Міністерство освіти і науки України

Державний вищий навчальний заклад

«Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

Факультет математики та інформатики

Кафедра алгебри та геометрії

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на тему

“Метод математичної індукції”

Виконала: студентка II курсу,

Групи СОМ(М)-2

Спеціальності 014 Середня освіта (111-математика)

Левицька А.А.

Керівник:

Кандидат фізико-математичних наук

Копорх К. М.

Рецензент:

Івано-Франківськ – 2019р.

Зміст

ВСТУП

Актуальність дослідження: метод математичної індукції застосовується при доведенні теорем, тверджень, нерівностей, тотожностей, тощо. Цей метод якісно працює в найрізноманітніших областях математики. Оскільки цей метод вводиться на множині натуральних чисел, то найчастіше він застосовується в арифметиці, алгебрі і теорії чисел. Проте поняття цілого числа є основним не тільки в цих розділах математики, а й, наприклад, в геометрії, тригонометрії. Алгоритмічність методу значно спрощує доведення деяких тверджень і властивостей, що в свою чергу покращує сприйняття матеріалу різних розділів математики здобувачами освіти. Зокрема, застосування цього методу в геометрії особливо цікаве і ефективне.

Метод математичної індукції, для перевірки деякого твердження, для всіх натуральних чисел працює наступним чином: спочатку перевіряється істинність твердження з номером n_1 який називається базою індукції. Потім робимо припущення, що твердження з номером k, теж вірне. Якщо вдасться довести, що твердження виконується для наступного елемента, з номером $k+1$ - крок індукції, то робимо висновок, що дане твердження виконується для всіх натуральних чисел.

Іноді доведення методом математичної індукції наочно асоціюють з принципом доміно. Нехай, яке завгодно число кісточок доміно виставлено в ряд таким чином, що кожна кісточка, падаючи, обов'язково перекидає наступну за нею кісточку (у цьому полягає індукційний перехід). Тоді, якщо ми штовхнемо першу кісточку (це база індукції), то всі кісточки в ряді упадуть.

Метою дослідження є зібрати і систематизувати методичний матеріал даної теми, що дозволить якісно подати тему метод математичної індукції у педагогічній діяльності, і допоможе формувати в здобувачів освіти вміння і навики доведення тверджень, теорем і властивостей в різних математичних розділах.

Об’єкт дослідження: задачі шкільного курсу математики, які раціонально розв’язувати методом математичної індукції.

Предмет дослідження: методичні особливості вивчення і застосування методу математичної індукції в шкільному курсі математики.

Завдання дослідження:

1. Провести аналіз шкільних програм, підручників та посібників, якими користується переважна більшість вчителів;
2. Зібрати задачі і теореми, які «гарно» доводяться методом математичної індукції;
3. Структурувати зібраний матеріал у плані викладання курсів математики, факультативного та олімпіадного напрямків;
4. Приділити особливу увагу доведенню задач на подільність, доведенню нерівностей, доведенню тригонометричних тотожностей, та розв’язанню деяких олімпіадних задач, методом математичної індукції.

Структура роботи: робота складається із вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі детально розглядаються поняття індукції, звідки воно виникає і в чому полягає, розглядаються тип задач, які спонукають, до якісного застосування даного метод. В II розділі наводиться формулювання методу математичної індукції в класичній формі і в формі спуску. В III розділі розглядаються задачі арифметичного типу: доведення тотожностей, доведення подільності виразів, на задане число. В IV розділі розглядаються доведення тригонометричних і алгебраїчних задач. В V розділі зібрано задачі на доведення нерівностей. В VI розділі наведено теореми шкільного курсу алгебри, доведення яких можна проводити даним методом. В VII розділі наведені задачі олімпіадного типу, які якісно доводяться методом математичної індукції.

1. Поняття принципу індукції. Приклади і задачі, які призводять до виникнення методу індукції.

Всі твердження можна умовно поділити на загальні і часткові. Наведемо приклади загальних тверджень:

- Всі громадяни України мають право на освіту.
- В кожному трикутнику медіани точкою перетину діляться у відношенні 2:1 починаючи від вершини.
- Всі числа, які закінчуються нулем діляться на 5.

Відповідними прикладами часткових тверджень будуть:

- Петрів має право на освіту.
- В трикутнику ABC медіани AA', BB', CC' точкою перетину діляться у відношенні 2:1.
- 230 ділиться на 5.

Означення 1: Перехід від загального твердження до часткового називається **дедукцією.**

Розглянемо приклад дедуктивного міркування: Всі громадяни України мають право на освіту (1). Олексієнко – громадянин України (2). Отже, Олексієнко має право на освіту (3). Таким чином з загального твердження (1), за допомогою твердження (2), отримуємо часткове твердження (3).

Означення 2: Перехід від часткового твердження до загального називається **індукцією.**

Індукція може приводити, як до вірних тверджень, так і до хибних тверджень. Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1.1: 140 ділиться на 5 (1). Всі числа, які закінчуються нулем діляться на 5 (2).

З часткового твердження (1) отримано загальне твердження (2). З шкільного курсу математики відомо, що твердження (2) – вірне.

Приклад 1.2: 140 ділиться на 5 (1). Всі тризначні числа діляться на 5 (2).

З часткового твердження (1) отримано загальне твердження (2), яке є хибним.

І тут виникає питання, як користуватися методом математичної індукції, щоб отримувати виключно правильні твердження? Відповідь на це запитання дається в цій магістерській роботі.

Метод математичної індукції широко застосовується в математиці, але застосовувати її треба уважно, щоб не отримати хибних тверджень. Розглянемо, для початку, два приклади (3 і 4) індуктивних міркувань, які є неприпустимими в математиці і призводять до хибних висновків.

Приклад 1.3: Нехай $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$. Нескладно перевірити, що виконуються наступні рівності

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

На основі отриманих результатів, узагальнюючи отримаємо *результат*, що для кожного натурального n сума $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Приклад 1.4: Розглянемо тричлен $(x^2 + x + 41)$. Даний тричлен розглядав, ще Л. Ейлер. Якщо підставити в нього $x = 0$, то отримаємо просте число 41. Якщо підставити $x = 1$, то отримаємо просте число 43. Якщо підставити $x = 2$, то отримаємо просте число 47. Продовжуючи підставляти в тричлен замість x значення 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, отримаємо відповідно 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. На основі отриманих результатів *хибно стверджуємо*, що при підстановці в тричлен замість x довільного цілого невідємного числа завжди отримуємо просте число.

Тепер проаналізуємо чому ми приходимо до хибного результату і в чому помилка наших міркувань.

Справа в тому, що в обох прикладах перевірено скінченне число випадків, а висновок наводиться для всіх натуральних чисел. І якщо в третьому прикладі узагальнене твердження випадково виявилось правильним (ми це доведемо дещо пізніше), то в четвертому прикладі ми отримали хибний результат. Якщо покладемо $x = 41$, то отримаємо $41^2 + 41 + 41 = 41^2 + 2 \cdot 41 = 41(41 + 2) = 41 \cdot 43 = 1763$ – складене число. В прикладі 4 маємо твердження, яке виконується в 40 часткових випадках і є хибним в загальному випадку.

<u>Приклад 1.5:</u> Розглянемо двочлен $(x^n - 1)$, де n – натуральне число. Нас цікавить питання розкладу даного двочлена на множники з цілими коефіцієнтами. Розглянемо наступні випадки:

При $n = 1$ отримаємо $x - 1 = x - 1$.

При $n = 2$ отримаємо $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

При $n = 3$ отримаємо $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

При $n = 4$ отримаємо $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.

При $n = 5$ отримаємо $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

При $n = 6$ отримаємо

$x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

……………………………………………………………………………

Нескладно помітити, що всі коефіцієнти розкладів по модулю не перевищують 1. Тут виникає гіпотеза: для всякого натурального n коефіцієнти розкладу на множники, по модулю не перевищують 1. Довший час це питання залишалось відкритим. Але в 1938 році В. Іванов навів приклад, який спростував дану гіпотезу. В розкладі на множники многочлена $x^{105}-1$ один з множників має вигляд $(x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-\mathbf{2}x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^{9}-x^{8}-\mathbf{2}x^{7}-x^{6}-x^{5}+x^{2}+x+1)$ і містить коефіцієнти модуль яких не 1. Пізніше було перевірено, що для всіх натуральних $n<105$ гіпотеза справедлива.

<u>Приклад 1.6:</u> Розглянемо числа виду $2^{2^n}+1$. При $n=0,1,2,3,4$ отримуємо послідовність простих чисел $2^{2^0}+1=3,\ 2^{2^1}+1=5,\ 2^{2^2}+1=17,\ 2^{2^3}+1=257,\ 2^{2^4}+1=65537$ – прості.

Чудовий французький математик XVII ст. Ферма припускав, що дана формула генерує прості числа. Однак Л. Ейлер в XVII ст. спростував гіпотезу Ферма, знайшовши контр приклад:

$2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$ – складне число.

<u>Приклад 1.7:</u> Відомий німецький математик XVII ст., один з основоположників математичного аналізу, Г.В.Лейбніц довів, що при кожному цілому додатному n число n^3-n ділиться на 3, число n^5-n ділиться на 5 і число n^7-n ділиться на 7. На цій основі вчений сформулював гіпотезу, що для кожного непарного $k\in \mathrm{N}$ і для кожного натурального n число n^k-n ділиться на k, але скоро сам помітив, що при $k=9$ і $n=2$ гіпотеза не виконується $2^9-2=510$ і на 9 не ділиться.

<u>Приклад 1.8:</u> Помилку такого типу зробив російський математик Д.А. Граве. Він припустив, що для всіх простих чисел p число $(2^{p-1}-1)$ не ділиться на p^2. Однак безпосередня перевірка підтвердила правильність припущення для всіх простих чисел $p<1000$. Але при $p=1093$ число $2^{1092}-1$ виявилось

складним числом, яке ділиться на просте число 1093^2 тобто гіпотеза Граве виявилась хибною.

Приклад 1.9: Геометрична модель: визначити на скільки частин ділить простір n площин, які проходять через одну точку, якщо жодні з трьох площин не проходять через одну пряму?

Розглянемо найпростіші випадки цієї задачі: одна площина розбиває простір на два підпростори; дві площини, які проходять через одну точку, ділять простір на 4 частини; три площини, які мають спільну точку і не містять спільної прямої, ділить простір на 8 частин... Можна зробити припущення: n площин розбивають простір на 2^n частин. Тобто згідно з припущенням 4 площини розбивають простір на 16 частин, 5 площин розбивають простір на 32 частини, … Та насправді, це не так 4 площини розбивають простір на 14 частин, 5 площин розбивають простір на 22 частини. Пізніше ми доведемо, що n площини розбивають простір на $n(n-1)+2$ частин.

Приклад 1.10: Розглянемо вираз $991n^2+1$, якщо замість n підкладати послідовно натуральні числа 1,2,3, … то числа, які отримуємо, не є повними квадратами натуральних чисел. Але гіпотезу, що дана формула генерує виключно неповні квадрати довести не вдалось, тому її спростували підібравши число $n = 12\,055\,735\,790\,331359\,447\,442\,538\,767$ при якому число $991n^2+1$ є повним квадратом числа 379 516 400 906 811 930 638 014 896 080.

Розглянуті приклади дають можливість сформулювати наступний висновок: *деяке твердження може* ***частково*** *виконуватись для довільної кількості чисел, і не виконуватись* ***в цілому.***

2. Принцип математичної індукції

Природно виникає питання: нехай є деяке твердження T, яке є правильним для деяких натуральних чисел $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$, де $n \in$ N. Оскільки абсолютно всі випадки перевірити неможливо, то нас цікавить в яких випадках дане твердження виконується для всіх натуральних чисел, а коли це твердження хибне і його слід відкинути.

Відповідь на поставлене питання іноді можна отримати використавши особливий метод міркувань, який має назву метод математичної індукції. В основі методу лежить принцип математичної індукції, який полягає в наступному.

Принцип математичної індукції: *Якщо деяке твердження* $T(n)$:

1) виконується для $n = 1$*;*

2) і з припущення, що дане твердження є правильне для $n = k$ *можна вивести правильність твердження для* $n = k + 1$;

то твердження виконується для будь-якого натурального числа $n \in N$.

Доведення: Припустимо протилежне. Нехай твердження виконується не для всіх натуральних чисел. Тобто знайдеться таке натуральне число $m \in$ N, що твердження $T(m)$ не виконується, але для всіх $n < m$ твердження вірне. Іншими словами, ми знайшли перше натуральне число, для якого твердження не виконується.

Очевидно, що $m > 1$, так як для $n = 1$, твердження виконується умова (1). Якщо m – натуральне, то $(m - 1)$ теж натуральне число, для якого твердження $T(m - 1)$ виконується. Згідно з міркуваннями для наступного числа $m \in$ N твердження $T(m)$ не виконується. Що суперечить твердженню (2).

Принцип математичної індукції (формі «спуска»): *Якщо деяке твердження* $T(n)$:

1) виконується для $n = 1$;

2) і з припущення, що дане твердження є правильне для всіх значень $k < n$ *можна вивести правильність твердження для* $k = n$

то твердження виконується для будь-якого натурального числа $n \in N$.

Іноді доведення методом математичної індукції наочно асоціюють з принципом доміно. Нехай, яке завгодно число кісточок доміно виставлено в ряд таким чином, що кожна кісточка, падаючи, обов'язково перекидає наступну за нею кісточку (у цьому полягає індукційний перехід). Тоді, якщо ми штовхнемо першу кісточку (це база індукції), то всі кісточки в ряді упадуть.

3. Доведення тотожностей і задач арифметичного типу за допомогою математичної індукції

Доведення, які гуртуються на принципі математичної індукції називають доведенням за допомогою математичної індукції. Таке доведення умовно розбиваємо на дві частини, які можна розглядати, як дві окремі теореми:

ТЕОРЕМА 1: Дане твердження виконується для найменшого елемента множини на якій розглядається. Умовно твердження справедливе для $n = 1$.

ТЕОРЕМА 2: Твердження виконується при $n = k + 1$, якщо воно виконується для $n = k$, де k - довільне натуральне число.

Якщо ці дві теореми доведено, то на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що дане твердження виконується при всіх натуральних числах.

<u>Приклад 3.1</u>: Обчислити суму $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$. Нескладно перевірити, що виконуються наступні рівності

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

На основі отриманих результатів, узагальнюючи висловимо *гіпотезу*, що для кожного натурального n сума $S_n = \frac{n}{n+1}$. Для перевірки висунотої гіпотези скористаємося методом математичної індукції.

ТЕОРЕМА 1: При $n = 1$ гіпотеза виконується, так як $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$.

ТЕОРЕМА 2: Припустимо, що дане твердження справедливе для $n = k$, тобто

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1} \ .$$

Де k – деяке натуральне число. Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$. Тобто, що має місце рівність $S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$.

Справді $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+2)}$.

Обидві теореми доведено, тому на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що дана *гіпотеза* виконується для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$.

Зауваження 1: Для використання методу математично індукції при доведенні гіпотез необхідно доведення двох теорем 1 і 2.

Якщо знехтувати доведенням теореми 2, то отримаємо хибний результат, так, як в прикладі 4. Розглянемо приклад, який покаже важливість теореми 1.

<u>Приклад 3.2</u>:

ТЕОРЕМА 3.Кожне натуральне число рівне наступному натуральному числу.

Доведення: Не перевіряючи виконання першої теореми, припустимо, що

$$k = k + 1 \qquad (1)$$

Доведемо, що

$$k + 1 = k + 2 \qquad (2)$$

Додамо до кожної частини рівності (1) по 1, отримаємо рівність (2). Таким чино, отримали, що якщо твердження правильне для деякого $n = k,$ то воно правильне і для наступного $n = k + 1$. Теорема доведена.

НАСЛІДОК: Всі натуральні числа рівні.

Ми отримали хибний результат, в наслідок того, що не вимагали доведення першої теореми. Таким чином перша теорема є необхідною, для примінення принципу математичної індукції. В даному випадку перша теорема не виконується, бо $1 \neq 2$. А доведення тільки другої теореми не гарантує правильності результату.

Теореми 1 і 2 мають особливе значення. Теорема 1, гарантує існування бази, тобто множини чисел на якій дана гіпотеза виконується. А теорема 2 дає можливість необмеженого автоматичного розширення цієї бази і переходу від часткового випадку n до наступного випадку $n + 1$.

Якщо не доведена теорема 1, то не утворена база індукції і нема змісту доводити теорему 2 (розширювати те чого нема).

Якщо не доведена теорема 2 але доведена теорема 1, то хоча база індукції збудована але нема змоги її розширити, тобто ми не можемо узагальнити результат.

Зауваження 2: Ми розглянули метод математичної індукції, для найпростішого випадку. В складніших випадках теореми 1 і 2 сформулюються складніше.

Іноді друга частина доведення може спирається на справедливість припущення не лише при $n = k$ але й для $n = k - 1$. В цьому випадку в першій частині доведення ми перевіряємо правильність твердження для двох послідовних значень параметра n.

В деяких випадках друга частина доведення полягає в встановленні справедливості твердження, яке розглядається, для деякого значення n, з припущення, що дане твердження виконується для всіх натуральних чисел, які менші ніж n. В деяких випадках твердження доводиться не для кожного натурального n, а для всіх цілих чисел, які перевищують деяке наперед задане число m, в цьому випадку, ми перевіряємо правильність даного твердження при $n = m + 1$, і якщо необхідно, то ще при деяких значеннях n, які більші за m.

Звернемося ще раз до прикладу 1:

Обчислити суму $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$. Розглядаючи суми

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Ми висловили *гіпотезу*, що для кожного натурального n сума $S_n = \frac{n}{n+1}$. Для перевірки висунутої гіпотези ми скористалися методом математичної індукції. Нам пощастило гіпотеза виявилась істиною, якщо б ми сформулювали невдало гіпотезу, то ми б не змогли довести теорему 2, що б спростувало наше припущення.

Приклад 3.3 Обчислити суму $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Висловимо *гіпотезу*, що для кожного натурального n сума $S_n = \frac{n+1}{3n+1}$.

При $n = 1$ дана гіпотеза вірна $S_1 = \frac{1+1}{3+1} = \frac{1}{2}$.

Припустимо, що дана гіпотеза вірна для всіх $n = k$, тобто $S_k = \frac{k+1}{3k+1}$.

І спробуємо довести, що гіпотеза виконується для $n = k + 1$. Тобто, $S_{k+1} = \frac{k+2}{3k+4}$.

З іншого боку $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k+1}{3k+1} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k^3+4k^2+8k+2}{(3k+1)(k+1)\cdot(k+2)}$ ми отримуємо інший результат.

Отже, з правильності твердження для $n = k$ нам не вдалось вивести правильність твердження для наступного елемента $n = k + 1$. Тобто наша гіпотеза хибна.

Таким чином, метод математичної індукції дозволяє при пошуку узагальнюючого твердження перевіряти гіпотези, які при цьому виникають, залишати істині і відкидати хибні.

Для кращого розуміння методу математичної індукції розглянемо ряд задач.

Задача 1. Доведіть, що

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

В даній задачі гіпотезу формулювати не потрібно, вона вже сформульована залишається її тільки довести.

Доведення:

ТЕОРЕМА 1: При $n = 1$ гіпотеза виконується, так як $S_1 = 1^2 = \frac{1\cdot(2-1)(2+1)}{3} = 1$.

ТЕОРЕМА 2: Припустимо, що дане твердження справедливе для $n = k$, тобто

$$S_k = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$

Де k – деяке натуральне число.

Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k+1$. Тобто, що має місце рівність

$$S_{k+1} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

Справді $S_{k+1} = S_k + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 =$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1)+3(2k+1)^2}{3} = \frac{(2k+1)(2k^2-k+6k+3)}{3} = \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}.$$

Квадратний тричлен $(2k^2+5k+3)$ розкладемо на множники

$2k^2+5k+3 = 2(k+1)(k+\frac{3}{2})$. Тоді

$$S_{k+1} = \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3} = \frac{(2k+1)2(k+1)(k+\frac{3}{2})}{3} = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

Обидві теореми доведено, тому на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що дана *гіпотеза* виконується для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$. Що й треба було довести.

При подальшому розгляді задач, не будемо виділяти теореми 1 і 2, але перевіряємо їх виконання в кожному випадку.

Задача 2. Доведіть, що сума кубів n перших чисел натурального ряду дорівнює $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Доведення:

Запишемо дане твердження аналітично

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

При $n = 1$ гіпотеза виконується, так як $S_1 = 1^3 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = 1$.

Припустимо, що дане твердження справедливе для $n = k$, тобто

$$S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Де k – деяке натуральне число.

Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$. Тобто, що має місце рівність

$$S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Справді $S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) == (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

Рівність виконується при $n = k + 1$, отже, на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що дана *гіпотеза* виконується для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$. Що й треба було довести.

Задача 3. Доведіть, що

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \text{при } x \neq 1.$$

Доведення:

Перевіримо правильність гіпотези при $n = 1$:

$$S_1 = 1 + x = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1.$$

Припустимо, що дане твердження справедливе для $n = k$, тобто

$$S_k = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Де k – деяке натуральне число.

Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$. Тобто, що має місце рівність

$$S_{k+1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + x^{k+1} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$$

Справді $S_{k+1} = S_k + x^{k+1} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} + x^{k+1} = \frac{x^{k+1}-1+x^{k+2}-x^{k+1}}{x-1} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$

Рівність виконується при $n = k + 1$, отже, на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що дана *гіпотеза* виконується для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$. Що й треба було довести.

Задача 4. Доведіть, що

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Доведення:

Перевіримо правильність гіпотези при $n = 1$:

$$S_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Припустимо, що дане твердження справедливе для $n = k$, тобто

$$S_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}.$$

Де k – деяке натуральне число.

Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$. Тобто, що має місце рівність $S_{k+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) +$

$$+(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Справді

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)(k+3)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) =$$
$$= (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{k}{4} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

Рівність виконується при $n = k + 1$, отже, на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що дана *гіпотеза* виконується для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$. Що й треба було довести.

Задача 5. Доведіть, що

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Доведення:

При $n = 1$ гіпотеза виконується, так як $S_1 = \frac{1^2}{1 \cdot 3} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2(2+1)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Припустимо, що дане твердження справедливе для $n = k$, тобто
$$S_k = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

Де k – деяке натуральне число.

Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$. Тобто, що має місце рівність

$$S_{k+1} = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

Справді

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{(k+1)}{(2k+1)}\left(\frac{k}{2} + \frac{k+1}{2k+3}\right) = \frac{(k+1)}{(2k+1)}\left(\frac{2k^2+3k+2k+2}{2(2k+3)}\right) =$$

$$= \frac{(k+1)}{(2k+1)}\left(\frac{2k^2+5k+2}{2(2k+3)}\right) = \frac{(k+1)}{(2k+1)}\left(\frac{(2k+1)(k+2)}{2(2k+3)}\right) =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

Рівність виконується при $n = k+1$, отже, на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що дана *гіпотеза* виконується для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$. Що й треба було довести.

Задача 6. Обчисліть суму

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$$

Розв'язок: Обчислимо:

$S_1 = 1 \cdot 1! = 1,$ $S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5,$

$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23,$ $S_4 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$ ...

Можна помітити, що $S_1 = 2! - 1$, $S_2 = 3! - 1$, $S_3 = 4! - 1$, $S_4 = 5! - 1$, …

Висловимо *гіпотезу*, що для кожного натурального n сума $S_n = (n+1)! - 1$.

Перевіримо правильність нашої гіпотези:

При $n = 1$ гіпотеза виконується, так як $S_1 = 1 \cdot 1! = 2! - 1 \Rightarrow 1 = 1$.

Припустимо, що дане твердження справедливе для $n = k$, тобто

$$S_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

Де k – деяке натуральне число.

Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$. Тобто, що має місце рівність

$$S_{k+1} = (k + 2)! - 1.$$

Справді

$$S_{k+1} = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k + 1)! =$$
$$= S_k + (k + 1) \cdot (k + 1)! = (k + 1)! - 1 + (k + 1) \cdot (k + 1)!$$
$$= \big((k + 1) \cdot (k + 1)! + (k + 1)!\big) - 1 = (k + 1)! \cdot \big((k + 1) + 1\big) - 1$$
$$= (k + 1)! \cdot (k + 2) - 1 = (k + 2)! - 1.$$

Рівність виконується при $n = k + 1$, отже, на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що дана *гіпотеза* виконується для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$. Що й треба було довести.

Задача 7. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

Розв'язок: 1) Очевидно сума $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$ ділиться на 9. Тобто, твердження справедливе, коли перший доданок 1.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли перший доданок $k \in N$. Тобто, $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$ ділиться на 9 без остачі.

Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$.

$(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 = (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = (k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3)$, отже, перший доданок ділиться на 9 за припущенням, в той час другий доданок ділиться на 9 бо є добутком дев'ятки на деяке натуральне число $(k^2 + 3k + 3)$.

Задача 8. Доведіть, що для цілих $n \geq 0$, число:

$$A_n = 11^{n+1} + 12^{2n+1}$$

Ділиться на 133 без остачі.

Розв'язок: 1) Очевидно при $n = 0$ число $A_1 = 11^1 + 12^2 = 133$ ділиться на 133. Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n = k \in N$. Тобто, $11^{k+1} + 12^{2k+1}$ ділиться на 133 без остачі.

Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$.

$$11^{k+1+1} + 12^{2(k+1)+1} = 11 \cdot 11^{k+1} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} =$$

$$= 11 \cdot 11^{k+1} + 144 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot 11^{k+1} + (11 + 133) \cdot 12^{2k+1},$$

Перегрупуємо і отримаємо наступну суму:

$$11^{k+1+1} + 12^{2(k+1)+1} = 11 \cdot (11^{k+1} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}$$

отже, перший доданок ділиться на 133 за припущенням, в той час другий доданок ділиться на 133 бо є добутком 133 на деяке натуральне число 12^{2k+1}.

Задача 9. Доведіть, що n різних прямих, проведених на площині через одну точку, ділять цю площину на $2n$ частин.

Розв'язання:

1) При $n = 1$ пряма поділяє площину на дві півплощини $2 = 2 \cdot 1$.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n = k \in N$. Тобто, k прямих ділить площину на $2k$ частин.

Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$.

Згідно припущення k прямих, які проходять через т.O, ділять площину на $2k$ частин. Нехай $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ прямі, які проходять через т.O. Проведемо наступну A_{k+1} пряму, нехай вона пройде між сусідніми прямими A_i і A_{i+1}, де $1 \leq i \leq k - 1$ При перетині A_i і A_{i+1},утворюється дві пари вертикальних кутів, пряма A_{k+1} розіб'є пару вертикальних кутів на 4 частини, тоді загальна кількість частин площини збільшиться на 2, тобто, $(2k + 2)$.

4. Доведення тригонометричних задач за допомогою математичної індукції

Розглянемо застосування методу математичної індукції для доведення тригонометричних тотожностей. Деякі перетворення є громіздкими і потребують знання основних тригонометричних формул і перетворень.

Задача 10. Доведіть, тотожність:

$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha}$

Розв'язок: 1) Очевидно при $n = 0$ тотожність виконується:

$$\cos\alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha} = \cos\alpha$$

Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n = k \in N$. Тобто, $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha \ldots \cos 2^k\alpha = \frac{\sin(2^{k+1}\alpha)}{2^{k+1}\sin\alpha}$. Доведемо, що гіпотеза справджується при $n = k + 1$, тобто:

$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha \ldots \cos 2^k\alpha\cos 2^{k+1}\alpha = \frac{\sin(2^{k+2}\alpha)}{2^{k+2}\sin\alpha}$.

Застосувавши припущення:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha \ldots \cos 2^k\alpha\cos 2^{k+1}\alpha = \frac{\sin(2^{k+1}\alpha)}{2^{k+1}\sin\alpha}\cos(2^{k+1}\alpha) =$$

$= \frac{2\sin(2^{k+1}\alpha)\cos(2^{k+1}\alpha)}{2\cdot 2^{k+1}\sin\alpha} = \frac{\sin(2^{k+2}\alpha)}{2^{k+2}\sin\alpha}$.

Що й треба було довести.

Задача 11. Доведіть, тотожність:

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Розв'язок: 1) Очевидно при $n=0$ тотожність виконується:

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n=k\in N$. Тобто, $\frac{1}{2}+$

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos k\alpha=\frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Доведемо, що рівність виконується при $n=k+1$, тобто:

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos k\alpha+\cos(k+1)\alpha=\frac{\sin\left(\frac{2k+3}{2}\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Застосувавши припущення:

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos k\alpha+\cos(k+1)\alpha=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+\cos(k+1)\alpha=\frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}\alpha\right)+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(k+1)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Скористаємося відомим тригонометричним співвідношенням:

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\cos(x-y)).$$

Отримаємо

$$\frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}\alpha\right)+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(k+1)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{1+2k}{2}\alpha\right)+2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}+(k+1)\alpha\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-(k+1)\alpha\right)\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+k\alpha\right)+\left(\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+k\alpha\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}+k\alpha\right)\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+k\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Що й треба було довести.

Задача 12. Доведіть, тотожність:

$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \cdots + n\sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$.

Розв'язок: 1) Очевидно при $n = 0$ тотожність виконується:

$\sin 0 = \frac{(0+1)\sin 0 - 0\sin(0+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = 0.$

Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n = k \in N$. Тобто, $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \cdots + k\sin kx = \frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$.

Доведемо, що рівність виконується при $n = k + 1$, тобто:

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \cdots + k\sin kx + (k+1)\sin(k+1)x =$$

$$= \frac{(k+2)\sin(k+1)x - (k+1)\sin(k+2)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Застосувавши припущення:

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \cdots + k\sin kx + (k+1)\sin(k+1)x =$$

$$= \frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} + (k+1)\sin(k+1)x.$$

Скористаємося відомими тригонометричними співвідношеннями: $\frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} + (k+1)\sin(k+1)x = \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \Big((k+1)\sin kx — k\sin(k+1)x + 4\sin^2\frac{x}{2}\,(k+1)\sin(k+1)x\Big)$ оскільки $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, то отримаємо

$\frac{((k+1)\sin kx — k\sin(k+1)x + 2(1-\cos x)(k+1)\sin(k+1)x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}$.

Спростимо чисельник:

$$(k+1)\sin kx — k\sin(k+1)x + 2(1-\cos x)(k+1)\sin(k+1)x =$$

$$= (k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x + + (2k - 2k\cos x + 2 - 2\cos x)\sin(k+1)x =$$

$$= (k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x + 2k\sin(k+1)x -$$

$$-2k\sin(k+1)x\cos x + 2\sin(k+1)x - 2\sin(k+1)x\cos x =$$

$$= (k+2)\sin(k+1)x - 2(k+1)\sin(k+1)x\cos x + (k+1)\sin kx =$$

$$= (k+2)\sin(k+1)x - (k+1)(\sin kx - 2\sin(k+1)x\cos x) =$$

$$= (k+2)\sin(k+1)x + (k+1)\big(\sin kx - 2\cos x\,(\sin kx\cos x + \sin x\cos kx)\big) =$$

$$= (k+2)\sin(k+1)x + (k+1)(\sin kx - 2\sin kx\cos^2 x - 2\sin x\cos x\cos kx)$$

$$= (k+2)\sin(k+1)x + (k+1)(\sin kx\,(1 - 2\cos^2 x) - \sin 2x\cos kx)$$

$$= (k+2)\sin(k+1)x + (k+1)(-\sin kx\cos 2x - \sin 2x\cos kx) =$$

$$= (k+2)\sin(k+1)x - (k+1)\sin(k+2)x.$$

Що й треба було довести.

Задача 13. Доведіть, тотожність

$$\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \cdots + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Задача 14. Доведіть, тотожність

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x.$$

5. Задачі на доведення нерівностей

Досить часто, метод математичної індукції зручно застосовувати при доведенні алгебраїчних нерівностей. Розглянемо ряд прикладів, які вдало демонструють дану техніку:

Задача 15. Доведіть, що при кожному натуральному $n > 1$ виконується нерівність: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Розв'язок: Позначимо, для зручності, ліву частину нерівності через S_n.

1) Очевидно при $n = 2$ нерівність виконується: $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{14}{24}$, тобто,

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24}$.

Отже, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n = k \in N.$ Тобто, $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$ – правильна нерівність.

Доведемо, що $S_{k+1} > \frac{13}{24}$. Отримаємо, $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}$ і $S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$.

Розглянемо різницю $S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$ Якщо число k натуральне, то $S_{k+1} - S_k > 0$, тобто $S_{k+1} > S_k$, згідно припущення $S_k > \frac{13}{24}$, тоді $S_{k+1} > S_k > \frac{13}{24}$. Що і треба було довести.

Задача 16. Довести, що для натуральних чисел n = 2, 3, 4,..., виконується нерівність $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} > n$.

Розв'язання.

1) При $n = 2$ отримаємо правильну нерівність: $\sqrt{1} + \sqrt{2} > 2$. В цьому можна переконатися, якщо піднести обидві частини нерівності до квадрату (ми можемо це зробити не порушуючи істинності даної нерівності, оскільки обидві частини нерівності додатні).

2) Припустимо, що нерівність виконується для $n = k$, тобто

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{k} > k.$$

3) Доведемо, що дана нерівність виконується для $n = k + 1$, тобто $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{k} + \sqrt{k+1} > k + 1$.

Згідно з припущенням $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{k} > k$ тоді підставимо $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{k} + \sqrt{k+1} > k + \sqrt{k+1}$. Далі, оскільки, для всіх значень $k > 2$, має місце нерівність $\sqrt{k+1} > 1$, отримаємо правильну нерівність

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{k} + \sqrt{k+1} > k + \sqrt{k+1} > k + 1$$

для всіх $k > 1$.

Задача 17. Доведіть, що при кожному натуральному $n > 1$ виконується нерівність: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

Розв'язок: Доведемо нерівність методом математичної індукції.

1) покажемо, що при $n = 2$ нерівність виконується: $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, справді, оскільки в правій і лівій частинах нерівності стоять додатні числа, то піднесемо обидві частини нерівності до квадрату:

$\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)^2 > 2$ отримаємо рівносильну нерівність: $\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2} > 2$, яка рівносильна $3 + 2\sqrt{2} > 4 \Rightarrow 2\sqrt{2} > 1 \Rightarrow 8 > 1$. Отже, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n = k \in N$. Тобто, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$ – правильна нерівність.

Доведемо, що $n = k + 1$ нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$ істинна.

Справді скористаємося припущенням і деякими елементарними перетвореннями отримаємо рівносильні нерівності:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}} > \frac{\sqrt{k^2}+1}{\sqrt{k+1}} = \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}.$$

Що і треба було довести.

Задача 18. Доведемо нерівність Бернуллі тобто, що якщо $n > 2$ і $x > 0$, то справедлива нерівність $(1 + x)^n > 1 + nx$.

Розв'язок: Доведемо нерівність методом математичної індукції.

1) При $n = 2$ нерівність справедлива, справді

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x,$$

Оскільки $x^2 \geq 0,$ то відкинувши додатній доданок отримаємо вираз менший ніж вихідний.

2) Припустимо, що нерівність справедлива при $n = k$ отже,

$$(1 + x)^k > 1 + kx.$$

Доведемо, що твердження виконується для $n = k + 1$ тобто має місце нерівність $(1 + x)^{k+1} > 1 + (k + 1)x$.

Згідно припущення має місце нерівність:

$$(1 + x)^k > 1 + kx$$

помножимо обидві частини цієї нерівності на додатнє число $(1 + x)$, одержимо $(1 + x)^k(1 + x) > (1 + kx) \cdot (1 + x)$, тоді, $(1 + x)^{k+1} > (1 + kx) \cdot (1 + x) = 1 + (k + 1) \cdot x + kx^2 > 1 + (k + 1) \cdot x$

Отже, з послідовності міркувань отримуємо, що $(1 + x)^{k+1} > 1 + (k + 1)x$. Що й треба було довести. Отже, на основі принципу математичної індукції можна стверджувати, що нерівність Бернуллі справедлива для будь-якого $n > 2$.

Задача 19. Доведіть виконання нерівності $n^{n+1} \geq (n + 1)^n$ для всіх натуральних чисел $n \geq 3$.

Розв'язок: Доведемо нерівність методом математичної індукції

1) Перевіримо виконання нерівності для $n = 3$. Отримаємо нерівність: $3^4 \geq 4^3$, очевидно нерівність виконується.

2) Припустимо, що при $n = k$ нерівність $k^{k+1} \geq (k + 1)^k$ вірна. Доведемо, виконання нерівності при $n = k + 1$, тоді, отримаємо:

$(k + 1)^{k+2} = \frac{(k+1)^{k+2}}{k^{(k+1)}} \cdot k^{(k+1)}$ скориставшись припущенням перейдемо до нерівності:

$$\frac{(k+1)^{k+2}}{k^{(k+1)}}\cdot k^{(k+1)} \geq \frac{(k+1)^{k+2}}{k^{(k+1)}}\cdot (k+1)^k = \frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{(k+1)}} =$$

$$\left(\frac{(k+1)^2}{k}\right)^{k+1} = \left(\frac{k^2+2k+1}{k}\right)^{k+1} = \left(k+2+\frac{1}{k}\right)^{k+1} > (k+2)^{k+1}.$$

Отже, показано справедливість нерівності при $n = k+1$, тоді, згідно методу математичної індукції, нерівність справедлива для будь-якого натурального $n \geq 3$. Що й треба було довести.

Задача 20. Доведіть, що при кожному натуральному $n > 1$ виконується нерівність: $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Розв'язок: Доведемо нерівність методом математичної індукції

1) Перевіримо виконання нерівності для $n = 2$. Отримаємо нерівність: $\frac{4^2}{2+1} < \frac{(4)!}{(2!)^2}$, очевидно нерівність виконується $\frac{16}{3} < 6$.

2) Припустимо, що при $n = k$ нерівність $\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ вірна. Доведемо, виконання нерівності при $n = k+1$, тоді, отримаємо:

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}.$$

Розглянемо наступну послідовність перетворень: $\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{4^k \cdot 4}{k+1} < \frac{4\cdot(2k)!}{(k!)^2} = \frac{4\cdot(2k)!\cdot(k+1)^2}{(k!)^2\cdot(k+1)^2} = = \frac{(2k)!\cdot(2k+2)\cdot(2k+2)}{(k!\cdot(k+1))^2} < \frac{(2k)!\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)}{\left((k+1)!\right)^2} = \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}$. Тобто, для $n = k+1$, виконується нерівність $\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}$, що й треба довести.

Очевидно метод математичної індукції добре працює при доведенні деяких неочевидних нерівностей. Алгоритмічність методу індукції, дозволяє гарно структурувати доведення, що покращує сприйняття матеріалу здобувачами освіти.

6. Доведення деяких теорем шкільного курсу алгебри за допомогою методу математичної індукції.

В даному розділі наведено ряд теорем, які зустрічаються в шкільному курсі математики. Запропоновані доведення наведених теорем методом математичної індукції.

ТЕОРЕМА 1: *Квадрат многочлена дорівнює сумі квадратів всіх його доданків і все можливих подвоєних добутків, тобто,*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \cdots + 2a_{n-1}a_n.$$

ДОВЕДЕННЯ:

Доведемо теорему методом математичної індукції

1) Перевіримо виконання нерівності для $n = 2$. Отримаємо рівність: $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$, яка нам добре відома з шкільного курсу алгебри.

2) Припустимо, що рівність виконується при $n = k$ тобто $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + 2a_1a_2 + \cdots + 2a_{k-1}a_k$.

Доведемо, виконання нерівності при $n = k + 1$, тоді, отримаємо:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2 = ((a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1})^2 =$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)a_{k+1} + a_{k+1}^2$$

Враховуючи припущення отримаємо: $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2 = a_1^2 + \cdots + a_k^2 + 2a_1a_2 + \cdots + 2a_{k-1}a_k + 2(a_1 + \cdots + a_k)a_{k+1} + a_{k+1}^2 =$

відкривши дужки і перегрупувавши доданки отримаємо

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2 = a_1^2 + \cdots + a_k^2 + a_{k+1}^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \cdots + 2a_{k-1}a_k + 2a_1a_{k+1} + 2a_2a_{k+1} \ldots + 2a_ka_{k+1}$.

Що й треба було довести.

ТЕОРЕМА 2: *Нехай* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *арифметична прогресія з знаменником* d. *Тоді* n *–ий елемент арифметичної прогресії можна вирахувати за формулою*

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

ДОВЕДЕННЯ:

Доведемо теорему методом математичної індукції

1) Перевіримо виконання нерівності для $n = 2$. Отримаємо рівність: $a_2 = a_1 + d(2-1) = a_1 + d$, що не суперечить визначенню арифметичної прогресії.

2) Припустимо, що рівність виконується при $n = k$ тобто

$$a_k = a_1 + d(k-1)$$

Доведемо, виконання нерівності при $n = k+1$, тобто, що

$$a_{k+1} = a_1 + dk.$$

Справді:

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk - d + d = a_1 + dk.$$

Що й треба було довести.

ТЕОРЕМА 3: *Нехай* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *геометрична прогресія з знаменником* q. *Тоді* n *–ий елемент геометричної прогресії можна вирахувати за формулою*

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

ДОВЕДЕННЯ: Проведемо методом математичної індукції

1) Перевіримо виконання нерівності для $n = 2$. Отримаємо рівність:

$$b_2 = b_1 \cdot q^{2-1} = b_1 \cdot q$$

що не суперечить визначенню геометричної прогресії.

2) Припустимо, що рівність виконується при $n = k$ тобто

$$b_k = b_1 + q^{k-1}$$

Доведемо, виконання нерівності при $n = k+1$, тобто, що

$$b_{k+1} = b_1 \cdot q^k.$$

Справді:

$$b_{k+1} = b_k \cdot q = b_1 \cdot q^{(k-1)} \cdot q = b_1 \cdot q^k.$$

Що й треба було довести.

Пригадаємо: Перестановкою з $\boldsymbol{n}$ елементів називається будь-яка скінченна послідовність, яка одержується в результаті упорядкування деякої скінченної множини, складеної з $\boldsymbol{n}$ елементів. Число всіх перестановок з n елементів позначається P_n.

ТЕОРЕМА 4: *Число перестановок з* $\boldsymbol{n}$ *елементів можна вирахувати за формулою*

$$P_n = n!$$

ДОВЕДЕННЯ: Проведемо методом математичної індукції:

1) Перевіримо виконання нерівності для $n = 1$. Отримаємо рівність:

$$P_1 = 1! = 1.$$

що не суперечить визначенню перестановки. З одного елемента ми можемо утворити тільки одну перестановку.

2) Припустимо, що рівність виконується при $n = k$ тобто

$$P_k = k!$$

Доведемо, виконання нерівності при $n = k + 1$, тобто, що

$$P_{k+1} = (k + 1)!$$

З заданих $(k + 1)$ елементів $\{a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1}\}$ виберемо k елементів: $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ і складемо з них все можливі перестановки згідно припущення їх буде $k!$.

В кожній з цих перестановок покладемо елемент a_{k+1} почергово перед першим елементом, потім перед другим елементом, потім перед третім і т.д. перед останнім k-м елементом і . зрештою після останнього k-го елемента. Всього є $(k + 1)$ положення для a_{k+1}. Тобто кожна з $k!$ підстановок генерує, ще $(k + 1)$-ну підстановку і кількість всіх підстановок буде

$$P_{k+1} = k!\,(k + 1) = (k + 1)!$$

Переконаємося, що:

1) всі перестановки різні;

2) ми утворили абсолютно всі перестановки з елементів $\{a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1}\}$ і жодної іншої утворити неможливо.

Припустимо, що серед $(k+1)!$ перестановок з елементів $\{a_1, a_2, \dots a_k, a_{k+1}\}$ є дві однакові, тобто елементи на всіх місцях співпадають. Позначимо їх P_1 і P_2. Нехай в перестановці P_1 елемент a_{k+1} займає s −те положення, якщо рахувати зліва, тоді і в перестановці P_2 елемент a_{k+1} теж буде займати s −те положення, якщо рахувати зліва.

Викреслимо ці елементи і перейдемо до перестановок $\overline{P_1}$ і $\overline{P_2}$ з k − елементів, всі елементи яких співпадають. Тобто ми двічі поклали елемент a_{k+1} в перестановку $\overline{P_1}$=$\overline{P_2}$ на те саме місце, що суперечить правилам побудови перестановок $(k+1)$ −порядку. Отже, всі збудовані перестановки різні (1).

Тепер припустимо, що в наслідок наших міркувань ми не утворили деякої перестановки P в якій елемент a_{k+1} займає s −те положення, якщо рахувати зліва. Викреслимо елемент a_{k+1} і перейдемо до перестановки $\bar{P}$ з перших k −елементів.

Отже, для того, щоб отримати перестановку P, ми беремо перестановку $\bar{P}$ з перших k −елементів, і на s −те положення кладемо елемент a_{k+1}. Ми не можемо пропустити елемент $\bar{P}$ оскільки вибираємо всі перестановки з перших k −елементів, і не можемо не покласти елемент a_{k+1} на s −те положення, оскільки ми кладемо його почергово на кожну вільну позицію перед першим елементом, потім перед другим елементом, потім перед третім … потім перед s −тим … потім перед останнім k-м елементом і . зрештою після останнього k-го елемента.(2)

Таким чином всі отримані перестановки різні і всі перестановки з $(k+1)$ елементів збудовані.

Таким чином число перестановок з **n** елементів можна вирахувати за формулою

$$P_n = n!$$

Нехай нам задана деяка множина M, яка складається з $\boldsymbol{n}$ різних елементів. Будь яка впорядкована підмножина множини M, яка містить k елементів (де $k = 1,2,3,\dots n$) називається розміщенням з n елементів по k. Отже, два різних розміщення з n елементів по k можуть відрізнятися елементами або їх розміщенням. Число різних розміщень з n елементів по k, позначатимемо A_n^k.

ТЕОРЕМА 5: *Число розміщень з $\boldsymbol{n}$ елементів по $\boldsymbol{k}$ можна вирахувати за формулою*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

ДОВЕДЕННЯ:

1) Перевіримо виконання нерівності для $n = 1$. Отримаємо рівність:

$$A_n^1 = n$$

що не суперечить визначенню розміщень. Якщо вибирати одно елементні підмножини з n елементної множини, то отримаємо рівно n випадків.

2) Припустимо, що рівність виконується при $n = m < n$ тобто

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

Доведемо, виконання нерівності при $n = m + 1 < n$, тобто, що

$$A_n^{m+1} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m)$$

Для отримання розміщень з n елементів по $m + 1$ достатньо взяти всі розміщення з n елементів по m, а їх згідно припущення є $A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$ і кожному з них приписати в кінці по одному з $(n-m)$ елементів, які залишилися. Не важко переконатися, що збудовані таким чином розміщення з n елементів по $m + 1$ елементу різні і крім того вичерпують всю множину можливих розміщень з n елементів по $m + 1$.

Нехай нам задана деяка множина M, яка складається з $\boldsymbol{n}$ різних елементів. Будь яка підмножина множини M, яка містить k елементів (де $k = 1,2,3,\dots n$) називається сполученням або комбінацією з даних n елементів по k, якщо ці множини відрізняються хоча б одним елементом. Число різних сполучень з n елементів по k позначаємо C_n^k.

ТЕОРЕМА 6: *Число сполучень з* $\boldsymbol{n}$ *елементів по* $\boldsymbol{k}$ *можна вирахувати за формулою*

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

ДОВЕДЕННЯ: 1) Перш за все зауважимо, що $C_n^1 = n$ отже, база індукції виконується. Якщо вибирати одно елементні підмножини з n елементної множини, то отримаємо рівно n випадків.

2) Припустимо, що рівність виконується при $n = m < n$, тобто,

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}$$

Доведемо, виконання нерівності при $n = m + 1 < n$, тобто, що

$$C_n^{m+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)}{(m+1)!}$$

Для отримання сполучень з n елементів по $m+1$ достатньо взяти всі сполучення з n елементів по m, а їх згідно припущення є $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}$ і кожному з них в якості $m+1$ елемента приписуємо по одному з $(n-m)$ елементів, які залишилися.

Таким чином ми отримуємо $C_n^m(n-m)$ сполучень, з n елементів по $m+1$ елементу правда кожне сполучення враховується $(m+1)$ раз. Справді сполучення $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, a_{m+1}\}$ можна отримати в наступних випадках якщо до $\{a_2, a_3, \ldots, a_m, a_{m+1}\}$ приписати елемент a_1, або коли до $\{a_1, a_3, \ldots, a_m, a_{m+1}\}$ приписати елемент a_2, і т.д. і коли зрештою до $\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m\}$ приписати елемент a_{m+1}. Таким чином

$$C_n^{m+1} = C_n^m \frac{(n-m)}{(m+1)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)}{(m+1)!}.$$

Що й треба було довести.

7. Застосування методу математичної індукції для розв'язання деяких олімпіадних задач.

При розв'язуванні олімпіадних задач іноді зручно застосовувати метод математичної індукції в класичному формулюванні:

Принцип математичної індукції: *Якщо деяке твердження* $T(n)$:

1) виконується для $n = 1$*;*

2) і з припущення, що дане твердження є правильне для $n = k$ *можна вивести правильність твердження для* $n = k + 1$;

то твердження виконується для будь-якого натурального числа $n \in N$.

Тобто так, як ми його використовували досі. Або в формі «спуска».

Принцип математичної індукції (формі «спуска»): *Якщо деяке твердження* $T(n)$:

1) виконується для $n = 1$*;*

2) і з припущення, що дане твердження є правильне для всіх значень $k < n$ *можна вивести правильність твердження для* $k = n$

то твердження виконується для будь-якого натурального числа $n \in N$.

Використаємо запропоноване формулювання, для розв'язання наступної:

Задача 21. Нехай x - дійсне число таке, що $x + \frac{1}{x}$ – ціле. Доведіть, що для будь-якого натурального числа $n \in N$ вираз $x^n + \frac{1}{x^n}$ визначає деяке ціле число.

Розв'язок: Доведемо твердження методом математичної індукції в формі «спуска»:

1) Очевидно при $n = 1$ число $x + \frac{1}{x}$– ціле за умовою задачі. Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $k < n$. Тобто, $x^k + \frac{1}{x^k}$ - ціле число для всіх цілих чисел k, які не перевищують числа n.

Доведемо, що твердження справджується при $n = k$, тобто, що $x^n + \frac{1}{x^n}$ – ціле. Розглянемо ряд перетворень:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = x^n + \frac{1}{x^n} + x^{n-2} - x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{1}{x^{n-2}} = x^n + \frac{1}{x^{n-2}} + x^{n-2} + \frac{1}{x^n} -$$

$$-x^{n-2} - \frac{1}{x^{n-2}} = \left(x^n + \frac{x}{x^{n-1}} + \frac{x^{n-1}}{x} + \frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) = \left(x \cdot (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}) +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x} \cdot \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right).$$

Отже, приходимо до рівності: $x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$.

Згідно припущення $x^k + \frac{1}{x^k}$ - ціле число для всіх цілих чисел k, які не перевищують числа n. Тобто: $\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$ і $\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$ – цілі числа згідно припущення. І $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ – ціле число за умовою задачі. Отже, $\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$ – ціле, як добуток і різниця цілих чисел.

Що й треба було довести.

Задача 22. Доведіть, що число, яке записується за допомогою 3^n одиниць ділиться на 3^n, для будь-якого натурального числа $n \in N$ (мається на увазі десятковий запис числа).

Розв'язок: Доведемо твердження методом математичної:

1) Очевидно при $n = 1$ число, яке записується за допомогою 3^1 одиниць ділиться на 3^1 без остачі. Справді $111 \vdots 3 = 37$. Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n = k$: число, яке записується за допомогою 3^k одиниць $P_k = 111 \dots 11$ ділиться на 3^k без остачі.

Доведемо, що твердження справджується при $n = k + 1$, тобто, що число, яке записується за допомогою 3^{k+1} одиниць $P_{k+1} = 111 \dots 111$ ділиться на 3^{k+1} без остачі. Розглянемо частку від ділення: $P_{k+1} \div P_k$ не складно переконатися, що в частці отримаємо число, яке складається з одиниць і нулів і яке можна подати у вигляді $100^{3^k} + 10^{3^k} + 1$. Очевидно $100^{3^k} + 10^{3^k} + 1$ містить три одиниці і нулі, тобто ділиться на 3 без остачі.

Таким чином $P_{k+1} = P_k \cdot \left(100^{3^k} + 10^{3^k} + 1\right)$ де перший множник ділиться на 3^k за припущенням, а другий ділиться на 3 за вище приведеними міркуваннями. Отже, число, яке записується за допомогою 3^{k+1} одиниць $P_{k+1} = 111 \dots 111$ ділиться на 3^{k+1} без остачі.

Що й треба було довести.

Задача 23. Доведіть, нерівність $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$, для всіх натуральних $n \in N$.

Розв'язок: Доведемо нерівність методом математичної індукції:

1) Очевидно при $n = 1$ нерівність, виконується. Справді $1 \leq 3 - 2$. Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n = k$: тобто виконується нерівність $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \dots + \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{k}}$.

Доведемо, що твердження справджується при $n = k + 1$, тобто, що має місце нерівність: $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \dots + \frac{1}{k\sqrt{k}} + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{k+1}}$.

Згідно припущення $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \dots + \frac{1}{k\sqrt{k}} + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}$. Доведемо, що $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} \leq -\frac{2}{\sqrt{k+1}}$, перейдемо до рівносильної нерівності:

$$\frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}$$

Розглянемо ряд перетворень:

$$\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{2}{\sqrt{k+1}}=\frac{2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}\geq\frac{2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{k\sqrt{k+1}}\geq\frac{2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{k+1}}$$

Ми посилюємо нерівність, переходимо до менших величин (за рахунок збільшення знаменника). Переконаємося, що вираз в чисельнику менший одиниці:

$$2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<1\Rightarrow 2\sqrt{k+1}<1+2\sqrt{k}\Rightarrow\left(2\sqrt{k+1}\right)^2<\left(1+2\sqrt{k}\right)^2$$

$$4k+4<1+4\sqrt{k}+4k\Rightarrow 3<4\sqrt{k}\Rightarrow\frac{9}{16}<k$$

Ми приходимо, до очевидної нерівності, оскільки, за умовою $k\geq 1$ - ціле число. Що дозволяє ще раз підсилити вихідну нерівність:

$$\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{2}{\sqrt{k+1}}\geq\frac{2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{k+1}}\geq\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}$$

За рахунок збільшення чисельника. Отже, $\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{2}{\sqrt{k+1}}\geq\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}$, що доводить, $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\leq 3-\frac{2}{\sqrt{k}}+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\leq 3-\frac{2}{\sqrt{k}}+\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{2}{\sqrt{k+1}}=3-\frac{2}{\sqrt{k+1}}$

Виконання нерівності, при $n=k+1$.

Задача 24. Доведіть, що для натуральних чисел $n\in N$, виконується рівність $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Розв'язок: Доведемо твердження методом математичної індукції:

1) Очевидно при $n=1$ рівність, виконується $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n = k$: тобто виконується нерівність $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$.

Доведемо, що твердження справджується при $n = k+1$, тобто, що має місце нерівність: $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$. Застосувавши припущення отримаємо $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$ застосувавши відоме тригонометричне співвідношення: $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ отримаємо $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Що й треба було довести.

Задача 25. Нехай задано деякий опуклий многокутник $V_1V_2 \dots V_n$. Назвемо многокутник «модним», якщо виконуються наступні умови: 1) кожна вершина фігури V_i де $i = 1,2,\dots,n$ зафарбована в один з трьох запропонованих кольорів K_1, K_2, K_3; 2) будь-які дві сусідні вершини многокутника пофарбовані в різні кольори; 3) для кожного з трьох запропонованих кольорів знайдеться хоча б одна вершина, яка зафарбована в цей колір.

Доведіть, що будь який «модний» n – кутник ($n \geq 3$) можна розділити діагоналями, які не перетинаються, на «модні трикутники».

Розв'язок: Доведемо твердження методом математичної індукції:

1) Очевидно при $n = 3$ твердження виконується, ми отримаємо «модний трикутник» всі вершини якого пофарбовані за умовами задачі і ніяких розрізів робити непотрібно. Тобто, твердження справедливе, для першого елемента.

2) Припустимо, що твердження справедливе, коли $n = k$: тобто будь який «модний» k – кутник ($k \geq 3$) можна розділити діагоналями, які не перетинаються, на «модні трикутники».

Розглянемо довільний «модний» $k+1$ – кутник. І доведемо використовуючи припущення, що його можна розбити діагоналями, які виходять з одної вершини і не перетинаються на «модні трикутники». Занумеруємо послідовно вершини многокутника наступним чином $V_1V_2V_3 \dots V_kV_{k+1}$, якщо в деякий з трьох кольорів пофарбована лише одна вершина розглядуваного багатокутника, такий випадок може бути, якщо розглядається «модний» чотирикутник або п’ятикутник, тоді з’єднавши цю вершину з іншими несусідніми вершинами за допомогою діагоналей отримаємо потрібне розбиття $k+1$ – кутника на «модні трикутники».

Якщо в кожен з трьох кольорів пофарбовані дві і більше вершин $k+1$ – кутника, то в цьому випадку в розфарбуванні беруть участь всі три кольори K_1, K_2, K_3. Нехай вершина V_1 зафарбована кольором K_1, а вершина V_2 зафарбована кольором K_2. Нехай p – номер першої вершини V_p, яка зафарбована в колір K_3. Відріжемо від $k+1$ – кутника, «модний» трикутник $\Delta V_pV_{p-1}V_{p-2}$, оскільки згідно підбору вершин всі три вершини будуть розфарбовані в різні кольори. Тоді можливі два випадки: якщо залишається «модний» многокутник в якому є більше ніж одна вершина з кольором K_3, то проводимо міркування аналогічні до попередніх… Якщо залишається «модний» многокутник в якому є тільки одна вершина кольору K_3, то почергово сполучаємо її з усіма решта вершинами, що залишилися.

Многокутник, що залишається після видалення трикутника $\Delta V_pV_{p-1}V_{p-2}$, також буде «модний» і згідно припущення його можна розбити на «модні трикутники».

Висновки

Матеріал, викладений в магістерській роботі, поділено на сім розділів. В першому розділі викладено суть методу математичної індукції, розглянуто приклади, які добре пояснюють роботу методу математичної індукції. В другому розділі зібрано основні формулювання методу. В наступних розділах розглядається застосування методу математичної індукції в різних розділах математики: арифметиці (подільність чисел), алгебрі (тотожності і нерівності), тригонометрії, геометрії, наведено ряд теорем, шкільного курсу математики, які ефективно доводяться методом математичної індукції.

В кожному розділі наводиться ряд задач з детальним роз'ясненням. Задачі середньої і підвищеної складності. В сьомому розділі розглядаються задачі олімпіадного типу.

Підбір задач магістерської роботи розрахований на учнів 8-11 класів; результати магістерської роботи можуть використовуватись на уроках математики при вивченні програмного матеріалу, і в роботі шкільних математичних гуртків.

Список використаної літератури:

1. Соминский И.С. и др., О математической индукции. – М.: Наука, 1967.

2. Сивашинский И.Х., Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967.

3. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С., Алгебра и элементарные функции. – М.: Просвещение, 1975.

4. Галицкий М.Л. и др., Сборник задач по алгебре для 8-9 кл. – М.: Просвещение, 1997.

5. Галицкий М.Л. и др., Углубленное изучение алгебры и математического анализа в 10-11 кл. – М.: Просвещение, 1997.

6. Говоров В.М. и др., Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1986.

7. Головко Л.К. и др., Математика (пособие для подготовительных отделений). – К.: Вища школа, 1986.

8. Сборник задач по математике для поступающих во втузы/ В.К.Егерев, В.В.Зайцев и др., Под ред. М.И.Сканави. – Мн.: Высш.шк., 1990.

9. Моденов П.С., Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Изд-во МГУ, 1966.

10. Горделадзе Ш.Г. и др., Збірник конкурсних задач з математики. – К.: Вища школа, 1976.