Диференціювання Жордана кілець поліномів

І.І. Ліщинський

Нехай R – асоціативне кільце. Відображення $\delta : R \to R$ називається диференціюванням Жордана кільця R, якщо $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$ та $\delta(x^2) = \delta(x)x + x\delta(x)$ для всіх елементів $x, y \in R$. Множину всіх диференціювань Жордана кільця R звичайно позначають через $JDerR$. Очевидним є те, що, якщо $c \in Z(R)$, а $d_1, d_2 \in JDerR$, то $cd_1, d_1 \pm d_2 \in DerR$, тобто $JDerR$ – лівий $Z(R)$-модуль. Вважається, що кільце вільне від 4-скруту, якщо з рівності $4x = 0$ випливає $x = 0$.

Метою даної статті є встановити зв'язок між множиною диференціювань Жордана кільця R та множинами диференціювань Жордана кільця поліномів $R[x_1, \dots, x_n]$ та кільця формальних степеневих рядів $R[[x_1, \dots, x_n]]$. Встановлено також умову, за якої $JDerR$ є лівим R-модулем.

1. Нехай I – зліченна множина, тоді родина диференціювань Жордана $\delta = \{\delta_i | i \in I\}$ кільця R називається локально скінченною, якщо для кожного елемента $a \in R$ маємо $\delta_i(a) = 0$ майже для всіх індексів $i \in I$. Через $(jDerR)^\infty$ позначимо сукупність всіх локально скінченних родин диференціювань Жордана кільця R, а через $(JDerR)^\infty$ – сукупність всіх родин диференціювань Жордана кільця R.

Твердження 1. *Нехай $R[x_1, \dots, x_n]$ – кільце поліномів від n комутуючих змінних $x_1, \dots, x_n$ над кільцем R і вільне від 4-скруту. Тоді має місце ізоморфізм лівих $Z(R)$-модулів*

$$JDerR[x_1, \dots, x_n] \cong (jDerR)^\infty \times Z(R)[x_1, \dots, x_n]^n.$$

Доведення. 1) Нехай D – яке-небудь диференціювання Жордана кільця поліномів $R[x_1, \dots, x_n]$. Тоді для кожного елемента $r \in R$ його похідна $D(r) \in R[x_1, \dots, x_n]$. Оскільки $R[x_1, \dots, x_n]$ – підкільце в кільці формальних степеневих рядів $R[[x_1, \dots, x_n]]$, то формально $D(r)$ можна записати у вигляді степеневого ряду (в якому майже всі коефіцієнти є нульовими) таким чином:

$$D(r) = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}_0^n} \delta_{i_1\dots i_n}(r) x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n},$$

де $\delta_{i_1\dots i_n}(r) \in R$ для кожної n-ки $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Легко встановити, що відображення $\delta : R \to R$, де $\delta(r) = \delta_{i_1\dots i_n}(r) \quad (r \in R)$, є диференціюванням Жордана кільця R і, як наслідок, родина диференціювань Жордана

$$\delta = \{\delta_{i_1\dots i_n} | (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n\} \tag{1}$$

кільця R є локально скінченною.

2) Тепер нехай $d_j = D(x_j)$, де $j = 1, \dots, n$. Тоді

$$d_j = \sum a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} \tag{2}$$

– деякий поліном кільця $R[x_1, \dots, x_n]$.

Розглянемо як діє диференціювання Жордана на добуток комутуючих між собою елементів $s, t \in R[x_1, \dots, x_n]$, тоді

$$4D(st) = D(4st) = D((s+t)^2 - (s-t)^2) = D((s+t)^2) - D((s-t)^2) =$$

$$= 2(s+t)D(s+t) - 2(s-t)D(s-t) = 4(sD(t) + D(s)t).$$

А оскільки дане кільце вільне від 4-скруту, то $D(st) = sD(t) + D(s)t$. Позаяк $ax_j = x_j a$ та $D(a)x_j = x_j D(a)$ для кожного $a \in R$, то

$$aD(x_j) = D(x_j)a,$$

а звідси

$$\sum aa_{i_1\dots i_n}x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} = \sum a_{i_1\dots i_n}ax_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}.$$

Оскільки a – довільний елемент із R, то $a_{i_1\dots i_n} \in Z(R)$ для всіх коєфіцієнтів полінома d_j. Це означає, що $d_j \in Z(R)[x_1,\dots,x_n]$.

Підсумовуючи 1) та 2), легко встановити, що відображення

$$\varphi : JDerR[x_1,\dots,x_n] \to (jDerR)^\infty \times Z(R)[x_1,\dots,x_n]^n,$$

де $\varphi(D) = (\delta, d_1,\dots,d_n)$, δ – локально скінченна родина (1) диференціювань Жордана кільця R, а d_j – многочлен (2), є ізоморфізмом лівих $Z(R)$-модулів. Твердження доведено.

Твердження 2. *Нехай $R[[x_1,\dots,x_n]]$ – кільце формальних степеневих рядів від n комутуючих змінних $x_1,\dots,x_n$ над кільцем R і вільне від 4-скруту. Тоді має місце ізоморфізм лівих $Z(R)$-модулів*

$$JDerR[[x_1,\dots,x_n]] \cong (JDerR)^\infty \times Z(R)[[x_1,\dots,x_n]]^n.$$

Доведення. Подібне до доведення твердження 1, а тому ми його опускаємо.

2. Зрозуміло, якщо кільце R комутативне, то $JDerR$ – лівий R-модуль. Але існують кільця R, які не є комутативними і $JDerR$ є лівим R-модулем. Нами встановлено:

Твердження 3. *Нехай R – кільце. Тоді $JDerR$ – лівий R-модуль в тому і тільки тому випадку, коли*

$$(ax - xa)\delta(x) = 0$$

для будь-яких $a, x \in R$ та $\delta \in JDerR$.

Доведення.($\Rightarrow$) Нехай $JDerR$ – лівий R-модуль. Тоді для будь-яких $\delta \in JDerR$ та $a, x \in R$ маємо

$$a\delta(x)x+xa\delta(x) = (a\delta)(x^2) = a(\delta(x^2)) = a(\delta(x)x+x\delta(x)) = a\delta(x)x+ax\delta(x),$$

а звідси

$$(ax - xa)\delta(x) = 0.$$

($\Leftarrow$) Встановлюється безпосередньо.

Наведемо приклад кільця в якому існує диференціювання Жордана, яке не є диференціюванням.

Приклад 4. Розглянемо поле $F_4 = F_2/(x^2 + x + 1)$ з таблицями Келі додавання $+$ і множення $\cdot$:

$+$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$
1	1	0	$\alpha+1$	α
α	α	$\alpha+1$	0	1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$
α	0	α	$\alpha+1$	1
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	1	α

та автоморфізм $\sigma : F_4 \to F_4$, $\sigma(x) = x^2$ для кожного $x \in F_4$. Нехай $B = F_4[x, \sigma]/(x^2) = F_4 + F_4b$, де $b^2 = 0$ та $bx = \sigma(x)b$ для всіх $x \in F_4$.

Очевидним є те, що $JDerF_4 = DerF_4 = \{0\}$. Проте диференціюваннями Жордана кільця B будуть такі функції:

t	F_4	b	αb	$(\alpha+1)b$
$\delta(t)$	0	xb	yb	$(x+y)b$

де x, y довільні елементи поля F_4.

Дійсно, оскільки $(x + yb)^2 = x^2 + (xy + y\sigma(x))b = x^2 + y(x + \sigma(x))b$, то

$$\delta(y(x+\sigma(x))b) = \delta((x+yb)^2) = \delta(x+yb)(x+yb)+(x+yb)\delta(x+yb) = (\sigma(x)+x)\delta(yb).$$

Якщо $x = 0$ або $x = 1$, то $x + \sigma(x) = 0$, а якщо $x = \alpha$ або $x = \alpha + 1$, то $x + \sigma(x) = 1$ і вище наведена рівність виконується для всіх $y \in F_4$.

Зауважимо, що серед вище вказаних диференціювань Жордана кільця B тільки наступні будуть його диференціюваннями:

t	F_4	b	αb	$(\alpha+1)b$
$\delta_1(t)$	0	0	0	0
$\delta_2(t)$	0	b	αb	$(\alpha+1)b$
$\delta_3(t)$	0	αb	$(\alpha+1)b$	b
$\delta_4(t)$	0	$(\alpha+1)b$	b	αb

(бо $\delta_i(xb) = x\delta_i(b)\ \forall x \in F_4$).

Література

[1] *Бурков В.Д.* Дифференцирования колец многочленов // Вестник Москов. унив., сер. мех.-мат. - 1981. - N 2. - С.51-52.

[2] *I.N. Herstein* Jordan derivation of prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 8(1957), 1104-1110