УДК 515.12

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ІДЕМПОТЕНТНО ОПУКЛОЇ КОМБІНАЦІЇ НЕСКІНЧЕННОЇ КІЛЬКОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ *I*-ОПУКЛОГО КОМПАКТА

І. Д. Глушак, О. Р. Никифорчин
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка 57;
e-mail: inna_gl@rambler.ru, nick@pu.if.ua

Побудовано ідемпотентну опуклу комбінацію нескінченної кількості елементів I-опуклого компакта і доведено, що вона неперервно залежить від своїх аргументів, якщо останні розуміти як замкнену множину у топологічному добутку компакта на одиничний відрізок – елемент гіперпростору з топологією Вієторіса.

Ключові слова: *ідемпотентний напівмодуль, ідемпотентна опукла комбінація, ємність, компакт.*

Вступ

Топологічні та метричні ідемпотентні напівмодулі цікаві у першу чергу через те, що їх природними прикладами є простори неадитивних мір (*ємностей*) на компактах. Нагадаємо, що запроваджені Шоке [1] ємності широко застосовуються у математичній фізиці, теорії оптимізації, математичній економіці тощо. М.М. Зарічним та О.Р. Никифорчиним [2] детально вивчено простори напівнеперервних згори ємностей на компактах. Зокрема, у останній праці показано функторіальність конструкції простору ємностей та описано метрики на просторі ємностей на метричному компакті у стилі метрик Прохорова та Канторовича-Рубінштейна на просторах зліченно адитивних мір. Це дозволяє для потреб практики будувати апроксимації довільних ємностей ємностями простішої будови, наприклад, мірами можливості, мірами необхідності [3] чи ємностями на фіксованому замкненому (можливо, скінченному) підпросторі.

Виявляється, що більшість таких наближень можна отримати, “змішуючи” ємності, у якомусь сенсі близькі до потрібної [4], однак, як правило, таких “складників” маємо безліч. Дія “змішування” є так званою ідемпотентною опуклою комбінацією у компактному ідемпотентному напівмодулі, яким є простір ємностей на компакті. Оскільки бажано, щоб апроксимуюча ємність залежала від вихідної неперервно, варто з’ясувати, чи є ідемпотентна опукла комбінація неперервною щодо сукупності аргументів.

1. Допоміжні факти та поняття

Наведемо деякі означення та загальновідомі факти про компактні топологічні напівгратки та ідемпотентні компактні напівмодулі.

Частково впорядкована множина $(X,\leq)$ називається *верхньою напівграткою*, якщо існують всі попарні супремуми $x\vee y$ для всіх пар елементів x, $y\in X$. Підмножина Y верхньої напівгратки X називається *верхньою піднапівграткою*, якщо супремум будь-яких двох елементів з Y міститься в Y. Тоді Y теж є верхньою напівграткою, і супремуми всіх скінченних підмножин Y у X та Y існують та рівні.

Верхня напівгратка $(X,\leq)$ називається *топологічною*, якщо на X задано топологію, щодо якої попарний супремум $x\vee y$ неперервно залежить від x, $y\in X$.

Топологічна напівгратка називається *лоусоновою* або напівграткою Лоусона [7], якщо у кожній її точці існує локальна база, яка складається з піднапівграток.

Верхня напівгратка є *повною*, якщо для кожної її непорожньої підмножини існує точна верхня грань. Відомо, що кожна компактна топологічна верхня напівгратка є повною і містить найбільший елемент [6]. Компактна гаусдорфова верхня топологічна напівгратка X є напівграткою Лоусона, якщо і тільки якщо відображення $\sup:\exp X\to X$, яке кожній непорожній замкненій підмножині $A\subset X$ співставляє її точну верхню грань, є неперервним відносно топології Вієторіса.

Трійка $(X,\oplus,\otimes)$ називається *$(I,\max,*)$-напівмодулем* (лівим ідемпотентним), якщо X – це множина з операціями $\oplus$: $X\times X\to X$, $\otimes$: $I\times X\to X$, які для всіх x, y, $z\in X$, α, $\beta\in I$ мають властивості:

1. $x\oplus y=y\oplus x$;
2. $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$;
3. існує єдиний елемент $0\in X$, такий що $x\oplus 0=x$ для всіх x;
4. $\alpha\otimes(x\oplus y)=(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)$, $\max\{\alpha,\beta\}\otimes x=(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)$;
5. $(\alpha*\beta)\otimes x=\alpha\otimes(\beta\otimes x)$;
6. $1\otimes x=x$;
7. $0\otimes x=0$.

Надалі замість $(I,\max,*)$-напівмодуль будемо вживати термін I-напівмодуль.

$(X,\oplus,\otimes)$ – *компактний гаусдорфів лоусонів I-напівмодуль*, якщо $(X,\oplus,\otimes)$ є I-напівмодулем, і на X задано компактну гаусдорфову топологію, що робить його компактною лоусоновою верхньою напівграткою з попарним супремумом $\oplus$ (і частковим порядком, визначеним як $x\leq y\Leftrightarrow x\oplus y=y$), а множення $\otimes$ є неперервним. Зрозуміло, що така напівгратка є повною, а з існування найменшого елемента 0 випливає, що вона є повною граткою.

Для всіх таких точок $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ та коефіцієнтів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in I$, що $max\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}=1$, задаємо *$I$-опуклу комбінацію* скінченної кількості елементів $\alpha_1\otimes x_1\oplus\alpha_2\otimes x_2\oplus\ldots\otimes\alpha_n\oplus x_n$, яку надалі позначатимемо просто $\alpha_1x_1\oplus\alpha_2x_2\oplus\ldots\oplus\alpha_nx_n$.

Природно називати підмножину I-напівмодуля *I-опуклою*, якщо вона містить всі I-опуклі комбінації своїх елементів.

Замкнена I-опукла підмножина X компактного гаусдорфового лоусонового I-напівмодуля називається *I-опуклим компактом*. На ньому у загальному випадку не означене множення елементів на числа, однак маємо операцію опуклої комбінації скінченної кількості елементів. Її однозначно можна відновити за операцією попарної опуклої комбінації $x\oplus(\alpha\otimes y)$, яка є відображенням $X\times I\times X\to X$. Виявляється, що можна дати рівносильне "внутрішнє" означення I-опуклого компакта як компакта, на якому визначено неперервну тернарну операцію попарної опуклої комбінації, що задовольняє природні алгебраїчні тотожності (які читач може легко відновити чи знайти у [5]). Такий компакт опукло вкладається у компактний гаусдорфів лоусонів I-напівмодуль.

2. Основне твердження

Перевага I-опуклих компактів тому, що можна коректно означити опуклу комбінацію нескінченної кількості елементів, використовуючи тільки скінченні опуклі комбінації, а саме:

$$\oplus_{i\in I}\alpha_i x_i=\inf\{\sup_{i\in I_1}\alpha_i\otimes\sup_{i\in I_1}x_i\oplus\ldots\oplus\sup_{i\in I_n}\alpha_i\otimes\sup_{i\in I_n}x_i \mid n\in N, I=I_1\cup\ldots\cup I_n\}.$$

Метою нашої статті є доведення на підставі [5, Теорема 5.9.2] наступної важливої властивості відображення, яке сукупності елементів зіставляє їх I-опуклу комбінацію.

Твердження 1. *Нехай X – I-опуклий компакт, а $\exp_1(X\times I)$ позначає підпростір гіперпростору $\exp(X\times I)$ з топологією Вієторіса, що складається із замкнених множин в $X\times I$, які містять принаймні одну пару вигляду $(x, 1)$. Тоді відображення, яке для $A\subset X\times I$ визначено формулою*

$$h(A)=\oplus_{i\in 1}\{\alpha_i x_i \mid (x_i,\alpha_i)\in A\},$$

є неперервним.

Зафіксуємо довільний елемент і розглянемо вираз

$$x_0\oplus h(A)=x_0\oplus\left(\oplus\{\alpha\otimes x\mid(x,\alpha)\in A\}\right).$$

Зауважимо, що вжита у означенні I-опуклої комбінації безлічі елементів множина комбінацій

$$\{\sup_{i\in I_1}\alpha_i\otimes\sup_{i\in I_1}x_i\oplus\ldots\oplus\sup_{i\in I_n}\alpha_i\otimes\sup_{i\in I_n}x_i \mid n\in N, I=I_1\cup\ldots\cup I_n\}$$

є напрямленою вниз, оскільки її можна подати у вигляді

$$\{\sup(\mathrm{pr}_2(A_1))\otimes\sup(\mathrm{pr}_2(A_1))\oplus\ldots\oplus\sup(\mathrm{pr}_2(A_n))\otimes\sup(\mathrm{pr}_2(A_n))\mid n\in N, A=A_1\cup\ldots\cup A_n\},$$

а при заміні сім'ї $A_{1,\dots},A_n$ на вписану вираз у фігурних дужках не змінюється чи зменшується. Більше того, оскільки супремум множини збігається з її замиканням, можна вважати, що всі множини $A_1,\dots,A_n$ замкнені. Отже, напрямленість з даних виразів, впорядкована зворотно до вписаності сімей A_i , збігається до точної нижньої грані цієї множини з означення.

Звідси до $x_0 \oplus h(A)$ збігаються елементи

$$x_0 \oplus \sup(\mathrm{pr}_2(A_1)) \otimes \sup(\mathrm{pr}_1(A_1)) \oplus \dots$$
$$\oplus \sup(\mathrm{pr}_2(A_n)) \otimes \sup(\mathrm{pr}_1(A_n))$$
$$= (x_0 \oplus \sup(\mathrm{pr}_2(A_1)) \otimes \sup(\mathrm{pr}_1(A_1))) \oplus \dots$$
$$\oplus (x_0 \oplus \sup(\mathrm{pr}_2(A_n)) \otimes \sup(\mathrm{pr}_1(A_n))).$$

Розглянемо "доданок"

$$\begin{aligned} x_0 \oplus & \sup(\mathrm{pr}_2(A_i)) \otimes \sup(\mathrm{pr}_1(A_i)) \\ = & \sup\{x_0 \oplus \alpha \otimes \sup(\mathrm{pr}_1(A_i)) \mid \alpha \in \mathrm{pr}_2(A_i)\} \\ = & \sup\{x_0 \oplus \alpha \otimes x \mid \alpha \in \mathrm{pr}_2(A_i), x \in \mathrm{pr}_1(A_i)\} \\ = & \sup\{g_{x_0}(x,\alpha) \mid (x,\alpha) \in \mathrm{pr}_1(A_i) \times \mathrm{pr}_2(A_i)\}, \end{aligned}$$

де $g_{x_0} : X \times I \to X$ – неперервне відображення компактів, означене як $g_{x_0}(x,\alpha) = x_0 \oplus (\alpha \otimes x)$.

Отже, $x_0 \oplus h(A)$ є границею напрямленості

$$\oplus_{i=1,\dots,n} \sup\{g_{x_0}(x,\alpha) \mid (x,\alpha) \in \mathrm{pr}_1(A_i) \times \mathrm{pr}_2(A_i)\} = \sup\{g_{x_0}(x,\alpha) \mid$$
$$(x,\alpha) \in \mathrm{pr}_1(A_1) \times \mathrm{pr}_2(A_1) \cup \dots \cup \mathrm{pr}_1(A_n) \times \mathrm{pr}_2(A_n)\},$$

індексованої впорядкованими за вписаністю сім'ями замкнених множин $A_{1,\dots},A_n$ з об'єднанням *A*. Зауважимо, що напрямленість множин $\mathrm{pr}_1(A_1) \times \mathrm{pr}_2(A_1) \cup \dots \cup \mathrm{pr}_1(A_n) \times \mathrm{pr}_2(A_n)$ збігається у топології Вієторіса до *A*, тому образи її елементів щодо g_{x_0} збігаються до $g_{x_0}(A)$. Оскільки супремуми в *X* неперервні щодо топології Вієторіса, отримуємо неперервну залежність від *A*. Зауважимо, що відповідність $m(x) = (x \oplus x_0)_{x_0 \in X}$ є неперервною ін'єкцією, тобто вкладенням компактів $m : X \to X^X$. З попереднього випливає, що комбінація $m \circ h$, яка діє за формулою $m \circ h(A) = \left(\sup g_{x_0}(A)\right)_{x_0 \in X}$, є неперервною, звідки отримуємо потрібну неперервність *h*.

3. Прикінцеві зауваження

Звернемо увагу, що одночасно було доведено *існування*, тобто коректність означення нескінченної опуклої комбінації, оскільки вона є точною нижньою гранню *напрямленої вниз* множини скінченних опуклих комбінацій. Нагадаємо, що у компактній гаусдорфовій лоусоновій верхній напівгратці без найменшого елемента існують всі точні верхні грані, однак існування точних нижніх граней гарантовано тільки для напрямлених вниз множин.

Література

1. Choquet G. Theory of Capacity / G.Choquet // Ann. l'Institute Fourier. – 1953-1954. – **5.** – C. 131-295.
2. Zarichnyi M.M. Capacity functor in the category of compacta / M.M.Zarichnyi, O.R.Nykyforchyn // Mat. Sb. – 2008. – **199**:2. – C. 3-26.
3. Hlushak I.D. Submonads of the capacity monad / I.D.Hlushak, O.R.Nykyforchyn // Carpathian Journal of Mathematics. – 2008. – **24**:1. – C. 56-67.
4. Глушак І.Д. Оптимальні наближення ємностей на метричному компакті / І.Д.Глушак // Матем. студії. – 2009. – **Т31**, №2. – С. 115-127.
5. Никифорчин О.Р. Простори неадитивних мір: категорії і топологічні властивості: дис. д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.04 / Олег Ростиславович Никифорчин; Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. – Л., 2012. – 410 арк.
6. Nykyforchyn O.R. Capacities with values in compact Hausdorff lattices / O.R.Nykyforchyn // Applied Categorical Structures. – 2011. – №15(3). – P. 243-257.
7. Lawson J.D. Topological semilattices with small semilattices / J.D.Lawson // J.Lond. Math.Soc. – 1969. – №11. – P. 719-724.

Стаття надійшла до редакційної колегії 24.03.2016 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Заторським Р.А.,***
д.ф.-м.н., професором ***Зарічним М.М. (м. Львів)***

CONTINUITY IDEMPOTENT PROTUBERANT COMBINATION OF ENDLESS AMOUNT OF ELEMENTS I-OPOUCLOGO COMPACT

I. D. Glushak, O. R. Nykyforchyn
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76025, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: inna_gl@rambler.ru, nick@pu.if.ua

Idempotent protuberant combination of endless amount of elements of I-convexity compact is built and it is led to, that she continuously depends on the arguments, if last to understand as the reserved great number in topology work of compact on a single segment-hyperspace element with a topology Vietoris.

Key words: *idempotent semimodule, idempotent protuberant combination, capacity, compact.*