 168–179], [8, с. 151–161], [10, с. 107–113], [20, с. 227–287].

Питання до лекції 11

1. З допомогою якої заміни можна знизити порядок диференціального рівняння n-го порядку, що не містить шуканої функції, і рівняння, що не містить шуканої функції та послідовних перших похідних? Запишіть загальний вигляд таких рівнянь.

2. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння n-го порядку, яке не містить незалежної змінної? З допомогою якої заміни можна знизити порядок цього рівняння?

3. Яку умову має справджувати ліва частина диференціального рівняння $F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0$, щоб воно було однорідним відносно шуканої функції та її похідних? Яка заміна виконується у такому рівнянні?

4. Як можна знизити порядок рівняння $F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0$, якщо його ліва частина є точною похідною деякої функції? Що називають першим інтегралом? Яку функцію називають інтегрувальним множником такого рівняння?

Вправи до лекції 11

1. Визначте тип рівнянь та зінтегруйте їх:

$$\text{а) } xy'' + xy'^2 + y' = 0; \quad \text{б) } y' + y''^2 = xy'; \quad \text{в) } 4\sqrt{y}y'' = 1.$$

2. Знайдіть розв'язок рівнянь, які задовольняють задані початкові умови, дослідивши попередньо питання про існування та єдиність шуканого розв'язку:

$$\text{а) } y'' = (1 + y'^2)^{3/2}, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0;$$
$$\text{б) } 4y' + y''^2 = 4xy'', \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = -1.$$

3. Відшукайте рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних, та зінтегруйте його:

$$\text{а) } x^2y^2 - y''^2 + yy'^2 = 0; \quad \text{б) } xyy'' + yy' = xy'^2 + y^2;$$
$$\text{в) } xyy'' + xy'^2 - \sqrt{y}y' = 0.$$

4. Знайдіть інтегральну криву рівняння $yy'' + y'^2 = 1$, яка проходить через точку $(0, 1)$ і дотикається у цій точці до прямої $y = 1 - x$. Обґрунтуйте єдиність такої інтегральної кривої.

5. Зінтегруйте рівняння з точними похідними:

$$\text{а) } yy'' + y'^2 = 1; \quad \text{б) } y'' - xy' = y + 1.$$

6. Доведіть, що рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ буде рівнянням з точними похідними тоді і тільки тоді, коли $q(x) = p'(x)$. Зінтегруйте рівняння $y'' + \cos x \cdot y' - \sin x \cdot y = 0$.

Лекція 12. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку

План

1. Основні означення й поняття.
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння.
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції.
4. Основна теорема.
5. Формула Остроградського–Ліувілля.

1. Основні означення й поняття. У багатьох прикладних задачах функції, що вивчаються, та їхні похідні набувають настільки малих значень, що їхніми квадратами, кубами і вищими степенями можна знехтувати. Це дозволяє замінити довільні залежності між величинами залежностями лінійними (див. також лекцію 9, п. 1). Застосовуючи операцію лінеаризації до диференціальних рівнянь, що описують певний процес чи явище, одержують диференціальні рівняння, в які шукана функція та її похідні входять лінійно. Такі рівняння називають лінійними.

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \qquad (12.1)$$

Якщо $f(x) \equiv 0$ на інтервалі (a, b), то рівняння (12.1) називають ***лінійним однорідним***. Воно має вигляд

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \qquad (12.2)$$

Якщо функція $f(x)$ тотожно відмінна від нуля на інтервалі (a, b), то рівняння (12.1) називають ***лінійним неоднорідним***.

Розглянемо питання про існування розв'язку рівняння (12.1). Розв'язавши його відносно старшої похідної, маємо:

$$y^{(n)} = f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y. \qquad (12.3)$$

Якщо функції $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ (***коефіцієнти*** рівняння) і $f(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b), то права частина рівняння (12.3) є неперервною функцією на інтервалі (a, b) і має неперервні, а, отже, й обмежені на відрізку $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ частинні похідні за змінними y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$ (ними є функції $-p_n(x)$, $-p_{n-1}(x)$, $\ldots$, $-p_1(x)$ відповідно). Тоді з теореми Коші (лекція 10) випливає, що для будь-яких початкових умов

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0', \;\; \ldots, \;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0 \in (a, b)$, рівняння (12.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$. Цей розв'язок n разів диференційовний на інтервалі (a, b). Особливих розв'язків рівняння (12.1) не має.

Для скорочення записів позначимо ліву частину рівняння (12.1) через $L[\,y\,]$:

$$L[\,y\,] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y. \qquad (12.4)$$

Таким чином, $L[\,y\,]$ — це результат виконання над функцією y операцій, указаних у правій частині формули (12.4), а саме: знаходження похідних функції y до порядку n включно, множення y, y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ на коефіцієнти рівняння й додавання отриманих добутків. Сукупність цих операцій позначимо через L:

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

і називатимемо ***лінійним диференціальним оператором n-го порядку***.

Відзначимо основні властивості оператора L.

Властивість 1. *Сталий множник можна винести за знак лінійного диференціального оператора, тобто*

$$L[\,Cy\,] = C\,L[\,y\,].$$

Властивість 2. *Лінійний диференціальний оператор від суми функцій дорівнює сумі лінійних диференціальних операторів від доданків, тобто*

$$L[\,y_1 + y_2\,] = L[\,y_1\,] + L[\,y_2\,].$$

Використовуючи оператор L, лінійне неоднорідне рівняння (12.1) і лінійне однорідне рівняння (12.2) можна записувати відповідно як $L[\,y\,] = f(x)$ і $L[\,y\,] = 0$.

Очевидно, кожне лінійне однорідне рівняння (12.2) має нульовий розв'язок $y \equiv 0$, який називають ***тривіальним***.

2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння. Нижче буде показано, що знання частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння спрощує процес побудови загального розв'язку, а іноді дозволяє повністю розв'язати задачу інтегрування цього рівняння. Це є можливим завдяки тому, що частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння мають низку цікавих властивостей, які сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. *Якщо y_1 — частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння* (12.2), *то $y = Cy_1$, де C — довільна стала, також є розв'язком цього рівняння.*
Доведення. Оскільки $L[\,y_1\,] \equiv 0$, $a < x < b$, то згідно з властивістю 1 оператора L (п. 1)

$$L[\,Cy_1\,] = CL[\,y_1\,] \equiv 0$$

і, отже, Cy_1 є розв'язком рівняння (12.2). ►

Таким чином, знаючи один частинний розв'язок рівняння (12.2), можемо без квадратур одержати відразу сім'ю розв'язків цього рівняння, залежну від одного параметра (сталої C).

Теорема 2. *Якщо y_1 і y_2 — два частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння* (12.2), *то їхня сума $y_1 + y_2$ також є розв'язком цього рівняння.*
Доведення. Оскільки $L[\,y_1\,] \equiv 0$, $L[\,y_2\,] \equiv 0$, то, за властивістю 2 оператора L, маємо:

$$L[\,y_1 + y_2\,] = L[\,y_1\,] + L[\,y_2\,] \equiv 0. \ ►$$

З теорем 1, 2 випливає таке твердження.

Теорема 3. *Якщо y_1, y_2, …, y_n — частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння* (12.2), *то*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

де C_1, C_2, $\ldots$, C_n *— довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння.*

Розглянемо, наприклад, рівняння $y'' + y = 0$. Воно, як легко переконатись, має розв'язки $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, а тому згідно з теоремою 3 його розв'язком є також кожна функція сім'ї $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Природно виникає питання: якими повинні бути n частинних розв'язків y_1, y_2, $\ldots$, y_n рівняння (12.2), щоб їхня лінійна комбінація $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, яка містить n довільних сталих, була загальним розв'язком цього рівняння? Для відповіді на це важливе питання введемо поняття лінійної залежності (лінійної незалежності) функцій.

3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції. Функції $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$, визначені на інтервалі (a, b), називають ***лінійно незалежними*** на цьому інтервалі, якщо співвідношення

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0, \tag{12.5}$$

де α_1, α_2, $\ldots$, α_n — сталі, виконується для всіх $x \in (a, b)$ тільки тоді, коли всі $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Якщо у співвідношенні (12.5) хоча б одна зі сталих α_1, α_2, $\ldots$, α_n відмінна від нуля, то функції y_1, y_2, $\ldots$, y_n називають ***лінійно залежними*** на інтервалі (a, b).

Розглянемо приклади.

1. Функції $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $\ldots$, $y_n = x^{n-1}$ лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Справді, рівність $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1} = 0$, в якій не всі α_j дорівнюють нулю, не може виконуватись тотожно, бо є алгебричним рівнянням $(n-1)$-го степеня, яке не може мати більше $(n-1)$ різних коренів.

2. Функції $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ лінійно незалежні на будь-якому інтервалі, бо співвідношення $\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0$, де α_1 і α_2 одночасно не дорівнюють нулю, не може виконуватись тотожно на жодному інтервалі.

3. Функції $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 3$ лінійно залежні на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, бо $3 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot 3 \equiv 0$.

Для встановлення ознак лінійної залежності та лінійної незалежності функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ розглянемо визначник, складений з цих функцій та їхніх похідних до порядку $n-1$ включно:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{12.6}$$

Визначник (12.6) називають ***визначником Вронського*** або ***вронскіаном*** функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Теорема 4 (необхідна умова лінійної залежності n функцій). *Якщо функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійно залежні на деякому інтервалі (a, b), то їхній вронскіан тотожно дорівнює нулю на цьому інтервалі.*

Доведення. Згідно з умовою теореми для $a < x < b$ маємо:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0, \tag{12.7}$$

де не всі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнюють нулю. Диференціюючи співвідношення (12.7) $(n-1)$ разів, одержуємо лінійну однорідну систему відносно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' = 0, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases} \tag{12.8}$$

Оскільки хоча б одне число α_j відмінне від нуля, то система (12.8) має ненульовий розв'язок. Отже, визначник цієї системи, який є вронскіаном функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, дорівнює нулю в кожній точці інтервалу (a, b). ►

З теореми 4 випливає важливе твердження: *якщо $W(x) \neq 0$ хоча б в одній точці інтервалу (a, b), то $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — лінійно незалежні на цьому інтервалі функції.*

Наголошуємо, що тотожність $W(x) \equiv 0$ є тільки необхідною умовою лінійної залежності функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, тобто з того, що $W(x) \equiv 0$, взагалі кажучи, не випливає, що ці функції лінійно залежні (див. вправу 7 до цієї лекції). Однак, якщо функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є частинними розв'язками лінійного однорідного рівняння (12.2), то справджується таке твердження.

Теорема 5 (необхідна умова лінійної незалежності n розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку). *Якщо розв'язки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійного однорідного рівняння (12.2) лінійно незалежні на інтервалі (a, b), то їхній вронскіан відмінний від нуля в усіх точках цього інтервалу.*

Доведення. Припустимо, що $W(x_0) = 0$, де x_0 — деяка точка інтервалу (a, b). Складемо систему рівнянь відносно невідомих $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{12.9}$$

Визначником системи (12.9) є $W(x_0)$, а оскільки, за припущенням, $W(x_0) = 0$, то ця система має ненульовий розв'язок. Позначимо цей розв'язок через $C_1 = \tilde{C}_1$, $C_2 = \tilde{C}_2$, $\ldots$, $C_n = \tilde{C}_n$ і складемо лінійну комбінацію розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \ldots + \tilde{C}_n y_n. \tag{12.10}$$

Згідно з теоремою 3 функція (12.10) є розв'язком рівняння (12.2), а з системи (12.9) випливає, що у точці $x = x_0$ розв'язок (12.10) перетворюється в нуль разом з усіма похідними до порядку $n - 1$ включно. Але ці самі умови задовольняє також тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ рівняння (12.2) і, отже, згідно з теоремою Коші (про єдиність розв'язку) обидва розв'язки збігаються, тобто

$$\tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \ldots + \tilde{C}_n y_n \equiv 0,$$

причому не всі числа $\tilde{C}_j$ дорівнюють нулю. Це означає, що функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійно залежні на інтервалі (a, b), що суперечить умові теореми. Отже, наше припущення хибне, а тому $W(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a, b)$. ►

З теорем 4, 5 випливає ознака лінійної незалежності n частинних розв'язків рівняння (12.2): *для того, щоб n розв'язків лінійного однорідного рівняння* (12.2) *були лінійно незалежними на інтервалі* (a, b), ***необхідно і достатньо***, *щоб їхній вронскіан не перетворювався в нуль у жодній точці цього інтервалу.*

4. Основна теорема. Будь-яку сукупність n розв'язків лінійного однорідного рівняння (12.2), визначених і лінійно незалежних на інтервалі (a, b), називають ***фундаментальною системою розв'язків*** цього рівняння на інтервалі (a, b).

Наприклад, функції $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння $y'' + y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, бо вони є розв'язками цього рівняння і лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$. Але це рівняння має й інші фундаментальні системи розв'язків, наприклад, кожна пара функцій $y_1 = k \cos x$, $y_2 = k \sin x$, де k — довільна стала, відмінна від нуля, також буде фундаментальною системою розв'язків.

Можна довести (див., наприклад, [10, с. 118–119]), що кожне лінійне однорідне диференціальне рівняння має фундаментальну систему розв'язків, а як видно з наведеного прикладу, таке рівняння може мати безліч фундаментальних систем розв'язків.

Знання фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати розв'язок рівняння (12.2), який містить n довільних сталих, причому цей розв'язок буде загальним.

Теорема 6 (Основна теорема). *Якщо* y_1, y_2, $\ldots$, y_n — *фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння* (12.2), *то загальний розв'язок цього рівняння визначається формулою*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{12.11}$$

де C_1, C_2, $\ldots$, C_n — *довільні числа.*

Доведення. Покажемо, що сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ завжди можна вибрати так, щоб формула (12.11) визначала розв'язок рівняння (12.2), який задовольняє будь-які наперед задані початкові умови:

$$y(x_0) = y_0,\;\; y'(x_0) = y_0',\; \ldots,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (12.12)$$

Для визначення C_1, C_2, …, C_n одержуємо неоднорідну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \qquad (12.13)$$

визначником якої є $W(x_0)$. Згідно з теоремою 5 $W(x_0) \neq 0$ і, отже, система (12.13) має єдиний розв'язок $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, …, $\tilde{C}_n$. Функція (12.11) є розв'язком рівняння (12.2) згідно з теоремою 3. Вираз (12.11), в якому $C_i = \tilde{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, очевидно, задовольняє початкові умови (12.12). ►

Повернімось до рівняння $y'' + y = 0$. Вище було показано, що функції $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, а тому згідно з теоремою 6 функція $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ є загальним розв'язком наведеного рівняння.

5. Формула Остроградського–Ліувілля. Нехай маємо n лінійно незалежних частинних розв'язків y_1, y_2, …, y_n лінійного однорідного рівняння (12.2). Тоді це рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \qquad (12.14)$$

бо рівняння (12.14) має ті самі лінійно незалежні розв'язки, що й (12.2). Справді, якщо підставити в (12.14) замість y одну з функцій y_1, y_2, …, y_n, то одержимо визначник, який має два однакові стовпці і тому тотожно рівний нулю. Звідси випливає, що загальні розв'язки рівнянь (12.2) і (12.14) однакові, а самі рівняння відрізняються лише множником. Розкладаючи визначник з (12.14) за елементами останнього стовпця, запишемо рівняння (12.14) у вигляді

$$\Delta_0(x)y^{(n)} - \Delta_1(x)y^{(n-1)} + \Delta_2(x)y^{(n-2)} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k\Delta_k(x)y^{(n-k)} + \ldots + (-1)^n\Delta_n(x)y = 0, \qquad (12.15)$$

де $\Delta_i(x)$ — визначник, утворений викреслюванням останнього стовпця і $(n+1-i)$-го рядка у визначнику з (12.14).

Оскільки рівняння (12.15) збігається з рівнянням (12.2), то прирівнюючи коефіцієнти біля однакових похідних і враховуючи, що $\Delta_0(x) = W(x)$, одержуємо:

$$\begin{gathered} p_1(x) = -\frac{\Delta_1(x)}{W(x)}, \\ p_2(x) = \frac{\Delta_2(x)}{W(x)}, \ \ldots, \ p_n(x) = (-1)^n\frac{\Delta_n(x)}{W(x)}. \end{gathered} \qquad (12.16)$$

Здиференціюємо тепер вронскіан (12.6), використовуючи таке правило диференціювання: похідна від визначника n-го порядку дорівнює сумі n визначників, які одержуємо з нього почерговою заміною елементів першого, другого, …, n-го рядка їхніми похідними. Усі ці визначники, крім останнього, дорівнюють нулю (вони мають два однакові рядки), а тому

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Легко бачити, що $W'(x) = \Delta_1(x)$, а якщо врахувати першу формулу з (12.16), то

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = -\,p_1(x),$$

звідки, інтегруючи, знаходимо

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}, \tag{12.17}$$

де $x = x_0$ — довільна точка з інтервалу (a, b). Формулу (12.17) називають ***формулою Остроградського–Ліувілля***. Вона дозволяє знайти вронскіан фундаментальної системи розв'язків рівняння (12.2), не маючи самої системи.

З формули Остроградського–Ліувілля випливають такі ***властивості вронскіана*** розв'язків лінійного однорідного рівняння:

1. *Якщо вронскіан n розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$ рівняння* (12.2) *дорівнює нулю в деякій точці $x_0 \in (a, b)$, то він дорівнює нулю в усіх точках цього інтервалу.*

2. *Якщо вронскіан n розв'язків рівняння* (12.2) *відмінний від нуля хоч в одній точці $x_0 \in (a, b)$, то він відмінний від нуля в усіх точках цього інтервалу.*

Формулу (12.14) можна використовувати для побудови диференціального рівняння, якщо відомою є його фундаментальна система розв'язків.

Приклад 1. *Побудувати диференціальне рівняння, яке має фундаментальну систему розв'язків $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x - 1$.*
Розв'язання. Скористаємось формулою (12.14):

$$\begin{vmatrix} x^2 & x-1 & y \\ 2x & 1 & y' \\ 2 & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник за елементами третього стовпця:

$$y \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 - 2x)y'' + 2(1-x)y' + 2y = 0. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [4, с. 88–100], [6, с. 91–102], [7, с. 363–389], [8, с. 174–197], [10, с. 113–121].

Питання до лекції 12

1. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння n-го порядку? Чим відрізняється лінійне однорідне рівняння від лінійного неоднорідного?

2. Що називають лінійним диференціальним оператором n-го порядку і які його основні властивості? Як можна записати лінійні однорідне і неоднорідне рівняння з використанням лінійного диференціального оператора?

3. Чи є лінійна комбінація зі сталими коефіцієнтами частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння розв'язком цього ж рівняння?

4. Які функції називають лінійно незалежними та лінійно залежними на інтервалі? Наведіть приклади таких функцій.

5. Що називають вронскіаном функцій $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$?

6. Як формулюється необхідна умова лінійної залежності функцій $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$? Як формулюється необхідна і достатня умова лінійної незалежності n частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння?

7. Що таке фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння? Як побудувати загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння, знаючи його фундаментальну систему розв'язків?

8. Який вигляд має формула Остроградського–Ліувілля? Наведіть властивості вронскіана розв'язків лінійного однорідного рівняння, які випливають з цієї формули.

Вправи до лекції 12

1. Знайдіть $L[\,e^x\,]$, $L[\,e^{2x}\,]$, $L[\,x^2\,]$, якщо L — лінійний диференціальний оператор, заданий формулою

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} - 5\frac{d}{dx} + 6.$$

2. З'ясуйте, розв'язком якого рівняння є функція $y = x^2e^x$:

$$\text{а) } y''' - 2y'' = xe^x; \quad \text{б) } y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;$$
$$\text{в) } y'' - 3y' + 2y = x^2e^x.$$

3. Знайдіть вронскіан функцій:

$$\text{а) } y_1 = e^x,\ y_2 = 5e^x; \quad \text{б) } y_1 = \cos^2 x,\ y_2 = \cos 2x,\ y_3 = 1.$$

Чи можна, знаючи вронскіан функцій, зробити висновок про їхню лінійну залежність чи лінійну незалежність?

4. Дослідіть на лінійну залежність функції:

$$\text{а) } y_1 = e^{2x},\ y_2 = x^2; \quad \text{б) } y_1 = 3x + 7,\ y_2 = 9x + 21;$$
$$\text{в) } y_1 = 2^x,\ y_2 = 3^x,\ y_3 = 4^x.$$

5. Доведіть, що якщо серед функцій y_1, y_2, $\ldots$, y_n хоч одна тотожно дорівнює нулю, то вони лінійно залежні.

6. Запишіть лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку, яке має фундаментальну систему розв'язків:

$$\text{а) } y_1 = \cos x,\ \ y_2 = \sin 2x; \quad \text{б) } y_1 = e^x,\ \ y_2 = e^{3x}.$$

7. Доведіть, що вронскіан функцій

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-1, 0], \\ x^2, & \text{якщо } x \in [0, 1], \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in [-1, 0], \\ 0, & \text{якщо } x \in [0, 1], \end{cases}$$

тотожно дорівнює нулю, але вони лінійно незалежні на відрізку $[-1, 1]$.

Лекція 13. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

План

1. Основні означення й поняття.

2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел.

3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел.

4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1. Основні означення й поняття. Важливий клас звичайних диференціальних рівнянь складають лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Такі рівняння є диференціальними моделями багатьох прикладних задач (наприклад, з теоретичної механіки і електрики), а їхні розв'язки виражаються у квадратурах або навіть через елементарні функції.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$L[\,y\,] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

де коефіцієнти a_1, a_2, …, a_n — дійсні числа, а права частина $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b) функція (зокрема, вона може бути й сталою на цьому інтервалі).

Дослідимо спочатку питання про побудову загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, тобто рівняння

$$L[\,y\,] = 0. \tag{13.1}$$

Для знаходження загального розв'язку рівняння (13.1) потрібно знати хоча б одну фундаментальну систему розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ цього рівняння. Тоді згідно з Основною теоремою (теорема 6 з лекції 12) загальним розв'язком цього рівняння є

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

де C_1, C_2, …, C_n — довільні сталі.

Легко переконатися, що лінійне однорідне рівняння першого порядку $y' + ay = 0$, де a — дійсна стала, має частинний розв'язок $y_1 = e^{-ax}$. Спробуємо й для лінійного однорідного рівняння n-го порядку (13.1) частинний розв'язок відшукати у вигляді

$$y = e^{kx}, \tag{13.2}$$

де k — деяке, поки що невизначене, число (дійсне або комплексне). Підставляючи (13.2) в ліву частину рівняння (13.1), одержуємо:

$$L(e^{kx}) = (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n) \cdot e^{kx}. \tag{13.3}$$

З (13.3) випливає, що функція (13.2) буде розв'язком диференціального рівняння (13.1) тоді і тільки тоді, коли число k є коренем алгебричного рівняння

$$P(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \tag{13.4}$$

Багаточлен $P(k)$ називають ***характеристичним багаточленом***, рівняння (13.4) — ***характеристичним рівнянням***, яке відповідає рівнянню (13.1), а корені рівняння (13.4) — ***характеристичними числами*** рівняння (13.1). Легко бачити, що складаючи характеристичне рівняння, потрібно в (13.1) похідні різних порядків замінити відповідними степенями k.

2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел. Структура фундаментальної системи розв'язків, а отже, і загального розв'язку рівняння (13.1) залежить від характеристичних чисел. Припустимо, що всі характеристичні числа k_1, k_2, …, k_n дійсні та прості (різні). Тоді згідно з (13.2) функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, \ \ y_2 = e^{k_2 x}, \ \ \ldots, \ \ y_n = e^{k_n x} \tag{13.5}$$

є частинними розв'язками рівняння (13.1). Переконаємося, що вони є лінійно незалежними на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Для цього обчислимо вронскіан функцій (13.5):

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & \dots & e^{k_nx} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & \dots & k_ne^{k_nx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1}e^{k_1x} & k_2^{n-1}e^{k_2x} & \dots & k_n^{n-1}e^{k_nx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)\,x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Визначник у правій частині останньої рівності є визначником Вандермонда і, як відомо з курсу алгебри, дорівнює добутку всіх множників вигляду $k_j - k_i$, де $1 \leqslant i < j \leqslant n$. За припущенням, $k_j \neq k_i$ $(j \neq i)$, а тому $W(x) \neq 0$. Таким чином, функції (13.5) утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (13.1), а тому згідно з Основною теоремою функція

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + \ldots + C_ne^{k_nx}, \tag{13.6}$$

де C_1, C_2, $\ldots$, C_n — довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (13.1).

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $y'' - 4y' + 3y = 0$.
Розв'язання. Характеристичним рівнянням є $k^2 - 4k + 3 = 0$, а його коренями — числа $k_1 = 1$ і $k_2 = 3$. Згідно з формулою (13.6) загальним розв'язком рівняння є $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі. ■

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $y''' - 5y'' - 6y' = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 5k^2 - 6k = 0$ має прості корені $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 6$. Отже, загальним розв'язком є $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{6x}$, де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі. ■

Розглянемо випадок, коли всі характеристичні числа різні, але серед них є комплексні. У цьому випадку для відшукання дійсних розв'язків (13.1) зручно знати його комплексні розв'язки.

Комплексну функцію $y(x) = u(x) + i\,v(x)$, де $i = \sqrt{-1}$, дійсної змінної x називають ***комплексним розв'язком*** рівняння (13.1) на інтервалі (a, b), якщо її підстановка перетворює це рівняння у тотожність $L[\,y\,] \equiv 0$ для всіх $x \in (a, b)$.

Нехай $a + bi$ — характеристичне число рівняння (13.1). Відомо, що коли алгебричне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь, то воно має також і спряжений з ним корінь. Отже, характеристичне рівняння (13.4) у випадку, який розглядаємо, має також комплексно-спряжений корінь $a - bi$.

Загальний розв'язок рівняння (13.1) можна знайти за формулою (13.6), але функція $y(x)$ буде комплекснозначною. З наступної теореми випливає, що якщо комплексна функція $y(x)$ є розв'язком рівняння (13.1), то її дійсна та уявна частини є дійсними розв'язками цього ж рівняння.

Теорема 1. *Якщо функція* $y(x) = u(x) + i\,v(x)$ *є розв'язком рівняння* (13.1), *то кожна з функцій* $u(x)$ та $v(x)$ *також є розв'язком цього рівняння.*

Доведення. Оскільки, за умовою теореми, $L[\,y\,] \equiv 0$, то використовуючи властивості оператора L (лекція 12), одержуємо:

$$L[\,y\,] = L[\,u + iv\,] = L[\,u\,] + iL[\,v\,] = 0$$

і, отже, $L[\,u\,] \equiv 0$, $L[\,v\,] \equiv 0$, що й потрібно було довести. ▶

Покажемо тепер, як, маючи комплекснозначний розв'язок рівняння (13.1), знайти його два лінійно незалежні дійсні розв'язки.

Згідно з (13.2) характеристичним числам $a + bi$, $a - bi$ відповідають комплексні розв'язки $y_1 = e^{(a+bi)x}$ і $y_2 = e^{(a-bi)x}$ рівняння (13.1). Використовуючи формулу Ейлера, ці розв'язки запишемо у вигляді

$$y_1 = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx), \quad y_2 = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx).$$

Характеристичне число $a + bi$ на підставі теореми 1 породжує два дійсні розв'язки рівняння (13.1): дійсну та уявну частини функції y_1, тобто функції $e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \sin bx$ є розв'язками рівняння (13.1), причому вони є лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$ (пропонуємо самостійно переконатися, що їхній вронскіан відмінний від нуля).

Очевидно, що характеристичне число $a - bi$ нових лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (13.1) не дає.

Таким чином, якщо всі характеристичні числа різні, але серед них є комплексні, то кожному дійсному кореню k відповідає розв'язок e^{kx}, а кожній парі комплексно-спряжених коренів $a \pm bi$ відповідають два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки $e^{ax}\cos bx$ і $e^{ax}\sin bx$. Усього матимемо n дійсних частинних розв'язків вигляду

$$e^{kx}, \quad e^{ax}\cos bx, \quad e^{ax}\sin bx, \tag{13.7}$$

які утворюють фундаментальну систему розв'язків. Згідно з Основною теоремою (лекція 12) загальний розв'язок рівняння (13.1) одержимо у вигляді лінійної комбінації усіх частинних розв'язків (13.7) з довільними сталими $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння*

$$y^{(4)} - 6y''' + 12y'' + 6y' - 13y = 0.$$

Розв'язання. Розв'язками характеристичного рівняння $k^4 - 6k^3 + 12k^2 + 6k - 13 = 0$ є два дійсні і два комплексно-спряжені корені: $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3 + 2i$, $k_4 = 3 - 2i$, а тому загальний розв'язок заданого рівняння можемо записати у вигляді $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{3x}\cos 2x + C_4e^{3x}\sin 2x$. ■

3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел. У цьому випадку число різних характеристичних чисел буде менше від n, а тому частинних розв'язків вигляду e^{k_jx} рівняння (13.1) буде також менше від n. Покажемо, як можна знайти решту частинних розв'язків.

Нехай k_1 — дійсне або комплексне характеристичне число кратності s. Тоді, як відомо з алгебри,

$$P(k_1) = P'(k_1) = \ldots = P^{(s-1)}(k_1) = 0, \quad P^{(s)}(k_1) \neq 0, \tag{13.8}$$

де $P(k)$ — характеристичний багаточлен, визначений формулою (13.4).

Для знаходження розв'язків, які відповідають характеристичному числу k_1, запишемо тотожність (13.3) у вигляді

$$L(e^{kx}) = P(k)\cdot e^{kx}$$

і здиференціюємо її m разів за змінною k, використовуючи формулу Лейбніца для m-ї похідної від добутку двох функцій:

$$(uv)^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \, u^{(j)} v^{(m-j)},$$

де $C_m^j = \frac{m!}{(m-j)!j!}$ — кількість сполучень з m елементів по j. Матимемо:

$$L(x^m e^{kx}) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \, P^{(j)}(k) \, x^{m-j} \, e^{kx}.$$

Звідси, враховуючи (13.8),

$$L(x^m e^{k_1 x}) \equiv 0, \quad m = 0, 1, \ldots, s-1,$$

а це означає, що функції

$$e^{k_1 x}, \; xe^{k_1 x}, \; x^2 e^{k_1 x}, \; \ldots, \; x^{s-1} e^{k_1 x} \tag{13.9}$$

є розв'язками рівняння (13.1). Вони, як легко показати, є лінійно незалежними на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Якщо при цьому число k_1 є дійсним, то функції (13.9) також будуть дійсними. Таким чином, кожному дійсному характеристичному числу k_1 кратності s відповідає s дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (13.9).

Якщо маємо комплексне характеристичне число $a+bi$ кратності s, то характеристичним числом тієї ж кратності буде також спряжене число $a - bi$. Згідно з (13.9) числу $a + bi$ відповідають s комплексних розв'язків:

$$e^{(a+ib)x}, \; xe^{(a+ib)x}, \; x^2 e^{(a+ib)x}, \; \ldots, \; x^{s-1} e^{(a+ib)x}.$$

Виділяючи в них дійсні та уявні частини, одержуємо $2s$ дійсних розв'язків:

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx, \;\; xe^{ax}\cos bx, \;\; \ldots, \;\; x^{s-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx, \;\; xe^{ax}\sin bx, \;\; \ldots, \;\; x^{s-1}e^{ax}\sin bx. \end{cases} \tag{13.10}$$

Нескладно довести, що ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$.

Так само, як і для випадку простого комплексного характеристичного числа, кратне характеристичне число $a-bi$ не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків. Таким чином, кожній парі комплексно-спряжених характеристичних чисел $a \pm bi$ кратності s відповідають $2s$ дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (13.10).

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння* $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 5k^2 + 3k + 9 = 0$ має один простий корінь $k_1 = -1$ і один кратний корінь $k_2 = k_3 = 3$. Цим кореням відповідають розв'язки e^{-x}, e^{3x}, xe^{3x}, а $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x}$ є загальним розв'язком. ■

Приклад 5. *Зінтегрувати рівняння* $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0$ має кратний дійсний корінь $k_1 = k_2 = k_3 = -1$. Отже, задане рівняння має три лінійно незалежні розв'язки e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}, а його загальним розв'язком є $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}$. ■

Приклад 6. *Зінтегрувати рівняння*

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0.$$

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння має один простий корінь $k_1 = 1$ і два кратні комплексно-спряжені корені $k_2 = k_3 = 2i$, $k_4 = k_5 = -2i$. Отже, загальним розв'язком є $y = C_1e^{x} + C_2\cos 2x + C_3x\cos 2x + C_4\sin 2x + C_5x\sin 2x$. ■

4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо деякі лінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які з допомогою заміни незалежної змінної або шуканої функції можна звести до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Рівнянням Ейлера називають диференціальне рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \qquad (13.11)$$

де a_1, a_2, …, a_n — сталі дійсні числа.

Побудуємо загальний розв'язок рівняння Ейлера для $x > 0$ (якщо $x < 0$, то в усіх наступних викладках потрібно замінити x на $-x$). Зробимо заміну незалежної змінної за формулою

$$x = e^t.$$

Тоді

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t},$$
$$y''_{x^2} = \big(y''_{t^2} \cdot e^{-t} - y'_t \cdot e^{-t}\big)e^{-t} = \big(y''_{t^2} - y'_t\big)e^{-2t},$$
$$y'''_{x^3} = \big(y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t\big)e^{-3t}, \quad \ldots,$$
$$y^{(n)}_{x^n} = \Big(y^{(n)}_{t^n} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!y'_t\Big)e^{-nt}.$$

Підставляючи $x = e^t$ і знайдені вирази для y'_x, y''_{x^2}, …, $y^{(n)}_{x^n}$ у (13.11), одержимо лінійне однорідне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайшовши загальний розв'язок цього рівняння і підставивши у нього $t = \ln x$, матимемо загальний розв'язок рівняння Ейлера.

Приклад 7. *Зінтегрувати рівняння* $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$.
Розв'язання. Зробимо заміну незалежної змінної за формулою $x = e^t$ $(t = \ln x)$. Тоді

$$y'_x = y'_t e^{-t}, \quad y''_{x^2} = \big(y''_{t^2} - y'_t\big)e^{-2t}.$$

Підставляючи ці вирази у початкове рівняння, для знаходження функції $y = y(t)$ одержуємо:

$$e^{2t}\big(y'' - y'\big)e^{-2t} - 3e^t y' e^{-t} + 3y = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Звідси, враховуючи результати прикладу 1, знаходимо:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \quad \Rightarrow \quad y(x) = C_1 e^{\ln x} + C_2 e^{3\ln x} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = C_1 x + C_2 x^3. \ \blacksquare$$

Узагальненням рівняння Ейлера є рівняння

$$(ax+b)^n y^{(n)} + (ax+b)^{n-1} p_1 y^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + (ax+b) p_{n-1} y' + p_n y = 0, \qquad (13.12)$$

де a, b, p_1, p_2, $\ldots, p_n$ — сталі. Якщо використати підстановку $ax + b = q$ і позначити $q = e^t$ або відразу зробити заміну незалежної змінної за формулою $ax + b = e^t$, то рівняння (13.12) зведеться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Рівняння (13.12) називають ***рівнянням Лаґранжа***.

До рівняння зі сталими коефіцієнтами зводиться також ***рівняння Чебишова***, тобто рівняння

$$(1 - x^2) y'' - x y' + n^2 y = 0. \qquad (13.13)$$

Точки $x = \pm 1$ є особливими точками цього рівняння. На кожному з інтервалів $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ виконуються умови теореми Коші. Побудуємо загальний розв'язок рівняння Чебишова на інтервалі $(-1, 1)$. Зробимо заміну незалежної змінної за формулою

$$t = \arccos x \quad (x = \cos t).$$

Тоді

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -y'_t \cdot \frac{1}{\sin t},$$
$$y''_{x^2} = -\left(y''_{t^2} \frac{1}{\sin t} - y'_t \frac{\cos t}{\sin^2 t} \right) \left(-\frac{1}{\sin t} \right) = y''_{t^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} - y'_t \cdot \frac{\cos t}{\sin^3 t}.$$

Підставляючи знайдені вирази для y'_x і y''_{x^2}, а також $x = \cos t$, у рівняння (13.13), для знаходження функції $y = y(t)$

маємо диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + n^2 y = 0. \tag{13.14}$$

Загальним розв'язком рівняння (13.14) є $y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$, а після повернення до змінної x одержуємо

$$y = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x).$$

Частинні розв'язки рівняння (13.13) $T_n = \cos(n \arccos x)$ називають ***багаточленами Чебишова***.

Можна показати [10, с. 158–159], що лінійне однорідне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$$

зводиться перетворенням незалежної змінної до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами тільки з допомогою підстановки

$$t = \alpha \int \sqrt[n]{p_n(x)}\, dx,$$

де α — деяка стала. З цієї формули легко одержати застосовані вище підстановки для рівняння Ейлера, рівняння Лаґранжа та рівняння Чебишова.

Математичною моделлю багатьох процесів математичної фізики є ***рівняння Бесселя***, тобто рівняння

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu) y = 0,$$

де ν — довільне стале число. Покажемо, що при $\nu = \frac{1}{4}$ рівняння Бесселя зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами та інтегрується у квадратурах. Для цього у рівнянні

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0 \tag{13.15}$$

виконаємо заміну шуканої функції

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}}. \tag{13.16}$$

Тоді
$$y' = \frac{z'}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{z}{\sqrt{x^3}}, \quad y'' = \frac{z''}{\sqrt{x}} - \frac{z'}{\sqrt{x^3}} + \frac{3}{4}\frac{z}{\sqrt{x^5}}.$$

Підставляючи вирази для y, y' і y'' у рівняння (13.15), після нескладних перетворень маємо рівняння зі сталими коефіцієнтами $z'' + z = 0$. Загальним розв'язком цього рівняння є $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, а враховуючи (13.16), остаточно одержуємо загальний розв'язок рівняння Бесселя (13.15):

$$y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Рекомендована література: [4, с. 100–115], [6, с. 129–137], [7, с. 398–408, 423–430], [8, с. 220–243], [9, с. 180–192], [10, с. 131–138, 158–162].

Питання до лекції 13

1. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

2. Що називають характеристичним рівнянням, яку назву мають корені характеристичного рівняння?

3. Який вигляд має формула загального розв'язку лінійного однорідного рівняння n-го порядку у випадку простих дійсних характеристичних чисел?

4. Які два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння відповідають парі комплексних характеристичних чисел $a \pm bi$?

5. Які дійсні лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння відповідають дійсному характеристичному числу k кратності s?

6. Який вигляд має рівняння Ейлера? З допомогою якої заміни незалежної змінної його можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами?

7. Який вигляд має рівняння Лаґранжа? З допомогою якої заміни його можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами?

8. Який вигляд має рівняння Чебишова? З допомогою якої заміни його можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами?

9. Який загальний вигляд має рівняння Бесселя? Коли це рівняння можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами? З допомогою якої заміни це можна зробити?

Вправи до лекції 13

1. Зінтегруйте лінійні однорідні рівняння другого порядку:

$$\text{а) } y'' - 8y' + 15y = 0; \quad \text{б) } y'' + 2y' + 2y = 0; \quad \text{в) } y'' - 2y' = 0.$$

2. Зінтегруйте лінійні однорідні рівняння:

$$\text{а) } y''' - 2y'' = 0; \quad \text{б) } y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0; \quad \text{в) } y^{\mathrm{IV}} - y = 0.$$

3. Знайдіть розв'язки задач Коші:

$$\text{а) } y'' - 2y' + y = 0, \;\; y(2) = 1, \;\; y'(2) = -3;$$
$$\text{б) } y''' - y' = 0, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 1, \;\; y''(0) = -1.$$

4. Зінтегруйте рівняння Ейлера та рівняння Лаґранжа:

$$\text{а) } x^2y'' + 2xy' - 20y = 0; \quad \text{б) } 2x^2y'' - xy' - 2y = 0;$$
$$\text{в) } (3x + 2)^2y'' + (6x + 4)y' - 4y = 0.$$

5. Для яких значень p і q усі розв'язки рівняння $y'' + py' + qy = 0$ будуть обмежені на півосі $x \geqslant 0$?

6. Складіть лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами якомога меншого порядку, яке має задані частинні розв'язки:

$$\text{а) } y_1 = xe^{2x}; \quad \text{б) } y_1 = x^2e^x; \quad \text{в) } y_1 = x, \;\; y_2 = \cos x.$$

Лекція 14. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку

План

1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.
2. Метод варіації довільних сталих.
3. Метод Коші.
4. Метод невизначених коефіцієнтів.

1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$L[\,y\,] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (14.1)$$

і відповідне однорідне рівняння

$$L[\,y\,] = 0. \qquad (14.2)$$

Виявляється, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (14.1) завжди можна знайти, якщо відомі загальний розв'язок рівняння (14.2) і будь-який частинний розв'язок рівняння (14.1). Це випливає з такого твердження.

Теорема 1. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння* (14.1) *дорівнює сумі будь-якого його частинного розв'язку та загального розв'язку однорідного рівняння* (14.2).

Доведення. Нехай $Y = Y(x)$ — відомий частинний розв'язок рівняння (14.1), тобто $L[\,Y\,] \equiv f(x)$. Виконаємо заміну $y = z+Y$, де $z = z(x)$ — нова шукана функція. Підставляючи її у (14.1) та враховуючи лінійність оператора L, одержуємо, що $L[\,y\,] = L[\,z + Y\,] = L[\,z\,] + L[\,Y\,] = f(x)$. Оскільки $L[\,Y\,] = f(x)$, то

$$L[\,z\,] = 0, \qquad (14.3)$$

тобто z — розв'язок лінійного однорідного рівняння (14.2). Тоді згідно з Основною теоремою (лекція 12) загальним розв'язком рівняння (14.3) є $z = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, де y_1, y_2, $\ldots$, y_n — деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі. Таким чином,

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + Y. \tag{14.4}$$

Покажемо, що формула (14.4) визначає загальний розв'язок рівняння (14.1). Згідно з означенням загального розв'язку диференціального рівняння n-го порядку для цього потрібно показати, що з (14.4) при належному виборі сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можна одержати розв'язок, який задовольняє довільні початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Послідовно диференціюючи (14.4), знаходимо:

$$\begin{cases} y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + Y, \\ y' = C_1y'_1 + C_2y'_2 + \ldots + C_ny'_n + Y', \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)} + Y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Підставляючи в цю систему $x = x_0$, матимемо неоднорідну систему n лінійних рівнянь з n невідомими C_1, C_2, $\ldots$, C_n, визначником якої є $W(x_0)$. Оскільки y_1, y_2, $\ldots$, y_n — фундаментальна система розв'язків, то $W(x_0) \neq 0$. Таким чином, сталі C_1, C_2, $\ldots$, C_n з отриманої системи визначаються однозначно, а тому розв'язок (14.4) справді є загальним. ►

Теорема 2. *Нехай права частина лінійного неоднорідного рівняння* (14.1) *є сумою двох доданків, тобто*

$$L[\,y\,] = f_1(x) + f_2(x). \tag{14.5}$$

Якщо y_1 *— частинний розв'язок рівняння* $L[\,y\,] = f_1(x)$, *а* y_2 *— частинний розв'язок рівняння* $L[\,y\,] = f_2(x)$, *то* $y_1 + y_2$ *є частинним розв'язком рівняння* (14.5).

Доведення теореми випливає з того, що

$$L[\,y_1 + y_2\,] = L[\,y_1\,] + L[\,y_2\,] \equiv f_1(x) + f_2(x). \ ►$$

2. Метод варіації довільних сталих. Розглянемо загальний метод знаходження частинних розв'язків неоднорідного рівняння (14.1) — ***метод варіації довільних сталих*** (***метод Лаґранжа***).

Нехай маємо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (14.2):

$$z = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{14.6}$$

де y_1, y_2, $\ldots$, y_n — деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а C_1, C_2, $\ldots$, C_n — довільні сталі.

Частинний розв'язок рівняння (14.1) шукаємо у вигляді (14.6), уважаючи $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не сталими, а невідомими функціями змінної x, тобто

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n. \tag{14.7}$$

Виберемо тепер функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ так, щоб функція (14.7) була розв'язком рівняння (14.1). Диференціюючи (14.7), одержуємо:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n' + C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n.$$

Накладемо умову, що $C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0$. Тоді

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n'.$$

Диференціюючи ще один раз, одержуємо:

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n'.$$

Нехай $C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0$, тоді

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n''.$$

Продовжуючи диференціювати і вибираючи функції C_1, C_2, $\ldots$, C_n так, щоб $C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0$, одержуємо:

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}.$$

І, нарешті,

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + \\ + C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)}.$$

Підставимо тепер у рівняння (14.1) вирази для y та її похідних:

$$C_1\Big(y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1\Big) + \\ + C_2\Big(y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2\Big) + \ldots \\ \ldots + C_n\Big(y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n\Big) + \\ + C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Множники в дужках тотожно дорівнюють нулю, бо функції y_1, y_2, …, y_n є частинними розв'язками рівняння (14.2). Отже, останнє рівняння запишеться так:

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Таким чином, функції $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ задовольняють систему

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Маємо неоднорідну систему n лінійних алгебричних рівнянь з n невідомими $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, …, $C_n'(x)$. Оскільки визначником цієї системи є відмінний від нуля вронскіан функцій y_1, y_2, …, y_n, то вона має єдиний розв'язок $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, …, $C_n'(x)$. Інтегруючи, знайдемо функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$, після чого залишиться підставити їх у формулу (14.7).

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння* $y'' + y = x$.
Розв'язання. Загальним розв'язком $y_0 = y_0(x)$ відповідного однорідного рівняння є $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Нехай тепер $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$. Із системи

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = x \end{cases}$$

знаходимо $C_1'(x) = -x\sin x$, $C_2'(x) = x\cos x$ і, отже, $C_1(x) = x\cos x - \sin x + C_1$, $C_2(x) = x\sin x + \cos x + C_2$,

$$y = (x\cos x - \sin x + C_1)\cos x + (x\sin x + \cos x + C_2)\sin x \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = C_1\cos x + C_2\sin x + x. \blacksquare$$

3. Метод Коші. Розглянемо ще один спосіб знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (14.1) у випадку, коли є відомою фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння.

Нехай y_1, y_2, …, y_n — фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (14.2). Використовуючи формулу (14.6), побудуємо розв'язок рівняння (14.2), який задовольняє початкові умови

$$z(s) = 0,\ z'(s) = 0,\ \ldots,\ z^{(n-1)}(s) = 1, \tag{14.8}$$

де $x = s$ — довільна точка з інтервалу (a, b). Цей розв'язок позначимо через $z = \varphi(x, s)$ (він залежить від s як від параметра). Оскільки $z = \varphi(x, s)$ як функція змінної x є розв'язком однорідного рівняння (14.2) для кожного $s \in (a, b)$, то

$$L[\varphi] \equiv 0, \quad a < x < b,\ a < s < b.$$

Крім того, з (14.8) випливає, що функція $\varphi(x, s)$ як функція змінної x задовольняє такі умови:

$$\varphi(s,s) = 0,\ \varphi'(s,s) = 0,\ \ldots,\ \varphi^{(n-2)}(s,s) = 0,\ \varphi^{(n-1)}(s,s) = 1, \tag{14.9}$$

де через $\varphi^{(j)}(s, s)$ позначено $\left.\frac{d^j\varphi(x,s)}{dx^j}\right|_{x=s}$. Функцію $\varphi(x, s)$, яка має вказані властивості, називають ***функцією Коші***.

Розглянемо тепер функцію

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,s) f(s) ds, \qquad (14.10)$$

де $x_0 \in (a,b)$ — довільна точка, і покажемо, що вона є частинним розв'язком рівняння (14.1), який задовольняє нульові початкові умови

$$Y(x_0) = 0,\ Y'(x_0) = 0,\ \ldots,\ Y^{(n-1)}(x_0) = 0. \qquad (14.11)$$

Для цього спочатку знайдемо похідні Y', Y'', …, $Y^{(n)}$, використовуючи формулу диференціювання визначеного інтеграла за параметром[6]:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(x,s)\, ds\right) = \int_{x_0}^{x} f'_x(x,s) ds + f(x,x).$$

Враховуючи, що $\varphi(x,s)$ задовольняє умови (14.9), послідовно знаходимо:

$$Y'(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(x,s) f(s) ds + \varphi(x,x) f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(x,s) f(s) ds,$$

$$Y''(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi''(x,s) f(s) ds + \varphi'(x,x) f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi''(x,s) f(s) ds,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$Y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n-1)}(x,s) f(s) ds,$$

$$Y^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n)}(x,s) f(s) ds + f(x).$$

Тепер очевидно, що функція $Y(x)$ задовольняє умови (14.11). Підставляючи знайдені вирази для $Y, Y', \ldots, Y^{(n)}$ у (14.1), одержуємо рівняння

$$L[\,Y\,] = \int_{x_0}^{x} L[\,\varphi\,] f(s) ds + f(x).$$

---

[6] Використовуємо формулу $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,s)\, ds\right) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(x,s)}{\partial x} ds + f\,(x, \psi(x))\, \frac{d\psi}{dx} - f\,(x, \varphi(x))\, \frac{d\varphi}{dx}$.

Звідси, оскільки $L[\varphi] \equiv 0$, то $L[Y] = f(x)$, $a < x < b$, тобто функція $Y(x)$ з (14.10) є частинним розв'язком неоднорідного рівняння (14.1).

Формулу (14.10) називають ***формулою Коші***. З її допомогою загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (14.1) можна записати у вигляді

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, s) f(s) ds,$$

де y_0 — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння $y'' + y' - 2y = x$ методом Коші.*

Розв'язання. Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є $y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$. Тому функцію Коші $\varphi(x, s)$ шукаємо у вигляді

$$\varphi(x, s) = C_1(s) e^{-2x} + C_2(s) e^{x},$$

де функції $C_1(s)$, $C_2(s)$ згідно з (14.11) задовольняють систему

$$\begin{cases} C_1(s) e^{-2s} + C_2(s) e^{s} = 0, \\ -2C_1(s) e^{-2s} + C_2(s) e^{s} = 1. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $C_1(s) = -\frac{1}{3} e^{2s}$, $C_2(s) = \frac{1}{3} e^{-s}$ і, отже,

$$\varphi(x, s) = -\frac{1}{3} e^{2(s-x)} + \frac{1}{3} e^{x-s}.$$

Тоді за формулою (14.10) знаходимо частинний розв'язок заданого рівняння (беручи $x_0 = 0$)

$$Y(x) = \frac{1}{3} \int_{0}^{x} \left(-e^{2(s-x)} + e^{x-s} \right) s\, ds = -\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{x},$$

а загальним розв'язком $y = y_0 + Y$ після перепозначення сталих ($C_1 := C_1 - 1/12$, $C_2 := C_2 + 1/3$) є

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}. \blacksquare$$

4. Метод невизначених коефіцієнтів. Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$L[\,y\,] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (14.12)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — дійсні числа, функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі (a, b).

Якщо права частина рівняння (14.12) має певний вигляд, то для відшукання частинного розв'язку цього рівняння можна використовувати ***метод невизначених коефіцієнтів***.

Розглянемо окремі випадки, пов'язані з виглядом правої частини рівняння (14.12).

Випадок 1. Нехай функція $f(x)$ є добутком багаточлена на експоненціальну функцію, тобто

$$L[\,y\,] = R_m(x)\, e^{\alpha x}, \qquad (14.13)$$

де $R_m(x) = r_0 x^m + r_1 x^{m-1} + \ldots + r_{m-1} x + r_m$ — багаточлен з дійсними коефіцієнтами (зокрема, це може бути стала), α — дійсне або комплексне число.

Нехай α не є характеристичним числом рівняння $L[y] = 0$, тобто $P(\alpha) \neq 0$ ($P(\alpha)$ — характеристичний багаточлен, див. лекцію 13). Тоді частинний розв'язок $Y = Y(x)$ рівняння (14.13) потрібно шукати у вигляді

$$Y = Q_m(x) e^{\alpha x}, \qquad (14.14)$$

де $Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m$ — багаточлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Коефіцієнти багаточлена $Q_m(x)$ можна знайти, підставляючи (14.14) у рівняння (14.13) і прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x в обох частинах отриманої рівності. Переконаємось, що коефіцієнти q_0, q_1 $\ldots, q_m$ у цьому випадку знайдуться однозначно. Справді, враховуючи властивості оператора L, одержуємо:

$$\begin{aligned} L[\,Y\,] &= L\left[\,(q_0x^m + q_1x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m)\cdot e^{\alpha x}\,\right] = \\ &= q_0L[\,x^m e^{\alpha x}\,] + q_1L[\,x^{m-1}e^{\alpha x}\,] + \ldots + q_{m-1}L[\,xe^{\alpha x}\,] + \\ &+ q_mL[\,e^{\alpha x}\,] = (r_0x^m + r_1x^{m-1} + \ldots + r_{m-1}x + r_m)\,e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Використаємо тепер виведені у п. 3 лекції 13 формули $L[\,e^{\alpha x}\,] = P(\alpha)\,e^{\alpha x}$ і $L[\,x^s e^{\alpha x}\,] = \sum\limits_{j=0}^{s} C_s^j P^{(j)}(\alpha)x^{s-j}e^{\alpha x}$. Скорочуючи на $e^{\alpha x}$, маємо

$$q_0\sum_{j=0}^{m} C_m^j P^{(j)}(\alpha)x^{m-j} + q_1\sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j P^{(j)}(\alpha)x^{m-1-j} + \ldots$$

$$\ldots + q_{m-1}\sum_{j=0}^{1} C_1^j P^{(j)}(\alpha)x^{1-j} + q_mP(\alpha) =$$

$$= r_0x^m + r_1x^{m-1} + \ldots + r_{m-1}x + r_m.$$

Прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^m & q_0P(\alpha) = r_0, \\ x^{m-1} & q_0mP'(\alpha) + q_1P(\alpha) = r_1, \\ \ldots & \qquad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ x^0 & q_0P^{(m)}(\alpha) + q_1P^{(m-1)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}P'(\alpha) + \\ & \quad + q_mP(\alpha) = r_m. \end{array}\right\} \tag{14.15}$$

Оскільки $P(\alpha) \neq 0$, то з (14.15) можна однозначно знайти всі коефіцієнти багаточлена $Q_m(x)$, наприклад, $q_0 = r_0/P(\alpha)$, $q_1 = (r_1 - q_0mP'(\alpha))/P(\alpha)$ і т. д.

Нехай α є характеристичним числом кратності k, тобто $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$, але $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$. У цьому випадку частинний розв'язок Y у вигляді (14.14) побудувати неможливо, бо $P(\alpha) = 0$. Шукатимемо його у вигляді

$$Y = x^kQ_m(x)e^{\alpha x}, \tag{14.16}$$

де $Q_m(x)$ — багаточлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами. Підставляючи (14.16) у (14.13), одержуємо, що

$$L[\,Y\,] = L\big[\,x^k Q_m(x)e^{\alpha x}\,\big] = \sum_{j=0}^{m} q_j L\big[\,x^{k+m-j}e^{\alpha x}\,\big] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{s=k}^{k+m-j} C_{k+m-j}^{s} P^{(s)}(\alpha) x^{k+m-j-s} e^{\alpha x} = \sum_{j=0}^{m} r_j x^{m-j} e^{\alpha x}$$

або, після скорочення на $e^{\alpha x}$,

$$\sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{s=0}^{m-j} C_{k+m-j}^{k+s} P^{(k+s)}(\alpha) x^{m-j-s} = \sum_{j=0}^{m} r_j x^{m-j}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, одержуємо систему

$$\begin{array}{r|l}
x^m & q_0 C_{k+m}^{k} P^{(k)}(\alpha) = r_0, \\
\ldots & \qquad\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x^1 & q_0(k+m)P^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1(k+m-1)P^{(k+m-2)}(\alpha) + \ldots \\
 & \quad \ldots + q_{m-1}(k+1)P^{(k)}(\alpha) = r_{m-1}, \\
x^0 & q_0 P^{(k+m)}(\alpha) + q_1 P^{(k+m-1)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}P^{(k+1)}(\alpha) + \\
 & \quad + q_m P^{(k)}(\alpha) = r_m,
\end{array}$$

з якої, оскільки $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$, можна однозначно визначити всі коефіцієнти $q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_m$.

Випадок 2. Нехай права частина рівняння (14.12) має вигляд

$$f(x) = e^{ax}\left(R_m^{(1)}(x)\cos bx + R_m^{(2)}(x)\sin bx\right), \qquad (14.17)$$

де $R_m^{(1)}(x)$ та $R_m^{(2)}(x)$ — багаточлени степенів, не вищих від m, причому хоча б один з них має степінь m (вони можуть бути й сталими числами, один з них може бути тотожно рівним нулю).

Оскільки

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, \quad \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$$

(формули Ейлера), то (14.17) можемо записати у вигляді

$$f(x) = R_m^{(1)}(x)\, e^{ax} \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + R_m^{(2)}(x)\, e^{ax} \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} =$$
$$= \widetilde{R}_m^{(1)}(x)\, e^{(a+ib)x} + \widetilde{R}_m^{(2)}(x)\, e^{(a-ib)x},$$

де $\widetilde{R}_m^{(1)}(x)$, $\widetilde{R}_m^{(2)}(x)$ — багаточлени степеня m, тобто $f(x)$ є сумою двох доданків, які розглядались у випадку 1.

Нехай $a + bi$ не є характеристичним числом рівняння $L[y] = 0$. Тоді згідно з теоремою 2 частинний розв'язок рівняння (14.12) можна знайти у вигляді $Y(x) = \widetilde{Q}_m^{(1)}(x)\, e^{(a+ib)x} + \widetilde{Q}_m^{(2)}(x)\, e^{(a-ib)x}$, де $\widetilde{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\widetilde{Q}_m^{(2)}(x)$ — багаточлени степеня m з невизначеними коефіцієнтами. Перейшовши до дійснозначних функцій, одержуємо остаточне правило знаходження частинного розв'язку рівняння (14.12) з правою частиною вигляду (14.17): *якщо $a + bi$ не є характеристичним числом, то частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді*

$$Y(x) = e^{ax}\Big(Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx\Big),$$

де $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ — багаточлени степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

Припустимо, що $a + bi$ є k-кратним характеристичним числом. Тоді частинний розв'язок рівняння (14.12) потрібно шукати у вигляді

$$Y(x) = x^k\Big(\widetilde{Q}_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x} + \widetilde{Q}_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x}\Big)$$

або

$$Y(x) = x^k e^{ax}\Big(Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx\Big).$$

В обох випадках коефіцієнти багаточленів $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ визначаються після підстановки $Y(x)$ у рівняння (14.12).

Зауважимо, що схема знаходження частинного розв'язку $Y(x)$ рівняння (14.12) не зміниться, якщо $R_m^{(1)}(x) \equiv 0$ або $R_m^{(2)}(x) \equiv 0$ у формулі (14.17). А якщо

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x),$$

де $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots$, $f_k(x)$ мають вигляд (14.17) або правої частини рівняння (14.13) з різними α, $a+bi$, то згідно з теоремою 2 матимемо:

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k,$$

де $Y_j = Y_j(x)$ — частинний розв'язок рівняння $L[\,y\,] = f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння* $y''' - 2y'' = x^2 - e^x$.
Розв'язання. Характеристичними числами відповідного однорідного рівняння є $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 2$, а тому загальним розв'язком цього рівняння є $y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}$.

Праву частину неоднорідного рівняння запишемо у вигляді $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -e^x$.

Оскільки $\alpha = 0$ є характеристичним числом кратності 2, а $\alpha = 1$ не є характеристичним числом, то частинний розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді

$$Y = x^2(Ax^2 + Bx + C) + De^x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + De^x.$$

Підставляючи Y у задане рівняння, одержуємо тотожність

$$-24Ax^2 + (24A - 12B)x + (6B - 4C) - De^x \equiv x^2 - e^x,$$

з якої, прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, знаходимо невизначені коефіцієнти A, B, C, D:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -24A = 1, \\ x^1 & 24A - 12B = 0, \\ x^0 & 6B - 4C = 0, \\ e^x & -D = -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{24},\ B = -\frac{1}{12},\ C = -\frac{1}{8},\ D = 1.$$

Отже, $Y = -\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + e^x$, а загальним розв'язком є

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + e^x. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [3, с. 153–165, 174–180], [4, с. 115–132], [6, с. 103–108, 138–148], [7, с. 389–397, 408–417], [8, с. 243–261], [10, с. 125–130, 138–144].

Питання до лекції 14

1. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку?

2. Який вигляд має частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, якщо його права частина є сумою декількох доданків?

3. У чому полягає метод варіації довільних сталих інтегрування лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку?

4. У чому полягає метод Коші відшукання частинних розв'язків лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку? Який вигляд має формула Коші?

5. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів знаходження частинних розв'язків лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами? Якого вигляду має бути права частина рівняння, щоб можна було використати цей метод?

Вправи до лекції 14

1. Зінтегруйте лінійні неоднорідні рівняння методом варіації довільних сталих:

$$\text{а) } y'' + 3y' + 2y = \frac{4}{e^x + 1}, \qquad \text{б) } y'' + 4y = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{2 \operatorname{tg} x}.$$

2. Зінтегруйте лінійні неоднорідні рівняння методом невизначених коефіцієнтів:

$$\text{а) } y'' - y = x^2 + x; \quad \text{б) } y'' + y' = \sin x + 3x \cos x.$$

3. Знайдіть розв'язки задач Коші:

$$\text{а) } y'' + y = e^x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -2;$$
$$\text{б) } y'' - 2y' - 3y = xe^{-x},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$$

4. Зінтегруйте рівняння методом Коші:

$$\text{а) } y'' + y = \frac{1}{x+1}; \quad \text{б) } y'' - y = x.$$

5. Для кожного рівняння запишіть частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами, не шукаючи їх:

$$\text{а) } y'' - 2y' + 2y = 4x^2 e^x + 3\cos x; \quad \text{б) } y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \sin 5x.$$

Лекція 15. Лінійні однорідні рівняння другого порядку

План

1. Канонічна форма лінійного однорідного рівняння другого порядку.

2. Побудова загального розв'язку у випадку, якщо відомий один частинний розв'язок.

3. Інтегрування лінійних рівнянь з допомогою степеневих рядів.

1. Канонічна форма лінійного однорідного рівняння другого порядку. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку часто використовують як диференціальні моделі різноманітних прикладних задач механіки, фізики, біології та інших наук.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \tag{15.1}$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — неперервні функції на деякому інтервалі (a, b).

Якщо $a(x) \neq 0$ на інтервалі (a, b), то рівняння (15.1) можна записати у вигляді

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{15.2}$$

де $p(x) = b(x)/a(x)$, $q(x) = c(x)/a(x)$.

Покажемо, що рівняння (15.2) можна звести до рівняння, яке не містить першої похідної. Для цього запровадимо заміну

$$y = \alpha(x)\, z, \tag{15.3}$$

де $z = z(x)$ — нова шукана функція, $\alpha(x)$ — поки що невідома функція. Підставляючи (15.3) в (15.2), одержуємо:

$$\alpha''(x)z + 2\alpha'(x)z' + \alpha(x)z'' + \\ + p(x)\left(\alpha'(x)z + \alpha(x)z'\right) + q(x)\alpha(x)z = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad z'' + \left(\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x)\right)\cdot z' + \\ + \left(\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} + p(x)\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} + q(x)\right)\cdot z = 0. \tag{15.4}$$

Виберемо тепер функцію $\alpha(x)$ так, щоб коефіцієнт біля z' перетворився у нуль, тобто $\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)}+p(x) = 0$. Звідси, інтегруючи, знаходимо функцію $\alpha(x)$:

$$\alpha(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}. \tag{15.5}$$

Враховуючи, що

$$\alpha'(x) = -\frac{p(x)}{2}e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx},$$
$$\alpha''(x) = \left(-\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx},$$

надамо рівнянню (15.4) вигляду

$$z'' + \left(-\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x)\right)z = 0.$$

Таким чином, з (15.3) і (15.5) випливає, що заміна шуканої функції за формулою

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx} \cdot z$$

зводить рівняння (15.2) до рівняння

$$z'' + I(x)\,z = 0, \tag{15.6}$$

де

$$I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x).$$

Рівняння (15.6) називають ***канонічною формою*** рівняння (15.2), а функцію $I(x)$ — ***інваріантом*** рівняння (15.2). Очевидно, що коли рівняння (15.6) інтегрується у квадратурах, то інтегрується у квадратурах також рівняння (15.2). Зокрема, так буде, якщо $I(x) = C$, $I(x) = \frac{C}{x^2}$ або $I(x) = \frac{C}{(ax+b)^2}$. У першому випадку рівняння (15.6) буде лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, у другому — рівнянням Ейлера, у третьому — рівнянням Лаґранжа (див. лекцію 13).

Зауважимо, що для лінійного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами інваріантом є взятий з протилежним знаком дискримінант відповідного характеристичного рівняння.

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння*

$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$

Розв'язання. Існування та єдиність розв'язку гарантовані на інтервалах $(-\infty, 0)$ і $(0, \infty)$; $x = 0$ — особлива точка заданого рівняння. Оскільки $p(x) = 2/x$, $q(x) = 1$, то інваріантом рівняння, як легко перевірити, є функція $I(x) = 1$. Враховуючи тепер (15.6), для відшукання функції $z = z(x)$ маємо рівняння $z'' + z = 0$, загальним розв'язком якого є

$$z = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Оскільки

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{2dx}{x}} z = \frac{z}{x},$$

то остаточно одержуємо:

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}. \ \blacksquare$$

2. Побудова загального розв'язку у випадку, якщо відомий один частинний розв'язок. Нехай відомий один нетривіальний частинний розв'язок $y_1 = y_1(x)$ рівняння (15.2). Покажемо, що запровадивши заміну

$$y = y_1 \int u \, dx, \tag{15.7}$$

де $u = u(x)$ — нова невідома функція, рівняння (15.2) можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними. Справді, підставляючи (15.7) у (15.2), одержуємо:

$$y_1''\int u\,dx + 2y_1'u + y_1u' +$$
$$+p(x)\left(y_1'\int u\,dx + y_1u\right) + q(x)y_1\int u\,dx = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \bigl(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\bigr)\cdot\int u\,dx + \bigl(2y_1' + p(x)y_1\bigr)\,u + y_1u' = 0.$$

Оскільки y_1 — розв'язок рівняння (15.7), то

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0,$$

а тому

$$y_1u' + \bigl(2y_1' + p(x)y_1\bigr)\,u = 0 \quad \Rightarrow \quad u' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)u = 0.$$

Загальним розв'язком отриманого рівняння, як легко переконатися, є $u = C_1y_1^{-2}e^{-\int p(x)dx}$. Підставляючи тепер функцію u у (15.7), одержуємо загальний розв'язок рівняння (15.2)

$$y = y_1\left(C_1\int\frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + C_2\right). \tag{15.8}$$

Формулу (15.8) називають ***формулою Абеля.***

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння*

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Легко перевірити, що $y_1(x) = x$ є частинним розв'язком заданого рівняння. Оскільки $p(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$, то, використовуючи формулу Абеля, одержуємо:

$$y = x\left(C_1\int\frac{e^{\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}}}{x^2}dx + C_2\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y = x\left(C_1\int\frac{e^{\ln(x^2+1)}}{x^2}dx + C_2\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y = x\left(C_1\int\frac{x^2+1}{x^2}dx + C_2\right) \quad\Rightarrow\quad y = C_1(x^2-1) + C_2x. \blacksquare$$

Якщо відомо нетривіальний частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (15.2), то це рівняння можна зінтегрувати також, використовуючи формулу Остроградського–Ліувілля (формула (12.17)).

Згідно з теоремою 6 (лекція 12) для того, щоб знайти загальний розв'язок рівняння (15.2), потрібно мати фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Нехай $y_2(x)$ — такий розв'язок рівняння (15.2), що $y_1(x)$, $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків. Використовуючи формулу Остроградського–Ліувілля (12.17) у вигляді $W(x) = C_1\cdot e^{-\int p(x)\,dx}$, одержуємо:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C_1e^{-\int p(x)\,dx} \qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y_1y_2' - y_1'y_2 = C_1e^{-\int p(x)\,dx} \ \Rightarrow\ \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\,dx} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\,dx} \quad\Rightarrow\quad y = y_1\left(C_1\int\frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}dx + C_2\right).$$

Таким чином, знову одержали формулу Абеля (15.8).

3. Інтегрування лінійних рівнянь з допомогою степеневих рядів. Розв'язки лінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами не завжди виражаються через елементарні функції, а інтегрування таких рівнянь рідко зводиться до квадратур.

Ще один метод інтегрування зазначених рівнянь полягає у зображенні шуканого розв'язку у вигляді степеневого ряду. Нагадаємо деякі поняття і факти, що стосуються степеневих рядів.

Функцію $f(x)$, яка визначена на інтервалі (a, b), називають ***аналітичною*** в точці $x_0 \in (a, b)$, якщо її можна розвинути в степеневий ряд, збіжний у деякому околі точки x_0. Кажуть, що функція $f(x)$ ***аналітична*** на інтервалі (a, b), якщо вона в кожній точці $x_0 \in (a, b)$ може бути розвинута в степеневий ряд, що збігається в деякому околі точки x_0. Зокрема, якщо ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

має радіус збіжності $r > 0$, то функція $f(x)$ аналітична на інтервалі $(x_0 - r,\ x_0 + r)$.

Розглянемо диференціальне рівняння (15.2), в якому функції $p(x)$ і $q(x)$ аналітичні на інтервалі $(x_0 - a, x_0 + a)$, тобто їх можна розвинути у степеневі ряди

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \cdot (x - x_0)^k,$$

які збігаються на інтервалі $(x_0 - a, x_0 + a)$.

Теорема 1. *Якщо у рівнянні* (15.2) *функції* $p(x)$ *і* $q(x)$ *аналітичні на інтервалі* $(x_0 - a, x_0 + a)$, *то будь-який розв'язок цього рівняння є аналітичною функцією при* $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, *тобто може бути розвинутий у збіжний на* $(x_0 - a, x_0 + a)$ *степеневий ряд*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k. \tag{15.9}$$

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [9, с. 284–286].

Точку $x = x_0$ називають ***точкою аналітичності*** рівняння (15.2). В околі точки аналітичності розв'язок рівняння

(15.2) шукають у вигляді ряду (15.9), де числа c_0, c_1, c_2, … підлягають визначенню.

Приклад 3. *З допомогою степеневих рядів зінтегрувати рівняння* $y'' + xy = 0$.

Розв'язання. Відзначимо, що задане рівняння не інтегрується у квадратурах. Його розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{15.10}$$

вважаючи c_k, $k = 0, 1, \ldots$, невизначеними коефіцієнтами. Покажемо, що ці коефіцієнти можна однозначно визначити і при цьому ряд (15.10) збігатиметься в деякому околі точки $x = 0$.

Двічі здиференціюємо ряд (15.10) і підставимо його разом з рядом для y'' у задане рівняння. Одержуємо тотожність

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \equiv 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k \equiv -\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, знаходимо, що

$$c_2 = 0, \quad c_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} c_{k-1}, \quad k \geqslant 1.$$

Отже,

$$c_{3m} = \frac{(-1)^m c_0}{3m(3m-1)(3m-3)(3m-4)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2},$$
$$c_{3m+1} = \frac{(-1)^m c_1}{(3m+1)3m(3m-2)(3m-3)\cdot \ldots \cdot 4\cdot 3}, \quad c_{3m+2} = 0,$$

де $m = 1, 2, \ldots$, а коефіцієнти c_0 і c_1 залишаються невизначеними (довільними).

Покладаючи $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, що рівносильно початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, знаходимо ряд

$$y_1(x) = 1+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{3m(3m-1)(3m-3)(3m-4)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2}. \quad (15.11)$$

Покладаючи $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, що рівносильно початковим умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, одержуємо ряд

$$y_2(x) = x+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{(3m+1)3m(3m-2)(3m-3)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3}. \quad (15.12)$$

Використовуючи ознаку Д'Аламбера, легко показати, що ряди (15.11), (15.12) збігаються для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$, а тому їх можна диференціювати на $(-\infty, +\infty)$. Підставляючи (15.11), (15.12) у рівняння (15.2), переконуємось, що $y_1(x)$, $y_2(x)$ — розв'язки рівняння (15.2). Більш того, ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$, бо їхній вронскіан відмінний від нуля у точці $x = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ визначені формулами (15.11), (15.12), а C_1, C_2 — довільні сталі. ■

Зазначимо, що метод степеневих рядів можна використовувати також для розв'язування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, якщо $p(x)$, $q(x)$ і $f(x)$ — аналітичні функції в деякому околі точки $x = x_0$.

Розглянемо тепер випадок, коли $p(x)$ і $q(x)$ — коефіцієнти рівняння (15.2) — не є аналітичними в околі точки $x = x_0$.

Точку $x = x_0$, для якої $\lim\limits_{x\to x_0} p(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0} q(x) = \infty$, називають ***особливою*** точкою рівняння (15.2).

Нехай коефіцієнти рівняння (15.2) можна подати формулами $p(x) = \frac{p_1(x)}{x-x_0}$, $q(x) = \frac{q_1(x)}{(x-x_0)^2}$, де $p_1(x)$, $q_1(x)$ — аналітичні функції на інтервалі $(x_0 - a, x_0 + a)$, тобто

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{1k}(x - x_0)^k, \quad q_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{1k}(x - x_0)^k.$$

Тоді рівняння (15.2) зручно записати у вигляді

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)p_1(x)y' + q_1(x)y = 0, \qquad x \neq x_0.$$

Якщо $x = x_0$ — особлива точка рівняння (15.2) (це буде, якщо хоча б одне з чисел p_{10}, q_{10}, q_{11} відмінне від нуля), то її називають ***регулярною особливою точкою***. В околі регулярної особливої точки $x = x_0$ розв'язки рівняння (15.2) не завжди можна зобразити у вигляді степеневого ряду (15.9). Наприклад, обидва розв'язки $y_1 = x^{1/2}$ і $y_2 = x^{-2}$ рівняння Ейлера

$$2x^2 y'' + 5xy' - 2y = 0$$

неможливо розвинути у степеневі ряди вигляду (15.9), тобто у ряди за цілими додатними степенями x.

У цьому випадку розв'язок рівняння потрібно шукати у вигляді ***узагальненого степеневого ряду***

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

де числа r, c_0, c_1, ... підлягають визначенню.

Розв'яжемо тепер методом степеневих рядів рівняння з прикладу 1.

Приклад 4. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$xy'' + 2y' + xy = 0. \tag{15.13}$$

Розв'язання. Точка $x_0 = 0$ є особливою, бо $p(x) = \frac{2}{x} \to \infty$ при $x \to 0$. Тому розв'язок шукаємо у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Тоді

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k x^{k+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r-2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для y, y', y'' у (15.13), одержуємо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r-1} + \\ + 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{k+r+1} = 0$$

або, після скорочення на x^r,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{k+1} = 0.$$

Оскільки збіжні степеневі ряди є абсолютно збіжними всередині інтервалу збіжності, то попередній рівності можна надати такого вигляду:

$$(r^2+r)c_0x^{-1} + (r^2+3r+2)c_1x^0 + \\ + \big(c_0 + (r^2+5r+6)c_2\big)\,x + \big(c_1 + (r^2+7r+12)c_3\big)\,x^2 + \\ + \big(c_2 + (r^2+9r+20)c_4\big)\,x^3 + \ldots = 0. \qquad (15.14)$$

Звідси випливає, що усі коефіцієнти узагальненого степеневого ряду (15.14) дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{cases} (r^2+r)c_0 = 0, \\ (r^2+3r+2)c_1 = 0, \\ c_0 + (r^2+5r+6)c_2 = 0, \\ c_1 + (r^2+7r+12)c_3 = 0, \\ c_2 + (r^2+9r+20)c_4 = 0, \\ \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots \end{cases} \qquad (15.15)$$

Нехай $c_0 \neq 0$, тоді з першого рівняння системи (15.15) одержуємо, що $r = 0$ або $r = -1$. Якщо $r = 0$ і, наприклад, $c_0 = 1$, то з (15.15) знаходимо

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{1}{3!}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{5!}, \ \ldots,$$
$$c_{2k-1} = 0, \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \ \ldots .$$

Таким чином, функція

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = \frac{\sin x}{x}$$

є розв'язком рівняння (15.13).

Нехай тепер $r = -1$. Тоді, вважаючи, що $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, з (15.15) знаходимо:

$$c_2 = -\frac{1}{2!}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{4!}, \ \ldots, \quad c_{2k-1} = 0, \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \ \ldots,$$

а, отже, функція

$$y_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \ldots = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) = \frac{\cos x}{x}$$

також є розв'язком рівняння (15.13). Оскільки знайдені функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні (пропонуємо у цьому переконатися самостійно), то згідно з Основною теоремою (лекція 12) загальним розв'язком рівняння (15.13) є

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [3, с. 297–316], [6, с. 202–219], [9, с. 269–273, 283–294], [10, с. 120–122, 150–158], [20, с. 363–404, 412–435].

Питання до лекції 15

1. З допомогою якої підстановки лінійне однорідне рівняння другого порядку можна звести до рівняння, яке не містить першої похідної? Як називають таку форму рівняння?

2. Що називають інваріантом лінійного однорідного рівняння другого порядку? Якого вигляду має бути інваріант, щоб відповідне лінійне однорідне рівняння другого порядку можна було зінтегрувати у квадратурах?

3. Як, маючи один частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку, зінтегрувати це рівняння у квадратурах? Який вигляд має формула Абеля?

4. Як можна використати формулу Остроградського–Ліувілля для інтегрування лінійного однорідного рівняння другого порядку?

5. Як знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку з допомогою степеневих рядів? У якому випадку розв'язок цього рівняння потрібно шукати у вигляді узагальненого степеневого ряду?

Вправи до лекції 15

1. Зведіть рівняння до канонічної форми та зінтегруйте їх:

$$\text{а) } y'' + \tfrac{2}{x}y' + y = 0; \quad \text{б) } x^2y'' + 2x^2y' + (x^2-2)y = 0.$$

2. Зінтегруйте рівняння, знаючи їхні частинні розв'язки $y_1(x)$:

$$\text{а) } (2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \;\; y_1(x) = e^{-2x};$$
$$\text{б) } x(x-1)y'' - xy' + y = 0, \;\; y_1(x) = x.$$

3. Зінтегруйте рівняння методом степеневих рядів:

$$\text{а) } y'' + xy' + y = 0; \quad \text{б) } y'' = ye^x.$$

4. Зінтегруйте рівняння методом узагальнених степеневих рядів:

$$\text{а) } xy'' - (x+1)y' + y = 0; \quad \text{б) } 9x^2y'' - (x^2-2)y = 0.$$

Лекція 16. Диференціальні моделі коливальних процесів

План

1. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів.
2. Застосування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів.
3. Диференціальна модель математичного маятника.

1. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів. Припустимо, що матеріальна точка з масою m прямолінійно рухається вздовж осі Ox під дією трьох сил:

1) сили F_1, що притягує точку до початку координат; цю силу вважатимемо пропорційною віддалі x точки від початку координат, тобто $F_1 = -ax$, де $a > 0$;

2) сили F_2 опору середовища, яку припускатимемо пропорційною швидкості руху точки (це припущення близьке до дійсності для незначних швидкостей), тобто $F_2 = -bx'$, де $b \geqslant 0$;

3) збурювальної (зовнішньої) сили, що спрямована вздовж осі Ox і дорівнює $F_3(t)$ у момент часу t.

Тоді згідно з другим законом Ньютона

$$F = ma,$$

де $F = F_1 + F_2 + F_3$, $a = x''(t)$, маємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки:

$$mx'' = -ax - bx' + F_3(t)$$

або

$$x'' + 2p\,x' + q^2x = f(t), \tag{16.1}$$

де

$$p = \frac{b}{2m} \geqslant 0, \quad q = \sqrt{\frac{a}{m}} > 0, \quad f(t) = \frac{F_3(t)}{m}.$$

Число p називають ***коефіцієнтом опору***, а число q — ***коефіцієнтом відхилення***.

Диференціальне рівняння (16.1) — лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Зінтегрувавши його, знайдемо закон руху матеріальної точки.

Оскільки найбільший інтерес становлять випадки, коли рух, який визначений рівнянням (16.1), є коливанням точки біля положення $x = 0$, то рівняння (16.1) називають ***рівнянням коливань***. При цьому, якщо збурювальна сила відсутня, тобто $f(t) \equiv 0$, то це рівняння називають ***рівнянням вільних коливань***; воно має вигляд

$$x'' + 2p\,x' + q^2x = 0. \tag{16.2}$$

Диференціальне рівняння (16.1), у якому права частина тотожно відмінна від нуля, називають ***рівнянням вимушених коливань***.

Розглянемо рівняння (16.2) і з'ясуємо, як коефіцієнти p, q впливають на характер руху матеріальної точки. Проаналізуємо окремі випадки рівняння (16.2).

Випадок 1. *Рух відбувається в середовищі без опору* $(p = 0)$. Тоді рівняння руху має вигляд

$$x'' + q^2x = 0. \tag{16.3}$$

Рівняння (16.3) описує вертикальні рухи тіла, підвішеного на пружині, під впливом сили пружності пружини і сили ваги, малі коливання маятника, коливання повітря в акустичному резонаторі та інші явища коливної природи. Це рівняння називають ще ***рівнянням гармонічного осцилятора***.

Рівняння (16.3) — лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $k^2 + q^2 = 0$, характеристичні числа — комплексно-спряжена пара $k_1 = qi$, $k_2 = -\,qi$, а тому загальним розв'язком цього рівняння є

$$x = C_1 \cos qt + C_2 \sin qt.$$

Для з'ясування фізичного змісту отриманого розв'язку зручно звести його до іншої форми, ввівши замість довільних сталих C_1, C_2 нові сталі A і φ ($A > 0$) за формулами $C_1 = A\sin\varphi$, $C_2 = A\cos\varphi$. Тоді

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2} \quad (C_2 \neq 0),$$

$$x = A\sin\varphi\cos qt + A\cos\varphi\sin qt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A\sin(qt + \varphi). \tag{16.4}$$

Рух, який описується формулою (16.4), називають ***гармонічним коливанням***. Він є періодичним рухом з ***періодом*** $T = 2\pi/q$ і ***частотою*** q. Число A називають ***амплітудою коливання*** (16.4) (це максимальне відхилення точки від стану рівноваги). Величину $qt + \varphi$ називають ***фазою коливання***. Значення фази коливання при $t = 0$, тобто кут φ, називають ***початковою фазою*** коливання (16.4).

З формули (16.4) випливає, що всі рухи, визначені рівнянням (16.3), обмежені, бо при $t \to +\infty$ $|x(t)| \leqslant A$. Графік кожного конкретного руху можна одержати з допомогою елементарних перетворень графіка функції $x = \sin t$ (рис. 16.1).

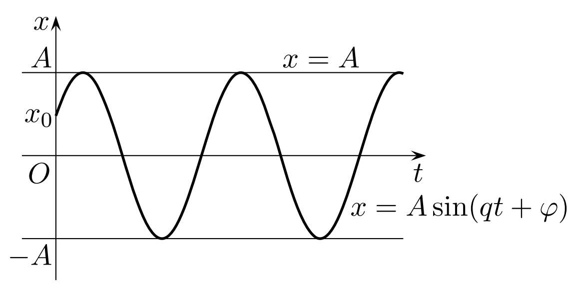


Рис. 16.1

Будь-яким початковим умовам

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0$$

згідно з теоремою про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння n-го порядку (лекція 10) відповідає єдиний рух з формули (16.4). Знайдемо цей рух. Оскільки

$x' = Aq\cos(qt+\varphi)$, то відповідні значення амплітуди A і початкової фази φ одержуємо із системи

$$\begin{cases} A\sin\varphi = x_0, \\ Aq\cos\varphi = x'_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{q}\sqrt{q^2x_0^2 + {x'_0}^2}, \ \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{qx_0}{x'_0}.$$

Випадок 2. *Рух відбувається в середовищі з опором* $p > 0$. Характеристичним рівнянням для (16.2) є $k^2 + 2pk + q^2 = 0$, а характеристичними числами — числа

$$k_1 = -p + \sqrt{p^2 - q^2} \quad \text{і} \quad k_2 = -p - \sqrt{p^2 - q^2}.$$

Якщо $p^2 - q^2 < 0$, то, позначивши $p^2 - q^2 = -h^2$, загальний розв'язок рівняння (16.2) можемо записати як

$$x = e^{-pt}(C_1\cos ht + C_2\sin ht),$$

де $h = \sqrt{q^2 - p^2}$, або, враховуючи позначення, які використовувались при виведенні формули (16.4), у вигляді

$$x(t) = Ae^{-pt}\sin(ht + \varphi). \tag{16.5}$$

Рух точки, який описується формулою (16.5), називають ***згасаючим гармонічним коливанням*** з періодом $T = \frac{2\pi}{h}$, частотою h, амплітудою Ae^{-pt}, початковою фазою φ (рис. 16.2). На відміну від гармонічного коливання (16.4) тепер амплітуда є величиною змінною. Але вона обмежена, бо $Ae^{-pt} \leqslant A$, і прямує до нуля при $t \to +\infty$. Число A називають ***початковою амплітудою***, а p — ***коефіцієнтом згасання***. Множник e^{-pt} характеризує швидкість згасання коливання.

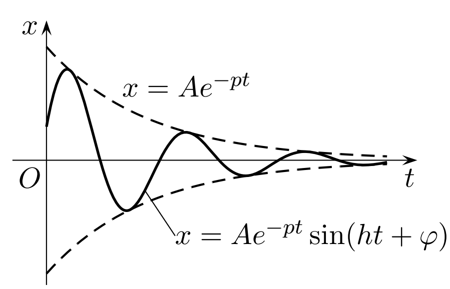


Рис. 16.2

Якщо $p^2 - q^2 > 0$, то, позначивши $p^2 - q^2 = h^2$, загальний розв'язок рівняння (16.2) запишемо у вигляді

$$x(t) = C_1 e^{(h-p)\,t} + C_2 e^{-(h+p)\,t}. \tag{16.6}$$

Оскільки $h < p$, то $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Нарешті, якщо $p^2 - q^2 = 0$, то $k_1 = k_2 = -p$, а загальним розв'язком є

$$x(t) = e^{-pt}(C_1 + C_2 t), \tag{16.7}$$

причому знову $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Рухи, які описуються формулами (16.6) і (16.7), називають ***аперіодичними згасаючими рухами***. Із зростанням t відхилення $x(t)$ асимптотично наближається до нуля, і коливань навколо положення $x = 0$ немає. Усі розглянуті рухи називають ***вільними*** або ***власними коливаннями***.

Таким чином, наявність опору середовища ($p > 0$) видозмінює характер коливань, причому, якщо опір p порівняно невеликий ($p < q$), то рухи залишаються періодичними, згасаючи при $t \to +\infty$, а при великому опорі середовища ($p \geqslant q$) рухи стають аперіодичними.

2. Застосування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів. Розглянемо диференціальне рівняння вимушених коливань (16.1) ($f(t) \neq 0$). Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (лекція 14) усі рухи, які визначаються рівнянням (16.1), можна утворити зі сукупності усіх рухів, визначених відповідним однорідним рівнянням (рівнянням ***вільних коливань точки***), і будь-якого одного руху, визначеного неоднорідним рівнянням (16.1).

Розглянемо випадок, який досить часто трапляється у застосуваннях: збурювальна сила $f(t)$ періодична і має синусоїдальний характер.

Випадок 1. *Рух відбувається в середовищі без опору* ($p = 0$). Тоді рівняння руху має вигляд

$$x'' + q^2 x = M \sin \omega t, \tag{16.8}$$

де M — деяке число.

Власні коливання $x_0(t)$, які визначаються відповідним однорідним рівнянням

$$x'' + q^2 x = 0,$$

є гармонічними (див. формулу (16.4)):

$$x_0(t) = A\sin(qt + \varphi). \tag{16.9}$$

Залишається знайти частинний розв'язок рівняння (16.8). Вигляд цього розв'язку залежить від того, чи є число $a + ib = i\omega$ коренем характеристичного рівняння $k^2 + q^2 = 0$. Оскільки $k_{1,2} = \pm\, iq$, то вигляд розв'язку визначається тим, чи збігається частота збурювальної сили з частотою власних коливань (***резонансний випадок***), чи маємо незбіг цих частот (***нерезонансний випадок***).

Розглянемо спочатку нерезонансний випадок, тобто коли $\omega \neq q$. Частинний розв'язок рівняння (16.8) $X(t)$ шукаємо у вигляді

$$X(t) = A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t,$$

де A_1 і B_1 — деякі сталі, які визначимо згодом. Тоді

$$X'(t) = -A_1\omega\sin\omega t + B_1\omega\cos\omega t,$$
$$X''(t) = -A_1\omega^2\cos\omega t - B_1\omega^2\sin\omega t$$

і, підставляючи в (16.8), одержуємо рівняння

$$-A_1\omega^2\cos\omega t - B_1\omega^2\sin\omega t + q^2(A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t) = M\sin\omega t.$$

З нього, прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ відповідно, маємо:

$$\begin{cases} -A_1\omega^2 + A_1 q^2 = 0, \\ -B_1\omega^2 + B_1 q^2 = M \end{cases} \Rightarrow \quad A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{M}{q^2 - \omega^2}.$$

Таким чином,

$$X(t) = \frac{M}{q^2 - \omega^2}\sin\omega t,$$

а загальний розв'язок рівняння (16.8) має вигляд

$$x(t) = \frac{M}{q^2 - \omega^2} \sin \omega t + A \sin(qt + \varphi).$$

Вимушені коливання, визначені цим загальним розв'язком, називають ***накладеними гармонічними коливаннями***.

Розглянемо рівняння вимушених коливань

$$x'' + q^2 x = M \sin qt, \tag{16.10}$$

яке є окремим випадком рівняння (16.8), коли $\omega = q$, тобто коли частота збурювальної сили збігається з частотою власних коливань (***резонанс***). У цьому випадку частинний розв'язок має вигляд

$$X(t) = t(A_1 \cos qt + B_1 \sin qt),$$

бо iq є простим характеристичним числом. Тоді

$$X'(t) = A_1 \cos qt + B_1 \sin qt + tq(-A_1 \sin qt + B_1 \cos qt),$$

$$X''(t) = -2A_1 q \sin qt + 2B_1 q \cos qt - tq^2(A_1 \cos qt + B_1 \sin qt)$$

і, підставляючи в (16.10), одержуємо рівняння

$$-2A_1 q \sin qt + 2B_1 q \cos qt - q^2 t(A_1 \cos qt + B_1 \sin qt) +$$
$$+ q^2 t(A_1 \cos qt + B_1 \sin qt) = M \sin qt \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -2A_1 q \sin qt + 2B_1 q \cos qt = M \sin qt.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos qt$, $\sin qt$ відповідно, знаходимо, що $A_1 = -\frac{M}{2q}$, $B_1 = 0$. Таким чином,

$$X(t) = -\frac{M}{2q} t \cos qt. \tag{16.11}$$

Частинний розв'язок (16.11) є вимушеним коливанням і має необмежену амплітуду при $t \to +\infty$. Графік цього коливання розташований між прямими $x = \frac{M}{2q} t$ і $x = -\frac{M}{2q} t$ (рис. 16.3).

У реальних фізичних системах коливання ніколи не можуть зростати необмежено, бо коливання з необмеженою амплітудою або стримуються опором, або призводять до руйнування системи.

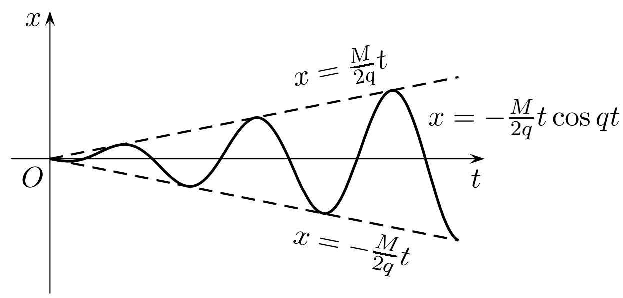


Рис. 16.3

Загальним розв'язком рівняння (16.10) є

$$x(t) = A\sin(qt + \varphi) - \frac{M}{2q}t\cos qt.$$

Вимушені коливання, визначені цим розв'язком, утворюються накладанням гармонічних коливань (16.9) і коливань з необмеженою амплітудою (16.11).

Випадок 2. *Рух відбувається в середовищі з малим опором* ($p < q$). Припустимо, що збурювальна сила має синусоїдальний характер. Тоді рівнянням руху є

$$x'' + 2p\,x' + q^2x = M\sin\omega t. \tag{16.12}$$

Згідно з (16.5) власні коливання $x_0(t)$ мають вигляд

$$x_0(t) = Ae^{-pt}\sin\Big(\sqrt{q^2 - p^2}\,t + \varphi\Big).$$

Частинний розв'язок $X(t)$ рівняння (16.12) шукаємо у вигляді

$$X(t) = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t, \tag{16.13}$$

де сталі A_1, B_1 знайдемо, підставляючи (16.13) в (16.12):

$$-A_1\omega^2\cos\omega t - B_1\omega^2\sin\omega t + 2p(-A_1\omega\sin\omega t + B_1\omega\cos\omega t) +$$
$$+ q^2(A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t) = M\sin\omega t \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \big(-A_1\omega^2 + 2pB_1\omega + A_1q^2\big)\cos\omega t +$$

$$+\left(-B_1\omega^2 - 2pA_1\omega + q^2B_1\right)\sin\omega t = M\sin\omega t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A_1(q^2-\omega^2) + 2p\omega B_1 = 0, \\ -2pA_1\omega + (q^2-\omega^2)B_1 = M \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2-q^2)^2 + 4p^2\omega^2}, \quad B_1 = \frac{M(q^2-\omega^2)}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}.$$

Отже,

$$X(t) = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{M(q^2-\omega^2)}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}\sin\omega t, \tag{16.14}$$

а загальний розв'язок рівняння (16.12) має вигляд

$$x(t) = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{M(q^2-\omega^2)}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}\sin\omega t + \\ + Ae^{-pt}\sin\left(\sqrt{q^2-p^2}\,t+\varphi\right).$$

Оскільки при $t \to +\infty$ останній доданок прямує до нуля, то для достатньо великих t можна вважати, що

$$x(t) = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{M(q^2-\omega^2)}{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}\sin\omega t,$$

тобто власними (згасаючими) коливаннями можна знехтувати.

Амплітуда A вимушеного коливання (16.14) виражається формулою

$$A = \frac{M}{\sqrt{(\omega^2-q^2)^2+4p^2\omega^2}},$$

а якщо опір p дуже малий, то $A \approx \frac{M}{|\omega^2-q^2|}$. Звідси випливає, що при наближенні ω до q амплітуда A є доволі значною навіть для малого числа M з формули (16.12).

3. Диференціальна модель математичного маятника. ***Математичним маятником*** називають матеріальну точку K з масою m, яка під дією сили тяжіння рухається по колу L з радіусом r, розташованому у вертикальній площині. Величину r називають довжиною маятника.

Припустимо, що коливання маятника відбувається в середовищі без опору. На колі L уведемо кутову координату, взявши за початок координат найнижчу точку O кола L (рис. 16.4). Змінну координату точки K позначимо через $\psi = \psi(t)$. На точку K діє сила тяжіння $P = mg$, де g — прискорення вільного падіння.

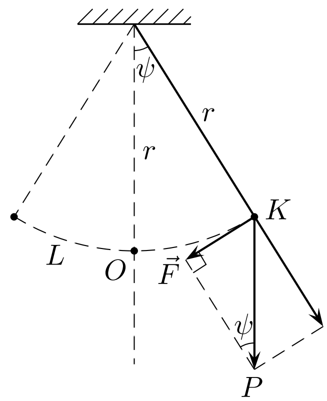


Рис. 16.4

Тоді маятник коливається під дією сили $\vec{F}$, яка діє у бік зменшення кута ψ,

$$F = -mg\sin\psi.$$

Якщо за час t довільна точка K пройшла вздовж дуги кола L шлях S, то $S = r\psi$. Звідси швидкість v руху точки, яка спрямована вздовж дотичної до дуги кола, визначається за формулою

$$v = \frac{dS}{dt} = r\frac{d\psi}{dt}. \qquad (16.15)$$

Тому рівнянням руху маятника є

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\psi$$

або, з урахуванням (16.15),

$$r\frac{d^2\psi}{dt^2} + g\sin\psi = 0. \qquad (16.16)$$

Рівняння (16.16) нелінійне, однак якщо величина кута ψ досить мала, то $\sin\psi \approx \psi$, і замість нелінійного можна розглядати лінійне однорідне рівняння

$$\psi'' + q^2\psi = 0,$$

де $q^2 = \frac{g}{r}$, тобто маємо рівняння вигляду (16.3).

Таким чином, математичний маятник при малому відхиленні від положення рівноваги здійснюватиме гармонічні коливання за законом

$$\psi(t) = A\sin(qt + \varphi),$$

де

$$q = \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2 r}{g}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_0}{x_0'}\sqrt{\frac{g}{r}}\right).$$

Рекомендована література: [6, с. 387–391], [10, с. 144–150], [17, с. 268–281], [20, с. 288–362].

Питання до лекції 16

1. Як інтегрується рівняння вільних коливань у середовищі без опору? Який вигляд має загальний розв'язок цього рівняння? Що називають гармонічним коливанням, його амплітудою, періодом, частотою і початковою фазою? Як залежать амплітуда і початкова фаза від початкових значень шуканої функції та її похідної?

2. Як інтегрується рівняння вільних коливань у середовищі з опором? Що називають згасаючим гармонічним коливанням, його періодом, частотою, амплітудою і початковою фазою? Яка поведінка амплітуди при $t \to +\infty$? Як впливає наявність опору середовища на характер коливань?

3. Який вигляд має рівняння вимушених коливань у середовищі без опору у випадку періодичної збурювальної сили синусоїдального характеру? Як інтегрується це рівняння? Який вигляд має загальний розв'язок у нерезонансному і резонансному випадках?

4. Як інтегрується рівняння вимушених коливань у середовищі з малим опором у випадку періодичної збурювальної сили синусоїдального характеру? Який вигляд має графік частинного розв'язку цього рівняння?

5. Що називають математичним маятником? Який вигляд має диференціальна модель його руху? Якими є період, частота, амплітуда та початкова фаза коливання математичного маятника?

Вправи до лекції 16

1. Для яких значень q і ω рівняння

$$x'' + q^2 x = \sin \omega t$$

(це рівняння (16.8), в якому $M = 1$) має щонайменше один періодичний розв'язок?

2. Знайдіть періодичний розв'язок рівняння

$$x'' + px' + q^2 x = M \sin \omega t$$

(це рівняння (16.12)). Побудуйте графік залежності амплітуди знайденого розв'язку від величини ω.

3. Послідовно з'єднані індуктивність L, опір R і конденсатор з ємністю C, заряд якого в початковий момент часу $t = 0$ дорівнює q. Коло замикається при $t = 0$. Знайдіть силу струму й частоту коливань у припущенні, що розряд має коливний характер.

4. Опір R і конденсатор з ємністю C з'єднані послідовно. При $t = 0$ заряд конденсатора дорівнює q. Знайдіть силу струму для $t > 0$, якщо коло замкнули при $t = 0$.

5. У коливному контурі з опором R та індуктивністю L діє електрорушійна сила E. Знайдіть струм $I(t)$ у колі після його розмикання, якщо $I(0) = I_0$. За який час величина струму впаде до $1/100$ своєї початкової величини, якщо $R = 0{,}36$ Ом, $L = 0{,}02$ Гн?

Лекція 17. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку

План

1. Основні означення й поняття.
2. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі.
3. Функція Ґріна крайової задачі.
4. Крайові задачі на власні значення.

1. Основні означення й поняття. У задачі Коші (див. лекції 2, 6, 10) умови, з допомогою яких можна виділити певний частинний розв'язок диференціального рівняння, задаються в одній (початковій) точці. Проте у багатьох прикладних задачах умови на невідому функцію та її похідні задаються у двох точках, наприклад, на кінцях відрізка, де шукається розв'язок задачі. Такі умови називають ***крайовими***. Задачу відшукання розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє крайові умови, називають ***крайовою***.

Крайові задачі виникають як диференціальні моделі багатьох прикладних задач (коливання струни, коливання валів, поширення тепла у провіднику тощо). Наприклад, у задачі про рух матеріальної точки з масою m під дією заданої сили F у багатьох випадках потрібно знайти закон руху $s(t)$, якщо у початковий момент часу $t = t_0$ вона знаходилась у точці M_1, а в момент часу $t = t_1$ повинна потрапити у точку M_2. Використовуючи закон Ньютона $F = ma$, де $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ — прискорення, ця задача зводиться до відшукання розв'язку диференціального рівняння другого порядку

$$ms'' = F(t, s, s'),$$

який задовольняє крайові умови $s(t_0) = s_0$, $s(t_1) = s_1$.

Надалі обмежимось розглядом крайових задач тільки для диференціальних рівнянь другого порядку. Для рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{17.1}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — неперервні на відрізку $[a, b]$ функції, крайові умови означимо наступним чином:

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = y_0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = y_1, \end{cases} \tag{17.2}$$

де α_1, α_2, β_1, β_2, y_0, y_1 — задані числа, причому α_1, β_1, а також α_2, β_2 одночасно не дорівнюють нулю. Якщо $y_0 = y_1 = 0$, тобто

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases} \tag{17.3}$$

то такі крайові умови називають ***однорідними***.

Якщо $f(x)$ тотожно не дорівнює нулю, то задачу (17.1), (17.2) називають ***неоднорідною крайовою задачею***, а якщо $f(x) \equiv 0$ і $y_0 = y_1 = 0$, — ***однорідною крайовою задачею***.

Розв'язком крайової задачі (17.1), (17.2) називають функцію $y(x)$, яка двічі неперервно диференційовна на (a, b), неперервно диференційовна на $[a, b]$ і задовольняє рівняння (17.1) на (a, b) та крайові умови (17.2).

2. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі. Розв'язок задачі Коші для рівняння (17.1) з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_1, \quad x_0 \in [a, b],$$

де $p(x)$, $q(x)$ — неперервні на $[a, b]$ функції, згідно з теоремою Коші (лекція 10) існує та є єдиним на всьому відрізку $[a, b]$. Для крайової задачі (17.1), (17.2) це зовсім не обов'язково, тобто її розв'язок може не існувати або не бути єдиним. Для детальнішого розгляду цього питання позначимо через $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{17.4}$$

а через $Y(x)$ — частинний розв'язок рівняння (17.1). Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (лекція 14, п. 1) загальним розв'язком рівняння (17.1) є

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + Y(x), \tag{17.5}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Для отримання розв'язку крайової задачі (17.1), (17.2) сталі C_1, C_2 необхідно визначити з крайових умов (17.2). Підставляючи (17.5) в (17.2), одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} \big(\alpha_1\varphi_1'(a)+\beta_1\varphi_1(a)\big)C_1+\big(\alpha_1\varphi_2'(a)+\beta_1\varphi_2(a)\big)C_2= \\ \qquad\qquad =-\alpha_1 Y'(a)-\beta_1 Y(a)+y_0, \\ \big(\alpha_2\varphi_1'(b)+\beta_2\varphi_1(b)\big)C_1+\big(\alpha_2\varphi_2'(b)+\beta_2\varphi_2(b)\big)C_2= \\ \qquad\qquad =-\alpha_2 Y'(b)-\beta_2 Y(b)+y_1. \end{cases}$$

Позначимо через U і $\tilde{U}$ матрицю та розширену матрицю цієї системи, а через Δ — визначник матриці U. Використовуючи відому з курсу алгебри теорему Кронекера–Капеллі про розв'язність лінійної системи алгебричних рівнянь, одержуємо важливий результат.

Теорема 1. *Розв'язок крайової задачі* (17.1), (17.2):

– *існує та є единим, якщо* $\Delta \neq 0$;

– *не існує, якщо* $\Delta = 0$ *і ранг матриці* U *не дорівнює рангу розширеної матриці* $\tilde{U}$;

– *існує, але не є единим, якщо* $\Delta = 0$ *і ранг матриці* U *дорівнює рангу матриці* $\tilde{U}$.

Ранг матриці U називають ***рангом крайової задачі*** (17.1), (17.2). Однорідна крайова задача (17.4), (17.3) має лише тривіальний розв'язок, якщо ранг матриці U дорівнює двом, і безліч розв'язків, визначених з точністю до сталого множника, якщо ранг матриці U дорівнює одиниці.

Приклад 1. *Дослідити на розв'язність крайову задачу* $y''+y=0,\ y(0)=0,\ y(a)=y_0,\ a\neq 0.$

Розв'язання. Загальним розв'язком рівняння є $y=C_1\cos x+$ $+C_2\sin x$. З крайової умови $y(0)=0$ знаходимо $C_1=0$, а з умови $y(a)=y_0$ одержуємо рівняння $C_2\sin a=y_0$. Якщо $\sin a\neq 0$, тобто $a\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, то $C_2=\frac{y_0}{\sin a}$ і маємо єдиний розв'язок задачі $y=\frac{y_0}{\sin a}\cdot\sin x$.

Якщо $\sin a=0$, тобто $a=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, то можливі два випадки. Якщо $y_0\neq 0$, то рівняння $C_2\sin a=y_0$, а, отже, і задана крайова задача розв'язків не має. Якщо $y_0 = 0$, то рівняння $C_2 \sin a = y_0$ перетворюється у тотожність і задана крайова задача має безліч розв'язків вигляду $y = C_2 \sin x$, де C_2 — довільна стала. ■

Зауважимо, що крайові умови можуть мати також граничний вигляд, а числа a або b можуть бути невласними. Можна, наприклад, розглядати такі крайові умови:

$$\begin{cases} \alpha_1 \lim\limits_{x\to a} y'(x) + \beta_1 \lim\limits_{x\to a} y(x) = 0, \\ \alpha_2 \lim\limits_{x\to\infty} y'(x) + \beta_2 \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

Приклад 2. *Знайти розв'язок рівняння Ейлера* $x^2y'' + +3xy' - 8y = 0$, *який задовольняє умови* $y(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x = e^t$. Тоді $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = = \big(y''_{t^2} - y'_t\big)e^{-2t}$ (лекція 13). Підставляючи ці вирази у рівняння, для знаходження функції $y = y(t)$ одержуємо лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + 2y' - 8y = 0$, загальним розв'язком якого є

$$y = C_1e^{-4t} + C_2e^{2t} \quad \Rightarrow \quad y = C_1e^{-4\ln x} + C_2e^{2\ln x} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{C_1}{x^4} + C_2x^2.$$

Виберемо тепер сталі C_1, C_2 так, щоб справджувались крайові умови. З умови $y(1) = 1$ випливає, що $C_1 + C_2 = 1$. З умови $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$, враховуючи, що $y' = -4\,C_1\big/x^5 + 2C_2x$, знаходимо $C_2 = 0$, а отже, $C_1 = 1$. Таким чином, розв'язком заданої крайової задачі є функція $y = 1\big/x^4$. ■

3. Функція Ґріна крайової задачі. Надалі розглядатимемо тільки однорідні крайові умови, бо для неоднорідних крайових умов розв'язок $y(x)$ задачі (17.1), (17.2) можна шукати у вигляді $y(x) = \bar{y}(x) + z(x)$, де $\bar{y}(x)$ — довільна двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$ функція, яка задовольняє неоднорідні крайові умови. Тоді для функції $z(x)$ одержимо крайову задачу з однорідними крайовими умовами і правою частиною $f(x) - L(\bar{y})$.

Наприклад, неоднорідні крайові умови $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$ з допомогою заміни

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{b - a}(x - a) - y_0$$

зводимо до однорідних крайових умов $z(a) = 0$, $z(b) = 0$.

Покажемо, що розв'язок рівняння (17.1), який задовольняє однорідні крайові умови (17.3), при певних умовах однозначно виражається через так звану функцію Ґріна крайової задачі.

Функцією Ґріна крайової задачі (17.1), (17.3) називають функцію $G(x, s)$, яка визначена для довільних $x, s \in [a, b]$ і задовольняє такі три умови:

1) для кожного фіксованого $s \in [a, b]$ $G(x, s)$ як функція змінної x на кожному з проміжків $[a, s)$ і $(s, b]$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння (17.4);

2) $G(x, s)$ за змінною x задовольняє однорідні крайові умови (17.3);

3) $G(x, s)$ — неперервна функція для всіх $x, s \in [a, b]$, а її частинна похідна $\frac{\partial G}{\partial x}$ має при $x = s$ розрив першого роду зі стрибком

$$\frac{\partial G(s + 0, s)}{\partial x} - \frac{\partial G(s - 0, s)}{\partial x} = 1.$$

Теорема 2. *Якщо однорідна крайова задача* (17.4), (17.3) *має лише тривіальний розв'язок, то функція Ґріна неоднорідної крайової задачі* (17.1), (17.3) *існує та є єдиною.*

Доведення. Нехай $\varphi_1(x)$ — розв'язок рівняння (17.4) з початковими умовами $y(a) = \alpha_1$, $y'(a) = -\beta_1$, а $\varphi_2(x)$ — розв'язок рівняння (17.4) з початковими умовами $y(b) = \alpha_2$, $y'(b) = -\beta_2$. Очевидно, що функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ тотожно не дорівнюють нулю на $[a, b]$, причому $\varphi_1(x)$ задовольняє першу крайову умову, а $\varphi_2(x)$ — другу крайову умову з (17.3). Крім того, ці функції лінійно незалежні на $[a, b]$, бо інакше $\varphi_2(x) = C\varphi_1(x)$, $C \neq 0$, і тоді $\varphi_2(x)$ задовольняла б обидві крайові умови (17.3), що суперечить припущенню про те, що крайова задача (17.4), (17.3) має лише тривіальний розв'язок. Таким чином, функції $\varphi_1(x)$ і

$\varphi_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (17.4).

Функцію Ґріна $G(x,s)$ крайової задачі (17.1), (17.3) шукаємо у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\varphi_1(x), & a \leqslant x < s, \\ c_2(s)\varphi_2(x), & s < x \leqslant b. \end{cases}$$

За побудовою функцій $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ функція $G(x,s)$ задовольняє пункти 1, 2 означення функції Ґріна. Для виконання пункту 3 цього означення залишається знайти $c_1(s)$, $c_2(s)$ із системи

$$\begin{cases} c_2(s)\varphi_2(s) - c_1(s)\varphi_1(s) = 0, \\ c_2(s)\varphi_2'(s) - c_1(s)\varphi_1'(s) = 1. \end{cases} \tag{17.6}$$

Ця система однозначно розв'язна відносно $c_1(s)$, $c_2(s)$, бо її визначник відмінний від нуля на $[a,b]$ (ним є вронскіан $W(s)$ функцій $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$). Остаточно одержуємо:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{\varphi_2(s)\varphi_1(x)}{W(s)}, & a \leqslant x \leqslant s, \\ \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x)}{W(s)}, & s \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \quad \blacktriangleright \tag{17.7}$$

Функцію Ґріна крайової задачі (17.1), (17.3) можна будувати методом, який використовувався при доведенні теореми 2.

Приклад 3. *Побудувати функцію Ґріна крайової задачі* $y'' - y' = f(x),\ y(0) = 0,\ y(1) = y'(1)$.

Розв'язання. Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння $y'' - y' = 0$ є $y = C_1 + C_2e^x$. Частинний розв'язок $\varphi_1(x) = 1 - e^x$ задовольняє першу крайову умову, а розв'язок $\varphi_2(x) = e^x$ — другу. Тому функцію Ґріна шукаємо у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)(1-e^x), & 0 \leqslant x < s, \\ c_2(s)e^x, & s < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{17.8}$$

Система (17.6) для знаходження функцій $c_1(s)$, $c_2(s)$ має вигляд

$$\begin{cases} c_2(s)e^s - c_1(s)(1-e^s) = 0, \\ c_2(s)e^s + c_1(s)e^s = 1. \end{cases}$$

Її розв'язком є $c_1(s) = 1,\ c_2(s) = e^{-s} - 1$.

Підставляючи знайдені $c_1(s)$, $c_2(s)$ у (17.8), одержуємо функцію Ґріна заданої крайової задачі:

$$G(x,s) = \begin{cases} 1 - e^x, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ e^x(e^{-s} - 1), & s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \blacksquare$$

Теорема 3. *Якщо однорідна крайова задача* (17.4), (17.3) *має лише тривіальний розв'язок, то розв'язок неоднорідної крайової задачі* (17.1), (17.3) *існує, є єдиним і задається формулою*

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) \cdot f(s)\,ds, \tag{17.9}$$

де $G(x,s)$ *— функція Ґріна крайової задачі* (17.1), (17.3).

Доведення. Запишемо формулу (17.9) у вигляді

$$y(x) = \int_a^x G(x,s) \cdot f(s)\,ds + \int_x^b G(x,s) \cdot f(s)\,ds.$$

На кожному з проміжків $[a,x)$ і $(x,b]$ функції $G(x,s)$ і $\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}$ неперервні, а тому обидва інтеграли можна здиференціювати за змінною x [7]. Тоді

$$y'(x) = \int_a^x \frac{\partial G(x,s)}{\partial x} \cdot f(s)\,ds + G(x, x-0)f(x) +$$
$$+ \int_x^b \frac{\partial G(x,s)}{\partial x} \cdot f(s)\,ds - G(x, x+0)f(x).$$

Оскільки функція $G(x,s)$ неперервна при $s = x$, то неінтегральні доданки взаємознищуються, а тому

$$y'(x) = \int_a^x \frac{\partial G(x,s)}{\partial x} \cdot f(s)\,ds + \int_x^b \frac{\partial G(x,s)}{\partial x} \cdot f(s)\,ds. \tag{17.10}$$

[7] Див. примітку 6 на с. 176.

Рівність (17.10) ще один раз здиференціюємо за змінною x:

$$y''(x) = \int_a^x \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} \cdot f(s)\,ds + \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} f(x) +$$

$$+ \int_x^b \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} \cdot f(s)\,ds - \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} f(x) =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} \cdot f(s)\,ds + \left(\frac{\partial G(x+0, x)}{\partial x} - \frac{\partial G(x-0, x)}{\partial x} \right) f(x).$$

Використовуючи пункт 3 з означення функції $G(x,s)$, останню формулу можемо записати у вигляді

$$y''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} \cdot f(s)\,ds + f(x). \tag{17.11}$$

З формул (17.9)–(17.11), враховуючи властивості функції $G(x,s)$, одержуємо, що (17.9) — розв'язок крайової задачі (17.1), (17.3). Цей розв'язок єдиний, бо якщо припустити існування іншого розв'язку $\tilde{y}(x)$, то функція $z(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ буде нетривіальним розв'язком однорідної крайової задачі, що суперечить умові теореми. ▶

4. Крайові задачі на власні значення. Часто виникає необхідність знайти розв'язки крайової задачі

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (a,b), \tag{17.12}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases} \tag{17.13}$$

де λ — дійсний або комплексний параметр, функції $p(x)$, $q(x)$ — неперервні на відрізку $[a,b]$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Задачу знаходження значень параметра λ, для яких крайова задача (17.12), (17.13) має нетривіальні розв'язки, називають ***крайовою задачею на власні значення***.

Значення параметра λ, для яких крайова задача (17.12), (17.13) має нетривіальні розв'язки, називають ***власними значеннями***, а відповідні їм нетривіальні розв'язки — ***власними функціями*** крайової задачі на власні значення.

Кількість лінійно незалежних розв'язків крайової задачі (17.12), (17.13) для заданого власного значення λ називають ***кратністю*** цього власного значення.

Можна довести, що для задачі (17.12), (17.13) справджується тільки одне з таких тверджень:

1. Крайова задача (17.12), (17.13) не має власних значень.

2. Крайова задача (17.12), (17.13) має не більше зчисленної множини власних значень, які при цьому не можуть мати скінченної граничної точки.

3. Кожне число λ є власним значенням крайової задачі (17.12), (17.13).

Приклад 4. *Знайти власні значення та власні функції задачі* $y'' = \lambda y,\ y(0) = 0,\ y(b) = 0,\ b \neq 0.$

Розв'язання. Нехай $\lambda > 0$ або λ — комплексне. Тоді задача не має нетривіальних розв'язків, бо, підставляючи загальний розв'язок рівняння $y'' - \lambda y = 0$

$$y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

у крайові умови, одержуємо:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}\, b} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) \equiv 0.$$

Нехай $\lambda = 0$. Тоді, підставляючи загальний розв'язок $y = C_1 x + C_2$ у крайові умови, одержуємо:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 b + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) \equiv 0,$$

тобто і у цьому випадку задача має тільки тривіальний розв'язок.

Нехай тепер $\lambda < 0$. Тоді загальним розв'язком рівняння $y'' - \lambda y = 0$ є

$$y = C_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \sin(x\sqrt{-\lambda}),$$

а враховуючи крайові умови, одержуємо:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos(b\sqrt{-\lambda}) + C_2 \sin(b\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad C_2 \sin(b\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Якщо y тотожно не дорівнює нулю, то $C_2 \neq 0$ і, отже, $\sin(b\sqrt{-\lambda}) = 0$.

Звідси маємо формулу для всіх власних значень задачі:

$$\lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ \dots \ .$$

Їм відповідають власні функції

$$y_k = c_k \sin \frac{\pi k x}{b}, \quad k = 1, 2, \ \dots \ ,$$

де c_k — довільні сталі, відмінні від нуля. ■

Важливим окремим випадком задачі на власні значення є ***задача Штурма–Ліувілля***:

$$\big(p(x)y'\big)' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \quad x \in (a, b),$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases}$$

де функції $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ — неперервні на відрізку $[a, b]$,

$$p(x) > 0, \ \ \rho(x) > 0, \ \ x \in [a, b], \ \ \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \ \ \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

Детальніше із задачею Штурма–Ліувілля, властивостями її власних значень і власних функцій можна ознайомитись, наприклад, у [6, с. 189–201].

Рекомендована література: [3, с. 321–336], [6, с. 166–201], [8, с. 303–319].

Питання до лекції 17

1. Що таке крайові умови, крайова задача для звичайного диференціального рівняння? Який вигляд мають крайові умови для лінійного диференціального рівняння другого порядку?

2. Чим відрізняються неоднорідні крайові умови від однорідних? Чому, розглядаючи крайову задачу, можна обмежитись однорідними крайовими умовами?

3. Яку функцію називають розв'язком крайової задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку?

4. Коли розв'язок крайової задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку існує та є єдиним; не існує; існує, але є неєдиним?

5. Що таке функція Ґріна крайової задачі? Яка її роль у побудові розв'язку неоднорідної крайової задачі? Коли існує єдина функція Ґріна крайової задачі? Як можна побудувати функцію Ґріна?

6. Що називають крайовою задачею на власні значення? Що таке власні значення, власні функції такої задачі? Як формулюється задача Штурма–Ліувілля?

Вправи до лекції 17

1. Знайдіть розв'язки крайових задач:

$$\text{а) } y'' + 9y = 1, \quad y(0) = 0, \;\; y'(\pi) = 1;$$
$$\text{б) } y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \;\; \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 2.$$

2. Побудуйте функції Ґріна крайових задач:

$$\text{а) } y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \;\; y(1) = 0;$$
$$\text{б) } xy'' - y' = f(x), \quad y'(1) = 0, \;\; y(2) = 0.$$

3. Знайдіть власні значення й власні функції задач:

$$\text{а) } y'' = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \;\; y'(b) = 0, \;\; b \neq 0;$$
$$\text{б) } x^2 y'' + \frac{y}{4} = \lambda y, \quad y(1) = 0, \;\; y(b) = 0, \;\; b \neq 1.$$

Додаток 2

Застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Коші $y'' + y = 0$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ (приклад 1 лекції 10, с. 125):

```
> dsolve({(D@@2)(y)(x)+y(x)=0,y(0)=1,D(y)(0)=0},y(x));
```

$$y(x) = \cos(x).$$

Приклад 2. Зінтегрувати диференціальне рівняння $y'' = 2\sqrt{y'}$ (приклад 2 лекції 10, с. 128):

```
> dsolve((D@@2)(y)(x)=2*sqrt(D(y)(x)),y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \_C1\,x^2 + \_C1^2 x + \_C2.$$

Сім'ю особливих розв'язків $y = C$ з допомогою пакета Maple знайти не вдалось.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння $y''' = \sin^2 x$ (приклад 3 лекції 10, с. 130):

```
> dsolve((D@@3)(y)(x)=sin(x)^2,y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{16}\sin(2\,x) + \frac{x}{8} + \frac{x^3}{12} + \frac{\_C1\,x^2}{2} + \_C2\,x + \_C3.$$

Цей розв'язок через перепозначення сталих зводиться до розв'язку, отриманого на с. 130.

Приклад 4. Знайти розв'язок рівняння $y''' = e^{x^2}$, який задовольняє нульові початкові умови (приклад 4 лекції 10, с. 131):

```
> dsolve({(D@@3)(y)(x)=exp(x^2),y(0)=0,D(y)(0)=0,
  (D@@2)(y)(0)=0},y(x),useInt);
```

$$y(x) = \int_0^x \int_0^{\_z1} \int_0^{\_z1} \mathrm{e}^{\_z1^2} d\_z1\; d\_z1\; d\_z1.$$

Опція `useInt` використана для того, щоб розв'язок задачі Коші був представлений у квадратурах, а не з допомогою спеціальних функцій (такі інтеграли через елементарні функції не виражаються).

Приклад 5. Зінтегрувати неповне диференціальне рівняння $x\sqrt{1+y''^2} = y''$ (приклад 5 лекції 10, с. 133):

```
> dsolve(x*sqrt(1+(D@@2)(y)(x)^2)=(D@@2)(y)(x),y(x))
  assuming x>-1 and x<1;
```

$$y(x) = -\frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{2}\,x\sqrt{-x^2+1} + \_C1\,x + \_C2.$$

Тут конструкцією `assuming x>-1 and x<1` накладено обмеження на змінну x, бо, як видно з самого рівняння, дійсний розв'язок існує лише на інтервалі $-1 < x < 1$. Без цього обмеження було б вибрано проміжок $|x| > 1$ і знайдено комплексний розв'язок.

Як бачимо, у цьому випадку використано інший метод, аніж той, який запропонований на с. 133: спочатку рівняння розв'язано відносно y'', а потім отримане рівняння (вигляду $y'' = f(x)$) двічі зінтегровано. Це дозволило знайти розв'язок у явному вигляді, а не у параметричній формі.

Приклад 6. Розв'язати задачу про рух матеріальної точки (задача 1 лекції 10). На с. 134 отримано диференціальне рівняння руху матеріальної точки $x''(t) = \frac{k}{m}e^{-pt}$. Зінтегруємо це рівняння, враховуючи початкові умови $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$:

```
> dsolve({(D@@2)(x)(t)=k/m*exp(-p*t),x(0)=0,D(x)(0)=0},
  x(t));
```

$$x(t) = \frac{k\mathrm{e}^{-pt}}{p^2 m} + \frac{kt}{pm} - \frac{k}{p^2 m}.$$

Приклад 7. Зінтегрувати неповне рівняння $xy''' = y'' - xy''$ (приклад 1 лекції 11, с. 137):

```
> dsolve(x*(D@@3)(y)(x)=(D@@2)(y)(x)-x*(D@@2)(y)(x),
  y(x));
```

$$y(x) = (2+x)\_C1\,\mathrm{e}^{-x} + \_C2\,x + \_C3.$$

Приклад 8. Розв'язати задачу про рух матеріальної точки при наявності опору середовища (задача 1 лекції 11). На с. 138 отримано диференціальне рівняння руху матеріальної точки $mx'' + kx' = A\sin\omega t$. Зінтегруємо це рівняння, враховуючи початкові умови $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$:

```
> simplify(dsolve({m*(D@@2)(x)(t)+k*D(x)(t)=
  A*sin(omega*t),x(0)=0,D(x)(0)=0},x(t)));
```

$$x(t) = -\frac{\left(k^2\cos(\omega\, t) - k^2 + m\sin(\omega\, t)k\omega + \omega^2 m^2 \mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}} - \omega^2 m^2\right)A}{(k^2 + \omega^2 m^2)\, k\, \omega}.$$

Команду `simplify` використано для спрощення розв'язку.

Приклад 9. Зінтегрувати неповне рівняння $yy'' = y'^2 - y'^3$ (приклад 2 лекції 11, с. 140):

```
> dsolve(y(x)*(D@@2)(y)(x)=D(y)(x)^2-D(y)(x)^3,y(x),
  implicit);
```

$$y(x) = \_C1, \quad y(x) + \_C1 \ln(y(x)) - x - \_C2 = 0.$$

Після перепозначення сталої $C_1 := 1/C_1$ відповідь прикладу 2 зводиться до відповіді, знайденої програмою. Без опції `implicit` програма знайшла б розв'язок у явному вигляді, але через спеціальні функції, вивчення яких не передбачене програмою навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння».

Приклад 10. Зінтегрувати однорідне рівняння $yy'' - y'^2 - 30\sqrt{x}y^2 = 0$ (приклад 3 лекції 11, с. 142):

```
> dsolve(y(x)*(D@@2)(y)(x)-D(y)(x)^2-30*sqrt(x)*y(x)^2=
  0,y(x));
```

$$y(x) = 0, \quad y(x) = \frac{\left(\mathrm{e}^{x^{5/2}}\right)^8 \_C2}{\mathrm{e}_{-}{}^{C1\, x}}.$$

Наведено також розв'язок $y = 0$, який, очевидно, є частинним.

Приклад 11. Зінтегрувати рівняння другого порядку в точних похідних

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} - yy' = 0$$

(приклад 4 лекції 11, с. 143):

```
> dsolve((x*(D@@2)(y)(x)-D(y)(x))/x^2-y(x)*D(y)(x)=0,
  y(x));
```

$$y(x) = -\tanh\left(\frac{1}{4}\_C1\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}\_C1\sqrt{2}\_C2\right)\_C1\sqrt{2}.$$

Пропонуємо читачам самостійно переконатись, що знайдений програмою розв'язок є неповним. Функція `tanh` позначає гіперболічний тангенс, тобто

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Приклад 12. Зінтегрувати неповне рівняння $yy'' - y'^2 = y'$ (приклад 5 лекції 11, с. 144):

```
> dsolve(y(x)*(D@@2)(y)(x)-D(y)(x)^2=D(y)(x),y(x));
```

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{\_C1\,x}\mathrm{e}^{\_C2\,\_C1} + 1}{\_C1}.$$

Розв'язки $y = -x + C$ і $y = 0$ пакетом Maple не знайдені.

Знайдемо також інтегрувальний множник цього рівняння:

```
> DEtools[intfactor](y(x)*(D@@2)(y)(x)-D(y)(x)^2=
  D(y)(x));
```

$$\frac{1}{y(x)^2}, \quad \frac{1}{\left(\frac{d}{dx}y(x) + 1\right)y(x)}.$$

Приклад 13. Побудувати диференціальне рівняння, яке має фундаментальну систему розв'язків $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x - 1$ (приклад 1 лекції 12, с. 156).

Для цього використаємо команди `wronskian` і `det` пакета `linalg`:

```
> linalg[wronskian]([x^2,x-1,y(x)],x);
```

$$\begin{bmatrix} x^2 & x-1 & y(x) \\ 2\,x & 1 & \frac{d}{dx}y(x) \\ 2 & 0 & \frac{d^2}{dx^2}y(x) \end{bmatrix},$$

```
> linalg[det](%)=0;
```

$$-x^2\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 2\,x\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 2\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)x - 2\,\frac{d}{dx}y(x) - 2\,y(x) = 0.$$

Приклад 14. Зінтегрувати лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' - 4y' + 3y = 0$ (приклад 1 лекції 13, с. 161):

```
> dsolve((D@@2)(y)(x)-4*D(y)(x)+3*y(x)=0,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\,\mathrm{e}^{x} + \_C2\,\mathrm{e}^{3\,x}.$$

Приклад 15. Зінтегрувати рівняння $y''' - 5y'' - 6y' = 0$ (приклад 2 лекції 13, с. 161):

```
> dsolve((D@@3)(y)(x)-5*(D@@2)(y)(x)-6*D(y)(x)=0,y(x));
```

$$y(x) = \_C1 + \_C2\,\mathrm{e}^{-x} + \_C3\,\mathrm{e}^{6\,x}.$$

Приклад 16. Зінтегрувати рівняння

$$y^{(4)} - 6y''' + 12y'' + 6y' - 13y = 0$$

(приклад 3 лекції 13, с. 163):

```
> dsolve((D@@4)(y)(x)-6*(D@@3)(y)(x)+12*(D@@2)(y)(x)+
  6*D(y)(x)-13*y(x)=0,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\,\mathrm{e}^{x} + \_C2\,\mathrm{e}^{-x} + \_C3\,\mathrm{e}^{3\,x}\sin(2\,x) + \_C4\,\mathrm{e}^{3\,x}\cos(2\,x).$$

Приклад 17. Зінтегрувати рівняння $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ (приклад 5 лекції 13, с. 165):

```
> dsolve((D@@3)(y)(x)+3*(D@@2)(y)(x)+3*D(y)(x)+y(x)=0,
  y(x));
```

$$y(x) = \_C1\,\mathrm{e}^{-x} + \_C2\,\mathrm{e}^{-x}x + \_C3\,\mathrm{e}^{-x}x^2.$$

Приклад 18. Зінтегрувати рівняння

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$$

(приклад 6 лекції 13, с. 165):

```
> dsolve((D@@5)(y)(x)-(D@@4)(y)(x)+8*(D@@3)(y)(x)-
  8*(D@@2)(y)(x)+16*D(y)(x)-16*y(x)=0,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\,\mathrm{e}^{x} + \_C2\sin(2\,x) + \_C3\cos(2\,x) + \\ + \_C4\sin(2\,x)\,x + \_C5\cos(2\,x)\,x.$$

Приклад 19. Зінтегрувати рівняння Ейлера

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$$

(приклад 7 лекції 13, с. 166):

```
> dsolve(x^2*(D@@2)(y)(x)-3*x*D(y)(x)+3*y(x)=0,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, x + \_C2\, x^3.$$

Приклад 20. Зінтегрувати рівняння Чебишова

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

(лекція 13, с. 167):

```
> dsolve((1-x^2)*(D@@2)(y)(x)-x*D(y)(x)+n^2*y(x)=0,
  y(x));
```

$$y(x) = \_C1 \sin\big(n \arcsin(x)\big) + \_C2 \cos\big(n \arcsin(x)\big).$$

Приклад 21. Зінтегрувати рівняння Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$$

(лекція 13, с. 168):

```
> dsolve(x^2*(D@@2)(y)(x)+x*D(y)(x)+(x^2-1/4)*y(x)=0,
  y(x));
```

$$y(x) = \frac{\_C1 \sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\_C2 \cos(x)}{\sqrt{x}}.$$

Приклад 22. Зінтегрувати лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + y = x$ (приклад 1 лекції 14, с. 174):

```
> dsolve((D@@2)(y)(x)+y(x)=x,y(x));
```

$$y(x) = \sin(x)\_C2 + \cos(x)\_C1 + x.$$

Приклад 23. Зінтегрувати рівняння $y''' - 2y'' = x^2 - e^x$ (приклад 3 лекції 14, с. 182):

```
> dsolve((D@@3)(y)(x)-2*(D@@2)(y)(x)=x^2-exp(x),y(x));
```

$$y(x) = -\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\_C1 - \frac{x^2}{8} + \_C2\, x + \_C3.$$

Приклад 24. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами $xy'' + 2y' + xy = 0$ (приклади 1 і 4 лекції 15, с. 186, 192):

```
> dsolve(x*(D@@2)(y)(x)+2*D(y)(x)+x*y(x),y(x));
```

$$y(x) = \frac{\_C1 \sin(x)}{x} + \frac{\_C2 \cos(x)}{x}.$$

Приклад 25. Зінтегрувати лінійне однорідне рівняння зі змінними коефіцієнтами $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ (приклад 2 лекції 15, с. 187):

```
> dsolve((x^2+1)*(D@@2)(y)(x)-2*x*D(y)(x)+2*y(x)=0,
  y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, x + \_C2\, (x^2 - 1).$$

Приклад 26. Зінтегрувати з допомогою степеневих рядів лінійне рівняння $y'' + xy = 0$ (приклад 3 лекції 15, с. 190):

```
> dsolve((D@@2)(y)(x)+x*y(x)=0,y(x),type=series);
```

$$y(x) = y(0) + \mathrm{D}(y)(0)x - \frac{1}{6}y(0)x^3 - \frac{1}{12}\mathrm{D}(y)(0)x^4 + O\big(x^6\big).$$

Вирази $y(0)$ і $D(y)(0)$ означають значення функції $y(x)$ та її похідної в точці $x = 0$, тобто виконують роль довільних сталих, а сам розв'язок заданий лише кількома першими членами степеневого ряду (до x^5). Знайдемо ще розв'язки задач Коші $y'' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ і $y'' + xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ з допомогою степеневих рядів, але з точністю до x^{14}:

```
> Order:=15:dsolve({(D@@2)(y)(x)+x*y(x)=0,y(0)=1,
  D(y)(0)=0},y(x),type=series);
```

$$y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{1}{12960}x^9 + \frac{1}{1710720}x^{12} + O\big(x^{15}\big), \quad (1)$$

```
> dsolve({(D@@2)(y)(x)+x*y(x)=0,y(0)=0,
  D(y)(0)=1},y(x),type=series);
```

$$y(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 - \frac{1}{45360}x^{10} + \frac{1}{7076160}x^{13} + O\big(x^{15}\big). \quad (2)$$

Тут спочатку системній змінній `Order` присвоєно число, яке визначає точність наближення розв'язку. Легко бачити, що отримано по п'ять перших членів рядів (15.11) і (15.12) відповідно. Зрозуміло, що формули (1) і (2) дають коректне наближення розв'язку лише в околі точки $x = 0$.

Додатково побудуємо графік розв'язку першої задачі Коші. Це можна зробити, побудувавши графік функції (1), але для значень x, які суттєво відрізняються від 0, його поведінка не відповідатиме справжній (рис. 1, команда `plot` описана на с. 343):

```
> plot(1-1/6*x^3+1/180*x^6-1/12960*x^9+1/1710720*x^12,
  x=-2.3..4.2,scaling=constrained,labels=[x,y]);
```

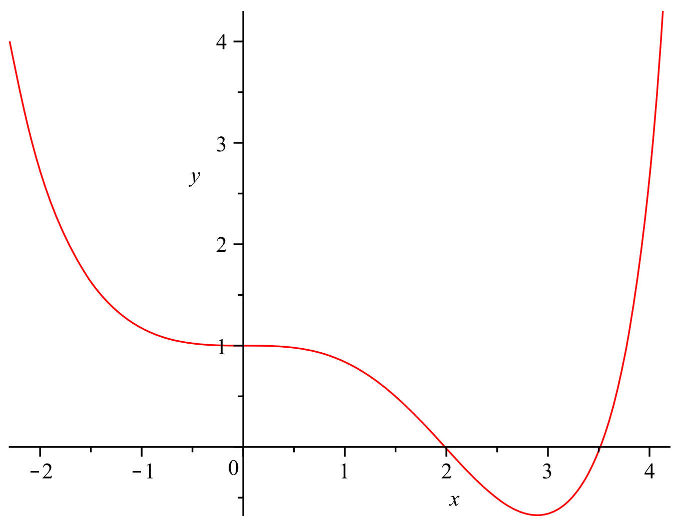


Рис. 1

Тому краще побудувати графік, знайшовши спочатку наближений розв'язок заданої задачі Коші числовими методами (для цього використовуємо опцію `type=numeric` команди `dsolve`. Для побудови самого графіка призначена команда `odeplot` пакета `plots` (с. 344):

```
> F:=dsolve({(D@@2)(y)(x)+x*y(x)=0,y(0)=1,D(y)(0)=0},
```

```
  y(x),type=numeric);
```

$$F := \text{proc}(x\_rkf45) \quad \ldots \quad \text{end proc}$$

```
> plots[odeplot](F,x=-2.3..15,numpoints=200,scaling=
  constrained);
```

Результат виконання команди наведено на рис. 2.

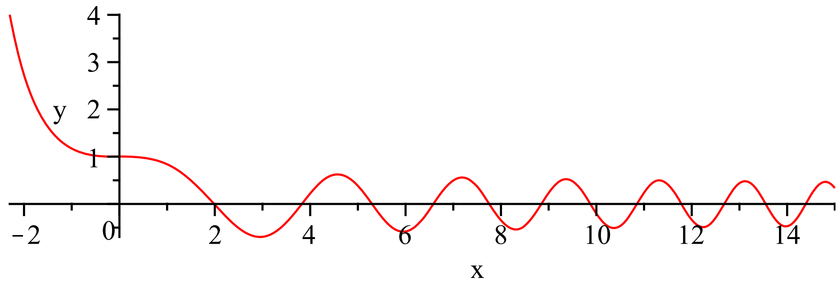


Рис. 2

Приклад 27. Розв'язати крайову задачу $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(a) = y_0$, $a \neq 0$ (приклад 1 лекції 17, с. 210):

```
> dsolve({(D@@2)(y)(x)+y(x)=0,y(0)=0,y(a)=y0},y(x));
```

$$y(x) = \frac{y0 \sin(x)}{\sin(a)}.$$

Випадок, коли $\sin a = 0$, залишився поза увагою пакета Maple.

Приклад 28. Знайти розв'язок крайової задачі

$$x^2 y'' + 3xy' - 8y = 0, \quad y(1) = 1, \quad \lim_{x \to \infty} y'(x) = 0$$

(приклад 2 лекції 17, с. 211):

```
> dsolve({x^2*(D@@2)(y)(x)+3*x*D(y)(x)-8*y(x)=0,y(1)=1,
  D(y)(infinity)=0},y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{x^4}.$$

Інші приклади застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь можна знайти в [11, 16, 17, 19]. Пропонуємо читачам самостійно зінтегрувати диференціальні рівняння, наведені після кожної лекції розділу 2.

Розділ 3
СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Лекція 18. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)

План

1. Основні означення й поняття.

2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків.

3. Зведення диференціального рівняння n-го порядку до нормальної системи й обернена задача.

4. Лінійні однорідні системи.

1. Основні означення й поняття. Багато прикладних задач приводять до необхідності визначити відразу декілька невідомих функцій з певної кількості диференціальних рівнянь, тобто знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь.

Сукупність співвідношень вигляду

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n,\, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) = 0, \\ F_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n,\, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) = 0, \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ F_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n,\, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) = 0, \end{cases} \tag{18.1}$$

де $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — шукані функції незалежної змінної x, називають ***системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку***.

Якщо (18.1) можна розв'язати відносно похідних усіх функцій, то одержимо систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{18.2}$$

яку називають ***нормальною***.

Розв'язком системи (18.2) на деякому інтервалі (a, b) називають упорядковану сукупність функцій

$$y_1 = y_1(x), \ \ y_2 = y_2(x), \ \ldots, \ y_n = y_n(x), \qquad (18.3)$$

визначених і неперервно диференційовних на цьому інтервалі, якщо вона кожне рівняння системи (18.2) перетворює у тотожність, яка справджується для всіх значень $x \in (a, b)$. Криву в $(n+1)$-вимірному просторі $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, яка відповідає розв'язку (18.3), називають ***інтегральною кривою*** системи (18.2).

Задача Коші для системи (18.2) формулюється так: серед усіх розв'язків цієї системи знайти розв'язок (18.3), який задовольняє умови

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_{n0}, \qquad (18.4)$$

де $x = x_0$ — деяка точка з інтервалу (a, b), а y_{10}, y_{20}, $\ldots$, y_{n0} — довільні задані дійсні числа (їх називають ***початковими даними розв'язку***). Сукупність чисел $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ з умов (18.4) називають ***початковими даними системи*** (18.2), а самі умови (18.4) — ***початковими умовами*** системи (18.2).

З геометричної точки зору задача Коші полягає у відшуканні серед усіх інтегральних кривих системи (18.2) такої кривої, яка проходить через задану точку $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ простору $\mathbf{R}^{n+1}$.

Виявляється, що для існування неперервно диференційовного розв'язку задачі Коші (18.2), (18.4) досить припустити, щоб *праві частини системи* (18.2) *були неперервними в деякому околі початкових даних* (***теорема Пеано***). Наступна теорема гарантує існування єдиного розв'язку задачі Коші (18.2), (18.4) (доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [10, с. 93–99]).

Теорема (Коші). *Нехай праві частини системи* (18.2) *визначені в* $(n+1)$*-вимірному паралелепіпеді*

$$G = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) : |x - x_0| \leqslant a, \ |y_j - y_{j0}| \leqslant b, \ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

і задовольняють у ньому такі умови:

1) *функції* $f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *неперервні*, *а*, *отже*, *й обмежені*, *тобто* $|f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant M,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ M > 0$;

2) *частинні похідні* $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, *існують та обмежені*.

Тоді задача Коші (18.2), (18.4) *має єдиний розв'язок принаймні на відрізку* $|x - x_0| \leqslant h$, *де* $h = \min(a, b/M)$.

Нехай G — область простору зміни змінних $x, y_1, \ldots, y_n$, у кожній точці якої задача Коші (18.2), (18.4) має єдиний розв'язок. Сукупність функцій

$$y_j = \varphi_j(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{18.5}$$

які визначені в деякій області зміни x, C_1, C_2, $\ldots$, C_n і мають неперервні частинні похідні за змінною x, називають ***загальним розв'язком*** системи (18.2) в області G, якщо:

1) систему (18.5) можна розв'язати в області G відносно довільних сталих C_1, C_2, $\ldots$, C_n, тобто

$$C_j = \psi_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{18.6}$$

2) для всіх значень $(x, y_1, \ldots, y_n) \in G$ формули (18.6) визначають такі значення C_1, C_2, $\ldots$, C_n, для яких сукупність функцій (18.5) є розв'язком системи (18.2).

Розв'язок системи (18.2), в кожній точці якого виконується умова єдиності розв'язку задачі Коші, називають ***частинним***. З означення загального розв'язку випливає, що всі розв'язки, які утворюються з нього для конкретних значень сталих C_1, C_2, $\ldots$, C_n, є частинними. Розв'язок системи, у кожній точці якого порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші для цієї системи, називають ***особливим***.

Неперервно диференційовну функцію $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, тотожно відмінну від сталої, називають ***інтегралом*** системи (18.2), якщо вона тотожно перетворюється у сталу вздовж довільного частинного розв'язку цієї системи. Тоді $d\psi = 0$ внаслідок системи (18.2), тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}dy_n =$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y_1} f_1\,dx + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n} f_n\,dx \equiv 0.$$

Рівність $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C$, де C — довільна стала, називають ***першим інтегралом*** системи (18.2). Наприклад, кожна з рівностей (18.6) є першим інтегралом системи (18.2).

Сукупність n перших інтегралів системи (18.2)

$$\psi_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

називають ***загальним інтегралом*** цієї системи, якщо інтеграли ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_n є ***незалежними***, тобто між ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_n не існує співвідношення вигляду $F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0$ для жодної функції F. З математичного аналізу відомо, що для незалежності в області G функцій ψ_1, ψ_2,$\ldots$, ψ_n, які мають частинні похідні $\frac{\partial\psi_j}{\partial y_k}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, необхідно і достатньо, щоб в області G визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Можна показати, що нормальна система n рівнянь не може мати більше, ніж n незалежних інтегралів системи (18.2).

Будь-які n перших інтегралів називають ***незалежними***, якщо відповідні їм інтеграли незалежні. Отже, задача побудови загального інтеграла системи буде розв'язаною, якщо знайдено n незалежних перших інтегралів.

Загального способу знаходження перших інтегралів не існує. Однак у багатьох випадках удається знайти перший інтеграл шляхом деяких перетворень системи, в результаті чого отримується диференціальне рівняння, яке легко інтегрується. Кожне таке рівняння називають ***інтегровною комбінацією***. Кожна інтегровна комбінація породжує перший інтеграл. Однак серед них можуть виявитись і залежні інтеграли, а тому, одержуючи новий перший інтеграл, потрібно перевірити, чи буде він незалежним з раніше отриманими.

Приклад 1. *Зінтегрувати систему*[8)]

$$\begin{cases} y' = z(y-z)^{-2}, \\ z' = y(y-z)^{-2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Поділивши перше рівняння системи на друге, одержуємо інтегровну комбінацію $\frac{dy}{dz} = \frac{z}{y}$, звідки, відокремлюючи змінні, знаходимо:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{z}{y} \quad \Rightarrow \quad ydy - zdz = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y^2 - z^2 = C_1. \tag{18.7}$$

Віднімаючи від другого рівняння заданої системи перше, одержимо ще одну інтегровну комбінацію $\frac{d(z-y)}{dx} = \frac{-1}{z-y}$, звідки

$$(z-y)^2 = -2x + C_2. \tag{18.8}$$

Кожне із співвідношень (18.7), (18.8) є першим інтегралом, а оскільки вони є незалежними (у цьому пропонуємо переконатися самостійно), то їхня сукупність є загальним інтегралом системи.
Відповідь: $y^2 - z^2 = C_1$, $(z-y)^2 = -2x + C_2$.

2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків. Нормальній системі (18.2) та її розв'язкам можна надати простого механічного змісту. Розглянемо систему

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{18.9}$$

де t — час, x_1, x_2, …, x_n — координати точки n-вимірного простору. Цей простір називають ***фазовим***. Для $n = 1$ фазовим простором є вісь t (***фазова пряма***), для $n = 2$ — площина (t, x), яку називають ***фазовою***.

[8)] Якщо у системі дві невідомі функції, то позначатимемо їх через y, z.

Кожний розв'язок (інтегральна крива)

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t) \tag{18.10}$$

системи (18.9) виражає ***закон руху*** точки у фазовому просторі. Тому розв'язок (18.10) називатимемо ***рухом*** у n-вимірному просторі $\mathbf{R}^n$, визначеним системою (18.9), а криву, яку описує рухома точка у фазовому просторі, — ***траєкторією руху*** або ***фазовою траєкторією***.

Ліві частини системи (18.9) є складовими (за осями координат) швидкості руху точки, тому кажуть, що ця система задає поле швидкостей рухів, тобто точка може проходити у момент часу t через положення $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тільки із заданою швидкістю.

Якщо швидкість, з якою точка проходить через положення $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не залежить від моменту часу проходження, тобто система (18.9) має вигляд

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \quad\dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \tag{18.11}$$

то її називають ***автономною*** (***стаціонарною***), а рух, що описується такою системою, — ***усталеним***.

Якщо у деякій точці $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ праві частини системи (18.11) дорівнюють нулю для всіх значень часу t, тобто $f_j(t, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \equiv 0,\ j = 1, 2, \dots, n$, то ця система має розв'язок

$$x_1 \equiv x_{10},\ \ x_2 \equiv x_{20},\ \dots,\ x_n \equiv x_{n0}, \tag{18.12}$$

бо, підставляючи його в (18.9), одержимо тотожності. Рух (18.12) називають ***станом спокою***. Траєкторією цього руху є точка $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, яку називатимемо ***точкою спокою***.

Задача Коші для системи (18.9) полягає у знаходженні руху (18.10), який задовольняє початкові умови

$$x_1(t_0) = x_{10},\ \ x_2(t_0) = x_{20},\ \dots,\ x_n(t_0) = x_{n0},$$

де t_0, x_{10}, x_{20}, $\ldots$, x_{n0} — задані числа (***початкові дані***), тобто шукають такий рух (18.10), при якому рухома точка знаходиться у заданій точці $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ фазового простору в заданий момент часу t. При цьому $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ називають ***початковою точкою руху*** (18.10). Зауважимо, що якщо початковою точкою руху (18.10) є точка спокою $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, то одним з розв'язків задачі Коші буде стан спокою (18.12).

Системи диференціальних рівнянь є моделями різноманітних прикладних задач. Розглянемо одну з них.

Задача 1. *Визначити траєкторію руху гарматного снаряда, який вилітає з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Опір повітря пропорційний швидкості руху.*
Розв'язання. Складемо диференціальну модель цієї задачі. За початок координат візьмемо точку вильоту снаряда (рис. 18.1). На снаряд діє сила ваги $P = mg$, складова якої на осі x дорівнює нулю, бо сила перпендикулярна до цієї осі.

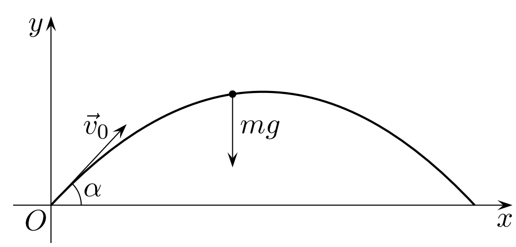


Рис. 18.1

Тоді диференціальними рівняннями руху вздовж координатних осей є

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - mk\frac{dy}{dt}.$$

Якщо знехтувати опором повітря, то ці рівняння після скорочення на m матимуть вигляд:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \tag{18.13}$$

Отже, задача звелася до інтегрування системи двох диференціальних рівнянь. Інтегруючи кожне рівняння системи (18.13), одержуємо:

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt} = C_1, \quad v_y \equiv \frac{dy}{dt} = -gt + C_2, \tag{18.14}$$

де v_x, v_y — складові швидкості $v = v(x, y)$ на осях. У початковий момент часу $t_0 = 0$ компонентами швидкості є $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v_y = v_0 \sin\alpha$ і, отже, $C_1 = v_0 \cos\alpha$, $C_2 = v_0 \sin\alpha$. Враховуючи ці формули, з (18.14) знаходимо

$$x = v_0 t \cos\alpha + C_3, \quad y = -gt^2/2 + v_0 t \sin\alpha + C_4,$$

але оскільки $x(0) = y(0) = 0$, то $C_3 = C_4 = 0$. Остаточно маємо:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = -gt^2/2 + v_0 t \sin\alpha.$$

Виключаючи звідси t, одержуємо траєкторію руху — параболу

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha.$$

Дальність x_1 польоту снаряда знайдемо з рівняння $y = 0$:

$$x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальною дальність польоту буде тоді, коли $\sin 2\alpha = 1$, звідки знаходимо відповідний кут вильоту $\alpha = \pi/4$. ■

3. Зведення диференціального рівняння n-го порядку до нормальної системи й обернена задача. Диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{18.15}$$

завжди можна звести до нормальної системи n диференціальних рівнянь. Для цього позначимо

$$y = y_1, \ \ y' = y_2, \ \ y'' = y_3, \ \ \ldots, \ \ y^{(n-1)} = y_n.$$

Тоді

$$y_1' = y' = y_2, \quad y_2' = y'' = y_3, \ \ldots, \ y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n,$$
$$y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

тобто функції y_1, y_2, ..., y_n задовольняють нормальну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \quad \ldots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{18.16}$$

Зведення одного диференціального рівняння n-го порядку (18.15), розв'язаного відносно старшої похідної, до рівносильної нормальної системи (18.16) у багатьох випадках спрощує задачу знаходження загального розв'язку або розв'язку задачі Коші.

Розглянемо обернену задачу, тобто задачу про зведення нормальної системи (18.2), в якій f_j — $(n-1)$ разів диференційовні функції, до одного диференціального рівняння. Для цього послідовно здиференціюємо $(n-1)$ разів одне з рівнянь системи (18.2) (наприклад, перше), замінюючи після кожного диференціювання похідні $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ виразами для них із системи (18.2), і виключимо з першого рівняння цієї системи і отриманих $(n-1)$-го рівняння функції $y_2, y_3, \ldots, y_n$. При цьому для знаходження функції y_1 одержимо рівняння n-го порядку вигляду

$$y_1^{(n)} = f\Big(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\Big),$$

і якщо вдасться знайти його загальний розв'язок, то функції $y_2, y_3, \ldots, y_n$ знайдуться без квадратур.

Метод розв'язування нормальної системи рівнянь зведенням її до одного диференціального рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної, називають ***методом виключення***.

У деяких випадках зведення нормальної системи до одного рівняння можна здійснювати з відхиленням від описаної загальної схеми.

Приклад 2. *Зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = 3z - y. \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння виразимо z через y і підставимо у друге рівняння системи:

$$z = y' - y \quad \Rightarrow \quad \big(y' - y\big)' = 3\,\big(y' - y\big) - y \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Тепер, враховуючи, що $z = y' - y$, знаходимо функцію z:

$$z = \big(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}\big)' - \big(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}\big) =$$
$$= (C_1 + C_2) e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

***Відповідь*:** $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x},\ z = (C_1 + C_2) e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Приклад 3. *Зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = -y_2 - 2y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

Розв'язання. Здиференціюємо перше рівняння системи і підставимо замість y_1', y_2', y_3' відповідні вирази із заданої системи:

$$y_1'' = y_1' + 2y_2' + 2y_3' = y_1 + 2y_2 + 2y_3 +$$
$$+ 2(-y_2 - 2y_3) + 2(y_2 + y_3) = y_1 + 2y_2.$$

Диференціюючи отримане співвідношення і знову використовуючи рівняння системи, одержуємо співвідношення

$$y_1''' = y_1' + 2y_2' = y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2(-y_2 - 2y_3) = y_1 - 2y_3.$$

Тепер із системи

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2, \\ y_1''' = y_1 - 2y_3 \end{cases}$$

виключимо y_2 і y_3. З другого і третього рівнянь знаходимо $y_2 = (y_1'' - y_1)/2$, $y_3 = (y_1 - y_1''')/2$. Підставляючи обидва вирази у перше рівняння системи, одержуємо диференціальне рівняння

$$y_1''' - y_1'' + y_1' - y_1 = 0,$$

загальним розв'язком якого є $y_1 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. Тоді $y_2 = -C_2 \cos x - C_3 \sin x$, $y_3 = \frac{1}{2}\big(C_2(\cos x - \sin x) + C_3(\cos x + \sin x)\big)$.

***Відповідь*:** $y_1 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, $y_2 = -C_2 \cos x - C_3 \sin x$, $y_3 = \frac{1}{2}\big(C_2(\cos x - \sin x) + C_3(\cos x + \sin x)\big)$.

Потрібно мати на увазі, що при розв'язуванні систем (як і рівнянь) відповідь може бути записана у різній формі, причому її можна звести від одного до іншого вигляду перепозначенням сталих.

4. Лінійні однорідні системи. ***Лінійною*** системою диференціальних рівнянь першого порядку називають систему

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{18.17}$$

яку скорочено можна записати у вигляді

$$y_k' = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j + f_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Уважатимемо, що всі функції $p_{kj}(x)$ (***коефіцієнти системи***), а також $f_k(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b). Тоді згідно з теоремою Коші (п. 1) система (18.17) має єдиний розв'язок (18.3), який задовольняє початкові умови (18.4). Цей розв'язок буде визначений на деякому відрізку $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. Особливих розв'язків система (18.17) не має.

Якщо на інтервалі (a, b) всі $f_k(x) \equiv 0$, то систему (18.17) називають ***лінійною однорідною***. Вона має вигляд

$$y'_k = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.18}$$

Якщо у системі (18.17) не всі функції $f_k(x)$ тотожно дорівнюють нулю, то її називають ***лінійною неоднорідною***.

Очевидно, лінійна однорідна система має нульовий розв'язок $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $\ldots$, $y_n = 0$, який називають ***тривіальним***.

Розв'язки лінійної однорідної системи (18.18) мають деякі характерні властивості, які аналогічні до відповідних властивостей розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку (лекція 12, п. 2).

Властивість 1. *Якщо* $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, $\ldots$, $y_n = \varphi_n(x)$ — *розв'язок однорідної системи* (18.18), *то*

$$y_1 = C\varphi_1(x), \quad y_2 = C\varphi_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = C\varphi_n(x),$$

де C — *довільна стала, також є розв'язком цієї системи.*

Властивість 2. *Якщо задано* m *розв'язків системи* (18.18):

$$\begin{array}{rl} \textit{1-й розв'язок}: & y_{11},\, y_{12}, \ldots, y_{1n}, \\ \textit{2-й розв'язок}: & y_{21},\, y_{22}, \ldots, y_{2n}, \\ \cdots & \cdots\ \cdots \\ m\textit{-й розв'язок}: & y_{m1},\, y_{m2}, \ldots, y_{mn}, \end{array}$$

то їхня лінійна комбінація з довільними сталими C_1, C_2, $\ldots$, C_m

$$\begin{gathered} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \ldots + C_m y_{m1}, \\ y_2 = C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \ldots + C_m y_{m2}, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ y_n = C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \ldots + C_m y_{mn}, \end{gathered}$$

або, скорочено,

$$y_k = \sum_{i=1}^{m} C_i y_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{18.19}$$

також є розв'язком системи (18.18).

Доведення. Підставляючи (18.19) в (18.18), одержуємо:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_{ik} \right)' = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) \left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_{ij} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} C_i y'_{ik} = \sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_{ij}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Доведення властивості випливає з тотожностей

$$y'_{ik} \equiv \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_{ij}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \;\; i = 1, 2, \ldots, m,$$

які одержуємо, підставляючи i-й розв'язок у систему (18.18). ▶

Рекомендована література: [4, с. 151–162], [6, с. 18–22, 65–70, 91–92], [8, с. 322–340], [10, с. 93–99, 164–179].

Питання до лекції 18

1. Який загальний вигляд має система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку? Що називають розв'язком цієї системи на деякому інтервалі?

2. Який вигляд має нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку? Як формулюється задача Коші для такої системи? Який її геометричний та механічний зміст? Яку нормальну систему називають автономною?

3. Який механічний зміст має нормальна система та її розв'язок? Що таке фазовий простір, фазова площина, фазова пряма? Як пов'язані між собою рух, який описується системою диференціальних рівнянь, та його траєкторія? Який рух називають станом спокою, якою є його траєкторія?

4. Як формулюється теорема Коші про достатні умови існування та єдиності неперервно диференційовного розв'язку задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь?

5. Що називають загальним розв'язком (інтегралом) нормальної системи диференціальних рівнянь у деякій області існування та єдиності розв'язків задачі Коші? Що називають частинним та особливим розв'язками нормальної системи диференціальних рівнянь? Як вони пов'язані з загальним розв'язком системи?

6. Що таке інтегровні комбінації і як вони використовуються для знаходження загального інтеграла?

7. Як диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, можна звести до рівносильної йому нормальної системи диференціальних рівнянь? У чому полягає метод виключення розв'язування нормальної системи?

8. Який вигляд має лінійна система диференціальних рівнянь? Чим відрізняється лінійна неоднорідна система від однорідної? Які властивості мають розв'язки лінійної однорідної системи?

Вправи до лекції 18

1. Зінтегруйте системи, використовуючи інтегровні комбінації:

$$\text{а)} \begin{cases} y' = 2(y^2 + z^2)x, \\ z' = 4yzx; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} y' = \sin y \cos z, \\ z' = \cos y \sin z. \end{cases}$$

2. Зінтегруйте методом виключення системи:

$$\text{а)} \begin{cases} y' = y + 2z, \\ z' = -2y + 6z; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} y' = y - 2z + xe^x, \\ z' = 5y - z - (x+1)e^x; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + 3y_3, \\ y_2' = 3y_1 - y_2 + 2y_3, \\ y_3' = -2y_1 + 2y_2 - 3y_3. \end{cases}$$

Лекція 19. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь

План

1. Лінійно залежні та лінійно незалежні сукупності функцій.
2. Формула Остроградського–Якобі.
3. Основна теорема.
4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера.

1. Лінійно залежні та лінійно незалежні сукупності функцій. Нехай задано m сукупностей функцій

$$\left.\begin{array}{c} y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\ \ldots,\ y_{2n}, \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots \\ y_{m1},\ y_{m2},\ \ldots,\ y_{mn}, \end{array}\right\} \tag{19.1}$$

у кожній з яких n функцій, визначених і неперервних на деякому інтервалі (a,b). Сукупності функцій (19.1) називають ***лінійно незалежними*** на інтервалі (a,b), якщо тотожності

$$\begin{gathered} \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{21} + \ldots + \alpha_m y_{m1} \equiv 0, \\ \alpha_1 y_{12} + \alpha_2 y_{22} + \ldots + \alpha_m y_{m2} \equiv 0, \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots \\ \alpha_1 y_{1n} + \alpha_2 y_{2n} + \ldots + \alpha_m y_{mn} \equiv 0, \end{gathered}$$

де $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$ — сталі, виконуються тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. В іншому випадку сукупності функцій (19.1) називають ***лінійно залежними*** на інтервалі (a,b).

Дві сукупності функцій $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$ і $y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}$ є лінійно незалежними на (a,b), якщо не існує співвідношення

$$\frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \ldots = \frac{y_{2n}}{y_{1n}} = k \neq 0, \qquad a < x < b.$$

Наприклад, сукупності функцій $y_{11} = e^{4x}$, $y_{12} = 2e^{4x}$, $y_{13} = -e^{4x}$ і $y_{21} = e^{4x}$, $y_{22} = 3e^{4x}$, $y_{23} = 4e^{4x}$ є лінійно незалежними на $(-\infty, +\infty)$, а сукупності функцій $y_{11} = 2e^{4x}$, $y_{12} = e^{4x}$, $y_{13} = e^{4x}$ і $y_{21} = 6e^{4x}$, $y_{22} = 3e^{4x}$, $y_{23} = 3e^{4x}$ — лінійно залежними на $(-\infty, +\infty)$.

Установимо необхідну умову лінійної залежності довільних n сукупностей функцій. Отже, нехай маємо n сукупностей функцій

$$\left.\begin{array}{c} y_{11},\ y_{12},\ \dots\ ,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\ \dots\ ,\ y_{2n}, \\ \dots\quad\dots\quad\dots \\ y_{n1},\ y_{n2},\ \dots\ ,\ y_{nn}. \end{array}\right\} \tag{19.2}$$

Визначником Вронського або ***вронскіаном*** сукупностей функцій (19.2) називають визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}. \tag{19.3}$$

Теорема 1 (необхідна умова лінійної залежності n сукупностей функцій). *Якщо n сукупностей функцій* (19.2) *лінійно залежні на інтервалі* (a, b), *то* $W(x) \equiv 0$ *на цьому інтервалі.*

Доведення. Оскільки n сукупностей функцій (19.2) лінійно залежні, то, за означенням,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad a < x < b, \tag{19.4}$$

причому не всі α_i дорівнюють нулю. Розглядаючи (19.4) як однорідну лінійну систему алгебричних рівнянь відносно α_1, α_2, …, α_n, бачимо, що вона має ненульовий розв'язок, а тому визначник системи дорівнює нулю. Цим визначником є вронскіан, отже, $W(x) \equiv 0$ в усіх точках інтервалу (a, b). ►

Теорему 1 можна сформулювати й інакше: *якщо вронскіан n сукупностей функцій* (19.2) *на деякому інтервалі* (a, b) *відмінний від нуля, то ці сукупності функцій лінійно незалежні на цьому інтервалі.*

Нехай тепер кожна з сукупностей функцій (19.2) є розв'язком лінійної однорідної системи

$$y_k' = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{19.5}$$

коефіцієнти $p_{kj}(x)$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, якої неперервні на деякому інтервалі (a, b).

Теорема 2 (необхідна умова лінійної незалежності n розв'язків лінійної однорідної системи n рівнянь). *Якщо n розв'язків* (19.2) *системи* (19.5) *лінійно незалежні на інтервалі (a, b), то їхній вронскіан не перетворюється в нуль у жодній точці цього інтервалу.*

Доведення теореми проведемо від супротивного. Нехай для деякої точки $x_0 \in (a, b)$ маємо $W(x_0) = 0$. Складемо систему n алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.6}$$

Оскільки визначник однорідної системи (19.6) дорівнює нулю (ним є $W(x_0)$), то вона має ненульовий розв'язок $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}$, …, $C_n = C_n^{(0)}$. Побудуємо розв'язок

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.7}$$

Оскільки $C_i^{(0)}$ задовольняють систему (19.6), то розв'язок (19.7) має нульові початкові значення у точці $x = x_0$, тобто $y_1(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0$, …, $y_n(x_0) = 0$. Але ці самі початкові умови задовольняє також тривіальний розв'язок, тому згідно з теоремою Коші (лекція 18, п. 1) ці розв'язки збігаються, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

де не всі $C_i^{(0)}$ дорівнюють нулю. Отримали, що розв'язки (19.2) лінійно залежні на (a, b), що суперечить умові теореми. ▶

З теорем 1 і 2 випливає: *для того, щоб n розв'язків системи* (19.5) *були лінійно незалежними на інтервалі* (a, b), ***необхідно і достатньо***, *щоб їхній вронскіан не перетворювався в нуль у жодній точці цього інтервалу.*

2. Формула Остроградського–Якобі. Ця формула дозволяє з точністю до сталого множника виразити вронскіан розв'язків лінійної однорідної системи (19.5) через діагональні коефіцієнти цієї системи, а саме:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} \left(p_{11}(x)+p_{22}(x)+\ldots+p_{nn}(x)\right) dx}, \tag{19.8}$$

де $x = x_0$ — довільна точка інтервалу (a, b). Формулу (19.8) називають ***формулою Остроградського–Якобі***. Для доведення (19.8) знайдемо похідну від вронскіана (19.3), диференціюючи його за стовпцями. У цьому випадку похідна від визначника n-го порядку дорівнює сумі n визначників, які отримують з нього почерговою заміною елементів першого, другого, ..., n-го стовпця їхніми похідними, тобто

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,k-1} & y'_{1k} & y_{1,k+1} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2,k-1} & y'_{2k} & y_{2,k+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,k-1} & y'_{nk} & y_{n,k+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замінимо похідні y'_{1k}, y'_{2k}, ..., y'_{nk} їхніми виразами з (19.5). Тоді

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,k-1} & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{kj} y_{1j} & y_{1,k+1} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2,k-1} & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{kj} y_{2j} & y_{2,k+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,k-1} & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{kj} y_{nj} & y_{n,k+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо розкласти кожен з визначників справа на суму n визначників, то всі вони дорівнюватимуть нулю (кожен з них матиме два пропорційні стовпці), крім визначника, який відповідає $j = k$. У цьому випадку k-й визначник справа дорівнює $p_{kk}(x)W(x)$, а тому

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} p_{kk}(x)W(x),$$

звідки, інтегруючи, отримуємо формулу (19.8) (порівняйте з виведенням формули Остроградського–Ліувілля в п. 5 лекції 12).

З формули Остроградського–Якобі, зокрема, випливають такі властивості:

1. *Якщо* $W(x) = 0$ *хоч у одній точці інтервалу* (a, b), *то* $W(x) = 0$ *в усіх точках цього інтервалу.*

2. *Якщо* $W(x) \neq 0$ *у деякій точці інтервалу* (a, b), *то* $W(x) \neq 0$ *в усіх точках цього інтервалу.*

3. Основна теорема. Сукупність n розв'язків лінійної однорідної системи (19.5), визначених і лінійно незалежних на інтервалі (a, b), називають ***фундаментальною системою розв'язків*** на цьому інтервалі.

З п. 1, 2 цієї лекції випливає, що *сукупність n розв'язків лінійної однорідної системи* (19.5) *буде фундаментальною системою розв'язків на інтервалі* (a, b) *тоді і тільки тоді, коли вронскіан цих розв'язків відмінний від нуля хоч в одній точці інтервалу* (a, b).

З наступного твердження випливає, що знаття фундаментальної системи розв'язків лінійної однорідної системи (19.5) дає можливість побудувати загальний розв'язок цієї системи.

Теорема 3. *Якщо сукупності функцій* (19.2) *утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійної однорідної си-*

стеми (19.5) *на інтервалі* (a, b), *то формули*

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \ldots + C_n y_{n1}, \\ y_2 &= C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \ldots + C_n y_{n2}, \\ &\ldots \ \ldots \ \ldots \\ y_n &= C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \ldots + C_n y_{nn}, \end{aligned}\right\} \tag{19.9}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — *довільні сталі, визначають загальний розв'язок цієї системи в усій її області задання.*

Доведення. Систему (19.9) можна розв'язати відносно сталих C_1, C_2, $\ldots$, C_n, бо вона є лінійною, причому її визначник відмінний від нуля (ним є $W(x)$). Крім того, сукупність функцій (19.9) є розв'язком системи (19.5) для всіх значень довільних сталих C_1, C_2, $\ldots$, C_n (властивість 2 з п. 4 лекції 18). Тому згідно з означенням загального розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь сукупність функцій (19.9) є загальним розв'язком системи (19.5). ▶

4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера. Розглянемо лінійну однорідну систему

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n, \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n, \end{cases} \tag{19.10}$$

де a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, — дійсні сталі, і покажемо, що її завжди можна зінтегрувати у скінченному вигляді (тобто через елементарні функції або у квадратурах).

Згідно з теоремою 3 для побудови загального розв'язку системи (19.10) досить знайти хоча б одну її фундаментальну систему розв'язків. Частинний розв'язок системи (19.10) шукаємо у вигляді

$$y_1 = \gamma_1 e^{kx}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{kx}, \quad \ldots, \quad y_n = \gamma_n e^{kx}, \tag{19.11}$$

де γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_n і k — деякі сталі, причому γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_n не дорівнюють одночасно нулю (інакше матимемо очевидний тривіальний розв'язок, який не може належати фундаментальній системі розв'язків). Якщо підставити (19.11) в систему (19.10), скоротити e^{kx} і перенести усі доданки у ліву частину, то одержуємо однорідну систему алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-k)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-k)\gamma_n = 0. \end{cases} \tag{19.12}$$

Ненульовий розв'язок системи (19.12) існує лише тоді, коли її визначник дорівнює нулю. Позначивши його через $\Delta(k)$, маємо:

$$\Delta(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{19.13}$$

Рівняння (19.13) називають ***характеристичним рівнянням*** системи (19.10), його корені — ***характеристичними числами***, а $\Delta(k)$ — ***характеристичним визначником***.

Нехай усі характеристичні числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ прості. Тоді, як відомо з алгебри, $\Delta(k_j) = 0$, $\Delta'(k_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Покажемо, що ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}-k_j & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k_j & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k_j \end{pmatrix},$$

складеної з коефіцієнтів системи, яку одержуємо з (19.12) після заміни у ній k на k_j, дорівнює $n-1$. Для цього знайдемо $\Delta'(k)$, використовуючи правило диференціювання визначника, яке застосовувалось для доведення формули Остроградського–Якобі (с. 245):

$$\Delta'(k) = \begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} +$$

$$
+\begin{vmatrix} a_{11}-k & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & -1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} + \ldots
$$

$$
\ldots + \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & -1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= -\Delta_{11}(k) - \Delta_{22}(k) - \ldots - \Delta_{nn}(k), \tag{19.14}
$$

де $\Delta_{jj}(k)$ — алгебричне доповнення елемента $a_{jj}-k$ визначника $\Delta(k)$. Оскільки $\Delta'(k_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то з (19.14) випливає, що хоча б один з визначників $\Delta_{jj}(k_i)$ (а це визначники $(n-1)$-го порядку) відмінний від нуля. Отже, ранг матриці A дорівнює $n-1$, а тому одне з рівнянь системи (19.12) є наслідком інших і ця система має ненульовий розв'язок, який визначається з точністю до довільного множника P_i:

$$
\gamma_{i1} = P_i m_{i1},\ \ \gamma_{i2} = P_i m_{i2},\ \ldots,\ \ \gamma_{in} = P_i m_{in}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.15}
$$

Якщо у формулах (19.15) зафіксувати множник P_i, то одержимо конкретний розв'язок системи (19.12).

Підставляючи у (19.11) замість k послідовно характеристичні числа k_1, k_2, …, k_n, а замість γ_1, γ_2, …, γ_n — відповідні їм розв'язки системи (19.12), визначені формулами (19.15) при фіксованих множниках P_i, одержуємо n розв'язків системи (19.10):

$$
\begin{cases} y_{11} = \gamma_{11}e^{k_1 x},\ \ y_{12} = \gamma_{12}e^{k_2 x},\ \ldots,\ \ y_{1n} = \gamma_{1n}e^{k_n x}, \\ y_{21} = \gamma_{21}e^{k_1 x},\ \ y_{22} = \gamma_{22}e^{k_2 x},\ \ldots,\ \ y_{2n} = \gamma_{2n}e^{k_n x}, \\ \qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_{n1} = \gamma_{n1}e^{k_1 x},\ \ y_{n2} = \gamma_{n2}e^{k_2 x},\ \ldots,\ \ y_{nn} = \gamma_{nn}e^{k_n x}. \end{cases} \tag{19.16}
$$

Легко показати, що ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$. Якщо при цьому всі числа k_1, k_2, …, k_n дійсні, то розв'язки (19.16) також будуть дійсними.

Таким чином, для простих дійсних характеристичних чисел система (19.10) має n дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків вигляду (19.16). Тому згідно з теоремою 3 формули

$$\begin{gathered} y_1 = C_1\gamma_{11}e^{k_1x} + C_2\gamma_{21}e^{k_2x} + \ \dots + C_n\gamma_{n1}e^{k_nx}, \\ y_2 = C_1\gamma_{12}e^{k_1x} + C_2\gamma_{22}e^{k_2x} + \ \dots + C_n\gamma_{n2}e^{k_nx}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n = C_1\gamma_{1n}e^{k_1x} + C_2\gamma_{2n}e^{k_2x} + \ \dots + C_n\gamma_{nn}e^{k_nx} \end{gathered}$$

визначають загальний розв'язок системи (19.10).

Припустимо, що характеристичні числа $k_1, k_2, \dots, k_n$ прості, але серед них є комплексні. Нехай $a + ib$ і $a - ib$ — пара комплексно-спряжених характеристичних чисел. Числу $a + ib$ згідно з (19.11) відповідає розв'язок

$$y_1 = \gamma_1 e^{(a+ib)x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{(a+ib)x}, \ \dots, \ y_n = \gamma_n e^{(a+ib)x},$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — комплексні числа. Покладаючи

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{21}, \quad \gamma_2 = \gamma_{12} + i\gamma_{22}, \ \dots, \ \gamma_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n},$$

одержуємо комплексний розв'язок

$$\begin{gathered} y_1 = (\gamma_{11} + i\gamma_{21})e^{(a+ib)x}, \ y_2 = (\gamma_{12} + i\gamma_{22})e^{(a+ib)x}, \ \dots, \\ y_n = (\gamma_{1n} + i\gamma_{2n})e^{(a+ib)x}. \end{gathered}$$

Відокремлюючи у цьому розв'язку дійсні та уявні частини, маємо два лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ дійсні розв'язки:

$$\begin{gathered} y_{11} = e^{ax}(\gamma_{11}\cos bx - \gamma_{21}\sin bx), \\ y_{12} = e^{ax}(\gamma_{12}\cos bx - \gamma_{22}\sin bx), \ \dots, \\ y_{1n} = e^{ax}(\gamma_{1n}\cos bx - \gamma_{2n}\sin bx) \end{gathered}$$

і

$$\begin{gathered} y_{21} = e^{ax}(\gamma_{11}\sin bx + \gamma_{21}\cos bx), \\ y_{22} = e^{ax}(\gamma_{12}\sin bx + \gamma_{22}\cos bx), \ \dots, \\ y_{2n} = e^{ax}(\gamma_{1n}\sin bx + \gamma_{2n}\cos bx). \end{gathered}$$

Очевидно, що спряжений корінь $a - ib$ не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Приклад 1. *Зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y' = 4y + 5z, \\ z' = 4y + 3z. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-k & 5 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 7k - 8 = 0,$$

знаходимо характеристичні числа $k_1 = -1$ і $k_2 = 8$.

Складемо систему для знаходження чисел γ_1 і γ_2, які відповідають числу k_1. Матрицю коефіцієнтів цієї системи отримуємо з матриці

$$\begin{pmatrix} 4-k & 5 \\ 4 & 3-k \end{pmatrix}$$

заміною k на k_1. Отже, шуканою системою є система

$$\begin{cases} 5\gamma_1 + 5\gamma_2 = 0, \\ 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що $\gamma_1 = -\gamma_2$. Нехай $\gamma_1 = 1$, тоді $\gamma_2 = -1$. Таким чином, характеристичному числу $k_1 = -1$ відповідає розв'язок $y_1 = e^{-x}$, $z_1 = -e^{-x}$.

Аналогічно, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} -4\gamma_1 + 5\gamma_2 = 0, \\ 4\gamma_1 - 5\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

яка відповідає $k_2 = 8$, знаходимо, що $4\gamma_1 = 5\gamma_2$. Якщо взяти $\gamma_1 = 5$, то $\gamma_2 = 4$, а тому числу k_2 відповідає розв'язок $y_2 = 5e^{8x}$, $z_2 = 4e^{8x}$.

Загальний розв'язок записуємо згідно з теоремою 3:

$$y = C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{8x}, \qquad z = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{8x}. \ \blacksquare$$

Приклад 2. *Зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 4k + 5 = 0$$

має комплексно-спряжені корені $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$. Розв'язок, який відповідає k_1, має вигляд $y = \gamma_1 e^{(2+i)x}$, $z = \gamma_2 e^{(2+i)x}$, де числа γ_1, γ_2 знайдемо із системи

$$\begin{cases} -i\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Покладаючи $\gamma_1 = 1$, знаходимо $\gamma_2 = -i$, а тому шуканим розв'язком є $y = e^{(2+i)x}$, $z = -i\, e^{(2+i)x}$. Відокремлюючи у цьому розв'язку дійсні та уявні частини, одержуємо два дійсні розв'язки: $y_1 = e^{2x} \cos x$, $z_1 = e^{2x} \sin x$ і $y_2 = e^{2x} \sin x$, $z_2 = -e^{2x} \cos x$. Ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків, а тому загальним розв'язком є

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad z = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x). \; \blacksquare$$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є кратні, то метод, викладений вище, застосовувати не можна. Однак і у цьому випадку вдається побудувати фундаментальну систему розв'язків через елементарні функції. Зауважимо перш за все, що якщо k_1 — просте характеристичне число, то, незалежно від того, чи будуть серед інших характеристичних чисел зустрічатися кратні чи ні, йому завжди відповідає один частинний розв'язок вигляду $y_1 = \gamma_1 e^{k_1 x}$, $y_2 = \gamma_2 e^{k_1 x}$, $\ldots$, $y_n = \gamma_n e^{k_1 x}$, де γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_n — деякі сталі, які визначаються з точністю до сталого множника.

Таким чином, потрібно знайти частинні розв'язки, які відповідають кратному характеристичному числу. При цьому виявляється, що так само, як і для лінійного однорідного рівняння n-го порядку, характеристичному числу кратності s відповідає s лінійно незалежних частинних розв'язків.

Теорема 4. *Якщо k_1 — характеристичне число кратності s, то йому відповідає розв'язок системи* (19.10)

$$y_1 = P_1(x)e^{k_1x}, \quad y_2 = P_2(x)e^{k_1x}, \; \ldots, \; y_n = P_n(x)e^{k_1x}, \qquad (19.17)$$

де $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ — багаточлени степеня не вищого, ніж $s-1$, які мають у сукупності s довільних коефіцієнтів.

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [3, с. 196–207].

На практиці розв'язок, що відповідає характеристичному числу k_1, потрібно шукати у вигляді (19.17), вважаючи $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ багаточленами $(s-1)$-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, і, підставляючи їх в (19.10), виразити всі коефіцієнти через s з них, які залишаються довільними. Покладаючи по черзі один з цих довільних коефіцієнтів рівним одиниці, а решта рівними нулю, побудуємо s лінійно незалежних розв'язків, які відповідають характеристичному числу k_1. Усі ці частинні розв'язки будуть утворені з добутків функції e^{k_1x} на багаточлени від x, степені яких не перевищують $s-1$. Якщо багаточлени $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ у формулі (19.17) вироджуються у сталі, то одержимо s лінійно незалежних частинних розв'язків такого ж вигляду, як і для випадку простого характеристичного числа.

Якщо k_1 — дійсне характеристичне число, то побудовані s лінійно незалежних розв'язків будуть дійсними.

Якщо система (19.10) має комплексне характеристичне число $a+bi$ кратності s, то вона має також спряжене характеристичне число $a-bi$ тієї ж кратності. Побудувавши s лінійно незалежних комплексних розв'язків, які відповідають числу $a+bi$, і відокремивши в них дійсні та уявні частини, одержимо $2s$ дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Приклад 3. *Зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y' = 6y + z, \\ z' = -16y - 2z. \end{cases}$$

Розв'язання. Переконуємось, що характеристичні числа є дійсні і кратні: $k_1 = k_2 = 2$. Згідно з теоремою 4 загальний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = (Ax + B)e^{2x}, \quad z = (Cx + D)e^{2x}.$$

Оскільки

$$y' = (2Ax + 2B + A)e^{2x}, \quad z' = (2Cx + 2D + C)e^{2x},$$

то, підставляючи їх у задану систему, для знаходження невизначених коефіцієнтів одержуємо систему:

$$\begin{cases} (2Ax + 2B + A)e^{2x} = 6(Ax + B)e^{2x} + (Cx + D)e^{2x}, \\ (2Cx + 2D + C)e^{2x} = -16(Ax + B)e^{2x} - 2(Cx + D)e^{2x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (4A + C)x - A + 4B + D = 0, \\ (16A + 4C)x + 16B + 4D + C = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 4A + C = 0, \\ -A + 4B + D = 0, \\ 16A + 4C = 0, \\ 16B + 4D + C = 0. \end{cases}$$

В одержаній системі є лише два лінійно незалежних рівняння, наприклад, перше і друге. Вважатимемо у них вільними невідомими, приміром, A, B і надамо їм довільних значень: $A = C_1$, $B = C_2$. Тоді $C = -4C_1$, $D = C_1 - 4C_2$, а загальним розв'язком є $y = (C_1x + C_2)e^{2x}$, $z = (-4C_1x + C_1 - 4C_2)e^{2x}$. ■

Приклад 4. *Зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 2y_1 + 2y_2 + y_3. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо характеристичні числа системи:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 2 \\ 2 & 1-k & 2 \\ 2 & 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 5, \; k_{2,3} = -1.$$

Числу $k_1 = 5$ відповідає система двох рівнянь (третє є наслідком двох перших):

$$\begin{cases} -4\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0, \\ 2\gamma_1 - 4\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Один з її розв'язків $\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 1,\ \gamma_3 = 1$. Тому $y_1^{(1)} = e^{5x}$, $y_2^{(1)} = e^{5x}$, $y_3^{(1)} = e^{5x}$ є розв'язком заданої системи.

Характеристичним числам $k_{2,3} = -1$ відповідає одне рівняння (друге і третє збігаються з ним): $2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0$. Виберемо два лінійно незалежні розв'язки цього рівняння, наприклад, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = -1$ і $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -1$, $\gamma_3 = 1$. Кожному з них відповідає розв'язок $y_1^{(2)} = e^{-x}$, $y_2^{(2)} = 0$, $y_3^{(2)} = -e^{-x}$ і $y_1^{(3)} = 0$, $y_2^{(3)} = -e^{-x}$, $y_3^{(3)} = e^{-x}$ відповідно.

Оскільки вронскіан знайдених трьох розв'язків відмінний від нуля ($W(x) = -3e^{3x}$), то вони утворюють фундаментальну систему розв'язків, а загальним розв'язком є

$$y_1 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}, \quad y_2 = C_1 e^{5x} - C_3 e^{-x},$$
$$y_3 = C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x}. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [3, с. 134–144, 191–209], [4, с. 165–174], [6, с. 91–102, 109–128], [7, с. 477–485, 494–502], [8, с. 341–356], [10, с. 198–205, 210–214, 222–227].

Питання до лекції 19

1. Які сукупності функцій називають лінійно незалежними (лінійно залежними) на деякому інтервалі? Наведіть приклади таких сукупностей функцій.
2. Що таке вронскіан розв'язків лінійної однорідної системи n рівнянь? Як з допомогою вронскіана визначити, чи є задані n сукупностей функцій лінійно незалежними?
3. Як формулюється необхідна умова лінійної незалежності n розв'язків лінійної однорідної системи n диференціальних рівнянь? Сформулюйте необхідну і достатню умову лінійної незалежності n розв'язків лінійної однорідної системи на інтервалі (a, b).

4. Який вигляд має формула Остроградського–Якобі? Які властивості випливають з цієї формули?

5. Що називають фундаментальною системою розв'язків лінійної однорідної системи на деякому інтервалі? Яка її роль у побудові загального розв'язку лінійної однорідної системи?

6. Який вигляд має лінійна однорідна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами? Що називають характеристичним визначником, характеристичним рівнянням, характеристичними числами такої системи?

7. У чому полягає метод Ейлера інтегрування лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами? Як залежить структура фундаментальної системи розв'язків такої системи від вигляду характеристичних чисел?

Вправи до лекції 19

1. Зінтегруйте системи методом Ейлера:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = 10y - 6z, \\ z' = 18y - 11z; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y' = -5y - 4z, \\ z' = 10y + 7z; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = -2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ y_3' = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3; \end{cases} \qquad \text{г) } \begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 3y_3, \\ y_2' = 2y_1 + 4y_2 + 6y_3, \\ y_3' = 3y_1 + 6y_2 + 9y_3. \end{cases}$$

2. Знайдіть розв'язки задач Коші (системи зінтегрувати методом Ейлера):

$$\text{а) } \begin{array}{l} \begin{cases} y' = -5y - z, \\ z' = y - 3z, \end{cases} \\ y(0) = 1,\ z(0) = -6; \end{array} \qquad \text{б) } \begin{array}{l} \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_3, \end{cases} \\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = y_3(0) = 1. \end{array}$$

Лекція 20. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь

План

1. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи.
2. Метод варіації довільних сталих.
3. Метод невизначених коефіцієнтів.
4. Метод Д'Аламбера.

1. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи. Розглянемо лінійну неоднорідну систему

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{20.1}$$

або, у скороченому записі,

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j + f_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20.2}$$

Припустимо, що нам відомий деякий частинний розв'язок цієї системи

$$y_1 = y_1^{(1)}, \ \ y_2 = y_2^{(1)}, \ \ \ldots, \ \ y_n = y_n^{(1)}$$

і, отже,

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} \equiv \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j^{(1)} + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20.3}$$

Уведемо нові невідомі функції $z_1 = z_1(x)$, $z_2 = z_2(x)$, $\ldots$, $z_n = z_n(x)$ за формулами

$$y_k = y_k^{(1)} + z_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20.4}$$

Підставляючи функції (20.4) в систему (20.1), одержуємо:

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} + \frac{dz_k}{dx} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) z_j + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \quad (20.5)$$

Враховуючи (20.3), з (20.5) для знаходження функцій z_1, z_2, ..., z_n отримуємо лінійну однорідну систему

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) z_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \quad (20.6)$$

Однорідну систему (20.6) називають ***відповідною неоднорідній системі*** (20.2).

Згідно з теоремою 3 (лекція 19) загальний розв'язок системи (20.6) визначається формулою

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (20.7)$$

де $z_{jk} = z_{jk}(x)$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, — деяка фундаментальна система розв'язків системи (20.6), а C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — довільні сталі.

Підставляючи (20.7) у (20.4), одержуємо формулу

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (20.8)$$

яка визначає загальний розв'язок системи (20.1) в усій області її задання.

Таким чином, *для знаходження загального розв'язку неоднорідної системи* (20.1) *достатньо знайти будь-який її частинний розв'язок і додати до нього загальний розв'язок відповідної однорідної системи* (20.6).

2. Метод варіації довільних сталих. Для інтегрування лінійної неоднорідної системи у випадку, коли вдається зінтегрувати відповідну однорідну систему, часто використовують ***метод варіації довільних сталих*** (***метод Лаґранжа***).

Розв'язок лінійної неоднорідної системи (20.1) шукаємо у вигляді

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{20.9}$$

де $z_{jk} = z_{jk}(x)$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, — деяка фундаментальна система розв'язків однорідної системи (20.6), а $C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — деякі неперервно диференційовні функції.

Виберемо у (20.9) функції $C_j(x)$ так, щоб ця формула визначала розв'язок системи (20.1). Підставляючи (20.9) в (20.1), одержуємо:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}' =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jl} + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}' =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_{jl} + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \left(z_{jk}' - \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_{jl} \right) =$$

$$= f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20.10}$$

Оскільки z_{jk} — фундаментальна система розв'язків однорідної системи (20.6), то вираз у дужках у формулі (20.10) дорівнює нулю, а тому для знаходження функцій $C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, маємо систему

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} = f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20.11}$$

Визначник системи (20.11) відмінний від нуля для всіх $x \in (a, b)$ (ним є вронскіан $W(x)$), а тому вона має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера:

$$C_j'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{W_{kj}(x)}{W(x)} f_k(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{20.12}$$

де $W_{kj}(x)$ — алгебричне доповнення елемента z_{kj} вронскіана $W(x)$. Інтегруючи (20.12), знаходимо:

$$C_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_{kj}(x)}{W(x)} f_k(x)\, dx + C_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

де C_j — довільні сталі, а x_0 — довільна точка з інтервалу (a, b).

Підставляючи знайдені вирази для $C_j(x)$ у формулу (20.9), одержуємо:

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} z_{jk} \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_{sj}(x)}{W(x)} f_s(x)\, dx + \sum_{j=1}^{n} C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20.13}$$

Якщо в (20.13) підставити $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, то маємо частинний розв'язок

$$y_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} z_{jk} \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_{sj}(x)}{W(x)} f_s(x)\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

а тому (20.13) можна записати у вигляді (20.8). Отже, розв'язок, визначений формулою (20.13), є загальним розв'язком лінійної неоднорідної системи (20.1).

Приклад 1. *З допомогою методу варіації довільних сталих зінтегрувати систему*

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = -y + 2z + 4xe^x. \end{cases}$$

Розв'язання. Відповідну однорідну систему зінтегруємо методом виключення (лекція 18):

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = -y + 2z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 2z - z',$$

$$2z' - z'' = 2(2z - z') - z \quad \Rightarrow \quad z'' - 4z' + 3z = 0.$$

Оскільки характеристичними числами є $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, то

$$z_0 = C_1e^x + C_2e^{3x} \quad \Rightarrow \quad y_0 = 2(C_1e^x + C_2e^{3x}) -$$
$$-(C_1e^x + 3C_2e^{3x}) \quad \Rightarrow \quad y_0 = C_1e^x - C_2e^{3x}.$$

Розв'язок заданої неоднорідної системи шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)e^x - C_2(x)e^{3x}, \quad z = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{3x}, \qquad (20.14)$$

де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ знайдемо із системи вигляду (20.11):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{3x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{3x} = 4xe^x \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_1'(x) = 2x, \quad C_2'(x) = 2xe^{-2x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_1(x) = x^2 + C_1, \quad C_2(x) = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C_2.$$

Підставляючи знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ у (20.14), одержуємо загальний розв'язок заданої системи:

$$y = (x^2 + C_1)e^x - \big(-xe^{-2x} - 0{,}5e^{-2x} + C_2\big)e^{3x} =$$
$$= C_1e^x - C_2e^{3x} + \big(x^2 + x + 0{,}5\big)e^x,$$
$$z = (x^2 + C_1)e^x + \big(-xe^{-2x} - 0{,}5e^{-2x} + C_2\big)e^{3x} =$$
$$= C_1e^x + C_2e^{3x} + \big(x^2 - x - 0{,}5\big)e^x.$$

Після зведення подібних доданків і перепозначення сталої ($C_1 := C_1 + 0{,}5$) маємо:

$$y = C_1 e^x - C_2 e^{3x} + \big(x^2 + x\big)e^x,$$
$$z = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \big(x^2 - x - 1\big)e^x. \ \blacksquare$$

3. Метод невизначених коефіцієнтів. У п. 1 цієї лекції встановлено, що інтегрування лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь зводиться до необхідності побудови фундаментальної системи розв'язків відповідної однорідної системи. Тому особливий інтерес становлять такі лінійні неоднорідні системи, в яких фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи виражається через елементарні функції. До таких систем належать, передовсім, системи зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases}$$

або, у скороченому записі,

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}y_j + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20.15}$$

Якщо функції $f_k(x)$ у системі (20.15) складаються з сум і добутків багаточленів $P_m(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_m x^m$ та функцій $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, то її розв'язок можна шукати ***методом невизначених коефіцієнтів***. Це робиться за такими ж правилами, що і для одного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (лекція 14), але з певними змінами. Зокрема, якщо

$$f_k(x) = P_{m_k}(x)e^{\alpha x},$$

де $P_{m_k}(x)$ — багаточлен степеня m_k, то частинний розв'язок системи (20.15) потрібно шукати не у вигляді $x^s Q_m(x)e^{\alpha x}$ (як це було для лінійного рівняння), а як

$$y_i = Q_{m+s}^{(i)}(x)e^{\alpha x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{20.16}$$

де $Q_{m+s}^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — багаточлени степеня $m+s$ з невідомими коефіцієнтами, $m = \max(m_1, m_2, \ldots, m_k)$; $s = 0$, якщо α не є характеристичним числом, і s дорівнює кратності цього числа, якщо α є характеристичним числом (якщо точніше, число $m+s$ на m одиниць більше від найвищого зі степенів багаточленів, на які множаться експоненти $e^{\alpha x}$ у загальному розв'язку відповідної однорідної системи).

Невідомі коефіцієнти багаточленів $Q_{m+s}^{(i)}(x)$ визначають прирівнюванням коефіцієнтів біля відповідних доданків після підставляння (20.16) у систему (20.15).

Аналогічно визначаються степені багаточленів у випадках, коли функції $f_k(x)$ у системі (20.15) містять функції $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$, а число $\alpha + \beta i$ є або не є характеристичним.

Приклад 2. *Зінтегрувати систему методом невизначених коефіцієнтів*:

$$\begin{cases} y' = 4y + 8z + 30e^{x}, \\ z' = 3y - z + 11e^{-4x}. \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи метод Ейлера (лекція 19), знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} y' = 4y + 8z, \\ z' = 3y - z. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-k & 8 \\ 3 & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $k_1 = 7$, $k_2 = -4$. Характеристичному числу $k_1 = 7$ відповідає система

$$\begin{cases} -3\gamma_1 + 8\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 - 8\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки, наприклад, $\gamma_1 = 8$, $\gamma_2 = 3$. Числу $k_2 = -4$ відповідає система

$$\begin{cases} 8\gamma_1 + 8\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$. Отже, загальним розв'язком однорідної системи є:

$$y_0 = 8C_1e^{7x} + C_2e^{-4x}, \quad z_0 = 3C_1e^{7x} - C_2e^{-4x}.$$

Враховуючи вигляд функцій $f_1(x) = e^x$ і $f_2(x) = e^{-4x}$, частинний розв'язок y_1, z_1 неоднорідної системи через невизначені коефіцієнти запишемо у вигляді

$$y_1 = Ae^x + (Bx + C)e^{-4x}, \quad z_1 = De^x + (Ex + F)e^{-4x}. \tag{20.17}$$

Підставляючи (20.17) у задану систему, одержуємо:

$$Ae^x - 4(Bx + C)e^{-4x} + Be^{-4x} =$$
$$= 4Ae^x + 4(Bx + C)e^{-4x} + 8De^x + 8(Ex + F)e^{-4x} + 30e^x,$$
$$De^x - 4(Ex + F)e^{-4x} + Ee^{-4x} =$$
$$= 3Ae^x + 3(Bx + C)e^{-4x} - De^x - (Ex + F)e^{-4x} + 11e^{-4x}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля e^x, e^{-4x} і xe^{-4x} в обох частинах цих тотожностей, одержуємо відповідно:

$$\begin{array}{r|l} e^x & A = 4A + 8D + 30, \\ e^{-4x} & B - 4C = 4C + 8F, \\ xe^{-4x} & -4B = 4B + 8E, \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} e^x & D = 3A - D, \\ e^{-4x} & E - 4F = 3C - F + 11, \\ xe^{-4x} & -4E = 3B - E. \end{array}$$

Отримана система має лише п'ять лінійно незалежних рівнянь. Розв'язуючи її, отримуємо:

$$A = -2, \quad B = -8, \quad C + F = -1, \quad D = -3, \quad E = 8.$$

Покладемо, наприклад, $C = 0$, тоді $F = -1$, а тому частинним розв'язком неоднорідної системи є

$$y_1 = -2e^x - 8xe^{-4x}, \quad z_1 = -3e^x + (8x-1)e^{-4x},$$

а загальним розв'язком —

$$y = 8C_1e^{7x} + C_2e^{-4x} - 2e^x - 8xe^{-4x},$$
$$z = 3C_1e^{7x} - C_2e^{-4x} - 3e^x + (8x-1)e^{-4x}. \ \blacksquare$$

Приклад 3. *Записати частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (не шукаючи їх) системи*

$$\begin{cases} y' = 4y - z + xe^{3x} + e^{3x}\sin x, \\ z' = y + 2z + xe^{3x}\cos x. \end{cases} \tag{20.18}$$

Розв'язання. Знайдемо характеристичні числа відповідної однорідної системи:

$$\begin{vmatrix} 4-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 6k + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 3.$$

У системі (20.18) для функцій xe^{3x}, $e^{3x}\sin x$, $xe^{3x}\cos x$ числа $\alpha + \beta i$ відповідно дорівнюють 3, $3+i$, $3+i$. Тому окремо знайдемо частинні розв'язки систем

$$\begin{cases} y' = 4y - z + xe^{3x}, \\ z' = y + 2z \end{cases} \tag{20.19}$$

і

$$\begin{cases} y' = 4y - z + e^{3x}\sin x, \\ z' = y + 2z + xe^{3x}\cos x. \end{cases} \tag{20.20}$$

Для системи (20.19) $\alpha + \beta i = k_1 = k_2 = 3$, $s = 2$, $m = 1$. Згідно з (20.16) її частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{3x},$$
$$z_1 = (fx^3 + gx^2 + hx + p)e^{3x}.$$

Для системи (20.20) $\alpha + \beta i = 3 + i \neq k_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$, а тому її частинний розв'язок має вигляд

$$y_2 = (Ax + B)e^{3x} \sin x + (Cx + D)e^{3x} \cos x,$$
$$z_2 = (Ex + F)e^{3x} \sin x + (Gx + H)e^{3x} \cos x.$$

Тоді частинний розв'язок системи (20.18) запишеться у вигляді:

$$y = y_1 + y_2, \qquad z = z_1 + z_2. \ \blacksquare$$

4. Метод Д'Аламбера. Розглянемо лінійну неоднорідну систему двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z + f_1(x), \\ z' = a_{21}y + a_{22}z + f_2(x). \end{cases} \tag{20.21}$$

Помножимо друге рівняння цієї системи на деяке число λ і додамо почленно до першого рівняння:

$$(y + \lambda z)' = (a_{11} + \lambda a_{21})y + (a_{12} + \lambda a_{22})\, z + f_1(x) + \lambda\, f_2(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (y + \lambda z)' = (a_{11} + \lambda a_{21})\left(y + \frac{a_{12} + \lambda a_{22}}{a_{11} + \lambda a_{21}} z\right) + $$
$$+ f_1(x) + \lambda f_2(x). \tag{20.22}$$

Користуючись довільністю числа λ, виберемо його таким, щоб

$$\frac{a_{12} + \lambda a_{22}}{a_{11} + \lambda a_{21}} = \lambda,$$

тобто

$$a_{21}\lambda^2 + (a_{11} - a_{22})\lambda - a_{12} = 0. \tag{20.23}$$

Тоді рівняння (20.22) запишемо у вигляді:

$$(y + \lambda z)' = (a_{11} + \lambda a_{21})(y + \lambda z) + f_1(x) + \lambda f_2(x). \tag{20.24}$$

Рівняння (20.24) є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку з шуканою функцією $y + \lambda z$. Інтегруючи його (формула (4.6) з лекції 4), одержуємо:

$$y + \lambda z = e^{(a_{11}+\lambda a_{21})x}\left(\int \big(f_1(x) + \lambda f_2(x)\big) e^{-(a_{11}+\lambda a_{21})x} dx + C\right). \tag{20.25}$$

Якщо корені λ_1 і λ_2 квадратного рівняння (20.23) різні і дійсні, то маємо систему

$$\begin{cases} y+\lambda_1 z = e^{(a_{11}+\lambda_1 a_{21})x}\left(\int \big(f_1(x)+\lambda_1 f_2(x)\big) e^{-(a_{11}+\lambda_1 a_{21})x} dx + C_1\right), \\ y+\lambda_2 z = e^{(a_{11}+\lambda_2 a_{21})x}\left(\int \big(f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)\big) e^{-(a_{11}+\lambda_2 a_{21})x} dx + C_2\right), \end{cases}$$

розв'язуючи яку відносно y і z, знайдемо загальний інтеграл системи (20.21).

Якщо корені рівняння (20.23) кратні, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то з (20.25) одержуємо тільки одне рівняння

$$y+\lambda z = e^{(a_{11}+\lambda a_{21})x}\left(\int \big(f_1(x)+\lambda f_2(x)\big) e^{-(a_{11}+\lambda a_{21})x} dx + C\right),$$

але у цьому випадку, підставляючи вираз для y, знайдений звідси, у друге рівняння системи (20.21), одержимо лінійне рівняння першого порядку з невідомою функцією z.

Рекомендована література: [3, с. 144–146, 209–214], [4, с. 174–183], [6, с. 103–107, 138–144], [8, с. 370–385], [10, с. 206–210], [20, с. 436–455, 495–528].

Питання до лекції 20

1. Як знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи, якщо відомий її частинний розв'язок і загальний розв'язок відповідної однорідної системи?

2. У чому полягає метод варіації довільних сталих знаходження загального розв'язку лінійної неоднорідної системи?

3. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів інтегрування лінійних неоднорідних систем зі сталими коефіцієнтами? Чи для кожної лінійної системи його можна використати?

4. У чому полягає метод Д'Аламбера інтегрування лінійних систем зі сталими коефіцієнтами?

Вправи до лекції 20

1. Зінтегруйте системи методом варіації довільних сталих:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = 4y - 8z + 2\operatorname{tg} 4x, \\ z' = 4y - 4z; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y - z + 2\sqrt{x}e^x. \end{cases}$$

2. Зінтегруйте системи методом невизначених коефіцієнтів:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = -2y + z - 3x; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y' = 3y + 2z + e^x, \\ z' = -3y - 2z - 2e^x; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y' = 5y - z + 5\sin x, \\ z' = 4y + z + 2\cos x. \end{cases}$$

3. Зінтегруйте системи методом Д'Аламбера:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = -2y - z + 10x, \\ z' = -4y - 5z; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y' = 5y + 4z + e^x, \\ z' = 4y + 5z + 1. \end{cases}$$

Додаток 3

Застосування математичного пакета Maple для інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь

Для розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь використовують команду `dsolve` у форматі

`dsolve`({рівняння1, рівняння2, ...},{невідома1, невідома2, ...}).

Приклад 1. Зінтегрувати лінійну однорідну систему зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = 3z - y. \end{cases}$$

(приклад 2 лекції 18, с. 237):

```
> dsolve({D(y)(x)=y(x)+z(x),D(z)(x)=3*z(x)-y(x)},
  {y(x),z(x)});
```

$$\{y(x) = e^{2\,x}(\_C1 + \_C2\,x - \_C2),\ \ z(x) = e^{2\,x}(\_C1 + \_C2\,x)\}.$$

Перепозначенням сталих ($\_C1 := C_1 + C_2$, $\_C2 := C_2$) цей розв'язок зводиться до розв'язку, отриманого у прикладі 2 лекції 18.

Приклад 2. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 4y + 5z, \\ z' = 4y + 3z \end{cases}$$

(приклад 1 лекції 19, с. 251):

```
> dsolve({D(y)(x)=4*y(x)+5*z(x),D(z)(x)=4*y(x)+3*z(x)},
  {y(x),z(x)});
```

$$\left\{y(x) = \_C1\,e^{-\,x} + \_C2\,e^{8\,x},\quad z(x) = -\_C1\,e^{-\,x} + \frac{4}{5}\_C2\,e^{8\,x}\right\}.$$

Приклад 3. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z \end{cases}$$

(приклад 2 лекції 19, с. 252):

```
> dsolve({D(y)(x)=2*y(x)-z(x),D(z)(x)=y(x)+2*z(x)},
  {y(x),z(x)});
```

$$\big\{y(x) = \mathrm{e}^{2\,x}\left(\_\,C1\cos(x) - \_\,C2\sin(x)\right), \\ z(x) = \mathrm{e}^{2\,x}\left(\_\,C1\sin(x) + \_\,C2\cos(x)\right)\big\}.$$

Приклад 4. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 6y + z, \\ z' = -16y - 2z \end{cases}$$

(приклад 3 лекції 19, с. 253):

```
> dsolve({D(y)(x)=6*y(x)+z(x),D(z)(x)=-16*y(x)-2*z(x)},
  {y(x),z(x)});
```

$$\left\{y(x) = -\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2\,x}(4\_\,C1 + 4\_\,C2\,x + \_\,C2), \right. \\ \left. z(x) = \mathrm{e}^{2\,x}(\_\,C1 + \_\,C2\,x)\right\}.$$

Приклад 5. Зінтегрувати лінійну однорідну систему зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = -y_2 - 2y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

(приклад 3 лекції 18, с. 237):

```
> dsolve({D(y1)(x)=y1(x)+2*y2(x)+2*y3(x),D(y2)(x)=
  -y2(x)-2*y3(x),D(y3)(x)=y2(x)+y3(x)},{y1(x),y2(x),
  y3(x)});
```

$$\{y1(x) = \_\,C1\,\mathrm{e}^{x} - \_\,C2\cos(x) + \_\,C2\sin(x) + \_\,C3\cos(x) + \\ + \_\,C3\sin(x), \quad y2(x) = \_\,C2\cos(x) - \_\,C3\sin(x) - \\ - \_\,C2\sin(x) - \_\,C3\cos(x), \;\; y3(x) = \_\,C2\sin(x) + \_\,C3\cos(x)\}.$$

Перепозначенням сталих ($\_\,C1 := C_1$, $\_\,C2 := (C_3 - C_2)/2$, $\_\,C3 := (C_2 + C_3)/2$) цей розв'язок зводиться до розв'язку, отриманого у прикладі 3 лекції 18.

Приклад 6. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 2y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

(приклад 4 лекції 19, с. 254):

```
> dsolve({D(y1)(x)=y1(x)+2*y2(x)+2*y3(x),D(y2)(x)=
  2*y1(x)+y2(x)+2*y3(x),D(y3)(x)=2*y1(x)+2*y2(x)+
  y3(x)},{y1(x),y2(x),y3(x)});
```

$$\{y1(x) = \_C2\, e^{5x} - 2\_C3\, e^{-x} - \_C1\, e^{-x},$$
$$y2(x) = \_C2\, e^{5x} + \_C3\, e^{-x} + \_C1\, e^{-x},$$
$$y3(x) = \_C2\, e^{5x} + \_C3\, e^{-x}\}.$$

Перепозначенням сталих ($\_C1 := C_2 - 2C_3$, $\_C2 := C_1$, $\_C3 := C_3 - C_2$) цей розв'язок зводиться до розв'язку, отриманого у прикладі 4 лекції 19.

Приклад 7. Зінтегрувати лінійну неоднорідну систему

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = -y + 2z + 4xe^x \end{cases}$$

(приклад 1 лекції 20, с. 261):

```
> dsolve({D(y)(x)=2*y(x)-z(x),D(z)(x)=-y(x)+2*z(x)+
  4*x*exp(x)},{y(x),z(x)});
```

$$\{y(x) = e^{3x}\_C2 + \_C1\, e^x + xe^x + x^2e^x,$$
$$z(x) = -e^{3x}\_C2 + \_C1\, e^x - xe^x - e^x + x^2e^x\}.$$

Приклад 8. Зінтегрувати лінійну неоднорідну систему

$$\begin{cases} y' = 4y + 8z + 30e^x, \\ z' = 3y - z + 11e^{-4x} \end{cases}$$

(приклад 2 лекції 20, с. 263):

```
> dsolve({D(y)(x)=4*y(x)+8*z(x)+30*exp(x),D(z)(x)=
```

```
3*y(x)-z(x)+11*exp(-4*x)},{y(x),z(x)});
```

$$\Big\{y(x) = \mathrm{e}^{7\,x}\_C2 + \mathrm{e}^{-4\,x}\_C1 - \frac{8}{11}\,\mathrm{e}^{-4\,x} - 2\,\mathrm{e}^{x} - 8\,\mathrm{e}^{-4\,x}x,$$
$$z(x) = \frac{3}{8}\,\mathrm{e}^{7\,x}\_C2 - \mathrm{e}^{-4\,x}\_C1 - 3\,\mathrm{e}^{x} - \frac{3}{11}\,\mathrm{e}^{-4\,x} + 8\,\mathrm{e}^{-4\,x}x\Big\}.$$

Перепозначенням сталих цей розв'язок зводиться до розв'язку, отриманого у прикладі 2 лекції 20.

Приклад 9. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 4y - z + xe^{3x} + e^{3x}\sin x, \\ z' = y + 2z + xe^{3x}\cos x \end{cases}$$

(приклад 3 лекції 20, с. 265):

```
> dsolve({D(y)(x)=4*y(x)-z(x)+x*exp(3*x)*sin(x),
  D(z)(x)=y(x)+2*z(x)+x*exp(3*x)*cos(x)},{y(x),z(x)});
```

$$\big\{y(x) = -\mathrm{e}^{3\,x}(-\_C2 - x\_C1 + \sin(x) + 2\cos(x) + x\sin(x)),$$
$$z(x) = \mathrm{e}^{3\,x}(\_C2 + x\_C1 - \_C1 - 2\sin(x) - \cos(x) + x\cos(x))\big\}.$$

Приклад 10. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$
$$x(0) = 0, \ \ x'(0) = v_0\cos\alpha, \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = v_0\sin\alpha$$

(задача 1 лекції 18, с. 234):

```
> dsolve({(D@@2)(x)(t)=0,(D@@2)(y)(t)=-g,x(0)=0,y(0)=0,
  D(x)(0)=v0*cos(alpha),D(y)(0)=v0*sin(alpha)},{x(t),
  y(t)});
```

$$\Big\{x(t) = v0\cos(\alpha)t, \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v0\sin(\alpha)t\Big\}.$$

Інші приклади застосування математичного пакета Maple для інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь можна знайти в [11, 16, 17, 19].

Розділ 4
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лекція 21. Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними першого порядку

План

1. Зв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку з відповідною системою характеристик.

2. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного рівняння.

3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння.

1. Зв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку з відповідною системою характеристик. Багато моделей різноманітних процесів і явищ техніки та математичної фізики (коливання струни і мембрани, теплопередача, дифузія, газова динаміка та ін.) приводять до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Ми обмежимося викладом найпростіших відомостей теорії рівнянь з частинними похідними першого порядку, маючи за мету показати зв'язок таких рівнянь із системами звичайних диференціальних рівнянь і навести методи побудови загального розв'язку та розв'язку задачі Коші, які ґрунтуються на цьому зв'язку. Рівняння з частинними похідними другого та вищих порядків інтегруються іншими методами, які вивчатимуться у курсі «Рівняння математичної фізики».

Диференціальним рівнянням з частинними похідними називають співвідношення, яке містить невідому функцію від декількох змінних, незалежні змінні та частинні похідні невідомої функції за незалежними змінними. Порядок старшої частинної похідної, яка входить у рівняння, називають ***порядком*** рівняння. Наприклад, диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку має такий загальний вигляд:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{21.1}$$

де $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — шукана функція, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\ldots$, $\frac{\partial u}{\partial x_n}$ — її частинні похідні, Φ — задана неперервно диференційовна функція в деякій області $G \subset \mathbf{R}^{2n+1}$, причому в рівняння (21.1) принаймні одна частинна похідна входить обов'язково.

Багато фізичних явищ описуються рівняннями з частинними похідними першого порядку. Наприклад, у газовій динаміці важливу роль відіграє рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (рівняння Хопфа), де $u = u(t, x)$, а в оптиці вивчається рівняння

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = f(x, y, z),$$

де $u = u(x, y, z)$, яке описує поширення світлових променів у неоднорідному середовищі з показником заломлення $f(x, y, z)$.

Розв'язком рівняння (21.1) називають неперервно диференційовну функцію $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка перетворює рівняння (21.1) у тотожність для кожної точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset G$.

Якщо $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — розв'язок рівняння (21.1), то його графік — поверхню $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у просторі $(n+1)$-ї змінної $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ — називають ***інтегральною поверхнею*** рівняння (21.1).

Розглянемо декілька простих прикладів відшукання розв'язків рівняння (21.1).

Приклад 1. *Відшукати функцію* $z = z(x, y)$ *— розв'язок рівняння* $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 1$.

Розв'язання. Інтегруючи обидві частини за змінною x, одержуємо

$$z = \int (2x + y - 1)\, dx = x^2 + xy - x + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ — довільна диференційовна функція змінної y. ■

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$.
Розв'язання. Інтегруючи за змінною x, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ — довільна диференційовна функція. Інтегруючи тепер останню рівність за змінною y, одержуємо:

$$z = \int \bigl(x + \varphi(y)\bigr)\, dy = xy + \varphi_1(y) + \varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(y) = \int \varphi(y)\, dy$, $\varphi_2(x)$ — довільні диференційовні функції. ■

З наведених прикладів випливає, що розв'язки диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку можуть залежати від однієї довільної функції, а розв'язки рівняння другого порядку — від двох довільних функцій. Нижче буде показано, що розв'язки рівняння (21.1) можуть залежати від однієї неперервно диференційовної функції, кількість аргументів якої $(n-1)$.

Якщо у рівнянні (21.1) функція Φ залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції, то його називають ***лінійним***. Лінійне рівняння можна записати у вигляді

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \qquad (21.2)$$

Якщо права частина рівняння (21.2) тотожно дорівнює нулю, а коефіцієнти f_1, f_2, $\ldots$, f_n не залежать від шуканої функції u, то маємо рівняння

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \qquad (21.3)$$

яке називають ***лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку***. Вважаємо, що коефіцієнти цього рівняння визначені та неперервні разом з частинними похідними за змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у деякому околі заданої точки $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ і що у цій точці вони одночасно не перетворюються в нуль, наприклад, $f_n(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \neq 0$. Очевидно, що рівняння (21.3) має розв'язок $u = c$, де c — довільна стала.

Одночасно з рівнянням (21.3) розглядатимемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{21.4}$$

яка складається з $(n-1)$-го рівняння. Систему (21.4) називають ***системою характеристик*** (***характеристичною системою***). Систему характеристик можна записати також у вигляді:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{f_1}{f_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{f_2}{f_n}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n}. \tag{21.5}$$

Доведемо дві теореми, які встановлюють зв'язок між рівнянням (21.3) і відповідною системою характеристик (21.4).

Теорема 1. *Кожний інтеграл системи* (21.4) *є розв'язком рівняння* (21.3).

Доведення. Нехай $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — інтеграл системи (21.4), визначений у деякому околі точки $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$. Тоді згідно з означенням інтеграла (лекція 18, п. 1) повний диференціал функції ψ внаслідок системи (21.4) тотожно дорівнює нулю, тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n \equiv 0,$$

де диференціали dx_1, dx_2, …, dx_{n-1} потрібно замінити виразами, які випливають з (21.5):

$$dx_1 = \frac{f_1}{f_n} dx_n, \ \ dx_2 = \frac{f_2}{f_n} dx_n, \ \ \ldots, \ \ dx_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{f_n} dx_n.$$

Таким чином,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cdot\frac{f_1}{f_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cdot\frac{f_2}{f_n}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\cdot dx_n\equiv 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad f_1\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+f_2\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\ldots+f_n\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0,$$

звідки отримуємо, що функція $u=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ є розв'язком рівняння (21.3). ▶

Теорема 2. *Кожний розв'язок рівняння* (21.3) *є інтегралом системи* (21.4).

Доведення. Нехай $u=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — розв'язок рівняння (21.3), причому $u\neq\text{const}$. Тоді

$$f_1\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+f_2\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\ldots+f_n\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0. \tag{21.6}$$

Знайдемо диференціал функції ψ внаслідок системи (21.4):

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n=$$
$$=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{f_1}{f_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{f_2}{f_n}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)dx_n=$$
$$=\frac{1}{f_n}\left(f_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\ldots+f_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)dx_n,$$

звідки, враховуючи (21.6), маємо тотожність $d\psi\equiv 0$, тобто ψ є інтегралом системи (21.4). ▶

Розглянемо, наприклад, рівняння з частинними похідними

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}-3z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Йому відповідає система характеристик

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{-3z},$$

яка має інтеграли $\psi_1=x^3z$, $\psi_2=x\big/\sqrt{y}$. Отже, функції $u_1=x^3z$, $u_2=x\big/\sqrt{y}$ є розв'язками наведеного рівняння з частинними похідними, у чому можна переконатись, виконавши перевірку.

2. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного рівняння. Наступна теорема визначає спосіб побудови загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (21.3).

Теорема 3. *Нехай*

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots,\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

є незалежними інтегралами системи (21.4). *Тоді розв'язком рівняння* (21.3) *є функція*

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \tag{21.7}$$

де Φ *— довільна функція, яка має неперервні похідні за змінними* ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_{n-1}.

Доведення. Підставляючи (21.7) у рівняння (21.3) і беручи до уваги, що функції ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_{n-1} є розв'язками рівняння (21.3), отримуємо:

$$f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + f_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} =$$
$$= f_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + f_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + f_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \left(f_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + f_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0,$$

а це й означає, що функція (21.7) є розв'язком рівняння (21.3). ►

Формулу (21.7) називають ***загальним розв'язком*** рівняння (21.3). Звертаємо увагу, що загальний розв'язок рівняння з частинними похідними першого порядку містить довільну функцію, а не довільні сталі, як це було для звичайних диференціальних рівнянь.

Приклад 3. *Зінтегрувати рівняння*

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Розв'язання. Складемо відповідну систему характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

і зінтегруємо її: $y/x = C_1$, $z/x = C_2$, а тому інтегралами є $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z/x$. Згідно з (21.7) загальним розв'язком заданого рівняння є

$$u = \Phi\Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\Big),$$

де Φ — довільна неперервно диференційовна функція від часток y/x і z/x, тобто u є довільною неперервно диференційовною однорідною функцією нульового виміру змінних x, y, z. Наприклад, розв'язками заданого рівняння є функції

$$u_1 = \frac{y}{x},\;\; u_2 = \frac{3y}{x} + \frac{z}{x},\;\; u_3 = \Big(\frac{y}{x}\Big)^2,\;\; u_4 = \cos\frac{z}{x},\;\; u_5 = 2^{x/z}.$$

Відповідь: $u = \Phi\,(y/x,\, z/x)$.

З теореми 3 випливає, що задача про побудову загального розв'язку рівняння (21.3) рівносильна задачі про відшукання $(n-1)$ незалежних інтегралів відповідної йому системи характеристик (21.4).

У випадку двох незалежних змінних, позначивши шукану функцію через $z(x, y)$, маємо рівняння

$$f_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + f_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{21.8}$$

Відповідна система характеристик вироджується в одне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{f_1(x,y)} = \frac{dy}{f_2(x,y)}. \tag{21.9}$$

Якщо $\psi(x, y)$ — інтеграл рівняння (21.9), то $z = \Phi\,(\psi(x, y))$, де $\Phi(\psi)$ — довільна неперервно диференційовна функція від змінної ψ, буде загальним розв'язком рівняння (21.8).

Приклад 4. *Зінтегрувати рівняння* $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
Розв'язання. Відповідна система характеристик вироджується у рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x},$$

інтегралом якого є $\psi = x^2 + y^2$. Згідно з теоремою 3 загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$z = \Phi(x^2 + y^2).$$

З геометричної точки зору маємо сім'ю поверхонь обертання з віссю обертання Oz. Таким чином, задане рівняння є диференціальним рівнянням усіх поверхонь обертання з віссю обертання Oz. Окремими випадками поверхонь $z = \Phi(x^2 + y^2)$ є $z = x^2 + y^2$ (параболоїд обертання), $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (півсфера), $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (конус), $z = c$ (площина).
***Відповідь*:** $z = \Phi(x^2 + y^2)$.

3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння. ***Задача Коші*** для рівняння (21.3) полягає у знаходженні розв'язку $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, який для фіксованого значення однієї з незалежних змінних, наприклад x_n, перетворюється у задану неперервно диференційовну функцію решти змінних, тобто задовольняє ***початкову умову***

$$u|_{x_n = x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{21.10}$$

У випадку, коли шукана функція залежить від двох незалежних змінних, тобто для рівняння (21.8), задача Коші полягає у відшуканні такого розв'язку $z = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову

$$z|_{x = x_0} = \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ — задана функція. Геометрично це означає, що серед усіх інтегральних поверхонь, які визначаються рівнянням (21.8), шукається така поверхня $z = f(x, y)$, яка проходить через задану криву $z = \varphi(y)$ у площині $x = x_0$ (ця площина паралельна до площини Oyz).

Згідно з теоремою 3 загальний розв'язок рівняння (21.3) задається формулою (21.7), тобто

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Підставляючи цю функцію в (21.10), бачимо, що розв'язок задачі Коші (21.3), (21.10) зводиться до визначення вигляду функції Φ, яка задовольняє умову

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})\big|_{x_n = x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Таким чином, одержуємо ***правило розв'язування задачі Коші*** (21.3), (21.10):

1) *складаємо відповідну систему характеристик і знаходимо її* $(n-1)$ *незалежних інтегралів:*

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \;\; \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \;\; \ldots, \;\; \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

2) *замінюємо у знайдених інтегралах незалежну змінну* x_n *її початковим значенням* $x_n = x_{n0}$:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_2, \\ \qquad \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_{n-1} \end{cases} \tag{21.11}$$

і розв'язуємо систему (21.11) *відносно* x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, *тобто знаходимо*

$$x_1 = \omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}), \;\; x_2 = \omega_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}), \; \ldots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1});$$

3) *будуємо функцію*

$$u = \varphi\big(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \\ \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})\big),$$

яка і буде розв'язком задачі Коші.

Приклад 5. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u|_{x=2} = y - \frac{z}{3}.$$

Розв'язання. Інтегралами відповідної системи характеристик є $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z/x$ (див. приклад 3). Оскільки

$$\psi_1|_{x=2} = \bar{\psi}_1 = \frac{y}{2}, \quad \psi_2|_{x=2} = \bar{\psi}_2 = \frac{z}{2},$$

то $y = 2\bar{\psi}_1$, $z = 2\bar{\psi}_2$, а тому шуканим розв'язком є

$$u = 2\psi_1 - \frac{2}{3}\psi_2 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2(3y - z)}{3x}. \ \blacksquare$$

Приклад 6. *Визначити інтегральну поверхню рівняння*

$$(x^2 + 1)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

яка проходить через криву $z = y^2$, *розташовану у площині* $x = 0$.

Розв'язання. Відповідна система характеристик вироджується у рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{dx}{x^2+1} = \frac{dy}{xy}$, інтегралом якого є функція $\psi(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}}$. Тоді $\bar{\psi} = \psi|_{x=0} = y$. Звідси $y = \bar{\psi}$, а тому шуканою інтегральною поверхнею є

$$z = \psi^2(x, y) \quad \Rightarrow \quad z = \frac{y^2}{x^2 + 1}. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [3, с. 377–383], [4, с. 197–209], [6, с. 275–280], [8, с. 458–463], [10, с. 247–281].

Питання до лекції 21

1. Що називають диференціальним рівнянням з частинними похідними? Як визначити порядок такого рівняння?

2. Що називають розв'язком рівняння з частинними похідними? Який геометричний зміст має розв'язок рівняння з двома незалежними змінними?

3. Яке рівняння називають лінійним рівнянням з частинними похідними першого порядку? В якому випадку його називають однорідним?

4. Який вигляд має система характеристик для лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку? Який зв'язок між лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку та відповідною системою характеристик?

5. Як формулюється задача Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку? Який геометричний зміст вона має у випадку двох незалежних змінних?

6. Як побудувати загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку? Як розв'язується задача Коші для цього рівняння?

Вправи до лекції 21

1. Перевірте, чи є вказані функції розв'язками заданих рівнянь з частинними похідними:

$$\text{а) } 2\sqrt{x}\tfrac{\partial z}{\partial x} - y\tfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = \sqrt{x} + \ln y;$$

$$\text{б) } (x^2+y^2)\tfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy\tfrac{\partial u}{\partial y} + xz\tfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = \tfrac{x^2-y^2}{z^2} + 3;$$

$$\text{в) } \left(x + \tfrac{z^4}{y}\right)\tfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\tfrac{\partial u}{\partial y} + z\tfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = \tfrac{z^2+z^3}{y} + 2xz.$$

2. Зінтегруйте однорідні рівняння з частинними похідними:

$$\text{а) } (x+2y)\tfrac{\partial z}{\partial x} - y\tfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \text{б) } x\tfrac{\partial u}{\partial x} + yz\tfrac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$\text{в) } (x^2y - x^2y^2)\tfrac{\partial u}{\partial x} + y\tfrac{\partial u}{\partial y} + \tfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Розв'яжіть задачі Коші:

$$\text{а) } x\tfrac{\partial z}{\partial x} - y\tfrac{\partial z}{\partial y} = 0,\ z|_{y=1} = 2x; \quad \text{б) } \tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{\partial u}{\partial y} + 2\tfrac{\partial u}{\partial z} = 0,\ u|_{x=1} = yz.$$

Лекція 22. Квазілінійні та нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку

План

1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку.
2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку.
3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку.
4. Рівняння Пфаффа.

1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку. Рівняння вигляду

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \qquad (22.1)$$

називають ***лінійним неоднорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку*** або ***квазілінійним рівнянням***. До цього ж типу будемо відносити й рівняння, в яких $F \equiv 0$, але хоча б один з коефіцієнтів f_j залежить від u. Вважаємо, що функції f_1, f_2, $\ldots$, f_n, F неперервно диференційовні в деякому околі заданої точки $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, u_0)$. Нехай, крім того, $f_n(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, u_0) \neq 0$.

Розв'язок рівняння (22.1) шукаємо у неявному вигляді:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0, \qquad (22.2)$$

де функція V має неперервні частинні похідні за усіма аргументами принаймні в деякій області зміни $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$, причому $V'_u(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, u_0) \neq 0$ (це гарантує те, що в цій області рівняння (22.2) визначає u як неявну функцію від $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Здиференціювавши (22.2) за змінною x_k, яка входить у (22.2) явно і неявно через функцію u, одержуємо:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = - \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^{-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{22.3}$$

Підставляючи вирази для частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ з (22.3) у (22.1), після простих перетворень відносно невідомої функції V одержуємо лінійне однорідне рівняння з частинними похідними:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots$$

$$\ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_n} + F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0. \tag{22.4}$$

Щоб зінтегрувати рівняння (22.4), утворимо відповідну ***систему характеристик*** (п. 1 лекції 21):

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{du}{F} \tag{22.5}$$

і припустимо, що нам удалося відшукати n незалежних інтегралів цієї системи:

$$\psi_1 = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \;\; \psi_2 = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \; \ldots,$$
$$\psi_n = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u).$$

Згідно з теоремою 3 попередньої лекції загальний розв'язок рівняння (22.4) можна записати у вигляді

$$V = \Phi\big(\psi_1, \, \psi_2, \, \ldots, \psi_n\big), \tag{22.6}$$

де Φ — довільна неперервно диференційовна функція своїх аргументів.

Враховуючи (22.2), одержуємо шуканий розв'язок рівняння (22.1) у неявному вигляді

$$\Phi\big(\psi_1, \, \psi_2, \, \ldots, \psi_n\big) = 0. \tag{22.7}$$

Співвідношення (22.7), де Φ — довільна неперервно диференційовна функція, називають ***загальним розв'язком*** рівняння (22.1). Якщо (22.7) вдасться розв'язати відносно u, то одержимо загальний розв'язок у явному вигляді:

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де u — неперервно диференційовна функція.

Систему (22.5) називають ***системою характеристик*** квазілінійного рівняння (22.1).

Таким чином, для знаходження загального розв'язку рівняння (22.1) потрібно утворити відповідну систему характеристик, знайти n незалежних інтегралів цієї системи і прирівняти до нуля довільну диференційовну функцію цих інтегралів. Отримана при цьому рівність вигляду (22.7) буде загальним розв'язком рівняння (22.1) у неявному вигляді. Якщо (22.7) можна розв'язати відносно u, то матимемо загальний розв'язок у явному вигляді.

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

Розв'язання. Складемо відповідну систему характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u}$$

і знайдемо її інтеграли: $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z/x$, $\psi_3 = u/x$. Згідно з (22.7) загальним розв'язком є

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0. \qquad (22.8)$$

Розв'язуючи (22.8) відносно u/x, одержуємо:

$$\frac{u}{x} = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad u = x \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

де f — довільна функція, і, отже, розв'язком заданого рівняння є довільна однорідна неперервно диференційовна функція виміру 1. ■

Приклад 2. *Зінтегрувати рівняння*

$$e^x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=ye^x.$$

Розв'язання. Запишемо відповідну систему характеристик:

$$\frac{dx}{e^x}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{ye^x}.$$

З рівняння $\frac{dx}{e^x}=\frac{dy}{y^2}$ (це рівняння з відокремленими змінними) знаходимо перший інтеграл $y^{-1}-e^{-x}=C_1$, а з рівняння $\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{ye^x}$, враховуючи, що $e^x=\frac{y}{1-yC_1}$, маємо ще один перший інтеграл $z-\frac{\ln|y|-x}{e^{-x}-y^{-1}}=C_2$. Таким чином, загальним інтегралом заданого рівняння є

$$\Phi\left(\frac{1}{y}-e^{-x},\, z-\frac{\ln|y|-x}{e^{-x}-y^{-1}}\right)=0,$$

а загальним розв'язком —

$$z=\frac{\ln|y|-x}{e^{-x}-y^{-1}}+\varphi\left(\frac{1}{y}-e^{-x}\right).\ \blacksquare$$

2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку. ***Задача Коші*** для квазілінійного рівняння (22.1), так само, як і для лінійного однорідного рівняння, полягає у знаходженні такого розв'язку $u=u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ цього рівняння, який задовольняє ***початкову умову***

$$u|_{x_n=x_{n0}}=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}), \tag{22.9}$$

де φ — задана неперервно диференційовна функція.

Покажемо, як знайти розв'язок задачі Коші для рівняння (22.1), знаючи його загальний розв'язок (22.7). Як і для однорідного рівняння, знаходження розв'язку зводиться до визначення вигляду функції Φ. Якщо записати початкову умову (22.9) у вигляді

$$u(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_{n0})-\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=0$$

і порівняти її з (22.7), то бачимо, що функцію Φ потрібно вибрати так, щоб

$$\Phi(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) - \\ - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \qquad (22.10)$$

де через $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n$ позначено функції, які отримуємо з інтегралів системи (22.5) заміною x_n її початковим значенням x_{n0}, тобто

$$\bar{\psi}_j = \psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (22.11)$$

Розв'язуючи систему (22.11) відносно x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, u, одержуємо:

$$x_j = \omega_j(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n), \; j = 1, 2, \ldots, n-1; \\ u = \omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n).$$

Якщо тепер в якості функції Φ взяти функцію

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) - \\ - \varphi\big(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)\big),$$

то умова (22.10), очевидно, справджується. Отже, формула

$$\omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) - \\ - \varphi\big(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)\big) = 0 \quad (22.12)$$

визначає розв'язок задачі Коші (22.1), (22.9) у неявному вигляді. Якщо (22.12) можна розв'язати відносно u, то одержимо розв'язок $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачі Коші у явному вигляді.

Таким чином, приходимо до такого ***правила розв'язування задачі Коші*** для квазілінійного рівняння (22.1):

1) *утворюємо відповідну систему характеристик і знаходимо n її незалежних інтегралів*:

$$\psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, u), \quad j = 1, \ldots, n; \qquad (22.13)$$

2) *замінюємо в інтегралах* (22.13) *незалежну змінну* x_n *її заданим значенням* $x_n = x_{n0}$:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \bar{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \bar{\psi}_2, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \bar{\psi}_{n-1} \end{cases} \tag{22.14}$$

і розв'язуємо систему (22.14) *відносно* x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, u:

$$x_j = \omega_j(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n),\ j = 1, \ldots, n; \quad u = \omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n);$$

3) *утворюємо співвідношення*

$$\omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) - \\ - \varphi\big(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)\big) = 0, \tag{22.15}$$

яке й визначатиме шуканий розв'язок задачі Коші (22.1), (22.9) *у неявному вигляді. Якщо* (22.15) *можна розв'язати відносно* u, *то матимемо загальний розв'язок у явному вигляді.*

Приклад 3. *Знайти інтегральну поверхню рівняння*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2,$$

яка проходить через лінію $y = 2$, $z = x^2$.

Розв'язання. Запишемо відповідну систему характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2}.$$

Першими інтегралами цієї системи, як легко перевірити, є

$$yx^2 = C_1 \quad \text{і} \quad x^2/2 - y^2/4 - z = C_2.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння можна записати у вигляді $\Phi\big(yx^2,\ x^2/2 - y^2/4 - z\big) = 0$, а загальним розв'язком є

$$z = x^2/2 - y^2/4 + \varphi(yx^2). \tag{22.16}$$

Функція φ згідно з початковою умовою задовольняє рівняння

$$x^2 = x^2/2 - 1 + \varphi(x^2) \quad \text{при} \quad \varphi(t) = t/2 + 1.$$

Отже, $\varphi(yx^2) = yx^2/2 + 1$, а з (22.16) знаходимо розв'язок заданої задачі Коші:

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{yx^2}{2} + 1. \ \blacksquare$$

3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку. Розглянемо нелінійне рівняння з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними. У загальному випадку таке рівняння можна записати у вигляді

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{22.17}$$

де $z = z(x, y)$ — шукана функція, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, F — задана неперервно диференційовна функція своїх аргументів у деякому околі початкової точки $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, яка залежить від p і q нелінійно.

Виявляється, що задача інтегрування одного рівняння вигляду (22.17) є складнішою, ніж інтегрування системи двох сумісних рівнянь вигляду (22.17).

Розглянемо систему

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ G(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases}$$

і припустимо, що у деякій області зміни x, y, z, p, q цю систему можна розв'язати відносно p і q, тобто

$$\begin{cases} p = A(x, y, z), \\ q = B(x, y, z), \end{cases} \tag{22.18}$$

де функції A і B — неперервно диференційовні в деякому околі початкової точки (x_0, y_0, z_0).

Знайдемо необхідну умову сумісності системи (22.18). Припустимо, що розв'язок $z = z(x, y)$ цієї системи має неперервні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ у деякому околі точки (x_0, y_0).

Диференціюючи рівняння системи (22.18) за змінними y і x відповідно, одержуємо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot B,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot A.$$

Прирівнюючи обидва вирази для другої мішаної похідної (результат не залежить від порядку диференціювання), одержуємо ***необхідну умову сумісності системи*** (22.18):

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B\,\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} - A\,\frac{\partial B}{\partial z} = 0. \qquad (22.19)$$

Рівність (22.19) перетвориться у тотожність, якщо замість z підставити розв'язок $z(x, y)$ системи (22.18). Якщо умова (22.19) не виконується тотожно, то (22.19) — рівняння з трьома змінними x, y, z, яке визначає z як функцію від x і y, $z = z(x, y)$, і попередні міркування показують, що розв'язок системи (22.18), якщо він існує, не може бути іншим, ніж цією функцією. Чи є функція $z = z(x, y)$ розв'язком системи (22.18), легко перевірити з допомогою підстановки.

З'ясуємо, за яких умов система (22.18) має безліч розв'язків, тобто через кожну точку (x_0, y_0, z_0) деякої області простору проходить інтегральна поверхня, яка відповідає певному розв'язку. У цьому випадку умова (22.19) повинна виконуватись у кожній точці згаданої області, тобто тотожно для (x, y, z).

Отже, тотожне виконання умови (22.19) необхідне для того, щоб система (22.18) мала безліч розв'язків, які залежать принаймні від однієї довільної сталої. Можна показати, що тотожне виконання умови (22.19) є також достатнім для сумісності системи (22.18), тобто за виконання цієї умови знаходження спільних розв'язків системи (22.18) зводиться до інтегрування двох звичайних диференціальних рівнянь.

Приклад 4. *Зінтегрувати систему рівнянь*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + yz, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 2xz.$$

Розв'язання. Вираз для лівої частини рівності (22.19):

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B\,\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} - A\,\frac{\partial B}{\partial z} =$$

$$= z + (z^2 + 2xz)(1 + y) - 2z - (z + yz)(2z + 2x) = -z(1 + z + yz)$$

не дорівнює тотожно нулю. Прирівнюючи його до нуля, одержуємо, що $z = 0$ і $z = -\frac{1}{1+y}$. З допомогою підстановки переконуємось, що тільки функція $z = 0$ є розв'язком системи.
***Відповідь*:** $z = 0$.

Приклад 5. *Зінтегрувати систему рівнянь*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2} + \frac{2z}{y} - y^2.$$

Розв'язання. Умова сумісності (22.19) виконується тотожно:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B\,\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} - A\,\frac{\partial B}{\partial z} = 2y - \frac{2}{y} \cdot y^2 \equiv 0.$$

Інтегруючи перше рівняння заданої системи за змінною x, знаходимо:

$$z = \int y^2 dx = xy^2 + u(y), \tag{22.20}$$

де $u(y)$ — довільна диференційовна функція змінної y.

Підставляючи у друге рівняння системи, одержуємо:

$$2xy + u'(y) = \frac{1}{y^2} + 2xy + \frac{2u}{y} - y^2 \quad \Rightarrow \quad u'(y) - \frac{2u}{y} = \frac{1}{y^2} - y^2.$$

Маємо лінійне рівняння першого порядку відносно невідомої функції u. Його загальним розв'язком є $u = -\frac{1}{3y} - y^3 + Cy^2$, де C — довільна стала. Підставляючи цей вираз для u у (22.20), одержуємо загальний розв'язок системи:

$$z = xy^2 - y^3 - \frac{1}{3y} + Cy^2. \ \blacksquare$$

4. Рівняння Пфаффа. ***Рівнянням Пфаффа*** називають рівняння вигляду

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0. \tag{22.21}$$

У рівняння (22.21) змінні x, y, z входять рівноправно, а отже, будь-яку з них можна прийняти за шукану функцію. Припустимо, що коефіцієнти P, Q, R визначені та неперервні разом з частинними похідними першого порядку в околі початкової точки (x_0, y_0, z_0) і у цій точці не перетворюються одночасно в нуль. Нехай, наприклад, $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді рівняння (22.21) можна записати у вигляді

$$dz = -\frac{P}{R}\,dx - \frac{Q}{R}\,dy.$$

Знайдемо умову, за якої рівняння Пфаффа має сім'ю розв'язків (інтегральних поверхонь), залежну від однієї довільної сталої. Оскільки на кожній інтегральній поверхні $z = z(x,y)$ справджується співвідношення $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = -\frac{P}{R}\,dx - \frac{Q}{R}\,dy.$$

Звідси, враховуючи незалежність диференціалів dx і dy, одержуємо, що шукані інтегральні поверхні повинні задовольняти систему рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}. \tag{22.22}$$

Таким чином, рівняння Пфаффа (22.21) рівносильне системі (22.22) і, отже, необхідно з'ясувати умови повної інтегровності цієї системи.

Записуючи умову (22.19) для системи (22.22), маємо:

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{P}{R^2}\frac{\partial R}{\partial y} + \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{P}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z}\right)\left(-\frac{Q}{R}\right) =$$
$$= -\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x} + \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{Q}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z}\right)\left(-\frac{P}{R}\right).$$

Домножуючи обидві частини на R^2 і згрупувавши доданки відносно P, Q і R, одержуємо рівність

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0. \quad (22.23)$$

Для зручності запам'ятовування рівність (22.23) можна записати у вигляді умовної рівності

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0,$$

якщо визначник «розкласти» за елементами першого рядка.

Якщо умова (22.23) виконується тотожно, то її називають ***умовою повної інтегровності рівняння Пфаффа***. За виконання цієї умови інтегрування рівняння Пфаффа зводиться до інтегрування системи (22.22). При цьому існує сім'я розв'язків, яка містить одну довільну сталу.

Приклад 6. *Зінтегрувати рівняння Пфаффа*

$$(2x^2+2xz+2xy^2-1)dx-2y\,dy-dz=0.$$

Розв'язання. Оскільки умова (22.23) повної інтегровності виконується тотожно:

$$(2x^2+2xz+2xy^2-1)\cdot(0-0)+(-2y)\cdot(2x-0)+(-1)\cdot(0-4xy)\equiv 0,$$

то задане рівняння має сім'ю інтегральних поверхонь, залежну від довільної сталої. Вважаючи шуканою функцією $z=z(x,y)$, замінимо задане рівняння рівносильною системою

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x^2+2xz+2xy^2-1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y \qquad (22.24)$$

і перевіримо для неї виконання умови сумісності (22.19):

$$4xy+2x(-2y)-0-0\cdot(2x^2+2xz+2xy^2-1)\equiv 0.$$

Отже, систему (22.24) можна зінтегрувати. Перше з рівнянь у (22.24) лінійне відносно z (якщо зафіксувати y). Інтегруючи його (за формулою (4.6) з лекції 4), знаходимо:

$$z = e^{x^2}\left(\int (2x^2 + 2xy^2 - 1)e^{-x^2}dx + C(y)\right),$$

де $C(y)$ — довільна диференційовна функція змінної y. Оскільки

$$\int (2x^2 + 2xy^2 - 1)e^{-x^2}dx = -y^2e^{-x^2} + \int 2x^2e^{-x^2}dx - \int e^{-x^2}dx =$$
$$= -y^2e^{-x^2} - xe^{-x^2} + \int e^{-x^2}dx - \int e^{-x^2}dx = -(y^2+x)e^{-x^2},$$

то

$$z = e^{x^2}\left(C(y) - (y^2+x)e^{-x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad z = C(y)e^{x^2} - y^2 - x.$$

Виберемо тепер $C(y)$ так, щоб функція z задовольняла друге рівняння з (22.24). Диференціюючи $z = C(y)e^{x^2} - y^2 - x$ за змінною y, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = C'(y)e^{x^2} - 2y \quad \Rightarrow \quad C'(y)e^{x^2} - 2y = -2y \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C(y) = C \quad \Rightarrow \quad z = Ce^{x^2} - y^2 - x. \ \blacksquare$$

Рекомендована література: [3, с. 383–456], [4, с. 209–219], [6, с. 280–305], [8, с. 463–470], [10, с. 282–300].

Питання до лекції 22

1. Яке рівняння з частинними похідними першого порядку називають квазілінійним?

2. Який вигляд має система характеристик для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку?

3. Як побудувати загальний розв'язок квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку?

4. Як формулюється задача Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку? Як знайти розв'язок задачі Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку?

5. Який загальний вигляд має система нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними? Як інтегруються така система?

6. Яке рівняння називають рівнянням Пфаффа? Якій системі рівносильне це рівняння? Якою є умова повної інтегровності рівняння Пфаффа?

Вправи до лекції 22

1. Зінтегруйте квазілінійні рівняння:

$$\text{а) } xy\tfrac{\partial z}{\partial x} - y^2\tfrac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \text{б) } xz^3\tfrac{\partial z}{\partial x} + yz^3\tfrac{\partial z}{\partial y} = x^2y^2.$$

2. Знайдіть інтегральні поверхні рівнянь, які проходять через задані лінії:

$$\text{а) } y^2\tfrac{\partial z}{\partial x} + xy\tfrac{\partial z}{\partial y} = x,\ x = 0,\ z = y^2;$$
$$\text{б) } x\tfrac{\partial z}{\partial x} + y\tfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy,\ x = 2,\ z = y^2 + 1.$$

3. Знайдіть поверхні, які задовольняють рівняння Пфаффа:

$$\text{а) } (x-y)\,dx + z\,dy - x\,dz = 0; \quad \text{б) } 3yz\,dx + 2xz\,dy + xy\,dz = 0.$$

Додаток 4

Застосування математичного пакета Maple для інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку

Для інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними в Maple використовується команда `pdsolve`, подібна до команди `dsolve`, див. [11, 16, 17, 19].

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 1,$$

де $z = z(x, y)$ (приклад 1 лекції 21, с. 274):

```
> pdsolve(diff(z(x,y),x)=2*x+y-1);
```

$$z(x, y) = x^2 + yx - x + \_F1(y).$$

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння з частинними похідними другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

(приклад 2 лекції 21, с. 275):

```
> pdsolve(diff(z(x,y),y,x)=1);
```

$$z(x, y) = \_F2(x) + \_F1(y) + yx.$$

Приклад 3. Зінтегрувати лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(приклад 4 лекції 21, с. 280):

```
> pdsolve(y*diff(z(x,y),x)-x*diff(z(x,y),y)=0);
```

$$z(x, y) = \_F1\left(x^2 + y^2\right).$$

Приклад 4. Зінтегрувати лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

(приклад 3 лекції 21, с. 278):

```
> pdsolve(x*diff(u(x,y,z),x)+y*diff(u(x,y,z),y)+
  z*diff(u(x,y,z),z)=0);
```

$$u(x, y, z) = \_F1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Приклад 5. Зінтегрувати квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u$$

(приклад 1 лекції 22, с. 286):

```
> pdsolve(x*diff(u(x,y,z),x)+y*diff(u(x,y,z),y)+
  z*diff(u(x,y,z),z)=u(x,y,z));
```

$$u(x, y, z) = \_F1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)x.$$

Приклад 6. Зінтегрувати квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$e^x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$$

(приклад 2 лекції 22, с. 287):

```
> pdsolve(exp(x)*diff(z(x,y),x)+y^2*diff(z(x,y),y)=
  y*exp(x)) assuming real;
```

$$z(x, y) = -\frac{y\mathrm{e}^x x}{y - \mathrm{e}^x} - \frac{y\mathrm{e}^x \ln\left(y^{-1}\right)}{y - \mathrm{e}^x} + \_F1\left(-\frac{(y - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^{-x}}{y}\right).$$

Конструкція `assuming real` ужита для того, щоб програма зробила деякі спрощення розв'язку в припущенні, що всі змінні і функції є дійсними. Зауваження щодо відсутності модуля в аргументу логарифма див. на с. 118 у прикладі 12.

Приклад 7. Знайти інтегральну поверхню лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку

$$(x^2+1)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

яка при $x = 0$ проходить через криву $z = y^2$ (приклад 6 лекції 21, с. 282).

З допомогою математичного пакета Maple неможливо знайти розв'язок задачі Коші для рівняння з частинними похідними в аналітичному вигляді (у вигляді формули). Але команда `PDEplot` з пакета `PDEtools` дозволяє побудувати відповідну інтегральну поверхню наближеними методами (команда описана у додатку 6 на с. 345):

```
> PDEtools[PDEplot]((x^2+1)*diff(z(x,y),x)+
  x*y*diff(z(x,y),y)=0,[0,t,t^2],t=-10..10,z=0..20,
  x=-10..10,numchar=200,scaling=constrained);
```

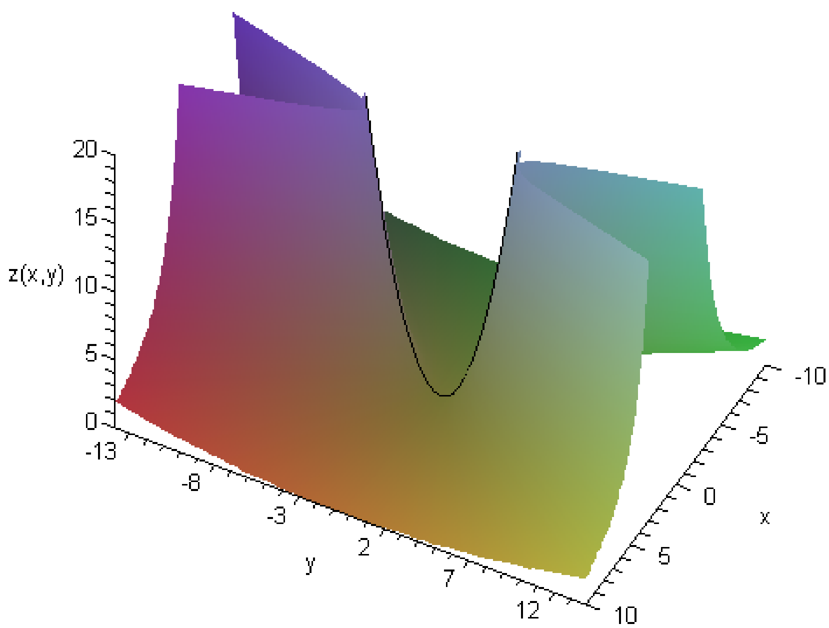


Рис. 1

Чорна лінія на рис. 1 — це парабола $z = y^2$, побудована у площині $x = 0$. Пропонуємо читачам самостійно побудувати графік функції $z = \frac{y^2}{x^2+1}$ (розв'язку прикладу 6 лекції 21) з допомогою команди `plot3d`, опис якої є у додатку 6 на с. 343.

Приклад 8. Знайти інтегральну поверхню квазілінійного рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2,$$

яка при $y = 2$ проходить через криву $z = x^2$ (приклад 3 лекції 22, с. 289).

Для побудови шуканої інтегральної поверхні знову використаємо команду `PDEplot` з пакета `PDEtools`:

```
> PDEtools[PDEplot](x*diff(z(x,y),x)-2*y*diff(z(x,y),y)
  =x^2+y^2,[t,2,t^2],t=-3..3,y=1..10);
```

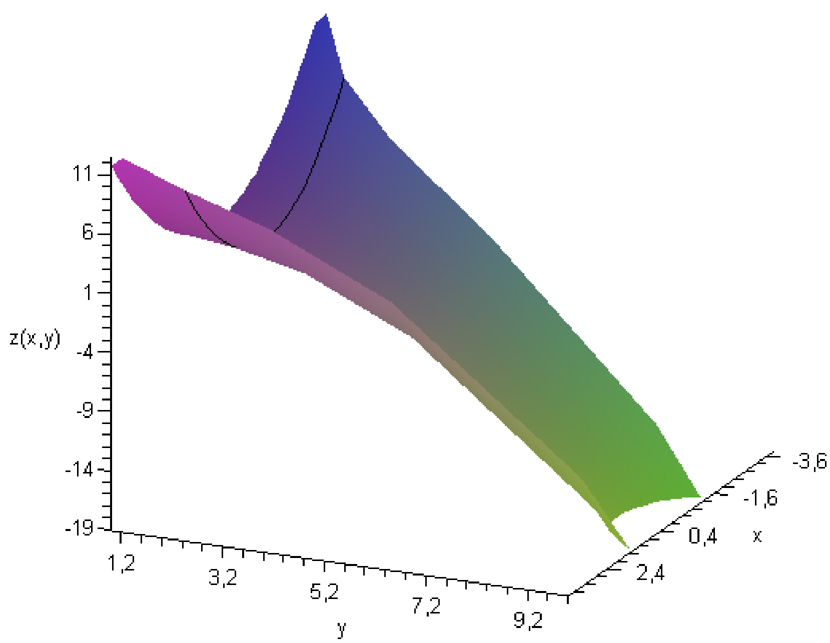


Рис. 2

Чорна лінія на рис. 2 — це крива з початкових умов, через яку проходить інтегральна поверхня.

Приклад 9. Зінтегрувати систему рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + yz, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 2xz$$

(приклад 4 лекції 22, с. 292):

```
> pdsolve({diff(z(x,y),x)=z(x,y)+y*z(x,y),
  diff(z(x,y),y)=z(x,y)^2+2*x*z(x,y)});
```

$$\{z(x,y) = 0\}.$$

Приклад 10. Зінтегрувати систему рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2} + \frac{2z}{y} - y^2$$

(приклад 5 лекції 22, с. 292):

```
> pdsolve({diff(z(x,y),x)=y^2,diff(z(x,y),y)=1/y^2+
  2*z(x,y)/y-y^2});
```

$$\{z(x,y) = \frac{-1 - 3\,y^4 + (3\,x + 3\,\_C1)\,y^3}{3\,y}\}.$$

Інші приклади застосування математичного пакета Maple для інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними можна знайти в [11, 16, 17, 19].

Розділ 5
СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Лекція 23. Основи теорії стійкості за Ляпуновим

План

1. Основні означення й поняття.
2. Дослідження на стійкість точок спокою.
3. Стійкість за першим наближенням.
4. Критерії Рауса–Гурвіца, Л'єнара–Шипара.

1. Основні означення й поняття. Створюючи прилади чи конструкції, які відповідають певним умовам, необхідно знати, як вестиме себе об'єкт при невеликих перерозподілах сил або при зміні початкових умов. Той об'єкт, експлуатаційні параметри якого не реагують на ці зміни, називають стійким.

Узагалі, створюючи диференціальну модель деякої прикладної задачі, зазвичай цікавляться не загальним, а частинним розв'язком диференціального рівняння, тобто розв'язком, який задовольняє певні початкові умови. Останні, як правило, беруться з досліду чи експерименту, а тому за їхню абсолютну точність ручатися не можна. Маючи це на увазі, деколи припускають, що незначні зміни початкових умов викликають незначну зміну самого розв'язку, інакше кажучи, що розв'язок неперервно залежить від початкових умов. Але часто незначні зміни початкових умов зумовлюють істотні відхилення розв'язків. Такі розв'язки називають нестійкими. Вони навіть наближено не описують явище чи процес, які розглядаються. Отже, одним з основних є питання про так звану стійкість розв'язків диференціальних рівнянь щодо різного роду збурень їхніх вхідних даних, тобто неточностей задання цих даних (початкових даних, правих частин рівнянь тощо).

Питання стійкості розв'язків диференціальних рівнянь — предмет ***теорії стійкості розв'язків***. Теорія стійкості застосовується у багатьох областях науки і природознавства, наприклад, механіці, екології, біології, економіці та інших науках.

Перейдемо до викладення основних понять теорії стійкості більш строго. Позначимо через $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$, $\ldots$, $y_n = y_n(t)$ дійсні функції, які характеризують стан механічного, електромеханічного чи іншого явища або процесу. Наприклад, так можуть позначатися координати, швидкості, сили струмів, величини напруг, температури або функції цих величин. Припустимо, що процес зміни величин y_1, y_2, $\ldots$, y_n з часом t описується нормальною системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{23.1}$$

з початковими умовами

$$y_1(t_0) = y_{10}, \quad y_2(t_0) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = y_{n0}. \tag{23.2}$$

Якщо розглядати y_1, y_2, $\ldots$, y_n як координати рухомої точки, то кожний розв'язок задачі (23.1), (23.2) називатимемо ***рухом***.

Якщо систему (23.1) розглядати на скінченному проміжку $|t - t_0| < T$, то відповідь на питання про вплив малих змін початкових умов (23.2) на відхилення розв'язків системи дає теорема 5 з лекції 8. Але у практичних задачах аргумент (ним, як правило, є час) може необмежено зростати. Тоді ця теорема не гарантує неперервної залежності розв'язків від початкових умов, тобто незначна зміна початкових умов може викликати істотні зміни у поведінці розв'язку при необмеженому зростанні значення аргументу. Отже, надалі вважатимемо, що $t \in [T, +\infty)$, тобто час може необмежено зростати.

Розв'язок $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (23.1) називають ***стійким*** (***стійким за Ляпуновим***), якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geqslant T$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що довільний інший розв'язок $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, цієї ж системи, початкові значення $y_j(t_0)$ якого задовольняють нерівності

$$|y_j(t_0) - \varphi_j(t_0)| < \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{23.3}$$

визначений для всіх $t \geqslant t_0$ і справджуються нерівності

$$|y_j(t) - \varphi_j(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad t \geqslant t_0. \tag{23.4}$$

Іншими словами, розв'язок $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (23.1) є стійким, якщо кожний розв'язок $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (23.1) з початковими умовами з δ-околу точки $\varphi_j(t_0)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, при $t_0 \leqslant t < +\infty$ існує і не виходить з ε-околу графіка розв'язку $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Розв'язок $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, називають ***асимптотично стійким***, якщо:

1) він стійкий;

2) усі розв'язки $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (23.1) з достатньо близькими початковими умовами при $t \to +\infty$ необмежено наближаються до $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, тобто з нерівностей (23.3) випливає, що

$$\lim_{t \to +\infty} |y_j(t) - \varphi_j(t)| = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{23.5}$$

Зауважимо, що умови 1 і 2 цього означення незалежні: з умови 1 не випливає умова 2 (бо з (23.4) не випливає (23.5)), а з умови 2 означення не завжди випливає умова 1.

Розв'язок $y_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи (23.1) називають ***нестійким***, якщо він не є стійким. Це означає, що існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якого як завгодно малого $\delta > 0$ знайдеться розв'язок системи (23.1) $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, для якого при виконанні нерівностей (23.3) принаймні для одного значення j матимемо, що $|y_j(t) - \varphi_j(t)| \geqslant \varepsilon$ для деякого $t \geqslant t_0$.

Як правило, для доведення нестійкості розв'язку користуються необмеженістю різниці $|y_j(t) - \varphi_j(t)|$ на інтервалі $[t_0, +\infty)$ або тим, що ця різниця стає нескінченно великою, коли $t \to +\infty$.

Розв'язок (рух), який відповідає початковим даним t_0, y_{10}, y_{20}, …, y_{n0}, називають ***незбуреним***, а розв'язок зі зміненими початковими даними t_0, $\tilde{y}_{10}$, $\tilde{y}_{20}$, …, $\tilde{y}_{n0}$ — ***збуреним*** розв'язком (рухом).

Приклад 1. *Дослідити на стійкість розв'язки задачі Коші* $y' = ky,\ y(t_0) = y_0$.
Розв'язання. Загальним розв'язком рівняння є $y(t) = Ce^{kt}$, а розв'язком заданої задачі —

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{23.6}$$

Задамо іншу початкову умову $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$. Тоді розв'язком цієї задачі (збуреним розв'язком) є

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{23.7}$$

Оцінимо різницю розв'язків (23.6) і (23.7):

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| = \left| y_0 e^{k(t-t_0)} - \tilde{y}_0 e^{k(t-t_0)} \right| = e^{k(t-t_0)} \, |y_0 - \tilde{y}_0|. \tag{23.8}$$

Якщо $k < 0$, то $e^{k(t-t_0)} < 1$ для всіх $t \geqslant t_0$. Отже, якщо $|y_0 - \tilde{y}_0| < \delta = \varepsilon$, то з (23.8) маємо, що

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| < |y_0 - \tilde{y}_0| < \varepsilon,$$

тобто розв'язок стійкий. У цьому випадку розв'язок також асимптотично стійкий, оскільки

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t) - \tilde{y}(t)| = \lim_{t\to+\infty} |y_0 - \tilde{y}_0| e^{k(t-t_0)} = 0.$$

Якщо $k > 0$, то розв'язок (23.6) нестійкий, бо яким би не було число t_0, для $t \geqslant t_0$, $y_0 \neq \tilde{y}_0$, різниця розв'язків (23.6) і (23.7) при зростанні t стає нескінченно великою, оскільки $\lim\limits_{t\to+\infty} |y_0 - \tilde{y}_0| e^{k(t-t_0)} = +\infty$.

Якщо $k = 0$, то розв'язок $y = y_0$ стійкий, але не асимптотично стійкий, бо вираз $|y_0 - \tilde{y}_0|$ не прямує до нуля, коли $t \to +\infty$.
Відповідь: розв'язок стійкий, якщо $k \leqslant 0$, у тому числі асимптотично стійкий, якщо $k < 0$, і нестійкий, якщо $k > 0$.

2. Дослідження на стійкість точок спокою. Дослідження на стійкість заданого розв'язку $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ системи (23.1) можна звести до дослідження на стійкість тривіального (нульового) розв'язку деякої іншої системи. Для цього у системі (23.1) перейдемо до нових невідомих функцій

$$x_j(t) = y_j(t) - \varphi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{23.9}$$

Отже, невідомі функції $x_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, — це відхилення старих невідомих функцій від функцій, які входять у розв'язок, що досліджується на стійкість. Величини $x_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, називають ***збуреннями***. Підставляючи (23.9) в (23.1), маємо:

$$y_j'(t) = x_j'(t) + \varphi_j'(t) = f_j(t, x_1(t) + \varphi_1(t), \dots, x_n(t) + \varphi_n(t)) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_j' = f_j(t, x_1 + \varphi_1, \dots, x_n + \varphi_n) - f_j(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n), \tag{23.10}$$

де $j = 1, 2, \dots, n$. Рівняння (23.10) називають диференціальними рівняннями збуреного руху. Кожному рухові системи (23.1) відповідає частинний розв'язок системи (23.10). Зокрема, незбуреному рухові системи (23.1) відповідає тривіальний розв'язок

$$x_j(t) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{23.11}$$

системи (23.10). Розв'язок (23.11) характерний тим, що точка $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ не рухається зі зміною t, а знаходиться на місці. Тривіальний розв'язок системи (23.10) і точку $(0, 0, \dots, 0)$ у цьому випадку називають ***положенням рівноваги*** системи (23.10) або ***точкою спокою***.

Отже, задача дослідження стійкості (асимптотичної стійкості, нестійкості) точки спокою системи (23.10) рівносильна задачі дослідження стійкості (асимптотичної стійкості, нестійкості) розв'язку системи (23.1). З урахуванням цього можемо сформулювати означення стійкості та асимптотичної стійкості інакше.

Нехай у системі (23.1) $f_j(t, 0, \dots, 0) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тривіальний розв'язок $\varphi_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, системи (23.1) називають ***стійким***, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$

таке, що кожний розв'язок $y_j = y_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, тієї ж системи, початкові значення $y_j(t_0)$ якого задовольняють нерівності $|y_j(t_0)| < \delta$, $j = 1, 2, \dots, n$, визначений для всіх $t \geqslant t_0$ і виконуються нерівності $|y_j(t)| < \varepsilon$, $j = 1, 2, \dots, n$, для $t \geqslant t_0$. Якщо, крім того, $\lim\limits_{t\to+\infty} |y_j(t)| = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, то тривіальний розв'язок $\varphi_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, є ***асимптотично стійким***.

Отже, стійкість тривіального розв'язку означає, що траєкторія довільного руху, початкова точка якої знаходиться у деякому δ-околі початку координат фазового простору $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ системи (23.1), для $t \geqslant t_0$ не виходить за межі довільного ε-околу точки спокою.

Легко показати, що це означення стійкості можна замінити таким: для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з нерівності $y_1^2(t_0) + y_2^2(t_0) + \ldots + y_n^2(t_0) < \delta^2$ випливатиме нерівність $y_1^2(t) + y_2^2(t) + \ldots + y_n^2(t) < \varepsilon^2$ для всіх $t \geqslant t_0$.

Приклад 2. *Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи* $x' = -\,y$, $y' = x$.

Розв'язання. Розв'язуючи систему і враховуючи початкові умови $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, знаходимо $x = x_0 \cos t - y_0 \sin t$, $y = x_0 \sin t + y_0 \cos t$, звідки $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Для будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ досить узяти $\delta \leqslant \varepsilon$, адже як тільки $x_0^2 + y_0^2 < \delta^2$, то $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$ для всіх $t > 0$. Отже, розв'язок $x = y = 0$ є стійким. ■

Приклад 3. *Дослідити на стійкість точку спокою системи* $x' = y$, $y' = 2x + y$.

Розв'язання. Розв'язуючи систему, знаходимо $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$, $y = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$. Враховуючи початкові умови $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, одержуємо, що $C_1 = (x_0 + y_0)/3$, $C_2 = (2x_0 - y_0)/3$, а тому

$$x = \frac{x_0 + y_0}{3} e^{2t} + \frac{2x_0 - y_0}{3} e^{-t}, \quad y = \frac{2}{3}\,(x_0 + y_0)\, e^{2t} - \frac{2x_0 - y_0}{3} e^{-t}.$$

Покладемо $y_0 = 2x_0$. Тоді, яким би малим не було число x_0, функції $|x|$ та $|y|$ необмежено зростатимуть при $t \to +\infty$, а тому розв'язок $x = y = 0$ є нестійким. ■

3. Стійкість за першим наближенням. У прикладах 1–3 диференціальні рівняння або системи можна зінтегрувати через елементарні функції. У таких випадках дослідити стійкість розв'язків можна без особливих труднощів. Але з практичної точки зору важливо вміти досліджувати на стійкість розв'язки системи (23.10), не маючи її загального розв'язку.

Припустимо, що праві частини системи (23.1) неперервні разом з частинними похідними до другого порядку включно. Нехай $y_j(x) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — точка спокою системи (23.1), тобто $f_j(t, 0, \ldots, 0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Використовуючи формулу Тейлора в околі початку координат, систему (23.1) можемо записати у вигляді:

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, 0, \ldots, 0) + \left.\frac{\partial f_j}{\partial y_1}\right|_{(t,0,\ldots,0)} \cdot y_1 + \left.\frac{\partial f_j}{\partial y_2}\right|_{(t,0,\ldots,0)} \cdot y_2 + \ldots$$

$$\ldots + \left.\frac{\partial f_j}{\partial y_n}\right|_{(t,0,\ldots,0)} \cdot y_n + R_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

де залишкові члени $R_j(t, y_1, \ldots, y_n)$ містять доданки не нижче другого порядку відносно y_1, y_2, $\ldots$, y_n. Якщо позначити $\left.\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\right|_{(t,0,\ldots,0)} = a_{ji}(t)$ і врахувати, що $f_j(t, 0, \ldots, 0) = 0$, то остаточно маємо систему

$$\begin{aligned} y_j' = a_{j1}(t)y_1 + a_{j2}(t)y_2 + \ldots + a_{jn}(t)y_n + \\ + R_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{23.12}$$

Систему рівнянь

$$y_j' = a_{j1}(t)y_1 + a_{j2}(t)y_2 + \ldots + a_{jn}(t)y_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{23.13}$$

називають ***системою першого наближення***, а задачу на стійкість точки спокою цієї системи — задачею на стійкість розв'язку в першому наближенні.

Зауважимо, що дослідження на стійкість точки спокою для лінійної системи (23.13) є досі не розв'язаною проблемою, бо не існує загального способу інтегрування системи лінійних диференціальних рівнянь з довільними змінними коефіцієнтами.

Розглянемо окремий випадок системи (23.13), коли її коефіцієнтами є сталі:

$$y_j' = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{23.14}$$

і дослідимо питання про стійкість тривіального розв'язку системи (23.14). Нагадаємо (лекція 19), що розв'язки цієї системи мають вигляд $y_1 = A_1e^{k_1t}$, $y_2 = A_2e^{k_2t}$, $\ldots$, $y_n = A_ne^{k_nt}$, де k_1, k_2, $\ldots$, k_n — характеристичні числа системи (23.14), а для існування нетривіальних розв'язків необхідно й достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{23.15}$$

Розглянемо окремі випадки, пов'язані з виглядом коренів рівняння (23.15) (характеристичних чисел системи (23.14)).

1. *Якщо всі характеристичні числа системи* (23.14) *мають від'ємні дійсні частини* (*тобто або вони дійсні від'ємні числа, або комплексні числа, дійсні частини яких від'ємні*), *то тривіальний розв'язок системи* (23.14) *асимптотично стійкий.* Припустимо, що усі характеристичні числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ прості і дійсні. Оскільки $k_j < 0$, то всі функції $y_{ij} = A_{ij}e^{k_jt}$ прямують до нуля при $t \to +\infty$. Якщо $k_j = \alpha_j + i\beta_j$, $i = \sqrt{-1}$, $\alpha_j < 0$, то, подавши e^{k_jt} у тригонометричній формі $e^{k_jt} = e^{\alpha_jt}(\cos\beta_jt + i\sin\beta_jt)$, переконуємось, що при $t \to +\infty$ функції $y_{ij} = A_{ij}e^{k_jt} \to 0$ (якщо $\alpha_j < 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\alpha_jt} = 0$). Ці висновки не зміняться, якщо деякі з характеристичних чисел (або всі) є кратними. Справді, якщо число k_j має кратність s, то йому відповідають розв'язки $P_{s-1}(t)e^{k_jt}$, де $P_{s-1}(t)$ — багаточлен степеня, не вищого за $s-1$, і $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{k_jt}P_{s-1}(t) = 0$, бо $k_j < 0$, а показникова функція зростає швидше, ніж степенева.

2. *Якщо хоча б одне характеристичне число системи* (23.14) *має додатну дійсну частину* (*тобто або це число дода-*

тне, або комплексне з додатною дійсною частиною), *то тривіальний розв'язок системи* (23.14) *нестійкий.* Справді, у цьому випадку принаймні одна з функцій $e^{k_1 t}$, $e^{k_2 t}$, $\ldots$, $e^{k_n t}$ необмежено зростає за модулем при $t \to +\infty$, і тому загальний розв'язок системи необмежено зростає при зростанні t. Отже, розв'язки, близькі до точки спокою $y_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, за початковими даними, зі зростанням t необмежено від неї віддалятимуться.

3. *Якщо серед характеристичних чисел системи* (23.14) *немає чисел з додатними дійсними частинами, але є прості числа з нульовою дійсною частиною, то тривіальний розв'язок системи* (23.14) *є стійким, але не асимптотично стійким.* У цьому випадку всі $y_j(t)$ обмежені за модулем для будь-якого $t > t_0$, якими б не були початкові значення цих функцій. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при виборі $|\tilde{y}_{j0}| < \delta$, $j = 1, 2, \ldots, n$, будемо мати $|y_j(t)| < \varepsilon$ для всіх $t > t_0$. Таким чином, тривіальний розв'язок системи (23.14) є стійким. Але він не асимптотично стійкий, бо для довільних $\tilde{y}_{j0}$ не будуть одночасно прямувати до нуля всі функції $y_j(t)$ при $t \to +\infty$.

4. *Якщо серед характеристичних чисел системи* (23.14) *немає чисел з додатними дійсними частинами, але є кратні числа з нульовими дійсними частинами, то можливі як стійкі, так і нестійкі тривіальні розв'язки.*

Повернімось до системи (23.12).

Теорема 1 (Ляпунова). *Нехай функції* $R_j(t, y_1, \ldots, y_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *у системі* (23.12) *неперервні за сукупністю змінних і нескінченно малі вище першого порядку при* $y_i \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *тобто для всіх* $t \geqslant t_0$ *і* $|y_i| < d$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$|R_j(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M \left(|y_1|^{1+\alpha} + |y_2|^{1+\alpha} + \ldots + |y_n|^{1+\alpha}\right)$$

або

$$|R_j(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \omega(y)|y|, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

де $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$, α, M — *додатні сталі,* $\omega(y) \to 0$ *при* $|y| \to 0$. *Нехай, крім того,* $a_{jk}(t) = a_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, *де* a_{jk} — *сталі. Тоді якщо характеристичні числа системи* (23.14) *мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний розв'язок системи* (23.1) *асимптотично стійкий*; *якщо хоча б одне характеристичне число має додатну дійсну частину, то тривіальний розв'язок системи* (23.1) *нестійкий.*

Якщо дійсні частини всіх характеристичних чисел недодатні, причому дійсна частина хоча б одного з них дорівнює нулю, то дослідження на стійкість за першим наближенням, узагалі кажучи, неможливе (починають впливати нелінійні члени R_i).

Приклад 4. *Дослідити на стійкість за першим наближенням тривіальний розв'язок системи*

$$\begin{cases} x' = \sqrt{1+4y} - e^{3(x+y)}, \\ y' = \sin x + \ln(1-y). \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи формулу Тейлора для функції $f(x,y)$ двох змінних з залишковим членом у формі Пеано і обмежившись похідними першого порядку:

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)\cdot x + f'_y(0,0)\cdot y + o(\rho),$$

де $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $o(\rho)$ — нескінченно мала величина при $\rho \to 0$ більш високого порядку, ніж ρ, виділимо лінійні частини правих частин системи:

$$\begin{gathered} \sqrt{1+4y} - e^{3(x+y)} = -3x - y + R_1(x,y), \\ \sin x + \ln(1-y) = x - y + R_2(x,y), \end{gathered}$$

де функції $R_j(x,y) = o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$, $j = 1,2$, задовольняють умови теореми 1.

Знайдемо характеристичні числа відповідної системи першого наближення

$$\begin{cases} x' = -\,3x - y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{vmatrix} -3-k & -1 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2+4k+4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = -2.$$

Оскільки обидва характеристичні числа від'ємні, то тривіальний розв'язок заданої системи асимптотично стійкий. ■

4. Критерії Рауса–Гурвіца, Л'єнара–Шипара. Як випливає з пункту 3 цієї лекції, розв'язуючи задачі на стійкість для систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, важливо знати знаки дійсних частин характеристичних чисел.

Розглянемо алгебричне рівняння

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0, \quad a_0 > 0. \tag{23.16}$$

Нагадаємо деякі твердження, доведення яких можна знайти у підручниках з лінійної алгебри.

Необхідною умовою того, що всі дійсні частини коренів рівняння (23.16) *від'ємні, є нерівності* $a_j > 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Тепер наведемо необхідні і достатні умови, за виконання яких дійсні частини характеристичних чисел будуть від'ємними. Позначимо

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{vmatrix},$$

де $a_j = 0$, якщо $j > n$.

Теорема 2 (критерій Рауса–Гурвіца). *Дійсні частини коренів рівняння* (23.16) *від'ємні тоді і тільки тоді, коли* $\Delta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 3 (критерій Л'єнара–Шипара). *Дійсні частини коренів рівняння* (23.16) *від'ємні тоді і тільки тоді, коли*

$$a_j > 0,\ j = 0, 1, \ldots, n; \quad \Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0,\ \ldots .$$

Приклад 5. *Дослідити на стійкість точку спокою рівняння* $y^{(4)} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0$.

Розв'язання. Скористаємося критерієм Рауса–Гурвіца. Складемо характеристичне рівняння: $k^4+5k^3+13k^2+19k+10=0$. Оскільки

$$\Delta_1 = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10 \cdot \Delta_3 > 0,$$

то точка спокою — асимптотично стійка. ■

Приклад 6. *Дослідити на стійкість точку спокою рівняння* $y^{(5)}+4y^{(4)}+16y'''+25y''+13y'+9y=0$.

Розв'язання. Оскільки всі коефіцієнти характеристичного рівняння $k^5+4k^4+16k^3+25k^2+13k+9=0$ додатні й

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} > 0, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 16 & 4 & 1 \\ 9 & 13 & 25 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 13 \end{vmatrix} > 0,$$

то згідно з критерієм Л'єнара–Шипара точка спокою заданого рівняння — асимптотично стійка. ■

Рекомендована література: [3, с. 271–281, 289–296], [4, с. 184–187, 191–195], [6, с. 231–252], [8, с. 390–416], [10, с. 229–241].

Питання до лекції 23

1. Що вивчає теорія стійкості розв'язків диференціальних рівнянь? Чому так важливо з практичної точки зору знати, чи є розв'язок диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь стійким?

2. Який розв'язок системи диференціальних рівнянь є стійким, асимптотично стійким, нестійким? Дайте геометричні трактування цих понять.

3. Який розв'язок системи диференціальних рівнянь називають незбуреним (збуреним)?

4. Що називають положенням рівноваги (точкою спокою) системи?

5. У чому полягає основна ідея дослідження на стійкість розв'язку в першому наближенні?

6. Як дослідити на стійкість точку спокою нормальної системи зі сталими коефіцієнтами? Коли точка спокою є асимптотично стійкою, стійкою, але не асимптотично стійкою, нестійкою? Якими повинні бути характеристичні числа, щоб система могла мати як стійкі, так і нестійкі тривіальні розв'язки?

7. Як формулюються критерії Рауса–Гурвіца і Л'єнара–Шипара про невід'ємність дійсних частин характеристичних чисел? Як ці критерії використовують для дослідження на стійкість розв'язків лінійних рівнянь (систем) зі сталими коефіцієнтами?

Вправи до лекції 23

1. Використовуючи означення стійкості, дослідіть на стійкість розв'язки задач Коші рівнянь і систем:

$$\text{а) } y' = 2x(1+y), \;\; y(0)=0; \quad \text{б) } y' = y + x, \;\; y(0) = 1;$$
$$\text{в) } \begin{cases} y' = -y - 9z, \;\; y(0) = 0, \\ z' = y - z, \;\; z(0) = 0. \end{cases}$$

2. Дослідіть на стійкість точку спокою систем:

$$\text{а) } \begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + 5y_3, \\ y_2' = -2y_1 + y_3, \\ y_3' = -3y_3; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - 2y_2, \\ y_3' = y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

3. Дослідіть на стійкість за першим наближенням точку спокою систем:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = 3yz - y + z, \\ z' = 4y^4 + z^3 + 2y - 3z; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y' = -y + z + y^2 \sin z, \\ z' = -y - 4z + 1 - \cos z^2. \end{cases}$$

4. Використовуючи критерії Рауса–Гурвіца або Л'єнара–Шипара, дослідіть на стійкість тривіальний розв'язок рівнянь:

$$\text{а) } y''' - 3y' + 5y = 0; \quad \text{б) } y^{(4)} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0;$$
$$\text{в) } y^{(5)} + 4y^{(4)} - 5y''' + 15y'' - 3y' + 12y = 0.$$

Лекція 24. Теорема Ляпунова. Фазова площина

План

1. Дослідження на стійкість з використанням функцій Ляпунова.

2. Класифікація точок спокою автономної системи.

1. Дослідження на стійкість з використанням функцій Ляпунова. У попередній лекції розглядались деякі питання, пов'язані з дослідженням на стійкість розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь. При цьому використовувалась відповідна система першого наближення. Але заміна нелінійної системи (23.12) лінійною системою (23.13) є фактично заміною однієї проблеми іншою, і між ними може не бути нічого спільного. Можна навести приклади таких систем диференціальних рівнянь, дослідження яких за першим наближенням дає стійкість незбуреного руху, хоча насправді він нестійкий, і навпаки. Водночас відомі приклади, коли перше наближення повністю розв'язує проблему стійкості.

Наступна теорема дає відповідь на питання про стійкість і асимптотичну стійкість тривіального розв'язку $y_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, нормальної нелінійної системи

$$y'_j = f_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (24.1)$$

Теорема 1 (Ляпунова). *Якщо існує диференційовна функція $V = V(y_1, \ldots, y_n)$, яка задовольняє умови*:

1) $V \geqslant 0$ *і* $V = 0$ *тільки тоді, коли* $y_1 = \ldots = y_n = 0$;

2) *повна похідна функції V вздовж фазової траєкторії* (*тобто вздовж розв'язку $y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системи* (24.1)) *недодатна, тобто*

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \cdot f_j(t, y_1, \ldots, y_n) \leqslant 0, \quad t \geqslant t_0,$$

то тривіальний розв'язок системи (24.1) *стійкий.*

Якщо замість умови 2) *виконується нерівність*

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\beta < 0$$

для $t \geqslant t_1 > t_0$ *і* $0 < \delta_1 \leqslant y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant \delta_2$, *де* δ_1, δ_2, β *— сталі, то тривіальний розв'язок системи* (24.1) *асимптотично стійкий.*

Доведення цієї теореми можна знайти в [3, с. 281–284].

Функцію V з теореми 1 називають ***функцією Ляпунова***. Загального способу побудови функції Ляпунова немає. Її рекомендується шукати у вигляді $V = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$. З умови 1 теореми 1 випливає, що квадратична форма V повинна бути додатно визначеною. Яким чином вибрати коефіцієнти a_{ij}, щоб форма V була додатно визначеною, вказується у ***критерії Сильвестра***, відомому з курсу алгебри: потрібно, щоб

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

У простіших випадках функцію Ляпунова шукають у вигляді $V(x,y) = ax^2 + by^2$, $V(x,y) = ax^4 + by^4$, $V(x,y) = ax^4 + by^2$, де $a > 0$, $b > 0$, тощо.

Приклад 1. *Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи*

$$x' = -x^5 - y, \quad y' = x - y^3.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $V(x,y) = x^2 + y^2$. Вона задовольняє обидві умови теореми 1. Справді, $V \geqslant 0$ і $V = 0$ тільки тоді, коли $x = y = 0$; вздовж розв'язку x, y системи

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(-x^5 - y) + 2y(x - y^3) =$$
$$= -2(x^6 + y^4) \leqslant 0.$$

Згідно з теоремою 1 тривіальний розв'язок системи стійкий. А оскільки поза околом початку координат ($x^2 + y^2 \geqslant \delta > 0$) маємо

$\frac{dV}{dt} \leqslant -\beta < 0$, де β — мінімум функції $2(x^6 + y^4)$ поза колом $x^2 + y^2 = \delta$, то розв'язок $x = y \equiv 0$ асимптотично стійкий. ■

Приклад 2. *Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи*

$$x' = 2y^3 - x^5, \quad y' = -x - y^3 - y^5.$$

Розв'язання. Шукаємо функцію Ляпунова у вигляді $V(x, y) = V_1(x) + V_2(y)$. Тоді

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot f_2(x, y) =$$
$$= V_1'(x)(2y^3 - x^5) + V_2'(y)(-x - y^3 - y^5) =$$
$$= -x^5 V_1'(x) - (y^3 + y^5) V_2'(y) + 2y^3 V_1'(x) - x V_2'(y).$$

Нехай, наприклад, $2y^3 V_1'(x) - x V_2'(y) \equiv 0$. Тоді

$$\frac{V_1'(x)}{x} \equiv \frac{V_2'(y)}{2y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1'(x)}{x} = \mu, \ \frac{V_2'(y)}{2y^3} = \mu \ \ (\mu = \text{const}) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad V_1(x) = \frac{\mu}{2} x^2, \quad V_2(y) = \frac{\mu}{2} y^4.$$

Нехай $\mu = 2$. Тоді $V(x, y) = x^2 + y^4$, $V(x, y) > 0$, якщо $x^2 + y^2 \neq 0$ і $V(0, 0) = 0$. Окрім того,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot f_2(x, y) = -(2x^6 + 4y^6 + 4y^8) \leqslant -\beta < 0,$$

де β — мінімум функції $f(x, y) = 2x^6 + 4y^6 + 4y^8$ поза колом з центром у початку координат. З теореми 1 випливає асимптотична стійкість тривіального розв'язку системи. ■

Пропонуємо читачам самостійно переконатися у тому, що дати однозначну відповідь про стійкість тривіальних розв'язків систем з прикладів 1, 2 за першим наближенням неможливо.

2. Класифікація точок спокою автономної системи. Розглянемо поведінку на фазовій площині[9] $\mathbf{R}^2$ фазових траєкторій автономної системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \tag{24.2}$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — неперервно диференційовні в деякій області (або в усій площині $\mathbf{R}^2$) функції. Система (24.2) може мати лише три типи фазових траєкторій: точка, замкнена траєкторія (цикл) і незамкнена траєкторія. Розв'язок, траєкторією якого є точка (x_0, y_0) (положення рівноваги), є сталим $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ (для будь-якого $t \in \mathbf{R}$). Замкненій траєкторії відповідає періодичний розв'язок, незамкненій — неперіодичний.

Основною задачею якісного дослідження системи (24.2) є одержання ***фазового портрета*** системи, тобто картини розбиття фазової площини $\mathbf{R}^2$ на траєкторії.

Для побудови фазового портрета системи (24.2) потрібно знати поведінку траєкторій в околах так званих особливих траєкторій: положень рівноваги, граничних циклів і деяких незамкнених кривих, які відділяють сім'ї траєкторій одну від одної. ***Граничним циклом*** системи (24.2) називають такий цикл, деякий окіл якого цілком заповнений траєкторіями, вздовж яких точка $(x(t),\, y(t))$ необмежено наближається до нього при $t \to +\infty$ або $t \to -\infty$.

Розглянемо випадок, коли система (24.2) є лінійною:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{24.3}$$

де $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$ — невироджена матриця з дійсними сталими елементами ($\Delta \equiv \det A \neq 0$).

Системі (24.3) відповідає одне рівняння з дробово-лінійною правою частиною

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}, \tag{24.4}$$

[9] Означення фазової площини наведено у п. 2 лекції 18.

тобто всі інтегральні криві рівняння (24.4) є траєкторіями системи (24.3). Але цим не вичерпуються всі траєкторії системи (24.3), бо вона допускає рух $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, траєкторією якого є точка $x = y = 0$ (точка спокою).

Французький математик А. Пуанкаре показав, що можливими є кілька випадків, кожен з яких відповідає за розташування інтегральних кривих в околі особливої точки $(0, 0)$ або, що те саме, за розташування траєкторій системи (24.3) в околі точки спокою $(0, 0)$.

Позначимо через k_1 і k_2 — корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = k^2 - (a_{11} + a_{22})k + \Delta = 0. \tag{24.5}$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то з (24.5) випливає, що $k = 0$ не є характеристичним числом.

Випадок 1. *Корені k_1 і k_2 — дійсні та різні.* Нехай $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ — власні вектори матриці A, що відповідають кореням k_1 і k_2, тобто

$$\begin{cases} (a_{11} - k_1)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k_1)\alpha_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (a_{11} - k_2)\beta_1 + a_{12}\beta_2 = 0, \\ a_{21}\beta_1 + (a_{22} - k_2)\beta_2 = 0. \end{cases} \tag{24.6}$$

Згідно з теоремою 3 лекції 12 загальним розв'язком системи (24.3) є

$$x = C_1\alpha_1 e^{k_1 t} + C_2\beta_1 e^{k_2 t}, \quad y = C_1\alpha_2 e^{k_1 t} + C_2\beta_2 e^{k_2 t}, \tag{24.7}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Якщо $k_1 < 0$, $k_2 < 0$, то з (24.7) випливає, що точка спокою $x = y = 0$ є асимптотично стійкою. Справді, якщо, наприклад, $t_0 = 0$, то розв'язок (24.7), який проходить через точку (x_0, y_0), у момент часу t_0 визначається сталими C_1 і C_2, які знаходяться із системи рівнянь

$$x_0 = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1, \quad y_0 = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2,$$

де $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 \neq 0$. Але тоді $C_1 = Ax_0+By_0$, $C_2 = Dx_0+Ey_0$, де A, B, D, E — деякі сталі. Враховуючи, що $|e^{k_1 t}| \leqslant 1$, $|e^{k_2 t}| \leqslant 1$ для $k_1 < 0$, $k_2 < 0$, маємо оцінки

$$|x| \leqslant |Ax_0 + By_0| \cdot |\alpha_1| + |Dx_0 + Ey_0| \cdot |\beta_1|,$$
$$|y| \leqslant |Ax_0 + By_0| \cdot |\alpha_2| + |Dx_0 + Ey_0| \cdot |\beta_2|.$$

Звідси випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що як тільки $|x_0| < \delta$, $|y_0| < \delta$, то $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ $(t > 0)$, тобто точка спокою $(0, 0)$ є стійкою. Окрім того, оскільки $e^{k_j t} \to 0$ $(k_j < 0)$ при $t \to +\infty$, то з (24.7) випливає, що точка $(0, 0)$ також є асимптотично стійкою. Якщо виключити аргумент t із системи (24.7), то одержана при цьому функція $y = f(x)$ визначатиме траєкторію руху в декартовій системі координат Oxy.

Матеріальна точка, яка знаходиться у початковий момент часу $t = t_0$ в δ-околі початку координат, для досить великих t переходить у точку, яка належить ε-околу початку координат і при $t \to +\infty$ прямує до початку координат. Таку точку спокою називають ***стійким вузлом*** (рис. 24.1).

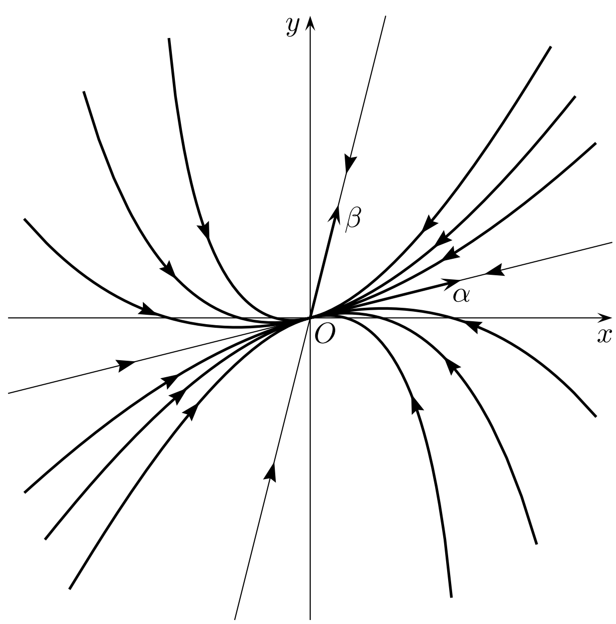


Рис. 24.1

На рис. 24.1 зображено розташування траєкторій, яке відповідає цьому випадку. Стрілками вказаний напрям руху по траєкторії при $t \to +\infty$. Усі траєкторії, крім однієї, в точці $(0,0)$ мають спільну дотичну.

Якщо $|k_1| < |k_2|$, то кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює α_2/α_1. Справді, з (24.3) і (24.7) маємо ($C_1 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}\big(C_1\alpha_1 e^{k_1t} + C_2\beta_1 e^{k_2t}\big) + a_{22}\big(C_1\alpha_2 e^{k_1t} + C_2\beta_2 e^{k_2t}\big)}{a_{11}(C_1\alpha_1 e^{k_1t} + C_2\beta_1 e^{k_2t}) + a_{12}(C_1\alpha_2 e^{k_1t} + C_2\beta_2 e^{k_2t})} =$$
$$= \frac{a_{21}\big(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{(k_2-k_1)t}\big) + a_{22}\big(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{(k_2-k_1)t}\big)}{a_{11}\big(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{(k_2-k_1)t}\big) + a_{12}\big(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{(k_2-k_1)t}\big)},$$

а, отже,

$$\frac{dy}{dx} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a_{21}C_1\alpha_1 + a_{22}C_1\alpha_2}{a_{11}C_1\alpha_1 + a_{12}C_1\alpha_2} = \frac{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2}{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2} = \frac{k_1\alpha_2}{k_1\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

бо згідно з (24.6) $a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = k_1\alpha_2,\ a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = k_1\alpha_1$.

Якщо $\alpha_1 = 0$, то аналогічно одержуємо, що

$$\frac{dx}{dy} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0.$$

Якщо $C_1 = 0$, то з (24.7) одержуємо одну траєкторію — пряму $y = \frac{\beta_2}{\beta_1}x$, дотична до якої має кутовий коефіцієнт β_2/β_1.

Таким чином, дотична до траєкторій, в яких $C_1 \neq 0$, паралельна до власного вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, який відповідає найменшому за модулем характеристичному числу k_1 (якщо $\alpha_1 = 0$, то вектор напрямлений уздовж осі Oy). Крім того, при $C_1 = 0$ є одна траєкторія — пряма $y = \frac{\beta_2}{\beta_1}x$, яка паралельна до другого власного вектора $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, що відповідає більшому за модулем характеристичному числу k_2.

Якщо тепер $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, то з (24.7) випливає, що точка спокою $x = y = 0$ є нестійкою, бо $e^{k_jt} \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Таку точку спокою називають ***нестійким вузлом***. Цей випадок отримуємо з попереднього заміною t на $(-t)$, а тому рух точки по траєкторії відбувається у протилежному напрямі (рис. 24.2).

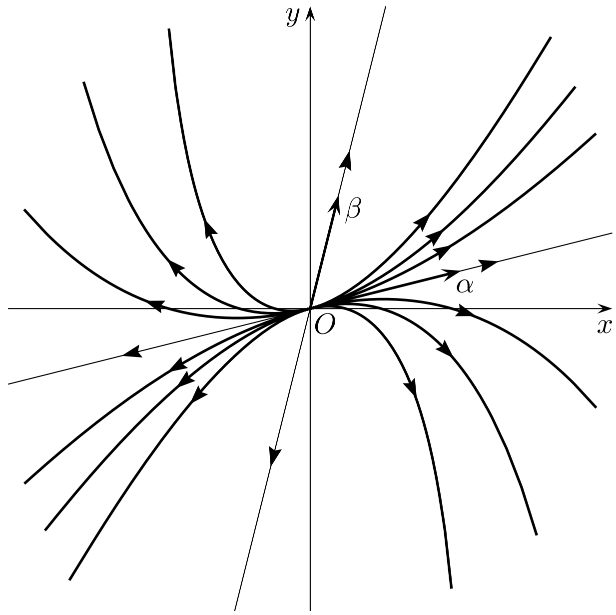


Рис. 24.2

Нарешті, якщо $k_1 < 0$, $k_2 > 0$ або $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, то точка спокою є нестійкою, бо $e^{k_2 t} \to +\infty$ або $e^{k_1 t} \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Точки, які розташовані в δ-околі початку координат, по траєкторії

$$x = C_2 \beta_1 e^{k_2 t}, \quad y = C_2 \beta_2 e^{k_2 t}$$

рухаються у нескінченність. Однак у цьому випадку є траєкторія, по якій рух точки відбувається у напрямі до початку координат при $t \to +\infty$, а саме:

$$x = C_1 \alpha_1 e^{k_1 t}, \quad y = C_1 \alpha_2 e^{k_1 t}. \tag{24.8}$$

Цією траєкторією є пряма $\alpha_1 y - \alpha_2 x = 0$, яку одержують з (24.8), виключивши змінну t. Таку точку спокою називають ***сідлом*** (на рис. 24.3 наведено випадок, коли $k_1 < 0$, $k_2 > 0$, на рис. 24.4 — випадок, коли $k_1 > 0$, $k_2 < 0$).

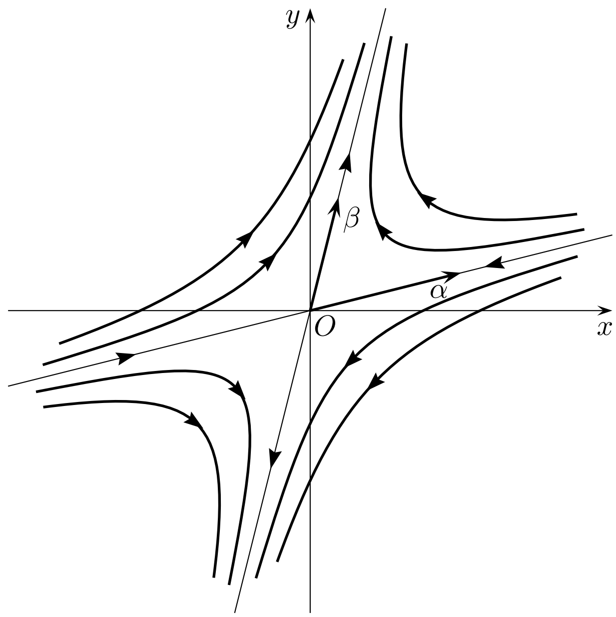


Рис. 24.3

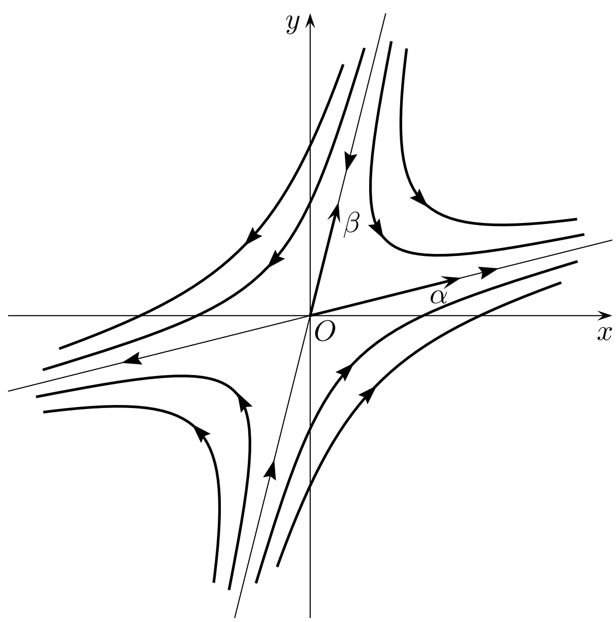


Рис. 24.4

Випадок 2. *Корені* k_1 *і* k_2 *— комплексно-спряжені*: $k_{1,2} = p \pm iq$, $q \neq 0$. Загальний розв'язок системи (24.3) можна записати у вигляді (24.7), де вектори $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ і $\vec{\beta} = \bar{\vec{\alpha}} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ мають комплексні координати. Тоді розв'язок системи (24.3) можна записати у вигляді

$$x = e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \quad y = e^{pt}(a \cos qt + b \sin qt), \quad (24.9)$$

де C_1, C_2 — довільні сталі, a і b — лінійні комбінації цих сталих.

Якщо $p = 0$, то траєкторії (24.9) для різних C_1, C_2 (на підставі періодичності множників у дужках) є замкненими кривими — еліпсами з центрами у точці $(0, 0)$ (рис. 24.5). Цю точку називають ***центром***. Якщо $p = 0$, то точка $(x(t), y(t))$ рухається по одному з еліпсів указаної сім'ї, обходячи його безліч разів. Вона, очевидно, не прямує до жодної границі при $t \to +\infty$, тобто точка спокою $(0, 0)$ — не асимптотично стійка (але вона — стійка).

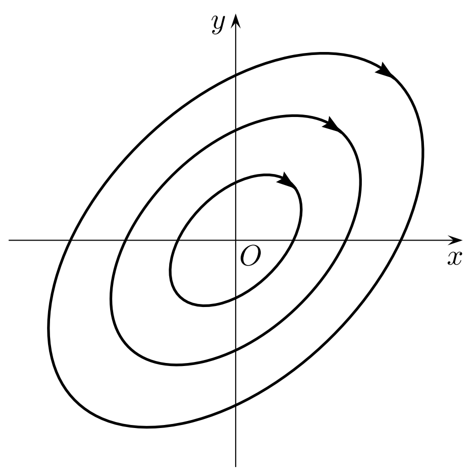


Рис. 24.5

Нехай тепер $p < 0$. З (24.9) випливає, що у цьому випадку точка (x, y) при $t \to +\infty$ прямує до початку координат — точки $x = 0$, $y = 0$, яку називають ***стійким фокусом***. Наявність множника $e^{pt} \to 0$ $(t \to +\infty)$ перетворює замкнені криві у спіралі, які асимптотично наближаються при $t \to +\infty$ до початку координат (рис. 24.6). Точки, які розташовані при $t = t_0$ у довільному δ-околі початку координат, для достатньо великого t потрапляють у заданий ε-окіл початку координат.

Траєкторії, які прямують до фокуса, мають таку властивість, що дотичні до них при $t \to +\infty$ не прямують до жодної границі. Цим фокус відрізняється від вузла.

У випадку $p < 0$ точка $x = 0$, $y = 0$ є асимптотично стійкою.

Якщо дійсна частина p чисел k_1 і k_2 додатна, то цей випадок переходить у попередній після заміни t на $-t$. Отже, траєкторії зберігають таку ж форму, як на рис. 24.6, однак рух точки відбуватиметься у протилежному напрямі. Оскільки $e^{pt} \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то точки, які знаходяться у початковий момент часу в околі початку координат, переходять у нескінченність. Таку точку спокою називають ***нестійким фокусом*** (рис. 24.7).

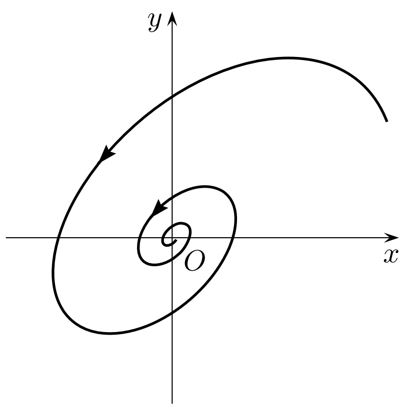


Рис. 24.6

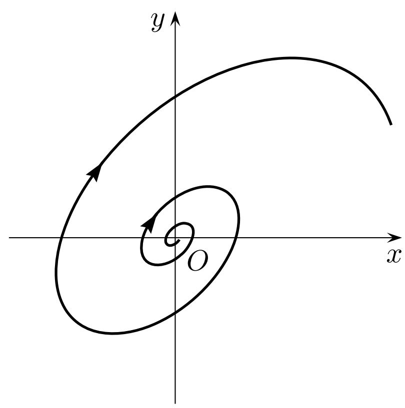


Рис. 24.7

Випадок 3. *Корені рівні*: $k_1 = k_2$. Тоді k_1, k_2 — дійсні, а загальний розв'язок системи (24.3) має вигляд

$$x = (A + Bt)e^{k_1 t}, \quad y = (C + Dt)e^{k_1 t},$$

де A, B, C, D — сталі, пов'язані між собою двома лінійними рівняннями, які можна одержати, підставивши функції $x(t)$, $y(t)$ у систему (24.3) і скоротивши на $e^{k_1 t}$.

Якщо $k_1 < 0$, то $e^{k_1 t} \to 0$, $te^{k_1 t} \to 0$ при $t \to +\infty$ і, отже, точка спокою $x = y = 0$ асимптотично стійка. Її називають ***стійким вузлом***. Якщо $k_1 > 0$, то точка спокою нестійка, її називають ***нестійким вузлом***.

Детальніше про випадок $k_1 = k_2$ можна дізнатись, наприклад, з [3, с. 253–256].

Наведені випадки отримані у припущенні, що визначник Δ системи (24.3) відмінний від нуля. Припустимо, що $\Delta = 0$. Тоді характеристичними числами є $k_1 = 0$ і $k_2 = a_{11} + a_{22}$. Якщо $k_2 \neq 0$, то загальний розв'язок системи (24.3) має вигляд

$$x = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{k_2 t}, \quad y = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{k_2 t}, \tag{24.10}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі і

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, \quad -a_{22}\beta_1 + a_{12}\beta_2 = 0.$$

Виключаючи з (24.10) параметр t, одержуємо сім'ю паралельних прямих $y - C_1\alpha_2 = \dfrac{\beta_2}{\beta_1}(x - C_1\alpha_1)$.

Якщо $k_2 < 0$, то при $t \to +\infty$ на кожній траєкторії (на одному з паралельних променів) точки наближаються до точки спокою (рис. 24.8)

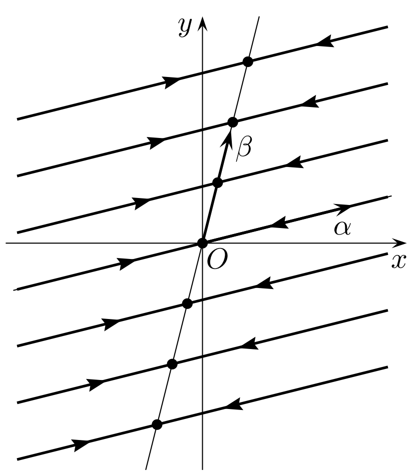


Рис. 24.8

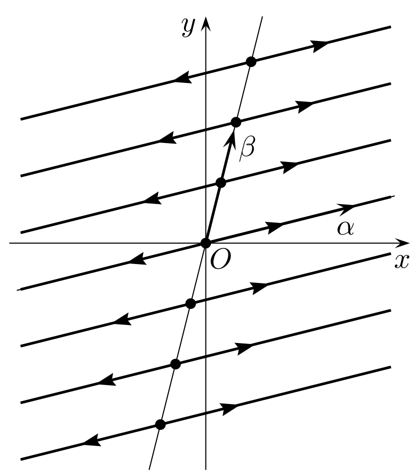


Рис. 24.9

$$x = C_1\alpha_1, \;\; y = C_1\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x.$$

Точка спокою $x = y = 0$, так само, як і довільна точка прямої $y = \alpha_2 x/\alpha_1$, при $k_2 < 0$ стійка, але не асимптотично стійка.

Якщо $k_2 > 0$, то точка спокою є нестійкою (рис. 24.9).

Якщо $k_1 = k_2 = 0$, то можливі два випадки:

1. Загальний розв'язок системи (24.3) має вигляд $x = C_1$, $y = C_2$ (це буде тоді, коли матриця A нульова). Тоді точка спокою стійка, але не асимптотично стійка. Усі точки площини (x, y) є стійкими точками спокою.

2. Загальним розв'язком системи (24.3) є

$$x = C_1 + C_2 t, \quad y = a + bt.$$

Тоді точка спокою є нестійкою. У цьому випадку $a_{22} = -a_{11}$, $a_{12}a_{21} < 0$.

Приклад 3. *Дослідити характер точки спокою системи*

$$\begin{cases} x' = 5y - x, \\ y' = -2y. \end{cases}$$

Накреслити фазові траєкторії системи на площині (x, y).
Розв'язання. Оскільки характеристичними числами системи є $k_1 = -1$, $k_2 = -2$, то точка спокою $x = y = 0$ є стійким вузлом.

Числу $k_1 = -1$ відповідає власний вектор $\vec{\alpha} = (1, 0)$, а числу $k_2 = -2$ — вектор $\vec{\beta} = (-5, 1)$. Похідна $\frac{dy}{dx}$ у точці початку координат дорівнює $\alpha_2/\alpha_1 = 0$. Отже, дотичні до фазових траєкторій у початку координат є горизонтальними, а самі траєкторії можна побудувати, наприклад, як на рис. 24.10. ■

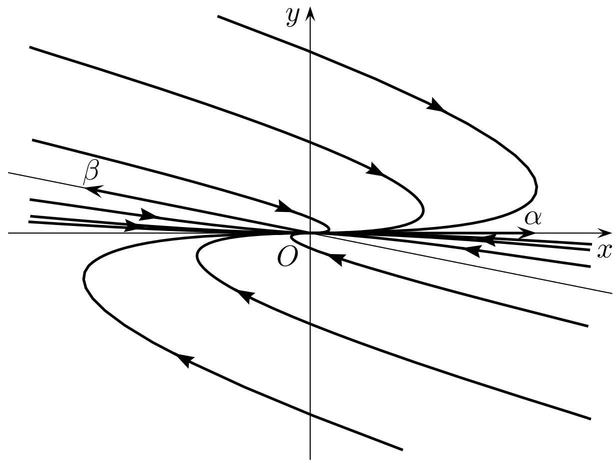


Рис. 24.10

Приклад 4. *Дослідити характер точки спокою системи*

$$\begin{cases} x' = \alpha x + y, \\ y' = -x + \alpha y \end{cases}$$

залежно від значення параметра α.

Розв'язання. Характеристичними числами є $k_{1,2} = \alpha i$. Якщо $\alpha = 0$, то точка спокою є центром. У цьому випадку система набуває вигляду

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Звідси $x^2 + y^2 = C$, тобто фазовими траєкторіями є концентричні кола з центром у точці $(0, 0)$. Якщо $\alpha \neq 0$, то точка спокою є фокусом: стійким, якщо $\alpha < 0$, і нестійким, якщо $\alpha > 0$. Фазовими траєкторіями є спіралі, які «накручуються» на точку $(0, 0)$. Якщо $\alpha < 0$, то точка $\big(x(t), y(t)\big)$ рухається по спіралях у напрямі точки спокою, а для $\alpha > 0$ — у напрямі від неї. ■

Рекомендована література: [3, с. 233–258, 281–289], [6, с. 253–274], [8, с. 417–453], [10, с. 216–222, 241–245].

Питання до лекції 24

1. Як формулюється теорема Ляпунова про стійкість (асимптотичну стійкість) нормальної нелінійної системи?

2. Які властивості має функція Ляпунова? В якому вигляді рекомендується шукати функцію Ляпунова?

3. Що називають фазовим портретом нормальної системи? Як побудувати фазовий портрет системи?

4. Як пов'язані між собою автономна лінійна однорідна система двох диференціальних рівнянь (24.3) і рівняння першого порядку з однорідною дробово-лінійною правою частиною (24.4)?

5. Дайте класифікацію точок спокою автономної системи диференціальних рівнянь. У якому випадку точка спокою є стійкою, асимптотично стійкою, нестійкою?

Вправи до лекції 24

1. Дослідіть на стійкість тривіальний розв'язок системи, знаючи функцію Ляпунова:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x' = y - x^3, \\ y' = -x - 3y^3, \end{cases} \quad V = x^2 + y^2;$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x' = -x - 2y + x^2y^2, \\ y' = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}, \end{cases} \quad V = x^2 + 2y^2.$$

2. Дослідіть особливі точки рівнянь. Накресліть інтегральні криві на площині (x, y):

$$\text{а)}\ \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{2x+y}{x+2y}; \quad \text{б)}\ \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{-x+2y}{2x-y}.$$

3. Дослідіть особливі точки систем. Накресліть траєкторії на площині (x, y):

$$\text{а)}\ \begin{cases} x' = y, \\ y' = -x; \end{cases} \quad \text{б)}\ \begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$$

Додаток 5

Застосування математичного пакета Maple для дослідження на стійкість розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем

Приклад 1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи $x' = -y$, $y' = x$ (приклад 2 лекції 23, с. 307). Для цього побудуємо поле напрямів цієї системи та одну фазову траєкторію з допомогою команди `DEplot` з пакета `DEtools`:

```
> DEtools[DEplot]({D(x)(t)=-y(t),D(y)(t)=x(t)},{x(t),
  y(t)},t=0..2*Pi,[[x(0)=1,y(0)=1]],x=-2..2,y=-2..2,
  linecolor=black);
```

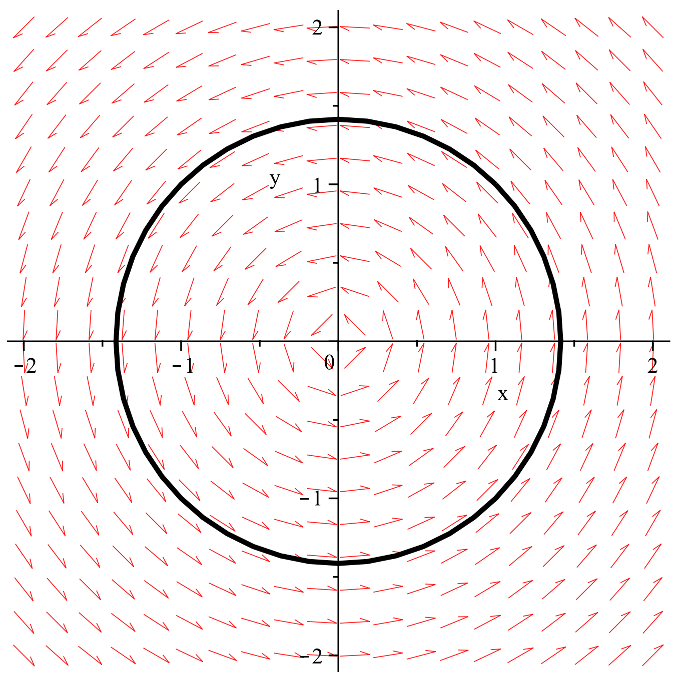


Рис. 1

З розташування стрілок можна зробити висновок, що тривіальний розв'язок системи стійкий, але не є асимптотично стійким. Фазові траєкторії утворюють концентричні кола з центрами у початку координат. Одне з них (з початковими умовами $x(0) = 1$, $y(0) = 1$) зображене на рис. 1.

Приклад 2. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи $x' = y$, $y' = 2x + y$ (приклад 3 лекції 23, с. 307). Для цього побудуємо поле напрямів цієї системи та дві фазові траєкторії з допомогою команди `DEplot` з пакета `DEtools`:

```
> DEtools[DEplot]({D(x)(t)=y(t),D(y)(t)=2*x(t)+y(t)},
  {x(t),y(t)},t=0..5,[[x(0)=0.2,y(0)=-0.15],[x(0)=0.5,
  y(0)=-0.5]],x=-1.5..1.5,y=-1.5..1.5,linecolor=black);
```

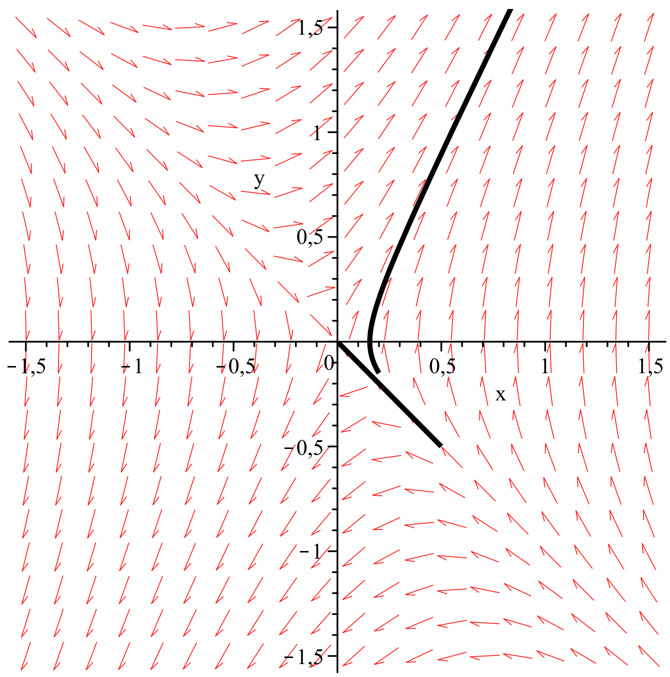


Рис. 2

З рис. 2 видно, що тривіальний розв'язок системи нестійкий. Хоча кожен розв'язок, який починається на прямій $y = -x$, прямує до точки $(0, 0)$ при зростанні t (на рисунку побудовано таку траєкторію з початковими умовами $x(0) = 0{,}5$, $y(0) = -0{,}5$); розв'язок, який починається навіть досить близько до початку координат, але не лежить на прямій $y = -x$, віддаляється від нього зі зростанням t (на рисунку побудовано таку траєкторію з початковими умовами $x(0) = 0{,}2$, $y(0) = -0{,}15$).

Приклад 3. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи
$$\begin{cases} x' = \sqrt{1+4y} - e^{3(x+y)}, \\ y' = \sin x + \ln(1-y) \end{cases}$$
(приклад 4 лекції 23, с. 311). Для цього побудуємо поле напрямів цієї системи та три фазові траєкторії (які задовольняють початкові умови: $x(0) = 0{,}5$, $y(0) = 0{,}5$; $x(0) = 0{,}5$, $y(0) = -0{,}1$; $x(0) = -0{,}2$, $y(0) = -0{,}2$):

```
> DEtools[DEplot]({D(x)(t)=sqrt(1+4*y(t))-exp(3*(x(t)+
  y(t))),D(y)(t)=sin(x(t))+ln(1-y(t))},{x(t),y(t)},
  t=0..10,[[x(0)=0.5,y(0)=0.5],[x(0)=0.5,y(0)=-0.1],
  [x(0)=-0.2,y(0)=-0.2]],x=-0.7..0.7,y=-0.3..1.1,
  stepsize=0.01,scaling=constrained,linecolor=black);
```

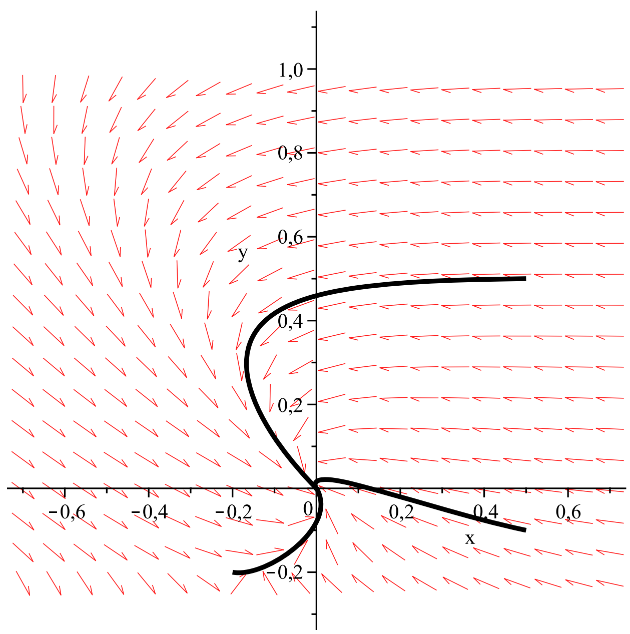


Рис. 3

З рис. 3 добре видно, що тривіальний розв'язок системи є асимптотично стійким. Поле напрямів за межами смуги $-0{,}25 < y < 1$ не побудовано (чому?).

Приклад 4. Дослідити на стійкість точку спокою рівняння $y^{(4)} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0$ (приклад 5 лекції 23, с. 312). Зробити це з допомогою команди `DEplot` неможливо, бо маємо рівняння четвертого порядку. Звичайно, команда `DEplot` побудує розв'язок задачі Коші для заданого рівняння, але вона не дозволяє побудувати поле напрямів, породжене диференціальним рівнянням. Знайдемо характеристичні числа — корені рівняння $k^4 + 5k^3 + 13k^2 + 19k + 10 = 0$:

```
> solve(k^4+5*k^3+13*k^2+19*k+10=0,k);
```

$$-2,\ \ -1,\ \ -1+2\,I,\ \ -1-2\,I.$$

Оскільки дійсні частини всіх характеристичних чисел від'ємні, то точка спокою заданого рівняння є асимптотично стійкою (теорема 1 лекції 23, с. 310).

Приклад 5. Дослідити на стійкість точку спокою рівняння $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0$ (приклад 6 лекції 23, с. 313). Знайдемо характеристичні числа — корені рівняння $k^5 + 4k^4 + 16k^3 + 25k^2 + 13k + 9 = 0$ (яке у радикалах командою `solve` не розв'язується) з допомогою команди `fsolve` з опцією `complex` (с. 343):

```
> fsolve(k^5+4*k^4+16*k^3+25*k^2+13*k+9=0,k,complex);
```

$$-1.691606943,\ \ -.9910128055-3.159244286\,I,$$
$$-.9910128055+3.159244286\,I,\ \ -.1631837228-.6772576111\,I,$$
$$-.1631837228+.6772576111\,I.$$

Оскільки дійсні частини всіх характеристичних чисел від'ємні, то точка спокою заданого рівняння — асимптотично стійка.

Приклад 6. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи $x' = -x^5 - y,\ \ y' = x - y^3$ (приклад 1 лекції 24, с. 316). Для цього побудуємо поле напрямів системи та одну фазову траєкторію, яка задовольняє початкові умови $x(0) = -1$, $y(0) = -2$:

```
> DEtools[DEplot]({D(x)(t)=-x(t)^5-y(t),D(y)(t)=x(t)-
  y(t)^3},{x(t),y(t)},t=0..100,[[x(0)=-1,y(0)=-2]],
  x(t)=-2..2,y(t)=-2..2,stepsize=0.1,linecolor=black);
```

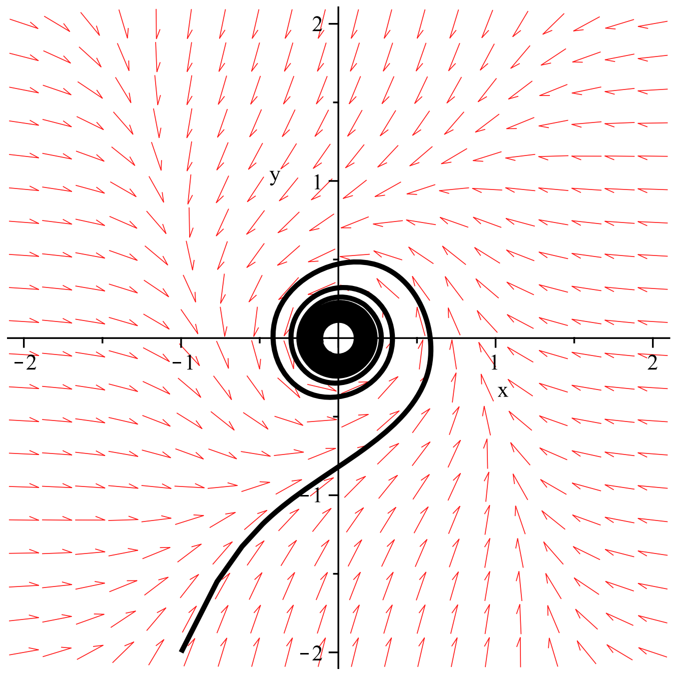


Рис. 4

З поля напрямів на рис. 4 видно, що тривіальний розв'язок — стійкий; побудована траєкторія показує, що цей розв'язок є асимптотично стійким, бо довільна фазова траєкторія по спіралі наближається до нього, хоча і дуже повільно. Якщо збільшити верхню межу діапазону для t до 1000, то траєкторія повністю заповнить видимий окіл початку координат (переконайтесь у цьому самостійно!).

Приклад 7. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи $x' = 2y^3 - x^5$, $y' = -x - y^3 - y^5$ (приклад 2 лекції 24, с. 317). Для цього побудуємо поле напрямів системи та одну фазову траєкторію, яка задовольняє початкові умови $x(0) = -1$, $y(0) = -2$:

```
> DEtools[DEplot]({D(x)(t)=2*y(t)^3-x(t)^5,D(y)(t)=
  -x(t)-y(t)^3-y(t)^5},{x(t),y(t)},t=0..100,[[x(0)=-1,
  y(0)=-2]],x(t)=-2..2,y(t)=-2..2,stepsize=0.01,
  linecolor=black);
```

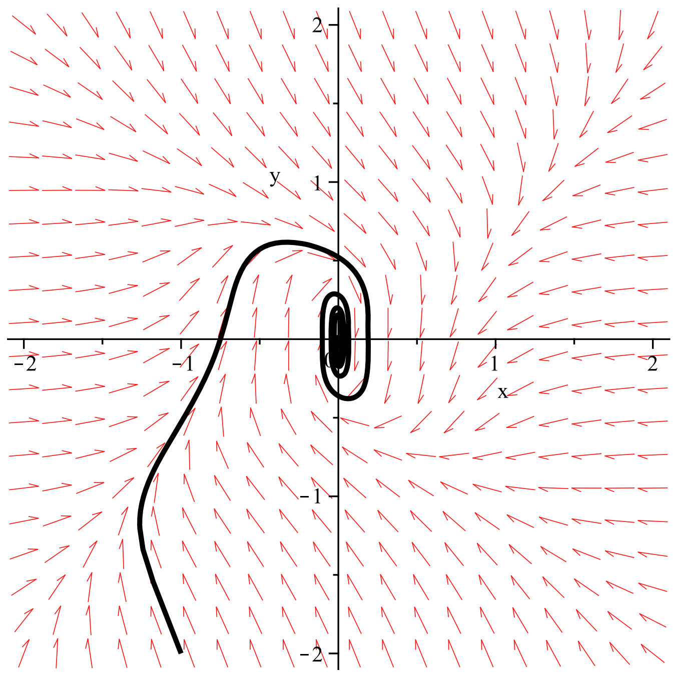


Рис. 5

З поля напрямів на рис. 5 видно, що тривіальний розв'язок — стійкий; побудована траєкторія показує, що цей розв'язок є асимптотично стійким, бо довільна фазова траєкторія по спіралі наближається до нього.

Приклад 8. Дослідити характер точки спокою системи

$$x' = 5y - x, \quad y' = -2y$$

(приклад 3 лекції 24, с. 327). Для цього побудуємо поле напрямів системи та вісім фазових траєкторій (які задовольняють початкові умови: $x(0) = 2$, $y(0) = -0{,}5$; $x(0) = 2$, $y(0) = -1{,}5$; $x(0) = 2$, $y(0) = -1$; $x(0) = 1{,}5$, $y(0) = -2$;

$x(0) = -2, \quad y(0) = 0{,}5; \quad x(0) = -2, \quad y(0) = 1{,}5; \quad x(0) = -2,$ $y(0) = 1$; $x(0) = -1{,}5$, $y(0) = 2$):

```
> DEtools[DEplot]({D(x)(t)=5*y(t)-x(t),D(y)(t)=
  -2*y(t)},{x(t),y(t)},t=0..5,[[x(0)=2,y(0)=-0.5],
  [x(0)=2,y(0)=-1.5],[x(0)=2,y(0)=-1],[x(0)=1.5,
  y(0)=-2],[x(0)=-2,y(0)=0.5],[x(0)=-2,y(0)=1.5],
  [x(0)=-2,y(0)=1],[x(0)=-1.5,y(0)=2]],x(t)=-2..2,
  y(t)=-2..2,stepsize=0.1,linecolor=black);
```

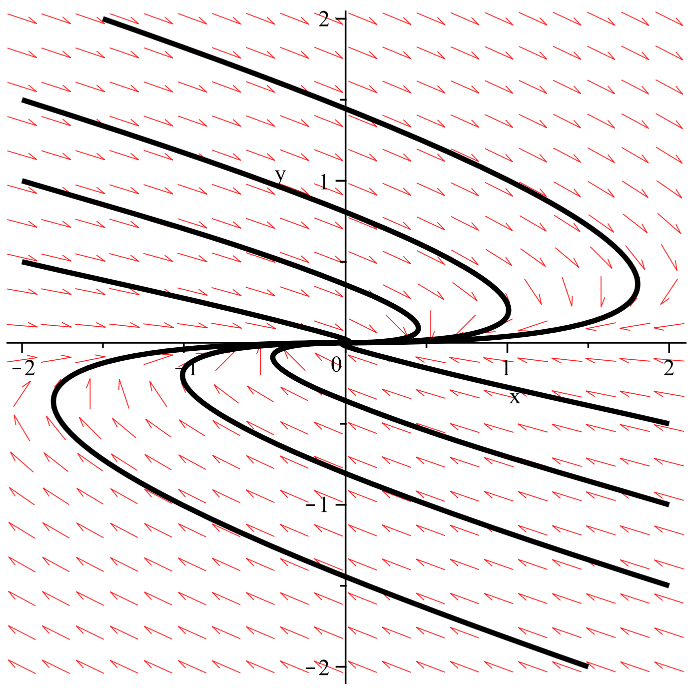


Рис. 6

З рис. 6 видно, що точка спокою системи є стійким вузлом.

Приклад 9. Дослідити характер точки спокою системи

$$x' = \alpha x + y, \quad y' = -x + \alpha y$$

залежно від значення параметра α (приклад 4 лекції 24, с. 328). Розглянемо три випадки: $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = -1$. Для $\alpha = 0$

побудуємо поле напрямів системи та фазову траєкторію, яка задовольняє початкові умови $x(0) = 1$, $y(0) = 0$:

```
> alpha:=0:DEtools[DEplot]({D(x)(t)=alpha*x(t)+y(t),
  D(y)(t)=-x(t)+alpha*y(t)},{x(t),y(t)},t=0..2*Pi,
  [[x(0)=1,y(0)=0]],x(t)=-2..2,y(t)=-2..2,
  stepsize=0.1,linecolor=black);
```

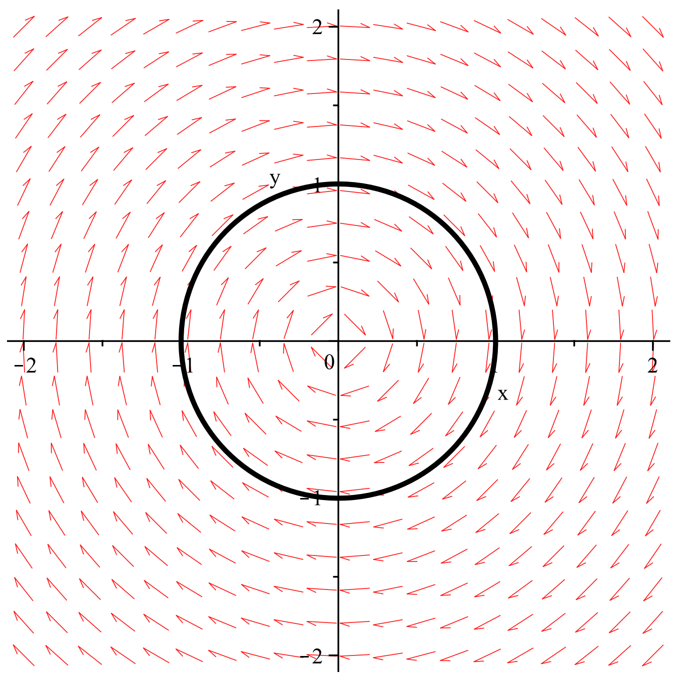


Рис. 7

Отже, якщо $\alpha = 0$, то точка $x = 0$, $y = 0$ є центром.

У випадку $\alpha = 1$ побудуємо поле напрямів системи та фазову траєкторію, яка задовольняє початкові умови $x(0) = 0{,}01$, $y(0) = 0{,}01$:

```
> alpha:=1:DEtools[DEplot]({D(x)(t)=alpha*x(t)+y(t),
  D(y)(t)=-x(t)+alpha*y(t)},{x(t),y(t)},t=0..10,
  [[x(0)=0.01,y(0)=0.01]],x(t)=-2..2,y(t)=-2..2,
  stepsize=0.1,linecolor=black);
```

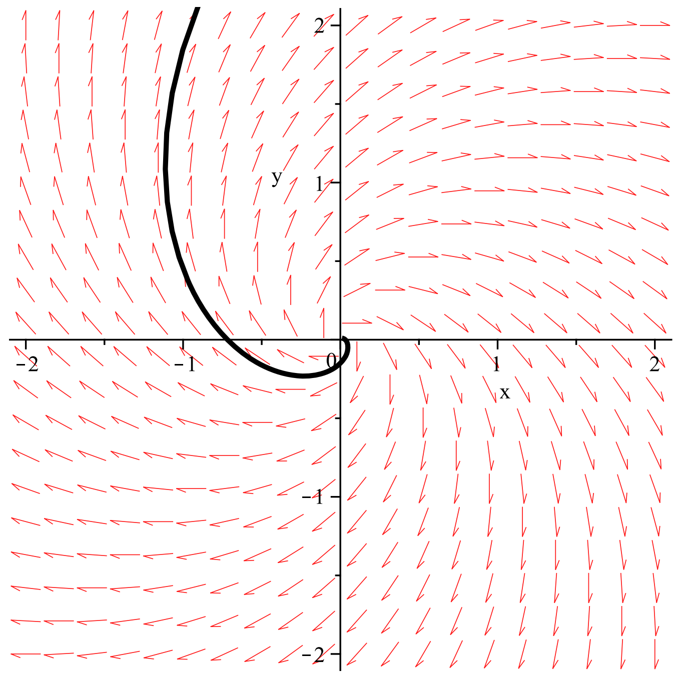


Рис. 8

Отримали нестійкий фокус.

Випадок, коли $\alpha = -1$, пропонуємо розглянути читачам самостійно.

Інші приклади застосування математичного пакета Maple для побудови поля напрямів та інтегральних кривих систем диференціальних рівнянь можна знайти в [11, 16, 17, 19].

Додаток 6
Основи роботи з математичним пакетом Maple

Пакет аналітичних обчислень і числових розрахунків Maple створений компанією Waterloo Maple Inc. (Канада) і є одним з найбільш популярних у світі програмних продуктів, який дозволяє ефективно виконувати як числові, так і символьні обчислення, має розвинуті графічні засоби та вбудовану мову програмування високого рівня. Ці можливості та дружній інтерфейс користувача забезпечили широке застосування математичного пакета Maple у багатьох галузях науки, природознавства, а також у навчальному процесі.

Розглянемо основи роботи з Maple. Звичайно, більш-менш ґрунтовний огляд цього пакета вимагає окремої книги, а обсяг додатка до посібника дозволяє пояснити лише окремі аспекти роботи з програмою. Для глибшого ознайомлення з пакетом Maple пропонується використовувати [11, 16, 17, 19] та довідкову систему Maple.

Робота з Maple здійснюється у вигляді інтерактивного сеансу: користувач уводить на робочому аркуші команди (під ними зараз розуміємо певні інструкції) і натисненням клавіші `Enter` передає їх на виконання ядру Maple. Всі введені команди і результати обчислень, які відображаються, формують уміст робочого аркуша — основного документа Maple. Робочий аркуш можна зберегти на диску, відкрити, знову виконати команди, що на ньому містяться, чи провести їхнє коригування.

Робочий аркуш складається з областей уведення й областей виведення. У перших областях уводяться команди, у других — відображуються результати їхнього виконання чи повідомлення про помилки набору команд. Уміст областей уведення і виведення утворює групу обчислень, яка на робочому аркуші відмічається зліва квадратною дужкою.

Команди вводяться в області введення після символу-запрошення `>` у формі синтаксису мови Maple, а відображатись вони можуть у цій самій формі або у вигляді звичного математичного запису (в останніх версіях програми за замовчуванням використовується другий варіант). Кожна команда, яка вводиться в області введення, повинна закінчуватись крапкою з комою (`;`) або двокрапкою (`:`). Якщо вживається крапка з комою, то результат виконання команди буде відображатись в області виведення, двокрапка використовується для проміжних обчислень, результати яких відображати не потрібно. Якщо команда достатньо довга і не поміщається у рядку, то Maple автоматично перенесе її у наступний рядок. В одному рядку можна вводити кілька команд, відокремлених крапкою з комою чи двокрапкою.

За замовчуванням результати виконання команди відображаються у вигляді звичного математичного запису. Отриману формулу чи її частину можна скопіювати в область уведення (вона відобразиться у формі синтаксису мови Maple, якщо у цій формі відображається вміст області введення).

Крім груп обчислень, на робочому аркуші можуть бути коментарі, які створюються з допомогою команд меню Maple чи кнопок панелі інструментів. Коментарем є також частина рядка в області введення, яка починається із символу `#`.

Треба мати на увазі, що у пам'яті комп'ютера під час сеансу роботи з робочим аркушем зберігаються всі результати виконання команд, навіть якщо самі команди або результати їхньої роботи після цього були видалені (звичайно, якщо не вживати спеціальних заходів для знищення цієї інформації). Водночас, після відкриття робочого аркуша у пам'яті комп'ютера немає результатів обчислень, хоча вони є на робочому аркуші у відповідних областях виведення.

Maple вміє працювати з цілими числами, звичайними дробами, алгебричними коренями, числами з плаваючою крапкою та комплексними числами. В арифметичних виразах можна використовувати операції піднесення до степеня (`^`), множення (`*`), ділення (`/`), додавання (`+`), віднімання (`-`), факторіал (`!`). Порядок виконання цих операцій є стандартним, а для його зміни використовують круглі дужки.

У виразах можна використовувати такі сталі: `Pi` — число $\pi = 3.1415926\ldots$, `I` — уявна одиниця $i = \sqrt{-1}$, `infinity` —

нескінченність ∞ та деякі інші. Знак `%` позначає результат виконання попередньої операції. Його також можна використовувати у виразах.

Два вирази, поєднані знаком `=`, є рівнянням. Нерівність складається з двох виразів, поєднаних знаками `>`, `<`, `>=` або `<=`.

Вирази, рівняння, нерівності та інші об'єкти можна присвоювати змінним операцією присвоювання (`:=`). Кожна змінна Maple має ім'я, яке може складатися з латинських букв, цифр і символу підкреслення, але першим символом імені цифра бути не може. Великі і малі букви розрізняються. Змінна, ім'я якої збігається з ім'ям грецької букви, відображається відповідною грецькою буквою. Змінна, якій нічого не присвоєно, трактується як невідома. Існують системні змінні, яким від самого початку щось присвоєно. Наприклад, системна змінна `Order` визначає, до якого порядку малості потрібно розвивати функції у ряди. Системна змінна `Digits` визначає необхідну кількість значущих цифр при обчисленнях з десятковою крапкою.

Основні можливості Maple реалізовані з допомогою функцій, які також називають ***командами***. Кожна команда Maple (а їх є декілька тисяч) має назву і кілька аргументів, які записуються у круглих дужках через кому після назви команди. У деяких випадках аргументами команди можуть бути ***множини*** — послідовності виразів через кому у фігурних дужках — і ***списки*** — послідовності виразів через кому у квадратних дужках. У додатках до розділів терміни «множина» і «список» уживаються саме в цьому сенсі. Останні необов'язкові аргументи команди, які мають вигляд ключового слова або рівності «ключове слово=властивість», називають ***опціями***. Деякі команди мають необов'язкові аргументи, які записуються у квадратних дужках перед круглими. Результат дії команди можна присвоїти змінній, використати у виразі, він може бути аргументом іншої команди. У протилежному разі результат виконання команди просто відобразиться в області виведення (якщо команда завершується крапкою з комою).

У таблиці наведено команди для основних математичних функцій.

Функція	Команда Maple
$\sin x$	`sin(x)`
$\cos x$	`cos(x)`
$\mathrm{tg}\, x$	`tan(x)`
$\mathrm{ctg}\, x$	`cot(x)`
$\sec x$	`sec(x)`
$\mathrm{cosec}\, x$	`csc(x)`
$\arcsin x$	`arcsin(x)`
$\arccos x$	`arccos(x)`
$\mathrm{arctg}\, x$	`arctan(x)`
$\mathrm{arcctg}\, x$	`arccot(x)`
e^x	`exp(x)`
$\ln x$	`ln(x)`
$\lg x$	`log10(x)`
$\log_a x$	`log[a](x)`
$\lvert x \rvert$	`abs(x)`
$\mathrm{sgn}\, x$	`signum(x)`
$\sqrt{x}$	`sqrt(x)`
$\sqrt[n]{x}$	`surd(x,n)`
$[x]$ (ціла частина)	`floor(x)`
$\{x\}$ (дробова частина)	`frac(x)`
$\mathrm{sh}\, x$	`sinh(x)`
$\mathrm{ch}\, x$	`cosh(x)`
$\mathrm{th}\, x$	`tanh(x)`
$\mathrm{cth}\, x$	`coth(x)`

Розглянемо ще кілька використаних у додатках 1–5 команд.

Для диференціювання функції за змінною 1, змінною 2 і т. д. використовується команда

$$\texttt{diff(}\text{вираз}, \text{змінна1}, \text{змінна2}, \ldots\texttt{)}.$$

Для спрощення виразів використовують команду

$$\texttt{simplify(}\text{вираз, опція}\texttt{)}.$$

Опцією може бути припущення `assume=`властивість, яке накладається на невідомі, наприклад, `assume=real`.

Для розв'язування рівнянь та нерівностей призначена універсальна команда `solve(рівняння, змінна)`. Розв'язуючи системи рівнянь, використовують формат

`solve({рівняння1, рівняння2, ...}, {змінна1, змінна2, ...})`.

Команда `solve` знаходить точні розв'язки рівняння чи системи. Якщо точні розв'язки знайти неможливо, то використовують команду `fsolve` для відшукання десяткових наближень коренів рівняння. Її формат відрізняється від формату команди `solve` можливістю задавати як третій (необов'язковий) параметр опцію, якою може бути проміжок, що містить шуканий корінь рівняння. Він задається як числовий діапазон у формі a..b. Для алгебричних рівнянь можна використовувати також опцію `complex`, яка дозволяє знаходити всі комплексні розв'язки рівняння.

Команда `dsolve` для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем достатньо детально розглянута у додатках 1–3.

Команда

`plot(функція, змінна, діапазон значень, опції)`

дозволяє побудувати графік функції однієї змінної. Замість змінної може бути рівність вигляду x=a..b, де x — незалежна змінна, a, b — мінімальне і максимальне значення, для яких будується графік. Діапазон значень має вигляд c..d, є необов'язковим аргументом і визначає частину осі ординат, яка відображатиметься на графіку. Команда може мати багато необов'язкових аргументів — опцій, найчастіше з яких використовують такі: `color` задає колір лінії кривої (наприклад, `black`, `green`, `blue`, `red`); `scaling=constrained` означає, що масштаб є однаковим по обидвох осях координат; опція `numpoints` задає кількість точок, за якими будується графік. Приклад використання команди є у додатку 2.

Аналогічна команда

`plot3d(функція, змінна1=діапазон1, змінна2=діапазон2, опції)` дозволяє побудувати частину поверхні, що є графіком функції двох змінних.

Не всі команди Maple містяться в основній бібліотеці. Більшість команд, які реалізують спеціальні можливості Maple, знаходяться у додаткових пакетах (бібліотеках). В останніх версіях програми цих пакетів є понад 100. Пакети `DEtools` і `PDEtools` містять додаткові команди для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними відповідно. Кілька прикладів використання цих команд є у додатках 1, 4, 5. Пакет `plots` також містить одну команду для графічного відображення розв'язків диференціальних рівнянь. Для використання команди з певного пакета його спочатку треба підключити командою `with(`пакет`)` або використовувати лише одну команду пакета з допомогою синтаксису

пакет`[`команда`](`аргументи`)`.

Розглянемо команду `odeplot` з пакета `plots`, з допомогою якої можна побудувати інтегральну криву — графік розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Приклад використання команди є у додатку 2. Формат команди:

`plots[odeplot](`proc, xrange, опції`)`.

Процедура proc для числового розв'язування задачі Коші повинна бути попередньо створена командою `dsolve` з опцією `type=numeric`. Аргумент xrange задає діапазон зміни незалежної змінної у формі x=xmin..xmax. Опції цієї команди аналогічні до опцій команди `plot`.

Розглянемо команду `DEplot` з пакета `DEtools`. З допомогою цієї команди можна наближено зінтегрувати одне звичайне диференціальне рівняння або систему таких рівнянь та зобразити відповідну інтегральну криву чи її проекцію на задану площину. Чимало прикладів, які демонструють роботу з нею, є в додатках 1 і 5. Формат команди:

`DEtools[DEplot](`deqns, vars, trange, inits, xranges, опції`)`.

Тут deqns — рівняння чи множина рівнянь, vars — шукана функція або їх множина, trange — діапазон зміни незалежної змінної у вигляді t=a..b, де t — ім'я незалежної змінної, a і b — межі діапазону її зміни. Початкові умови задаються параметром-списком inits, елементами якого є списки. Кожен елемент-список визначає інтегральну криву (чи її проекцію) диференціального рівняння або системи, що відображається на графіку. Кількість елементів-списків параметра inits відповідає кількості інтегральних кривих. Параметри xranges (їх може бути стільки, скільки є невідомих функцій у системі) задають діапазони зміни невідомих функцій і використовуються для завершення процесу інтегрування. Вони мають вигляд x(t)=x1..x2.

Параметри xranges не є обов'язковими. Для автономної системи двох диференціальних рівнянь першого порядку або одного диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної, будується додатково поле напрямів, визначене цією системою чи рівнянням. Для такої системи (рівняння) задавати початкові умови inits необов'язково, але замість них треба вказувати параметри xranges.

Опції задаються у вигляді рівностей. Серед кількох десятків опцій найчастіше використовують такі: `linecolor` задає колір ліній розв'язків (наприклад, `black`, `green`, `red`); `scene` задається у вигляді двохелементного списку шуканих функцій чи незалежної змінної і визначає, що виводиться на графіку (`scene=[x(t),y(t)]` означає, що по горизонтальній осі графіка відображається функція $x(t)$, а по вертикальній — $y(t)$); `stepsize` задає крок зміни незалежної змінної для відображення точок графіка; `scaling=constrained` означає, що масштаб є однаковим по обидвох осях координат.

Розглянемо команду `PDEplot` з пакета `PDEtools`, яка будує інтегральну поверхню рівняння з частинними похідними першого порядку, що проходить через задану криву. У додатку 4 є приклади роботи з цією командою. Формат команди:

$$\texttt{PDEtools[PDEplot]}(\mathrm{PDE}, \mathrm{inits}, \mathrm{srange}, \text{опції}).$$

Тут PDE — рівняння з частинними похідними першого порядку відносно невідомої функції n змінних ($n > 1$). Початкові умови задаються параметром inits у вигляді списку з $(n+1)$ елементів, які визначають у параметричній формі криву у $(n+1)$-вимірному просторі, через яку проходить інтегральна поверхня диференціального рівняння. Елементи повинні бути виразами, які залежать від $n-1$ параметра. Параметром srange задається список діапазонів або діапазон зміни кожного параметра, який використовується в початкових умовах, у вигляді s=s1..s2, t=t1..t2 і т. д. Зокрема, у випадку двох незалежних змінних список inits повинен містити три вирази, залежні від одного параметра. Майже всі опції є аналогічними до опцій команди `DEplot` пакета `DEtools`. Одна з найважливіших додаткових опцій `xi=ximin..ximax` дозволяє задати діапазон, що обмежуватиме частину поверхні, яку потрібно відобразити. Кількість таких опцій може бути від 0 до $n+1$. Без цих опцій необмежену поверхню відобразити неможливо. Для кращого відображення поверхні можна використовувати опцію `numchar`, яка задає кількість точок з початкових умов, через які проходять криві, що формують інтегральну поверхню. За замовчуванням `numchar=20` для $n = 2$, що може бути недостатнім для акуратного відображення складної поверхні.

КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГАДУЮТЬСЯ У ПОСІБНИКУ

АБЕЛЬ Нільс Генрік (Abel Niels Henrik; 1802–1829) — норвезький математик. Автор важливих відкриттів в алгебрі та математичному аналізі. Встановив нерозв'язність загального алгебричного рівняння степеня $n > 5$, одержав ознаки збіжності числових та функціональних рядів. Займався також диференціальними рівняннями, одним з перших почав вивчати інтегральні рівняння.

БАНАХ Стефан (Banach Stefan; 1892–1945) — польський і український математик, професор Львівського університету. Один із творців сучасного функціонального аналізу і львівської математичної школи.

БЕРНУЛЛІ Даниїл (Bernoulli Daniel; 1700–1782) — швейцарський математик, механік, фізик. Син Й. Бернуллі. Найбільш відомий працями з математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь — його разом з Д'Аламбером і Ейлером уважають творцем математичної фізики.

БЕРНУЛЛІ Йоганн (Bernoulli Johann; 1667–1748) — швейцарський математик. Молодший брат Я. Бернуллі, батько Д. Бернуллі. Дав перше систематичне викладення диференціального та інтегрального числень, автор деяких методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь (розробив метод відокремлення змінних та метод підстановки інтегрування лінійних рівнянь першого порядку).

БЕРНУЛЛІ Якоб (Bernoulli Jacob; 1654–1705) — швейцарський математик. Автор видатних праць з аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь (рівняння Бернуллі). Разом з братом Йоганном заклав основи варіаційного числення. Працював також у різних галузях фізики.

БЕССЕЛЬ Фрідріх Вільгельм (Bessel Friedrich Wilhelm; 1784–1846) — німецький астроном і математик. Праці присвячені теорії диференціальних рівнянь і небесній механіці. У математиці його ім'я носять так звані циліндричні функції першого роду (функції Бесселя) і диференціальне рівняння, яке вони задовольняють (рівняння Бесселя).

ВАНДЕРМОНД Александр Теофіл (Vandermonde Alexandre Theophill; 1735–1796) — французький математик. Відомий працями з алгебри, зокрема дав логічний виклад теорії визначників, де відомий визначник Вандермонда.

ВРОНСЬКИЙ (ГЕНЕ-ВРОНСЬКИЙ) Юзеф Марія (Hoene-Wroński Jozef Maria; 1778–1853) — польський математик і філософ. Одержав цікаві результати в алгебрі, математичному аналізі, теорії диференціальних рівнянь. Уперше ввів функціональний визначник, який має велике значення в теорії лінійних диференціальних рівнянь (визначник Вронського або вронскіан).

ГУК Роберт (Hooke Robert; 1635–1703) — англійський природознавець, член Лондонського королівського товариства. Основні праці у різноманітних галузях фізики й астрономії. Один із творців математичної теорії пружності.

ГУРВІЦ Адольф (Hurwitz Adolf; 1859–1919) — німецький математик. Відомий працями з математичного аналізу, алгебри (критерій Гурвіца), теорії чисел. З 1892 р. — професор Політехнічної школи у Цюріху, де серед його студентів був Альберт Ейнштейн.

ҐРІН Джордж (Green George; 1793–1841) — англійський математик і фізик. Основоположник школи математичної фізики в Кембриджі. Одержав вагомі результати в математичній фізиці, розвинув теорію електрики й магнетизму, спираючись на знайдені ним формули теорії потенціалу.

Д'АЛАМБЕР Жан Лерон (D'Alembert Jean Le Rond; 1717–1783) — французький математик, механік і філософ. Автор фундаментальних праць з механіки, математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь. Уперше сформулював загальні правила складання диференціальних рівнянь руху будь-яких матеріальних систем (принцип Д'Аламбера). Його роботи, а також наступні роботи Л. Ейлера і Д. Бернуллі заклали основи математичної фізики.

ЕЙЛЕР Леонард (Euler Leonhard; 1707–1783) — математик, механік, фізик, астроном. За походженням швейцарець. Автор майже 850 наукових праць з математичного аналізу, диференціальної геометрії, наближених методів обчислень, небесної механіки, математичної фізики, оптики, балістики та ін. Систематично розвиваючи нові прийоми інтегрування диференціальних рівнянь та ввівши низку основних понять у цій області, Ейлер створив як самостійну дисципліну теорію звичайних диференціальних рівнянь і заклав основи теорії рівнянь з частинними похідними.

КАПЕЛЛІ Альфредо (Capelli Alfredo; 1855–1910) — італійський математик. Розвинув теорію квадратичних форм та теорію алгебричних рівнянь. Довів необхідну і достатню умову існування розв'язку довільної лінійної системи алгебричних рівнянь.

КІРХГОФ Густав Роберт (Kirchhoff Gustav Robert; 1824–1887) — німецький фізик. Розв'язав задачу про розподіл електричних струмів у розгалужених електричних колах (правила Кірхгофа). Математичні дослідження стосуються головно математичної фізики (метод наближеного розв'язування задач дифракції коротких хвиль, формули Кірхгофа в теорії потенціалу).

КЛЕРО Алексіс Клод (Clairaut Alexis Claude; 1713–1765) — французький математик, механік і астроном. Увів поняття повного диференціала функції кількох змінних, загального та частинного розв'язків диференціального рівняння.

КОШІ Огюстен Луї (Cauchy Augustin Louis; 1789–1857) — французький математик. Опублікував понад 800 праць із теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, теоретичної механіки, математичної фізики. Дав чітке означення неперервної функції, основних понять теорії збіжних рядів (ознака Коші, критерій Коші), розвинув основи теорії аналітичних функцій. У теорії диференціальних рівнянь довів основну теорему існування розв'язку початкової задачі (задачі Коші). Розробив методи інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку.

КРАМЕР Ґабріель (Cramer Gabriel; 1704–1752) — швейцарський математик. Один із творців лінійної алгебри, учень Й. Бернуллі. Запропонував метод розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь (метод Крамера). Отримав нові результати також у геометрії, теорії ймовірностей, небесній механіці.

КРОНЕКЕР Леопольд (Kronecker Leopold; 1823–1891) — німецький математик. Написав понад 120 наукових праць з алгебри і теорії чисел. Був прихильником «арифметизації» математики, яка, на його думку, повинна зводитись до арифметики цілих чисел.

ЛАҐРАНЖ Жозеф Луї (Lagrange Joseph Louis; 1736–1813) — французький математик і механік. Найбільш важливі праці стосуються варіаційного числення і механіки. Йому належать також видатні дослідження з різних питань математичного аналізу (формула залишкового члена ряду Тейлора, формула скінченних приростів — формула Лаґранжа, теорія умовних екстремумів — метод множників Лаґранжа), диференціальних рівнянь (теорія особливих розв'язків, метод варіації довільних сталих для лінійного рівняння n-го порядку) та ін.

ЛЕЙБНІЦ Ґотфрід Вільгельм (Leibniz Gottfried Wilhelm; 1646–1716) — німецький математик, фізик, філософ. Один із творців диференціального та інтегрального числень, їхніх понять і символіки. Йому належать терміни «диференціал», «диференціальне числення», «диференціальне рівняння», «функція», «координати» та ін.

ЛІПШІЦ Рудольф Отто Сигізмунд (Lipschitz Rudolf Otto Sigismund; 1832–1903) — німецький математик. Автор важливих праць з математичного аналізу, теорії чисел, диференціальних рівнянь (умова Ліпшіца), теоретичної механіки.

ЛІУВІЛЛЬ Жозеф (Liouville Joseph; 1809–1882) — французький математик. Автор важливих праць з комплексного аналізу, теорії чисел, диференціальних рівнянь (формула Остроградського–Ліувілля). Першим строго довів неінтегровність у квадратурах деяких класів диференціальних рівнянь. Разом зі Ж. Штурмом розробив теорію крайових задач на власні значення для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку (задача Штурма–Ліувілля).

ЛЯПУНОВ Олександр Михайлович (1857–1918) — російський математик і механік. Засновник математичної теорії стійкості руху, автор важливих досліджень про фігури рівноваги рідини, що рівномірно обертається.

НЬЮТОН Ісаак (Newton Isaac; 1643–1727) — англійський фізик, математик, механік, астроном. Заклав теоретичні основи механіки і астрономії, відкрив закон всесвітнього тяжіння, разом із Лейбніцем уважається творцем диференціального та інтегрального числень. Винайшов метод інтегрування диференціальних рівнянь розвиненням їхніх розв'язків у степеневі ряди.

ОСТРОГРАДСЬКИЙ Михайло Васильович (1801–1862) — український і російський математик (родом з Полтавщини), член Петербурзької Академії наук та багатьох закордонних академій наук. Розв'язав низку важливих задач математичної фізики, теорії звичайних диференціальних рівнянь (формула Остроградського–Ліувілля), варіаційного числення, теоретичної механіки. Запропонував спосіб зведення неоднорідної крайової задачі до однорідної.

ПЕАНО Джузеппе (Peano Giuse; 1858–1932) — італійський математик. Запропонував систему аксіом арифметики, довів теорему існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння з неперервною правою частиною.

ПУАНКАРЕ Анрі Жюль (Poincare Henri Jules; 1854–1912) — французький математик, фізик, астроном і філософ. Автор понад 1000 праць з диференціальних рівнянь, теорії потенціалів, математичної фізики, небесної механіки. Один із засновників якісної теорії диференціальних рівнянь.

ПФАФФ Йоганн Фрідріх (Pfaff Johann Friedrich; 1765–1825) — німецький математик і астроном. Відомий дослідженнями з теорії диференціальних рівнянь (рівняння Пфаффа).

РАУС Едвард Джон (Routh Edward John; 1831–1907) — англійський механік і математик. Відомий працями з теоретичної механіки. Займався проблемами стійкості рівноваги і руху (критерій Рауса–Гурвіца). Встановив спеціальний алгоритм для визначення кількості коренів алгебричного рівняння, які мають додатні дійсні частини (теорема Рауса).

РІККАТІ Джакопо Франческо (Riccati Jacopo Francesco; 1676–1754) — італійський математик та інженер. Основні праці стосуються інтегрального числення й диференціальних рівнянь, зокрема інтегровності у квадратурах одного класу диференціальних рівнянь першого порядку (спеціальне рівняння Ріккаті).

СИЛЬВЕСТР Джеймс Джозеф (Sylvester James Joseph; 1814–1897) — англійський математик. Основні праці з алгебри (критерій Сильвестра), теорії чисел, теорії ймовірностей, механіки і математичної фізики.

ТЕЙЛОР Брук (Taylor Brook; 1685–1731) — англійський математик. Вивів загальну формулу (формула Тейлора) розвинення функцій у степеневі ряди (ряди Тейлора), започаткував математичну теорію коливання струни.

ФРЕДГОЛЬМ Ерік Івар (Fredholm Erik Ivar; 1866–1927) — шведський математик. Засновник загальної теорії лінійних інтегральних рівнянь (рівняння Фредгольма, теореми Фредгольма).

ФУР'Є Жан Батист Жозеф (Fourier Jean Baptiste Joseph; 1768–1830) — французький математик. Найвагоміші результати отримав у математичній фізиці. Зокрема, вивів диференціальне рівняння теплопровідності, розробив метод розв'язування цього рівняння при певних крайових умовах (метод Фур'є). Його ідеї стали потужним інструментом математичного дослідження найрізноманітніших задач, пов'язаних з хвилями і коливаннями.

ХОПФ Еберхард (Hopf Eberhard; 1902–1983) — німецький і американський математик. Основні роботи стосуються теорії динамічних систем і диференціальних рівнянь з частинними похідними.

ШТУРМ Жак Шарль Франсуа (Sturm Jacques Charles François; 1803–1855) — швейцарський математик. Основні праці присвячені задачам математичної фізики та пов'язаним з ними крайовим задачам на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь (задача Штурма–Ліувілля). Заклав основи теорії коливності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

ЯКОБІ Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob; 1804–1851) — німецький математик. Йому належать відкриття в теорії чисел, алгебрі, варіаційному численні, інтегральному численні та теорії диференціальних рівнянь. Досліджував диференціальні рівняння динаміки, розробив нові методи їх розв'язування.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Боярчук А. К., Головач Г. П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М. : Едиториал УРСС, 2001. 384 с.
2. Бугрій О. М., Процах Н. П., Бугрій Н. В. Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі. Львів : Видавець І. Чижиков, 2011. 348 с.
3. Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П. Диференціальні рівняння. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. 470 с.
4. Диференціальні рівняння: методи та застосування / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. 288 с.
5. Диференціальні рівняння: навч. посібник / Каленюк П.І. та ін. Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2014. 380 с.
6. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. К. : Либідь, 2004. 408 с.
7. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Высшая школа, 1967. 564 с.
8. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у задачах. К. : Либідь, 2003. 504 с.
9. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. К. : Либідь, 2003. 600 с.
10. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння. К. : Техніка, 2003. 368 с.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

10. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М. : Едиториал УРСС, 2003. 208 с.
11. Білоусова Л. І., Горонескуль М. М. Курс вищої математики у середовищі Maple. Х. : УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. 412 с.
12. Боднар Д. І., Буяк Л. М., Возняк О. Г. Диференціальні рівняння: методи розв'язування. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2010. 112 с.
13. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. 360 с.
14. Гой Т. П., Махней О. В. Практикум з диференціальних рівнянь. Ч. 1. Диференціальні рівняння першого порядку. Івано-Франківськ : Голіней, 2017. 116 с.
15. Гой Т. П., Махней О. В., Негрич М. П., Симотюк М. М. Практикум з диференціальних рівнянь. Ч. 2. Диференціальні рівняння вищих порядків, системи диференціальних рівнянь. Івано-Франківськ : Голіней, 2019. 176 с.
16. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М. : СОЛОН-Пресс, 2006. 720 с.
17. Эдвардс Ч. Г., Пенни Д. Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. М. : ООО «И. Д. Вильямс», 2008. 1104 с.
18. Журавлев С. Г., Аниковский В. В. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи экономики, экологии и других социальных наук. М. : Экзамен, 2005. 128 с.
19. Махней О. В., Гой Т. П. Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. Івано-Франківськ : Сімик, 2013. 304 с.
20. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений. Минск : Выш. школа, 1973. 560 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК