

72
575

ISSN 2304-7399

НАУКОВЕ ТОВАРИСТВО ІМ. ШЕВЧЕНКА
ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИЙ ОСЕРЕДОК



ПРИКАРПАТСЬКИЙ ВІСНИК НТШ

Число



1(21) - 2013

**SHEVCHENKO SCIENTIFIC SOCIETY
DEPARTMENT OF IVANO-FRANKIVSK**

**PRECARPATHIAN BULLETIN
OF THE SHEVCHENKO
SCIENTIFIC SOCIETY**

Number

1(21)·2013

Ivano-Frankivsk
2013

НАУКОВЕ ТОВАРИСТВО ім. ШЕВЧЕНКА
ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИЙ ОСЕРЕДОК

ПРИКАРПАТСЬКИЙ ВІСНИК НТШ

Число



1(21)·2013

НБ ПНУС



794503

Івано-Франківськ
2013

ПРИКАРПАТСЬКИЙ ВІСНИК НТШ

Головний редактор – д.т.н. В. М. Мойсишин

Число

У випусках серії «Число» публікуються наукові матеріали за напрямками:

- Математика
- Механіка
- Нафтогазова справа

Редактори: д.т.н., чл.-кор. НАНУ Є.І.Крижанівський,
д.ф.-м.н, акад. НАНУ А.А.Мартинюк (Київ)

Відповідальні секретарі: к.ф.-м.н. М.М.Осипчук

Редакційна колегія:

д.ф.-м.н. Д.І.Боднар (Тернопіль), д.ф.-м.н. А.В.Загороднюк, д.ф.-м.н. О.В.Лопушанський (Львів), д.ф.-м.н. А.М.Плічко (Кіровоград), к.ф.-м.н. Я.І.Савчук, д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ Ю.С.Самойленко (Київ);

д.ф.-м.н. О.Д.Артемович, д.ф.-м.н. Т.О.Банах (Львів), д.ф.-м.н. Р.І.Григорчук (Техас, США), д.ф.-м.н. Ю.А.Дрозд (Київ), д.ф.-м.н. М.М.Зарічний (Львів), д.ф.-м.н. Р.А.Заторський, д.ф.-м.н. В.К.Маслюченко (Чернівці), д.ф.-м.н. О.Р.Никифорчин, д.т.н. Ю.Є.Обжерін (Севастополь), д.ф.-м.н. А.П.Петравчук (Київ), д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ В.В.Шарко (Київ);

к.ф.-м.н. С.І.Гургула, д.ф.-м.н. І.І.Король (Ужгород), д.ф.-м.н., акад. НАНУ М.О.Перестюк (Київ), д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ Б.И.Пташник (Львів), д.ф.-м.н. О.М.Станжицький (Київ), д.ф.-м.н. С.І.Трофимчук (Талька, Чилі);

д.ф.-м.н. Ю.В.Козаченко (Київ), д.ф.-м.н. Б.І.Копитко (Львів), д.ф.-м.н. М.М.Леоненко (Кардіф, Великобританія), д.ф.-м.н. В.І.Масол (Київ), д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ М.І.Портенко (Київ);

д.т.н. В.І.Векерик, д.т.н. І.В.Кузьо (Львів), д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ Кушнір Р.М. (Львів), к.т.н. К.Г.Левчук (Київ), д.т.н. М.В.Лисканич, д.ф.-м.н. Н.В.Нікітіна (Київ), д.ф.-м.н. Г.Т.Сулим (Львів), к.ф.-м.н. І.В.Цідило;

д-р наук Т.Аіфа (Ренн, Франція), д.т.н. В.С.Бойко, д.т.н. В.М. Дорошенко (Київ), д.т.н. Л.М.Заміховський, д.т.н. Ю.О.Зарубін (Київ), д.т.н. Р.М.Кондрат, д.т.н. Я.С.Коцкулич, д.т.н. М.А.Мислюк, д.т.н. Б.І.Навроцький, д.т.н. В.П.Овчінніков (Тюмень, Росія), д.т.н. В.М.Світлицький (Київ), д.т.н. Г.Н.Семенцов, д.т.н. Я.Б.Тарко, д.т.н. Б.О.Чернов, д.т.н. Р.С.Яремійчук;

д.т.н. Р.М.Говдяк (Київ), д.т.н. В.Я.Грудз, д.т.н. О.Т.Драганчук (Київ), д-р наук Я.Жуга (Будапешт, Угорщина), д.т.н. О.М.Карпаш, д.т.н. Б.В.Копей, д-р наук С.Нодж (Краків, Польща), д.т.н. А.П.Олійник, д.т.н. Ю.Д.Петрина, д.т.н. М.Д.Середюк, д.т.н. Д.Ф.Тимків, д.т.н. Л.С.Шлапак.

Пр. прикарпатський національний університет

імені Василя Стефаника

код 02125266

НАУКОВА БІБЛІОТЕКА

Інв №

79 45 03

ПРИКАРПАТСЬКИЙ
ВІСНИК
НАУКОВОГО
ТОВАРИСТВА
ІМ. ШЕВЧЕНКА
1(21)-2013

Науковий журнал
Видається у чотирьох
серіях

**ЧИСЛО, СЛОВО,
ДУМКА, ПУЛЬС**
(по одному випуску
кожної серії щороку)

Заснований у 2008 році
Ресстраційне свідоцтво
КВ № 14628-3599
від 10 жовтня 2008 р.
видане Міністерством
юстиції України

ЗАСНОВНИКИ:

Івано-Франківський
осередок Наукового
товариства ім. Шевченка

Прикарпатський
національний університет
імені Василя Стефаника

Івано-Франківський
національний технічний
університет нафти і газу

Івано-Франківський
національний медичний
університет

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА

Р. А. Заторський, Т. П. Гой
Узагальнений факторіальний степінь
та деякі його застосування 9

Я. І. Савчук
Структура множини неванліннівських
дефектних векторів для цілих кривих з
лінійно-залежними компонентами 20

І. В. Федак
Деякі біективні відображення та обер-
нені до них функції 26

A. I. Bandura, H. M. Kulinich
Entire functions of strongly bounded
 L -index in direction 31

С. І. Гургула
Про стійкість тривіального розв'язку
однієї системи з імпульсною дією 36

Л. М. Шегда
Застосування до теорії керування
нетерової крайової задачі 41

A. M. Краснодембський
Періодичність розв'язків деякої системи
декількох нелінійних диференціальних
рівнянь парного порядку 45

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ

76025

м. Івано-Франківськ,
вул. Шевченка, 79
Івано-Франківський
осередок Наукового
товариства ім. Шевченка
тел. (380-3422) 72-71-31
e-mail: math@nuing.edu.ua
<http://pvntsh.org.ua>

Відповідальність за
достовірність наведених
у статтях даних несуть
автори публікацій

Передрук – тільки
з дозволу редакції

Друкується за ухвалою
Президії Івано-
Франківського осередку
Наукового товариства
ім. Шевченка

© Івано-Франківський
осередок НТШ. 2013

© Видавництво "Плай"
ЦІТ Прикарпатського
національного універ-
ситету імені Василя
Стефаника

**В. М. Сенічак, Р. Й. Ріпецький,
Є. Й. Ріпецький, В. В. Сенічак,
В. Р. Ріпецький**

Наближені методи розв'язування крайових задач еліптичного типу (огляд) 51

МЕХАНІКА

**В. Г. Карнаухов, В. В. Михайленко,
О. В. Лушников**

Структура амплітудних рівнянь непружних п'єзоелектричних тіл при гармонічних процесах 69

О. М. Пономаренко, І. В. Цідило

Розподіл напружень у півплощині з круговим отвором при дії постійної поперечної сили 78

Я. В. Чумаченко

Скрут призматичного стрижня з позовжніми тріщинами 85

В. В. Михайленко, О. В. Лушников

Потенціальні рівняння одночастотного наближення стаціонарних коливань непружних п'єзоелектричних тіл 91

**В. В. Негрич, Я. М. Дем'янчук,
Г. Я. Прошок**

Дослідження стійкості конвективного руху з парним профілем швидкості 98

НАФТОГАЗОВА СПРАВА

- Д. Д. Федоришин, С. Д. Федоришин**
Перспективи та безпеки видобутку сланцевого газу
в Україні 112
- В. М. Мойсишин, Б. Д. Борисевич, Ю. Л. Гаврилів, Б. І. Смага**
Визначення емпіричних залежностей середнього значення
обертового моменту на долоті від жорсткості та демпфування
бурильного інструменту 119
- Я. С. Коцкулич, Є. М. Ставичний, С. А. П'ятківський,
Є. Я. Коцкулич**
Застосування електробурів при спорудженні похило-скерованих
свердловин 138
- В. Т. Іващенко, В. С. Вітвицький**
Вплив точності ланцюгових передач на їх роботоздатність 149
- В. Я. Грудз**
Керування режимами роботи магістральних газопроводів з
використанням областей допустимих режимів і граничних
енергозатрат 159
- Д. Ф. Тимків**
Алгоритми і методи диспетчерського оптимального управління
режимами магістральних газопроводів 171
- Я. В. Грудз**
Принципи оптимізації режимів роботи газопроводу 191
- Й. В. Якимів**
Вплив різниці в'язкості різносортних нафт на їх сумішоутворення
під час послідовного перекачування магістральними трубопроводами 213

М. П. Возняк, Г. М. Кривенко, Л. В. Возняк, С. О. Кривенко
Експлуатація магістральних нафтопроводів при неповному завантаженні 225

Б. С. Долішній

Інформаційно-аналітична і правова діяльність у системі управління малим бізнесом 233

Ю. І. Дорошенко

Оцінювання впливу місцевих опорів на гідравлічну енерговитратність поліетиленових газових мереж 244

О. О. Слабий

Дослідження динаміки бурової системи під час буріння свердловин на морі (огляд) 256

ІНФОРМАЦІЯ

Відомості про авторів 322

Математика

УДК 519.538

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ФАКТОРІАЛЬНИЙ СТЕПІНЬ ТА ДЕЯКІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Р. А. Заторський, Т. П. Гой

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;

76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;

e-mail: romazz@rambler.ru, tarasgoj@yahoo.com

Розглядаються тотожності з узагальненими факторіальними степенями, зокрема узагальнено поліноміальну формулу на довільну скінченну кількість доданків. Встановлений зв'язок деяких неелементарних функцій дійсної змінної, породжених при допомозі зростаючих факторіальних степенів, з узагальненою гіпергеометричною функцією.

Ключові слова: *трикутна матриця, парадетермінат, параперицент, факторіальний степінь, многочлен розбиттів, узагальнена гіпергеометрична функція.*

Вступ

Спадні та зростаючі факторіальні степені, на відміну від біноміальних коефіцієнтів та інших комбінаторних формул, допускають узагальнення не тільки на множину цілих, але й також дійсних і навіть комплексних чисел. Узагальнення факторіальних степенів дозволяють уніфікувати дослідження в деяких розділах комбінаторного аналізу, виділити клас факторіальних числових трикутників, до якого належать трикутники Паскаля, Стірлінга першого і другого роду, трикутник Ла та багато нових числових трикутників, для яких поки що не знайдено комбінаторних інтерпретацій. При цьому виявляються загальні закономірності, притаманні всім факторіальним числовим трикутникам.

Введення поняття факторіального степеня з деяким кроком часто дозволяє двоїсті комбінаторні тотожності та формули для спадних і зростаючих факторіальних степенів замінити однією загальною формулою. Зокрема, такий підхід дозволяє узагальнити тотожності Вандермонда та Нерлунда [1].

1. Попередні означення та твердження

Парадетермінатом і параперицентом трикутної матриці n -го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

називають відповідно функції

$$\begin{aligned} \text{ddet}(A) &= \sum_{r=1}^n \sum_{p_1+\dots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^r \{a_{p_1+\dots+p_s, p_1+\dots+p_{s-1}+1}\}, \\ \text{pper}(A) &= \sum_{r=1}^n \sum_{p_1+\dots+p_r=n} \prod_{s=1}^r \{a_{p_1+\dots+p_s, p_1+\dots+p_{s-1}+1}\}. \end{aligned}$$

де $\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^i a_{ik}$, а підсумовування в обох формулах проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння $p_1 + \dots + p_r = n$.

Кожному елементу a_{ij} трикутної матриці (1) зіставимо рiг $R_{ij}(A)$ – трикутну матрицю $(i - j + 1)$ -го порядку з цим елементом у лiвому нижньому кутi. Очевидно, що у рiг $R_{ij}(A)$ входять тiльки тi елементи a_{rs} матрицi (1), для яких $j \leq s \leq r \leq i$.

Парафункції (парадетермінант і парперманент) трикутної матриці A можна розкласти за елементами їхніх останніх рядків [2]:

$$\text{ddet}(A) = \sum_{s=1}^n (-1)^{n+s} \{a_{ns}\} \text{ddet}(R_{s-1,1}), \quad \text{pper}(A) = \sum_{s=1}^n \{a_{ns}\} \text{pper}(R_{s-1,1}),$$

де $\text{ddet}(R_{01}) = \text{pper}(R_{01}) = 1$.

Твердження 1. Для парафункцій трикутної матриці похилої структури m -го порядку

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & & \\ \vdots & \cdots & & & & & \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & & & \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{pmatrix}_m \tag{2}$$

справджуються формули [3]

$$\begin{aligned} \text{ddet}(B) &= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=m} (-1)^{\lambda_1+\dots+\lambda_n-n} \frac{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)!}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!} a_1^{\lambda_1+\dots+\lambda_n} a_2^{\lambda_2+\dots+\lambda_n} \cdots a_n^{\lambda_n}, \tag{3} \\ \text{pper}(B) &= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=m} \frac{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)!}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!} a_1^{\lambda_1+\dots+\lambda_n} a_2^{\lambda_2+\dots+\lambda_n} \cdots a_n^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – цілі невід'ємні числа.

2. Узагальнення поліноміальної формули

Для довільних чисел $x \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ факторіальним степенем $n \in \mathbb{N}_0$ з кроком $k \in \mathbb{R}$ називають вираз

$$x^{n\{k\}} = \begin{cases} x(x+k) \cdot (x+2k) \cdot \dots \cdot (x+(n-1)k), & \text{якщо } n \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } n = 0. \end{cases}$$

Факторіальний степінь називають *зростаючим*, якщо $k > 0$, і *спадним*, якщо $k < 0$. Якщо $k = 0$, то маємо звичайний степінь, бо $x^{n\{0\}} = x^n$.

Зростаючий факторіальний степінь n з кроком 1 і спадний факторіальний степінь n з кроком (-1) позначатимемо через $x^{\bar{n}}$ і $x^{\underline{n}}$, тобто

$$\begin{aligned} x^{\bar{n}} &= x^{n\{1\}} = x(x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot (x+n-1), \\ x^{\underline{n}} &= x^{n\{-1\}} = x(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-n+1). \end{aligned}$$

Зростаючі та спадні факторіальні степені $x^{\bar{n}}$, $x^{\underline{n}}$ тісно пов'язані зі звичайною факторіальною функцією, адже $n! = 1^{\bar{n}} = n^{\underline{n}}$.

Комбінаторний закон двоїстості факторіальних степенів виражається рівностями

$$\begin{aligned} (-m)^{n\{-k\}} &= (-m)(-m-k) \cdot \dots \cdot (-m-(n-1)k) = (-1)^n m^{n\{k\}}, \\ (-m)^{n\{k\}} &= (-m)(-m+k) \cdot \dots \cdot (-m+(n-1)k) = (-1)^n m^{n\{-k\}}. \end{aligned}$$

Наведемо без доведення ще два твердження, які ілюструють двоїстість факторіальних степенів.

Твердження 2. *Справджуються тотожності*

$$\frac{m^{\underline{n}}}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i+1} \frac{m^{\bar{n-i}} m^{\underline{i}}}{(n-i)! i!}, \quad \frac{m^{\bar{n}}}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i+1} \frac{m^{\bar{n-i}} m^{\underline{i}}}{(n-i)! i!}.$$

Твердження 3. *Для довільних параметрів x , y та довільного k справджується тотожність [1]*

$$(x+y)^{n\{k\}} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{i\{k\}} y^{(n-i)\{k\}}, \quad (4)$$

де $\binom{n}{i}$ – біноміальні коефіцієнти.

Якщо у (4) замість k підставити -1 , 1 , 0 , то відповідно одержимо рівності:

$$\begin{aligned} (x+y)^{\underline{n}} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{\bar{n-i}} \quad (\text{тотожність Вандермонда}), \\ (x+y)^{\bar{n}} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{\underline{n-i}} \quad (\text{тотожність Нерлунда}), \end{aligned}$$

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad (\text{біноміальна тотожність}).$$

Покажемо, що формулу (4) можна узагальнити на довільну скінченну кількість доданків.

Теорема 1. Нехай $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$ деякі числа. Тоді

$$(x_1 + \dots + x_m)^{n!k!} = \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_m = n} \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_m!} x_1^{\lambda_1!k!} \dots x_m^{\lambda_m!k!}. \quad (5)$$

Доведення. Якщо $n = 1$, то тотожність (5), очевидно, справджується.

Доведемо виконання індукційного кроку:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^{(n+1)!k!} &= (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^{n!k!} (x_1 + x_2 + \dots + x_m + nk) = \\ &= \sum_{i=1}^m (x_i + \lambda_i k) \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_m = n} \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_m!} x_1^{\lambda_1!k!} x_2^{\lambda_2!k!} \dots x_m^{\lambda_m!k!} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_m = n} \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_i! \dots \lambda_m!} \times \\ &\quad \times x_1^{\lambda_1!k!} \dots x_{i-1}^{\lambda_{i-1}!k!} x_i^{(\lambda_i+1)!k!} x_{i+1}^{\lambda_{i+1}!k!} \dots x_m^{\lambda_m!k!}. \end{aligned}$$

Нехай $\lambda_r = \lambda_r^*$, $r = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$; $\lambda_i + 1 = \lambda_i^*$. Тоді, очевидно, $\lambda_1^* + \lambda_2^* + \dots + \lambda_m^* = n + 1$ і останні суми набувають вигляду

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda_1^* + \dots + \lambda_m^* = n+1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{n! \lambda_i^*}{\lambda_1^*! \lambda_2^*! \dots \lambda_m^*!} \right) x_1^{\lambda_1^*!k!} x_2^{\lambda_2^*!k!} \dots x_m^{\lambda_m^*!k!} = \\ &= \sum_{\lambda_1^* + \dots + \lambda_m^* = n+1} \frac{(n+1)! \lambda_i^*}{\lambda_1^*! \lambda_2^*! \dots \lambda_m^*!} x_1^{\lambda_1^*!k!} x_2^{\lambda_2^*!k!} \dots x_m^{\lambda_m^*!k!}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

3. Парадетермінанти і многочлени розбиттів

Введені Е. Беллом у [4] многочлени розбиттів мають численні застосування в дискретній математиці: при диференціюванні складених функцій, у теорії чисел, алгебрі тощо [5, 6]. Вони зазвичай пов'язані з лінійними рекурентними співвідношеннями, які дозволяють ці многочлени ефективно генерувати. Проте рекурентні співвідношення та відповідні їм многочлени розбиттів часто досліджувалися без видимого взаємозв'язку. З появою апарату числення трикутних матриць [7] з'явилася можливість побудови біективних взаємозв'язків між парафункціями трикутних матриць, многочленами розбиттів і лінійними рекурентними співвідношеннями. Також стало можливим уніфікувати підхід до вивчення всіх многочленів розбиттів, ввести поняття оберненого многочлена розбиттів тощо.

У цьому розділі досліджуємо многочлени розбиттів, пов'язані з узагальненими факторіальними степенями.

де $a_{ij} \neq 0$, $i = 0, 1, \dots$ задається трикутною таблицею його коефіцієнтів

$$\begin{array}{ccccccc} a_{00} & & & & & & \\ a_{10} & a_{11} & & & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & & & \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & & \end{array}$$

У [1] запропоновано загальний підхід до вивчення властивостей числових трикутників.

Оскільки многочлени

$$(x+r)^{i\{s\}}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

за змінною x утворюють базис у просторі многочленів степеня не вищого від n , то многочлени $(x+t)^{i\{k\}}$, $i = 0, 1, \dots, n$, можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації. При цьому отримуємо тотожності

$$(x+t)^{0\{k\}} = a_{00}(x+r)^{0\{s\}},$$

$$(x+t)^{1\{k\}} = a_{10}(x+r)^{0\{s\}} + a_{11}(x+r)^{1\{s\}},$$

$$(x+t)^{2\{k\}} = a_{20}(x+r)^{0\{s\}} + a_{21}(x+r)^{1\{s\}} + a_{22}(x+r)^{2\{s\}},$$

$$(x+t)^{3\{k\}} = a_{30}(x+r)^{0\{s\}} + a_{31}(x+r)^{1\{s\}} + a_{32}(x+r)^{2\{s\}} + a_{33}(x+r)^{3\{s\}},$$

...

Таким чином, одержуємо клас числових трикутників

$$\begin{array}{ccccccc} a_{00} & & & & & & \\ a_{10} & a_{11} & & & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} & \end{array}$$

які називають факторіальними.

Теорема 3. Коефіцієнти тотожностей

$$(x+t)^{i\{k\}} = \sum_{j=0}^i a_{ij}(x+r)^{j\{s\}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

задовольняють рекурентне рівняння

$$a_{ij} = a_{i-1, j-1} + (t-r + (i-1)k - js)a_{i-1, j}.$$

де $a_{ii} = 1$, $a_{i-1} = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Доведення. Для $i = 0$ маємо

$$(x+t)^{0\{k\}} = a_{00}(x+r)^{0\{s\}}.$$

Доведемо тепер виконання індукційного кроку:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^i a_{ij}(x+r)^{j\{s\}} &= \sum_{j=0}^i \left(a_{i-1,j-1} + (t-r+(i-1)k-j)s \right) a_{i-1,j} (x+r)^{j\{s\}} = \\
&= \sum_{j=1}^i a_{i-1,j-1} (x+r)^{j\{s\}} + \sum_{j=0}^{i-1} (t-r+(i-1)k-j)s a_{i-1,j} (x+r)^{j\{s\}} = \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j} (x+r)^{(j+1)\{s\}} + \sum_{j=0}^{i-1} (t-r+(i-1)k-j)s a_{i-1,j} (x+r)^{j\{s\}} = \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j} (x+r)^{j\{s\}} (x+r+js) + \sum_{j=0}^{i-1} (t-r+(i-1)k-j)s a_{i-1,j} (x+r)^{j\{s\}} = \\
&\quad - (x+t+(i-1)k) \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j} (x+r)^{j\{s\}} - \\
&= (x+t+(i-1)k)(x+t)^{(i-1)\{s\}} = (x+t)^{i\{s\}}.
\end{aligned}$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що у випадку $k=r=s=0, t=1$ з (12) одержуємо трикутник Паскаля; у випадку $t=r=s=0, k=-1$ – трикутник чисел Стірлінга першого роду; якщо $t=k=r, s=-1$, то маємо трикутник чисел Стірлінга другого роду, а якщо $t=r=0, k=1, s=-1$, – трикутник чисел Лага.

5. Нові неелементарні функції, породжені зростаючими факторіальними степенями

У [8], [9], за аналогією з відомими степеневими розвиненнями

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

які, враховуючи, що $n! = n^{\underline{n}}$, можна трактувати як ряди, побудовані при допомозі спадних факторіальних степенів з кроком (-1) , означені нові неелементарні функції дійсної змінної $\text{Exp}(x)$, $\text{Cos}(x)$, $\text{Sin}(x)$, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів з кроком 1:

$$\text{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad \text{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{2n}}, \quad \text{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{2n+1}}.$$

У [8], зокрема, доведено, що

$$\begin{aligned}
\text{Exp}(x) &= 1 + \sqrt{\pi x} e^{x/4} \text{erf}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right), \\
\text{Sin}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)! x^{2n-1}}{(4n-3)!} = \\
&= 2\sqrt{x} \left[\cos \frac{x}{4} \cdot C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin \frac{x}{4} \cdot S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \right],
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)! x^{2n}}{(4n-1)!} = \\ &= 1 + 2\sqrt{x} \left[\cos \frac{x}{4} \cdot S \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) - \sin \frac{x}{4} \cdot C \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) \right], \end{aligned} \tag{11}$$

де $\operatorname{erf}(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^p e^{-t^2} dt$ – функція помилок (функція ймовірностей Лапласа), $S(p) = \int_0^p \sin t^2 dt$, $C(p) = \int_0^p \cos t^2 dt$ – інтеграли Френеля [10].

Теорема 4 встановлює зв'язок функцій $\sin(x)$, $\cos(x)$ з узагальненою гіпергеометричною функцією ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z)$.

Нагадаємо, що узагальненою гіпергеометричною функцією ${}_sF_q(a_1, \dots, a_s; b_1, \dots, b_q; z)$ називають функцію, визначену при допомозі узагальненого гіпергеометричного ряду [11]

$${}_sF_q(a_1, \dots, a_s; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^n \cdot \dots \cdot a_s^n}{b_1^n \cdot \dots \cdot b_q^n} \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

де $a_1^n, \dots, a_s^n, b_1^n, \dots, b_q^n$ – зростаючі факторіальні степені з кроком 1.

Теорема 4. Для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$ справджуються тотожності

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x \cdot {}_1F_2 \left(1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{x^2}{64} \right), \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{6} \cdot {}_1F_2 \left(1; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; -\frac{x^2}{64} \right). \end{aligned}$$

Доведення. З (10), враховуючи, що $n! = 1^n$, $(4n+1)! = 4^n(2n)!(4n+1)!!$, для функції $\sin(x)$ одержуємо:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(4n+1)!} x^{2n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (4n+1)!!} x^{2n} = \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1))(5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n+1))} x^{2n} = \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{64^n \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \dots \cdot \frac{4n-1}{4} \right) \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \dots \cdot \frac{4n+1}{4} \right)} x^{2n} \end{aligned}$$

Інститут математики ім. Василя Стефаника
код 02125236
НАУКОВА БІБЛІОТЕКА
ІНВ. № 79 45 03

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{\bar{n}}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\bar{n}} \left(\frac{5}{4}\right)^{\bar{n}} n!} \left(\frac{x^2}{64}\right)^n = x \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{x^2}{64}\right)$$

Для функції $\text{Cos}(x)$ з (11) маємо:

$$\begin{aligned} \text{Cos}(x) &= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)!}{(4n+3)!} x^{2n+2} = 1 - \frac{x^2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (4n+3)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n+1)) (7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+3))} x^{2n} = \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{64^n \left(\frac{5}{4} \frac{9}{4} \dots \frac{4n+1}{4}\right) \left(\frac{7}{4} \frac{13}{4} \dots \frac{4n+3}{4}\right)} x^{2n} = \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{\bar{n}}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\bar{n}} \left(\frac{7}{4}\right)^{\bar{n}} n!} \left(\frac{x^2}{64}\right)^n = 1 - \frac{x^2}{6} \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; \frac{x^2}{64}\right) \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Література

1. Заторський Р.А. Факторіальні степені та трикутні матриці / Р.А.Заторський, О.Р.Малярчук // Карпатські математичні публікації. – 2008. – № 1. – С. 35-46.
2. Заторський Р.А. Про паравизначники та паракерманенти трикутних матриць / Р.А.Заторський // Математичні студії. – 2002. – Т. 17, № 1. – С. 3-17.
3. Заторський Р. А. Парафункції матриць похилої структури і многочлени розбиттів / Р.А.Заторський // Науковий вісник Чернівецького університету. Серія Математика. – 2010. – Т. 1, № 4. – С. 59-66.
4. Bell E. T. Partition polynomials / E.T.Bell // Ann. Math. – 1927. – 29. – P. 38-46.
5. Риордан Д. Комбинаторные тождества / Д. Риордан – М.: Наука, 1982. – 256 с.
6. Серре И. А. Курс высшей алгебры / И.А.Серре. – М.: Изд. М.О.Вольф, 1910. – 574 с.
7. Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р. А. Заторський. – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 508 с.
8. Гой Т.П. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості / Т.П.Гой, Р.А.Заторський // Буковинський математичний журнал. – 2013. – Т.1, № 1-2. – С. 28-33.
9. Гой Т.П. Про нові функції, породжені зростаючими факторіальними

- степенями, та їх властивості / Т.П.Гой, Р.А.Заторський // Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки: Матеріали Міжн. наук.-практ. інтернет-конф. (Харків, 10-25 травня 2013 р.). – Харків: Екограф, 2013. – С. 103-106.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
11. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г.Бейтмен, А.Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 21.11.2013 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В.,
д.ф.-м.н., професором Григорчуком Р. І. (Техас)*

GENERALIZED FACTORIAL POWERS AND SOME OF ITS APPLICATIONS

R. A. Zatorsky, T. P. Goy

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: romazz@rambler.ru, tarasgov@yahoo.com*

We consider the identities of generalized factorial powers. In particular, we generalized polynomial formula for arbitrary finite number of terms. The connection of some non-elementary real functions generated by rising factorials with the generalized hypergeometric function is established.

Key words: triangular matrix, paraderminat, parapermanent, factorial power, polynomial partitions, generalized hypergeometric function.

УДК 517.53

СТРУКТУРА МНОЖИНИ НЕВАНЛІННІВСЬКИХ ДЕФЕКТНИХ ВЕКТОРІВ ДЛЯ ЦІЛИХ КРИВИХ З ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Я. І. Савчук

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@iung.edu.ua*

Показано, що структура множини неванлінівських дефектних векторів для цілої кривої скінченного порядку з лінійно залежними компонентами подібна структурі для звичайної цілої кривої скінченного порядку.

Ключові слова: ціла крива, неванлінівський дефектний вектор, мероморфна функція, допустима система векторів.

В даній статті використовуються основні результати теорії цілих кривих, а також позначення, використані в [1] та [2].

Ціла крива $\bar{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_p(z))$ називається цілою кривою з ω -лінійно залежними компонентами, якщо розмірність лінійного підпростору $A_0 = \{\bar{a} \in C^p : \bar{G}(z) \cdot \bar{a} \equiv 0\}$ дорівнює ω , $0 < \omega \leq p-2$. Очевидно, що при $\omega = 0$ матимемо звичайну цілу криву з лінійно незалежними компонентами.

Нехай множина S є деякою підмножиною q -вимірного підпростору із C^p і містить q лінійно незалежних векторів. Систему векторів $M \subset S$ називатимемо допустимою в S , якщо: при $\text{card } M \leq q$ всі вектори із M лінійно незалежні; при $\text{card } M > q$ довільні q векторів із M лінійно незалежні.

Для будь-якої цілої кривої з ω -лінійно залежними компонентами і для будь-якої допустимої системи векторів M із $C^p \setminus A_0$ має місце таке співвідношення (див. [3]):

$$\sum_{a \in M} \delta(a, \bar{G}) \leq (p - \omega)(\omega + 1). \quad (1)$$

З цього співвідношення легко отримуємо, що довільна допустима в $C^p \setminus A_0$ система неванлінівських дефектних векторів (тобто таких, для яких $\delta(\bar{a}, \bar{G}) > 0$) не більше ніж зліченна.

Позначимо $D(\bar{G}) = \{\bar{a} \in C^p \setminus A_0 : \delta(\bar{a}, \bar{G}) > 0\}$. Основним результатом даної роботи є наступне твердження:

Теорема. Для довільної кривої $\bar{G} : C \rightarrow C^p$ скінченного порядку з ω -лінійно залежними компонентами множина $D(\bar{G}) \cup A_0$ є не більше ніж зліченим об'єднанням підпросторів $A_i \in C^p$ розмірності $\leq p-1$.

Відзначимо, що ця теорема є узагальненням відповідного результату в [4] на випадок цілих кривих з лінійно залежними компонентами.

Спочатку дамо означення і доведемо три леми.

О з н а ч е н н я. Нехай множина S лежить в q -вимірному підпросторі простору C^p і містить q лінійно незалежних векторів. Підмножину $M \subset S$ назвемо *максимальною допустимою в S* , якщо: а) будь-які q векторів із M лінійно незалежні; б) будь-який вектор із $S \setminus M$ є лінійною комбінацією деяких $q-1$ векторів із M .

Лема 1. Для довільної множини $S \subset C^p$ існує максимальна допустима підмножина M в S .

Д о в е д е н н я. Нехай розмірність лінійної оболонки множини S дорівнює q . Розглянемо множину всіх допустимих систем із S , яку позначимо $\Theta(S)$. Очевидно, ця множина є частково впорядкованою по включенню. За лемою Цорна $\Theta(S)$ містить максимальний елемент M , тобто таку множину, що якщо $M' \in \Theta(S)$ і $M \subset M'$, то $M = M'$. Неважко бачити, що M – максимальна допустима підмножина в S . Дійсно, якщо це не так, то існує такий вектор $\bar{a} \in S \setminus M$, який не є лінійною комбінацією жодних $q-1$ векторів із M , тобто $\{\bar{a}\} \cup M \in \Theta(S)$, що неможливо, бо M – максимальний елемент із $\Theta(S)$.

Лема 2. Нехай \bar{G} – ціла трансцендентна (тобто така, що $\ln r = o\{T(r, \bar{G})\}$, $r \rightarrow \infty$) крива в C^p скінченного порядку з ω -лінійно залежними компонентами, B – підпростір в C^p , $\omega+1 < \dim B < p-1$, $M_0 \subset B$. Тоді має місце один з двох випадків: 1) $B \subset D(\bar{G}) \cup M_0$; 2) довільна допустима в B система векторів із $D(\bar{G}) \cap B$ не більше ніж зліченна.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що для довільних векторів $\bar{a} \in A_0$, $\bar{b} \in C^p \setminus A_0$ та числа $\alpha \in C \setminus \{0\}$ виконується рівність

$$\delta(\bar{a} + \alpha \bar{b}, \bar{G}) = \delta(\bar{b}, \bar{G}), \quad (2)$$

тому природним є вважати $A_0 \subset B$.

Позначимо $\dim B = q$. Покажемо, що якщо випадок 1) не має місця, то обов'язково матиме місце випадок 2).

Припустимо, що існує незліченна допустима в B система векторів $M \subset D(\bar{G}) \cap B$. Оскільки випадок 1) не має місця, то існує такий вектор $\bar{b}_0 \in B$, що

$$\delta\left(\bar{b}_0, \bar{G}\right) = 0. \quad (3)$$

Виберемо в B базис $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_q$, причому такий, що $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_\omega$ – базис в A_0 , отже, $\bar{G}(z)\bar{b}_j = 0$ для всіх $j = 1, \dots, \omega$. Позначимо $\Lambda = \left\{ \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_q) : \lambda_1 \bar{b}_1 + \dots + \lambda_q \bar{b}_q \in M \right\}$. Очевидно, Λ – допустима система векторів в C^q . Розглянемо в C^q вектор-функцію $\bar{G}_1(z) = (\bar{G}(z)\bar{b}_1, \bar{G}(z)\bar{b}_2, \dots, \bar{G}(z)\bar{b}_q) \cdot \Phi(z)$, де $\Phi(z)$ – деяка мезоморфна в C функція без нулів, полюсами якої є спільні нулі функцій $\bar{G}(z)\bar{b}_1, \bar{G}(z)\bar{b}_2, \dots, \bar{G}(z)\bar{b}_q$. Оскільки вектори $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_q$ лінійно незалежні і перші ω компонент в $\bar{G}_1(z)$ є тотожними нулями, то $\bar{G}_1(z)$ є q -мірною цілою кривою з ω -лінійно залежними компонентами.

Очевидно, для довільного вектора $\bar{\lambda} \in C^q$ і відповідного йому вектора $\bar{b} = \lambda_1 \bar{b}_1 + \dots + \lambda_q \bar{b}_q$ виконується $\bar{G}(z)\bar{b} = \bar{G}_1(z)\bar{\lambda}/\Phi(z)$, тому $N(r, \bar{b}, \bar{G}) = N(r, \bar{\lambda}, \bar{G}_1) + N(r, \Phi)$, звідки, за першою основною теоремою для цілих кривих маємо

$$T(r, \bar{G}) - m(r, \bar{b}, \bar{G}) = T(r, \bar{G}_1) - m(r, \bar{\lambda}, \bar{G}_1) + N(r, \Phi) + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Зауважимо також, що

$$\begin{aligned} T(r, \bar{G}_1) + N(r, \Phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left\{ \sum_{j=1}^q \left| \bar{G}(re^{i\varphi}) \bar{b}_j \right|^2 \right\} d\varphi + O(1) < \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left\{ \sum_{j=\omega+1}^q \left\| \bar{G}(re^{i\varphi}) \right\|^2 \cdot \left\| \bar{b}_j \right\|^2 \right\} d\varphi + O(1) = T(r, \bar{G}) + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Відповідно до (3) існує така послідовність додатних чисел $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, що

$$m(r_n, \bar{b}_0, \bar{G}) = o\left\{T(r_n, \bar{G})\right\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Оскільки $m(r, \bar{\lambda}, \bar{G}_1) > 0$, то з (4) та (5) робимо висновок, що

$$T(r_n, \bar{G}_1) + N(r_n, \Phi) = \{1 + o(1)\} T(r_n, \bar{G}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

За припущенням множина M незліченна і кожний вектор з M є дефектним для цілої кривої \bar{G} , тому існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$\delta\left(\bar{b}, \bar{G}\right) > \varepsilon. \quad (7)$$

для незліченної підмножини векторів \bar{b} із M . Позначимо цю підмножину через M_0 , а відповідну йому множину векторів $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_q)$, таких, що $\lambda_1 \bar{b}_1 + \dots + \lambda_q \bar{b}_q \in M_0$ – через Λ_0 . Очевидно, що $\Lambda_0 \subset \Lambda$.

Для довільного вектора $\bar{b} \in M_0$ і відповідного йому вектора $\bar{\lambda} \in \Lambda_0$, виходячи з (4), (6), (7), маємо:

$$\begin{aligned} m(r_n, \bar{\lambda}, \bar{G}_1) &= m(r_n, \bar{b}, \bar{G}) + o\{T(r_n, \bar{G})\} \geq \{\varepsilon + o(1)\} T(r_n, \bar{G}) \geq \\ &\geq \{\varepsilon + o(1)\} T(r_n, \bar{G}_1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Оскільки Λ_0 – допустима система векторів в \mathbb{C}^q , то, відповідно до аналога другої основної теореми для цілих кривих скінченного порядку з ω лінійно залежними компонентами (див. співвідношення (1.42) в [1]) маємо

$$\sum_{\bar{\lambda} \in Q} m(r, \bar{\lambda}, \bar{G}_1) \leq \{(q-1)(\omega+1) + o(1)\} T(r, \bar{G}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (9)$$

де Q – довільна скінченна підмножина із Λ_0 . Легко бачити, що якщо взяти Q таким, щоб $\text{card } Q = \left[(q-1)(\omega+1)/\varepsilon \right] + 2$, то, виходячи з (8), отримаємо, що (9) не виконується. Отримане протиріччя доводить лему 2.

Лема 3. Нехай маємо підмножину B підпростору $L \subset \mathbb{C}^p$, $\dim L = q \leq p$, і нехай відомо, що довільна допустима в L система векторів із B не більше ніж зліченна. Тоді існує не більше ніж зліченна кількість підпросторів $B_i \subset L$, $\dim B_i \leq q-1$, таких, що:

$$1) B \subset \bigcup_i B_i;$$

2) для всіх j , таких, що $\dim B_j \geq 2$, множина $B_j \cap B$ містить незліченну допустиму в B_j систему векторів.

Д о в е д е н н я. Відповідно до леми 1 можемо вибрати з B максимальну допустиму в L систему векторів, яку позначимо через M . За умовою леми вона не більше ніж зліченна. Якщо $\text{card } M \leq q-1$, то розглядаємо підпростір S_1 – лінійну оболонку M . Довільний вектор з B виражається лінійно через вектори з M , тому $S_1 \supset B$. Якщо $\text{card } M > q-1$, то розглядаємо підпростори S_j , які отримуємо як лінійні

оболонки всеможливих наборів векторів з M по $q-1$ в кожному. Очевидно, множина цих підпросторів не більше ніж зліченна. Неважко бачити, що

$$B \subset \bigcup_i S_i. \quad (10)$$

Дійсно, оскільки M – максимальна допустима в B система векторів, то для довільного вектора $\bar{b} \in B$ існує $q-1$ векторів з M , лінійною комбінацією яких він є, тобто, існує таке j , що $\bar{b} \in S_j$. Відповідно до (10) множину B можемо переписати у вигляді $B = \bigcup_i (S_i \cap B)$.

Для тих j , при яких довільна допустима в S_j система векторів з $S_j \cap B$ не більше ніж зліченна, провівши наведені вище міркування, отримаємо $S_j \cap B = \bigcup_i (S_{ji} \cap B)$, де S_{ji} – підпростори з $\dim S_{ji} \leq q-2$, які отримуються з $S_j \cap B$ так само, як ми отримали S_j із B .

На наступному етапі для тих j та i , при яких $S_{ji} \cap B$ містить не більше ніж зліченну допустиму в S_{ji} систему векторів отримаємо $S_{ji} \cap B = \bigcup_k (S_{jik} \cap B)$, де S_{jik} – підпростори з $\dim S_{jik} \leq q-3$.

Накінець, не більше ніж через $q-1$ кроків, отримаємо, що $B = \bigcup_i (B_i \cap B)$, де B_i – або підпростір розмірності 1, або такий, що

$B_i \cap B$ містить незліченну допустиму в B_i систему векторів. Тут через B_i перепозначені всі ті підпростори $S_{ji}, S_{jik}, S_{jikk}, \dots$, перерізи кожного з яких з B містять незліченні допустимі в відповідних підпросторах системи векторів. Тим самим лема 3 доведена.

Д о в е д е н н я т е о р е м и. Розглянемо випадок трансцендентної цілої кривої, тобто такої, що $\ln r = o\{T(r, \bar{G})\}$, $r \rightarrow \infty$. У випадку, коли $T(r, \bar{G}) = O\{\ln r\}$, $r \rightarrow \infty$, усі компоненти цілої кривої можна вважати многочленами, і, як неважко бачити, сума дефектних векторів, яка не належить A_0 , є дефектним вектором. Тоді множина дефектних векторів в об'єднанні з A_0 співпадає з деяким підпростором із C^p розмірності не вище $p-1$.

Твердження теореми впливає безпосередньо з лем 2 та 3. Дійсно, застосуємо лему 3 з $L = C^p$. Оскільки довільна допустима в C^p система дефектних векторів для цілої кривої не більше ніж зліченна, то умови

теореми виконуються з $B = D(\vec{G})$. Отже, існує не більше ніж зліченна множина підпросторів $A_i \in C^p$, $\dim A_i < p-1$, таких, що: 1) $D(\vec{G}) \subset \bigcup_i A_i$; 2) $D(\vec{G}) \cap A_i$ містить незліченну допустиму в A_i систему векторів при $\dim A_i \geq 2$. Тоді за лемою 2 маємо $D(\vec{G}) \cap A_i = A_i \setminus A_0$ при $\dim A_i \geq 2$. Якщо ж $\dim A_i = 1$, то $A_i = \{\lambda \vec{a} : \lambda \in C\}$, і в цьому випадку $D(\vec{G}) \cap A_i = A_i \setminus A_0$, оскільки, очевидно, одночасно з вектором \vec{a} і всі вектори $\lambda \vec{a}$, $\lambda \in C \setminus \{0\}$ є дефектними.

Література

1. Петренко В.П. Целые кривые / В.П.Петренко. – Ч.: Вища школа, 1984 – 136 с.
2. Шабат Б.В. Распределение значений голоморфных отображений / Б.В.Шабат. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
3. Савчук Я.И. Структура множества дефектных векторов целых и аналитических кривых конечного порядка / Я.И.Савчук // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 37, № 5. – С. 609-615.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.12.2013 р.

Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В., д.ф.-м.н., професором Лопушанським О.В. (м. Львів)

STRUCTURE OF GREAT NUMBER OF NEVANLINN IMPERFECT VECTORS FOR WHOLE CURVES WITH LINEARLY DEPENDENT COMPONENTS

Ya. I. Savchuk

*Ivano-Frankiv'sk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankiv'sk, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua*

It is shown that structure of great number of nevanlinn imperfect vectors for the whole curve of complete order with linearly dependent components similar to the structure for the ordinary whole curve of complete order.

Key words: whole curve, nevanlinn imperfect vector, meromorf function, possible system of vectors.

ДЕЯКІ БІСКТИВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТА ОБЕРНЕНІ ДО НИХ ФУНКЦІЇ

І. В. Федак

*Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника;
76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: Fedak_ivan @ rambler.ru*

Розглянуті два приклади бісктивних відображень, для яких обернені до них функції мають дещо відмінні властивості, пов'язані з границями та неперервністю. Розв'язане одне функціональне рівняння.

Ключові слова: бісктивні відображення, обернені функції, границя, неперервність, функціональні рівняння.

Як відомо з курсу математичного аналізу, функція f^{-1} , обернена до монотонної неперервної функції $f: X \rightarrow Y$, також є монотонною і неперервною. Зрозуміло, що при цьому обидві такі функції є взаємно однозначними (бісктивними) відображеннями.

Але не завжди властивості обернених функцій до бісктивних відображень будуть аналогічними до властивостей таких відображень.

У пропонованій вашій увазі статті ми розглянемо приклади бісктивних відображень, для яких обернені до них функції мають дещо відмінні властивості.

Задачі про існування та дослідження властивостей таких функцій були запропоновані як завдання XV Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка.

Задача 1. Про функцію $f: Z \rightarrow Z$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням (біскцією) множини всіх цілих чисел на себе, причому $f(n) \rightarrow +\infty$, якщо $n \rightarrow +\infty$. Нехай f^{-1} позначає функцію, обернену до f . Чи можна стверджувати, що $f^{-1}(n) \rightarrow +\infty$, якщо $n \rightarrow +\infty$?

Розв'язання. Так стверджувати не можна. Розглянемо, наприклад, функцію

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n \in Z_+, \\ -n, & n = -2k + 1, k \in N, \\ \frac{n}{2}, & n = -2k, k \in N. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$. Але для оберненої до неї функції

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n = 2k, n \in \mathbb{Z}, \\ -n, & n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}, \\ 2n, & n = -k, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$f^{-1}(n)$ для непарних n не прямує до $+\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Зауважимо, що покладаючи додатково $f(x) = x$, $x \notin \mathbb{Z}$, ми отримали би функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таку, що є взаємно однозначним відображенням (бієкцією) множини всіх дійсних чисел на себе, причому $f(x) \rightarrow +\infty$, якщо $x \rightarrow +\infty$. Але при цьому $f^{-1}(x)$ не прямує до $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$.

Задача 2. Про функцію $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що вона є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе, і є розривною у кожній точці числової прямої. Чи можна стверджувати, що й обернена до неї функція F^{-1} також є розривною у кожній точці числової прямої?

Розв'язання. Доведемо, що і у цьому випадку так стверджувати не можна.

Виділимо у множині дійсних чисел щільну підмножину X всіх чисел вигляду

$$x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 b_1 b_2 \dots b_m,$$

де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, a_i, b_i – цифри, $b_m \neq 0$, $b_m \neq 5$.

Нехай

$$F(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \in \mathbb{R} \setminus X, \\ x - 1, & x \in X \setminus (0, 2), \\ g(x), & x \in X \cap (0, 2). \end{cases}$$

Визначимо функцію $g(x)$ на множині $X \cap (0, 2)$ таким чином:

$g(x) = \frac{1}{2}x$, якщо b_m – парна цифра. Якщо ж цифра $b_m = 1$ чи $b_m = 3$, то збільшимо її на 1, а якщо $b_m = 7$ чи $b_m = 9$, то зменшимо її на 1. Замінивши $x \in X \cap (0, 2)$ на отриманий таким способом елемент x' , покладемо $g(x) = \frac{1}{2}x' - 1$.

На рис. 1 схематично зображений графік функції $F(x)$. Точки такого графіка знаходяться на лініях, наведених пунктиром, причому довші відрізки пунктирів відповідають аргументам $x \notin X$. Штрихпунктирною лінією намальований графік функції $y = \frac{1}{2}x - 1$. Відповідні

точки графіка функції $g(x) = \frac{1}{2}x' - 1$ знаходяться у безпосередній близькості, але дещо вище чи нижче від нього.

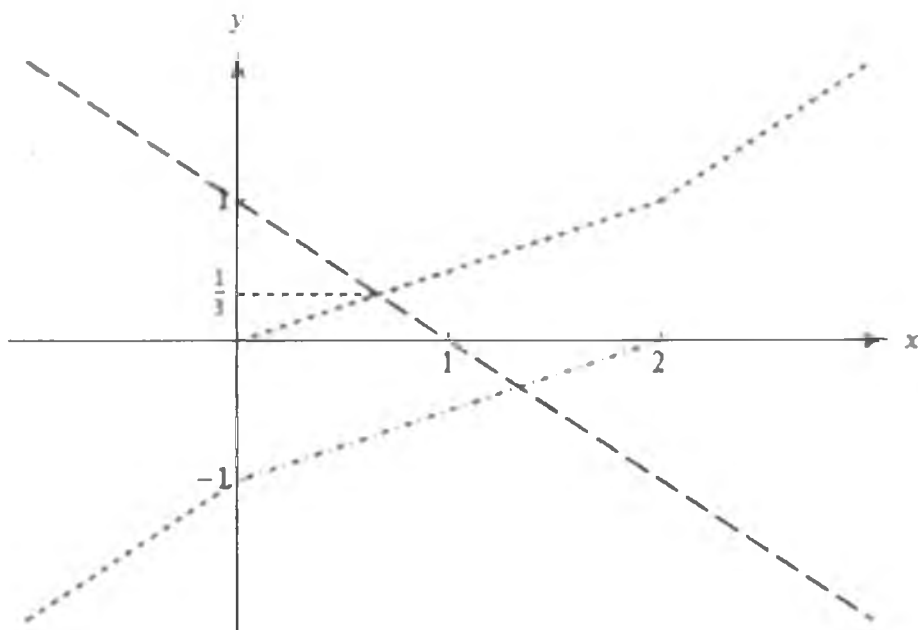


Рис. 1. Графік функції $F(x)$

Функція $y = F(x)$ є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе. Справді, функція $y = -x + 1$, $x \in R \setminus X$, взаємно однозначно відображає $R \setminus X$ на $R \setminus X$, а інші дві функції бієктивно відображають X на X . Поза інтервалом $(0, 2)$ це здійснює функція $y = x - 1$, $x \in X \setminus (0, 2)$, а на даному інтервалі – функція $y = g(x)$.

Крім того, внаслідок щільності множини X у R в околі кожної точки $x \in R$ знайдуться такі дві точки, в яких різниця значень не менша 1 (див. рис.). Таким чином, побудована функція є розривною у кожній точці числової осі.

Водночас, як видно з того ж рисунка, обернена до неї функція $x = F^{-1}(y)$ неперервна у точці $y = \frac{1}{3}$.

Зауважимо, що, міркуючи аналогічно, нескладно побудувати розривне у всіх точках числової осі бієктивне відображення, для якого обернена функція виявиться неперервною у зліченній кількості точок.

З бієктивними відображеннями тісно пов'язані і задачі на знаходження функцій за наперед заданими властивостями. Розглянемо відповідний цікавий приклад із завдань того ж турніру.

Задача 3. Для натурального k знайдіть усі такі функції $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, що для будь-яких додатних чисел x_1, x_2, \dots, x_{2k} , добуток котрих дорівнює 1, виконується рівність

$$\prod_{i=1}^k \frac{f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})}{x_{2i-1} + x_{2i}} = 1.$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок $k \geq 2$. Підставляючи $x_1 = x_2 = \dots = x_{2k-1} = x_{2k} = 1$, отримуємо $f^n(1) = 1$. А оскільки $f(x)$ набуває лише додатних значень, то $f(1) = 1$. Підставимо тепер $x_1 = a$,

$x_2 = \frac{1}{a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x_3 = x_4 = \dots = x_{2k-1} = x_{2k} = 1$. Враховуючи, що

$f(1) = 1$, отримаємо рівність $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = a + \frac{1}{a}$. Далі, покладаючи

$x_1 = a$, $x_3 = \frac{1}{a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, та залишаючи решта аргументів одиницями,

будемо мати $(f(a) + 1)\left(f\left(\frac{1}{a}\right) + 1\right) = (a + 1)\left(\frac{1}{a} + 1\right)$. звідки одержимо

$f(a)f\left(\frac{1}{a}\right) = 1$. Таким чином, $f(a) = a$ або $f(a) = \frac{1}{a}$. Припустимо, що

для відмінних від одиниці додатних чисел a, b одночасно виконуються рівності $f(a) = a$, $f(b) = \frac{1}{b}$. Тоді $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$, $f\left(\frac{1}{b}\right) = b$. Підставивши

$x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = \frac{1}{a}$, $x_4 = \frac{1}{b}$, та залишаючи решта аргументів одиницями,

отримаємо співвідношення $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + b\right) = (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$,

звідки $ab + 1 = a + b$, тобто $(a - 1)(b - 1) = 0$, що неможливо при $a \neq 1$, $b \neq 1$. З доведеного вище випливає, що розв'язками заданого функціонального рівняння при $k \geq 2$ можуть бути лише функції $f(x) = x$

та $f(x) = \frac{1}{x}$. Перевірка показує, що вони обидві задовольняють це рівняння.

Нехай тепер $k = 1$. Міркуючи аналогічно до попереднього випадку, отримаємо: $f(1) = 1$ та $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = a + \frac{1}{a}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Отже, для

функції $g(x) = f(x) - x$ будемо мати: $g(1) = 0$ та $g(a) + g\left(\frac{1}{a}\right) = 0$.

$a > 0$, $a \neq 1$. Якщо $g(x)$ – довільна функція, визначена на інтервалі $(0,1)$, яка задовольняє на ньому нерівності $-x < g(x) < \frac{1}{x}$, то, покладаючи $g(1) = 0$ та $g(x) = -g\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 1$, отримаємо, що функція $f(x) = g(x) + x$ є розв'язком заданого функціонального рівняння при $k = 1$. Навпаки, для кожного розв'язку $f(x) > 0$ функція $g(x) = f(x) - x$ задовольняє накладені на неї вище умови. При цьому нерівність $g(x) > -x$, $x \in (0,1)$, – очевидна, а $g(x) < \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$, випливає з нерівності $-g(x) + \frac{1}{x} = g\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, $x \in (0,1)$. Таким чином, знайдені всі розв'язки заданого рівняння при $k = 1$.

Зокрема, покладаючи $g(x) = 0$ та $g(x) = \frac{1}{x} - x$, отримаємо отримані нами для $k > 2$ розв'язки $f(x) = x$ та $f(x) = \frac{1}{x}$ відповідно.

Але, крім них, при $k = 1$ задане рівняння задовольняє, наприклад, ще й функція

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (0, 1), \\ 1, & x = 1, \\ x - 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Зрозуміло, що існує безліч розв'язків для $k = 1$.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 21.11.2013 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В.,
д.ф.-м.н., професором Лопушанським О.В (м. Львів)*

SOME BIJECTIVE MAPPINGS AND THEIR INVERSE FUNCTIONS

I. V. Fedak

Precarpathian National University by V. Stefanyc;

76025, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;

e-mail: Fedak_ivan@rambler.ru

Two is considered examples of bijective mappings, for that their inverse functions have something the excellent properties related to the limits and continuity. One functional equation is solved.

Key words: *bijective mappings, inverse functions, limit, continuity, functional equations.*

УДК 517.55

ENTIRE FUNCTIONS OF STRONGLY BOUNDED L -INDEX IN DIRECTION

A. I. Bandura, H. M. Kulinich

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: andriykopanytsia@gmail.com*

A concept of entire function of strongly bounded index have been generalized for a multidimensional case. We introduced a class of entire functions of strongly bounded L -index in direction and some properties of this function class are established.

Key words: *entire function, bounded L -index in direction, strongly bounded L -index in direction, directional derivative.*

Shah S. M. and Shah S. N. [1] supposed a generalization of bounded index for entire functions. They introduced entire functions of strongly bounded index and proved that functions of genus zero and having all negative zeros satisfying a one sided growth condition belong to this new class. Using our definition of bounded L -index in direction [2] we extend their definition to a multidimensional case.

Let $L(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, be a positive continuous function.

Definition 1 (see [2]). *An entire function of $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, is called function of bounded L -index in the direction of $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, if there exists $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ such that for $m \in \mathbb{Z}_+$ and every $z \in \mathbb{C}^n$ next inequality is true:*

$$\frac{1}{m! L^m(z)} \left| \frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m} \right| < \max \left\{ \frac{1}{k! L^k(z)} \left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| : 0 < k < m_0 \right\}, \quad (1)$$

where $\frac{\partial^0 F(z)}{\partial \mathbf{b}^0} = F(z)$, $\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left(\frac{\partial^{k-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k-1}} \right)$, $k > 2$.

The least such integer m_0 is called the L -index in direction \mathbf{b} of function $F(z)$ and is denoted by $N_{\mathbf{b}}(F, L)$. If such m_0 does not exist then we put $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \infty$ and F is said of unbounded L -index in direction. If $n=1$ and $\mathbf{b}=1$ then we obtain a definition of entire function of bounded l -index [4] and if $L(z) \equiv 1$, $n=1$ and $\mathbf{b}=1$ then we obtain a definition of entire function of bounded index [3].

Shah S.M. and Shah S.N. [1] shown that there exist functions of bounded index, and of given order ρ and lower order λ provided

$0 < \lambda < \rho < 1$. Their attempts to construct such functions have led us to the remark that a very simple subclass functions of strongly bounded index, of the class functions of bounded index, displays a particularly useful property. If $f(t)$, $t \in \mathbb{C}$, is a function of strongly bounded index and $P(t)$ is a polynomial then $P(t)f(t)$ is a function of strongly bounded index too.

We introduced a concept entire function of bounded L -index in direction [2]. Thus, it is naturally to consider a generalization of strongly bounded index in \mathbb{C}^n .

Definition 2 An entire function of $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, is called function of strongly bounded L -index in the direction of $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, if there exist quantities $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, $r_0 > 0$, $\chi \in (0, 1)$ such that for $m > m_0 + 1$ and every $z \in \mathbb{C}^n$, $|z| \geq r_0$, next inequality is true

$$\frac{1}{m! L^m(z)} \left| \frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m} \right| \leq \chi \max \left\{ \frac{1}{k! L^k(z)} \left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| : 0 \leq k \leq m_0 \right\}. \quad (2)$$

If $L(z) \equiv 1$ then $F(z)$ is called a function of strongly bounded index in the direction \mathbf{b} . The least such integer m_0 is called the strongly L -index in direction \mathbf{b} of function $F(z)$.

For instance, $F(z) = e^{\sum_{i=1}^n z_i}$ is a function of strongly bounded index in any direction \mathbf{b} . Here $\chi = \frac{1}{2}$, $r_0 = 0$, $m_0 = 1$. But $F(z) = e^{\sum_{i=1}^{n-1} z_i + z_n^2}$ is a function of strongly bounded index in any direction $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, 0)$ and a function of strongly bounded L -index in direction $\mathbf{b} = (0, 0, \dots, 0, b_n)$ where $b_n \neq 0$, $L(z) = |z_n| + 1$. The numbers $\chi = \frac{1}{2}$, $r_0 = 0$, $m_0 = 1$ are same as in previous example. We now state

Theorem 1 Let $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, be entire function of strongly bounded L -index in direction \mathbf{b} . Then $F(z)$ is of bounded L -index in direction \mathbf{b} ,

Proof of Theorem 1. By Definition 2, there exist fixed quantities χ , $0 < \chi < 1$, r_0 and $m_0 \geq 0$ such that (2) holds for all $m \gg m_0 + 1$ and all $z \in \mathbb{C}^n$ with $|z| > r_0$.

We examine $F(z)$ and its successive directional derivatives in the closed ball

$$|z| \leq r_0. \quad (3)$$

Let $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < r_0\}$ and \bar{B} is a closure of B and $z^0 \in \bar{B}$ is fixed point. We denote $g_0(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$, $t \in \mathbb{C}$, $D_0 = \bar{B} \cap \{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$, $d = \text{diam } B$. Then on the bounded set D_0 entire function $g_0(t)$ has finite number of zeros or identical equal to zero. In the last case in view of theorem uniqueness this function is even a zero in general for all $t \in \mathbb{C}$. It is clear that it will be implemented inequality (2) on a set D_0 .

Regarding finite number of zeros for simplification of proof to will consider a case, when this function has only one zero on D_0 . It is easily possible it will be to see from the next proof how the similar reasonings are conducted for the finite number of zeros.

Consequently, let $g_0(t)$ has one zero in a point a_0 on D_0 . Then there is a derivative $g_0'(z^0)$ such that $g_0'(a_0) \neq 0$. So $|g_0'(t)| \geq h_0 > 0$ in some circle $\bar{K}_0 = \{t \in \mathbb{C} : |t - a_0| \leq d_0 < \frac{d}{\sqrt{n}|\mathbf{b}|}\}$. Will notice that these all constants it is possible uniformly to limit, that there exists positive constants q, h such, that $q_0 \leq q, h_0 \geq h$, for all $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Suppose that it is not. Then there is a convergent sequence $z_p^0, p \in \mathbb{N}$ and corresponding it convergent sequences $q_{z_p^0}$ and $a_{z_p^0}$ such, that $z_p^0 \rightarrow z^* \in \bar{B}$, $a_{z_p^0} \rightarrow a^* \in D_*$, but $q_0 \rightarrow +\infty$. There will be exist an finite point a^* , in which entire function $g_*(t)$ will have a zero of infinity multiplicity, that it is impossible.

Now we prove that $\sup\{q_0 : z^0 \in \bar{B}\} \equiv q < +\infty$, where q_0 is a multiplicity of all zeros function $g_0^b = F(z^0 + t\mathbf{b})$ in $\bar{K} = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq \frac{d}{\sqrt{n}|\mathbf{b}|}\}$. On the contrary in view of theorem Montelia we suppose that $q = +\infty$. But \bar{B} is a compact. Then exists sequence $z_p^0 \rightarrow z^0 \in \bar{B}$ and sequence of zeros $a_p = a_{z_p^0} \rightarrow a \in \bar{B}$ of multiplicity $q_p = q_0 \rightarrow +\infty$ such that corresponding sequence $g_p(t) \equiv g_{z_p^0}(t)$ uniformly convergences on \overline{K} to analytic function $g(t)$. Thus point a is a zeros of infinite multiplicity for $g(t)$, that it is not impossible.

Thus we have such estimation $q_0 \leq q$, $h_0 \geq h$ for all $z^0 \in \bar{B}$. Let $L_* = \max\{L(z) : z \in \bar{B}\}$ and $\mu = \min\{|F(z)| : z \in \bar{B} \setminus \bigcup_{z^0 \in C^n} K_0\}$. Then for all $z \in \bar{B}$ is true

$$\begin{aligned} \max \left\{ |F(z)|, \frac{1}{q! L^q(z)} \left| \frac{\partial^q F(z)}{\partial \mathbf{b}^q} \right| \right\} &= \max \left\{ |F(z)|, \frac{|g_z^{qz}(0)|}{q! L^q(z)} \right\} \geq \\ &> \min \left\{ \mu, \frac{h_*}{q! L_*^q} \right\} > \min \left\{ \mu, \frac{h}{q! L_*^q} \right\} = T > 0. \end{aligned}$$

We choose $\alpha > \frac{1}{|\mathbf{b}| \sqrt{n}}$ and consider a set

$$\bar{G}^* = \bar{B} \cup \bigcup_{z \in \bar{B}} \left\{ w \in C^n : |w - z| \leq \frac{\alpha}{L(z)} \right\}.$$

We denote $M = \max\{|F(z)| : z \in \bar{G}^*\}$. According to Cauchy inequality for all $z \in \bar{B}$ such inequality is true

$$\begin{aligned} \frac{1}{m! L^m(z)} \left| \frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m} \right| \frac{|g_z^{(m)}(0)|}{m! L^m(z)} &\leq \left(\frac{|\mathbf{b}| \sqrt{n} L(z)}{\alpha} \right)^m \frac{1}{L^m(z)} \max \left\{ |g_z(\theta)| : |\theta| = \right. \\ &= \left. \frac{\alpha}{|\mathbf{b}| \sqrt{n} L(z)} \right\} = \left(\frac{|\mathbf{b}| \sqrt{n}}{\alpha} \right)^m \max \left\{ |F(z + \theta \mathbf{b})| : |z + \theta \mathbf{b} - z| = \frac{\alpha}{L(z)} \right\} \leq \\ &\leq \left(\frac{|\mathbf{b}| \sqrt{n}}{\alpha} \right)^m \max \left\{ |F(w)| : |w - z| = \frac{\alpha}{L(z)} \right\} \leq M \left(\frac{|\mathbf{b}| \sqrt{n}}{\alpha} \right)^m. \end{aligned}$$

Thus for every $z \in \bar{B}$ we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{m! L^m(z)} \left| \frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m} \right| &\leq M \left(\frac{|\mathbf{b}| \sqrt{n}}{\alpha} \right)^m = \frac{M (|\mathbf{b}| \sqrt{n})^m}{T \alpha^m} T \leq \\ &< \frac{M |\mathbf{b}| \sqrt{n}^m}{T \alpha^m} \max \left\{ |F(z)|, \frac{1}{q! L^q(z)} \left| \frac{\partial^q F(z)}{\partial \mathbf{b}^q} \right| \right\} < \\ &< \frac{M (|\mathbf{b}| \sqrt{n})^m}{T \alpha^m} \max \left\{ \frac{1}{p! L^p(z)} \left| \frac{\partial^p F(z)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| : 0 < p < q \right\}. \end{aligned}$$

But $\frac{M}{\alpha (|\mathbf{b}| \sqrt{n} \alpha)^m} \rightarrow 0$ at $m \rightarrow +\infty$, then we choose $m^* \in \mathbf{N}$ such that

$\frac{M}{\alpha (|\mathbf{b}| \sqrt{n} \alpha)^m} \leq \chi < 1$ for all $m > m^*$. We obtain (2) at $m_0 = n^*$ that it was necessary to prove

$$\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!} \leq \chi \cdot \max_{0 < j \leq n^*} \left\{ \frac{|f^{(j)}(z)|}{j!} \right\} \quad (m \geq n^* + 1), \quad (4)$$

provided $|z| < r_0$. On the other hand, since $n_0 > s+1$, and $F(z)$ is of strongly bounded L -index in direction \mathbf{b} , (4) holds for $n > p+1$ and $|z| > r_0$. Hence we can drop the restriction on the size of z and this completes the proof.

References

1. Shah S.M. A new class of functions of bounded index / S.M.Shah, S.N.Shah // Transactions Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 373. – P. 363-377.
2. Bandura A.I. Entire functions of bounded L -index in direction / A.I.Bandura, O.B.Skaskiv // Math. Stud. – 2007. – 27, No 1. – P. 30-52 (in Ukrainian).
3. Lepson B. Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index / B.Lepson // Proc. Sympos. Pure Math. – Amer. Math. Soc.: Providence, Rhode Island. – 1968. – V. 11. – P. 298-307.
4. Kuzyk A.D. Entire functions of bounded l -distribution of values / A.D.Kuzyk, M.M.Sheremeta // Math. notes. – 1986. – V. 39, No 1. – P. 3-8.
*Стаття надійшла до редакційної колегії 16.12.2013 р.
 Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В.,
 д.ф.-м.н., професором Скасківим О.Б. (м. Львів)*

ЦІЛІ ФУНКЦІЇ СИЛЬНО ОБМЕЖЕНОГО L -ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМОМ

А. І. Бандура

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
 тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: andriykorpanytsia@gmail.com*

Поняття цілої функції сильно обмеженого індексу узагальнено для багатовимірного випадку. Нами введено клас цілих функцій сильно обмеженого L -індексу за напрямом та встановлено деякі властивості цього класу функцій.

Ключові слова: ціла функція, обмежений L -індекс за напрямом, сильно обмежений L -індекс за напрямом, похідна за напрямом.

ПРО СТІЙКІСТЬ ТРИВІАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

С. І. Гургула

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@iung.edu.ua

Вивчається питання стійкості тривіального розв'язку лінійної однопорідної системи другого порядку з постійними коефіцієнтами, яка піддається імпульсній дії при досягненні траєкторією деякої прямої, що проходить через початок координат.

Ключові слова: лінійна однопорідна система другого порядку, імпульсна дія, стійкість.

Розглядається лінійна система диференціальних рівнянь другого порядку з імпульсною дією виду

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \notin l, \quad (1)$$

$$\Delta x|_{t \in l} \equiv x(t+0) - x(t) = Bx,$$

де $x = (x_1, x_2)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – дійсні сталі квадратні матриці другого порядку, l – деяка пряма в площині Ox_1x_2 , що проходить через початок координат. Досліджуватимемо питання стійкості за Ляпуновим тривіального розв'язку такої системи.

Сам процес відбувається наступним чином: точка рухається траєкторією, яка описується розв'язком системи $\frac{dx}{dt} = Ax$, до моменту часу t_0 , коли вона попадає на пряму l . В цей момент точка «миттєво» перекидається із положення $x(t_0)$ в положення $x(t_0+0) = x(t_0) + Bx(t_0) = (E + B)x(t_0)$ (E – одинична матриця другого порядку) і далі рух знову відбувається вздовж кривої, що описується розв'язком системи $\frac{dx}{dt} = Ax$ до нової зустрічі з прямою l і т.д.

Зрозуміло, що образи всіх точок прямої l при дії оператора, заданого матрицею $E + B$, утворюють нову пряму l_1 , яка теж проходить через початок координат і рівняння якої неважко одержати. А саме, якщо рівняння прямої l є $k_1x_1 + k_2x_2 = 0$, то рівняння прямої l_1 матиме вид

$$((1 + b_{22})k_1 - b_{21}k_2)x_1 + ((1 + b_{11})k_2 - b_{12}k_1)x_2 = 0.$$

Питання стійкості тривіального розв'язку системи (1) вирішуватиметься, очевидно, в залежності від власних значень матриці A . У випадку, коли ці власні значення дійсні, питання вирішується просто. Тому далі вважасмо, що власні значення матриці A комплексні; при цьому, до речі, всі траєкторії системи $\frac{dx}{dt} = Ax$ попадають на пряму l .

В системі (1) зручно перейти до полярних координат r, φ : $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, яка при цьому набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r(a_{11} \cos^2 \varphi + (a_{12} + a_{21}) \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= a_{21} \cos^2 \varphi + (a_{22} - a_{11}) \cos \varphi \sin \varphi - a_{12} \sin^2 \varphi, \quad \varphi \neq \varphi_0 + n\pi, \\ \Delta r|_{\varphi=\varphi_0+n\pi} &= (k-1)r, \\ \Delta \varphi|_{\varphi=\varphi_0+n\pi} &= \beta, \end{aligned} \quad (2)$$

де $n = 1, 2, \dots$, φ_0 – кут, який складає пряма l з віссю Ox_1 , $\beta = \pm \alpha$, де α кут між прямими l і l_1 , k – коефіцієнт, який залежить від матриці B і може бути знайдений за формулою

$$k = \frac{\sqrt{((1+b_{11})k_2 - b_{12}k_1)^2 + ((1+b_{22})k_1 - b_{21}k_2)^2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

Зауважимо, що праві частини рівнянь системи (2) містять квадратичні форми від $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, задані матрицями

$$A^H = \frac{1}{2}(A + A'), \quad A' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_{21} & a_{22} - a_{11} \\ a_{22} - a_{11} & -2a_{12} \end{pmatrix}.$$

Позначимо λ_1 і Λ_1 – відповідно менше і більше власні значення матриці A^H . Зауважимо далі, що якщо власні значення матриці A комплексні, то власні значення матриці A' одного знаку, звідки випливає, що похідна $\frac{d\varphi}{dt}$ зберігає знак, отже будь-яка траєкторія, де б вона не починалась, попаде на пряму l .

Тривіальний розв'язок системи (1) буде стійким за Ляпуновим, якщо для всякого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для будь-якого розв'язку системи, який починається в момент часу t_0 в точці (r_0, φ_0) , де $r_0 < \delta$, виконуватиметься умова $r(t) < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$. Цей розв'язок буде асимптотично стійким, якщо він стійкий і існує таке $\delta_0 > 0$, що для всякого розв'язку $r(t)$, для якого $r(t_0) < \delta_0$, виконана умова $r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Має зміст розглянути випадки: $\frac{d\varphi}{dt}$ і β одного знаку, $\frac{d\varphi}{dt}$ і β різних знаків. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\frac{d\varphi}{dt} > 0$. Це означає, що власні значення матриці A' додатні, позначимо їх λ_2 і Λ_2 ($0 < \lambda_2 \leq \Lambda_2$).

1) Нехай $\beta = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$. Припустимо, що точка попаде на пряму l в деякий момент часу t_0 : $r(t_0) = r_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$. В цей же момент часу вона перекидається із положення $(r(t_0), \varphi(t_0))$ в положення $(r(t_0 + 0), \varphi(t_0 + 0))$ на прямій l_1 , де $r(t_0 + 0) = kr_0$, $\varphi(t_0 + 0) = \varphi_0 + \alpha$. Далі точка рухається траєкторією, яка описується розв'язком системи $\frac{dx}{dt} = Ax$ і нехай вона попаде на пряму l в деякий момент часу t_1 . Оче-

видно $\varphi(t_1) - \varphi(t_0 + 0) = \pi - \alpha$, або, враховуючи, що $\lambda_2 \leq \frac{d\varphi}{dt} \leq \Lambda_2$ і застосувавши формулу скінченних приростів, маємо $\lambda_2(t_1 - t_0) \leq \varphi(t_1) - \varphi(t_0 + 0) \leq \Lambda_2(t_1 - t_0)$, або $\lambda_2(t_1 - t_0) \leq \pi - \alpha \leq \Lambda_2(t_1 - t_0)$. Звідси

$$\frac{\pi - \alpha}{\Lambda_2} \leq t_1 - t_0 \leq \frac{\pi - \alpha}{\lambda_2}. \quad (3)$$

В силу першого рівняння системи (2) $\lambda_1 r \leq \frac{dr}{dt} \leq \Lambda_1 r$, звідки легко одержати $r(t_0 + 0)e^{\lambda_1(t_1 - t_0)} \leq r(t_1) \leq r(t_0 + 0)e^{\Lambda_1(t_1 - t_0)}$, що з урахуванням (3) приводить до нерівності

$$kr_0 e^{\frac{\lambda_1(\pi - \alpha)}{\Lambda_2}} \leq r(t_1) \leq kr_0 e^{\frac{\Lambda_1(\pi - \alpha)}{\lambda_2}}. \quad (4)$$

Оскільки далі рух відбувається аналогічно, то досить порівняти $r(t_1)$ і r_0 : розв'язок $x \equiv 0$ буде стійким, якщо $r(t_1) \leq r_0$, асимптотично стійким, якщо $r(t_1) < r_0$ і нестійким, якщо $r(t_1) > r_0$. Використовуючи оцінку (4), легко одержуємо:

– тривіальний розв'язок системи (1) стійкий, якщо

$$ke^{\frac{\lambda_1(\pi - \alpha)}{\Lambda_2}} \leq 1 \quad (5)$$

і асимптотично стійкий, якщо ця нерівність виконана в строгому сенсі.

– він нестійкий, якщо

$$ke^{\frac{\lambda_1(\pi - \alpha)}{\Lambda_2}} > 1. \quad (6)$$

2) Нехай тепер $\beta = -\alpha$, де $0 \leq \alpha \leq \pi$. Тоді рух в цій системі відбуватиметься по-іншому: рано чи пізно будь-яка траєкторія попаде між

прямі l і l_1 і далі рух буде відбуватися тільки між цими прямими. Нехай точка попаде на пряму l в момент часу t_0 в положення (r_0, φ_0) , $r_0 = r(t_0)$. Далі вона перекидається в положення $(r(t_0 + 0), \varphi(t_0 + 0))$ на прямій l_1 , де $r(t_0 + 0) = kr_0$, $\varphi(t_0 + 0) = \varphi_0 - \alpha$. Рухаючись далі траскторією, яка описується розв'язком системи $\frac{dx}{dt} = Ax$, точка попадає на пряму l в момент часу t_1 в положення $(r(t_1), \varphi_0)$. Очевидно $\varphi(t_1) - \varphi(t_0 + 0) = \varphi_0 - (\varphi_0 - \alpha) = \alpha$. Як і вище, одержуємо нерівності

$$\frac{\alpha}{\Lambda_2} \leq t_1 - t_0 \leq \frac{\alpha}{\lambda_2} \quad \text{і} \quad kr_0 e^{\frac{\Lambda_1 \alpha}{\lambda_2}} \leq r(t_1) \leq kr_0 e^{\frac{\Lambda_1 \alpha}{\lambda_2}},$$

із яких випливає:

– розв'язок $x \equiv 0$ системи (1) стійкий, якщо

$$ke^{\frac{\Lambda_1 \alpha}{\lambda_2}} \leq 1, \quad (7)$$

причому стійкість буде асимптотичною, якщо нерівність строга.

– цей розв'язок нестійкий, якщо

$$ke^{\frac{\Lambda_1 \alpha}{\lambda_2}} > 1. \quad (8)$$

Література

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П.Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. Гургула С.І. Про стійкість розв'язків імпульсних систем / С.І. Гургула, М.О.Перестюк // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1981. – Вип. 23. – С. 33-40.
3. Гургула С.І. Про стійкість в системах з імпульсами / С.І.Гургула, Р.І.Собкович // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2009. – №1(5). – С. 24-29.
4. Гургула С.І. Про стійкість положення рівноваги однієї системи з імпульсною дією / С.І.Гургула, В.І.Горгула // Нелінійні коливання. – 1999. – Т.2, №2. – С. 177-179.

Стаття надійшла до редакційної колегії 10.10.2013 р.

Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором, академіком НАН України Перестюком М.О. (м. Київ), д.ф.-м.н., доцентом Королем І.І. (м. Ужгород)

A BOUT STABILITY OF THE TRIVIAL SOLUTION OF A SYSTEM WITH IMPULSE ACTION

S. I. Gurgula

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua*

The question of stability of the trivial solution of a linear homogeneous system of the second order with constant coefficients which is center the impulse action on reaching a trajectory of a reaching a trajectory of a certain line passing through the origin is being studied.

***Key words:** linear homogeneous system of the second order, impulsive action, stability.*

УДК 517.9

ЗАСТОСУВАННЯ ДО ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ НЕТЕРОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Л. М. Шегда

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua*

Отримано умову, коли нерозв'язну крайову задачу можна зробити розв'язною за допомогою неоднорідності в диференціальній системі, в припущенні, що вироджена система зводиться до центральної канонічної форми.

Ключові слова: канонічна форма, вироджена нетерова крайова задача, псевдообернена матриця.

Розглядається крайова задача

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + u, \quad u \in R^n, \quad t \in [a; b], \quad (1)$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^m, \quad (2)$$

де $A(t), B(t)$ – $(n \times n)$ -вимірні матриці, компоненти яких є дійсними, достатню кількість раз неперервно диференційованими на $[a; b]$ функціями: $A(t), B(t) \in C^{(q-2)}[a; b]$ (значення величини q визначається згідно теореми 2.1 [1]); $\det B(t) = 0 \quad \forall t \in [a; b]$; u – n -вимірний вектор-стовпець, постійне керування; α – m -вимірний вектор-стовпець констант; $\alpha \in R^m$; l – лінійний векторний функціонал, визначений на просторі n -вимірних, неперервних на $[a; b]$ вектор-функцій: $l = \text{col}(l_1, \dots, l_m) : C[a; b] \rightarrow R^m, \quad l_i : C[a; b] \rightarrow R$.

Нерозв'язну крайову задачу (1), (2) можна зробити розв'язною як за допомогою неоднорідності в крайовій умові так і за допомогою неоднорідності в диференціальній системі. Знайдемо умову на постійне керування u , при якому дана крайова задача (1), (2) буде розв'язною при довільних неоднорідностях $\alpha \in R^m$.

Згідно теореми 1 [2] породжуючи крайова задача

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a; b] \quad (3)$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^m, \quad (4)$$

має r -параметричне сімейство лінійно незалежних розв'язків

$$x(t, c_r) = X_r(t)c_r + X_{n-r}(t)Q^+\alpha + (Gf)(t), \quad \forall c_r \in R^r, \quad (5)$$

тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C^{q-1}[a, b]$ в диференціальній системі та $\alpha \in R^m$ в крайовій умові задовольняють d лінійно незалежним умовам:

$$P_{Q^+} \left[\alpha - I \left(\int_a^b X_{n-r}(\cdot) Y_{n-r}^*(\tau) f(\tau) d\tau - \Phi(\cdot) \left[\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} [\Psi^*(t) L \Phi(t)]^{-1} (\cdot) \Psi^*(\cdot) f(\tau) \right] \right) \right] = 0, \quad (d = m - n_1). \quad (6)$$

Система (3) така, що невивірженим лінійним перетворенням зводиться до центральної канонічної форми [1;3].

Використасмо необхідну і достатню умову (6) розв'язності крайової задачі (3), (4) і запишемо її у вигляді

$$P_{Q^+} \left[\alpha - I \left(\int_a^b X_{n-r}(\cdot) Y_{n-r}^*(\tau) u d\tau - \Phi(\cdot) \left[\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} [\Psi^*(t) L \Phi(t)]^{-1} (\cdot) \Psi^*(\cdot) u \right] \right) \right] = 0.$$

Отримаємо алгебраїчну систему відносно u

$$P_{Q^+} I \left(\int_a^b X_{n-r}(\cdot) Y_{n-r}^*(\tau) d\tau - \Phi(\cdot) \left[\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} [\Psi^*(t) L \Phi(t)]^{-1} (\cdot) \Psi^*(\cdot) \right] \right) u = P_{Q^+} \alpha,$$

яку запишемо у вигляді

$$Ku = D\alpha, \quad (7)$$

де $P_{Q^+} := D$ – $(d \times m)$ -вимірна матриця;

$$K := P_{Q^+} I \left(\int_a^b X_{n-r}(\cdot) Y_{n-r}^*(\tau) d\tau - \Phi(\cdot) \left[\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} [\Psi^*(t) L \Phi(t)]^{-1} (\cdot) \Psi^*(\cdot) \right] \right) -$$

$(d \times n)$ -вимірна матриця.

Система (7) згідно [4] розв'язною тоді і тільки тоді, коли її вільний член $[D\alpha]$ належить ортогональному доповненню $N^\perp(K^*) = R(K)$ підпростору $N(K^*)$, тобто

$$P_{K^*} D\alpha = 0, \quad (8)$$

де $P_{K^*} = I_d - KK^+$ – $(d \times d)$ -вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^d на нуль-простір $N(K^*)$ матриці K^* :

$$P_{K^*} : R^d \rightarrow N(K^*) \quad N(K^*) = P_{K^*} R^d.$$

Оскільки $\text{rank } P_{K^*} = d_1 = d - \text{rank } K$, то матрицю P_{K^*} можна замінити $(d_1 \times d)$ -вимірною матрицею P_{K^*} , рядки якої складаються з повної системи d_1 лінійно незалежних рядків матриці P_{K^*} . Отже,

необхідною і достатньою умовою розв'язності системи (7), а отже і крайової задачі (1), (2) є d_1 лінійно незалежних умов

$$P_{K_{d_1}^*} D\alpha = 0.$$

Якщо остання умова виконується, то розв'язок системи (7) має вигляд

$$u = K^+ D\alpha + P_{K_{r_1}} c_{r_1} \quad \forall c_{r_1} \in R^{r_1},$$

де K^+ – єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до K матриця; $P_K = I_n - K^+ K$ – $(n \times n)$ -вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^n на нуль-простір $N(K)$ матриці K :

$$P_K : R^n \rightarrow N(K), \quad N(K) = P_K R^n.$$

Оскільки $\text{rank } P_K = r_1 = n - \text{rank } K$, то матрицю P_K можна замінити $(n \times r_1)$ -вимірною матрицею $P_{K_{r_1}}$, стовпці якої складаються з повної системи r_1 лінійно незалежних стовпців матриці P_K , що дозволяє виділити максимальне число лінійно незалежних розв'язків.

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема. *Крайова задача (1), (2) буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли постійне керування u дорівнює*

$$u = K^+ D\alpha + P_{K_{r_1}} c_{r_1} \quad \forall c_{r_1} \in R^{r_1}$$

для тих $\alpha \in R^m$, які задовольняють умові $P_{K_{d_1}^*} D\alpha = 0$.

Література

1. Самойленко А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виро-дженнями / А.М.Самойленко, М.І.Шкіль, В.П.Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
2. Бойчук О.А. Вироджені нетерові крайові задачі / О.А.Бойчук, Л.М.Шегда // Нелінійні коливання. – 2007. – Т.10, №3. – С. 303-312.
3. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е.Бояринцев. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. – 222 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 572 с.

Стаття постуила в редакційну колегію 10.12.2013 р.

Рекомендовано до друку к. ф.-м. н., доцентом Гургулою С.І., д.ф.-м.н., професором Бойчуком О. А. (м. Київ)

APPLICATION TO MANAGEMENT THEORY NOETHERIAN BOUNDARY PROBLEM

L. M. Shegda

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua*

A condition when the unresolved boundary value problem can be done solutions by means of heterogeneity in the differential system, Assuming that the degenerate system differential equations leads to the central canonical form.

Key words: *canonical form, degenerate Noether BVP, pseudoinverse matrices.*

УДК 517.98

ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКОЇ СИСТЕМИ ДЕКІЛЬКОХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

А. М. Краснодембський

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua*

У статті встановлено умови збіжності послідовностей, що визначають розв'язки з періодичними компонентами деякої системи декількох нелінійних диференціальних рівнянь парного порядку.

Ключові слова: система декількох нелінійних диференціальних рівнянь парного порядку, умови збіжності, періодичність розв'язків.

Раніше отримані результати ([3]) для системи двох нелінійних диференціальних другого порядку узагальнені для системи декількох нелінійних диференціальних рівнянь парного порядку.

Задана система диференціальних рівнянь

$$Y_i^{(2k)} = f_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(2k-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(2k-1)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

в якій неперервні функції $f_i(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k-1}^{(1)}, \dots, u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k-1}^{(n)})$ ($i = 1, 2, \dots, n$) задовольняють умови:

1. $f_i(x+T, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k-1}^{(1)}, \dots, u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k-1}^{(n)}) \equiv f_i(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k-1}^{(1)}, \dots, u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k-1}^{(n)})$
2. $f_i(\alpha - x, -u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, -u_2^{(1)}, \dots, u_{2k-1}^{(1)}, \dots, -u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, -u_2^{(n)}, \dots, u_{2k-1}^{(n)}) \equiv -f_i(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{2k-1}^{(1)}, \dots, u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{2k-1}^{(n)})$
3. $|f_i(x, u_{02}^{(1)}, u_{12}^{(1)}, \dots, u_{2k-1,2}^{(1)}, \dots, u_{02}^{(n)}, u_{12}^{(n)}, \dots, u_{2k-1,2}^{(n)}) - f_i(x, u_{01}^{(1)}, u_{11}^{(1)}, \dots, u_{2k-1,1}^{(1)}, \dots, u_{01}^{(n)}, u_{11}^{(n)}, \dots, u_{2k-1,1}^{(n)})| \leq K_0^{(1)} |u_{02}^{(1)} - u_{01}^{(1)}| + K_1^{(1)} |u_{12}^{(1)} - u_{11}^{(1)}| + \dots + K_{2k-1}^{(1)} |u_{2k-1,2}^{(1)} - u_{2k-1,1}^{(1)}| + \dots + K_0^{(n)} |u_{02}^{(n)} - u_{01}^{(n)}| + K_1^{(n)} |u_{12}^{(n)} - u_{11}^{(n)}| + \dots + K_{2k-1}^{(n)} |u_{2k-1,2}^{(n)} - u_{2k-1,1}^{(n)}|$

Згідно з попереднім ([1], [2]) диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) \in C$; $\varphi(x+T) \equiv \varphi(x)$; $\int_0^T \varphi(x) dx = 0$ має неперервний, періодичний (період T) розв'язок $y = \bar{y}(x)$, який можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) = & \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt + n \left[\frac{A_1^{(1)}}{T} \int_0^t \varphi(t) dt \right] x^{n-1} + (n-1) \left[A_2^{(1)} \int_0^t \varphi(t) dt + \right. \\ & + \frac{A_3^{(2)}}{T} \int_0^t \varphi(t) dt \left. \right] x^{n-2} + \dots + \left[A_n^{(1)} T^{n-2} \int_0^t \varphi(t) dt + A_n^{(2)} T^{n-3} \int_0^t t \varphi(t) dt + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{A_n^{(n)}}{T} \int_0^t t^{n-1} \varphi(t) dt \right], \end{aligned}$$

де коефіцієнти $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_n^{(1)}$ є розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} A_i^{(1)} + A_{i+1}^{(1)} + \dots + A_n^{(1)} = (-1)^{i+1} \frac{C_n^i}{n!} \quad (i=1, 2, \dots, n); \\ (n+1-i) A_i^{(1)} + (n-i) A_{i+1}^{(1)} + \dots + 2 A_{n-1}^{(1)} = (-1)^{i+1} \frac{C_{n-1}^i}{(n-1)!} \quad (i=1, 2, \dots, n-1); \\ (n+1-i)(n-i) A_i^{(1)} + (n-i)(n-1-i) A_{i+1}^{(1)} + \dots + 3 \cdot 2 A_{n-2}^{(1)} = (-1)^{i+1} \frac{C_{n-2}^i}{(n-2)!} \\ \quad (i=1, 2, \dots, n-2); \\ n! A_1^{(1)} = 1. \end{cases}$$

Якщо, крім того, $\varphi(\alpha-x) = -\varphi(x)$, то $\bar{y}(\alpha-x) = -\bar{y}(x)$.

З приведеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned} A_i^{(1)} &= (-1)^{i+1} \frac{1}{(n+1-i)!} \quad (i=1, 2, \dots, n); \\ A_{i+1}^{(1)} &= \frac{1}{(n-1)!} \left[(-1)^{i+1} \frac{1}{i!} - \frac{(n+1-i)!}{2!} A_i^{(1)} \right] \quad (i=1, 2, \dots, n-1); \\ A_{i+2}^{(1)} &= \frac{1}{(n-1-i)!} \left[(-1)^{i+1} \frac{1}{i!2!} - \frac{(n+1-i)!}{3} A_i^{(1)} - \frac{(n-i)!}{2!} A_{i+1}^{(1)} \right] \quad (i=1, 2, \dots, n-2); \\ A_{n-1}^{(1)} &= \frac{1}{2!} \left[(-1)^{i+1} \frac{1}{i!(n-2)!} - \frac{(n+1-i)!}{(n-i)!} A_i^{(1)} - \frac{(n-i)!}{(n-1-i)!} A_{i+1}^{(1)} - \dots - \frac{3!}{2!} A_{n-2}^{(1)} \right] \quad (i=1, 2); \\ A_n^{(1)} &= \frac{1}{(n-1)!} - A_1^{(1)} - A_2^{(1)} - \dots - A_{n-1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Надалі, використані позначення ($n=2k$):

$$\max_{0 \leq x \leq l} \int_0^x \left[2k \frac{A_1^{(1)}}{T} t x^{2k-1} + (2k-1) A_2^{(1)} t x^{2k-2} + \dots + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T} t^{2k} \right] dt + \frac{T^{2k}}{(2k)!} = N_0;$$

$$\max_{0 < x < T} \int_0^x \left[2k(2k-1) \frac{A_1^{(1)}}{T} t x^{2k-2} + (2k-1)(2k-2) A_2^{(1)} t x^{2k-3} + \dots + 2 \frac{A_{2k-1}^{(2k-1)}}{T} t^{2k-1} \right] dt + \frac{T^{2k-1}}{(2k-1)!} = N_1;$$

$$\max_{0 < x < T} \int_0^x \left[\frac{1}{T} t x + \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{2T} t^2 \right) \right] dt + \frac{T^2}{2!} = \frac{13}{12} T^2 = N_{2k-2};$$

$$\max_{0 < x < T} \int_0^x \left[\frac{1}{T} t \right] dt + \frac{T}{1!} = \frac{3}{2} T = N_{2k-1};$$

$$K_i^{(1)} + K_i^{(2)} + \dots + K_i^{(n)} = K_i \quad (i = 0, 1, \dots, 2k-1).$$

Теорема 1. Якщо $q = K_0 N_0 + K_1 N_1 + \dots + K_{2k-2} N_{2k-2} + K_{2k-1} N_{2k-1} < 1$, то система (1) має розв'язок $y_i = \bar{y}_i(x)$, що $\bar{y}_i(x) \in C$; $\bar{y}_i(x+T) = \bar{y}_i(x)$; $\bar{y}_i(\alpha-x) = -\bar{y}_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Доведення. Складаємо послідовності

$$y_{il}(x) = \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^x (x-t)^{2k-1} \delta_{il-1}(t) dt + 2k \left[\frac{A_1^{(1)}}{T} \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt \right] x^{2k-1} + (2k-1) \left[A_2^{(1)} \times \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt + \frac{A_2^{(2)}}{T} \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt \right] x^{2k-2} + \dots + \left[A_{2k}^{(1)} T^{2k-2} \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt + A_{2k}^{(2)} T^{2k-3} \times \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt + \dots + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T} \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots).$$

Тут $\delta_{il-1}(t) = t, t, y_{i0}(t), y_{i0}'(t), \dots, y_{i0}^{(2k-1)}(t), \dots, y_{i1}(t), y_{i1}'(t), \dots, y_{i1}^{(2k-1)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots$) і $y_{i0}(x)$ є довільні неперервні, періодичні (періоду T) функції, що $y_{i0}(\alpha-x) = -y_{i0}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Згідно з попереднім $y_{il}(x)$ є неперервні, періодичні (періоду T) функції, що $y_{il}(\alpha-x) = -y_{il}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots$).

Запишемо:

$$y_{il}'(x) = \frac{1}{(2k-2)!} \int_0^x (x-t)^{2k-2} \delta_{il-1}(t) dt + 2k(2k-1) \left[\frac{A_1^{(1)}}{T} \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt \right] x^{2k-2} + (2k-1)(2k-2) \left[A_2^{(1)} \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt + \frac{A_2^{(2)}}{T} \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt \right] x^{2k-3} + \dots + 2 \left[A_{2k-1}^{(1)} T^{2k-3} \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt + A_{2k-1}^{(2)} T^{2k-4} \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt + \dots + \frac{A_{2k-1}^{(2k-1)}}{T} \int_0^t \delta_{il-1}(t) dt \right];$$

$$y_{il}^{(2k-2)}(x) = \int_0^x (x-t) \delta_{i,l-1}(t) dt + \int_0^x \left[\frac{1}{T} tx + \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{2T} t^2 \right) \right] \delta_{i,l-1}(t) dt;$$

$$y_n^{(2k-2)}(x) = \int_0^x \delta_{i,l-1}(t) dt + \int_0^x \frac{1}{T} t \delta_{i,l-1}(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots).$$

Дістанемо:

$$|y_{i2} - y_{il}| \leq \max_{0 \leq r \leq l} \left(K_0^{(1)} |y_{i1} - y_{i0}| + K_1^{(1)} |y'_{i1} - y'_{i0}| + \dots + K_{2k-1}^{(1)} |y_{i1}^{(2k-1)} - y_{i0}^{(2k-1)}| + \dots + K_0^{(n)} |y_{nl} - y_{n0}| + K_1^{(n)} |y'_{nl} - y'_{n0}| + \dots + K_{2k-1}^{(n)} |y_{nl}^{(2k-1)} - y_{n0}^{(2k-1)}| \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Нехай

$$\max_{0 \leq r \leq l} \left(K_0^{(1)} |y_{i1} - y_{i0}| + K_1^{(1)} |y'_{i1} - y'_{i0}| + \dots + K_{2k}^{(1)} |y_{i1}^{(2k-1)} - y_{i0}^{(2k-1)}| + \dots + K_0^{(n)} |y_{nl} - y_{n0}| + K_1^{(n)} |y'_{nl} - y'_{n0}| + \dots + K_{2k-1}^{(n)} |y_{nl}^{(2k-1)} - y_{n0}^{(2k-1)}| \right) = M.$$

Тоді

$$|y_{i2} - y_{il}| \leq MN_0; |y'_{i2} - y'_{il}| \leq MN_1; \dots; |y_{i2}^{(2k-2)} - y_{il}^{(2k-2)}| \leq MN_{2k-2};$$

$$|y_{i2}^{(2k-1)} - y_{il}^{(2k-1)}| \leq MN_{2k-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Далі, отримаємо:

$$|y_{i3} - y_{i7}| \leq \left(K_0^{(1)} MN_0 + K_1^{(1)} MN_1 + \dots + K_{2k-2}^{(1)} MN_{2k-2} + K_{2k-1}^{(1)} MN_{2k-1} + \dots + K_0^{(n)} MN_0 + K_1^{(n)} MN_1 + \dots + K_{2k-2}^{(n)} MN_{2k-2} + K_{2k-1}^{(n)} MN_{2k-1} \right) N_0 = (K_0 N_0 + K_1 N_1 + \dots + K_{2k-2} N_{2k-2} + K_{2k-1} N_{2k-1}) MN_0 = MN_0 q; \quad |y'_{i3} - y'_{i7}| \leq MN_1 q; \dots;$$

$$|y_{i3}^{(2k-2)} - y_{i7}^{(2k-2)}| \leq MN_{2k-2} q; |y_{i3}^{(2k-1)} - y_{i7}^{(2k-1)}| \leq MN_{2k-1} q \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Припустимо, що

$$|y_{il+2} - y_{il}| \leq MN_0 q^{l-1}; |y'_{il+2} - y'_{il}| \leq MN_1 q^{l-1}; \dots; |y_{il+1}^{(2k-2)} - y_{il}^{(2k-2)}| \leq MN_{2k-2} q^{l-1};$$

$$|y_{il+1}^{(2k-1)} - y_{il}^{(2k-1)}| \leq MN_{2k-1} q^{l-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Тоді

$$|y_{il+2} - y_{il+1}| \leq \left(K_0 MN_0 q^{l-1} + K_1 MN_1 q^{l-1} + \dots + K_{2k-2} MN_{2k-2} q^{l-1} + K_{2k-1} \times \right. \\ \left. \times MN_{2k-1} q^{l-1} \right) N_0 = MN_0 q^l; \quad |y'_{il+2} - y'_{il+1}| \leq MN_1 q^l; \dots; |y_{il+1}^{(2k-2)} - y_{il+1}^{(2k-2)}| \leq MN_{2k-2} q^l;$$

$$|y_{il+1}^{(2k-1)} - y_{il+1}^{(2k-1)}| \leq MN_{2k-1} q^l \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Звідси, в силу методу математичної індукції, слідує, що ряди

$$|y_{i0}| + |y_{i1} - y_{i0}| + |y_{i2} - y_{i1}| + \dots + |y_{il+1} - y_{il}| + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

мажоруються геометричною прогресією з знаменником $q < 1$.

Значить, послідовності (2) збігаються рівномірно, тобто існують границі

$$\lim_{l \rightarrow \infty} y_{il}(x) = \overline{y}_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

де $\bar{y}_i(x)$ є неперервні, періодичні (періоду T) функції, що

$$\bar{y}_i(\alpha - x) = -\bar{y}_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Переходячи в послідовностях (2) до границі при $l \rightarrow \infty$, дістанемо:

$$\begin{aligned} \bar{y}_i(x) = & \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^x (x-t)^{2k-1} \delta_i(t) dt + 2k \left[\frac{A_1^{(1)}}{T} \int_0^T \delta_i(t) dt \right] x^{2k-1} + (2k-1) \left[\frac{A_2^{(1)}}{T} \int_0^T t \delta_i(t) dt + \right. \\ & \left. + \frac{A_2^{(2)}}{T} \int_0^T t^2 \delta_i(t) dt - \right] x^{2k-2} + \dots + \left[\frac{A_{2k}^{(1)}}{T} T^{2k-2} \int_0^T t \delta_i(t) dt + \frac{A_{2k}^{(2)}}{T} T^{2k-3} \int_0^T t^2 \delta_i(t) dt + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T} \int_0^T t^{2k} \delta_i(t) dt - \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

$$\text{де } \delta_i(t) = f_i \left(t, \bar{y}_1(t), \bar{y}'_1(t), \dots, \bar{y}_1^{(2k-1)}(t), \dots, \bar{y}_n(t), \bar{y}'_n(t), \dots, \bar{y}_n^{(2k-1)}(t) \right)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Отже, $y_i = \bar{y}_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) є розв'язок системи (1).

Теорема доведена.

Теорема 2. Якщо $q = K_0 N_0 + K_1 N_1 + \dots + K_{2k-2} N_{2k-2} + K_{2k-1} N_{2k-1} < 1$ і $y_i = \bar{y}_i(x), z_i = \bar{z}_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) є неперервні, періодичні (періоду T)

розв'язки системи (1), що $\int_0^T \bar{y}_i(x) dx = 0, \int_0^T \bar{z}_i(x) dx = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то

$$\bar{y}_i(x) \equiv \bar{z}_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Доведення. Згідно з попереднім, розв'язок $z_i = \bar{z}_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системи (1) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{z}_i(x) = & \frac{1}{(2k-1)!} \int_0^x (x-t)^{2k-1} \Delta_i(t) dt + 2k \left[\frac{A_1^{(1)}}{T} \int_0^T \Delta_i(t) dt \right] x^{2k-1} + \\ & + (2k-1) \left[\frac{A_2^{(1)}}{T} \int_0^T t \Delta_i(t) dt + \frac{A_2^{(2)}}{T} \int_0^T t^2 \Delta_i(t) dt \right] x^{2k-2} + \dots + \left[\frac{A_{2k}^{(1)}}{T} T^{2k-2} \int_0^T t \Delta_i(t) dt + \right. \\ & \left. + \frac{A_{2k}^{(2)}}{T} T^{2k-3} \int_0^T t^2 \Delta_i(t) dt + \dots + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T} \int_0^T t^{2k} \Delta_i(t) dt - \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

$$\text{де } \Delta_i(t) = f_i \left(t, \bar{z}_1(t), \bar{z}'_1(t), \dots, \bar{z}_1^{(2k-1)}(t), \dots, \bar{z}_n(t), \bar{z}'_n(t), \dots, \bar{z}_n^{(2k-1)}(t) \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Використовуючи позначення

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x < T} \left(K_0^{(1)} |y_{11} - \bar{z}_{11}| + K_1^{(1)} |y'_{11} - \bar{z}'_{11}| + \dots + K_{2k-1}^{(1)} |y_{11}^{(2k-1)} - \bar{z}_{11}^{-(2k-1)}| + \dots + \right. \\ \left. + K_0^{(n)} |y_{n1} - \bar{z}_{n1}| + K_1^{(n)} |y'_{n1} - \bar{z}'_{n1}| + \dots + K_{2k-1}^{(n)} |y_{n1}^{(2k-1)} - \bar{z}_{n1}^{-(2k-1)}| \right) = L, \end{aligned}$$

аналогічно вказаному вище, отримаємо:

$$|y_{ij} - z'| < LN_0 q^{l-2} \quad (i = 1, 2, \dots, n; l = 2, 3, \dots)$$

Оскільки $q < 1$, то $\lim_{l \rightarrow \infty} y_{ij}(x) = \bar{z}_i(x)$; $y_i(x) = \bar{z}_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Теорема доведена.

Література

1. Краснодембський А.М. ДАН УРСР / А.М.Краснодембский. – 10. – 1962.
2. Краснодембский А.М. Записки мех.-мат. ф-та ХГУ и Харьковского матем. Общества / А.М.Краснодембский. – 1964. – Т.XXX, сер.4.
3. Краснодембський А.М. Періодичність розв'язків системи двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку / А.М.Краснодембський // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – Івано-Франківськ, 2010. – №1(9). – С. 21-26.

Стаття надійшла до редакційної колегії 4.09.2013 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором Мойсишиним В.М.
д.ф.-м.н., доцентом Королем І.І. (м. Ужгород)*

PERIODICITY OF DECISIONS OF SOME SYSTEM A FEW NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS OF AN EVEN ORDER

A. M. Krasnodembsky

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua*

The terms of convergence of sequences which determine the upshots with the periodic components of some system of a few nonlinear differential equalizations of even order are set in the article.

Key words: *system of a few nonlinear differential equalizations of even order, terms of convergence, periodicity of decisions.*

УДК 621.3:539.6

**НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ
ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ (ОГЛЯД)****В. М. Сеничак¹, Р. Й. Ріпецький¹, Є. Й. Ріпецький¹,
В. В. Сеничак², В. Р. Ріпецький³**

¹Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@iung.edu.ua

²Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57

³Національний університет "Львівська політехніка"; м. Львів

Подасться стислий огляд найпоширеніших методів наближених обчислень, що використовуються при розв'язуванні крайових задач еліптичного типу, а також пропонується спрощений варіант методу скінченних елементів – спосіб обертання симплексу.

Ключові слова: чисельне моделювання, еліптичні рівняння, випадкові блукання, перехідна ймовірність, спосіб обертання симплексу.

Чисельне моделювання [78] складає невід'ємну частину сучасної фундаментальної і прикладної науки, причому за своєю важливістю воно наближається до традиційних експериментальних і теоретичних методів. Витісняючи аналітичні методи, обчислювальні експерименти дають змогу розв'язувати найскладніші задачі для непростих фізичних моделей.

У своїх виступах академік О.А. Самарський підкреслював, що обчислювальний експеримент – це єдиний засіб, який може перевести науку на інтенсивний шлях розвитку. Сучасна прикладна математика готова передати найновіші комп'ютерні технології на озброєння інженерам і конструкторам, фізикам і біологам, хімікам і медикам.

За останні роки методи праці інженерів, наукових працівників і викладачів змінились докорінно. Стрімке зменшення габаритів і зниження вартості сучасних ЕОМ з одночасним розширенням їх можливостей призвело до повсюдного використання комп'ютерів в різних галузях науки і техніки. Відчутно зросла роль ПЕОМ у процесі проектування. Широке розповсюдження отримали інтерактивні програми графічного подання інформації, що дає змогу компактніше описувати геометричні і фізичні властивості об'єктів у порівнянні з класичними методами [54]. Настійніше ставляться вимоги включення в арсенал інженерів розробників сучасних машинних методів обробки інформації. Питання "Як можна сформулювати дану задачу на комп'ютері?" змушує нас по-

новому подивитись на старі задачі і дає можливість розглянути нові [17].

Ефективні дослідження теплових і механічних процесів у машинобудуванні, суднобудівній промисловості, авіаційних, будівельних, гідротехнічних, трубопровідних та інших важливих інженерних спорудженнях і конструкціях все більше опираються на дискретні моделі механіки деформівного твердого тіла (МДТТ), математичною основою яких є рівняння еліптичного типу.

Типовою задачею для еліптичних рівнянь є перша крайова задача (задача Діріхле), а саме: на границі деякої скінченної області n -вимірного простору задається неперервна функція. Потрібно знайти деяку функцію, гармонійну всередині області і яка приймає задане значення на границі [49]. Однією із найважливіших властивостей розв'язків еліптичних рівнянь є їх гладкість.

Найпростішим представником еліптичних рівнянь є рівняння Лапласа (П'єр Сімон Лаплас – видатний французький вчений 18–19 століть), який застосував його у працях з теорії тяжіння. Зазначимо принагідно, що таке ж рівняння ще раніше було відоме Л.Ейлеру.

Рівняння Лапласа зустрічається у більшості розділів прикладної математики, теоретичної фізики і сучасної техніки. Цим рівнянням характеризується гравітаційний і електричний потенціали, потенціал швидкості безвихрового потоку нестисненої рідини, температура ізотропного середовища при усталеному русі тепла.

До еліптичних рівнянь відноситься також рівняння Пуассона, яке вперше (1812) запропонував і вивчив видатний французький вчений 18–19 століть Сімеон Дені Пуассон. Він застосував це рівняння для розв'язання задач з гравітації і електростатики, а також досліджував питання теплопровідності, магнетизму, капілярності, поширення звукових хвиль і балістики. У тривимірному просторі рівняння Пуассона задовольняє потенціал об'ємних мас, розподілених з відомою густиною, а також потенціал об'ємно розподілених електричних зарядів.

На превеликий жаль, їх аналітичний розв'язок вдається знайти тільки для геометрично тривіальних областей. Наприклад, в [49] приводиться розв'язування задачі Діріхле для крута будь-якого радіуса. Розв'язок рівняння Лапласа в полярних координатах шукається у вигляді добутку двох незалежних функцій. Розв'язком є відомий інтеграл Пуассона. Інший підхід до розв'язування задачі Діріхле для круга ґрунтується на використанні функції Гріна. Зокрема, для круга будь-якого радіуса функція Гріна будується в явному вигляді. В [68] задача Діріхле в області між двома неконцентричними колами розв'язується за допомогою конформного відображення. Проте, метод конформних відображень має обмежені можливості, оскільки його можна застосувати тільки до двовимірного рівняння Лапласа, а з невеликими змінами – і до рівняння Пуассона. Зокрема, задачу кручення стержня довільного однозв'язного

перерізу можна вважати повністю розв'язаною, коли визначене конформне відображення області на круг. Точний розв'язок рівняння Пуассона отримано, наприклад, в [1] для прямокутних областей методом відокремлення змінних.

Однак на практиці найчастіше доводиться мати справу з областями складної форми. Наприклад, прогнозування нафто- і газовидобутку, належить до найактуальніших завдань розробки родовищ. Першорядне значення для точності прогнозу має інформація про розподіл пластового тиску в усьому родовищі, про глибину залягання і потужність продуктивних пластів. Якщо в результаті пошуково-розвідувальних робіт визначена границя області залягання нафти і пластовий тиск на границі, то задача полягає у визначенні пластового тиску в будь-якій точці родовища. На границі області тиск звично визначається експериментальним способом, який дорого коштує, – шляхом буріння свердловин. Математично поле пластових тисків моделюється рівнянням Лапласа з граничними умовами Діріхле [76].

У цьому випадку класичні математичні методи не завжди можуть забезпечити практичне розв'язання складних інженерних задач. В інженерній практиці використовуються досить добре опрацьовані наближені методи. Це може бути метод скінчених різниць (МСР) зі спеціальним регульованим обчислювальним шаблоном для опису криволінійних границь, метод скінчених елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ), метод контрольних об'ємів (МКО) або широко розповсюджений алгоритм методу Монте-Карло, який вимагає суттєвих затрат машинного часу і наявності спеціальної апаратури для генерації випадкових кодів із заданим розподілом ймовірностей. Застосування чисельних методів дає змогу замінити складний, трудомісткий і дорогий фізичний експеримент більш економічним математичним (чисельним) експериментом. Отже, чисельні методи надзвичайно розширюють області ефективного використання математичних моделей фізичних явищ. В умовах загальної комп'ютеризації наукових досліджень головним об'єктом при розв'язуванні інженерних задач є не класичне диференціальне рівняння в частинних похідних, а його дискретний аналог.

Подамо короткий огляд найпоширеніших методів наближених обчислень, що використовуються при розв'язуванні вищезазначених задач.

В основі МСР лежить скінченно-різницева апроксимація похідних, яка здійснюється у три етапи [11, 56, 68]. Спочатку в області, що розглядається, вводять рівномірну сітку “вузлових точок” відповідно до характеру задачі і граничних умов. Потім рівняння з частинними похідними записують в найзручнішій системі координат i , подаючи похідні в скінченно-різницевій формі, зводять його до вигляду різницевого рівняння. Одержане різницеве рівняння записують для усіх вузлів сітки і отримують систему n алгебраїчних розв'язувальних рівнянь з n невідомо-

ними. На останньому етапі отриману систему розв'язують одним із чисельних методів.

Метод скінчених елементів (7, 10, 15, 18, 20, 23, 24, 25, 26, 32, 33, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 52, 55, 57, 61, 63, 66, 67, 77, 87, 83] є одним із сучасних потужних обчислювальних методів в галузі автоматизації процесів конструювання двовимірних і тривимірних виробів стосовно різних об'єктів машинобудування і електротехнічної промисловості [54]. Його основна ідея полягає в тому, що будь-яку неперервну величину (наприклад, температуру, тиск чи переміщення) можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на множині кусково-неперервних функцій, визначених на скінченому числі під областей. Ці підобласті називаються скінченими елементами, на які поділяється досліджувана область. Класифікація скінчених елементів може бути проведена у відповідності з порядком поліноміальних функцій цих елементів. Так, наприклад, для симплекса – найпростішого скінченого елемента у вигляді трикутника з трьома вузлами апроксимуюча функція є лінійний поліном з двома аргументами, який містить три коефіцієнти, що співпадає з кількістю вузлів (вершин) трикутника. Таким чином, в МСЕ апроксимація здійснюється на кожному скінченому елементі досліджуваної області. В результаті, як і в МСР, отримують систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих вузлових значень шуканої величини. Для цього використовують або варіаційні підходи або методи зважених нев'язок.

Слід нагадати, що в 1943 році німецький математик Ріхард Курант вперше запропонував розв'язувати задачу кручення пружного стержня довільного перерізу шляхом триангуляції досліджуваної області, побудови інтерполяційних поліномів на кожному трикутнику і зведення задачі до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (хоча ідея подання суцільного середовища у вигляді системи елементів скінчених розмірів була відома ще Пуассону [82]). Р. Курант отримав розв'язок за допомогою мінімізації потенціальної енергії кручення [24, 47].

У 1954 році Аргіріс і його співробітники почали публікації серії робіт, в яких розвинули деякі узагальнення лінійної теорії конструкцій. Вони подали методи дослідження дискретних конструкцій складних конфігурацій у формі, зручній для використання ЕОМ. Перший формальний виклад МСЕ разом з методом жорсткості для сукупності елементів належить Тернеру, Клафу, Мартіну і Тонну (1956 р.), котрі при дослідженні задач плоского напруженого стану використали для опису властивостей трикутного елемента рівняння класичної теорії пружності. Таким чином, рівняння Пуассона з нульовими граничними умовами відіграло видатну роль в історії розвитку найпопулярнішого сьогодні чисельного методу – методу скінчених елементів. З появою ЕОМ метод, запропонований Курантом, став бурхливо розвиватися. А в 60-их роках американські вчені дали цьому методу його теперішню назву.

Чисельні методи, що використовуються для розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних, можна поділити на дві основні групи [16]. В одній з них використовується апроксимація в області (МСП, МСЕ), в іншій – апроксимація функцій на границі області (МГЕ, МКО). Перша група методів дуже популярна і широко застосовується для моделювання у техніці. Методи другої групи, область застосування яких у певній мірі обмежена, в останні роки довели свою високу ефективність і привернули увагу багатьох спеціалістів, що займаються питаннями моделювання.

Метод граничних елементів або метод граничних інтегральних рівнянь [5] з'явився останнім часом поруч з методом скінчених елементів. МГЕ поєднав метод інтегральних рівнянь з методом скінчених елементів. Таким чином, він містить в собі і аналітичний метод, і чисельний розрахунок. Границя досліджуваної області подається у вигляді скінчених елементів, а поведінка внутрішньої області описується граничними інтегральними рівняннями.

Вперше цей підхід був застосований до розв'язування задачі кручення за допомогою прямих методів теорії потенціалу [79]. Пізніше він був розповсюджений на просторові задачі. В МГЕ, на відміну від МСЕ, дискретизації підлягає тільки поверхня пружного тіла. Завдяки цьому отримується суттєво менша кількість вузлових точок і невідомих, які потрібно визначити, ніж в сітці з скінчених елементів. Достоїнством МГЕ є те, що апроксимація і розв'язки будуються тільки для поверхневих величин, тому просторова задача зводиться до розгляду поверхні, тобто розмірність задачі зменшується на одиницю. МГЕ особливо ефективний для видовжених областей і тіл, коли МСЕ несефективний із-за неможливості з необхідною точністю описати поведінку моделі при її дискретизації. Суттєвим обмеженням методу граничних елементів є те, що він придатний тільки для розв'язування лінійних задач. Хоча система алгебраїчних рівнянь в МГЕ суттєво менша, ніж в аналогічних задачах, що розв'язуються за допомогою МСЕ, матриця коефіцієнтів системи є повною і несиметричною. В підсумку можна сказати, що як МСЕ, так і МГЕ належать до найефективніших наближених чисельних методів, що використовуються при розв'язуванні задач, які моделюються рівняннями Лапласа або Пуассона. Однак обидва методи вимагають наявності високопродуктивних ЕОМ. Метод контрольних об'ємів (МКО) з'явився зовсім недавно і найбільшого поширення отримав в задачах теплообміну і динаміки рідини [48]. Творці МКО Б. Сполдінг і С. Патаккар вважають, що МСП і МСЕ можна розглядати як дві альтернативні версії МКО. Відмінність між ними обумовлено способом вибору профілів шуканої функції і виводу дискретних аналогів рівняння. В МСЕ за наближений розв'язок береться передбачувана зміна функції, що складається з вузлових значень і інтерполяційних функцій між ними. В МСП, як розв'язок, розглядають тільки вузлові значення функції і не ро-

битися жодних явних вказівок про характер зміни функції між вузлами. В МКО використовується саме цей підхід і розв'язок шукається у вигляді набору вузлових значень. Інтерполяційні формули відіграють допоміжну роль, вони необхідні для обчислення інтегралів. Після побудови дискретного аналогу припущення про характер профілів можна не враховувати. Така точка зору дає повну свободу у використанні різних профілів для інтегрування різних членів диференціального рівняння. Основна ідея МКО проста [48, 29, 30] і піддається прямій фізичній інтерпретації. Розрахункову область поділяють на деяке число непересічних контрольних об'ємів (КО) таким чином, щоб кожна вузлова точка містилась в одному КО. Звична процедура побудови дискретного аналогу передбачає інтегрування диференціального рівняння по кожному об'єму. Для обчислення інтегралів використовуються кускові профілі, які описують зміну досліджуваної функції між вузловими точками. В результаті дискретний аналог рівняння, що містить вузлові значення досліджуваної функції, виражає закон збереження функції для скінченного КО так само, як диференціальне рівняння виражає закон збереження для нескінченно малого КО. Однією з важливих властивостей МКО є те, що в ньому закладений точний інтегральний закон збереження балансу на будь-якій групі КО. Ця властивість проявляється при довільному числі вузлів, що дає змогу отримувати досить точні розв'язки навіть на крупній сітці [30].

Чисельний метод розв'язування математичних задач за допомогою статистичного моделювання – метод Монте-Карло, з'явився у 1949 році, коли американські математики Дж. Нейман і С. Улам опублікували статтю під назвою “The Monte Carlo method” [80]. Перші статті в колишньому СРСР про метод Монте-Карло були опубліковані В. В. Чавчанідзе, Ю. А. Шрейдером і В. С. Владимировим через сім років.

Цікаво, що теоретична основа методу була відома давно [64]. Більш того, розрахунки деяких задач статистики проводились деколи з допомогою випадкових вибірок, тобто, фактично методом Монте-Карло. Однак, до появи електронно-обчислювальних машин цей метод не міг знайти широкого застосування, оскільки моделювати випадкові величини – дуже трудомістка робота. Таким чином, виникнення методу Монте-Карло, як універсального чисельного методу, стало можливим тільки завдяки появі ЕОМ. Початковий оптимізм у застосуванні методу через деякий час поступився місцем в такій же мірі необґрунтованому песимізму. Справа в тому, що класичний варіант методу Монте-Карло ефективний тільки при реалізації на швидкодіючих ЕОМ, оскільки він вимагає великої кількості статистичних спроб, які зменшують середню квадратичну похибку результату. Однак, незважаючи на труднощі застосування методу на ЕОМ середнього класу, а можливо, і завдяки їм, теорію методу вдалось вдосконалити, що суттєво підвищило ефективність методу при розв'язанні широкого кола задач науки і техніки [4, 6,

12, 19, 21, 51, 53, 62, 64, 69]. В наш час ЕОМ нового покоління створили необхідну базу для активного застосування методу Монте-Карло в інженерних розрахунках. Слід також зауважити, що на практиці метод Монте-Карло застосовують у випадках, коли не вимагається велика точність результату, оскільки в протилежному випадку доводиться проводити надто велику серію випробувань, що іноді практично нездійснено. Відомо [13], що для збільшення точності у 10 разів, тобто отримати ще один правильний знак у результаті, треба збільшити кількість випробувань приблизно в 100 разів. Зрозуміло, що великої точності в такому випадку досягти нелегко навіть з використанням сучасної обчислювальної техніки. Однак багато практично важливих задач з достатньою точністю можна розв'язувати за допомогою методу статистичних випробувань. Стверджують, що метод Монте-Карло особливо ефективний при розв'язуванні тих задач, в яких результат потрібний з невеликою точністю (5-10%) [64]. Метод Монте-Карло дає змогу моделювати будь-який процес, на перебіг якого впливають випадкові фактори. Для багатьох математичних задач, не пов'язаних з якими-небудь випадковостями, можна придумати імовірнісну модель (і навіть не одну), що дає змогу розв'язувати ці задачі [64]. Особливо цікаво, що в деяких випадках вигідно відмовитись від моделювання істинного процесу і замість цього розглядати штучну модель. Таким чином, можна говорити про метод Монте-Карло, як про універсальний метод розв'язування математичних задач.

Вважається, що найпростіший алгоритм розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа дає метод Монте-Карло [21], що ґрунтується на принципах випадкових блукань по вузлах цілочисельної решітки. Дійсно, обчислювальна процедура методу Монте-Карло дуже проста, але рандомізація обчислень вимагає достатньо продуктивної ЕОМ, обладнаної, до того ж, спеціальним пристроєм для генерування випадкових кодів. Як бачимо, розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа і Пуассона традиційними формами дискретних методів вимагає великих затрат часу та використання високопродуктивних ЕОМ. Хоча, взагалі кажучи, характерною рисою багатьох людей, які щойно освоїли роботу на ЕОМ і вражених її потужністю, є прагнення отримати, як можна більше, числових результатів керуючись наївним принципом: "чим більше інформації, тим більше користі". Здебільшого ці люди виявляються потім приголомшеними морем цифр, причому проблема здобування корисного висновку з цього моря може стати складнішою, ніж початкова задача [3].

В наш час комп'ютеризація наукових досліджень, проектних і конструкторських робіт здійснюється шляхом широкого використання персональних ЕОМ в системах автоматизованого проектування (САПР). У зв'язку з цим виникла актуальна проблема пониження розмірності задач і прискорення обчислень. Одним із шляхів впровадження прогреси-

вних інформаційних технологій є перехід до простіших моделей і економічніших розрахункових схем. Нові прийоми прискорених обчислень, що здатні цілеспрямовано і швидко корегувати параметри об'єкта на стадії проектування, можуть суттєво скоротити строки і вартість розробок. Тому особливої актуальності тепер набувають питання побудови спрощених моделей і розробки швидких методів обчислень.

Питання вивчення дискретних моделей нетрадиційними засобами і розробка нових способів розв'язування крайових задач особливо актуальні в попередніх, проектувальних розрахунках, коли цілком можна обійтись без складних деталізованих моделей. Образцов І. Ф., наприклад, вважає, що пониження розмірності задачі можна добитися не тільки за рахунок редукації математичних операцій, але й за рахунок побудови простіших моделей, особливо в тих випадках, коли це допускається міркуванням точності. На користь простих моделей рішуче виступає В. В. Новожилов, вважаючи, що прості моделі корисні навіть тоді, коли вони не забезпечують необхідну точність. Він пише [45], що розвиток швидкодіючих обчислювальних машин аж ніяк не повинен послаблювати інтерес до пошуку простих ("примітивних") моделей, що тільки після попереднього грубого наближеного розв'язку задачі має зміст виконання її на ЕОМ. Він вважає також, що попередній аналіз задач важливий ще й тим, що дає змогу отримати наближену оцінку результатів. А це рівнозначно значній економії машинного часу. Справа в тому, що більшість алгоритмів будуються за принципом послідовних наближень. Швидкість збіжності такого процесу, як відомо, суттєво залежить від того, наскільки вдало вибране перше наближення. У цьому відношенні ми також є прихильниками простих моделей. Однак, побудова простої моделі є зовсім не простою справою.

Пізніше з'явилось стільки різновидів скінчених методів, що була зроблена спроба створити єдину теорію цих методів. Наприклад, Зенкевич О. і Морган К. запропонували ввести "узагальнений МСЕ", який охоплює всі можливі варіанти дискретних апроксимацій [25]. В докторській дисертації А. Н. Хомченка [72] та кандидатській дисертації Л. І. Камасової [28] показано, що така єдиність може бути досягнута за рахунок імовірнісного трактування дискретних аналогів в термінах випадкових блукань.

Історично задача про випадкові блукання була поставлена як ігрова "Задача розорення гравця". Більшість математиків минулого (Муавр, Лаплас, Лагранж, Пойа та інші) займались дослідженням цієї задачі [2, 9]. Однак, суттєвого розвитку ці дослідження досягли у зв'язку з вивченням броунівського руху, відкритого Броуном у 1827 році. З'явилися спроби математично моделювати цей рух [15]. Вперше молекулярно-статистичне його тлумачення було подано лише в 1905 і в 1906 роках А. Ейнштейном і М. Смолуховським. А в 1914 році Планком і Фоккером була розглянута задача про випадкові блукання частинки по вузлах

прямої (одновимірної моделі), в результаті чого вперше було виявлено зв'язок між імовірністю в схемі блукання, скінченно-різницевою відношенні і умовами переходу скінченно-різницевого рівняння у диференціальне. В 1931 році Колмогоров А. Н. отримав нові результати в цьому напрямі.

У міру розвитку математичного апарату теорії ймовірностей її результати стали використовуватись в теорії диференціальних рівнянь. У 1934 році Петровським І. Г. була встановлена можливість застосування випадкових блукань по решітці для розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних. А в 1940 році Курант Р., Фрідрікс К. і Леві Г. узагальнили результати Петровського І. Г. на широкий клас задач математичної фізики [35]. Питання, пов'язані з випадковими блуканнями, з різним ступенем загальності висвітлювались в книгах таких відомих математиків, як Вінер І., Гнеденко Б. В., Хінчин А. Я., Феллер В., Гіхман І. І., Скороход А. В., Королюк В. С. та інших [12, 13, 14, 69].

Вивчення броунівського руху засобами теорії ймовірностей продовжується і в наш час. Значні результати в цьому напрямі отримали Золотарьов В. М., Ватанабе С, Ікеда Н., Хіда Т. та інші [8, 27, 71]. Дослідження цих вчених відкрили принципову можливість рандомізації обчислень з допомогою процедури блукань по вузлах цілочисельної решітки стосовно до диференціальних рівнянь за допомогою скінченно-різницевого аналогів [22], а запропонований у 1949 році Нейманом і Уламом метод Монте-Карло поклав початок практичного застосування статистичних випробувань в інженерних розрахунках [4, 6, 19, 64]. Поява цього методу, а також перших ЕОМ, відіграла велику роль в реалізації простих імовірнісних схем для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь через скінченно-різницеві аналоги.

В останні роки з'явилися і стали використовуватись нові (доволі складні) моделі випадкових блукань, котрі вимагають найдосконалішого математичного апарату. Проте, прості схеми випадкових блукань ще не вичерпали своїх пізнавальних і обчислювальних можливостей. На наш погляд, схема блукань по вузлах цілочисельної решітки (схема Бернуллі) найкраще підходить для практичних розрахунків завдяки своїй простоті і універсальності. Можна показати, що вона піддається вдосконаленню і легко охоплює інші скінченні методи [73].

Імовірнісні уявлення, що містяться в основі випадкових блукань, допомагають розвинути новий підхід до теорії скінчених методів. Цікаво відзначити, що історія розвитку науки супроводжувалась неухильним зростанням ролі імовірнісних уявлень, котрі вносять узагальнення, порядок і простоту в ті питання, де традиційний детерміністичний підхід є безсилим [14]. Теорія ймовірності, як відомо, має рідкісну властивість формувати нову мову, стиль і вигляд наукового дослідження. Запровадження у теорію скінчених елементів нових понять, зокрема, блукаючої частинки, випадкового маршруту, середньої винагороди та ін-

ших, дає змогу не тільки описати відомі факти та суттєво спростити значну кількість обчислювальних процедур, але й отримати нові результати. В дисертаціях Камасвої Л. І. і Хомченка А. Н. [28, 72] була розвинута ймовірно-статистична версія МСЕ на основі встановленого зв'язку між принципами випадкових блукань і скінченно-елементними апроксимаціями. Не ускладнюючи модель випадкових блукань по решітці, а вдосконаливши її, був здійснений природний перехід від дискретної схеми до неперервної. В ланцюжку, що з'єднує перехідну ймовірність, скінченно-різницевий аналог і диференціальні рівняння замінили середню ланку на скінченно-елементний аналог. Відомо, що скінченно-елементна апроксимація досконаліша, тому скінченно-елементний аналог краще справиться зі своєю роллю, ніж скінченно-різницевий. При цьому виникає питання: чи порушаться зв'язки між ланками нового ланцюжка? Зв'язок між МСЕ і диференціальним рівнянням відомий давно. Тепер МСЕ є універсальним методом розв'язування диференціальних рівнянь [37, 43, 65]. Що ж стосується зв'язку скінченного елемента з перехідною ймовірністю у схемі випадкових блукань, то до недавнього часу про не в літературі не згадувалось. Можливо дослідники, які знали про ймовірнісну інтерпретацію скінченно-елементних апроксимацій, не бачили передумов для обговорення і розвитку цього напрямку, хоча встановлення саме такого зв'язку дає змогу залучити в теорію скінчених методів нові поняття, формули і теореми ймовірно-статистичної теорії.

Удосконалення правил випадкових блукань дає можливість здійснити коректний перехід від блукань по вузлах цілочисельної решітки (дискретна схема) до блукань по області скінченного елемента (неперервна схема). Нові правила полягають в тому, що частинка починає блукання з будь-якої точки елемента і переходить у вузол з ймовірністю, яка залежить від положення старту частинки. В ролі перехідних ймовірностей виступають базисні функції, а скінченно-елементна апроксимація набуває форми середньої винагороди за вихід блукаючої частинки у вузол. Таке трактування випадкових блукань дає цілий ряд переваг в порівнянні з традиційними підходами. Наприклад, з'являється можливість прямої побудови базису скінченного елемента на основі геометричної ймовірності [75]. При знаходженні середньої винагороди вдасться отримати точні значення ймовірностей переходу, виключивши необхідність моделювання довгих серій статистичних випробувань. Це значно зменшує об'єм обчислювальної роботи і дає змогу обійтись без спеціальної апаратури для генерування випадкових кодів. Основна перевага полягає в тому, що для чисельного розв'язання крайової задачі не вимагається нанесення сітки на розрахункову область. Граничні задачі в областях складної форми можна розв'язувати способом обертання симплексу (СОС), який поєднує в собі основні переваги МСЕ, МГЕ і плідні ідеї методу Монте-Карло. Запропонований спосіб – найефективніший при

розв'язуванні задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Він добре узгоджується з властивостями, які має лапласіан: властивість усереднення, ефект згладжування на границі [68]. Тут працює теорема про середнє гармонійної функції, яка в математиці відома давно [34, 49], але в механіці широкого застосування не знаходила.

Особливість запропонованого способу полягає в тому, що ми використовуємо лише один симплекс-елемент [28, 31, 36, 58, 59, 60, 72] з вершинами на границі області. При цьому передбачена можливість повертати його і розглядати серію “стоп-кадрів”. Оскільки при повороті симплексу вузли змінюються, то відбувається накопичення граничної інформації в досліджуваній точці, а значення шуканої величини (розв'язок рівняння Лапласа) визначається як середнє арифметичне значень, отриманих для кожного положення симплексу. Слід зауважити, що кількість вузлів і їх розміщення залежить від потрібної точності і швидкості зміни функції на границі. При необхідності можна фіксувати один або два вузли, змінюючи розміщення тих, що залишилися. Спосіб обертання симплексу настільки простий, що легко піддається алгоритмізації. При цьому достатньо ресурсів мікрокалькулятора. СОС можна легко застосувати і до просторових задач (обертання тетраедра).

Для апробації СОС була розв'язана серія модельних задач. Розглянуті стаціонарні температурні задачі, в тому числі з джерелом [43, 74, 78], які описуються як рівнянням Лапласа з граничними умовами Діріхле, так і рівнянням Пуассона з нульовими умовами на границі. Температурні задачі приваблювали дослідників на протязі тривалого часу. Найвагоміші результати в цьому напрямі отримали вчені Балабух Л.І., Болотін В.В., Бурак Я.І., Григолюк Є.І., Коваленко А.Д., Коляно Ю.М., Крисько В.А., Ликов А.В., Малкін Я.Ф., Мотовиловець І.А., Піскунов В.Г., Підстригач Я.С., Титаренко А.П., Уздалєв А.І., Шабров Н.Н., Швець Р.Н., Мелан, Паркус, Патанкар, Снеддон, Сполдінг, Флетчер та інші. Наші дослідження показали, що запропонований підхід, який використовує зважене усереднення граничних вузлових значень, є ефективний, простий і доволі точний [58, 59, 60]. Крім вказаних вище достоїнств, СОС не потребує складання і розв'язування великих систем рівнянь, що є необхідним при використанні традиційних скінчених методів.

СОС можна застосовувати ефективніше, якщо для вибору розрахункових точок на границі досліджуваної області використовується гіпотеза дифузійної плями [74], яка дає змогу вказати на границі області зони найімовірнішого поглинання блукаючих частинок. Крім того, гіпотеза дифузійної плями дає можливість вибрати на границі мінімум розрахункових точок, які забезпечують найдостовірніший результат. За допомогою гіпотези дифузійної плями вдається будувати також інтервальні оцінки для шуканого розв'язку.

СОС особливо зручно використовувати в тих випадках, коли досліджується температурне поле не у цілій області, а лише в деякій її частині або в окремо взятій точці. Тоді традиційні підходи виявляються недоцільними, оскільки виконується багато зайвої роботи.

Велика увага в даній роботі приділяється питанням автоматизації розв'язання задач кручення призматичних стержнів довільного перерізу. Ці задачі складають дуже важливий розділ будівельної механіки. Теорія кручення стержнів некруглого перерізу має довгу і яскраву історію [1, 50, 70]. Багато видатних вчених займалися цим питанням. Найістотніший вклад внесли Абромян Б.Л., Арутюнян Н.Х., Бідерман В.Л., Бичков Д.В., Власов В.Г., Джанелідзе Г.Ю., Винник А.Н., Малінін Н.Н., Новожилов В.В., Пановко Я.Г., Папковим В.Ф., Тимошенко С.П., Феодосьєв В.І., Буссінеск. Вебер, Грінхіль, Гріффіц, Прандтль, Прескот, Фепіль, Шміден та інші.

Як відомо, задача кручення призматичного стержня за допомогою функції напружень Прандтля зводиться до розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона з нульовими граничними умовами на контурі. Така постановка задачі дає можливість використати для знаходження функції Прандтля спрощені обчислювальні схеми. Ми розв'язали ряд модельних задач з застосуванням програми розв'язування рівняння Пуассона в довільній області методом прискорених статистичних випробувань [58, 60]. Отримані результати підтвердили ефективність цього методу, а особливо в тих випадках, коли стержень має складну форму перерізу.

Відома мембранна аналогія, встановлена Людвігом Прандтлем у 1904 році, з точки зору теорії випадкових блукань набуває тепер дифузійного тлумачення. Такий підхід допоміг уточнити характер поверхні Прандтля ("горб напружень" [1]) і отримати наближену формулу для жорсткості скручуваного стержня [31, 58]. Ця формула добре зарекомендувала себе в роботі. Вона надзвичайно проста і в той же час дає високу точність. Знаючи форму поверхні Прандтля, а також враховуючи той факт, що дотичні напруження пропорційні крутизні поверхні, для визначення дотичних напружень у будь-якій точці використовується геометричний підхід (спосіб перетинів).

У тому випадку, коли область перетину стержня має якісь особливості, наприклад, вхідні кути, "перешийки" і т.п., наш підхід, зрештою, як і традиційний, зазнає деяких труднощів. Для отримання най достовірніших результатів потрібно брати більше розрахункових точок на межі досліджуваної області, що "породжує" більшу кількість "стоп-кадрів". Можна також розглядати комбінацію різних способів поблизу тих точок, де є особливості.

Підсумовуючи сказане, зазначимо, що імовірнісні аспекти вносять вагомий вклад у розвиток та застосування скінчених методів, збагачують їх і відкривають перспективу. Зокрема, Хомченком А. Н. розвинуто

імовірнісну концепцію скінчених методів на прикладі МСЕ, знайдено нові інтерпретації основних процедур, сформовано новий стиль викладу на основі ігрової термінології та розроблено принципово новий метод прискорених статистичних випробувань (типу методів Монте-Карло) для оперативного розв'язання. Крайових задач механіки деформівного твердого тіла в областях складної форми – спосіб обертання симплексу. А створення математичного та програмного забезпечення з метою комп'ютерної реалізації цих задач дає змогу ефективного використання СОС при здійсненні конкретного процесу проектування. Крім того, простота і універсальність таких програм роблять їх доступними для широкого кола користувачів.

Література

1. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х.Арутюнян, Б.Л.Абрамян. – М.: Физ-матгиз, 1963. – 686 с.
2. Баранкевич М.М. Методы и модели случайных процессов / М.М.Баранкевич. – Львов, 1986. – 185 с.
3. Блехман И.И. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов / И.И.Блехман, А.Д.Мышкис, А.Г.Пановко. – Киев: Наукова думка, 1976. – 272 с.
4. Браун Дж.В. Методы Монте-Карло / Дж.В.Браун; Под ред. Э.Ф. Беккенба-ха // Современная математика для инженеров. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – С. 275-304.
5. Бреббиа К. Применение метода граничных элементов в технике / К.Бреббиа, С.Уокер. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
6. Бусленко П.П. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) / П.П.Бусленко, Д.И.Голенко. – М.: Физматгиз, 1962. – 242 с.
7. Метод конечных элементов / П.М.Варвак, И.М.Бузун, А.С.Городецкий, В.Г.Пискунов, Ю.Н.Толокнов. – К.: Вища школа, 1981. – 176 с.
8. Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С.Ватанабэ, М.Икэда. – М.: Наука, 1986. – 230 с.
9. Ворошко П.П. Применение метода случайных блужданий для решения задач теории упругости / П.П.Ворошко, А.Л.Квитка, А.С.Цыбенко // Проблемы прочности. – 1973. – №4. – С. 53-57.
10. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р.Галлагер. – М.: Мир, 1984 – 428 с.
11. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей / А.О.Гельфонд. – М.: Наука, 1967. – 340 с.
12. Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И.Гихман, А.В.Скороход, М.И.Ядренко. – К.: Вища школа, 1979. – 408 с.
13. Гнеденко Б.В. Из истории науки о случайном / Б.В.Гнеденко. – М.: Знание, 1981. – 64 с.

14. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В.Гнеденко. – М.: Наука, 1971. – 340 с.
15. Грин Б.Е. Обобщенные вариационные принципы в методе конечных элементов / Б.Е.Грин // Ракетная техника и космонавтика. – 1967. – №7. – С. 100-103.
16. Громадка Т. Комплексный метод граничных элементов / Т.Громадка, Ч.Лей. – М.: Мир, 1990. – 303 с.
17. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Ч.2 / Х.Гулд, Я.Тобочник; Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 400 с.
18. Деклу Ж. Метод конечных элементов / Ж.Деклу. – М.: Мир, 1976. – 95 с.
19. Елепов Б.С. Решение краевых задач методом Монте-Карло / Б.С.Елепов, А.Л.Кронберг, Г.Л.Михайлов. – Новосибирск: Наука, 1980. – 174 с.
20. Ержанов Ж.С., Керимбаев Т.Д. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород / Ж.С.Ержанов, Т.Д.Керимбаев. – Алма-Ата: Наука, 1975. – 312 с.
21. Ермаков С.М. Статистическое моделирование / С.М.Ермаков, Г.Л.Михайлов. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
22. Ермаков С.М. Методы моделирования дискретных случайных величин, основанные на рандомизации параметров распределений / С.М.Ермаков, Б.Б.Походзей // ЖВМ и МФ. – 1981. – Т.21, №5. – С. 1323-1326.
23. Ершов Н.Ф. Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости / Н.Ф.Ершов, Г.Г.Шахверди. – Л.: Судостроение, 1984.
24. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов: от интуиции к общности / О.К.Зенкевич // Новое в зарубежной науке. Механика. – М.: Мир, 1970. – №6. – С. 90-103.
25. Зенкевич О.К. Конечные элементы и аппроксимация / О.К.Зенкевич, К.Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
26. Зенкевич О.К., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред / О.К.Зенкевич, И.Чанг. – М.: Недра, 1974. – 238 с.
27. Золотарев В.М. Закон больших чисел / В.М.Золотарев. – М.: Знание, 1987. – 48 с.
28. Камаева Л.И. Дискретные модели и вероятностные методы в задачах строительной механики / Л.И.Камаева // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Саратов: Саратов. политехн. ин-т, 1990. – 190 с.
29. Камасва Л.І. Дискретні методи в задачах нафтової і газової промисловості / Л.І.Камасва, В.М.Сеничак, А.Н.Хомченко. – Івано-Франківськ, 1993. – 8 с. Ден. в ДНТБ України 14.06.93., № 1143-Ук93.

30. Камаєва Л.І. Метод контрольних об'ємів для чисельного дослідження теплових полів підземних трубопроводів / Л.І.Камаєва, В.М.Сеничак, А.Н.Хомченко // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – Івано-Франківськ, 1993. – Вип. 30. – С. 135-139.
31. Камаєва Л.І. Розробка програмного забезпечення побудови інтервальних оцінок крутильної жорсткості для перетинів довільної форми / Л.І.Камаєва, В.М.Сеничак, А.Н.Хомченко. – Івано-Франківськ, 1994. – 13 с. – Деп. в ДНТБ України 21.06.94., N 1235-Ук94.
32. Колмогоров А.Н. Введение в теорию вероятностей / А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров. – М.: Наука, 1982. – 160 с.
33. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж.Коннор, К.Бреббиа. – Л.: Судостроение, 1979. – 164 с.
34. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Р.Курант. – М.: Наука, 1970. – 672 с.
35. Курант Р. О разностных уравнениях математической физики / Р.Курант, К.Фридрикс, Г.Леви // Успехи матем. наук. – 1940. – Вып. 8. – С. 125-160.
36. Лурье И.Л. Диагностика температурного поля в неконцентрическом кольце / И.Л.Лурье // Математ. моделирование: Сб. науч. тр. – К.: Ин-т математики НАНУ, 1966. – С. 160-162.
37. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И.Марчук, В.И.Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
38. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А.С.Городецкий, В.И.Зоворицкий, А.И.Лантух-Лященко, А.О.Расказов. – М.: Транспорт, 1981. – 143 с.
39. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А.С.Сахарова, И.Альтенбаха. — К.: Вища школа, 1982.
40. Метод конечных элементов в строительной механике и механике сплошных сред: Рефер. обзор заруб. лит-ры за период 1966-1970 г.г. / Сост. Баркова М.А. – Л.: Изд-во ВНИИГ, 1971.
41. Метод конечных элементов в строительной механике твердого деформируемого тела: Аннотир. библиогр. указатель отечественной лит-ры за период 1970-1976 г.г. / Сост. Докшина Г.Л., Салов П.Н. – Л.: Изд-во ВНИИГ, 1977.
42. Метод конечных элементов в строительной механике. – Горький: Изд-во ГГУ, 1975.
43. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э.Митчелл, Р.Уэйт. — М.: Мир, 1981. – 216 с.
44. Молчанов И.Н. Основы метода конечных элементов / И.Н.Молчанов, Л.Д.Николенко. – К.: Наукова думка, 1989. – 272 с.
45. Новожилов В.В. Вопросы механики сплошной среды / В.В.Новожилов. – Л.: Судостроение, 1989. – 400 с.
46. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д.Норри, Ж. де Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

47. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж.Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
48. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С.Патанкар. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
49. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г.Петровский. – М.: Изд-во технико-теоретической лит-ры, 1961. – 304 с.
50. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник машиностроителя: В 3 т. / Под ред. Биргера И.А., Пановко Я.Г. – М.: Машиностроение, 1968. – Т.1. – 832 с.
51. Розанов Ю.А. Случайные процессы / Ю.А.Розанов. – М.: Наука, 1979. – 184 с.
52. Розин Л.Л. Современное состояние метода конечных элементов в строительной механике / Л.Л.Розин // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1981. – №11. – С. 41-54.
53. Сабельфельд К.К. Методы Монте-Карло в краевых задачах / К.К.Сабельфельд. – Новосибирск: Наука, 1989. – 280 с.
54. Сабоннадьер Ж.-К. Метод конечных элементов и САИР / Ж.-К.Сабоннадьер, Ж.-Л.Кулон; Пер. с франц. – М.: Мир, 1989. – 190 с.
55. Савула Я.Г. Некоторые приложения метода конечных элементов / Я.Г.Савула, Г.Л.Шинкаренко, В.И.Вовк. – Львов: Изд-во ЛГУ, 1981. – 88 с.
56. Самарский А.Л. Теория разностных схем / А.Л.Самарский. – М.: Наука, 1977.
57. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л.Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
58. Сеничак В.М. Программа решения уравнения Пуассона в произвольной области методом ускоренных статистических испытаний / В.М.Сеничак, А.Н.Хомченко // Фонд алгоритмов и программ ИПС АН Украины. – Киев, июнь 1993. – Инв. N П6412.
59. Сеничак В.М. Комп'ютерна Діагностика температурних полів в областях складної форми. Математическое моделирование / В.М.Сеничак // Сб. науч. тр. НАН Украины. Ин-т математики. – Киев, 1996. – С. 209-212.
60. Сеничак В.М. Комп'ютерне розв'язування задач, математичною основою яких є рівняння Лапласа або Пуассона / В.М.Сеничак, Б.О.Чернов, Т.Г.Ла-вишокова // Методи та прилади контролю якості. – 2001. – №7. – С. 71-74.
61. Сильвестер П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П.Сильвестер, Р.Феррари. – М.: Мир, 1986.
62. Синай Я.Г. Случайность неслучайного / Я.Г.Синай // Природа. – 1981. – №3. – С. 72-80.
63. Сеницын А.И. Метод конечных элементов в динамике сооружений / А.И.Сеницын. – М.: Стройиздат, 1978.

64. Соболев И.М. Метод Монте-Карло / И.М.Соболев. – М.: Наука, 1985. – 80 с.
65. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г.Стренг, Дж.Фикс. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
66. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф.Сьярле Ф. – М.: Мир, 1980. – 396 с.
67. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике / А.Б.Фадеев. – М.: Недра, 1987.
68. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С.Фарлоу. – М.: Мир, 1985. – 324 с.
69. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение. В 2 т / В.Феллер. – М.: Мир, 1964. – Т.1. – 500 с, 1967. – Т.2. – 752 с.
70. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. В 3 т / А.П.Филин. – М.: Наука, 1978. – Т.2. – 616 с.
71. Хида Т. Броуновское движение / Т.Хида. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
72. Хомченко А.Н. Развитие и применение вероятностного моделирования в дискретных методах вычислительной математики: Дисс. ... докт. техн. наук. – Ивано-Франковск: ИФГТУНГ, 1991.
73. Хомченко А.Н. Непрерывный аналог блужданий броуновской частицы / А.Н.Хомченко, Л.И.Камаева. – Ивано-Франковск, 1989. – 9 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 04.04.89. № 990.
74. Хомченко А.Н. Численный анализ задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях сложной формы / А.Н.Хомченко, Л.И.Камаева. – Ивано-Франковск, 1989. – 8 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 14.11.89. № 2596.
75. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ / А.Н.Хомченко. – Ивано-Франковск, 1982. – 7с. – Деп. в ВИНТИ 21.10.82, № 5264.
76. Хомченко А.Н. К задаче определения продуктивности нефтяного месторождения / А.Н.Хомченко // 2-я Всесоюз. конф. “Вскрытие нефтегазовых пластов и освоение скважин”. Тез. докл. – М., 1988. – С. 278-280.
77. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н.Шабров. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с.
78. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство / Т.Шуп. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
79. Jaswon M.A. An integral equation solution of the torsion problem / M.A.Jaswon, A.R.Ponter // ProcRoy.Soc. – London, 1963. – P. 246-273.
80. Metropolis N. The Monte Carlo Method / N.Metropolis, S.Ulam // J.Amer. Stat. Assoc. – 1949.– V.44. – P. 335-341.
81. Muller M.E. Some continuons Monte Carlo methods for the Dirichlet problem / M.E.Muller // Ann. of Math. Statistic. – 1956. – V.27.N3
82. Poisson M. Memoire sur l'equilibre et mouvement des corple solides / M.Pois- son // Paris, Met.del'Acad. – r.8, 1829.

83. Wachspress E.X. A rational finite element basis / E.X.Wachspress. – New York, Academic Press, 1975.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 18.09.2013 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Мойсишиним В.М.
д.ф.-м.н., доцентом Королем І.І. (м. Ужгород)*

APPROXIMATE METHODS OF SOLVING FOR BOUNDARY TASKS OF ELLIPTIC TYPE

**V. M. Senychak¹, R. Y. Ripetsky¹, Y. Y. Ripetsky¹,
V. V. Senychak², V. R. Ripetsky³**

¹*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua*

²*PreCarpathian National University by V. Stefanic;
76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57*

³*National University "Lviv polytechnic"; Lviv*

Annotation. This article provides a brief overview of the most common approximate methods that can be used for solving boundary tasks of elliptic type. Also, a simplified version of the finite element method -simplex method of rotation, is proposed.

Key words. *Numerical modelling, elliptic equations, random walks, transitional probability, simplex method of rotation.*

Механіка

УДК 539.376

СТРУКТУРА АМПЛІТУДНИХ РІВНЯНЬ НЕПРУЖНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ ПРИ ГАРМОНІЧНИХ ПРОЦЕСАХ

В. Г. Карнаухов¹, В. В. Михайленко², О. В. Луциков³

¹Інститут механіки ім. С. Тимошенка НАН України; м. Київ

²Житомирський державний університет ім. І. Франка; м. Житомир

³Житомирський державний технологічний університет; м. Житомир

Досліджується структура амплітудних визначальних рівнянь непружних п'єзоелектричних тіл при гармонічному навантаженні з використанням гіпотези одночастотності електромеханічних коливань та умови інваріантності амплітуд відносно перетворення зсуву в часі.

Ключові слова: амплітудні визначальні рівняння, гармонічне навантаження, п'єзоелектричні тіла.

Однією з найбільш продуктивних гіпотез в теорії нелінійних коливань є гіпотеза одночастотності [3]. У випадку стаціонарних коливань непружних п'єзоелектричних тіл [1] ця гіпотеза означає наступне: припускається, що в результаті гармонічного електромеханічного навантаження з круговою частотою ω в об'ємі п'єзоелектричного тіла встановлюється напружено-деформований і електричний стан вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma'_{ij} \cos \omega t - \sigma''_{ij} \sin \omega t, & \epsilon_{ij} &= \epsilon'_{ij} \cos \omega t - \epsilon''_{ij} \sin \omega t, \\ E_i &= E'_i \cos \omega t - E''_i \sin \omega t, & D_i &= D'_i \cos \omega t - D''_i \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1)$$

Деякі висновки про точність розрахунків нелінійних стаціонарних коливань непружних тіл, виконаних з припущенням одночастотності, можна знайти, наприклад, в оглядовій статті [5]. Особливо точно одночастотний режим витримується при резонансних коливаннях непружних тіл.

Приймемо за незалежні змінні складові деформації ϵ'_i , ϵ''_i і складові вектора індукції електричного поля D'_i , D''_i . Тоді складові механічного напруження σ'_i , σ''_i і складові вектора напруженості електричного поля E'_i , E''_i розглядаються як тензорні і векторні функції незалежних змінних

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \\ E'_j &= E'_j(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \quad E''_j = E''_j(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, D'_k, D''_k).\end{aligned}\quad (2)$$

При такому підході нелінійна поведінка п'єзоелектричного тіла враховується нелінійністю залежностей (2). Ці залежності повинні задовольняти умові інваріантності відносно зсуву в часі, тобто відносно заміни в (1) ωt на $\omega t + \varphi$. Цю умову можна записати в символічному матричному вигляді

$$QS(A) = S(QA) \quad (3)$$

де $S = (\sigma'_{ij}, \sigma''_{ij}, E'_k, E''_k)^T$, $A = (\epsilon'_{ij}, \epsilon''_{ij}, D'_k, D''_k)^T$,

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Далі вважаємо функції (2) диференційовними по ϵ'_{ij} , ϵ''_{ij} , D'_k , D''_k . Тоді шляхом виключення параметра φ рівності (3) можна записати в диференціальній формі

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl}} \epsilon''_{kl} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \epsilon''_{kl}} \epsilon'_{kl} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial D''_k} D'_k + i \bar{\sigma}_{ij} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial \epsilon'_{kl}} \epsilon''_{kl} - \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial \epsilon''_{kl}} \epsilon'_{kl} + \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial D''_k} D'_k + i \bar{E}_i &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

де введені позначення

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i \sigma''_{ij}, \quad \bar{E}_k = E'_k + i E''_k, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (5)$$

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \epsilon'_{kl}} \epsilon''_{kl} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \epsilon''_{kl}} \epsilon'_{kl} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial D''_k} D'_k = 0, \quad (6)$$

де $\bar{\Phi} = \Phi_1 + i \Phi_2$ - комплекснозначна функція 18 дійсних змінних $\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, D'_k, D''_k$. Записавши відповідну характеристичну систему або безпосередньою підстановкою в рівняння (6), легко переконатись, що будь-яка з величин

$$\Gamma_{ijkl} = \epsilon'_{ij} \epsilon'_{kl} + \epsilon''_{ij} \epsilon''_{kl}, \quad \Gamma_{ijk} = \epsilon'_{ij} D'_k + \epsilon''_{ij} D''_k, \quad (7)$$

$$\Gamma_{kl} = D'_k D'_l + D''_k D''_l,$$

$$\bar{\Gamma}_{ijkl} = \epsilon'_{ij} \epsilon''_{kl} - \epsilon''_{ij} \epsilon'_{kl}, \quad \bar{\Gamma}_{ijk} = \epsilon'_{ij} D''_k - \epsilon''_{ij} D'_k, \quad (8)$$

$$\bar{\Gamma}_{kl} = D'_k D''_l - D''_k D'_l$$

є частинним інтегралом рівняння (6).

Величини (7) і (8) можна записати в термінах повних амплітуд і зсувів фаз

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijkl} &= \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \cos(\varphi_{kl}^i - \varphi_{ij}^e), \quad \Gamma_{ijk} = \varepsilon_{ij} D_k \cos(\varphi_k^D - \varphi_{ij}^e), \\ \Gamma_{kl} &= D_k D_l \cos(\varphi_l^D - \varphi_k^D), \quad \bar{\Gamma}_{ijkl} = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \sin(\varphi_{kl}^i - \varphi_{ij}^e), \\ \bar{\Gamma}_{ijk} &= \varepsilon_{ij} D_k \sin(\varphi_k^D - \varphi_{ij}^e), \quad \bar{\Gamma}_{kl} = D_k D_l \sin(\varphi_l^D - \varphi_k^D),\end{aligned}\quad (9)$$

де

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \sqrt{\varepsilon_{ij}^{\prime 2} + \varepsilon_{ij}^{\prime\prime 2}}, \quad D_k = \sqrt{D_k^{\prime 2} + D_k^{\prime\prime 2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi_{ij}^e &= \varepsilon_{ij}^{\prime\prime} / \varepsilon_{ij}^{\prime}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k^D = D_k^{\prime\prime} / D_k^{\prime}\end{aligned}\quad (10)$$

і внаслідок цього виразити через 9 амплітуд ε_{ij} , D_k і 8 зсувів фаз, наприклад, $\varphi_{ij}^e - \varphi_{11}^e$, $\varphi_k^D - \varphi_{11}^D$ (всього 17 незалежних змінних). Довільна функція цих 17 змінних є загальним розв'язком рівняння (6). Разом з тим, цей загальний розв'язок далі зручніше зображати у вигляді довільної функції

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{kl}, \bar{\Gamma}_{ijkl}, \bar{\Gamma}_{ijk}, \bar{\Gamma}_{kl}). \quad (11)$$

Очевидно, що аргументи в (11) не є незалежними. Наприклад, легко переконатись в справедливості рівностей

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{ijkl} \hat{\Gamma}_{pqrs} &= \Gamma_{ijpq} \Gamma_{klrs} - \Gamma_{ijrs} \Gamma_{klpq}, \\ \hat{\Gamma}_{ijk} \hat{\Gamma}_{pqr} &= \Gamma_{ijpq} \Gamma_{kr} - \Gamma_{ijr} \Gamma_{pqk}, \\ \bar{\Gamma}_{kl} \bar{\Gamma}_{pq} &= \Gamma_{kp} \Gamma_{lq} - \Gamma_{kq} \Gamma_{lp}.\end{aligned}\quad (12)$$

Розглянемо співвідношення

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= \bar{C}_{ijkl}^{\prime\prime}(\cdot) \bar{\varepsilon}_{kl} + \bar{h}_{kij}^{\prime\prime}(\cdot) \bar{D}_k, \\ \bar{E}_k &= \bar{h}_{kij}^{\prime\prime}(\cdot) \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\beta}_{kl}^{\prime\prime}(\cdot) \bar{D}_l,\end{aligned}\quad (13)$$

де крім (5) використані позначення

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{kl} &= \varepsilon_{kl}^{\prime} + i \varepsilon_{kl}^{\prime\prime}, \quad \bar{D}_k = D_k^{\prime} + i D_k^{\prime\prime}, \\ \bar{p} &= \{ \bar{C}_{ijkl}^{\prime\prime}(\cdot), \bar{h}_{kij}^{\prime\prime}(\cdot), \bar{h}_{kij}^{\prime\prime}(\cdot), \bar{\beta}_{kl}^{\prime\prime}(\cdot) \} = p^{\prime} + i p^{\prime\prime},\end{aligned}$$

а комплексні коефіцієнти $\bar{C}_{ijkl}^{\prime\prime}(\cdot)$, $\bar{h}_{kij}^{\prime\prime}(\cdot)$, $\bar{h}_{kij}^{\prime\prime}(\cdot)$, $\bar{\beta}_{kl}^{\prime\prime}(\cdot)$ є функціями компонент тензорів (7) і (8). Якщо припустити диференційовність цих функцій і підставити співвідношення (13) в рівняння (4), то легко переконатись, що ці рівняння задовольняються тотожно. Для цього потрібно врахувати сказане про рівняння (6) і зображення його загального розв'язку у вигляді (11). Більше того, можна показати, що внаслідок довільності коефіцієнтів $\bar{C}_{ijkl}^{\prime\prime}(\cdot)$, $\bar{h}_{kij}^{\prime\prime}(\cdot)$, $\bar{h}_{kij}^{\prime\prime}(\cdot)$, $\bar{\beta}_{kl}^{\prime\prime}(\cdot)$ функції $\bar{\sigma}_{ij}$ і \bar{E}_k (13) є загальними розв'язками рівнянь (4).

Отже, якщо деякі диференційовні функції (2) задовольняють умові інваріантності відносно перетворення зсуву в часі (3), то їх можна записати у вигляді (13). З іншого боку, приймаючи до уваги інваріантність величин (7) і (8) відносно перетворення зсуву в часі, тобто відносно заміни

$$\begin{aligned}
 \varepsilon'_{kl} &\rightarrow \varepsilon'_{kl} \cos \varphi - \varepsilon''_{kl} \sin \varphi, \\
 \varepsilon''_{kl} &\rightarrow \varepsilon'_{kl} \sin \varphi + \varepsilon''_{kl} \cos \varphi, \\
 D'_k &\rightarrow D'_k \cos \varphi - D''_k \sin \varphi, \\
 D''_k &\rightarrow D'_k \sin \varphi + D''_k \cos \varphi
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

безпосередньою перевіркою переконуємось, що функції (13) задовольняють умові (3).

Таким чином, необхідною і достатньою умовою інваріантності функцій (2) відносно перетворення зсуву в часі є їх зображення у вигляді (13). При цьому, звичайно, припускається диференційованість коефіцієнтів $\bar{C}_{ijkl}^{(1)}$ (;), \bar{h}_{kij} (;), \bar{h}^*_{kij} (;), $\bar{\beta}_{kl}$ (;).

Далі виклад матеріалу спирається на наступне зауваження.

Зауваження 1. Виділимо з множини всіх можливих фізично нелінійних матеріалів клас матеріалів, нелінійні властивості яких можна вважати «симетричними» відносно знака діючих факторів. Наприклад, матеріал з кубічною нелінійністю однаково («симетрично») реагує на розтяг – стиск або, на зміну знаку електричної індукції. Якщо ж матеріалу, крім того, властива помітна квадратична нелінійність, то його реакція на подібні навантаження уже «несиметрична». Нижче розглядаються тільки матеріали виділеного класу, які будемо називати матеріалами з «симетричними нелінійними властивостями». У випадку одночастотного наближення коливань нелінійні властивості матеріалу проявляються в залежності коефіцієнтів з (13) від амплітуд і зсувів фаз незалежних змінних, а для матеріалу з «симетричними нелінійними властивостями» – від амплітуд і абсолютних величин зсувів фаз. Це означає, що величини (8) згідно з їх зображенням (9) повинні входити до числа аргументів у вигляді добутків або квадратів. Але тоді з (12) слідує, що коефіцієнти в (13) можна вважати функціями тільки величин (7). Зрозуміло, що співвідношення (13) залишаються справедливими і у випадку одночастотного наближення коливань для матеріалів з «несиметричними нелінійними властивостями». Для цього коефіцієнти цих рівнянь потрібно вважати функціями не лише величин (7), а і величин типу (8), які залежать від знака зсуву фаз. Однак такий опис коливань не буде повним без врахування постійних складових цих коливань, які можуть суттєво впливати на осцилюючі складові (1).

Таким чином, коефіцієнти в рівняннях (13) вважаємо далі функціями компонент тензорів (7): $(;) = (\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{kl})$.

Розглянемо питання про симетрію цих коефіцієнтів відносно перестановки індексів. Симетрія

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{ijkl}^{(1)} (;) &= \bar{C}_{jikl}^{(1)} (;) = \bar{C}_{ijlk}^{(1)} (;), \\
 \bar{h}_{kij} (;) &= \bar{h}_{kji} (;), \bar{h}^*_{kij} (;) = \bar{h}^*_{kji} (;)
 \end{aligned}$$

очевидна. Щодо стосується симетрії

$$\bar{C}_{ijkl}^{D'}(\cdot) = \bar{C}_{ijkl}^{D''}(\cdot), \bar{\beta}_{kl}^{\varepsilon}(\cdot) = \bar{\beta}_{lk}^{\varepsilon}(\cdot)$$

чи рівності коефіцієнтів

$$\bar{h}_{kij}(\cdot) = \bar{h}_{kij}^*(\cdot)$$

то, як слідує з вищесказаного, про них нічого поки що сказати не можна. Для того щоб з'ясувати це питання, звернемося до функції дисипації [4]

$$\bar{D} = \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k - E''_k D''_k. \quad (15)$$

Якщо записати вираз для цієї функції з врахуванням рівностей (4), то можна показати, що функція

$$\bar{U} = \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k \quad (16)$$

як функція незалежних змінних ε'_{kl} , ε''_{kl} , D'_k , D''_k , задовольняє диференціальне рівняння (6)

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \bar{U}}{\partial D''_k} D'_k = 0.$$

Цьому ж рівнянню задовольняє і функція \bar{D} . Для цього потрібно записати з врахуванням (4) вираз для \bar{U} .

Зауваження 2. Розглядувані перетворення з врахуванням рівностей (4) зручно проводити в комплексній формі, якщо ввести комплекснозначну функцію

$$\bar{\Phi} = \bar{\sigma}'_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{E}_k \bar{D}_k \quad (17)$$

і врахувати, що

$$\text{Im } \bar{\Phi} = \bar{D}, \text{ Re } \bar{\Phi} = \bar{U}.$$

Тоді, врахувавши в (17) рівності (4), приходимо до диференціального рівняння (6).

Функцію (16) \bar{U} будемо називати функцією накопичення [4].

Так як функції дисипації і накопичення задовольняють диференціальному рівнянню (6), то для матеріалів з «симетричними» нелінійними властивостями вони, як і коефіцієнти рівнянь (13), є функціями виду

$$\bar{D} = \bar{D}(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{kl}), \quad \bar{U} = \bar{U}(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{kl}). \quad (18)$$

З іншого боку, відокремлюючи в рівняннях (13) дійсні та уявні частини і використовуючи їх у співвідношеннях (15) і (16), можна записати

$$\bar{D} = \bar{D}_1 + \bar{D}_2, \quad \bar{U} = \bar{U}_1 - \bar{U}_2, \quad (19)$$

де, з врахуванням позначень (7) і (8),

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 &= C_{ijkl}^{D''}(\cdot) \Gamma_{ijkl} + (h_{kij}''(\cdot) + h_{kij}^{*''}(\cdot)) \Gamma_{ijk} + \beta_{kl}''(\cdot) \Gamma_{kl}, \\ \bar{D}_2 &= C_{ijkl}^{D'}(\cdot) \bar{\Gamma}_{ijkl} + (h_{kij}'(\cdot) - h_{kij}^{*'}(\cdot)) \bar{\Gamma}_{ijk} + \beta_{kl}'(\cdot) \bar{\Gamma}_{kl}, \\ \bar{U}_1 &= C_{ijkl}^{D''}(\cdot) \Gamma_{ijkl} + (h_{kij}''(\cdot) + h_{kij}^{*''}(\cdot)) \Gamma_{ijk} + \beta_{kl}''(\cdot) \Gamma_{kl}, \\ \bar{U}_2 &= C_{ijkl}^{D'}(\cdot) \bar{\Gamma}_{ijkl} + (h_{kij}'(\cdot) - h_{kij}^{*'}(\cdot)) \bar{\Gamma}_{ijk} + \beta_{kl}'(\cdot) \bar{\Gamma}_{kl}. \end{aligned} \quad (20)$$

Зауваження 3. В результаті перетворення зсуву в часі (14) повні амплітуди деформацій $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ і індукції електричного поля $\overset{\circ}{D}_k$ (10) не змінюються, а фази φ_{ij}^e і φ_k^D змінюються відповідно на $\varphi_{ij}^e + \varphi$ і $\varphi_k^D + \varphi$. Розглянемо також перетворення незалежних змінних виду

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{kl} &\rightarrow \varepsilon'_{kl} \cos \varphi + \varepsilon''_{kl} \sin \varphi, \\ \varepsilon''_{kl} &\rightarrow \varepsilon'_{kl} \sin \varphi - \varepsilon''_{kl} \cos \varphi, \\ D'_k &\rightarrow D'_k \cos \varphi + D''_k \sin \varphi, \\ D''_k &\rightarrow D'_k \sin \varphi - D''_k \cos \varphi.\end{aligned}\quad (21)$$

Зауважимо, що це перетворення не слідує з (14) при жодному φ .

Перетворення (21) також не змінює повних амплітуд деформації $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ і індукції електричного поля $\overset{\circ}{D}_k$. Що стосується фаз φ_{ij}^e і φ_k^D , то вони змінюються відповідно на $-\varphi_{ij}^e + \varphi$ і $-\varphi_k^D + \varphi$. Оскільки величини (7) згідно (9) визначаються косинусами зсувів фаз, то вони в результаті перетворення (21) не змінюються. У цьому можна переконатись і безпосередньо, підставивши (21) в (7). Отже, функції дисипації і накопичення (18), як функції аргументів (7), інваріантні відносно перетворення (21). Те саме стосується і коефіцієнтів $C_{ijkl}^{D'}$ (:), $C_{ijkl}^{D''}$ (:), h'_{kij} (:), h''_{kij} (:), h_{kij}^* (:), h_{kij}^* (:), β'_{kl} (:), β''_{kl} (:), β_{kl}^* (:), β_{kl}^* (:), які фігурують в (20). Що стосується величин (8) $\bar{\Gamma}_{ijkl}$, $\bar{\Gamma}_{ijk}$ і $\bar{\Gamma}_{kl}$, які фігурують в (20), то вони в результаті перетворення (21) змінюють знак на протилежний.

Згідно з викладеним, ліві частини рівностей (19) і перші доданки правих частин цих рівностей не змінюються при заміні (21), тоді як другі складові \bar{D}_2 і \bar{U}_2 правих частин змінюють знак на протилежний. Тому, вимагаючи однозначну визначеність функцій накопичення і дисипації (18) своїми аргументами, потрібно покласти

$$\bar{D}_2 = 0, \quad \bar{U}_2 = 0 \quad (22)$$

Достатніми умовами виконання рівностей (22) є наступні умови симетрії, які постулюються додатково:

$$\begin{aligned}C_{ijkl}^{D'} &= C_{klij}^{D'} (:), h'_{kij} = h'_{kij} (:), \beta'_{kl} = \beta'_{lk} (:), \\ C_{ijkl}^{D''} &= C_{klij}^{D''} (:), h''_{kij} = h''_{kij} (:), \beta''_{kl} = \beta''_{lk} (:).\end{aligned}\quad (23)$$

Таким чином, ми отримаємо загальну структуру амплітудних визначальних рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= \bar{C}_{ijkl}^{D'} (\cdot) \bar{\varepsilon}_{kl} + \bar{h}_{kij} (\cdot) \bar{D}_k, \\ \bar{E}_k &= \bar{h}_{kij} (\cdot) \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\beta}_{kl}^* (\cdot) \bar{D}_l.\end{aligned}\quad (24)$$

Зауваження 4. У лінійному випадку коефіцієнти в рівняннях (24) стали, а умови (23) є не лише достатніми, а й необхідними для вико-

нання рівностей (22) і тому у лінійному випадку структура амплітудних рівнянь повністю визначається умовою їх інваріантності відносно перетворення зсуву в часі.

Аналогічні результати отримуються і у випадку інших наборів незалежних змінних. Розглянемо наприклад, довільні залежності

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, E'_k, E''_k), \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, E'_k, E''_k), \\ D'_i &= D'_i(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, E'_k, E''_k), \quad D''_i = D''_i(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, E'_k, E''_k) \end{aligned} \quad (25)$$

і будемо вимагати щоб вони задовольняли умові інваріантності відносно перетворення зсуву в часі, яка отримується з (3) шляхом формальної заміни

$$E'_k \leftrightarrow D'_k, \quad E''_k \leftrightarrow D''_k.$$

Відповідні рівності в диференціальній формі мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl}} \epsilon''_{kl} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \epsilon''_{kl}} \epsilon'_{kl} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial E'_k} E''_k - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial E''_k} E'_k + i \bar{\sigma}_{ij} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{D}_i}{\partial \epsilon'_{kl}} \epsilon''_{kl} - \frac{\partial \bar{D}_i}{\partial \epsilon''_{kl}} \epsilon'_{kl} + \frac{\partial \bar{D}_i}{\partial E'_k} E''_k - \frac{\partial \bar{D}_i}{\partial E''_k} E'_k + i \bar{D}_i &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Записуючи з врахуванням рівнянь (26) вираз для дисипативної функції (15), отримуємо для даного набору незалежних змінних відповідну консервативну характеристику

$$\bar{H} = \sigma'_{ij} \epsilon''_{ij} + \sigma''_{ij} \epsilon'_{ij} - D'_k E'_k - D''_k E''_k. \quad (27)$$

(амплітудний аналог електричної ентальпії).

Дисипативна функція \bar{D} і функція \bar{H} , як функції незалежних змінних ϵ'_{kl} , ϵ''_{kl} , E'_k , E''_k , задовольняють диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon'_{kl}} \epsilon''_{kl} - \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon''_{kl}} \epsilon'_{kl} + \frac{\partial \Phi}{\partial E'_k} E''_k - \frac{\partial \Phi}{\partial E''_k} E'_k = 0$$

і для матеріалів з «симетричними» нелінійними властивостями є функціями аргументів

$$\bar{D} = \bar{D}(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}^l, \Gamma_{kl}^l), \quad \bar{H} = \bar{H}(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}^l, \Gamma_{kl}^l),$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijkl} &= \epsilon'_{ij} \epsilon'_{kl} + \epsilon''_{ij} \epsilon''_{kl}, \quad \Gamma_{ijk}^l = \epsilon'_{ij} E'_k + \epsilon''_{ij} E''_k, \\ \Gamma_{kl}^l &= E'_k E'_l + E''_k E''_l \end{aligned} \quad (28)$$

Зауваження 5. Тут також зручно проводити перетворення з використанням рівностей (26) у комплексній формі, ввівши формально комплекснозначну функцію

$$\bar{F} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} - \bar{D}_k \bar{E}_k, \quad \text{Im } \bar{F} = \bar{D}, \quad \text{Re } \bar{F} = \bar{H}.$$

Аналогічно до викладеного вище можна показати, що необхідною і достатньою умовою інваріантності функцій (25) відносно перетворення зсуву в часі є їх зображення у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= \bar{C}_{ijkl}^l(\cdot) \bar{e}_{kl} + \bar{e}_{kij}^*(\cdot) \bar{E}_k, \\ \bar{D}_k &= \bar{e}_{kij}(\cdot) \bar{e}_{ij} + \bar{\mu}_{kl}^e(\cdot) \bar{E}_l.\end{aligned}\quad (29)$$

Комплексні коефіцієнти $\bar{C}_{ijkl}^l(\cdot)$, $\bar{e}_{kij}^*(\cdot)$, $\bar{e}_{kij}(\cdot)$, $\bar{\mu}_{kl}^e(\cdot)$ для матеріалів з «симетричними» нелінійними властивостями є диференційовними функціями аргументів (28).

Відокремлюючи в (29) дійсні і уявні частини з врахуванням позначень

$$\bar{p} = \{ \bar{C}_{ijkl}^l(\cdot), \bar{e}_{kij}^*(\cdot), \bar{e}_{kij}(\cdot), \bar{\mu}_{kl}^e(\cdot) \} = p' + ip''$$

і використовуючи їх у виразі для функції дисипації \bar{D} (15) і функції \bar{H} (27), отримуємо

$$\bar{D} = \bar{D}_1 + \bar{D}_2, \quad \bar{H} = \bar{H}_1 - \bar{H}_2,$$

де

$$\begin{aligned}\bar{D}_1 &= C_{ijkl}^{l*}(\cdot) \Gamma_{ijkl} - (e_{kij}^n(\cdot) - e_{kij}^{n*}(\cdot)) \Gamma_{ijk}^l - \mu_{kl}^n(\cdot) \Gamma_{kl}^l, \\ \bar{D}_2 &= C_{ijkl}^{l*}(\cdot) [\varepsilon'_i \varepsilon_k^n - \varepsilon'_k \varepsilon_i^n] + (e'_{kij}(\cdot) + e_{kij}^{n*}(\cdot)) [\varepsilon'_i E_k^n - \varepsilon'_k E_i^n] - \\ &\quad - \mu_{kl}^e(\cdot) [E'_k E_l^n - E'_l E_k^n], \\ \bar{H}_1 &= C_{ijkl}^{l*}(\cdot) \Gamma_{ijkl} - (e'_{kij}(\cdot) - e_{kij}^{n*}(\cdot)) \Gamma_{ijk}^l - \mu_{kl}^n(\cdot) \Gamma_{kl}^l, \\ \bar{H}_2 &= C_{ijkl}^{l*}(\cdot) [\varepsilon'_i \varepsilon_k^n - \varepsilon'_k \varepsilon_i^n] + (e_{kij}^{n*}(\cdot) + e'_{kij}(\cdot)) [\varepsilon'_i E_k^n - \varepsilon'_k E_i^n] - \\ &\quad - \mu_{kl}^e(\cdot) [E'_k E_l^n - E'_l E_k^n].\end{aligned}$$

Як і вище, вимога однозначної визначеності функцій \bar{D} і \bar{H} приводить до рівностей

$$\bar{D}_2 = 0, \quad \bar{H}_2 = 0,$$

для виконання яких постулюються наступні умови симетрії

$$\begin{aligned}C_{ijkl}^{l*}(\cdot) &= C_{klij}^{l*}(\cdot), \quad e_{kij}^{n*}(\cdot) = -e_{kij}^n(\cdot), \quad \mu_{kl}^n(\cdot) = \mu_{lk}^n(\cdot); \\ C_{ijkl}^{l*}(\cdot) &= C_{klij}^{l*}(\cdot), \quad e_{kij}^{n*}(\cdot) = -e_{kij}^n(\cdot), \quad \mu_{kl}^n(\cdot) = \mu_{lk}^n(\cdot).\end{aligned}$$

Амплітудні рівняння приймають вигляд

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= \bar{C}_{ijkl}^l(\cdot) \bar{e}_{kl} - \bar{e}_{kij}(\cdot) \bar{E}_k, \\ \bar{D}_k &= \bar{e}_{kij}(\cdot) \bar{e}_{ij} + \bar{\mu}_{kl}^e(\cdot) \bar{E}_l.\end{aligned}\quad (30)$$

Залишається справедливим зауваження стосовно лінійної теорії.

В роботі [3] рівняння виду (24) чи (30) отримані шляхом усереднення по Гальоркіну співвідношень загальної кратноїнтегральної теорії електро'в'язкопружності з використанням принципу взаємності, тобто припущення про те, що ядра кратноїнтегральної теорії мають таку ж симетрію відносно перестановки індексів як і відповідні коефіцієнти нелінійного електропружного середовища. На відміну від [3] амплітудні рівняння (24) і (30) даної роботи не залежать від того, яке механічне середовище розглядається: в'язкопружне, пружнопластичне чи пруж-

нов'язкопластичне. Єдиною умовою є реалізація в даному середовищі моногармонічного стану виду (1). Тому рівняння (24) і (30) в інтерпретації даної роботи мають ширше застосування.

Література

1. Карнаухов В.Г. Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций / В.Г.Карнаухов, И.Ф.Киричок. – К.: Наук. думка, 1988. – Т.4. – 320 с.
2. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания / Ю.А.Митропольский. – К.: Ин-т. математики НАН Украины, 1997. – 344 с.
3. Михайленко В.В. Общая структура амплитудных определяющих уравнений неупругих пьезоэлектрических тел при циклических электро-механических процессах / В.В.Михайленко // Прикл. механика. – 1996. – 32. N 12. – С. 37-42.
4. Karnaukhov V.G. Nonlinear single-frequency vibrations and dissipative heating of inelastic piezoelectric bodies / V.G.Karnaukhov, V.V.Mikhailenko // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 5. – P. 521-547.
5. Senchenkov I.K. Modeling the thermomechanical behavior of physically nonlinear materials under monoharmonic loading / I.K.Senchenkov, V.G.Karnaukhov // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 11. – P. 1400-1432.

Стаття надійшла до редакційної колегії 3.12.2013 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**, д.ф.-м.н., професором, чл.-кор. НАН України **Кушніром Р.М.** (м. Львів)*

STRUCTURE OF AMPLITUDE CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR NON-ELASTIC PIEZOELECTRIC SOLIDS UNDER HARMONIC LOADING

V.G. Karnaukhov¹, V.V. Mikhailenko², O.V. Lushchykov³

¹*Institut of mechanics named by S. Timoshenco NAN of Ukraine; Kyiv*

²*Zhytomyr State University named by I. Franco; Zhytomyr*

³*Zhytomyr State Technological University; Zhytomyr*

In this paper the structure of amplitude constitutive equations for non-elastic piezoelectric solids under harmonic loading is analyzed under the hypotheses of one-frequency electromechanical oscillations and time-shift invariance of amplitudes.

Key words: *amplitude constitutive equations, harmonic loading, piezoelectric solids.*

РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ У ПІВПЛОЩИНІ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ПРИ ДІЇ ПОСТІЙНОЇ ПОПЕРЕЧНОЇ СИЛИ

О. М. Пономаренко¹, І. В. Цідило²

¹Львівський національний аграрний університет; 80381, Львівська обл., Жовківський р-н, м. Дубляни, вул. Володимира Великого, 1; тел. +380 (32) 224-23-35; e-mail: lnau@mail.lviv.ua
²Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; e-mail: tm@tning.edu.ua

В роботі дано аналітичний розв'язок задачі теорії пружності з визначення концентрації напружень у півплощині з круговим отвором при дії постійної поперечної сили. Використано біполярні координати та функцію напружень Ері для загального плоского напруженого стану

Ключові слова: біполярні координати, напружений стан, концентрація напружень

Постановка проблеми. В аграрному та транспортному машинобудуванні під час проектування машин широке застосування знаходять пружні деталі у вигляді тонких пластин, які послаблюються різними вирізами. У разі завантаження таких деталей зовнішніми зусиллями поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, що зазнають дії високих напружень. Саме ці ділянки є такими, де з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування даної конструкції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Значну кількість задач по дослідженню концентрації напружень поблизу отворів різної форми розв'язано М.І. Мухелішвілі [1] та його учнями і послідовниками методом функції комплексної змінної. Дослідження концентрації напружень цим же методом проведено Г.М. Савиним [2] та його учнями.

Широкий спектр досліджень концентрації напружень у біполярних координатах для ізотропних пластин провів Я.С. Уфлянд [3; 4]. Надзвичайно практичні питання розподілу напружень у стрижнях і пластинах із концентраторами напружень у вигляді отворів, виточок розглянуто у роботах Р. Петерсона [5], Р.Р. Мавлютова [6], С.П. Тимошенко і Дж. Гудьєра [7].

Постановка завдання. Метою даного дослідження є розв'язання задачі про концентрацію напружень у тонкій ізотропній півплощині з круговим отвором при дії постійної поперечної сили. Результати цього

дослідження мають прикладне значення при проектуванні деталей у вигляді тонких пластин із вирізами у транспортному та аграрному машинобудуванні.

Виклад основного матеріалу. Нехай пружна консольна пластина з круговим отвором радіуса r перебуває під дією постійної сили Q , прикладеному на її вільному кінці. Систему координат виберемо таким чином, щоб вісь OY проходила по прямолінійному краю, а вісь OX – перпендикулярно до нього (рис. 1).

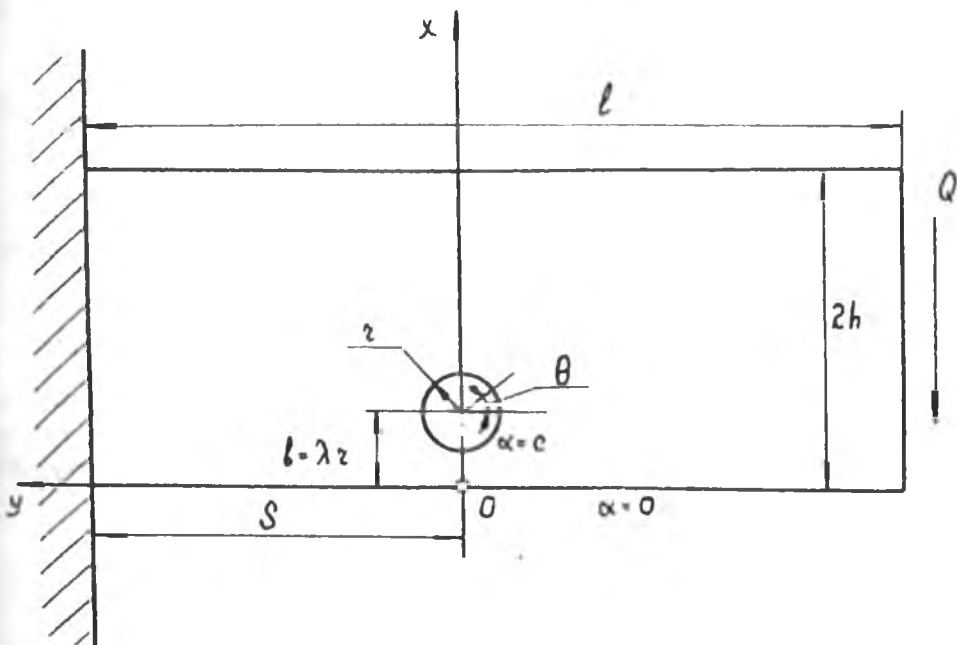


Рис.1. Схема навантаження пластини

Центр отвору міститься на віддалі S від защемленого кінця пластини і на віддалі b від початку системи координат. Приймаючи пластину за півплощину, що перебуває під дією постійної поперечної сили, визначимо в ній напружений стан.

Виходимо з основної функції напружень, яка дає розв'язок задачі про згин півплощини без отвору постійною поперечною силою [2]. До функції напружень, що відповідає цьому напруженому стану, підберемо другу функцію, яка дає якраз такий напружений стан, який створюється при наявності отворів. Оскільки контур отвору вільний від зовнішніх навантажень, то в точках, що лежать на цьому контурі, напруження в пластині без отвору і додаткові напруження повинні взаємно знищуватись.

При розв'язанні використаємо біполярні координати α , β , які зв'язані з прямокутними координатами x, y наступними залежностями:

$$xg = sh \alpha, \quad yg = \sin \beta, \quad (1)$$

де $ga = ch \alpha - \cos \beta$.

Для розв'язання задачі необхідно знайти функцію, що задовольняє граничні умови:

$$\sigma_{\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \tau_{\alpha\beta} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{\alpha} \Big|_{\alpha=c} = \tau_{\alpha\beta} \Big|_{\alpha=c} = 0,$$

і забезпечує задану систему напружень на безмежності.

Функція напружень, що дає картину основного напруженого стану, має вигляд:

$$U_{0i}(x, y) = \sum_{i=1}^4 U_{0,i}, \quad (3)$$

причому

$$U_{0,1} = k_1 x^3,$$

$$U_{0,2} = k_2 x^3 y,$$

$$U_{0,3} = k_3 x^2,$$

$$U_{0,4} = k_4 x^2,$$

а сталі k_i записуються так:

$$k_1 = \frac{Q}{6I}(l-S), \quad k_2 = \frac{Q}{6I}, \quad k_3 = \frac{Qh(l-S)}{2I}, \quad k_4 = -\frac{Qh}{2I}. \quad (4)$$

Повну функцію напружень подамо у вигляді:

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^4 (U_{0,i} + k_i U_{1,i}), \quad (5)$$

де функції $U_{1,i}$ є невідомими бігармонічними функціями, які відповідають додатковому напруженому стану, що виникає внаслідок наявності отвору. Додаткові функції $U_{1,i}$ повинні бути підібрані так, щоб знімати напруження на контурі отвору $\alpha = c$ і на прямолінійному краю $\alpha = 0$, які виникають відповідно від кожної з основних функцій $U_{0,i}$. На безмежності додаткові функції $U_{1,i}$ не повинні змінювати основний напружений стан, тобто на безмежності повинні дорівнювати нулю.

Виходячи з основних функцій напружень, додаткові функції напружень будемо шукати у вигляді:

$$gU_{1,1}(\alpha, \beta) = G_1(ch \alpha - \cos \beta)\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,1}(\alpha) \cos n\beta, \quad (6)$$

$$gU_{1,2}(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,2}(\alpha) \sin n\beta,$$

$$gU_{1,3}(\alpha, \beta) = G_3(ch \alpha - \cos \beta)\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,3}(\alpha) \cos n\beta,$$

$$gU_{1,4}(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,4}(\alpha) \sin n\beta,$$

де введено позначення:

$$f_{n,i}(\alpha) = A_{n,i} \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_{n,i} \operatorname{ch}(n-1)\alpha + C_{n,i} \operatorname{ch}(n+1)\alpha + D_{n,i} \operatorname{ch}(n-1)\alpha. \quad (7)$$

З перших двох граничних умов (2) отримаємо:

$$\begin{aligned} (n+1)C_{n,i} + (n-1)D_{n,i} &= 0, \\ A_{n,i} + B_{n,i} &= 0, \quad (i=1,2,3,4). \end{aligned} \quad (8)$$

Звідси маємо:

$$C_{n,i} = -\frac{n-1}{n+1} B_{n,i}, \quad A_{n,i} = -B_{n,i}. \quad (9)$$

Вводячи позначення:

$$E_{n,i} = -\frac{D_{n,i}}{n+1}, \quad C_{n,i} = E_{n,i}(n-1), \quad (10)$$

для функцій $f_{n,i}(\alpha)$ отримаємо згідно (7), (10):

$$f_{n,i}(\alpha) = f_{n,i} [\operatorname{ch}(n+1)\alpha + \operatorname{ch}(n-1)\alpha] + E_{n,i} [(n-1)\operatorname{sh}(n+1)\alpha - (n+1)\operatorname{sh}(n-1)\alpha].$$

Розкладаючи функцію $U_{0,i}$ в ряди Фур'є і задовільняючи останні дві граничні умови (2), прирівнюючи коефіцієнти при відповідних значеннях синусів і косинусів, після перетворень отримаємо систему, в результаті розв'язування якої маємо:

$$\begin{cases} A_{1,1} = -\frac{6cthc}{sh4c}, & A_{1,2} = 0, \\ A_{1,3} = \frac{e^{-2c}}{2ch2c}, & A_{1,4} = -\frac{e^{-2c}}{sh2c}, \\ G_1 = -\frac{6cthc}{sh2c}, & G_2 = -\frac{1}{sh2c}; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} A_{n,1} \times \Delta = -n(n^2 - 1)sh^2c, \\ A_{n,2} \times \Delta = -n^2(n^2 - 1)sh^2c, \\ A_{n,3} \times \Delta = -\frac{1}{2}(n^2 sh^2 - nshcchc + ne^{-nc} shnc), \\ A_{n,4} \times \Delta = -(n^3 sh^2 - n^2 shcchc + ne^{-nc} shnc); \\ E_{n,1} \times \Delta = (n^2 sh^2c + nshcchc + e^{-nc} shnc), \\ E_{n,2} \times \Delta = -\frac{1}{2}(n^2 sh^2c + n^2 shcchc + ne^{-nc} shnc), \\ E_{n,3} \times \Delta = \frac{1}{2}nsh^2c, \\ E_{n,4} \times \Delta = n^2 sh^2c; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} E_{n,1} \times \Delta = (n^2 sh^2c + nshcchc + e^{-nc} shnc), \\ E_{n,2} \times \Delta = -\frac{1}{2}(n^2 sh^2c + n^2 shcchc + ne^{-nc} shnc), \\ E_{n,3} \times \Delta = \frac{1}{2}nsh^2c, \\ E_{n,4} \times \Delta = n^2 sh^2c; \end{cases} \quad (14)$$

де $\Delta = sh^2nc - n^2sh^2c$.

Для напружень на контурі отвору отримаємо:

$$\sigma_{\beta} \Big|_{\alpha=c} = \sum_{i=1}^4 \sigma_{\beta,i}, \quad (15)$$

де

$$\sigma_{\beta,1} = \frac{Q}{3I} (L-S) 2shc(chc - \cos \beta) \left[-\frac{G}{ch2c} (cthc + \cos \beta) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) \left(4n^2 + \frac{(1 - e^{-2nc} + 4n^2 sh^2 c) n}{sh^2 nc - n^2 sh^2 c} \right) e^{-nc} shc \cos n\beta \right], \quad (16)$$

$$\sigma_{\beta,2} = \frac{Q}{3I} r^2 sh^2 c (chc - \cos \beta) \sum_{n=2}^{\infty} n^2 (n^2 - 1) shc e^{-nc} \times \\ \left\{ -2 + \frac{e^{-2nc} - 4n^2 sh^2 c - 1}{2(sh^2 nc - n^2 sh^2 c)} \right\} \sin n\beta, \quad (17)$$

$$\sigma_{\beta,3} = \frac{2Q}{I} (L-S) h (chc - \cos \beta) \left\{ -\frac{shc}{2ch2c} + thce^{-2c} \cos \beta + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[nshc - chc + \frac{1}{4(sh^2 nc - n^2 sh^2 c)} (3nshc + e^{-3nc} - chc + \right. \right. \\ \left. \left. + 4n^2 sh^3 c - 4n^2 sh^2 cchc) e^{-nc} \cos n\beta \right] \right\}, \quad (18)$$

$$\sigma_{\beta,4} = \frac{Q}{I} r h shc (chc - \cos \beta) \left\{ -2thce^{-2c} \sin \beta + 4e^{-2c} \sin \beta + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-nc} \left[4nshc - 4chc + \frac{1}{sh^2 nc - n^2 sh^2 c} (3nshc + e^{-3nc} - chc + \right. \right. \\ \left. \left. + 4n^2 sh^3 c - 4n^2 sh^2 cchc) \sin n\beta \right] \right\}. \quad (19)$$

Для напружень, що виникають на прямолінійному краю, будемо мати:

$$\sigma_{\beta} \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=0}^4 \sigma_{\beta,i}, \quad (20)$$

$$\sigma_{\beta,1} = \frac{2}{3} \frac{Q(L-S)}{I} r shc (1 - \cos \beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 (n^2 - 1) sh^2 c}{sh^2 nc - n^2 sh^2 c} \cos n\beta, \quad (21)$$

$$\sigma_{\beta,2} = \frac{2Q}{3I} r^2 sh^2 c (1 - \cos \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (n^2 - 1) sh^2 c}{sh^2 nc - n^2 sh^2 c} \sin n\beta, \quad (22)$$

$$\sigma_{\beta,3} = \frac{2Q(L-S)h}{I} \left\{ 1 - (1 - \cos \beta) \sum_{n=2}^{\infty} (n^3 sh^2 c - n^2 shc chc + nshnce^{nc}) \times \right. \\ \left. \times \frac{\cos n\beta}{sh^2 nc - n^2 sh^2 c} \right\} \quad (23)$$

$$\sigma_{\beta,4} = \frac{2Qhrshc}{I} \left\{ 1 - (1 - \cos \beta) \sum_{n=2}^{\infty} 2n^2 (n^2 sh^2 c - nshc chc + shnce^{nc}) \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin n\beta}{sh^2 nc - n^2 sh^2 c} \right\} \quad (24)$$

Напруження на контурі отвору подано в табл. 1 в припущенні, що висота $2h = 8r$, довжина $L = 10h$, тобто довжина в п'ять разів перевищує її висоту, $S = \frac{1}{4}$, тобто центр отвору міститься на віддалі однієї четвертої довжини пластини від зацмленого краю $b = \lambda r = 1,5r$; величина $k = \frac{Qh^2}{I}$.

Таблиця 1. Напруження на контурі отвору

θ°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$\sigma_{\beta _k}$	-0,01	-0,52	0,92	1,94	3,25	4,05	3,76	2,11	0,01	-1,94	-2,70	1,86	4,80

Висновки. Розрахунки показують, що максимальне значення напруження на контурі отвору набагато перевищує максимальне значення напруження на прямолінійному краю. У випадку параметрів, використаних при складанні таблиці 1, напруження на прямолінійному краю в точці 0 має значення $[\sigma_{\beta}]_0 = \frac{2,21Qh^2}{I}$.

Література

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мухелишвили. – М.: Наука, 1996. – 707 с.
2. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н.Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С.Уфлянд. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
4. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости / Я.С.Уфлянд. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 232 с.
5. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. Графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность / Р.Петерсон [пер. з англ.]. – М.: Мир, 1977. – 302 с.

6. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций / Р.Р.Мавлютов. – М.: Наука, 1981. – 140 с.
7. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П.Тимошенко, Дж.Гудьер. – М.: Наука, 1989. – 560 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 26.09.2013 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Векериком В.І.,
д.ф.-м.н., професором Сулимом Г.Т. (м. Львів)*

DISTRIBUTION OF STRESSES IN AN SEMI-INFINITE PLATE WITH CIRCULAR HOLE UNDER ACT CONSTANT DIAMETRICAL FORCE

O. Ponomarenko¹, I. Tsidylo²

¹*Lviv national agrarian university; 80381, Lviv region, Zovkva district,
1. Dybljany, V. Velykogo str., 1; ph./fax +380 (32) 224-23-35;
e-mail: lnau@mail.lviv.ua*

²*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15;
e-mail: tm@nung.edu.ua*

The problem of stresses concentration in an semi-infinite plate with circular hole under act constant diametrical force is considered. The analysis is developed on the basis of the Airy's stresses functions in generalized plane stresses and by applying bipolar coordinates.

Key words: bipolar coordinates, strain state, concentration of stresses.

УДК 539.3

СКРУТ ПРИЗМАТИЧНОГО СТРИЖНЯ З ПОЗДОВЖНИМИ ТРІЩИНАМИ

Я. В. Чумаченко

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: e-mail: fiveua@ya.ru

В роботі отримано розв'язок задачі про скрут прямокутного призматичного стрижня, який має довільно орієнтовані поздовжні тріщини. Функція напруження знаходиться у вигляді суми деяких гармонічних функцій і частинного розв'язку рівняння Пуассона. Кожна функція-доданок пов'язана з окремою ланкою граничного контуру і подається у вигляді косинус-розв'язень, які записані у відповідній локальній системі еліптичних координат. Для різних частинних конфігурацій наведено розраховані значення жорсткості стрижня, а також дотичних напружень в точках граничного контуру.

Ключові слова: призматичний стрижень, поздовжні тріщини, еліптична система координат, жорсткість стрижня.

Поперечний переріз стрижня показаний на рис. 1, а. Передбачається наявність декількох поздовжніх тріщин, розташованих та орієнтованих довільно, що дозволяє моделювати реальні конфігурації, які можуть зустрітися в застосуваннях. Відзначимо, що довільність геометрії перерізу і наявність гострих вхідних кутів ускладнює дослідження такого об'єкту як за допомогою аналітичних [1], так і традиційних чисельних методів [2, 3]. У даній роботі ефективний розв'язок задачі скруту отримано на основі підходу [4], який враховує специфіку кусково-лінійних границь.

Як відомо [5], функція напруження при скруті $U(x, y)$ задовольняє рівнянню Пуассона

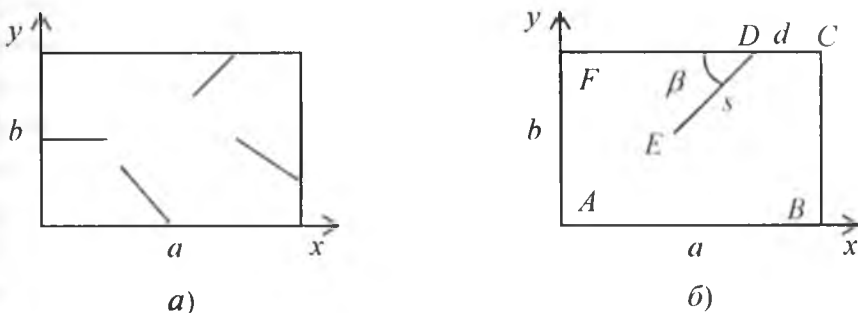


Рис. 1. Поперечні перерізи стрижня

$$\nabla^2 U = -2 \quad (1)$$

і граничній умові

$$U|_l = 0, \quad (2)$$

де L – контур поперечного перерізу, включаючи тріщини. Розв’язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$U = u - (x^2 + y^2)/2. \quad (3)$$

Тут u – деяка гармонічна функція (спряжена функція скруту), яка підлягає визначенню.

Кожній ланці контуру L поставимо у відповідність систему локальних прямокутних координат (x_i, y_i) , де i – номер ланки. Початок відліку системи розташуємо в центрі ланки і направимо вісь y_i в область визначення функції u . Орієнтацію системи координат оберемо так, щоб $\hat{x}_i \times \hat{y}_i = \hat{z}$, де $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}$ – відповідні орти. За допомогою співвідношень

$$x_i = f_i \operatorname{ch} \xi_i \cos \eta_i, \quad y_i = f_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i \quad (4)$$

(f_i – половина довжини ланки) введемо також локальні еліптичні координати (ξ_i, η_i) і будемо розглядати в подальшому кожен ланку контуру як вироджений еліпс $\xi_i = 0$. Тоді [4]

$$u = \sum_{i=1}^N u_i + \tilde{C}, \quad (5)$$

$$u_i = D'_0 \xi_i + \sum_{n=1}^{\infty} D'_n e^{-n \xi_i} \cos n \eta_i \quad (6)$$

де N – кількість ланок контуру. Стала \tilde{C} і коефіцієнти розкладу D'_n підлягають визначенню, при цьому

$$\sum_{i=1}^N D'_0 = 0 \quad (7)$$

Відзначимо, що всюди поза межами контуру $\xi_i > 0$, $i = \overline{1, N}$. Можна також показати, що коли функція U описує розв’язок розглянутої крайової задачі, то $D'_n = O(1/n^{2+\alpha})$, $\alpha > 0$. Це означає, що формули (3), (5), (6) ефективно представляють функцію напруження як всередині області визначення, так і на її границі.

Опустимо точку спостереження на i -ту ланку. Тоді, згідно (2), (3), (5) і (6),

$$\sum_{n=1}^{\infty} D'_n \cos n \eta_i + \sum_{l \neq i} \left[D'_0 \xi_l + \sum_{n=1}^{\infty} D'_n e^{-n \xi_l} \cos n \eta_l \right]_{\xi_l=0} + \tilde{C} = \left[\frac{x^2 + y^2}{2} \right]_{\xi_i=0}. \quad (8)$$

Проектуючи отриману рівність на ортогональний функціональний базис $\{1, \cos n\eta_i\}_{n=1}^{\infty}$, $\eta_i \in (0, \pi)$, після нескладних перетворень отримаємо

$$\sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}'' D_n^j + 2\bar{C} = C_0', \quad (9)$$

$$D_m^i + \sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}'' D_n^j = C_m', \quad m = \overline{1, \infty}, \quad i = \overline{1, N} \quad (10)$$

Тут

$$a_{m0}'' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \xi_i \Big|_{\xi_i=0} \cos m\eta_i d\eta_i \quad (11)$$

$$a_{mn}'' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [e^{-n\xi_i} \cos n\eta_i]_{\xi_i=0} \cos m\eta_i d\eta_i \quad (12)$$

$$C_m' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [x^2 + y^2]_{\xi=0} \cos m\eta_i d\eta_i \quad (13)$$

Рівності (9) и (10) утворюють нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C' та D_n^i , яка замикається рівністю (7). Розв'язок системи знаходимо методом усікання.

Визначивши коефіцієнти розкладу, ми зможемо розрахувати технічні характеристики стрижня. Нижче в ролі таких вибрано безрозмірні

величини $k_i = \frac{C}{Gab^3} = \frac{2}{ab^3} \iint_{\Omega} Ud\Omega$ і $\tau = \frac{|\tau_{1z}|}{G\theta b} c = \frac{1}{b} \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|$, де C – жорсткість стрижня при скруті, G – модуль зсуву матеріалу стрижня, θ – кут скруту на одиницю довжини волокон стрижня, τ_{1z} – дотичне напруження в точках граничного контуру, Ω – поперечний переріз стрижня і n – нормаль до контуру. Розроблений обчислювальний алгоритм було протестовано для різних конфігурацій поперечного перерізу. В

кожному конкретному випадку спостерігалась збіжність чисельного розв'язку до деякого значення, яке не залежить від способу усікання застосованих рядів. В табл. 1 приведено дані, які характеризують швидкість збіжності обчислювального процесу. Розглядається геометрія, вказана на рис.1, б, при $b/a=1$, $d/a=0,5$ и $\beta=45^\circ$. Параметр M є верхньою границею індексу суми n у формулі (6) після усікання. В даному випадку він береться однаковим для всіх ланок. Величина τ_1 співпадає зі значенням τ в точці $x=a/2$, $y=0$. З таблиці виходить, що для забезпечення достатньої для практики точності в розкладі (6) достатньо взяти лише декілька перших доданків. Також видно, що наявність три-

щини не позначається на швидкості збіжності. Аналогічна ситуація спостерігається і для інших співвідносин a/b .

Таблиця 1. Результати розрахунків

M	k_1		τ_1	
	$s = 0$	$s/b = 0,5$	$s = 0$	$s/b = 0,5$
1	0,2393	0,1508	0,487	0,473
2	0,2332	0,1505	0,434	0,402
3	0,1443	0,1108	0,673	0,645
4	0,1405	0,1101	0,663	0,630
5	0,1406	0,1099	0,677	0,643
10	0,1406	0,1099	0,676	0,641
20	0,1406	0,1099	0,675	0,641
Точно [5]	0,1406	—	0,675	—

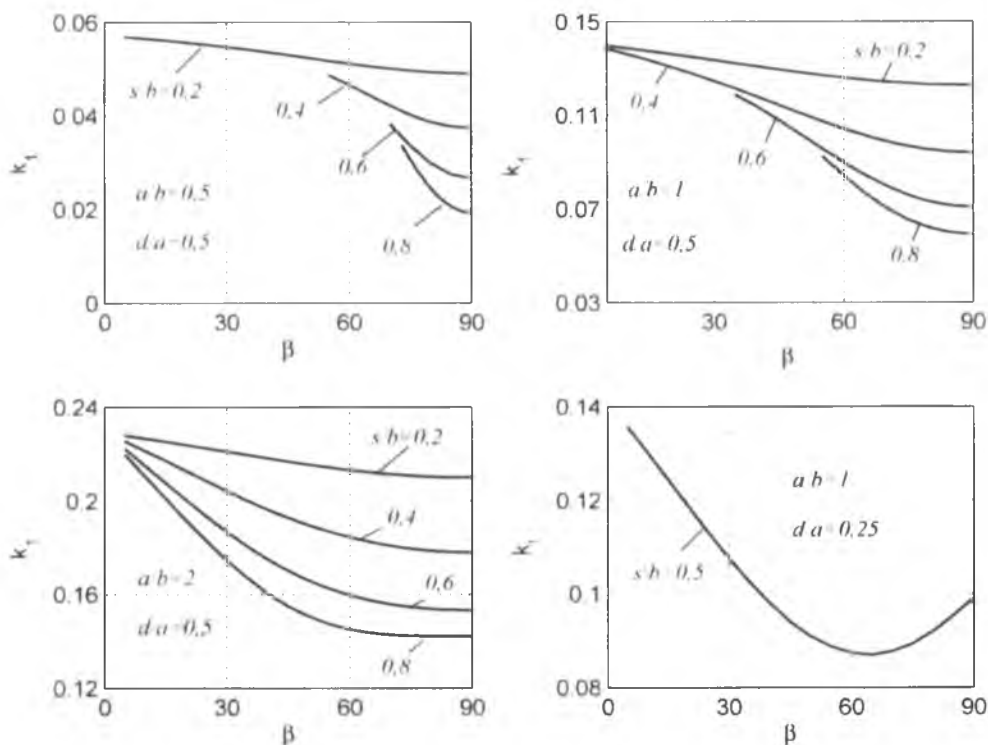


Рис. 2. Розрахові залежності параметра k_1

В табл. 2 включено результати розрахунку значень k_1 у випадку тріщини, орієнтованої перпендикулярно стороні прямокутника ($a/b=1, d/a=0.5$). Для порівняння наведено дані, які є середньо арифметичним двох наближень, отриманих в [5]. Хоча й спостерігається деяка відмінність, результати близькі, що підтверджує достовірність проведених розрахунків.

Таблиця 2. Результати розрахунку значень k_1

s/b	0,75	0,5	0,25	0
Запропонований метод	0,0608	0,0811	0,1155	0,1406
[5]	0,0615	0,0800	0,1175	0,1406

На рис. 2 наведені розраховані залежності параметра k_1 від довжини тріщини s і кута її нахилу β коли $a/b = 0,5$; 1 і 2. Видно, що для розташованої по центру тріщини жорсткість завжди мінімальна при $\beta = 90^\circ$. У випадку тріщини, посунутої в бік кутової точки ($d/a = 0,25$), жорсткість досягає мінімуму при $\beta < 90^\circ$.

На рис. 3 наведено отриманий розподіл дотичних напружень у поперечному перерізі стрижня з похилою тріщиною

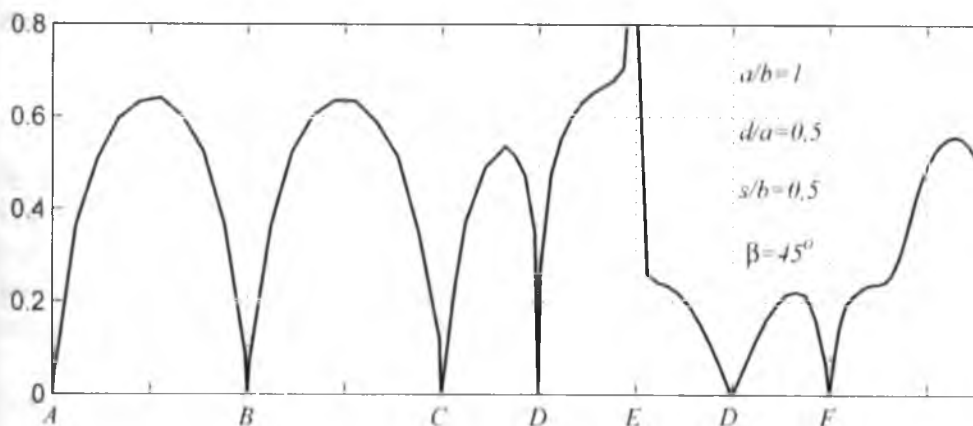


Рис. 3. Розподіл дотичних напружень у поперечному перерізі стрижня з похилою тріщиною

Разроблений алгоритм застосовувався також для розрахунку характеристик більш складних конфігурацій. Зокрема встановлено, що у випадку поперечного перерізу, вказаного на рис. 1,а, $k_1 = 0,1166$. Тут $a/b = 5/3$ і усі чотири тріщини мають однакову довжину $s = b/3$. Три з них нахилені під кутом 45° . Верхня тріщина посунута від правої вершини чотирикутника на величину $0,34a$, а права тріщина знаходиться від нижньої вершини на $b/3$.

Література

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А.Самарский. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

3. Бребия К. Применение метода граничных элементов в технике / К.Бребия, С.Уокер. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
4. Чумаченко Я.В. Возможное решение уравнения Пуассона в многоугольных областях / Я.В.Чумаченко // Вісник Дніпропетровського університету. Фізика. Радіоелектроніка. – 1998. – №4. – С. 88-92.
5. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х.Арутюнян, Б.Л.Абрамян. – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.

Стаття поступила в редакційну колегію 10.12.2012 р.

*Рекомендовано до друку д. т. н., професором Мойсишиним В.М.,
д.ф.-м.н., професором Михайленком В.В (м. Житомир)*

TORSION OF PRISMATIC CORE WITH LONGITUDINAL CRACKS

Ya. Chumachenko

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: fiveua@ya.ru*

The paper presents a solution of the torsion problem for a rectangular prismatic bar with arbitrarily oriented longitudinal cracks. The stress function is found in the form of a sum of harmonic functions and a particular solution of the Poisson equation. Each component of the sum is associated with an individual segment of the boundary and is represented by a cosine development written in the respective local elliptic coordinates.

The calculated values of the torsional rigidity and the tangential stress are given for several particular configurations.

Key words: prismatic core, longitudinal cracks, elliptic coordinate system, the rigidity of the rod.

УДК 539.376

ПОТЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ОДНОЧАСТОТНОГО НАБЛИЖЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ НЕПРУЖНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ

В. В. Михайленко¹, О. В. Лущиків²

¹Житомирський державний університет ім. І. Франка; м. Житомир

²Житомирський державний технологічний університет; м. Житомир

Показано, що визначальні рівняння непружних фізично нелінійних п'єзоелектричних тіл при моногармонічному навантаженні у межах гіпотези одностотності коливань можна виразити через потенціали.

Ключові слова: п'єзоелектричні тіла, одностотне наближення, амплітудні рівняння.

Припустимо, що в результаті дії гармонічного навантаження з круговою частотою ω в п'єзоелектричному тілі встановлюється одночастотний (моногармонічний) напружено-деформований і електричний стан виду [1, 2]

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma'_{ij} \cos \omega t - \sigma''_{ij} \sin \omega t, \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon'_{ij} \cos \omega t - \varepsilon''_{ij} \sin \omega t, \\ E_j &= E'_j \cos \omega t - E''_j \sin \omega t, \\ D_j &= D'_j \cos \omega t - D''_j \sin \omega t.\end{aligned}\tag{1}$$

Виберемо за незалежні змінні амплітуди ε'_{ij} , ε''_{ij} механічної деформації і D'_j , D''_j індукції електричного поля. Тоді амплітуди σ'_{ij} , σ''_{ij} механічного напруження і E'_k , E''_k напруженості електричного поля розглядаються як нелінійні функції незалежних змінних

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \\ \sigma''_{ij} &= \sigma''_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \\ E'_j &= E'_j(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \\ E''_j &= E''_j(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k).\end{aligned}\tag{2}$$

Ці функції повинні задовольняти умову інваріантності відносно перетворення зсуву в часі, тобто відносно заміни в (1) ωt на $\omega t + \varphi$. Цю умову можна записати у матричному вигляді

$$QS(A) = S(QA),$$

де

$$S = (\sigma'_{ij}, \sigma''_{ij}, E'_k, E''_k)^T, \quad A = (\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k)^T,$$

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Функції (2) вважаються диференційовними по $\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k$. Тоді шляхом виключення параметра φ умову інваріантності можна записати в диференціальній формі

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial D''_k} D'_k + i \bar{\sigma}_{ij} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} - \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} + \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial D''_k} D'_k + i \bar{E}_i &= 0. \end{aligned}$$

де введені позначення

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i \sigma''_{ij}, \quad \bar{E}_k = E'_k + i E''_k, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Розглянемо функції дисипації [1, 4]

$$\bar{D} = \sigma''_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} \varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k - E''_k D''_k \quad (3)$$

і накопичення

$$\bar{U} = \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k. \quad (4)$$

Безпосередньою підстановкою (з врахуванням умови інваріантності) можна перевірити, що ці функції задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial D''_k} D'_k = 0. \quad (5)$$

Подальший виклад спирається на наступну теорему.

Теорема. Нехай \bar{X} – елемент N -мірного векторного простору E_N з внутрішнім добутком $\bar{A} \otimes \bar{B}$, $\bar{Y}(\bar{X})$ – неперервно-диференційовне відображення $E_N \rightarrow E_N$, а $F(\bar{X})$ – скалярна неперервно-диференційовна функція. Тоді будь-який розв'язок рівняння

$$\bar{X} \otimes \bar{Y}(\bar{X}) = F(\bar{X}) \quad (6)$$

можна подати у вигляді

$$\bar{Y}(\bar{X}) = \text{grad} \Psi(\bar{X}) + \bar{U}(\bar{X});$$

$$\Psi(\bar{X}) = \int_0^1 F(\lambda \bar{X}) \frac{d\lambda}{\lambda};$$

$$U_i(\bar{X}) = \int_0^1 \lambda X_i \left[\frac{\partial Y_i(\lambda \bar{X})}{\partial (\lambda X_i)} - \frac{\partial Y_i(\lambda \bar{X})}{\partial (\lambda X_j)} \right] d\lambda; \quad (7)$$

$$\bar{U}(\bar{X}) \otimes \bar{X} = 0.$$

Твердження теореми перевіряється шляхом диференціювання рівності

$$\int_0^1 \bar{X} \otimes \bar{Y}(\lambda \bar{X}) d\lambda = \Psi(\bar{X}),$$

яка утворюється з (6), якщо замінити \bar{X} на $\lambda \bar{X}$ і скористатись позначенням функції $\Psi(\bar{X})$ з (7).

Розглянемо функції (3) і (4)

$$\sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k - E''_k D''_k = \bar{D}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_l, D''_l), \quad (8)$$

$$\sigma'_i \varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k = \bar{U}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_l, D''_l). \quad (9)$$

Введемо позначення $\bar{X} = (\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k)$, $\bar{Y} = (\sigma'_{ij}, -\sigma''_{ij}, E'_k, -E''_k)$. Тоді розв'язок рівняння (8) згідно з наведеною вище теоремою можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= -\frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}} - D''_{ij}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} + D'_{ij}, \\ E'_k &= -\frac{\partial D}{\partial D'_k} - R''_k, \quad E''_k = \frac{\partial D}{\partial D''_k} + R'_k, \end{aligned} \quad (10)$$

де функція D визначається співвідношенням

$$D = \int_0^1 \bar{D}(\lambda \varepsilon'_{ij}, \lambda \varepsilon''_{ij}, \lambda D'_k, \lambda D''_k) \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (11)$$

Для функцій $D'_{ij}, D''_{ij}, R'_k, R''_k$ маємо

$$D'_{ij} \varepsilon'_{ij} + D''_{ij} \varepsilon''_{ij} + R'_k D'_k + R''_k D''_k = 0. \quad (12)$$

Підставляючи (10) в рівняння (9), отримуємо

$$\begin{aligned} D'_{ij} \varepsilon''_{ij} - D''_{ij} \varepsilon'_{ij} + R'_k D''_k - R''_k D'_k &= \\ &= \bar{U}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_l, D''_l). \end{aligned} \quad (13)$$

Тут враховано, що функція D (11), як і функція \bar{D} , задовольняє диференціальному рівнянню (5).

Введемо позначення $\bar{X} = (\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k)$, $\bar{Y} = (-D''_{ij}, D'_{ij}, -R''_k, R'_k)$. Застосувавши знову наведену вище теорему, приходимо до розв'язку рівняння (13)

$$\begin{aligned} D'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + g''_{ij}, \quad D''_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - g'_{ij}, \\ R'_k &= \frac{\partial U}{\partial D''_k} + g''_k, \quad R''_k = -\frac{\partial U}{\partial D'_k} - g'_k. \end{aligned} \quad (14)$$

Функція U визначається співвідношенням

$$U = \int_0^1 \bar{U}(\lambda \varepsilon'_{ij}, \lambda \varepsilon''_{ij}, \lambda D'_k, \lambda D''_k) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

і тому також задовольняє диференціальне рівняння (5).

Об'єднуючи (10) і (11), отримуємо сумісний розв'язок системи рівнянь (8) і (9) у вигляді

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}} + g'_{ij}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} + g''_{ij}, \quad (15)$$

$$E'_k = \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k} + g'_k, \quad E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k} + g''_k.$$

Функції g'_{ij} , g''_{ij} , g'_k , g''_k задовольняють умовам

$$\begin{aligned} g'_{ij}\varepsilon'_{ij} + g''_{ij}\varepsilon''_{ij} + g'_k D'_k + g''_k D''_k &= 0, \\ g''_{ij}\varepsilon'_{ij} - g'_{ij}\varepsilon''_{ij} + g''_k D'_k - g'_k D''_k &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

причому перша з них є наслідком теореми, застосованої до рівняння (13), а друга – наслідком рівнянь (13), (14) і (5).

Підставимо рівняння (15) у (8) і (9), враховуючи при цьому рівності (5) і (16). В результаті отримаємо вирази для функцій дисипації \bar{D} і накопичення \bar{U} через потенціали відповідно D і U

$$\bar{D} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} \varepsilon'_{ij} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}} \varepsilon''_{ij} + \frac{\partial D}{\partial D'_k} D'_k + \frac{\partial D}{\partial D''_k} D''_k,$$

$$\bar{U} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} \varepsilon'_{ij} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} \varepsilon''_{ij} + \frac{\partial U}{\partial D'_k} D'_k + \frac{\partial U}{\partial D''_k} D''_k.$$

Таким чином, умови (16) призводять до того, що функції g'_{ij} , g''_{ij} , g'_k , g''_k в рівняннях (15) не дають ніякого внеску ні в функцію дисипації, ні в функцію накопичення. Skorиставшись третім із співвідношень (7) і умовами інваріантності відносно перетворення зсуву в часі в диференціальній формі, можна показати, що достатніми умовами рівностей

$$g'_{ij} = 0, \quad g''_{ij} = 0, \quad g'_k = 0, \quad g''_k = 0$$

і тим самим зображення амплітудних рівнянь в потенціалах

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \quad (17)$$

$$E'_k = \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k}, \quad E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k}$$

є такі умови симетрії

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} &= \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial \sigma''_{kl}}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \\ \frac{\partial E'_k}{\partial D'_l} - \frac{\partial E''_k}{\partial D''_l} &= \frac{\partial E'_l}{\partial D'_k} - \frac{\partial E''_l}{\partial D''_k}, \\ \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial D'_k} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial D''_k} &= \frac{\partial E'_k}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial E''_k}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \end{aligned} \quad (18)$$

Диференціюючи рівності (17), легко переконатися, що ці умови є і необхідними.

Подібним чином можна отримати аналогічні результати для інших наборів незалежних змінних. Відповідна консервативна характеристика знаходиться шляхом розписування виразу для функції дисипації з використанням відповідних умов інваріантності відносно перетворення зсуву в часі в диференціальній формі. Наприклад, у випадку залежностей

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, E'_k, E''_k), \\ \sigma''_{ij} &= \sigma''_{ij}(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, E'_k, E''_k), \\ D'_i &= D'_i(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, E'_k, E''_k), \\ D''_i &= D''_i(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, E'_k, E''_k)\end{aligned}\quad (19)$$

розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned}\sigma''_{ij}\epsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\epsilon''_{ij} + D'_k E''_k - D''_k E'_k &= \bar{D}(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, E'_l, E''_l), \\ \sigma'_{ij}\epsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\epsilon''_{ij} - D'_k E'_k - D''_k E''_k &= \bar{H}(\epsilon'_{kl}, \epsilon''_{kl}, E'_l, E''_l)\end{aligned}$$

однозначно визначений і зображується у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \frac{\partial H}{\partial \epsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \epsilon''_{ij}}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \epsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \epsilon'_{ij}}, \\ D'_k &= -\frac{\partial H}{\partial E'_k} + \frac{\partial D}{\partial E''_k}, \quad D''_k = -\frac{\partial H}{\partial E''_k} - \frac{\partial D}{\partial E'_k}\end{aligned}\quad (21)$$

тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови симетрії:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl}} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \epsilon''_{kl}} &= \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \epsilon'_{ij}} - \frac{\partial \sigma''_{kl}}{\partial \epsilon''_{ij}}, \\ \frac{\partial D'_k}{\partial E'_l} - \frac{\partial D''_k}{\partial E''_l} &= \frac{\partial D'_l}{\partial E'_k} - \frac{\partial D''_l}{\partial E''_k}, \\ \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial E'_k} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial E''_k} &= -\left(\frac{\partial D'_k}{\partial \epsilon'_{ij}} - \frac{\partial D''_k}{\partial \epsilon''_{ij}} \right).\end{aligned}\quad (22)$$

при цьому

$$\begin{aligned}H &= \int_0^1 \bar{H}(\lambda \epsilon'_{ij}, \lambda \epsilon''_{ij}, \lambda E'_k, \lambda E''_k) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ D &= \int_0^1 \bar{D}(\lambda \epsilon'_{ij}, \lambda \epsilon''_{ij}, \lambda E'_k, \lambda E''_k) \frac{d\lambda}{\lambda}.\end{aligned}$$

У загальному випадку розв'язок системи рівнянь (20) містить складові, аналогічні функціям $g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k$ в рівняннях (15). Однак вони також не дають ніякого внеску в дисипативну \bar{D} і консервативну \bar{H} характеристики. Сказати що-небудь більше про ці функції, як і про функції $g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k$ з (15), не можна.

Якщо амплітудні рівняння отримані в результаті усереднення за Гальоркіним (перша інтерпретація амплітудних рівнянь [5]) яких-небудь загальних визначальних рівнянь, умова інваріантності амплітуд

відносно зсуву в часі виконується автоматично. При цьому виникає питання про виконання умов симетрії типу (18) і (22). Якщо в якості загальних виступають кратноінтегральні співвідношення електров'язкопружності, для ядер яких постулюється «принцип взаємності», рівності (18) або (22) виконуються [3]. Більше того, мають місце сильніші рівності, наприклад

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl}} = \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \epsilon'_{ij}}, \quad \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \epsilon''_{kl}} = \frac{\partial \sigma''_{kl}}{\partial \epsilon''_{ij}},$$

які є достатніми, але не необхідними для рівностей (18). Отже умови симетрії (18) допускають ширший клас амплітудних залежностей, що виражаються через потенціали, ніж припущення про виконання «принципу взаємності» для ядер загальної кратноінтегральної теорії електров'язкопружності.

У загальному випадку питання про симетрію типу (18) або (22), як і питання про виконання «принципу взаємності», залишається відкритим. Незважаючи на це, будь-які амплітудні рівняння, отримані в результаті усереднення по Гальоркіну загальних рівнянь, допускають виділення потенціальної частини. Решта членів цих рівнянь типу функцій g'_{ij} , g''_{ij} , g'_k , g''_k в (15) не будуть впливати на дисипацію та накопичення і тому, як це робиться в подібних випадках в класичній континуальній механіці, можуть бути відкинуті.

У лінійному випадку рівняння (17) і (21) є точними.

Наведені результати отримано незалежно від типу матеріальної симетрії середовища. При їх використанні для середовищ з конкретною симетрією можна виходити з тих чи інших зображень скалярних функцій тензорних аргументів в рівняннях (17) і (21). Це дозволяє конкретизувати амплітудні рівняння безпосередньо за результатами експериментів на гармонічне навантаження.

Якщо покласти

$$\tilde{U} = U + iD,$$

то рівняння (17) можна записати в комплексному вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \epsilon'_{ij}} + i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \epsilon''_{ij}}, \quad \tilde{E}_k = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial D'_k} + i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial D''_k}.$$

Аналогічне співвідношення можна отримати для рівнянь (21).

Література

1. Карнаухов В.Г. Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций / В.Г.Карнаухов, И.Ф.Киричок. – Киев: Наук. думка, 1988. – Т.4. – 320 с.
2. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания / Ю.А.Митропольский. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 344 с.

3. Михайленко В.В. О потенциальности определяющих уравнений для неупругих пьезоэлектрических материалов при моногармонических воздействиях / В.В.Михайленко // Прикл. механика. – 1997. – 33, №6. – С. 49-51.
4. Karnaukhov V.G. Nonlinear single-frequency vibrations and dissipative heating of inelastic piezoelectric bodies / V.G.Karnaukhov, V.V.Mikhailenko // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 5. – P. 521-547.
5. Senchenkov I.K. Thermomechanical behaviour of nonlinear viscoelastic materials under harmonic loading / I.K.Senchenkov, V.G.Karnaukhov // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 11. – P. 1400-1432.

Стаття надійшла до редакційної колегії 3.12.2013 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором Мойсишиним В.М.,
д.ф.-м.н., професором Кушніром Р.М. (м. Київ)*

POTENTIAL EQUATIONS OF ONE-FREQUENCY APPROACH TO STATIONARY OSCILLATIONS OF INELASTIC PIEZOELECTRIC SOLIDS

V.V. Mikhailenko¹, O.V. Lushchikov²

¹*Zhytomyr State University named by I. Franco; Zhytomyr*

²*Zhytomyr State Technological University; Zhytomyr*

This paper proposes a proof of possibility to express constitutive equations of physically nonlinear piezoelectric solids under monoharmonic loading in potentials in case of one-frequency oscillations.

Key words: piezoelectric solids, monoharmonic approach, amplitude equations.

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ КОНВЕКТИВНОГО РУХУ З ПАРНИМ ПРОФІЛЕМ ШВИДКОСТІ

В. В. Негрич, Я. М. Дем'янчук, Г. Я. Процюк

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: trans@nung.edu.ua*

Досліджується гідродинамічна стійкість в'язкої нестисливої рідини розміщеної між вертикальними паралельними поверхнями. Розглядалася вільна конвекція з парним профілем швидкості. Для дослідження використовується варіаційний принцип нерівноважної термодинаміки – метод локального потенціалу. Визначається критичне значення критерія Грасгофа, в залежності від числа Прандтля та значення хвильового числа, при якому відбувається перехід від простої до складної дисипативної структури. Також враховувався кут нахилу шару по відношенню до гравітаційного поля. Представлений метод розрахунків з використанням тільки однієї пробної функції дозволяє отримати порівнянні результати з кінетичним методом, що використовує складні пробні функції.

Ключові слова: конвективний рух рідини, локальний потенціал, дисипативні структури, критерій Грасгофа, критерій Прандтля.

Вступ

В практичних умовах процеси доцільно проводити в високо інтенсивному стаціонарному режимі. Тому їх проводять в умовах далеких від рівноважних, в нелінійній області залежності потоків від термодинамічних сил. В цьому випадку проявляється велика різноманітність станів. Зі збільшенням величини сил, які накладаються на систему, в ній відбуваються зміни, нагромадження яких призводить до швидкої перебудови режиму протікання незворотніх процесів; ці зміни викликають нестійкість у вигляді просторових дисипативних структур.

Не зважаючи на велику різноманітність стаціонарних станів, форм нестійкості і дисипативних структур в нерівноважних умовах, їх об'єднують деякі спільні закономірності поведінки систем віддалених від рівноваги, які добре вписуються в фундаментальну теорію необоротних процесів.

Аналіз сучасних досягнень розвитку досліджуваної проблеми

На відміну від звичайної проблеми Бенарда конвективний рух рідини, яка міститься між двома вертикальними площинами, відбувається за нескінчено малої різниці температур. В такій системі, при деяких критичних значеннях градієнта температури настає вторинна конвенція

яка проявляється в переході одного типу ламінарного руху в інший, або безпосередньо в турбулентний.

Мета роботи

Методом локального потенціалу вивчається границя стійкості ламінарної течії рідини з парним профілем швидкості.

Виклад основного матеріалу дослідження

В ролі прикладу вільної конвекції з парним профілем швидкості може служити система з внутрішнім джерелом теплоти [1]. Таким джерелом може бути хімічна реакція, джоулева теплота і інші. Дослідимо методом локального потенціалу гідродинамічну нестійкість такої системи. Нехай шар нестисливої в'язкої рідини розміщено в каналі, протилежні грані якого паралельні і підтримуються при постійній і однаковій температурі, довжина каналу в багато разів перевищує відстань між цими гранями і, відповідно, рух рідини в середній частині каналу можна приймати плоско-паралельним. Кут нахилу шару по відношенню до гравітаційного поля довільний.

Рівняння збереження для такої системи в векторній формі запишеться [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V &= -\frac{1}{\rho} \nabla \rho + \nu \nabla^2 V + g \beta T_1, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla T &= \lambda \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho \cdot C_p}, \end{aligned} \quad (1)$$

тут λ – коефіцієнт теплопровідності, Q – потужність внутрішніх джерел теплоти.

Ця система рівнянь може бути представлена в безрозмірній векторній формі

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + Gr(V \nabla) V &= -\nabla \rho + \nabla^2 V + T_1, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + Gr(V \nabla) T &= \frac{1}{Pr} \nabla^2 T, \end{aligned} \quad (2)$$

де $Gr = \frac{g \rho q h^2}{2\nu}$ і $Pr = \frac{\nu}{\lambda}$ числа Грасгофа і Прандтля. Використовуються

наступні одиниці: h – довжини; $\frac{h^2}{\nu}$ – часу; $\frac{q h^4 g \beta}{2\nu}$ – швидкості; $\frac{q h^2}{2}$ –

температури; $\frac{\rho g \beta h^3}{2}$ – тиску.

Рівняння допускають наступні стаціонарні рішення для швидкості і температури [1]:

$$V_x = \frac{\cos \alpha}{60} (1 - 6x^2 + 5x^4) \quad (3)$$

$$T_x = 1 - x^2 \quad (4)$$

Запишемо систему рівнянь (1) в збуреному вигляді

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Gr[(v\nabla)v + (v,\nabla)v] = -\nabla p + \nabla^2 v + T',$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Gr[v\nabla T + v,\nabla T] = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T. \quad (5)$$

Проекції цих рівнянь на координатні осі мають вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - Gr - T \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z - \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) Gr + T \cos \alpha, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T \frac{1}{Pr} - \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Система рівнянь (6) використовується для отримання локального потенціалу. Кожне з рівнянь цієї системи домножуємо на відповідні прирости, додаємо, їх і враховуючи що

$$-\frac{\partial v_x}{\partial t} \delta v_x = -\frac{\partial v_x''}{\partial t} \delta v_x - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta v_x)^2,$$

$$-\frac{\partial v_z}{\partial t} \delta v_z = -\frac{\partial v_z''}{\partial t} \delta v_z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta v_z)^2,$$

$$-\frac{\partial T}{\partial t} \delta T = -\frac{\partial T''}{\partial t} \delta T - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta T)^2,$$

після інтегрування частинами отриманого виразу масмо:

$$L = \int \left[\begin{aligned} & \frac{\partial v_x''}{\partial t} v_x + \frac{\partial v_z''}{\partial t} v_z + \frac{\partial T''}{\partial t} T + \frac{\partial p''}{\partial x} v_x + \frac{\partial p''}{\partial z} v_z - \\ & - \frac{\partial^2 v_x''}{\partial x^2} v_x - T'' v_x \cos \alpha - \frac{\partial^2 v_z''}{\partial z^2} v_z + T'' v_z \sin \alpha - \\ & - \frac{\partial^2 v_x''}{\partial x^2} v_z - \frac{\partial^2 v_z''}{\partial z^2} v_x + v_x'' \frac{\partial v_x}{\partial x} Gr + v_z'' \frac{\partial v_z}{\partial z} Gr - \\ & - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T''}{\partial x^2} T - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T''}{\partial z^2} T + v_x'' \frac{\partial T}{\partial x} T Gr + v_z'' \frac{\partial T}{\partial z} T Gr + \\ & + v_x'' \frac{\partial T''}{\partial z} T Gr \end{aligned} \right] dx. \quad (7)$$

Використовуючи збурення в формі

$$\left. \begin{aligned} u' &= G e^{ikz} e^{\sigma t}, & u'^0 &= G^0 e^{ikz} e^{\sigma^0 t}, \\ w' &= \frac{i}{k} \frac{dG}{dx} e^{ikz} e^{\sigma t}, & w'^0 &= \frac{i}{k} \frac{dG_0}{dx} e^{ikz} e^{\sigma^0 t}, \\ T' &= \theta e^{ikz} e^{\sigma t}, & T'^0 &= \theta^0 e^{ikz} e^{\sigma^0 t}, \\ p' &= \eta e^{ikz} e^{\sigma t}, & p'^0 &= \eta^0 e^{ikz} e^{\sigma^0 t} \end{aligned} \right\}$$

і пробні функції

$$\left. \begin{aligned} G &= A_1(1-x^2)^2 + A_2 x(1-x^2)^2, \\ \theta &= B_1(1-x^2)(5-x^2) + B_2 x(1-x^2)(7-3x^2), \\ G^0 &= A_1^0(1-x^2)^2 + A_2^0 x(1-x^2)^2, \\ \theta^0 &= B_1^0(1-x^2)(5-x^2) + B_2^0 x(1-x^2)(7-3x^2) \end{aligned} \right\}$$

локальний потенціал прийме вид

$$\begin{aligned} L &= \frac{256}{315} i \lambda A_1 A_1'' + \frac{256}{3465} i \lambda A_2 A_2'' + \frac{7936}{315} B_1 B_1'' + \frac{1280}{231} i \lambda B_2 B_2'' + \frac{256}{105} \frac{i \lambda}{k^2} A_1 A_1'' + \\ &+ \frac{256}{315} \frac{i \lambda}{k^2} A_2 A_2'' + \frac{1}{k^2} \frac{384}{15} A_1'' A_1 + \frac{1}{k^2} \frac{384}{21} A_2'' A_2 + \frac{512}{315} A_2'' A_2 - \frac{i}{k} \frac{1024}{23100} Gr A_1 A_1'' \times \\ &\times \cos \alpha + \frac{i}{k} \frac{3072}{270270} Gr A_2 A_2'' \cos \alpha - \frac{i}{k} \frac{6144}{623700} Gr A_1'' A_1 \cos \alpha + \frac{i}{k} \frac{2048}{900900} Gr A_2 A_2'' \times \\ &\times \cos \alpha - \frac{i}{k} \frac{128}{35} A_1 B_2'' \cos \alpha + \frac{i}{k} \frac{512}{315} A_2 B_1 \cos \alpha + \frac{512}{105} A_1'' A_1 + k^2 \frac{256}{315} A_1'' A_1 + \quad (8) \\ &+ k^2 \frac{256}{3465} A_2'' A_2 + \frac{4096}{540540} ik Gr A_1 A_1'' \cos \alpha + \frac{1408}{315} A_1 B_1'' \sin \alpha + \frac{2176}{3465} A_2 B_2'' \times \\ &\times \sin \alpha + \frac{1}{Pr} \frac{1920}{35} B_2'' B_2 + \frac{1}{Pr} \frac{6528}{105} B_1'' B_1 + \frac{k^2 6 k^2}{315 Pr} B_1'' B_1 + \frac{1280 k^2}{231 Pr} B_2'' B_2 - \frac{3328}{3465} \times \\ &\times Gr A_1'' B_1 - \frac{4352}{3465} Gr A_1 B_1'' + \frac{2048}{11700} ik Gr B_1 B_1'' \cos \alpha - \frac{19456}{2702700} ik Gr B_2'' B_2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Сталі $A_1, A_1'', A_2, A_2'', B_1, B_1'', B_2, B_2''$ вибираємо так, щоб виконувалися умови

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial A_1} \right)_{A_1, A_1'', B_1, B_1'', A_2, A_2'', B_2, B_2''} &= 0, & \left(\frac{\partial L}{\partial A_2} \right)_{A_1, A_1'', B_1, B_1'', B_2, B_2'', A_2} &= 0, \\ \left(\frac{\partial L}{\partial B_1} \right)_{A_1, A_1'', A_2, A_2'', B_1'', B_2, B_2''} &= 0, & \left(\frac{\partial L}{\partial B_2} \right)_{A_1, A_1'', B_1, B_1'', A_2, B_2'', A_2} &= 0. \end{aligned} \right\} (9)$$

Звідси за використання додаткових умов

$$A_1'' = A_1; \quad B_1'' = B_1; \quad A_2'' = A_2; \quad B_2'' = B_2$$

одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A_1} &= (4,8760 + 25,6000 \frac{1}{k^2} + 0,8126k^2 - 0,0541 \frac{i}{k} Gr \cos \alpha + 0,0075ikGr \times \\ &\times \cos \alpha + 0,8126\lambda + 2,4380 \frac{i\lambda}{k^2}) A_1 + 4,4698B_1 \sin \alpha - 3,6571 \frac{i}{k} B_2 \cos \alpha, \\ \frac{\partial L}{\partial A_2} &= (1,6252 + 18,2857 \frac{1}{k^2} + 0,0738k^2 + \frac{1}{k^2} 0,8126\lambda + 0,0739i\lambda + \\ &+ 0,0033 \frac{i}{k} Gr \cos \alpha) A_2 + 1,6253 \frac{i}{k} B_1 \cos \alpha + 0,6279B_2 \sin \alpha; \\ \frac{\partial L}{\partial B_1} &= -0,9604GrA_1 + \left(62,1714 \frac{1}{Pr} + 25,1936 \frac{k^2}{Pr} + 0,1750ikGr \cos \alpha + \right. \\ &\left. + 25,1936i\lambda \right) B_1; \\ \frac{\partial L}{\partial B_2} &= -1,2559GrA_1 + \left(54,8571 \frac{1}{Pr} + 5,5411 \frac{k^2}{Pr} - 0,0144ikGr \cos \alpha + \right. \\ &\left. + 5,5411i\lambda \right) B_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для існування нетривіальних розв'язків цієї системи рівнянь необхідно, щоб

$$\begin{vmatrix} A_{11} + i\lambda B_{11} + & 0 & F_{13} \sin \alpha & D_{14} ik \cos \alpha \\ + ikC_{11} Gr \cos \alpha & & & \\ 0 & A_{22} + i\lambda B_{22} + & F_{23} ik \cos \alpha & D_{24} \sin \alpha \\ & + ikC_{22} Gr \cos \alpha & & \\ 0 & d_{22} Gr & a_{11} + b_{11} i\lambda + & 0 \\ & & + s_{11} ikGr \cos \alpha & \\ d_{11} Gr & 0 & 0 & a_{22} + b_{22} i\lambda + \\ & & & + s_{22} ikGr \cos \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} A_{11} &= 4,8760k^2 + 25,6 + 0,8126k^4; & A_{22} &= 0,0739k^4 + 1,6252k^2 + 18,2857; \\ B_{11} &= 0,8126k^2 + 2,4380; & B_{22} &= 0,8126 + 0,0739k^2; \\ C_{11} &= 0,0075k^2 - 0,0541; & a_{11} &= \frac{1}{Pr} (62,1714 + 25,1936k^2); \\ d_{11} &= -1,2559; & C_{22} &= 0,0053; F_{13} = 4,4698k^2; h_{11} = 25,1936; \\ a_{22} &= \frac{1}{Pr} (54,8571 + 5,5411k^2); & D_{24} &= 0,6279k^2; \\ b_{22} &= 5,5411; & S_{11} &= 0,1750; & S_{22} &= 0,0144. \end{aligned}$$

Прирівнюючи визначник, до нуля, отримуємо характеристичне рівняння

$$\begin{aligned}
 & E_{40}Gr^4 \cos^4 \alpha + E_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + E_{13}i\lambda^3 Gr \cos \alpha + E_{04}\lambda^4 + \\
 & + E_{20}Gr^2 \cos^2 \alpha + E_{11}\lambda Gr \cos \alpha + E'_{20}Gr^2 \sin^2 \alpha + E_{02}i\lambda^2 + E_{00} + \\
 & + i \left(N_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + N_{03}\lambda^3 + N_{12}\lambda^2 Gr \cos \alpha + \right. \\
 & \left. + N_{21}i\lambda Gr^2 \cos^2 \alpha + N_{10}Gr \cos \alpha + N_{01}\lambda \right) = 0.
 \end{aligned} \quad (12)$$

Коефіцієнти $E_{40}, E_{30}, E_{13}, E_{04}, E_{20}, E_{11}, E'_{20}, E_{02}, E_{00}, N_{30}, N_{03}, N_{12}, N_{21}, N_{10}, N_{01}$ визначаються за наступними залежностями:

$$E_{40} = K^4 C_{22} S_{11} S_{22} C_{11}; \quad E_{04} = B_{22} b_{11} b_{22} B_{11};$$

$$L_{31} = K^3 (C_{22} S_{11} S_{22} B_{11} + C_{22} S_{11} b_{22} C_{11} + b_{11} C_{22} S_{22} C_{11} + S_{11} B_{22} S_{22} C_{11});$$

$$E_{22} = K^2 \left(C_{22} S_{11} b_{22} B_{11} + b_{11} C_{22} S_{22} B_{11} + S_{11} B_{22} S_{22} B_{11} + B_{22} b_{11} S_{22} C_{11} + \right. \\ \left. + b_{11} b_{22} C_{22} C_{11} + S_{11} B_{22} b_{22} C_{11} \right);$$

$$E_{11} = -K \left(b_{11} C_{22} a_{22} A_{11} + S_{11} B_{22} a_{22} A_{11} + B_{22} a_{11} S_{22} A_{11} + A_{22} b_{11} S_{22} A_{11} + \right. \\ \left. + C_{22} a_{11} b_{22} A_{11} + A_{22} S_{11} b_{22} A_{11} + C_{22} a_{11} a_{22} B_{11} + A_{22} S_{11} a_{22} B_{11} + \right. \\ \left. + S_{22} A_{22} a_{11} B_{11} + B_{22} a_{11} a_{22} C_{11} + A_{22} b_{11} a_{22} C_{11} + A_{22} b_{22} a_{11} C_{11} - \right. \\ \left. - d_{11} A_{11} F_{23} b_{22} - F_{23} a_{22} d_{11} B_{11} + B_{22} a_{11} D_{14} d_{22} + A_{22} b_{11} D_{14} d_{22} \right);$$

$$E_{20} = -K^2 \left(C_{22} a_{22} S_{11} A_{11} + C_{22} a_{11} S_{22} A_{11} + A_{22} S_{11} A_{11} S_{22} - d_{11} F_{23} a_{22} C_{11} + \right. \\ \left. + C_{22} a_{11} a_{22} C_{11} + A_{22} S_{11} a_{22} C_{11} + S_{22} A_{22} a_{11} C_{11} - d_{11} F_{23} S_{22} A_{11} + \right. \\ \left. + d_{11} F_{23} D_{14} d_{22} \right);$$

$$E_{02} = - \left(B_{11} b_{11} a_{22} A_{11} + B_{22} a_{11} b_{22} A_{11} + A_{22} b_{11} b_{22} A_{11} + B_{22} a_{11} a_{22} B_{11} + \right. \\ \left. + A_{22} b_{11} a_{22} B_{11} + A_{22} b_{22} a_{11} B_{11} \right);$$

$$E_{13} = K (B_{22} b_{11} S_{22} B_{11} + b_{11} b_{22} C_{22} B_{11} + S_{11} B_{22} b_{22} B_{11} + B_{22} b_{11} b_{22} C_{11});$$

$$E'_{20} = -F_{13} D_{24} d_{11} d_{22}; \quad L_{00} = A_{11} a_{11} a_{22} A_{22};$$

$$N_{01} = B_{22} A_{11} a_{11} a_{22} + A_{22} A_{11} b_{11} a_{22} + A_{22} A_{11} b_{22} a_{11} + A_{22} B_{11} a_{11} a_{22};$$

$$N_{10} = K \left(C_{22} a_{11} a_{22} A_{11} + A_{22} S_{11} A_{11} a_{22} + S_{22} A_{22} a_{11} A_{11} - d_{11} F_{23} a_{22} A_{11} + \right. \\ \left. + A_{22} a_{11} a_{22} C_{11} - A_{22} a_{11} D_{14} d_{22} \right);$$

$$N_{03} = - (B_{22} A_{11} b_{11} b_{22} + B_{22} B_{11} b_{11} a_{22} + B_{22} B_{11} a_{11} b_{22} + A_{22} b_{11} b_{22} B_{11});$$

$$N_{21} = -K^2 \left(C_{22} S_{11} b_{22} A_{11} + b_{11} C_{22} S_{22} A_{11} + S_{11} B_{22} S_{22} A_{11} + C_{22} a_{22} S_{11} B_{11} + \right. \\ \left. + C_{22} a_{11} S_{22} B_{11} + A_{22} S_{11} S_{22} B_{11} - d_{11} F_{23} S_{22} B_{11} + b_{11} C_{22} a_{22} C_{11} + \right. \\ \left. + S_{11} B_{22} a_{22} C_{11} + B_{22} a_{11} S_{22} C_{11} + A_{22} b_{11} S_{22} C_{11} + C_{22} a_{11} b_{22} C_{11} + \right. \\ \left. + A_{22} S_{11} b_{22} C_{11} - d_{11} F_{23} b_{22} C_{11} - b_{11} C_{22} D_{14} d_{22} + B_{22} S_{11} D_{14} d_{22} \right);$$

$$N_{30} = -K^3 \left(C_{22} S_{11} S_{22} A_{11} + C_{22} a_{22} S_{11} C_{11} + C_{22} a_{11} S_{22} C_{11} + \right. \\ \left. + A_{22} S_{11} S_{22} C_{11} + d_{11} F_{23} S_{22} C_{11} - C_{22} S_{11} D_{14} d_{22} \right);$$

$$N_{22} = K^2 F_{23} D_{14} d_{11} d_{22}.$$

Прирівнюючи до нуля окремо дійсну і уявні частини цього рівняння, маємо:

$$E_{40}Gr^4 \cos^4 \alpha + E_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + E_{11}i\lambda^5 Gr \cos \alpha + E_{04}\lambda^4 + E_{20}Gr^2 \cos^2 \alpha + E_{11}\lambda Gr \cos \alpha + E_{20}' \sin^2 \alpha + E_{02}i\lambda^2 + E_{00} = 0, \quad (13)$$

$$N_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + N_{03}\lambda^3 + N_{12}\lambda^2 Gr \cos \alpha + N_{21}i\lambda Gr^2 \cos^2 \alpha + N_{10}Gr \cos \alpha + N_{01}\lambda = 0. \quad (14)$$

Розв'язок цієї нелінійної системи алгебраїчних рівнянь дозволяє визначити границю стійкості конвективного руху рідини в широкому інтервалі зміни кута α і числа Прандтля Pr . Покажемо, що навіть обмежившись лише однією парною пробною функцією для швидкості і однією непарною для температури отримаємо цілком задовільний результат аж до $\alpha = 50^\circ$. Задасмо, наприклад, для швидкості і температури наступними функціями

$$G_1 = A_1(1 - x^2)^2; \quad v_1 = B_1x(1 - x^2)(7 - 3x^2). \quad (15)$$

Для цього випадку характеристичне рівняння набуде вигляду

$$A_{11}a_{11} + \lambda(A_{11}b_{22} + B_{11}a_{22}) + ikGr\lambda \cos \alpha(S_{22}A_{11} + a_{22}C_{11}) + \lambda^2 b_{22}B_{11} + ikGr \cos \alpha(S_{22}B_{11} + b_{22}C_{11} - d_{11}D_{14}) + k^2 C_{11}S_{22}Gr^2 \cos^2 \alpha = 0. \quad (16)$$

Прирівнюючи до нуля дійсну і уявну частини характеристичного рівняння маємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} A_{11}a_{22} - B_{11}b_{22}\lambda^2 - \lambda Gr \cos \alpha(C_{11}a_{22} + S_{22}A_{11}) - k^2 S_{22}C_{11}Gr^2 \cos^2 \alpha = 0, \\ (B_{11}a_{22} + b_{22}A_{11})\lambda + kGr \cos \alpha(B_{11}S_{22} + b_{22}C_{11}) - d_{11}D_{14}Gr \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Виключивши з цієї системи λ , отримаємо рівняння, яке дозволяє визначити критичне число Грасгофа як функцію хвильового числа і числа Прандтля

$$k^2 Gr^2 \cos^2 \alpha \left[\frac{B_{11}b_{22} \left(\frac{A_{22}S_{22} + a_{22}C_{11} - d_{22}D_{14}}{(B_{11}a_{22} + b_{22}A_{11})^2} \right) + (C_{11}b_{22} + S_{22}B_{11}) \frac{-A_{11}S_{22} - a_{22}C_{11} + d_{22}D_{14}}{B_{11}a_{22} + b_{22}A_{11}}}{B_{11}a_{22} + b_{22}A_{11}} \right] - A_{11}a_{22} = 0. \quad (18)$$

Розв'язання рівняння (18) проводилося для різних значень хвильового числа (k) 0,2–3, чисел Прандтля від 1 до 13 з кроком 3 і кута нахилу α шару до напрямку гравітаційного поля до 50° через кожні 10° .

Рівняння (18) в координатах $Gr - k$ представляє нейтральну криву, яка розділяє площину на області стійкого і нестійкого конвективного руху (рис. 1-6). За певних значень хвильового числа на нейтральній кривій в залежності від числа Прандтля і кута нахилу появляється більш або менш виражений максимум.

Фізичні властивості рідини, які визначають величину числа Прандтля і орієнтація шару в гравітаційному полі істотним чином впливають

на вид нейтральної кривої. При значенні числа Прандтля рівному одиниці крива має чітко виражений мінімум (рис. 1-3). Зі збільшенням Pr мінімум на нейтральній кривій стає все більш розмитим. Вплив кута нахилу на вид нейтральної кривої для значень Pr 1, 10 і 16 показано на рис. 1-3. Зі зміною кута нахилу шару малов'язкої рідини границя стійкості змінюються в широких межах, але вид кривої зберігається (рис. 4). При переході до більш в'язких рідин зміна кута нахилу впливає більш відчутно. Так при $Pr = 1$, якщо відхилення від шару від вертикалі складає 50° , критичне число Грасгофа збільшується на 450, а при $Pr = 16$ – тільки на 80. Вплив кута нахилу на границю стійкості конвективного руху стає більш відчутним при віддаленні від вертикалі.

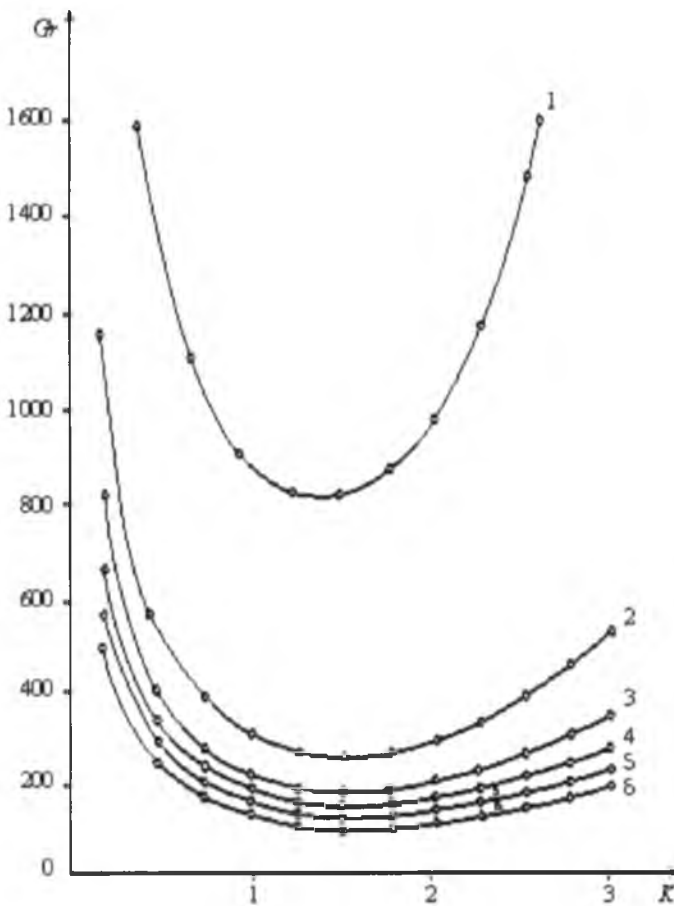


Рис. 1. Нейтральна крива для вертикального шару при різних значеннях числа Прандтля: крива 1 при $Pr = 1$; 2 – 4; 3 – 7; 4 – 10; 5 – 13; 6 – 16. Система з внутрішніми джерелами теплоти.

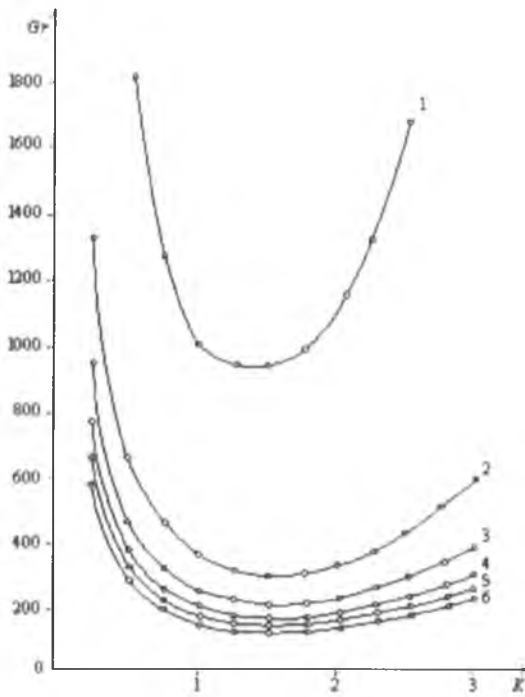


Рис. 2. Вплив Pr на залежність $Gr - K$ при $\alpha = 30$: крива 1 при $Pr = 1$; 2 – 4; 3 – 7; 4 – 10; 5 – 13; 6 – 16. Профіль швидкості парний

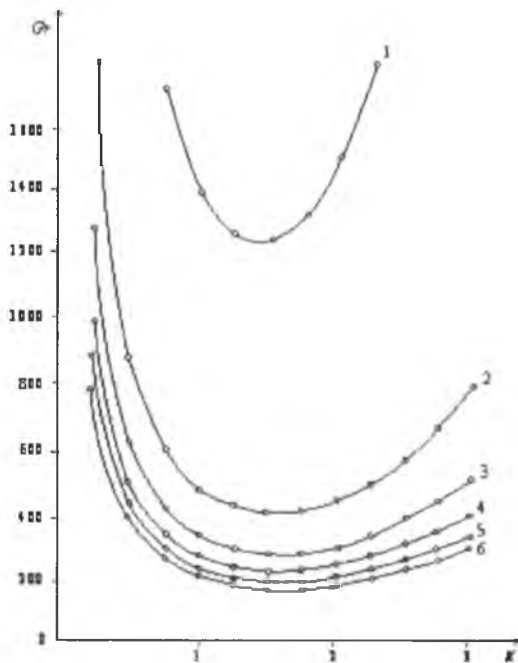


Рис. 3. Залежність $Gr - K$ для різних Pr : крива 1 при $Pr = 1$; 2 – 4; 3 – 7; 4 – 10; 5 – 13; 6 – 16. Профіль швидкості парний

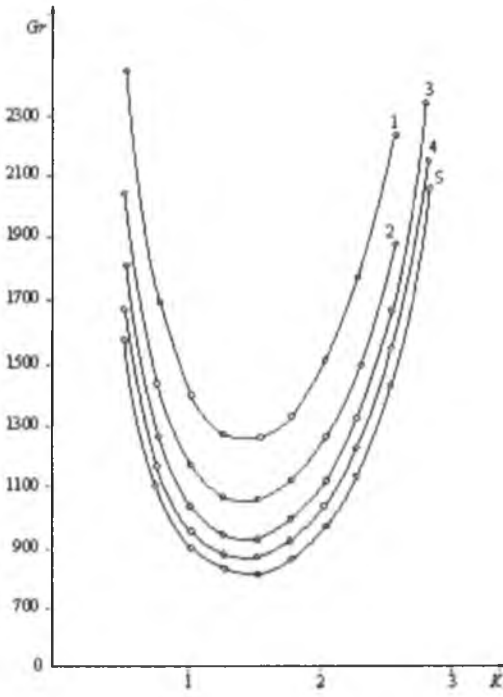


Рис. 4. Нейтральна крива для різних значень кута нахилу α : 1 – 50° ; 2 – 40° ; 3 – 30° ; 4 – 20° ; 5 – 0° . $Pr = 1$. Розподіл температури параболічний

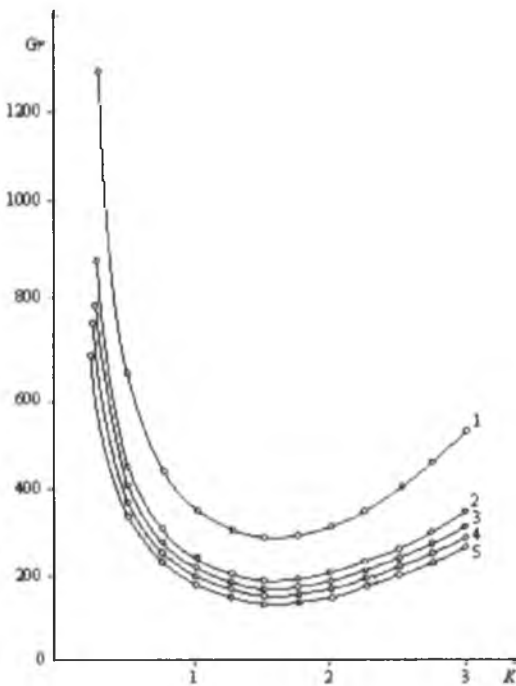


Рис. 5. Вплив кута нахилу α на залежність $Gr - K$: 1 – 50° ; 2 – 40° ; 3 – 30° ; 4 – 20° ; 5 – 0° . $Pr = 10$. Система з внутрішніми джерелами теплоти

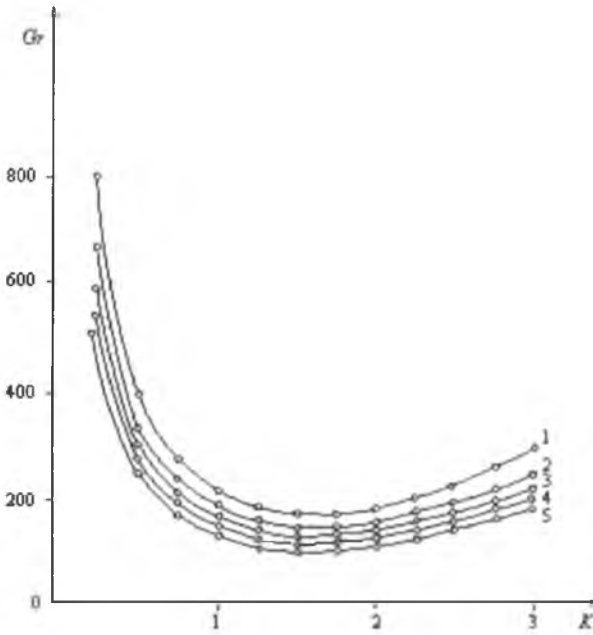


Рис. 6. Залежність $Gr - K$ для різних значень кута α : 1 – 50° ; 2 – 40° ; 3 – 30° ; 4 – 20° ; 5 – 0° . $Pr = 16$. Профіль швидкості парний

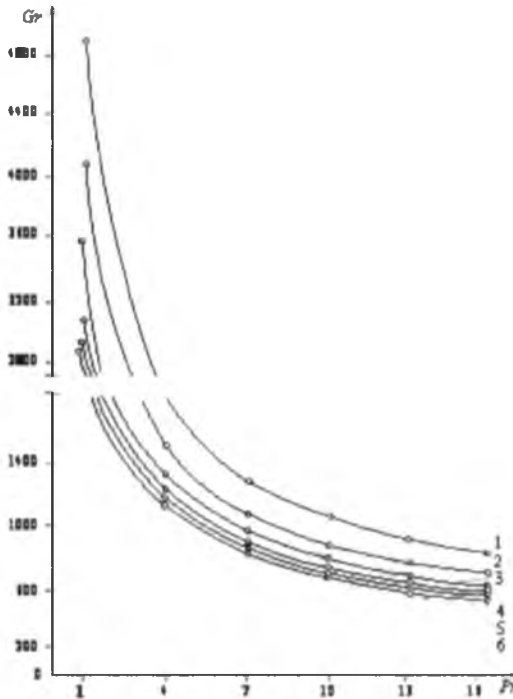


Рис. 7. Криві $Gr - Pr$ для різних значень α : 1 – 50° ; 2 – 40° ; 3 – 30° ; 4 – 20° ; 5 – 10° ; 6 – 0° ; $K = 0,25$. Розподіл температури параболічний

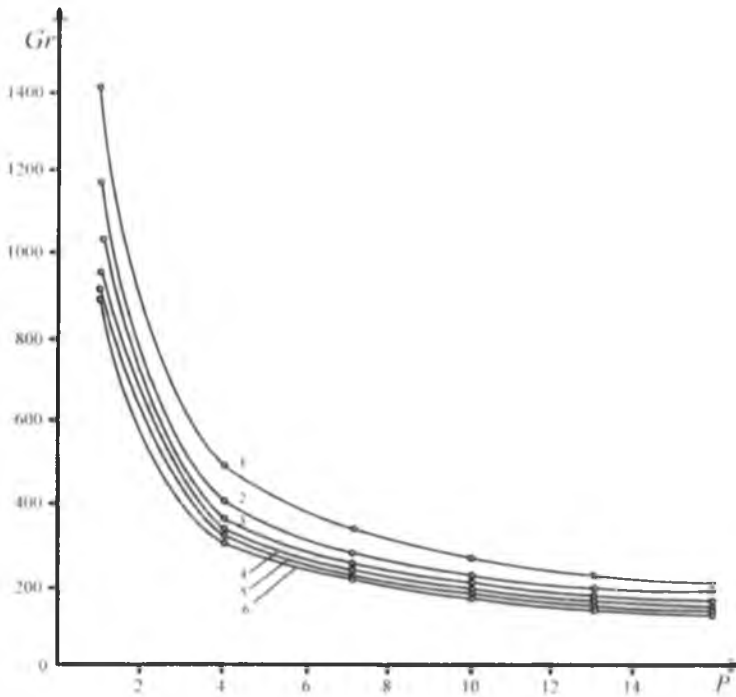


Рис. 8. Залежність кута нахилу α на залежність $Gr - Pr$: 1 – 50° ; 2 – 40° ; 3 – 30° ; 4 – 20° ; 5 – 10° ; 6 – 0° ; $K = 1$. Профіль швидкості парний

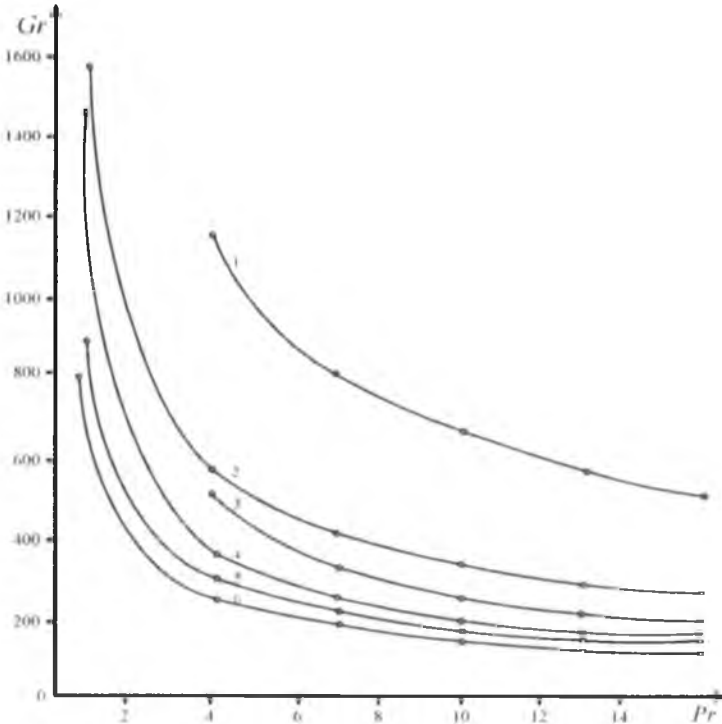


Рис. 9. Залежність $Gr - Pr$ для різних значень K : 1 – 0,25; 2 – 0,5; 3 – 3; 4 – 2,5; 5 – 1; 6 – 1,5. Система з внутрішніми джерелами теплоти

Значення мінімального числа Грасгофа в залежності від числа Прандтля для шести його значень наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Мінімальні критичні числа Грасгофа в залежності від кута нахилу шару і числа Прандтля

α'	0	10	20	30	40	50
Pr = 1						
Gr	810,90	823,44	862,98	936,39	1058,60	1261,21
K_m	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45
Pr = 4						
Gr	265,18	269,27	282,20	306,20	346,17	412,55
K_m	1,53	1,52	1,53	1,53	1,53	1,53
Pr = 7						
Gr	182,92	185,74	194,56	211,22	238,79	284,58
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55
Pr = 10						
Gr	147,02	149,29	156,45	169,76	192,92	228,72
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55
Pr = 13						
Gr	126,07	128,01	134,16	145,57	164,57	196,13
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55
Pr = 16						
Gr	112,01	113,73	119,20	129,33	146,22	179,25
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55

З табл. 1 випливає, що кут нахилу і число Прандтля суттєво впливають на мінімальне критичне значення числа Грасгофа. Залежність мінімального числа Грасгофа від числа Прандтля носить антибатний характер, в той час як вплив кута нахилу на границю стійкості симбатно. Хвильове число малочутливе до зміни кута нахилу шару і числа Прандтля. Вплив числа Прандтля на границю стійкості виявляється суттєвий в області малих значень, а при значеннях Pr , які наближаються до $16 \cdot Gr$, зміни незначні (рис. 7-8). На рис. 9 представлено залежність $Gr - Pr$ для значень хвильового числа в інтервалі 0,25–3 при вертикальному розміщенні шару. Вплив хвильового числа на вид $Gr - Pr$ кривої проявляється наступним чином: зі збільшенням до критичного значення крива зміщується вниз, при подальшому збільшенні хвильового числа – вгору.

Висновки

Методом локального потенціалу знайдено границю стійкості вільного конвективного руху відносно стоячих збурень нестисливої в'язкої

рідини з парним профілем швидкості, обумовленим зовнішнім температурним градієнтом перпендикулярним до напрямку гравітаційного поля.

Результати отримані з використанням тільки однієї пробної функції для швидкості і температури достатньо добре узгоджуються з даними, отриманими кінетичним методом з використанням складних пробних функцій [1].

Література

1. Mass Transfer / G.Z.Gerchuni, E.M.Zhukhovitsky, A.A.Yakimov, Int.J.Heat. – 17,717 (1974).
2. Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З.Гершуни, И.М.Жуховицкий. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
3. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика / В.Г.Левич. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 132 с.
4. Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций / П.Гленсдорф, И.Пригожин.
5. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика / Р.Л.Стратонович. – М.: Наука, 1985. – 480 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 10.12.2013 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., професором Мойсишиним В.М., д.ф.-м.н., професором, чл.-кор. НАН України Кушніром Р.М. (м. Львів),

RESEARCH OF FIRMNESS OF CONVECTIV MOTION WITH PARNIM TYPE OF SPEED

V. V. Negrych, Y.M. Dem'yanchuk, G. Y. Protsiuk

Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;

76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;

e-mail: trans@nung.edu.ua

We investigate the hydrodynamic stability of viscous incompressible fluid located between vertical parallel surfaces . Considered free convection with an even velocity profiles . For research use variational principle of non-equilibrium thermodynamics – the method of local potential. Determine the critical Grashof criterion , depending on the Prandtl number and value of the wave number at which the transition from simple to complex dissipative structures. Also take into account the angle of the layer with respect to the gravitational field. The method of calculation using only one test feature provides comparable results with the kinetic method , using complex test functions.

Key words: convective fluid motion, the local potential, dissipative structures, criteria Grashof, Prandtl number.

Нафтогазова справа

УДК 550.832

ПЕРСПЕКТИВИ ТА НЕБЕЗПЕКИ ВИДОБУТКУ СЛАНЦЕВОГО ГАЗУ В УКРАЇНІ

Д. Д. Федоришин, С. Д. Федоришин

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-23; e-mail: geophys@nung.edu.ua*

В статті викладено інформацію про типи горючих газів та форми їх утворення, наведено класифікацію сланців, які утворилися в процесі осадконакопичення. За результатами досліджень встановлено компонентний та мінеральний склад горючих сланців, їх калорійні характеристики.

Показано і обґрунтовано ризики видобутку сланцевого газу на прикладі розробок, які проводилися на родовищі Barnett Shale (США).

***Ключові слова:** сланцевий газ, родовища, запаси, екологічне забруднення.*

Підвищення енергетичної безпеки України є і буде актуальною і необхідною задачею, яка вирішується значною мірою за рахунок впровадження в експлуатацію нових додаткових об'єктів скупчення вуглеводнів, а також визначається залученням альтернативних джерел енергетики, до яких можна віднести і газонасність сланцевих порід.

Відомо, що газ може знаходитися в трьох станах:

- 1) природному газоподібному,
- 2) природному у вигляді кристалічних газогідратів,
- 3) штучному зрідженому.

У літосфері Землі газ може бути сконцентрований у вигляді газових скупчень в породах-колекторах класичних пасток (антиклінальних, синклінальних, тектонічно та літологічно обмежених, а також у лінзовидних утвореннях). Якщо розглядати природний газ, який на сьогодні є основним енергетичним джерелом газоподібних вуглеводнів, то він представляє собою суміш газів, в якій на метан (CH₄) припадає найбільший відсоток у порівнянні з важкими вуглеводнями – етаном (C₂H₆),

пропаном (C_3H_8), бутаном (C_4H_{10}) та інші. До компонентного складу природного газу входять також і неуглеводневі сполуки: сірководень, водень, діоксин вуглецю, гелій, азот.

Другим типом газу є метан вугільних пластів, процес видобутку якого достатньо трудомісткий. Стосовно сланцевого газу, про процес утворення якого сьогодні немає єдиної думки, існує ряд причин, які не дозволяють почати розробку сланцевидних порід геологічних розрізів нафтогазових родовищ.

Виходячи з наведеного та враховуючи актуальність питання видобутку сланцевого газу, необхідно привести більш детальну характеристику потенційних порід на сланцевий газ.

У розрізі літосфери відзначають наступні типи сланцевих порід:

– сланці кременисті (осадова, кремениста, тонкоплитчаста будова, часто листові, складена мікрозернистим кварцом);

– сланці кристалічні (група метаморфічних порід, які охарактеризуються середнім ступенем метаморфізації);

– сланці покрівні (аргілітоподібна порода розколота на тонкі (2,5-6 мм) пластинки, які використовуються для покриття будинків, споруд, а також як наповнювачі до мастик і асфальтів);

– сланці магнетитові (характеризуються вмістом кварцу, магнетиту та рогової обманки);

– сланці мідисті (алевроліти, аргіліти рідше мергелі, до складу матриці яких входять мінерали класу сульфідів);

– сланці менілітові (чорна, бітумінозна з органікою порода, аргіліниста з шаруватою будовою), вміст керогену складає (від 20 до 30%) – Карпатська нафтогазоносна провінція;

– сланці вуглисті (ущільнена глиниста метаморфічна порода серед вугленосних товщ);

– сланці піробітумінозні (глиниста метаморфічна порода, збагачена органічною речовиною);

– сланці філітоподібні (глиниста метаморфічна порода з коефіцієнтом пористості меншим 1%, представлена гідрослюдами, серицитом, хлоритом);

– сланці ураноносні (глиниста метаморфічна порода вміст урану перевищує кларкове значення $3 \times 10^{-4}\%$ в декілька раз).

Із перерахованих сланців найбільший інтерес представляють горючі сланці.

Горючий сланець складається переважно з мінеральних складників (кальцит, доломіт, гідрослюди, монтморилоніт, каолініт, польові шпати, кварц, пірит) і органічних частин (кероген). Останній складає 10-30% від маси породи і тільки у сланцях високої якості досягає 50-70%.

Осадова глиниста метаморфічна порода, вапняковиста, кремениста, тонкошарувата листовата або масивна, вміщує органічну речовину (кероген) в кількості від 10-15% до 60-80%. Забарвлення сіре, темно-сіре, коричневе, коричнеувато-жовте, оливково-сіре. Запалюється від сірника і має запах горілої гуми.

При нагріванні сланців без доступу повітря до 500°C, або з доступом повітря до 1000°C, органічна речовина розпадається з виділенням нафтоподібної смоли. Вихід смоли із сланців бідних на кероген складає 10-12% від маси сухої породи із збагачених керогеном складає 30-50% [1].

Елементний склад керогена сланців має наступний компонентний склад: С – (56-82%), Н – (5.8-11,5%), N – (1-6%), S – (1.5-9%), О – 9,6%.

Забарвлення горючих сланців коричневе, коричнево-сіре, оливково-сіре. Керогенний матеріал горючих сланців характеризується високим вмістом водню (1-7%), великою кількістю летких вуглеводнів, які вивільнюються в процесі термічної обробки до 90% з питомою теплою згорання 29-37 Мдж/кг, мінімальна теплота згорання 5 Мдж/кг.

Загальні запаси горючих сланців у світі складають 650 трлн тонн (26 трлн тонн сланцевої смоли). В основному горючі сланці зосереджені в США, Бразилії, Австрії, Болгарії, Великобританії, ФРН, Швеції, Югославії, Канаді, Росії. На території СНД відмічено 50 родовищ горючих сланців. Із них найбільше Прибалтійське, Волзьке, Оленярське, Кендерликське (Казахстан). Найбільше таких ресурсів (430-450 трлн тонн сланців та 24 трлн тони сланцевої смоли) має США. В межах Карпатської нафтогазоносної провінції найбільш збагаченими бітумами слід вважати сланці та сланцюваті аргіліти, алевроліти менілітової світи олігоцену Внутрішньої зони Передкарпатського прогину. Щодо мінілітових сланців Карпат, то вміст керогену у їхньому складі змінюється в межах від 20% до 30%.

Відмінною ознакою всіх горючих сланців, в тому числі і вуглистих, є висока густина $\delta_{II} \geq 2 \cdot 10^3$ кг/м³. Така особливість зростання густини обумовлена значною зольністю. В залежності від переважання у складі матриці горючих сланців тих чи інших мінеральних речовин їхнє забарвлення змінюється (буває темно-сіре, жовте, коричневе і чорне).

Як бачимо в геологічних розрізах літосфери відзначають різні типи сланців. Оскільки це метаморфічна глиниста, сланцеподібна з органікою або без органіки порода, то в процесі осадконакопичення порід при різних термодинамічних умовах, утворювалися системи тріщин, в яких міг сконцентруватися розсіяний природній газ, що утворився в надрах Землі в седиментаційний та постседиментаційний період, в результаті анаеробних розпадів органічних речовин.

За забарвленням ці породи характеризуються в основному коричневим і чорним кольорами, містять органічну речовину, в окремих ви-

падках до 30%, а мінеральної речовини – до 70%. З таких співвідношень органічної речовини сапропелевого ряду менілітові сланці не відносять до горючих сланців і не розглядаються як потенційне альтернативне джерело енергетики. Враховуючи те, що відклади менілітової світи залягають на глибинах від 1000 м до 3000 м і зосереджені в сейсмічно активній зоні Карпат, їхня розробка може призвести до непрогнозованих наслідків.

Густина сланців, які вивірюють мінілітову світу, змінюється в межах від $\delta_{\text{п}}=2,3-3$ г/см³. Швидкість розповсюдження поздовжньої хвилі у піщанистому сланці (V_p) складає 1,4-5,2 км/с, у глинистому сланці – $V_p=1,8-4,8$ км/с. Для порівняння швидкість розповсюдження поздовжньої ультразвукової хвилі у вапняку $V_p=3,0-6,6$ км/с, каолініті – $V_p=3,5-4,5$ км/с. Співвідношення поздовжньої до поперечної швидкості розповсюдження ультразвукової хвилі для глинистих порід складає 0,07-0,6; пісковиків 0,1-0,3; сланців 0,4-0,6.

Виходячи із цього методи акустичного каротажу можуть бути базовими у комплексі геофізичних методів разом із результатами радіоактивних досліджень у процесі пошуку та ідентифікації сланцевих та слащепоподібних порід.

Проблеми та небезпеки видобутку сланцевого газу

Видобуток сланцевого газу має ряд проблем та небезпек, які супроводжують цей процес.

Враховуючи те, що сланцевий газ на думку деяких чиновників і спеціалістів сформовано у структурі матриці сланцевої породи, яка фактично немає пористості ($K_{\text{п}} \leq 3\%$), ризики, які можуть бути при спробі його розробки наступні:

– техногенне екологічне забруднення ділянок територій, в межах яких виконують пошукові та інші роботи;

– екологічне забруднення водойм та річок, зниження рівня поверхневих вод, хімічне забруднення водоносних пластів у розрізі пошукових свердловин;

– сейсмічні небезпеки, які можуть виникати в процесі розробки щільних малопористих порід, особливо в умовах сейсмоактивних регіонів.

Техногенне екологічне забруднення територій видобутку сланцевого газу відбувається за рахунок скупчення різної за призначенням важкої техніки, установок для проведення як вертикального, так і горизонтального буріння, горючо-мастильних речовин тощо.

Екологічне забруднення водойм та рік, а також водонасичених горизонтів за рахунок гідророзривів, які здійснюють в процесі руйнування щільної породи буде однією з гострих проблем, яка суттєво вплине на екологію регіону.

Ускладнюється ця проблема ще й через те, що на сьогодні не вивчено фільтраційно-ємнісні властивості вміщючих порід стосовно сланців чи сланцевих порід, відсутні дані про петрофізичну анізотропію вміщючих пластів, а також про їх фізичні параметри.

Технологія гідророзриву пласта потребує великих запасів води біля родовища. За розрахунками для одного гідророзриву використовується суміш води, піску і хімікатів вагою 600 т. В результаті біля місця розробки родовища накопичуються значні об'єми відпрацьованої забрудненої води, яка не утилізується добувачами з дотриманням екологічних норм. Як показує досвід розробки родовищ Barnett Shale (США), сланцеві свердловини мають набагато менший термін експлуатації, ніж свердловини звичайного природного газу. Формули хімічного коктейлю для гідророзриву в компаніях, які видобувають сланцевий газ є конфіденційними. За звітами екологів видобуток сланцевого газу призводить до значного забруднення ґрунтових вод толуолом, бензолом, деметилбензолом, етилбензолом, миш'яком та іншими хімічними канцерогенними речовинами. Деякі компанії використовують солянокислотний розчин загущений за допомогою полімеру. Для одної операції гідророзриву використовується 80-300 тон хімікатів. При видобутку сланцевого газу суттєвими є втрати метану, що веде до посилення парникового ефекту. Видобуток сланцевого газу є рентабельним тільки за наявності попиту і високих цін на газ, а в цілому це високозатратне виробництво.

Хімічна суміш коктейлю компанії Halliburton складає біля 1,53% від загального розчину і включає: соляну кислоту, формальдегід, оцетонний ангідрид, метилові спирти, хлорид амонію. Компанія Chesapeake Energy використовує свій склад хімічної суміші, але її об'єм в гідророзчині набагато менший – 0,5%. В цілому газовидобувними компаніями для видобутку сланцевого газу використовується біля 85 токсичних речовин. Окремі із них мають наступні призначення:

- соляна кислота сприяє розчиненню мінералів в гірських породах;
- етиленгліколь протидіє відкладенням на внутрішніх стінках труб;
- ізопропиловий спирт, гуарова камідь і борна кислота використовуються в якості загущувачів речовин, які підтримують в'язкість розчину;
- глутаральдегід і формаміт протидіє корозії;
- нафта в легких фракціях використовується для зниження тертя;
- пероксодисульфат амонія протидіє розпаду гуарової камеді;
- хлорид калію перешкоджає хімічним реакціям між рідиною і ґрунтом;
- карбонат натрію або калію – для підтримки балансу кислот.

Нанесена шкода екології регіону сланцевим басейном в Пенсільванії (США) носить характер екологічної катастрофи. Саме екологічна проблема в сукупності з використанням великої кількості води для здій-

снення гідророзриву є найбільш гострою для розвитку сланцевого видобутку в густонаселених районах. Не дивлячись на те, що гідророзриви проводяться набагато нижче рівня ґрунтових вод, токсичною речовиною заражені ґрунтовий шар, ґрунтові води і повітря. Це відбувається за рахунок просочування хімічних речовин через тріщини які утворилися в осадових породах в поверхневих шарах ґрунту. У деяких районах Пенсільванії в криницях можна підпалити воду. В результаті роботи екологів згідно закону про чисту воду в Сполучених Штатах Америки від 2005 року вийшов припис для всіх газовидобувних компаній розкрити формулу хімічного коктейлю, а також знизити хімічне навантаження на екологію регіону. Також відзначимо, що найбільш успішні сланцеві родовища відносяться до палеозойської і мезозойської ери, відклади яких характеризуються високим рівнем гамма-випромінювання та корелюються з терміном зрілості сланцевого родовища. В результаті гідророзриву радіоактивні елементи попадають у верхній шар осадових порід. В районі сланцевого видобутку газу спостерігається підвищення радіаційного фону.

Слід також, нагадати, що гідророзриви привели до виникнення двох невеликих землетрусів в Ланкширі.

В результаті екологічного моніторингу отримано незаперечні факти, що викиди метану (CH_4) при видобутку сланцевих газів більші, ніж від процесу видобутку вугілля, нафти та природного газу, що значно підвищує парникові ефекти. Загальний об'єм втрат метану при видобуванні сланцевого газу складає 3,6-7,9%.

Наведені дослідження зумовлюють необхідність подальшого удосконалення технології видобутку сланцевого газу з метою контролю викидів метану, забруднення ґрунту та ґрунтових вод, враховуючи високий рівень невизначеності в оціночних цифрах. На жаль, на фоні картини виснаження традиційних запасів природного газу, сланцевий газ не може стати в найближчий час достойною альтернативою природному газу, оскільки не відповідає сучасним екологічним вимогам до видобутку енергоресурсу.

На сьогодні видобуток сланцевого газу має перспективи місце тільки у малозаселених районах та країнах, які згодні на зниження екологічної безпеки їхніх територій, а як наслідок на погіршення екологічного стану у нашої Планети.

Література

1. Куровець М. Загальна геологія / М.Куровець, Н.Гунька. – Львів: ЛДКФ "Атлас", 1998.

Стаття надійшла до редакційної колегії 17.12.2013 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,
д.геол.н., професором **Наумком І. М.** (м. Львів).*

**PROSPECTS AND DANGERS OF BOOTY
SLATE GAS IN UKRAINE**

D. D. Fedoryshyn, S. D. Fedoryshyn

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15; ph. +380 (342) 72-71-23;
e-mail: geophys@nung.edu.ua*

This article contains the details about the types of combustible gases and forms of their formation are classified shale formed during the accumulation of sediments. According to the research it is found component and mineral composition of oil shale, their calories specifications.

Is shown and proved risks of shale gas development on the example, which were held at the field Barnett Shale (USA).

Key word: *slate gas, deposits of gas, supplies, ecological contamination.*

УДК 622.24

ВИЗНАЧЕННЯ ЕМПІРИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ СЕРЕДНЬОГО ЗНАЧЕННЯ ОБЕРТОВОГО МОМЕНТУ НА ДОЛОТІ ВІД ЖОРСТКОСТІ ТА ДЕМПФУВАННЯ БУРИЛЬНОГО ІНСТРУМЕНТУ

В. М. Мойсишин, Б. Д. Борисевич, Ю. Л. Гаврилів, Б. І. Смага
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 4-22-64, 4-24-53, факс. +380 (342) 4-21-39

Для визначення емпіричних залежностей між середнім значенням обертового моменту на долоті (моментосмістю) з одного боку та параметрами бурильного інструменту (жорсткістю C та демпфуванням β) з другого, на буровому стенді ІФНТУНГ були проведені двадцять п'ять серій досліджень за класичним планом, розбитих на три групи. Для першої групи досліджень жорсткість бурильного інструменту встановлювалась на восьми рівнях – 225, 400, 1000, 1480, 1700, 2100, 2500 і 6000 кН/м, а демпфування було постійним і становило 0,1кН·с/м. Для другої групи жорсткість бурильного інструменту встановлювалась на п'яти рівнях – 400, 1480, 1700, 2500 і 6000 кН/м, демпфування також було постійним і становило 0,1 кН·с/м. Для третьої групи жорсткість була постійною і становила 225кН/м, демпфування встановлювалось на шести рівнях 0,1, 40, 50, 70, 80 і 90 кН·с/м. В інтервалі демпфування 40-90 кН·с/м використовувався гідравлічний подільник коливань (гідравлічна пружина). Для порівняння статистичних характеристик вибірок із миттєвими значеннями обертового моменту, одержаних за різних рівнів жорсткості та демпфування, було застосовано статистичну перевірку параметричних гіпотез. За результатами цих досліджень встановлено наступне:

1. Зменшення жорсткості бурильного інструменту збільшує моментосмість \bar{T}_0 незалежно від типорозміру долота в середньому на 14-22%;

2. Зменшення демпфування від 90 до 0,1кН·с/м веде до збільшення \bar{T}_0 . Інтенсивність збільшення \bar{T}_0 залежить від фізико-механічних характеристик породи. За зміни демпфування від 90 до 0,1кН·с/м (в інтервалі твердості породи за штампом 1440-2050 МПа) це збільшення складо 42-54%;

3. Ймовірність існування емпіричних кореляційних залежностей $\bar{T}_0 = f(C)$ та $\bar{T}_0 = f(\beta)$ перевищує 0,95.

Ключові слова: бурильний інструмент, жорсткість, демпфування, моментосмієть, статистичні характеристики, параметричні гіпотези, емпіричні кореляційні залежності

Основним показником, що характеризує ефективність використання енергії, підведеної до вибою свердловини, є енергоємність руйнування гірських порід. За [2] енергоємність визначається за формулою:

$$A_1 = \frac{A_0}{\pi \cdot R_c^2 \cdot \delta_0} = \frac{G\delta_0 + 2 \cdot \pi \cdot \bar{T}_c}{\pi \cdot R_c^2 \cdot \delta_0} = \frac{G}{\pi \cdot R_c^2} + \frac{2 \cdot \bar{T}_c}{R_c^2 \cdot \delta_0}, \quad (1)$$

де A_0 – робота долота за один оберт; G – осьове статичне навантаження на долото; δ_0 – проходка за один оберт долота; R_c – радіус долота; \bar{T}_c – середнє значення обертового моменту на долоті. Обертовий момент на долоті, який за рівнянням (1) є одним з основних параметрів, що визначають енергоємність процесу буріння, як правило, в процесі буріння не відомий, за винятком спеціальних досліджень у свердловині з використанням вибійного вимірювача обертового моменту. В той же час обґрунтований вибір параметрів процесу буріння не можливий без достатньо точних знань про зміну обертового моменту на долоті. За результатами стендових та промислових досліджень [1, 3, 4] встановлено, що зі збільшенням осьового статичного навантаження на долото F_{CT} середнє значення обертового моменту \bar{T}_c (моментоємність) зростає, а із збільшенням частоти обертання болота n_c – зменшується. Характер залежностей $\bar{T}_c = f(F_{CT})$, $\bar{T}_c = f(n_c)$ може бути як лінійним, так і нелінійним. Однозначний висновок про вплив діаметра долота d_c на \bar{T}_c відсутній. Емпіричних залежностей між параметрами бурильного інструменту, жорсткістю C та демпфуванням β з одного боку та \bar{T}_c з другого боку не встановлено.

Дослідження на обертовий момент параметрів бурильного інструменту були проведені на буровому стенді ІФНТУНГ, створеному на базі бурового верстата СБА-500 (рис.1) [5].

Для зміни жорсткості C бурильного інструменту використовувався пристрій (рис. 2) [6], пружним елементом якого є гвинтова пружина стиску 1. Передача обертового моменту від обертача до долота здійснювалась через рухоме шліцьове з'єднання 2. Для зміни демпфування бурильного інструменту розроблено спеціальний пристрій (рис. 3) [6], жорсткість якого забезпечується гвинтовою пружиною стиску 2. В ролі рідинної пружини використовувались серійні вертикальні гідравлічні поглиначі коливань конструкції Ленінградського інституту інженерів залізнодорожного транспорту, які випускає Калінінський вагонобудівний завод (КВЗ-ЛИИЖТ).

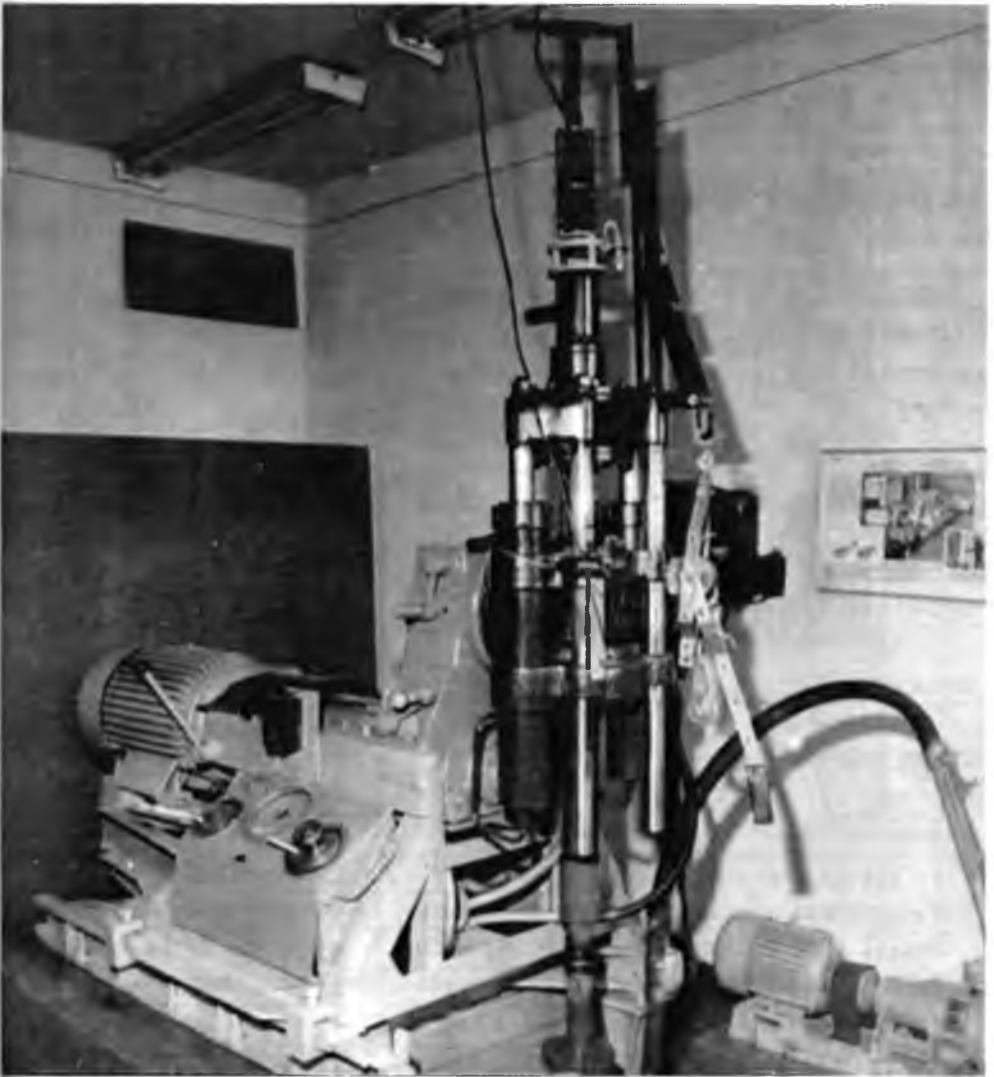
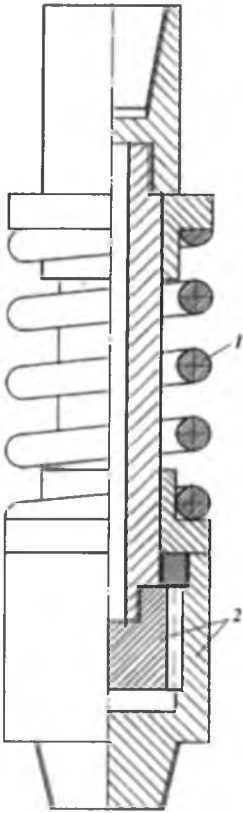


Рис. 1. Загальний вигляд бурового стенда

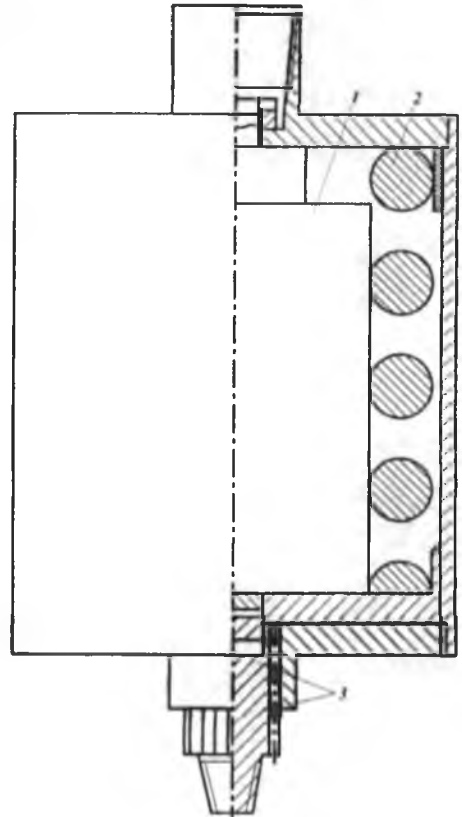
Для встановлення емпіричних кореляційних залежностей між параметрами бурильного інструменту та моментоемності процесу буріння було проведено двадцять п'ять серій експериментів за класичним планом. Серії експериментів розбито на три групи, що відрізняються умовами проведення.

В табл. 1 наведено статистичні характеристики миттєвих значень обертового моменту T_{oi} на долоті паралельних дослідів першої групи (серії 1-8) за різних значень C . Буріння велось долотом III-76OK-ЦА в граніті ($p_{ш} = 3120$ МПа) за постійних осьового навантаження $F_{c1} = 25$ кН та частоти обертання $n_c = 82$ хв⁻¹. Гідравлічний поглинач коливань (рідинна пружина) не використовувався.



- 1 – пружина стиску,
2 – рухоме шліцьове з'єднання

Рис. 2. Пристрій зміни жорсткості інструменту бурильного



- 1 – рідинна пружина, 2 – пружина стиску, 3 – рухоме шліцьове з'єднання

Рис. 3. Пристрій зміни демпфування бурильного інструмента

Таблиця 1. Статистичні характеристики вибірок миттєвих значень обертового моменту T_{oi} паралельних дослідів за результатами 1-8 серій експериментальних досліджень

№ серії	Жорсткість C , кН/м	Об'єм миттєвих значень T_{oi}	Статистичні характеристики вибірок	
			Середнє значення \bar{T}_o , Н·м	Дисперсія D_1 , (Н·м) ²
1	225	881	135,5	2679
2	400	1454	126,57	1593
3	1000	523	116,89	1317
4	1480	528	113,18	1226
5	1700	831	110,35	1205
6	2100	393	108,72	1155
7	2500	639	107,5	1129
8	6000	1561	100,65	1173

В табл. 2 наведено результати перевірки нульових гіпотез про рівність дисперсій вибірок $H_0: D_{Tj} = D_{Tk} (j \neq k)$ за альтернативних їм $H_1: D_{Tj} \neq D_{Tk} (j \neq k)$.

Таблиця 2. Перевірка нульових гіпотез про рівність дисперсій вибірок, $\alpha=0,02$

№ серії	C, кН/м	$D_T, (Н \cdot м)^2$	Об'єм миттєвих значень T_{oi}	Перевірка умови $F_{cn} < F_{кр}$	Висновок про гіпотезу $H_0: D_{Tj} = D_{Tk} (j \neq k)$
1	2	3	4	5	6
1	225	2679	881	1,68 > 1,09	Не підтверджена
2	400	1593	1454		
1	225	2679	881	2,03 > 1,17	Не підтверджена
3	1000	1317	523		
1	225	2679	881	2,19 > 1,17	Не підтверджена
4	1480	1226	528		
1	225	2679	881	2,22 > 1,13	Не підтверджена
5	1700	1205	831		
1	225	2679	881	2,32 > 1,19	Не підтверджена
6	2100	1155	393		
1	225	2679	881	2,37 > 1,17	Не підтверджена
7	2500	1129	639		
1	225	2679	881	2,28 > 1,09	Не підтверджена
8	6000	1173	1561		
2	400	1593	1454	1,21 > 1,17	Не підтверджена
3	1000	1317	523		
2	400	1593	1454	1,3 > 1,17	Не підтверджена
4	1480	1226	528		
2	400	1593	1454	1,32 > 1,13	Не підтверджена
5	1700	1205	831		
2	400	1593	1454	1,38 > 1,19	Не підтверджена
6	2100	1155	393		
2	400	1593	1454	1,41 > 1,17	Не підтверджена
7	2500	1129	639		
2	400	1593	1454	1,36 > 1,17	Не підтверджена
8	6000	1173	1561		
3	1000	1317	523	1,07 < 1,17	Підтверджена
4	1480	1226	528		
3	1000	1317	523	1,09 < 1,13	Підтверджена
5	1700	1205	831		

Продовження табл. 2

1	2	3	4	5	6
3	1000	1317	523	1,14<1,19	Підтверджена
6	2100	1155	393		
3	1000	1317	523	1,17>1,16	Не підтверджена
7	2500	1129	639		
3	1000	1317	523	1,12>1,09	Не підтверджена
8	6000	1173	1561		
4	1480	1226	528	1,02<1,13	Підтверджена
5	1700	1205	831		
4	1480	1226	528	1,06<1,13	Підтверджена
6	2100	1155	393		
4	1480	1226	528	1,09<1,11	Підтверджена
7	2500	1129	639		
4	1480	1226	528	1,05<1,09	Підтверджена
8	6000	1173	1561		
5	1700	1205	831	1,04<1,11	Підтверджена
6	2100	1155	393		
5	1700	1205	831	1,07<1,13	Підтверджена
7	2500	1129	639		
5	1700	1205	831	1,03<1,11	Підтверджена
8	6000	1173	1561		
6	2100	1155	393	1,02<1,11	Підтверджена
7	2500	1129	639		
6	2100	1155	393	1,02<1,11	Підтверджена
7	6000	1173	1561		
7	2500	1129	639	1,04<1,11	Підтверджена
8	6000	1173	1561		

За табл. 2 нульова гіпотеза про рівність дисперсій вибірок підтверджується для 3, 4, 5, 6, 7 та 8 серій. Всі інші серії належать до різних генеральних сукупностей.

При підтвердженні нульової гіпотези про рівність дисперсій для 3, 4, 5, 6, 7 та 8 серій проводимо перевірку гіпотез про рівність середніх вибіроків $H_0: \bar{T}_{0j} = \bar{T}_{0k} (j \neq k)$ за альтернативних їм $H_1: \bar{T}_{0j} > \bar{T}_{0k} (j \neq k)$.

За результатами перевірки нульових гіпотез для серій 1-8 встановлено наступне:

- зміна жорсткості бурильного інструменту не є значущою при порівнянні дисперсій вибірок миттєвих значень обертового моменту на долоті паралельних дослідів в діапазоні жорсткостей 1000-6000 кН/м, вибірки миттєвих значень обертового моменту з ймовірністю 0,98 належать до одної генеральної сукупності;

- за нульовою гіпотезою про рівність середніх вибірових з ймові- рністю більшою за 0,95 тільки вибірки миттєвих значень обертового моменту в діапазоні жорсткостей 1700-2500 кН/м належать до однієї ге- неральної сукупності, всі інші вибірки – до різних;

- зі зменшенням жорсткості C бурильного інструменту середнє значення обертового моменту на долоті зростає.

Таблиця 3. Перевірка нульових гіпотез про рівність середніх вибір- кових, $\alpha=0,05$

№ се- рії	C , кН/м	\bar{T}_o , Н·м	D_1 , (Н·м) ²	Об'єм миттєвих значень T_{oi}	Перевірка умови $T_{en} < T_{sp}$	Висновок про гіпотезу $H_0: \bar{T}_{oj} = \bar{T}_{ok}$ ($j \neq k$)	$S(t)$	Ймовірність випадкової похибки
3	1000	116,89	1317	523	1,7>1,65	Не підтверджена	0,955	0,045
4	1480	113,18	1226	528				
3	1000	116,89	1317	523	3,3>1,65	Не підтверджена	0,999	0,001
5	1700	110,35	1205	831				
3	1000	116,89	1317	523	3,5>1,65	Не підтверджена	0,999	0,001
6	2100	108,72	1155	393				
4	1480	113,18	1226	528	1,5<1,65	Підтверджена	0,933	0,067
5	1700	110,35	1205	831	$\alpha=0,1 \rightarrow 1,25$	Не підтверджена		
4	1480	113,18	1226	528	1,9>1,65	Не підтверджена	0,971	0,029
6	2100	108,72	1155	393				
4	1480	113,18	1226	528	2,8>1,65	Не підтверджена	0,997	0,003
7	2500	107,5	1129	639				
4	1480	113,18	1226	528	7>1,65	Не підтверджена	1,0	0,0
8	6000	100,65	1173	1561				
5	1700	110,35	1205	831	0,8<1,65	Підтверджена	0,788	0,212
6	2100	108,72	1155	393				
5	1700	110,35	1205	831	1,6<1,65	Підтверджена	0,9452	0,0548
7	2500	107,5	1129	639	$\alpha=0,1 \rightarrow 1,25$	Не підтверджена		
5	1700	110,35	1205	831	10>1,65	Не підтверджена	1,0	0,0
8	6000	100,65	1173	1561				
6	2100	108,72	1155	393	0,6<1,65	Підтверджена	0,726	0,274
7	2500	107,5	1129	639				
6	2100	108,72	1155	393	5>1,65	Не підтверджена	1,0	0,0
8	6000	100,65	1173	1561				
7	2500	107,5	1129	639	4,3>1,65	Не підтверджена	1,0	0,0
8	6000	100,65	1173	1561				

В табл. 4 наведено статистичні характеристики миттєвих значень обертового моменту T_{oi} на долоті паралельних дослідів другої групи (серії 9-13) за різних значень C . Буріння велось долотом III-93Т-ЦА в піскову стрийської світи ($p_{in} = 2500$ МПа) за постійних осьового навантаження $F_{CT} = 25$ кН та частоти обертання $n_0 = 82$ хв⁻¹. Гідравлічний поглинач коливань (рідинна пружина) не використовувався.

Таблиця 4. Статистичні характеристики вибірок миттєвих значень обертового моменту T_{oi} паралельних дослідів за результатами 9-13 серій експериментальних досліджень

№ серії	Жорсткість C , кН/м	Об'єм миттєвих значень T_{oi}	Статистичні характеристики вибірок	
			Середнє значення \bar{T}_{oi} , Н·м	Дисперсія D_{oi} , (Н·м) ²
9	400	3947	177,27	5206
10	1480	2002	143,18	4741
11	1700	565	140,4	4588
12	2500	521	133,06	4307
13	6000	1647	130,87	3708

В табл. 5 наведено результати перевірки нульових гіпотез про рівність дисперсій вибірок $H_0: D_{ji} = D_{tk} (j \neq k)$ за альтернативних їм $H_1: D_{ji} \neq D_{tk} (j \neq k)$.

За табл. 5 нульова гіпотеза про рівність дисперсій вибірок підтверджується для 10, 11 та 12-тої серій, 9 та 13 серії належать до інших генеральних сукупностей.

При підтвердженні нульової гіпотези про рівність дисперсій для 10, 11 та 12-тої серій проводимо перевірку гіпотези про рівність середніх вибірових $H_0: \bar{T}_{oj} = \bar{T}_{ok} (j \neq k)$ за альтернативних їм $H_1: \bar{T}_{oj} > \bar{T}_{ok} (j \neq k)$.

За результатами перевірки нульових гіпотез для серій 9-13 було встановлено наступне:

- зміна жорсткості бурильного інструменту не є значущою при порівнянні дисперсій вибірок миттєвих значень обертового моменту T_{oi} паралельних дослідів в діапазоні жорсткостей $C_{opt} = 1480 - 2500$ кН/м;

- нульова гіпотеза про рівність середніх вибірових з ймовірністю 0,95 не відхиляється в інтервалі значень жорсткості $C_{opt} = 1480 - 2500$ кН/м;

- нульова гіпотеза про рівність середніх вибірових з ймовірністю більшою за 0,95 відхиляється для мінімального значення жорсткості бурильного інструменту $C_{\min} = 400$ кН/м та максимального – $C_{\max} = 6000$ кН/м.

- зі зменшенням жорсткості C бурильного інструменту середнє значення обертового моменту на долоті зростає.

Таблиця 5. Перевірка нульових гіпотез про рівність дисперсій вибірок, $\alpha = 0,02$

№ серії	C , кН/м	D_j , (Н·м) ²	Об'єм миттєвих значень T_{oi}	Перевірка умови $F_{сн} < F_{кр}$	Висновок про гіпотезу $H_0 : D_{Ij} = D_{Ik}$ ($j \neq k$)
9	400	5206	3947	1,1 > 1,09	Не підтверджена
10	1480	4741	2002		
9	400	5206	3947	1,13 < 1,17	Підтверджена
11	1700	4588	565		
9	400	5206	3947	1,21 > 1,17	Не підтверджена
12	2500	4307	521		
9	400	5206	3947	1,40 > 1,09	Не підтверджена
13	6000	3708	1647		
10	1480	4741	2002	1,03 < 1,17	Підтверджена
11	1700	4588	565		
10	1480	4741	2002	1,1 < 1,17	Підтверджена
12	2500	4307	521		
10	1480	4741	2002	1,28 > 1,09	Не підтверджена
13	6000	3708	1647		
11	1700	4588	565	1,07 < 1,25	Підтверджена
12	2500	4307	521		
11	1700	4588	565	1,24 > 1,09	Не підтверджена
13	6000	3708	1647		
12	2500	4307	521	1,16 > 1,09	Не підтверджена
13	6000	3708	1647		

В табл. 7 наведені емпіричні кореляційні залежності $\bar{T}_o = f(C)$ та результати перевірки умов задовільної апроксимації цими залежностями експериментальних даних.

Таблиця 6. Перевірка нульових гіпотез про рівність середніх вибірових, $\alpha = 0,05$

№ серії	C , кН/м	\bar{T}_o , Н·м	D_l , (Н·м) ²	Об'єм миттє- вих значень T_{oi}	Перевірка умови $T_{en} < T_{kp}$	Висновок про гіпотезу $H_0: \bar{T}_{oj} = \bar{T}_{ok}$ ($j \neq k$)	$S(t)$	Ймовір- ність випадкової похибки
9	400	177,27	5206	3947	6,7 > 1,65	Не підтверджена	1,0	0,0
11	1700	140,4	4588	565		0,7 < 1,65	Підтвердже- на	0,758
10	1480	143,18	4741	2002	1,9 > 1,65		Не підтверджена	0,971
11	1700	140,4	4588	565		7,4 > 1,65	Не підтверджена	1,0
10	1480	143,18	4741	2002	1,0 < 1,65		Підтвердже- на	0,841
12	2500	133,06	4307	521		4,2 > 1,65	Не підтверджена	1,0
13	6000	130,87	3708	1647	2,9 > 1,65		Не підтверджена	0,998
11	1700	140,4	4588	565				
12	2500	133,06	4307	521				
11	1700	140,4	4588	565				
13	6000	130,87	3708	1647				
12	2500	133,06	4307	521				
13	6000	130,87	3708	1647				

Таблиця 7. Результати підбору залежностей $\bar{T}_o = f(C)$ та перевірка умов задовільної апроксимації експериментальних даних

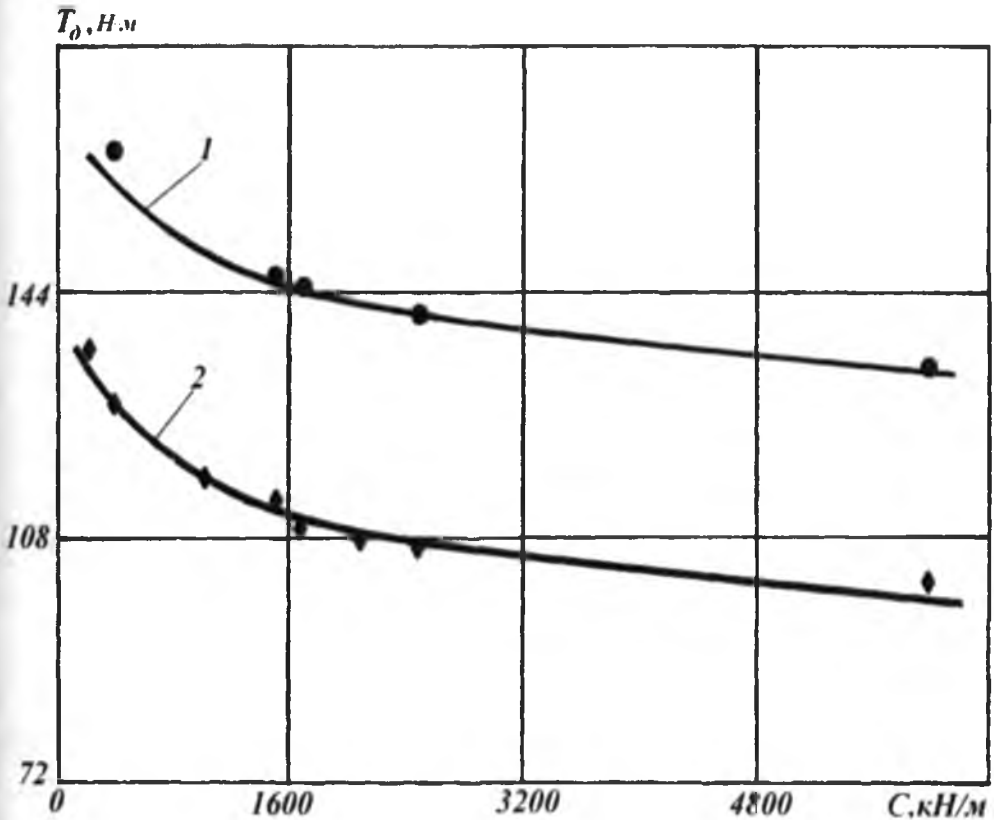
№ серії	$P_{ш}$, МПа	Типо- розмір долота	Емпіричні залежності	Емпіричне значення коефіцієнта кореляції	Перевірка умови $\sigma_0 < 0,1T$
1-8	3120	III-76OK- ЦА	$\bar{T}_o = 222,313 \cdot C^{-9,239122 \cdot 10^{-2}}$	-0,9863 P > 0,999	1,64 < 11,5
9-13	2500	III-93T- ЦА	$\bar{T}_o = 275,738 \cdot C^{-8,61558 \cdot 10^{-2}}$	-0,9936 P > 0,999	0,59 < 14,5

Прим.: P – ймовірність кореляційного зв'язку між значеннями \bar{T}_o і C

Умови задовільної апроксимації емпіричними залежностями виконуються. Вибірki експериментальних та розрахункових значень середнього значення обертового моменту на долоті, одержаних за різних рівнів жорсткості C бурильного інструменту, наведено в табл. 8. Графіки підібраних залежностей $\bar{T}_o = f(C)$ зображено на рис. 4.

Таблиця 8. Експериментальні та розрахункові значення середнього значення обертового моменту на долоті

C	кН/м	225	400	1000	1480	1700	2100	2500	6000
Експ. дані	Н·м	135,5	126,57	120,5	113,18	109,59	108,72	107,5	100,65
Формула	$\bar{T}_o = 222,313 \cdot C^{-9,239122 \cdot 10^{-2}}$								
\bar{T}_o	Н·м	134,79	127,81	117,43	113,26	111,81	109,65	107,9	99,52
C	кН/м	-	400	-	1480	1700	-	2500	6000
Експ. дані	Н·м	-	177,27	-	143,18	140,4	-	133,06	130,87
Формула	$\bar{T}_o = 344,756 \cdot C^{-0,1171153}$								
\bar{T}_o	Н·м	-	170,91	-	146,63	144,27	-	137,90	124,46



1(●) - долото 93Т, $p_{ш}=2500$ МПа; 2(◆) - долото 76ОК, $p_{ш}=3120$ МПа

Рис. 4. Графіки залежностей моментосмності процесу буріння від жорсткості бурильного інструменту

В табл. 9 наведено статистичні характеристики миттєвих значень обертового моменту T_{oi} на долоті паралельних дослідів третьої групи (серії 14-25) за різних значень β . Буріння велось долотом ПІ-93Т-ЦА в блоках піскови́ка воротищенської світи, складених з двох пропластків твердістю $p_{m1} = 1440$ МПа і $p_{m2} = 2050$ МПа, за постійних осьового навантаження $F_{c7} = 25$ кН та частоти обертання $n_e = 82$ хв⁻¹. Жорсткість бурильного інструменту встановлювалась на мінімальному рівні $C_{mm} = 225$ кН/м. Для зміни демпфування бурильного інструменту використовувався гідравлічний поглинач коливань.

Таблиця 9. Статистичні характеристики вибірок миттєвих значень обертового моменту T_{oi} паралельних дослідів за результатами 14-25 серій експериментальних досліджень

№ серії	p_m , МПа	β , кН·с/м	Об'єм миттєвих значень T_{oi}	Статистичні характеристики вибірок	
				Середнє значення \bar{T}_{oi} , Н·м	Дисперсія D_i , (Н·м) ²
14	1440	0,1	169	199,35	5885
15		40	104	168,26	1325
16		50	208	159,97	980
17		70	196	143,95	593
18		80	208	130,5	724
19		90	104	116,03	915
20		2050	0,1	249	179,43
21	40		234	143,79	1092
22	50		208	126,94	1031
23	70		208	100,94	798
24	80		208	93,43	1098
25	90		104	82,33	1151

В табл. 10 наведено результати перевірки нульових гіпотез про рівність дисперсій вибірок $H_0: D_{Tj} = D_{Tk} (j \neq k)$ за альтернативних їм $H_1: D_{Tj} \neq D_{Tk} (j \neq k)$.

Для тих серій, для яких нульова гіпотеза про рівність дисперсій вибірок миттєвих значень обертового моменту для яких не відхиляється, проводимо перевірку гіпотези про рівність середніх вибірових $H_0: \bar{T}_{oj} = \bar{T}_{ok} (j \neq k)$ за альтернативних їм $H_1: \bar{T}_{oj} > \bar{T}_{ok} (j \neq k)$.

Таблиця 10. Перевірка нульових гіпотез про рівність дисперсій вибірок, $\alpha=0,02$

№ серії	β , кН·с/ м	D_j , (Н·м) ²	Об'єм миттєвих значень T_{oi}	Перевірка умови $F_{ci} < F_{kp}$	Висновок про гіпотезу $H_0: D_{Tj} = D_{Tk}$ ($j \neq k$)
1	2	3	4	5	6
14	0,1	5885	169	4,44 > 1,522	Не підтверджена
15	40	1325	104		
14	0,1	5885	169	6,01 > 1,41	Не підтверджена
16	50	980	208		
14	0,1	5885	169	9,92 > 1,421	Не підтверджена
17	70	593	196		
14	0,1	5885	169	8,13 > 1,41	Не підтверджена
18	80	724	208		
14	0,1	5885	169	6,43 > 1,526	Не підтверджена
19	90	915	104		
15	40	1325	104	1,352 < 1,47 4	Підтверджена
16	50	980	208		
15	40	1325	104	2,234 > 1,48 2	Не підтверджена
17	70	593	196		
15	40	1325	104	1,83 > 1,477	Не підтверджена
18	80	724	208		
15	40	1325	104	1,448 < 1,58 1	Підтверджена
19	90	915	104		
16	50	980	208	1,653 > 1,39 1	Не підтверджена
17	70	593	196		
16	50	980	208	1,353 < 1,38 5	Підтверджена
18	80	724	208		
16	50	980	208	1,071 < 1,5	Підтверджена
19	90	915	104		
17	70	593	196	1,22 < 1,391	Підтверджена
18	80	724	208		
17	70	593	196	1,54 > 1,478	Не підтверджена
19	90	915	104		
18	80	724	208	1,26 < 1,474	Підтверджена
19	90	915	104		
20	0,1	3997	249	3,33 > 1,368	Не підтверджена
21	40	1092	234		
20	0,1	3997	249	3,88 > 1,377	Не підтверджена
22	50	1031	208		

Продовження табл. 10

1	2	3	4	5	6
20	0,1	3997	249	5,01>1,377	Не підтверджена
23	70	798	208		
20	0,1	3997	249	3,64>1,377	Не підтверджена
24	80	1098	208		
20	0,1	3997	249	3,47>1,494	Не підтверджена
25	90	1151	104		
21	40	1092	234	1,06<1,38	Підтверджена
22	50	1031	208		
21	40	1092	234	1,37<1,38	Підтверджена
23	70	798	208		
21	40	1092	234	1,01<1,376	Підтверджена
24	80	1098	208		
21	40	1092	234	1,05<1,466	Підтверджена
25	90	1151	104		
22	50	1031	208	1,29<1,385	Підтверджена
23	70	798	208		
22	50	1031	208	1,06<1,385	Підтверджена
24	80	1098	208		
22	50	1031	208	1,12<1,474	Підтверджена
25	90	1151	104		
23	70	798	208	1,38<1,385	Підтверджена
24	80	1098	208		
23	70	798	208	1,44<1,474	Підтверджена
25	90	1151	104		
24	80	1098	208	1,05<1,474	Підтверджена
25	90	1151	104		

За результатами перевірки нульових гіпотез для серій 14-25 було встановлено наступне:

- зміна демпфування бурильного інструменту не є значущою при порівнянні дисперсій вибірок миттєвих значень обертового моменту T_{oi} паралельних дослідів для значень демпфування $\beta=40; 50; 70; 80; 90$ кН·с/м незалежно від твердості гірської породи;

- нульова гіпотеза про рівність середніх вибірових з ймовірністю більшою за 0,95 відхиляється для всіх значень демпфування $\beta=0,1; 40; 50; 70; 80; 90$ кН·с/м незалежно від твердості гірської породи;

- зі зменшенням демпфування β бурильного інструменту середнє значення обертового моменту на долоті зростає.

Таблиця 11. Перевірка нульових гіпотез про рівність середніх вибірових, $\alpha=0,05$

№ серії	\bar{T}_{oi} , Н·м	D_i , (Н·м) ²	Об'єм миттєвих значень T_{oi}	Перевірка умови $T_{en} < T_{кр}$	Висновок про гіпотезу $H_0: \bar{T}_{oj} = \bar{T}_{ok}$ ($j \neq k$)	S(t)	Ймовір- ність випадкової похибки
15	168,26	1325	104	1,984>1,65	Не	0,976	0,0237
16	159,97	980	208		підтверджена		
15	168,26	1325	104	11,25>1,65	Не	1,0	0,0
19	116,03	915	104		підтверджена		
16	159,97	980	208	10,30>1,65	Не	1,0	0,0
18	130,5	724	208		підтверджена		
16	159,97	980	208	11,95>1,65	Не	1,0	0,0
19	116,03	915	104		підтверджена		
17	143,95	593	196	5,28>1,65	Не	1,0	0,0
18	130,5	724	208		підтверджена		
18	130,5	724	208	4,13>1,65	Не	1,0	0,0
19	116,03	915	104		підтверджена		
21	143,79	1092	234	5,43>1,65	Не	1,0	0,0
22	126,94	1031	208		підтверджена		
21	143,79	1092	234	14,69>1,65	Не	1,0	0,0
23	100,94	798	208		підтверджена		
21	143,79	1092	234	15,97>1,65	Не	1,0	0,0
24	93,43	1098	208		підтверджена		
21	143,79	1092	234	15,49>1,65	Не	1,0	0,0
25	82,33	1151	104		підтверджена		
22	126,94	1031	208	8,77>1,65	Не	1,0	0,0
23	100,94	798	208		підтверджена		
22	126,94	1031	208	10,47>1,65	Не	1,0	0,0
24	93,43	1098	208		підтверджена		
22	126,94	1031	208	11,14>1,65	Не	1,0	0,0
25	82,33	1151	104		підтверджена		
23	100,94	798	208	2,49>1,65	Не	0,9 93	0,007
24	93,43	1098	208		підтверджена		
23	100,94	798	208	4,82>1,65	Не	1,0	0,0
25	82,33	1151	104		підтверджена		
24	93,43	1098	208	2,74>1,65	Не	0,9 94	0,006
25	82,33	1151	104		підтверджена		

В табл. 12 наведені емпіричні кореляційні залежності $\bar{T}_o = f(\beta)$ та результати перевірки умов задовільної апроксимації цими залежностями експериментальних даних.

Таблиця 12. Результати підбору залежностей $\bar{T}_o = f(\beta)$ та перевірка умов задовільної апроксимації експериментальних даних

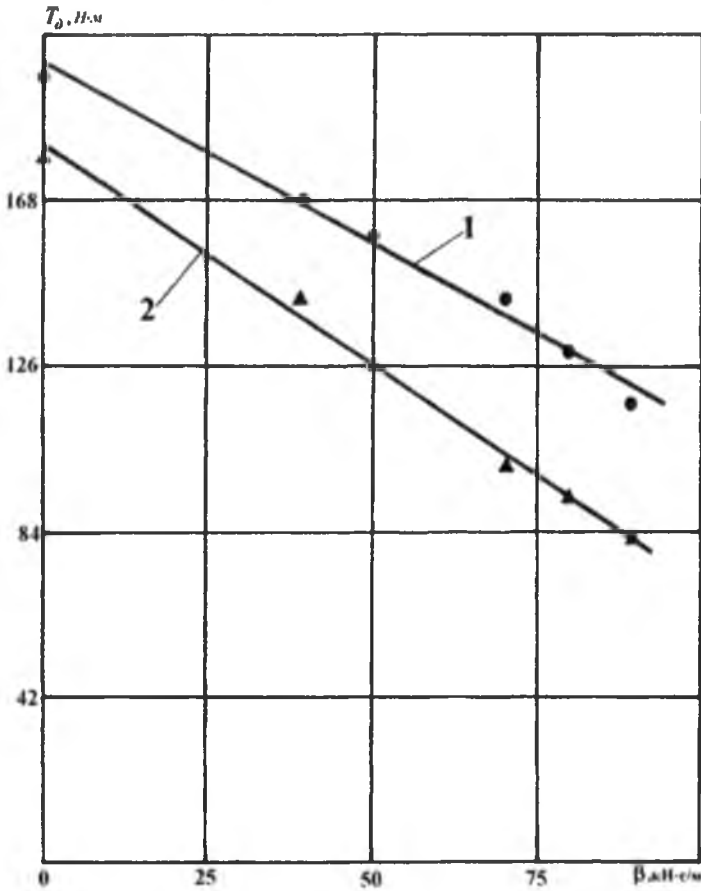
№ серії	p_m , МПа	Емпіричні залежності	Емпіричне значення коефіцієнту кореляції	Перевірка умови $\sigma_\theta < 0,1\bar{T}_o$
14-19	1440	$\bar{T}_o = 202,478 - 0,899149 \cdot \beta$	-0,9922 P>0,95	3,73<15
20-25	2050	$\bar{T}_o = 182,177 - 1,109376 \cdot \beta$	-0,9958 P>0,95	3,29<12

Прим.: P – ймовірність кореляційного зв'язку між значеннями \bar{T}_o і β

Умови задовільної апроксимації емпіричними залежностями виконуються. Вибірки експериментальних та розрахункових значень середнього значення обертового моменту на долоті, одержаних за різних рівнів демпфування β бурильного інструменту, наведено в табл. 13. Графіки підібраних залежностей $\bar{T}_o = f(\beta)$ зображено на рис. 5.

Таблиця 13. Експериментальні та розрахункові значення середнього значення обертового моменту на долоті

$p_m = 1440$ МПа							
β	кН·с/м	0,1	40	50	70	80	90
Експ. дані	Н·м	199,35	168,26	159,97	143,95	130,5	116,03
Формула		$\bar{T}_o = 202,478 - 0,899149 \cdot \beta$					
\bar{T}_o	Н·м	202,39	166,51	57,52	39,54	30,55	21,55
$p_m = 2050$ МПа							
β	кН·с/м	0,1	40	50	70	80	90
Експ. дані	Н·м	179,43	143,79	126,94	100,94	93,43	82,33
Формула		$\bar{T}_o = 182,177 - 1,109376 \cdot \beta$					
\bar{T}_o	Н·м	182,07	137,80	26,71	04,52	93,43	82,33



1(●) – пропласток твердістю 1440МПа; 2(▲) – пропласток твердістю 2050МПа
 Рис. 5. Залежності середнього значення обертового моменту на долоті (моментосмності) від демпфування під час буріння у блоках піско-вика воротищенської світи

Висновки

1. Зменшення жорсткості бурильного інструменту збільшує моментосмність (середнє значення обертового моменту на долоті) \bar{T}_0 незалежно від типорозміру долота в середньому на 14-22%.
2. Зменшення демпфування від 90 до 0,1 кН·с/м веде до збільшення \bar{T}_0 . Інтенсивність збільшення \bar{T}_0 залежить від фізико-механічних характеристик породи. За зміни коефіцієнту демпфування від 90 до 0,1 кН·с/м (в інтервалі твердості породи за штампом 1440-2050 МПа) це збільшення склало 42-54%.
3. Ймовірність існування емпіричних кореляційних залежностей $\bar{T}_0 = f(C)$ та $\bar{T}_0 = f(\beta)$ перевищує 0,95.

Література

1. Григорян Н.А. Анализ процесса турбинного бурения / Н.А.Григорян, Р.Е.Багиров. – М.: Недра, 1982. – 207с.
2. Спивак А.И. Разрушение горных пород при бурении скважин / А.И.Спивак, А.Н.Попов. – М.: Недра, 1979. – 239 с.
3. Потапов Ю.Ф. Разрушение горных пород трехшарошечными долотами малого диаметра / Ю.Ф.Потапов, В.В. Симонов. – М.: Гостоптехиздат, 1961. – 86 с.
4. Мавлютов М.Р. Некоторые результаты экспериментального исследования колебаний осевой и моментной нагрузок на шарошечном долоте (Частина книги) / М.Р.Мавлютов, Р.Х.Санников // Труды УНИ. – 1972. – Вып. VIII. – С. 33-41.
5. Буровий стенд для дослідження процесу руйнування гірських порід і динаміки бурильного інструменту / Б.Д.Борисевич, В.М.Мойсишин, Р.Б.Щербій [та ін.] // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2009. – №3(32). – С.23-29.
6. Пристрої зміни динаміки буріння на буровому стенді ІФНТУНГ / Б.Д.Борисевич, В.М.Мойсишин, Р.Б.Щербій [та ін.] // Розробка та розвідка нафтових і газових родовищ. – 2009. – №4(33). – С. 18-23.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.12.2012 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., професором Векериком В.І., д.т.н., професором Світлицьким В.М. (м. Київ)

**DETERMINATION OF EMPIRIC DEPENDENCES
OF MEAN VALUE OF CIRCULATING MOMENT ON A BIT
FROM INFLEXIBILITY AND DEMPFINATION
OF BORING INSTRUMENT**

V. Moysyshyn, D. Borysevych, Yu. I. Gavryliv, I. Smaga

Ivano-Frankiv'sk National Technical University of Oil and Gas;

15, Carpathians street, Ivano-Frankiv'sk 76019;

ph. +380 (3422) 4-22-64, 4-24-53, fax. +380 (3422) 4-21-39

For determination of empiric dependences between the mean value of circulating moment on a bit (moment capacity) from one side and parameters of boring instrument (by inflexibility C and dempfnation β) from second one, on a boring stand IFNTOUNG were twelve conducted five series of the researches after a classic plan broken on three groups. For the first group of researches inflexibility of boring instrument was set at eight level – 225, 400, 1000, 1480, 1700, 2100, 2500 and 6000 kN/m, and dempfnation was permanent and made 0,1 kNs/m. For the second group the inflexibility of boring instrument was set at five level – 400, 1480, 1700, 2500 and 6000

kN/m and dempfination also was permanent and made 0,1 kN s/m. For the third group the inflexibility was permanent and made 225 kN/m dempfination was set at six level 0,1, 40, 50, 70, 80 and 90 kN s/m. In the interval of dempfination 40-90 kN s/m was used hydraulic absorber of vibrations (hydraulic spring). For comparison of statistical descriptions of the selections with the instantaneous values of circulating moment, got at different levels of inflexibility and dempfination statistical verification of parametric hypotheses was applied. As a result of these researches, the following is set:

1. Reduction of inflexibility of boring instrument multiplies moment capacity regardless of type size of bit on the average on 14-22%;

2. Reduction of dempfination from 90 to 0,1 kN s/m conduces \bar{T}_o to the increase. Intensity of \bar{T}_o increase depends on physical mechanical descriptions of breed. For the changes of dempfination from 90 to 0,1 kN s/m (in the interval of hardness of breed after the stamp of 1440-2050 MPa) this increase was 42-54%;

3. Probability of existence of empiric correlation dependences $\bar{T}_o = f(C)$ and $\bar{T}_o = f(\beta)$ exceeds 0,95.

Key words: *boring instrument, inflexibility, dempfination, moment capacity, statistical descriptions, parametric hypotheses, empiric correlation dependences.*

УДК 622.243

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕКТРОБУРІВ ПРИ СПОРУДЖЕННІ ПОХИЛО-СКЕРОВАНИХ СВЕРДЛОВИН

Я. С. Коцкулич¹, Є. М. Ставичний², С. А. П'ятківський²,
Є. Я. Коцкулич²

¹Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-76; e-mail: drill@nung.edu.ua

²Науково-дослідний і проектний інститут ПАТ "Укрнафта";
76019, м. Івано-Франківськ, Північний бульвар ім. О.С. Пушкіна, 2;
тел. +380 (342) 77-61-45

Наведено показники буріння похило-скерованих свердловин із застосуванням електробурів. Окреслено перспективні шляхи вдосконалення конструкцій електробурів і технологій їх застосування.

Ключові слова: похило-скерована свердловина, електробур, інтенсивність викривлення.

Відомо, що вперше у світі з поверхні землі похило-скеровану свердловину пробурено ударним способом у 1895 році С.Г. Войславомом. У тому ж році пробурено першу скеровану нафтову свердловину роторним способом (США, Техас) [1].

У 1949 році розпочато застосування двоствольного паралельного буріння (одна свердловина вертикальна, друга – похило-направлена) на морському родовищі Ізберг (Дагестан). У 70-х роках минулого століття буріння двоствольних свердловин започатковано Долинською спеціалізованою конторою електробуріння (Україна).

Буріння похило-скерованих свердловин із застосуванням електробурів було розпочато в 1951 році в Баку експериментальною конторою електробуріння. Пробурено ряд свердловин глибиною 2500 м з відхиленням від вертикалі до 250 м.

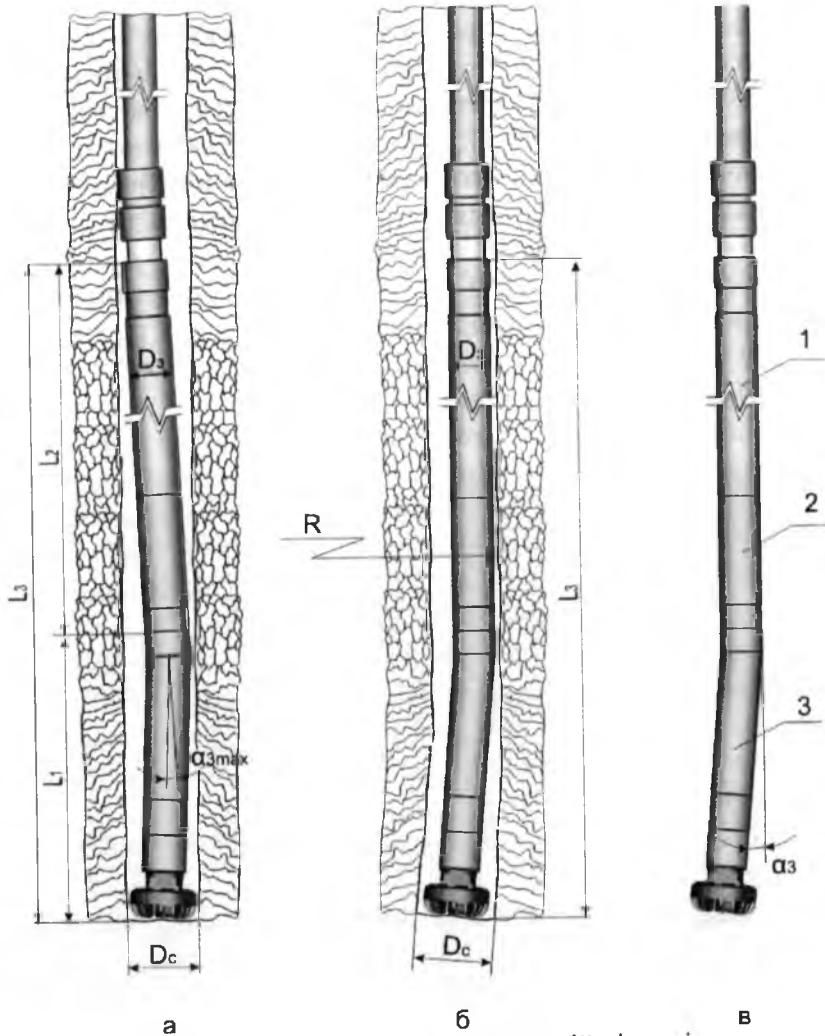
Під час буріння вперше було застосовано відхилювач у вигляді викривленого електробура, виконаного шляхом нагвинчування шпінделя на вал двигуна під деяким кутом [2]. Кут утворювався зміщенням осі різьби шпінделя відносно основної поздовжньої осі на кут від 0,5° до 2° (рис. 1).

Такий відхилювач виявився більш ефективним, ніж застосування викривленої труби або перехідника, встановлених над електробуром. В подальшому було розроблено конструкції викривлених електробурів, якими передбачено застосування механізмів викривлення МІ. Вони встановлювалися між серійним двигуном і шпінделем і забезпечували

перелом осей шпинделя і двигуна на $1,0^\circ$; $1,5^\circ$; $2,0^\circ$ (МІ1,0; МІ1,5; МІ2,0) при інтенсивності набору кривизни до $2,5^\circ$ на 10 м проходки.

У разі більшої інтенсивності набору кривизни (від $2,5^\circ$ до 5° на 10 метрів) застосовувалися механізми подвійного викривлення.

Механізм викривлення може бути встановлений між редуктором-вставкою електробура і шпинделем.



а - розташування електробура у вертикальній ділянці свердловини;
 б - розташування електробура у викривленій ділянці свердловини;
 в - схема викривленого електробура:
 1 - двигун електробура. 2 - механізм викривлення, 3 - шпиндель
 Рис. 1. Викривлений турбобур

Для вимірювання під час буріння кута нахилу свердловини, азимута і положення відхилювача було розроблено телеметричну систему (СТЕ).

У 1965 році розпочато серійне виробництво електробурів на Харківському електромеханічному заводі, а в 1972 році усе виробництво електробурової техніки передано спеціалізованому конструкторсько-технологічному бюро по електробурінню (СКТБЕ) Харківського електромеханічного заводу (нині – завод “Потенціал”), який в даний час є єдиним у світі виробником цілого комплексу електробурового обладнання.

У 1963 році розпочато промислове застосування електробуріння Долинською спеціалізованою конторою електробуріння тресту “Прикарпатбурнафта” (об’єднання “Укрзахіднафтогаз”). Із застосуванням електробурової техніки пробурено 12,3 тис. метрів гірських порід. Максимальних обсягів проходки в Долинському нафтопромисловому районі із застосуванням електробурів досягнуто в 1968-1969 рр., коли річний обсяг електробуріння становив 36,5 тис. м.

Всього на родовищах ПАТ “Укрнафта” із застосуванням електробурів пробурено 297 нафтогазових свердловин, з яких переважаюча більшість (272 свердловини) – похило-скеровані, серед яких 13 свердловин – горизонтально-розгалужені (РГ).

Важливою перевагою застосування електробурів порівняно з гідравлічними вибійними двигунами та роторним способом є наявність постійного провідного каналу зв’язку, який забезпечує можливість отримувати інформацію про роботу долота та контроль і управління траєкторією похило-скерованих і горизонтальних свердловин за допомогою телесистем та спеціалізованих механізмів.

До інших переваг можна віднести наступне:

- можливість буріння свердловин при будь-яких значеннях реологічних параметрів і густини промивальної рідини, застосування в якості циркуляційного агента газоповітряних та пінних систем, рідин на вуглеводневій основі;

- можливість автоматизації і комп’ютеризації всього процесу буріння;

- проведення геофізичних досліджень у свердловинах із зенітним кутом більше 60-65° з примусовою доставкою вимірних пристроїв та зондів до вибою на бурильних трубах і шляхом використання струмопідводу як каналу електрозв’язку;

- орієнтоване забурювання додаткових стволів без установаження цементних мостів чи уїпстоків.

До недоліків застосування електробурів слід віднести:

- необхідність одночасної подачі до вибою двох видів енергії (електричної та гідравлічної);

- складність конструкції електробура та пристроїв;

- наявність електричного кабелю у трубному просторі, що призводить до збільшення гідравлічних втрат при прокачуванні рідини.

Більшість похило-скерованих свердловин, пробурених із застосуванням електробурів на родовищах ПАТ “Укрнафта” мають глибину 2500-3000 м, найглибша серед них – 4562 м, а максимальне зміщення вибою становить 1140 м (свердловина 239-Долинська). Загальна проходка ПС і ГС, пробурених в ПАТ “Укрнафта” становить близько 712 тис. м.

На Долинському родовищі із застосуванням електробурів пробурено розгалужено-горизонтальні свердловини 350, 351, 353, 356, 357, 358, 360, 825, 801 (9 свердловин).

В табл. 1 наведено дані з конструкції та інклінометрії РГ свердловини 350-Долинська, а на рис. 2 – вертикальний профіль свердловини. Свердловина закінчена двома стовбурами з максимальним зенітним кутом 87° і відхиленням – 700 м.

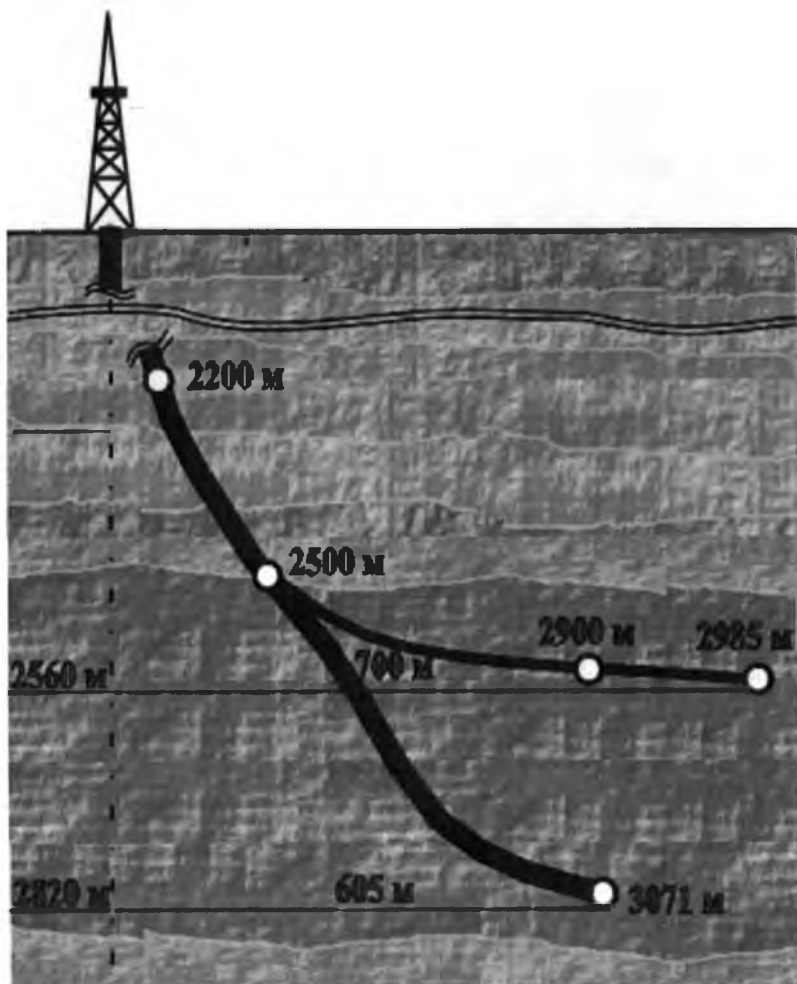


Рис. 2. Вертикальний профіль розгалужено-горизонтальної свердловини 350-Долинська

Таблиця 1. Конструкція та показники інклінометрії свердловини 350-Долинська

Назва колони	Діаметр колони, мм	Глибина спуску колони, м	Дані інклінометрії	
			Кут нахилу осі свердловини до вертикалі, град	Відхилення від вертикалі, м
Направлення	508	7	–	–
Кондуктор	324	152	–	–
Проміжна колона	219	2200	6	–
Проміжна колона	219	2500	48	–
Експлуатаційна колона (основний ствол)	146	3071	45	605
Експлуатаційна колона (II розгалуження)	146	2985	87	700

В табл. 2 наведено дані з конструкції та інклінометрії свердловини 801-Долинська, а на рис. 3 зображено вертикальний профіль РГ свердловини 801-Долинська, яка закінчена п'ятьма стовбурами.

Таблиця 2. Конструкція та показники інклінометрії свердловини 801-Долинська

Назва колони	Діаметр колони, мм	Глибина спуску колони, м	Дані інклінометрії	
			Кут нахилу осі свердловини до вертикалі, град	Азимут, град
Направлення	508	7	–	–
Кондуктор	324	150	1°15'	60
Проміжна колона	219	1600	8	110
Проміжна колона	219	1800	32°45'	60
Проміжна колона	219	1900	63	65
Проміжна колона	219	2060	56	65
Експлуатаційна колона (основний ствол)	146	2242	96	70
Експлуатаційна колона (II розгалуження)	146	2073-2312	25	90
Експлуатаційна колона (III розгалуження)	146	2103-2346	18	40
Експлуатаційна колона (IV розгалуження)	146	2130-2269	37	60
Експлуатаційна колона (V розгалуження)	146	2170-2220	74	60

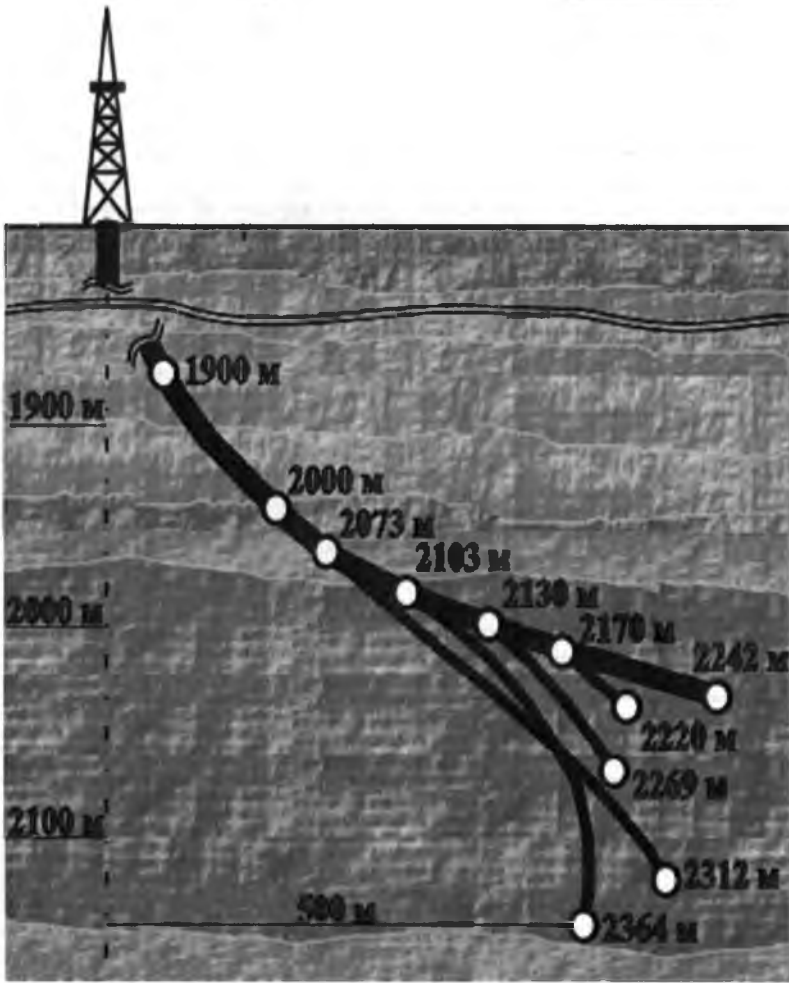


Рис. 3. Вертикальний профіль розгалужено-горизонтальної свердловини 801-Долинська

В табл. 3 приведені дані з буріння свердловин електробурами за період з 1963 по 2010 роки та частина в загальному обсязі умовно-вертикальних, похило-скерованих, розгалужено-горизонтальних свердловин і під кутом більше 45° , а на рис. 4 – їх класифікації за видами профілів.

Спеціалістами ПАТ “Укрнафта” із застосуванням електробурів пробурено похило-скеровану свердловину 1-Донбас із горизонтальною ділянкою стовбура довжиною 525 м.

Горизонтальну ділянку стовбура пробурено у підшві вугільного горизонту на полі шахти ім. Скочинського з метою дегазації продуктивного пласта. Незважаючи на відносно невелику глибину (1870 м), через складність геологічних і, особливо, техніко-технологічних умов у свердловину спущено сім обсадних колон.

Таблиця 3. Обсяги буріння та кількість пробурених свердловин ПАТ “УКРНАФТА”

Рік	К-сть св-н	Обсяг буріння, тис. м	Рік	К-сть св-н	Обсяг буріння, тис. м	Рік	К-сть св-н	Обсяг буріння, тис. м
1963	6	12,3	1979	5	9,1	1995	3	8,8
1964	9	21,1	1980	4	13,6	1996	2	5,2
1965	10	26,9	1981	7	15,3	1997	2	5,9
1966	13	27,3	1982	6	14,6	1998	2	5,3
1967	18	31,3	1983	6	13,2	1999	2	5,9
1968	16	36,5	1984	7	15,6	2000	3	9,7
1969	14	36,4	1985	5	13,3	2001	2	7,1
1970	18	32,4	1986	5	11,7	2002	3	9,2
1971	11	29,7	1987	5	17,0	2003	4	11,1
1972	13	25,7	1988	8	19,8	2004	4	11,0
1973	9	24,8	1989	6	16,8	2005	6	10,1
1974	2	12,1	1990	4	13,4	2006	5	10,2
1975	6	18,5	1991	4	11,0	2007	7	7,0
1976	6	16,3	1992	4	10,6	2008	2	6,0
1977	6	12,1	1993	3	9,0	2009	4	5,5
1978	3	10,6	1994	4	10,8	2010	3	4,9
Всього							297	712

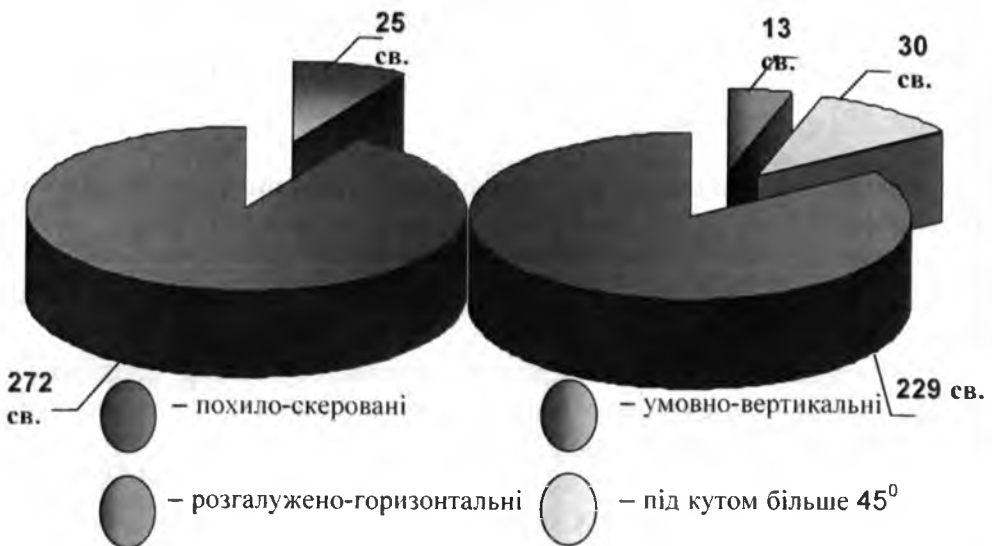


Рис. 4. Буріння свердловин електробурами на родовищах ПАТ “Укрнафта”

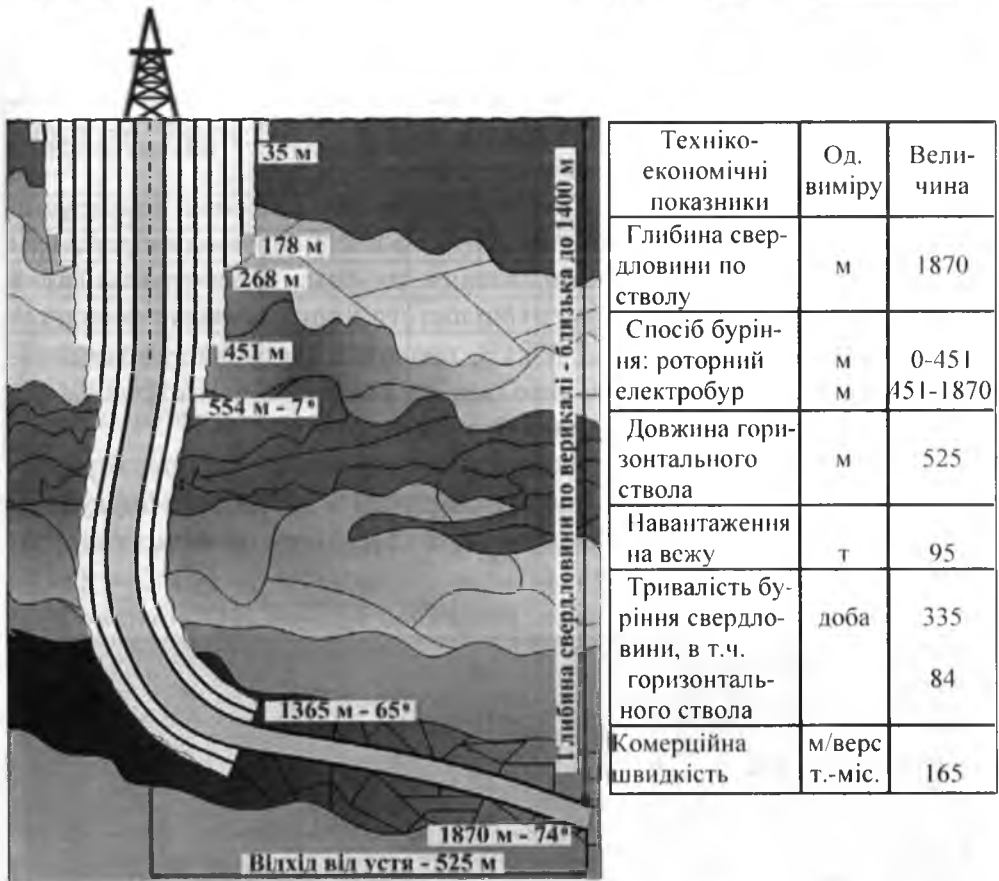


Рис. 5. Горизонтальна свердловина 1-Донбас

Схема вертикального розрізу профілю свердловини і техніко-економічні показники її спорудження показані на рис. 5, а відомості про конструкцію свердловини наведено в табл. 4.

Механічна швидкість буріння похило-скерованих свердловин електробурами на Північно-Долинському родовищі в інтервалі 1500-2500 м на 15% більша, ніж поперемінно роторним способом і з гідравлічними двигунами.

В даний час потенційні можливості електробуріння не реалізують повною мірою через низьку ефективність технічних характеристик асинхронних двигунів, розроблених ще у 60-х роках минулого століття. Потребують удосконалення і струмопідводи.

Важливим чинником підвищення ефективності електробуріння є забезпечення надійної роботи струмопідводу шляхом усунення електричних пробіїв у контактних з'єднаннях "муфта-стержень".

На заводі "Азовсталь" (м. Бердянськ) налагоджено виготовлення кабельних секцій КСТ1-Тп з гумовою ізоляцією. Врахувавши вади гумової ізоляції за ініціативою ЗАТ "ВО Бердянський кабельний завод" та

ТОВ “Інноваційне підприємство “Електробур” (м. Долина Івано-Франківської області) виготовлено “пластикову” кабельну секцію типу КСТ2-Тп, промислові випробування якої дали позитивні результати. Тривалість роботи 50 кабельних секцій досягла 5 тис. годин, що вдвічі перевищує стійкість гумових кабельних секцій.

Перспективним вважають створення принципово нової конструкції електробура з двигуном постійного струму в поєднанні з однопровідним трубчатим струмопідводом, змонтованим разом з тілом труби. Такий двигун забезпечує низький момент холостого ходу, дозволяє зменшити робочу напругу з 1,5 кВ до 0,7-0,8 кВ, працює в середовищі з температурою, вищою за 100 °С. Крім того, він дозволяє залишити вільним від кабельних секцій внутрішній канал бурильних труб.

Перспективним також є застосування технології буріння горизонтальної ділянки свердловини в умовах депресії зі зворотною циркуляцією шляхом встановлення одного або двох глибинних насосів з електроприводом, що зображено на рис. 6.

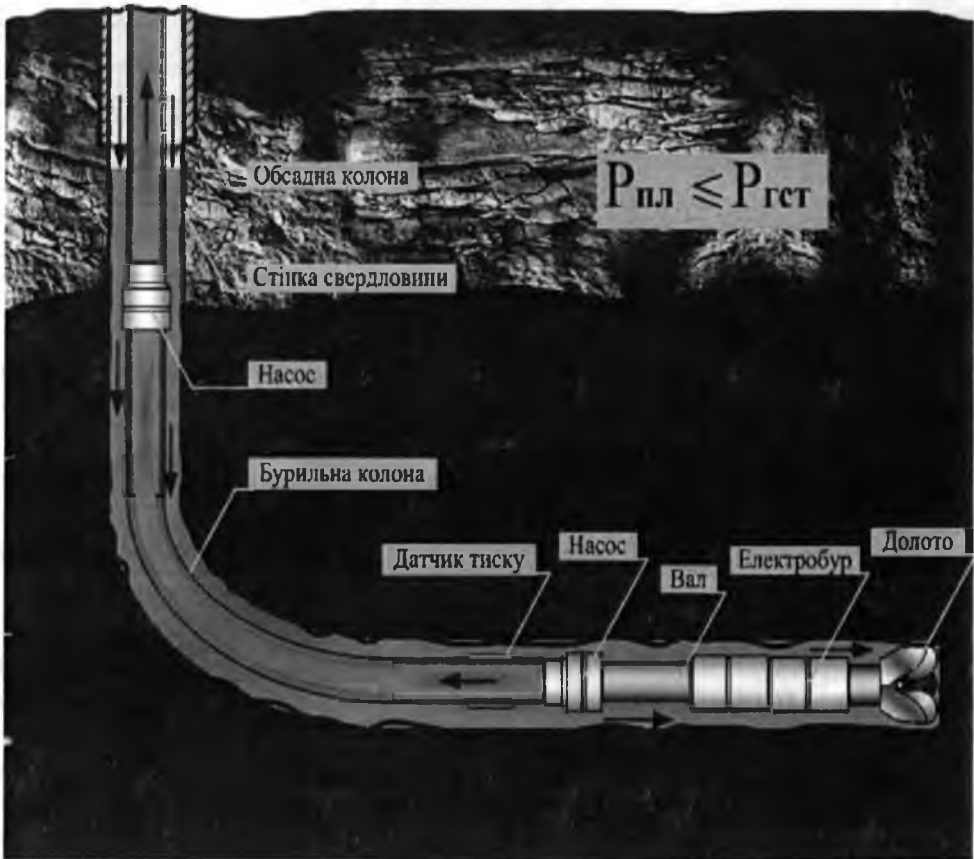


Рис. 6. Технологічна схема буріння горизонтальної ділянки свердловин електробуром в умовах депресії

Табл. 4. Споруджування дегазаційної свердловини з горизонтальною ділянкою 1-Донбас

Назва колони	Глибина спуску колони, м	Діаметр долота/розширювача, мм	Діаметр колони, мм	Кут нахилу осі свердловини до вертикалі, град
Кондуктор	35	490/780	720	–
I проміжна колона	178	490/690	630	–
II проміжна колона	268	490/590	530	–
III проміжна колона	451	490	426	–
IV проміжна колона	554	394	324	7
V проміжна колона	1365	295,3	245	65
Експлуатаційна колона	1870	215,9	196	74

Література

1. Копылов В. Е.. Бурение?...Интересно! / В. Е. Копылов. – М.: Недра, 1981. – С. 160.
2. Фоменко Ф.Н. Бурение скважин электробуром / Ф.Н. Фоменко. – М.: Недра, 1974. – С. 270.
3. Кожевников А.А. 100 лет искусственному искривлению скважин – путь инновационного развития / А.А. Кожевников // Породоразрушающий и металлообрабатывающий инструмент – техника, технология его изготовления и применения. Сборник научных трудов. – К., 2013. – Вып. 16. – С. 15-18.
4. Діхтяренко К.В. Перспективи відродження електробуріння / К.В. Діхтяренко, В.П. Червінський // Матеріали 9-ї Міжнародної науково-практичної конференції “Нафта і газ України-2013”, м. Яремче. – 2013.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.11.2012 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., професором Мойсишиним В.М., д.т.н., професором Світлицьким В.М. (м. Київ)

APPLICATION OF ELECTRYC DRILLINGS AT BUILDING SLOPING-DIRECTED MINING HOLES

**Y. S. Kotskulych¹, Y. M. Stavychny², S. A. P'yatkivscy²,
Y. Y. Kotskulych²**

¹*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-76; e-mail: drill@nung.edu.ua*

²*Science Experimental and Project Institute STALEMATE “UKRNAFTA”;
76019, Ivano-Frankivs'k, North boulevard named by Pushkin, 2;
ph. +380 (342) 77-61-45*

The indexes of the boring drilling of the sloping-directed mining holes are resulted with application of electric drillings. The perspective ways of perfection of constructions of electric drillings and technologies of their application are outlined.

Key words: sloping-directed mining hole, electric drilling, intensity of curvature.

УДК 621.81(075)

ВПЛИВ ТОЧНОСТІ ЛАНЦЮГОВИХ ПЕРЕДАЧ НА ЇХ РОБОТОЗДАТНІСТЬ

В. Т. Іващенко, В. С. Витвицький

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380(342)72-71-47; e-mail: mechmach@iung.edu.ua*

Розглядаються питання впливу точності деталей передач з приводними роликовими ланцюгами, а також точності монтажу передач на їх роботоздатність.

Наведені параметри, які обумовлюють точність монтажу зірочок. Дана оцінка впливу концентрації навантаження в шарнірах ланцюга на його термін служби.

Ключові слова: крок ланцюга, жорсткість, пружність ланцюга, коефіцієнт концентрації навантаження, сила удару.

Питання впливу точності зубчастих вінців зірочок, якості монтажу передач з гнучкою ланкою є актуальними і потребують аналітичних досліджень і експериментальних випробувань.

Вимоги до точності ланцюгових передач, які широко застосовують у бурових установках, різних верстатах, ланцюгових редукторах, транспортних і сільськогосподарських машинах та конвеєрах визначаються їх призначенням та умовами експлуатації.

Розглянемо деякі питання геометрії зірочок для роликових ланцюгів, точності складання передач на їх роботоздатність.

Похибка кроку ланцюга викликає додаткові зусилля і динамічні навантаження у вітках передачі, спричинює порушення зачеплення ланцюга із зірочками, а при битті зірочок – вібрації і небезпеку резонансу.

Перекошування осей зірочок, яке може бути викликане похибками монтажу, пружними деформаціями валів, а також торцеве биття зірочок призводить до спрацювання бокових поверхонь внутрішніх ланок ланцюга, нерівномірному спрацюванню бокових поверхонь зубців і нерівномірному розподілу навантаження по рядах ланцюга, зменшенню строку служби ланцюга.

Концентрація навантаження в роликових ланцюгових передачах. В існуючих методиках розрахунку ланцюгових передач не враховується концентрація навантаження по ширині ланцюга, в той час як ланцюг має значну жорсткість, і при деяких умовах концентрація навантаження може зменшувати строк служби однорядних передач до 40% порівняно з передачами при нормальних умовах роботи.

Основними причинами виникнення концентрації навантаження є неточність монтажу і пружні деформації валів ланцюгової передачі. На рис. 1 показано параметри, які обумовлюють точність монтажу зірочок. Норми точності монтажу для стаціонарних приводів наведені нижче.

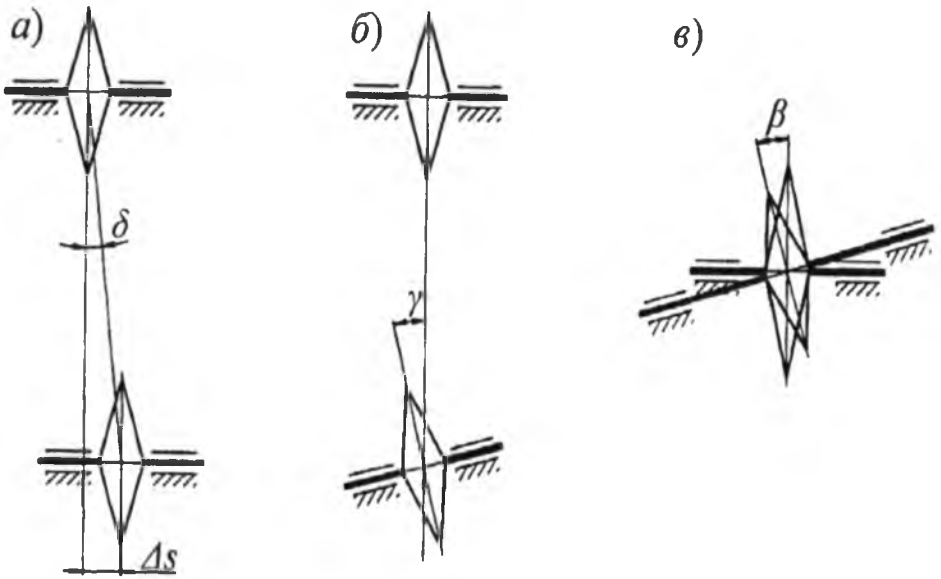


Рис. 1. Точність монтажу зірочок

Граничне відхилення ΔS , мм, зірочок від однієї площини (рис. 1,а) у відкритих передачах $\Delta S_0 = (1,2 \dots 2,4)\sqrt{a}$, а в закритих передачах $\Delta S_1 = (0,3 \dots 0,6)\sqrt{a}$, де a – міжосьова відстань, м.

Граничний кут зміщення δ_0 зірочок у відкритих передачах $\delta_0 = (0,07 \dots 0,15)/\sqrt{a}$, град., і в закритих $\delta_2 = (0,02 \dots 0,04)/\sqrt{a}$, град.

Граничний кут схрещування β_0 осей валів (рис. 1,в) у відкритих передачах $\beta_0 = (0,05 \dots 0,10)/\sqrt{a}$, град., а в закритих передачах $\beta_3 = (0,015 \dots 0,03)/\sqrt{a}$, град.

Граничний кут перекошування γ_0 зірочок (рис.1, б)

$$\gamma_0 = (2,3 \dots 4,6)/\sqrt{a}, \text{ град.}, \quad (1)$$

де a – міжосьова відстань, мм.

В середньому кут перекошування γ_0 складас 6...12°.

Оскільки жорсткість зубця зірочки набагато більша жорсткості ланцюга, то деформаціями зубця можна знехтувати. В розрахунках використовуємо питому жорсткість ланцюга

$$C_{II} = \lambda / B. \quad (2)$$

Тут $\lambda = E_{\text{д}} \cdot A_{\text{оп}} / l$ – розрахункова жорсткість ланцюга, Н/мм;
 де $E_{\text{д}}$ – умовний модуль пружності ланцюга, для ланцюга, що знаходиться під дією робочого навантаження $E_{\text{д}} = (2,1 \dots 2,5) \cdot 10^4$ МПа;

$A_{\text{оп}}$ – площа опорної поверхні шарніра ланцюга, мм²;

l – довжина робочої ділянки ланцюга, мм;

B – ширина внутрішньої ланки роликів ланцюга, мм [1].

Коефіцієнт концентрації навантаження

$$K = q_{\text{max}} / q, \tag{3}$$

де q_{max} і q – питоме навантаження на ділянці найбільшої її концентрації і середнє по ширині внутрішньої ланки

$$q = F_t / B = 2T / d_1 \cdot B_1,$$

де T_1 – обертальний момент на валу ведучої зірочки, Нм;

d_1 – дільний діаметр зірочки, м.

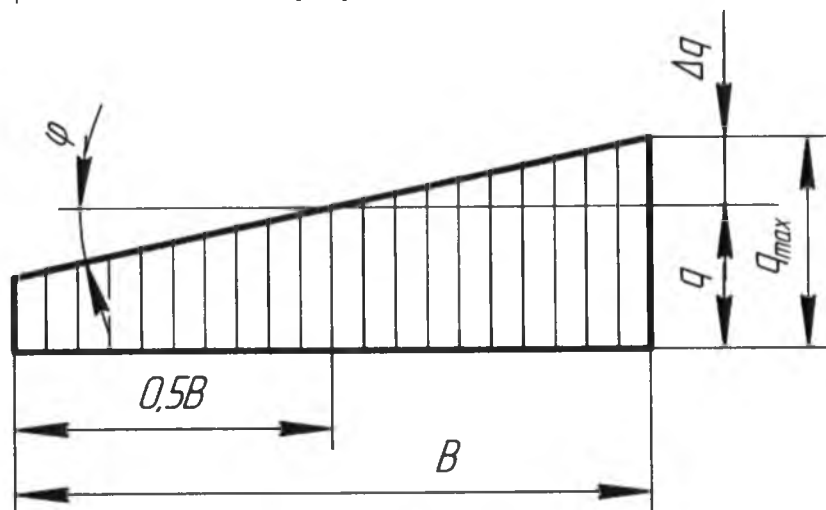


Рис.2. Епюра навантаження по ширині роликів ланцюга при перекошуванні зірочок

При розрахунках приймемо спрощену лінійну епюру розподілу навантаження по ширині ланцюга (рис. 2)

$$K = q_{\text{max}} / q = 1 + \Delta q / q. \tag{4}$$

Виразивши навантаження q і Δq через відповідні пружні деформації ланцюга δ і $\Delta\delta$ та враховуючи, що $\Delta\delta = 0,5B \cdot \text{tg} \gamma_0$, одержимо залежність для визначення коефіцієнта концентрації навантаження

$$K = 1 + \frac{0,5B \cdot \text{tg} \gamma_0 \cdot E_{\text{д}} \cdot K_E}{P_{\text{адм}} \cdot l}, \tag{5}$$

де $K_F = K_o K_a K_\gamma K_\beta K_p$ – коефіцієнт експлуатації, який характеризує умови експлуатації проектованої передачі; K_o – коефіцієнт динамічності навантаження (при спокійному навантаженні – $K_o = 1$, з поштовхами – $K_o = 1,2 \dots 1,5$, з сильними ударами – $K_o = 1,8$); K_a – коефіцієнт впливу довжини ланцюга (при $a = (60 \dots 80)l$ – $K_a = 0,9$, при $a = (30 \dots 50)l$ – $K_a = 1$, при $a < 25l$ – $K_a = 1,25$); K_γ – коефіцієнт нахилу міжцентрової лінії до горизонту (при $\gamma < 70^\circ$ – $K_\gamma = 1$, при $\gamma > 70^\circ$ – $K_\gamma = 1,25$); K_β – коефіцієнт умови змащування (при розбризкувальній і струминній системі – $K_\beta = 0,8$, при крапельній системі – $K_\beta = 1,5$); K_p – коефіцієнт режиму роботи (при однозмінній – $K_p = 1$, при двозмінній – $K_p = 1,25$, при тризмінній – $K_p = 1,45$); P^{adm} – допустимий тиск у шарнірі ланцюга, МПа; l – довжина робочої ділянки ланцюга, мм [2].

Для середніх умов роботи передачі ($a = 40l$, $K_L = 1,5$, $\gamma_0 = 3,5 / \sqrt{40l}$ град.) умовно приймасмо коефіцієнт концентрації навантаження – $K = 1$. В подальшому робота передачі при інших умовах роботи оцінюється відносно роботи при середніх умовах.

Так, для ланцюга з кроком $t = 19,05$ мм, $a = 25t$, $K_L = 3$, $E_{\gamma_0} = 2,3 \cdot 10^4$ МПа, $\gamma_0 = 4,6 / \sqrt{25t}$ град, $l = a \cdot P^{adm} = 20$ МПа, $B = 17,75$ мм, коефіцієнт концентрації навантаження $K = 1,225$.

Результати розрахунку ланцюгів з кроками $t = 15,875$ мм і $t = 25,40$ мм мало відрізняються від наведеного вище розрахунку.

Оцінимо вплив концентрації навантаження в шарнірі на довговічність ланцюгової передачі. Термін служби ланцюга за зносостійкістю шарнірів визначаємо із степеневої залежності між тиском P і шляхом тертя (зносом) S ($P^m S = const$). При нормальних умовах експлуатації передач і відповідним змащуванням $m = 3$.

Відносна різниця строку служби ланцюга у відсотках $\frac{K^m - 1}{K^m} \cdot 100$; для розглянутого прикладу при $K = 1,225$ вона складає 45%.

На підставі виконаних розрахунків можна зробити відповідні висновки:

1. Концентрація навантаження в шарнірах ланцюгових передач при несприятливих умовах роботи призводить до зниження строку служби ланцюга до 40% порівняно з передачами при середніх умовах роботи.

2. В порівнянні з середніми умовами роботи ($a = 40l$, $K_L = 1,5$, $\gamma_0 = 3,5 / \sqrt{40l}$ град) однорядних роликкових ланцюгових передач реко-

мендується вводити коефіцієнт концентрації навантаження (тиску) в шарнірі :

а) $K = 1,2$ – для ланцюгових передач з міжосьовою відстанню $a \leq 30t$, коефіцієнтом експлуатації $K_E = 3$ і граничному куті перекошування зірочок $\gamma_0 = 4,6 / \sqrt{(25...30)t}$ град.

б) $K = 1,1$ при середньому куті перекошування зірочок $\gamma_0 = 3,5 / \sqrt{40t}$ град.

в) при сприятливих умовах роботи ($a \geq 40t$, $K_E = 1$, $\gamma_0 = 0$) тиск в шарнірі можна збільшити.

3. Для обмеження коефіцієнта концентрації навантаження в межах $K \leq 1,1$ граничний кут перекошування зірочок повинен бути не більше:

а) при $a \leq 30t$, $K_E = 3$, $\gamma_0 = 1,8 / \sqrt{a}$ град. – для однорядного ланцюга; $\gamma_0 = 0,9 / \sqrt{a}$ град. – для дворядного ланцюга; $\gamma_0 = 0,4 / \sqrt{a}$ град. – для чотирирядного ланцюга.

б) при $a = 40t$, $K_E = 1,5$ граничний кут перекошування зірочок може бути в два рази більшим.

Допустиме збільшення кроку ланцюга при кількості зубців веденої зірочки $z_2 \geq 40$.

Як показує практика роботи передач в середніх умовах, ланцюг потрібно замінювати після збільшення кроку на величину

$$\Delta t = \frac{4,8...6,4}{t/d_p} \% \quad (6)$$

де d_p – діаметр ролика ланцюга, у приводних ланцюгах $t/d_p < 2$ [1].

З іншої сторони, гранично допустиме збільшення кроку зачеплення на ведучій зірочці за ГОСТ 591-69, враховуючи радіальний підйом більш спрацьованих зовнішніх ланок ланцюга $\Delta t_z = 100/z_2 \%$ [1].

Проаналізуємо наведені рекомендації, визначивши збільшення кроку ланцюга, коли ланцюг дотикається крайньої точки К профілю зубця зірочки за ГОСТ 591-69 (рис. 3).

Якщо ланцюг розміщується на радіусі $O'A$, то крок ланцюга

$$t' = \frac{20'A}{\operatorname{cosec} 180^\circ / z} \quad (7)$$

Радіус $O'A$ визначасмо із трикутника O_2AO'

$$O'A = \sqrt{(r_2 + 0,5d_p)^2 + (O_2O')^2 - 2(r_2 + 0,5d_p)(O_2O') \cos \gamma} \quad (8)$$

де $r_2 = d_p(1,24 \cos \varphi + 0,8 \cos \beta - 1,3025) - 0,05$ – радіус головки зубця; d_p – діаметр ролика ланцюга; φ – половина кута зубця, $\varphi = (17 - 64)/z$ град.; β – кут спряження, $\beta = (18 - 56)/z$ град.

Невідомі величини O_2O' і кут γ визначимо із трикутників $O_2O'O$ і $O'O_2K$

$$O_2O' = \sqrt{(O_2O)^2 + (OO')^2 - 2(O_2O)(OO') \cos(90^\circ - 180^\circ/z)}, \quad (9)$$

де $O_2O = 1,24d_p$; $OO' = 0,5d = 0,5t \cdot \operatorname{cosec}(180^\circ/z)$;

$$\gamma = \arccos \frac{(O'K)^2 - r_2^2 - (O_2O')^2}{2r_2 \cdot O_2O'}; \quad (10)$$

де $O'K = 0,5d_u = 0,5t(0,5 + \operatorname{ctg}(180^\circ/z))$.

В табл. 1 наведено розрахункові параметри впливу кількості зубців веденої зірочки на допустиме збільшення кроку ланцюга, що порушує зачеплення.

Таблиця 1. Допустиме збільшення кроку ланцюга при збільшенні зубців веденої зірочки

Кількість зубців, z_2	40	60	80	100	120
$\Delta t' = \frac{t' - t}{t} 100$	6,6	4,5	2,9	2,6	2,3
$100/z_2$	2,5	1,7	1,25	1	0,83
$\frac{4,8 \dots 6,4}{t/d_p}$	3...4				

Як бачимо, починаючи з кількості зубців більшої зірочки $z_2 > 60$ за ГОСТ 591-69 порушується зачеплення ланцюга із зірочкою. При допустимому збільшенні кроку зачеплення на веденій зірочці, рівному $100/z_2$ % порушення зачеплення не відбувається. В межах $z_2 = 40 \dots 120$ запас граничного збільшення середнього кроку, при якому ланцюг ще входить в зачеплення з вершинами зубців зірочки, по відношенню до допустимого збільшення кроку зачеплення – $\Delta t' / \Delta t_2$ складас в середньому 2,5.

Контактний тиск при зачепленні ланцюга вище робочої ділянки зубця зірочки.

Визначимо контактний тиск при зачепленні ланцюга вище робочої ділянки зубця зірочки, тобто на прямолінійній ділянці FC і поблизу крайньої точки зубця – точки K (рис. 3) і порівняємо його з тиском при контакті в середній точці робочої ділянки – точці N профілю зубця.

Контактні напруження за формулою Герца

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{q \frac{r \pm r_1}{r \cdot r_1} \cdot E}, \quad (11)$$

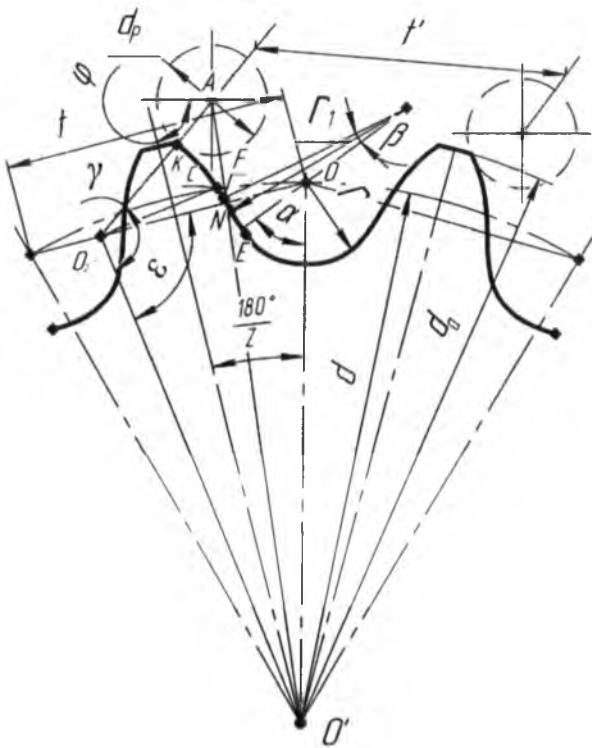


Рис.3. Зачеплення ланцюга із зірочкою в крайній точці К

де q – навантаження на одиницю довжини лінії контакту двох циліндрів, максимальне значення якого при зачепленні ланцюга з першим зубцем зірочки [3]

$$q = \frac{F_1 \cdot \sin(360^\circ / z_1)}{b \cdot \sin(360^\circ / z + \varphi)} \tag{12}$$

Тут F_1 – сила натягу ведучої вітки ланцюга, b – ширина зубця зірочки; φ – половина кута зубця зірочки, що відповідає точці контакту;

r – радіус ролика; r_1 – радіус кривизни профілю зубця; $E = \frac{2E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}$ –

зведений модуль пружності матеріалів ролика і зірочки.

Кут φ в точці N приймаємо рівним половині суми кутів φ_1 і φ_2 (рис. 4)

$$\varphi_1 = (35 - 120) / z \text{ град.}; \quad \varphi_2 = (17 - 64) / z \text{ град.} \tag{13}$$

Оскільки ΔO_2KM і ΔLSM подібні, то $\varphi_3 = \angle KO_2M = \gamma - \varepsilon$.

Кут γ визначаємо за формулою (10), а кут ε із $\Delta O_2OO'$ (рис. 4).

$$\varepsilon = \arccos \frac{(OO')^2 - (O_2O)^2 - (O_2O')^2}{2 \cdot O_2O \cdot O_2O'} \tag{14}$$

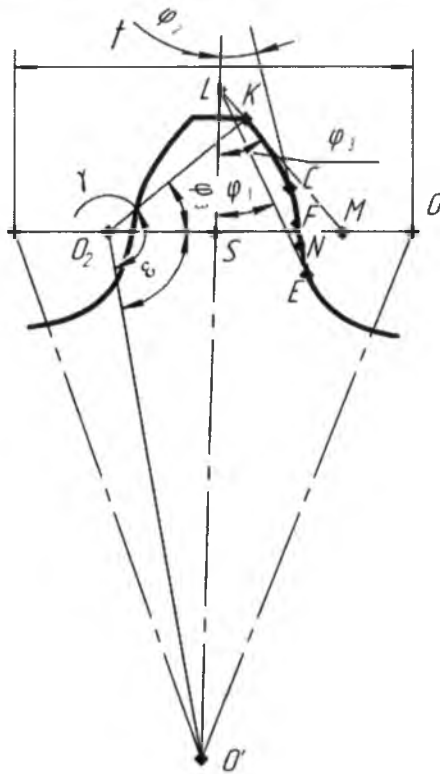


Рис.4. Кути загострення $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ для точок E, F і K профілю зубця зірочки

Порівняємо напруження на ділянці FC та напруження в точці K з напруженням в точці N

$$\frac{\sigma_{HFC}}{\sigma_{H-N}} = \sqrt{\frac{\sin(360^\circ/z + 0,5(\varphi_1 + \varphi_2)(-r_1))}{\sin((360^\circ/z + \varphi_2)(r - r_1))}} \quad (15)$$

$$\frac{\sigma_{HK}}{\sigma_{H-N}} = \sqrt{\frac{\sin(360^\circ/z + 0,5(\varphi_1 + \varphi_2)(r + r_2)(-r_1))}{\sin((360^\circ/z + \varphi_3)(r - r_1) \cdot r_2)}} \quad (16)$$

Результати розрахунків наведено в табл. 2.

Таблиця 2. Співвідношення контактних напружень на ділянці FC , в точках K і N

z	13	25	40	60	80	120
$\frac{\sigma_{HFC}}{\sigma_{H-N}}$	1,33	1,41	1,45	1,49	1,50	1,53
$\frac{\sigma_{H-K}}{\sigma_{H-N}}$	1,41	1,47	1,48	1,48	1,48	1,48

Наведені вище розрахунки показують, що при зачепленні роликів ланцюгом вище робочої ділянки зірочки за ГОСТ 591-69 в інтервалі числа зубців $z = 13...120$ контактні напруження збільшуються в середньому на 45% порівняно з середньою точкою робочої ділянки зірочки.

Сила удару при зачепленні ланцюга вище робочої ділянки зубця зірочки. Перед зачепленням зубець зірочки і шарнір ланцюга, який повинен ввійти з ним в зачеплення, рухаються з різними швидкостями, тому при їх взаємодії виникає удар. В результаті ударів руйнуються ролики і втулки, зношуються зубці, збільшується шум. Кінетична енергія удару обмежує граничну частоту обертання меншої зірочки і допустимий тиск в шарнірі.

Швидкість удару [3]

$$v = K_v \cdot \omega \cdot t, \quad (17)$$

де $K_v = \sin(360^\circ / z + \varphi)$ – коефіцієнт швидкості удару; z – кількість зубців зірочки; φ – кут загострення зубця в точці удару; ω – кутова швидкість зірочки, t – крок.

Беручи до уваги, що кутова швидкість зірочки стала, порівняємо силу удару на ділянці FC і точці K з силою удару в точці N (рис. 4)

$$\frac{F_{FC}}{F_N} = \left(\frac{\sin(360^\circ / z + \varphi_2)}{\sin(360^\circ / z + 0,5(\varphi_1 + \varphi_2))} \right)^2, \quad (18)$$

$$\frac{F_K}{F_N} = \left(\frac{\sin(360^\circ / z + \varphi_3)}{\sin(360^\circ / z + 0,5(\varphi_1 + \varphi_2))} \cdot \frac{t + \Delta t}{t} \right)^2. \quad (19)$$

Результати розрахунків наведено в табл. 3.

Таблиця 3. Співвідношення сили удару на ділянці FC , точках K і N

z	13	25	40	60	80	120
F_{FC}/F_N	0,74	0,65	0,59	0,54	0,52	0,50
F_K/F_N	2,25	1,95	1,95	1,95	1,91	1,89

Виходячи з вищенаведених розрахунків можна зробити висновки:

а) сила удару зубця зірочки з шарніром ланцюга суттєво залежить від точки контакту, на прямолінійній ділянці зубця вона менша на 40% порівняно із силою удару при зачепленні в середній точці робочої ділянки, а на вершині зубця більша в 2 рази;

б) особливо несприятливі умови роботи передачі виникають при зачепленні ланцюга з головкою зубця, де крім підвищеної сили удару має місце контакт випуклих поверхонь, а відповідно й суттєве збільшення контактних напружень.

Література

1. Готовцев А.А. Проектирование цепных передач / А.А.Готовцев, Г.Б.Столбин, И. П. Котенок. – М: Машиностроение, 1973. – 376с.
2. Иващенко В.Т. Розрахунок і конструювання деталей машин / В.Т.Иващенко, В.М.Сенчішак. – Івано-Франківськ: Нова Зоря, 2013. – 808 с.
3. Воробьев Н.В. Цепные передачи / Н.В.Воробьев. – М: Машиностроение, 1968. – 252 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 25.12.2013 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Лисканичем М. В.,
к. т. н. Куновським Г. П.(м. Буриштин)*

**ACCURACY INFLUENCE OF CHAIN GEARS ON THEIR
WORKABILITY****V. T. Ivaschenko, V. S. Vytvytskyi**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, st. Carpats'ka, 15;
ph: +380(342)-72-71-47; e-mail: mecmach@nung.edu.ua*

We consider questions of influence accuracy of parts gear with the drive roller chains and accuracy of editing gears on their work ability.

The parameters that determine the accuracy of the mounting of chain wheels! The estimation of the impact of stress concentration in the joints chain in his lifetime.

Key words: step chain, stiffness, elasticity chain, concentration factor load, the force of impact.

УДК 622.692.4

КЕРУВАННЯ РЕЖИМАМИ РОБОТИ МАГІСТРАЛЬНИХ ГАЗОПРОВІДІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ОБЛАСТЕЙ ДОПУСТИМИХ РЕЖИМІВ І ГРАНИЧНИХ ЕНЕРГОЗАТРАТ

В. Я. Грудз

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 4-21-57; e-mail: public@nung.edu.ua*

Наведено методи побудови областей допустимих режимів та граничних областей енерговитрат для компресорних станцій магістральних газопроводів при різних схемах роботи газоперекачувальних агрегатів. Показано принципи оптимізації режимів та оперативного керування роботою системи.

Ключові слова: область допустимих режимів, гранична область енерговитрат, оптимізація.

Системи магістрального транспорту газу є складними технічними системами, які характеризуються такими специфічними особливостями: великою територіальною протяжністю, величезною кількістю елементів, що формують систему, нестаціонарністю процесів, які протікають в системі, ієрархічною структурою, наявністю централізації керування технологічним процесом транспорту і децентралізацією розподілу цільового продукту, можливістю створення оперативних і стратегічних запасів енергетичної сировини у сховищах.

Основна мета керування газотранспортною системою (ГТС) полягає у задоволенні потреб споживачів в цільовому продукті при оптимальних значеннях технікоекономічних критеріїв та виконанні технологічних обмежень. Необхідно враховувати, що реальним ГТС, середовищам, в яких вони функціонують і критеріям керування характерні такі основні типи невизначеностей:

1. Невизначеність моделі ГТС як об'єкта керування, зв'язана з тим, що математична модель газопроводу описується сукупністю систем нелінійних диференційних рівнянь в часткових похідних і нелінійними алгебраїчними рівняннями. Спроба описати за їх допомогою реальний процес транспорту газу веде до нерозв'язаних проблем, пов'язаних із розробкою математичного забезпечення ЕОМ. Навіть при подоланні цих труднощів вирішення задач оперативного керування в реальному масштабі часу при сучасному рівні розвитку технічної бази обчислювальних машин практично не можливе. Таким чином виникає необхідність створення спрощених моделей таких елементів газотранспортних систем, як магістральний газопровід (МГ), компресорна станція (КС) і

лінійна ділянка (ЛД), газоперекачуючий агрегат (ГПА), вигідних для реалізації на ЕОМ і при цьому таких, які адекватно описують реальний процес.

2. Нестационарність ГТС, яка проявляється в дрейфі характеристик елементів системи, в стохастичному характері процесів постачання і споживання газу, в наявності великої кількості другорядних з точки зору мети керування і трудно формалізованих процесів.

3. Невизначеність критеріїв керування, яка проявляється в необхідності враховувати при прийнятті рішення декількох технологічних критеріїв, які часто протирічливі. При багатокритеріальній оптимізації задача полягає в одночасовій екстремізації локальних критеріїв і має розв'язок тільки тоді, коли розв'язки всіх задач однокритерієвої оптимізації співпадають. Однак, як правило, рішення, оптимальне по одному з критеріїв, не є оптимальним по групі інших. Таким чином, проблема знаходження режиму роботи газотранспортних систем в умовах багатокритеріальності полягає в першу чергу в упорядкуванні багатьох локальних критеріїв у відповідності з біжучим станом системи та середовища і складанням локальних критеріїв в скалярний глобальний критерій.

Згадані особливості відповідають нормальним режимам функціонування ГТС. При розробці систем керування транспортом газу, крім того, необхідно враховувати ще і можливості виникнення аварійних ситуацій в результаті відказів окремих елементів у випадкові моменти часу.

На основі приведеного вище можна зробити висновок про те, що процес прийняття рішень при керуванні складними газотранспортними системами, а також такими їх елементами як магістральний газопровід, які в свою чергу є складною системою, здійснюється в умовах впливу суттєвих невизначеностей, частина яких має стохастичний характер, а частина обумовлена факторами, які не мають випадкової природи. У відповідності з цим при створенні автоматизованих систем керування транспортом газу доцільне комплексне застосування ймовірнісних і детермінованих моделей елементів газотранспортних систем з тим, щоб максимально знизити ступінь невизначеності притаманний об'єкту керування.

Процес магістрального транспорту газу є складним технологічним процесом і для нього може бути побудовано сімейство різних моделей, які відображають різні особливості процесу транспорту газу. Побудова адекватної моделі пов'язана з задачами керування, внаслідок чого модель магістрального газопроводу (МГ) доцільно вибирати з точки зору вирішення цих задач. При побудові моделі МГ необхідно прагнути описати технологічні процеси транспорту газу за допомогою опробованих в процесі експлуатації газопроводів моделей.

Вирішення задачі ідентифікації зв'язане з проведенням експерименту, тобто результати вимірів вхідних і вихідних змінних процесу, одержаних шляхом активного або пасивного дослідження, служать для ство-

рення або уточнення вибраної апріорі моделі. Під ідентифікацією режимів роботи МГ за даними диспетчерської інформації слід розуміти побудову моделі його функціонування на основі отриманих в ході експлуатації МГ вхідних і вихідних змінних. Вхідними змінними є вимірені параметри режиму роботи МГ, такі як тиск на вході і виході компресорної станції, температура газу, потужність, яку споживають агрегати компресорної станції. Вибір вхідних змінних визначається критеріями керування МГ. Як вихідні змінні можуть бути вибрані:

- 1) тиск на виході магістрального газопроводу (на вході газотранспортної системи),
- 2) пропускна здатність газопроводу, енергозатрати на транспорт газу і т.д.

У відповідності з загальними методами ідентифікації динамічних об'єктів в умовах невизначеності, МГ можна зобразити у вигляді багатомірного об'єкту на вході якого діє вектор вхідних змінних $X(t) = X\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ з n складовими $x_i(t)$. Вектор $Y(t) = Y\{y_1, \dots, y_n\}$ характеризує мету керування. Значення $x_i(t)$, $y_i(t)$ відповідають наперед вибраним вхідним і вихідним параметрам газопроводу. Частина із контрольованих параметрів $x_i(t)$ можуть бути керуючими. Розглядаючи модель МГ, як векторний оператор перетворення певних динамічних характеристик, можна записати для кожної вихідної змінної

$$y_i(t) = a_i\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}. \quad (1)$$

Конкретним виразом такого оператора може бути система алгебраїчних рівнянь, рівняння умовних густин імовірності, система рівнянь в часткових похідних і т.д., в залежності від вибраної моделі.

Вхідні і вихідні змінні оператора A МГ як правило, мають стохастичну природу внаслідок впливу на режим МГ багатьох зовнішніх неконтрольованих факторів, а також внаслідок випадкових похибок у вимірюваннях вхідних і вихідних параметрів. Вхідні змінні МГ завжди будуть випадковими, навіть якщо вхідні величини детерміновані.

Слід відмітити, що за результатами вимірювань $x_i(t)$ і $y_i(t)$ визначають не сам оператор об'єкту $A(t)$, а його оцінку $\bar{A}(t)$.

Кількісною оцінкою ступеня близькості $A(t)$ і $\bar{A}(t)$ є функція $\rho[Y(t), \bar{Y}(t)]$, яка мінімізує розбіжність між реальним значенням виходу об'єкту і значенням, розрахованим на основі моделі. Оптимальною по критерію середнього ризику є оцінка $\bar{A}(t)$, при якій

$$M\{[y, yx,] S \in T\} \notin \min A,$$

тут M – символ математичного сподівання; T – область спостереження випадкових величин $X(t)$ і $Y(t)$; x_s – задана реалізація випадкової величини $X(t)$.

В більшості практичних розрахунків оптимальний оператор визначається по критерію мінімуму середньоквадратичної похибки. Важливою характеристикою є також дисперсія вихідної величини $D\{y(t)\}$. На основі теореми про розподіл дисперсії в одномірному випадку можна записати:

$$D\{y_i\} = D_1 + D_2,$$

де $D_1 = D\{M\{y_i, x_j, S \in T_x\}\}$, $D_2 = M\{D\{y_i, x_j, S \in T_x\}\}$.

Дисперсія D_1 являє собою ту частину загальної дисперсії вихідної змінної, яка зв'язана з впливом вхідної змінної x_j при всіх значеннях $S \in T_x$. Друга частина загальної дисперсії D_2 зв'язана з впливом сукупності всіх решти змінних, крім врахованої x_j .

Для детермінованого об'єкта $D_2 = 0$. Якщо у визначенні елементу ГТС існує деяка невизначеність, то $D_2 \neq 0$ і об'єкт відноситься до класу стохастичних.

Значення дисперсії D_1 і D_2 є оцінкою адекватності моделі об'єкту.

У зв'язку з складністю процесу транспорту газу важко зобразити МГ у вигляді (1), тому доцільно розглядати МГ як лінію послідовно з'єднаних елементів ГТС.

Операторами перетворення в даній моделі є компресорні станції (КС) і лінійні ділянки (ЛД), методи одержання яких розроблені досить повно.

Характерним тут є вплив вихідних змінних кожної ділянки на вихідні змінні ділянки. В цій схемі взаємозв'язок між окремими технологічними елементами виражений більш повно, і вимоги до вихідних параметрів кожної ділянки визначаються вимогами до вихідних змінних всього газопроводу в цілому. Така схема зображення МГ в значній мірі відображає реальні взаємозв'язки, які можна оцінити з досвіду експлуатації МГ. Таким чином, задача ідентифікації пов'язана з декомпозицією технологічного процесу транспорту газу на окремі вивчені елементи, для яких можуть бути визначені оператори перетворення $A_i(t)$. При описанні магістрального газопроводу як такі елементи доцільно приймати компресорні станції та лінійні ділянки.

Для стаціонарного режиму роботи КС можна використовувати наступні співвідношення

$$\varepsilon^2 = a_1 - a_2 Q_{кс}^2 \quad (2)$$

або еквівалентні їм рівняння

$$P_{д}^2 = a_1 P_{кс}^2 - a_2 Q_{кс}^2, \quad (3)$$

$$\varepsilon^2 = a_1 + a_1 Q_{кс} + a_3 Q_{кс}^2, \quad (4)$$

де ε – степінь стиску газу; P_n , P_{bc} – тиски на виході і вході КС; Q_{ac} – об'ємна витрата газу при умовах входу КС; Q_k – комерційна витрата газу.

Тричленна апроксимація значення ε дозволяє підвищити точність апроксимації газодинамічних характеристик ГПА. Вибір виду апроксимаційного співвідношення визначається конкретними вимогами до моделі КС.

Для лінійної ділянки масмо співвідношення [1]

$$P_k^2 = P_n^2 - aQ_k^2, \quad (5)$$

де P_k – тиск газу в кінці ділянки; P_n – тиск газу на початку ділянки; Q_k – комерційна витрата газу на ділянці; a – коефіцієнт, що враховує параметри трубопроводу,

$$a = \frac{16 \cdot \rho_0^2 \cdot Z \cdot R \cdot T \cdot \lambda \cdot l}{\pi^2 \cdot D^5},$$

де ρ_0 – густина газу при нормальних умовах; Z – коефіцієнт стискуваності газу; R – газова стала; T – середня інтегральна температура газу по довжині газопроводу; λ – коефіцієнт гідравлічного опору; l , D – довжина і внутрішній діаметр трубопроводу.

Нестаціонарний режим експлуатації ГТС можна описати системами рівнянь в часткових похідних для лінійних ділянок і рівняннями (2) або (3), (4) для КС.

При числовому рішенні систем рівнянь використовуються кінцеворізнцеві схеми, методи кінцевих і граничних елементів і т.д. Такі моделі для керування нестаціонарними процесами для великих ГТС практично неприйнятні у зв'язку з їх надзвичайною складністю, тому для задач оперативного керування ГТС доцільно використовувати більш прості моделі елементів ГТС у вигляді [2,5], що можуть коректуватись по довжині і в часі їх застосування тим більше обґрунтовано, якщо врахувати, що точність вихідної інформації при розрахунках режимів невелика.

Процес керування складною газотранспортною системою звичайно розбивається на два етапи: планування режиму роботи і наступна його стабілізація. Для магістральних газопроводів інтервал планування режимів складає переважно місяць і більше. Як правило, використовуються стаціонарні моделі елементів МГ, а оптимальний режим знаходиться за допомогою методу динамічного програмування.

Застосування методу динамічного програмування до вибору оптимального плану описано в [1,2,5]. Програми, які реалізують запропоновані там алгоритми, широко використовуються на практиці. Однак ці алгоритми призначені для знаходження рішення однокритеріальної за-

дачі оптимізації при цьому зміна глобального критерію приведе до необхідності вибору нової моделі.

В даний час в практиці планування режимів газотранспортних систем необхідно одночасно враховувати декілька основних критеріїв оптимальності, а саме: максимум пропускної здатності газопроводу, максимум тиску на виході КС, максимум акумуляції газу в трубопроводі, мінімум енергозатрат на компримування при заданому плані подачі газу та інш. Згорток критеріїв при цьому може здійснюватися одним із методів:

- один із локальних критеріїв вибирається в якості оптимізуючої функції, а на інші накладаються відповідні обмеження;

- критерії виставляються в лексикографічну впорядковану послідовність по спаданню значимості і порівняння цільової функції по i -му критерію здійснюється для тих критеріїв, для яких виявились рівними значення $(i-1)$ -го критерію. Для систем газопостачання вибір основного критерію оптимізації залежить від стану навколишнього середовища (наприклад, потреба в понадпланових поставках), застосування задач, які жорстко фіксують мету керування, нераціональне. Велике значення в цій ситуації займає розробка і застосування моделей, для яких зміна головного критерію, або зміна лексикографічного порядку на множині локальних критеріїв не веде до рішення нової задачі або зміни методу рішення. На даний час до них належить модель елементів ГТС, в основу яких покладено використання областей допустимих режимів.

Планування режимів магістрального газопроводу повинно проводитись із врахуванням технологічних обмежень, обумовлених характеристиками міцності труб, гідродинамічними і температурними характеристиками газопроводів і ГПА. До цих обмежень відносяться: максимальний робочий тиск в газопроводі P_{\max} , мінімальна Q_{\min} і максимальна продуктивність Q_{\max} на вході в нагнітач, максимально допустима температура T_{\max} , діапазон зміни частоти обертання нагнітача n , максимально допустиме навантаження на валу приводу N_{\max} . Виразимо ці обмеження у вигляді системи нерівностей

$$\begin{aligned} \frac{n_0}{n} Q_{BC} &\geq 1,1 Q_{\min}, & \frac{n_0}{n} Q_{BC} &\leq Q_{\max}, \\ n_{\min} &\leq n \leq n_{\max}, & T &\leq T_{\max}, \\ P_H &\leq P_{\max}, & N &\leq N_{\max}, \end{aligned} \quad (6)$$

де n_0 – номінальне значення частоти обертання ротора нагнітача.

Область допустимих режимів (ОДР) будується для одного ГПА, або групи послідовно з'єднаних ГПА і далі узагальнюється на цех і КС в цілому. При фіксованих умовах всмоктування ОДР являє собою область в координатній сітці (Q_k, ε) , яка містить всі режими відповід-

ного елементу газотранспортної системи, що задовольняють технологічним обмеженням.

При побудові області допустимих режимів ГПА перш за все визначаються значення максимальної і мінімальної комерційної продуктивності $Q_{k \min}$ і $Q_{k \max}$ по формулах

$$Q_{k \min} = \frac{Q_{\min} \cdot P_{bc} \cdot n_{\min} \cdot 1.1}{2.45 \cdot z \cdot T_{bc}},$$

$$Q_{k \max} = \frac{Q_{\max} \cdot P_{bc} \cdot n_{\max}}{2.45 \cdot z \cdot T_{bc}},$$

де Q_{\min} , Q_{\max} – мінімальне і максимальне значення об'ємної витрати газу для одного типу нагнітача (беруться із паспортних даних); P_{bc} – тиск на вході ГПА; T_{bc} – абсолютна температура на вході; n_{\min} , n_{\max} – граничні значення відносних обертів ротора нагнітача.

Інтервал ($Q_{k \min}$, $Q_{k \max}$) розбивається на дискрети, кількість котрих визначається вимогами до точності, одержаних результатів. Для кожної вузлової точки

$$Q_{k \min} \leq Q_{ki} \leq Q_{k \max}, \quad i=1..m,$$

випикується максимальне і мінімальне допустимі значення ступені стиску газу на виході ГПА

$$\varepsilon_{\max i} = 1 + \frac{n_{i \max}^2 \cdot 13040 (A_0 + A_1 \cdot Q_{bc i} + a_3 \cdot Q_{bc i}^2)}{0.915 \cdot Z \cdot R \cdot T_{bc}}$$

і $\varepsilon_{\min i}$ визначається аналогічно, через $n_{i \min}$,

де $Q_{bc i}$ – значення об'ємної витрати газу, що відповідає комерційній витраті Q_{ki} при заданих P_{bc} , T_{bc} ; A_0 , A_1 , A_2 – коефіцієнти апроксимації стандартної паспортної характеристики нагнітача.

В подальшому обчислюється значення тиску, температури на вході ГПА і потужності, яка споживається нагнітачем для обох точок. Якщо одержані результати задовольняють технологічним обмеженням (6), значення Q_{ki} і відповідні йому ε_{\min} і ε_{\max} і зазначаються.

Якщо хоча б одне технологічне обмеження порушено, коректується значення n_i і процедура повторюється.

В тому випадку, коли вдасться побудувати значення ε_{\min} і ε_{\max} для трьох і більше значень Q_{ki} область вважається побудованою. Значення ε_{\min} і ε_{\max} для точок $Q \in [Q_{\min}, Q_{\max}]$, які не вважаються вузловими, добудовуються в найпростішому випадку за допомогою лінійної інтерполяції. При необхідності можна використовувати поліноміальну інтерполяцію.

Для ГПА, оснащених електроприводом, коректування відносних обертів технічно реалізувати неможливо. Тому для таких агрегатів кожному значенню комерційної витрати Q_{ki} , при фіксованих умовах всмоктування може відповідати єдине значення $\varepsilon = \varepsilon(Q_{ki})$ і областю є крива, аналогічна характеристиці агрегату.

Аналогічно тому, як будується ОДР для одного ГПА, вона може бути побудована і для групи послідовно з'єднаних агрегатів.

Для розрахунку ступені стиску на черговій ступені використовуються вихідні значення тиску, температури і об'ємної витрати газу на попередній ступені, і побудова граничних точок ОДР для багатоступінчатого стиску реалізується за допомогою рекурентної процедури.

Властивістю, якою після побудови володіють всі ОДР, полягає в тому, що при заданих умовах входу в ГПА кожному допустимому режиму об'єкта (ГПА, цех або КС в цілому) відповідає деяка точка з області. З іншого боку можна стверджувати, що для довільної точки (Q_k, ε) , яка належить ОДР, існує таке значення n (для ГПА) або сукупність значень n_i (для групи або цеху), яке дозволяє одержати на виході об'єкта ступінь стиску газу при значенні вхідної комерційної витрати без порушення технологічних обмежень. Жодна точка, яка не належить ОДР, цією властивістю не володіє. Однак говорити про ізоморфізм між множиною допустимих режимів об'єкту і множиною точок ОДР можна тільки для ГПА, так як, точці ОДР цеху і КС можуть відповідати режими реалізовані при різному розподілі обертів між агрегатами.

Переваги ОДР при використанні їх при оптимальному плануванні режимів МГ полягають в тому, що для ряду критеріїв оптимізації, таких як максимум пропускної здатності газопроводу або максимум тисків нагнітання КС, оптимальним режимам відповідають граничні точки областей допустимих режимів. Завдяки цьому в деяких випадках оптимальні режими можна визначати без застосування оптимізації, а в тих випадках, коли без неї не можна обійтися, час виконання оптимізаційної процедури на ЕОМ значно скорочується.

Важливе значення має той факт, що перехід від одного критерію оптимізації до другого у випадку використання ОДР практично не викликає змін не тільки в розрахунковій схемі динамічного програмування, але і в методі розрахунку компресорних станцій.

Таким чином, в тих випадках, коли екстремальні значення головного критерію і критеріїв, які виступають обмеженнями, лежать на границі ОДР, перехід від одної постановки багатокритеріальної задачі оптимізації до другої досить простий. Дещо складніше стоїть справа в тому випадку, коли екстремальне значення досягається у внутрішній області ОДР. Така ситуація характерна наприклад, для оптимізації режиму газопроводу по критерію мінімуму енергозатрат на власні потре-

би. Розглянемо більш детально розрахунок оптимального по енергозатратах режиму для виконання фіксованого плану поставок.

В цьому випадку в якості функції мети можна використовувати сумарну потужність $\sum N$, що споживається ГПА і оптимізація здійснюється з допомогою стандартної процедури динамічного програмування.

В сучасних алгоритмах розрахунку багаточехових КС з різнотипним обладнанням для розрахунку потужності, яка споживається при фіксованій комерційній витраті газу Q_{K_i} і заданій схемі з'єднання агрегатів спочатку за допомогою ітераційної процедури розраховується розподіл потоків газу по групах, а потім по відомих значеннях відносних обертів на ступенях стиску визначається потужність, яка споживається агрегатом, по формулі (7)

$$N = n_i^3 \cdot \rho (a_0 + a_1 \cdot Q_{BC} + a_2 \cdot Q_{BC}^2 + a_3 \cdot Q_{BC}^3), \quad (7)$$

де n_i – відносні оберти ротора нагнітача; ρ – густина газу; Q_{BC} – приведена об'ємна продуктивність агрегату; a_0, a_1, a_2, a_3 – коефіцієнти апроксимації паспортної характеристики по потужності для даного агрегату.

Очевидно, що у випадку, коли цехи КС описані з допомогою своїх ОДР, такий алгоритм можна реалізувати тільки для граничних точок області, так як для внутрішніх точок істинні значення n невідомі. Тому для обчислення енергозатрат прийнято використовувати термодинамічне співвідношення типу

$$N_i = \frac{\alpha}{a} Q_{K_i} (E^a - 1), \quad (8)$$

де N – потужність, що споживається i -м цехом; Q_{K_i} – комерційна витрата газу через цех; α – коефіцієнт, який характеризує умови всмоктування; α і a обчислюються по формулах

$$\alpha = \frac{k-1}{\eta \cdot k}; \quad a = \frac{k-1}{k} \eta_{\max},$$

де k – показник адіабати; η – політропний ККД нагнітача; η_{\max} – механічний ККД, який враховує витрати потужності в підшипниках, редукторі і т. ін.

В якості значень k, η, η_{\max} беруться, як правило деякі середні величини.

Витрата газу по цехах визначається із наступних співвідношень

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^I Q_{K_i} = Q_{K_c}, \\ \frac{Q_{K_i}}{Q_{i\max} + Q_{i\min}} = const, \end{cases}$$

де l – кількість цехів КС; $Q_{i,\min}$ і $Q_{i,\max}$ – максимальна і мінімальна витрати газу по i -му цеху при фіксованій ступені стиску.

Звідки

$$Q_{ki} = \frac{Q_{kc} (Q_{i,\max} + Q_{i,\min})}{(Q_{i,\max} + Q_{i,\min})}$$

Такий метод розрахунку вигідний з точки зору обчислень і знайшов широке застосування на практиці. Однак, обчислене таким чином значення енергозатрат, необхідних для перекачки об'єму газу Q_{kc} зі ступінню стиску ε , практично не залежить від розподілу об'ємів газу по цехах КС і взагалі не є оптимальним. Це вносить деяку похибку в розрахунок значення функції мети, і в кінцевому результаті впливає на вибір режиму газопроводу.

Більш високої точності при обчисленні функції мети дозволяє досягнути застосування слідуючого алгоритму.

Одночасно з розрахунком граничних точок $\varepsilon_{\min}(Q)$ і $\varepsilon_{\max}(Q)$ при побудові ОДР групи нагнітачів обчислюються також відповідні значення потужності, що споживається $N_{\min}(Q)$, $N_{\max}(Q)$ по формулі (7). Таким чином будується область, яка обмежує значення енергозатрат, що відповідають допустимим режимам об'єкту, тобто вона є граничною областю по енергозатратах (ГОЕ).

Встановимо відповідність між областями з допомогою наступного співвідношення при фіксованому Q

$$N = N_{\min} + \frac{\lg\left(\frac{E}{E_{\min}}\right)(N_{\max} - N_{\min})}{\lg\left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\right)} \quad (9)$$

де N – точка ГОЕ, яка ставиться у відповідність точці ОДР з координатами ε і N ; N_{\min} , N_{\max} , ε_{\min} , ε_{\max} – граничні співвідношення відповідних змінних.

Евристичне співвідношення (9) ґрунтується на припущенні про лінійну залежність між значеннями потужності, що споживається, і логарифму ступені стиску у випадку одноступінчатого і багатуступінчатого стискування газу. Доведення цього припущення базується на статичному аналізі регресійного рівняння

$$y = a_0 + a_1 x, \quad (10)$$

де $y = N$, $x = \lg \varepsilon$, яке розглядається при фіксованому Q .

В якості критерію був прийнятий рівень статистичної адекватності лінійного регресивного рівняння (10) реальним даним, взятих із журналу стандартних характеристик центробіжних нагнітачів при різних значеннях n (швидкість обертання ротора).

Таким чином, використання областей допустимих режимів у сукупності з граничними областями по енергозатратах, дозволяє вирішувати ті оптимальні задачі, в котрих значення енергозатрат входять в функцію мети або в обмеження. Аналогічним чином може бути вирішена задача оптимізації по критерію мінімуму витрати паливного газу і інші аналогічні задачі.

Це підтверджує висновок про доцільність застосування критичних областей по технологічних параметрах при розв'язанні багатокритеріальних задач оптимізації режиму транспорту газу по магістральних газопроводах.

Якщо при цьому вважати створення бази ОДР першим етапом оптимізації, а вибір оптимального режиму з використанням цих областей другим етапом, то незалежно від того, як поставлена багатокритеріальна задача оптимізації, перший етап є загальним для всіх задач оптимізації, а методи реалізації другого етапу, як правило, співпадають з точністю до алгоритму розрахунку функції мети.

Фактичні режими магістральних газопроводів як правило відрізняються від оптимальних планових режимів. Причиною є нестационарність процесу транспорту газу, неповнота інформації про об'єкт керування і зовнішнє середовище на етапі планування, спрощеність моделей, які використовуються в процедурі оптимізації, і ряд інших факторів. Компенсація розходжень між фактичними режимами ГТС і плановими здійснюється диспетчерськими службами відповідного рівня на основі оперативної інформації про біжучий стан об'єкту і середовища в режимі реального часу. Ця процедура здійснюється до моменту прийняття нового плану, який враховує змінений стан об'єкту керування і навколишнього середовища.

В силу випадкової природи більшості збурень, що визначають фактичний режим газопроводу, дані диспетчерської інформації є випадковими величинами. Тому процедури прийняття рішень, в яких використовуються ці дані, зв'язані з статистичною ідентифікацією об'єкту керування.

Література

1. Вольський Э.Л. Режимы работы магистрального газопровода / Э.Л. Вольський, И.М. Константинова. – М.: Недра, 1970. – 168 с.
2. Грудз В.Я. Енергетична ефективність використання високопотужних газоперекачувальних агрегатів на компресорних станціях багатониткових систем / В.Я. Грудз, Я.В. Грудз, В.І. Слободян // Нафтогазова енергетика. – 2010. – №2. – С. 30-33.
3. Грудз В.Я. Характеристика режимів роботи компресорних станцій магістрального газопроводу / В.Я. Грудз, Я.В. Грудз, В.І. Слободян // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. – № 4. – 2010. – С. 124-126

4. Грудз Я.В. Енергоефективність газотранспортних систем / Я.В.Грудз. – Івано-Франківськ: Лілея НВ, 2012. – 186 с.
5. Трубопровідний транспорт газу / М.П.Ковалко, В.Я.Грудз, В.Б.Михалків та ін. – Київ, АренаЕКО, 2002. – 600 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2013 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Тимківим Д.Ф.,
д.т.н., професором Говдяком Р.М. (м. Київ)*

MANAGEMENT BY MODES WORKS OF MAIN GAS PIPELINES WITH THE USE OF REGIONS POSSIBLE MODES AND MAXIMUM ENERGY EXPENSES

V. Y. Grudz

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15;
ph. +380 (3422) 4-21-57; e-mail: public@nung.edu.ua*

The methods of construction of regions of the possible modes and maximum regions of energy expenses are resulted for the compressor stations of main gas pipelines at different charts of work of gas pumping aggregates over. Principles of optimization of the modes and operative management by work of the system are shown.

Key words: region of the possible modes, maximum region of energy expenses, optimization.

УДК 622.692

АЛГОРИТМИ І МЕТОДИ ДИСПЕТЧЕРСЬКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ РЕЖИМАМИ МАГІСТРАЛЬНИХ ГАЗОПРОВІДІВ

Д. Ф. Тимків

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 4-21-57; e-mail: public@nung.edu.ua*

Розглядається рішення завдань, пов'язаних з оптимізацією режимів роботи МГ, з урахуванням фактичного стану ГПА та стану ЛД на магістральному газопроводі. Існуючі схеми диспетчерського управління МГ умовно розділено на дві системи централізовану і децентралізовану. Друга схема диспетчерського управління має певні переваги по стійкості рішення і надійності реалізації, пов'язаної з тим, що для першого виду управління необхідна дуже складна нелінійна динамічна модель, а також великий обсяг диспетчерської інформації.

Ключові слова: оптимізація режимів, схеми управління, алгоритми, методи.

Диспетчерське управління режимами роботи магістральних газопроводів (МГ) має ієрархічну структуру, що складається з декількох ступенів [3]. До задач планування та управління МГ належать:

- завдання перспективного планування;
- завдання поточного планування;
- задачі оптимального управління.

В даний час є ряд методик вирішення завдань диспетчерського управління, що базуються на різних моделях управління [1, 2, 3]. Особливістю розробленого підходу є побудова схем диспетчерського управління з використанням регресійних рівнянь для опису нестационарного режиму роботи МГ.

Ієрархічна схема диспетчерського управління МГ по виду передачі інформації можна представити у вигляді, наведеному на рис. 1, яка включає:

- 1 – магістральний газопровід (складний технологічний об'єкт);
- 2 – пристрій збору та формування диспетчерської інформації;
- 3 – пристрій передачі диспетчерської інформації в ЦДУ;
- 4 – пристрій зберігання диспетчерської інформації;
- 5 – математичне забезпечення МГ (модель управління, методи оптимізації і т.д.);
- 6 – засіб диспетчерського відображення та передачі інформації про оптимальне управління з ЦДУ;

7 – засіб диспетчерської реалізації оптимальних управлінь на КС.

Процес диспетчерського керування режимами роботи МГ, незалежно від схем подання та розбиття МГ на окремі ділянки функціонування, включає реалізацію наступної послідовності дій:

1. Отримання диспетчерської інформації про режим експлуатації МГ.
2. Обробка диспетчерської інформації, побудова моделі функціонування МГ.
3. Прийняття рішення про зміну режиму роботи МГ і вироблення диспетчером закону керування.
4. Обробка диспетчером зміни режиму роботи МГ відповідно до закону управління.

На рис. 2 наведена блок-схема диспетчерського управління МГ, пунктирною лінією тут окреслено блок диспетчерського управління. Блок диспетчерського управління в цій схемі включений в лінію зворотного зв'язку, це є основним принципом управління, який використовується в роботі. Управління за цим принципом здійснюється за двома схемами: за відхиленням і за збуренням [3,4].

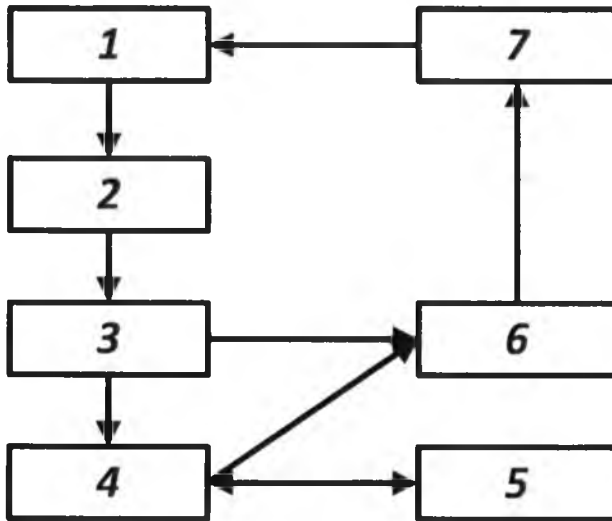


Рис. 1. Ієрархічна структура схеми диспетчерського управління МГ згідно проходження інформації

Основний недолік цих схем управління полягає в детермінованості моделі МГ. Оскільки МГ належить до класу нестационарних об'єктів, то модель необхідно уточнювати, для цього в схемі диспетчерського управління необхідно включити ідентифікатор. На рис. 3 наведена блок-схема диспетчерського управління МГ з використанням ідентифікатора в ланцюзі зворотного зв'язку, в цій схемі Y_0 – задане значення для вихідного показника режиму МГ. Ідентифікатор визначає структуру і пара-

метри моделі МГ або оператор перетворення A_t . В цьому блоці здійснюється безперервне його уточнення. На рис. 4 наведена схема диспетчерського управління МГ за збуренням і за відхиленням в адаптивному режимі.

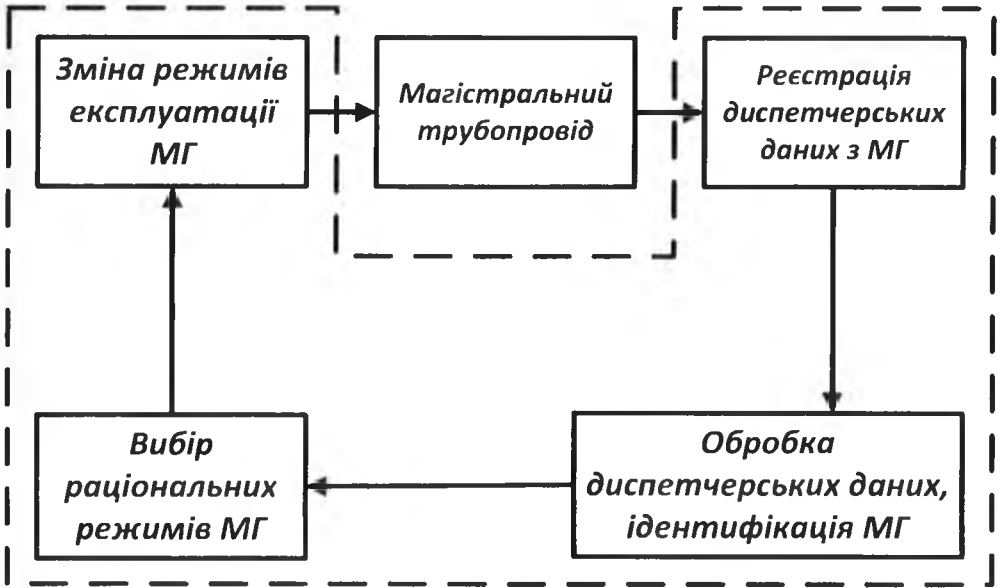


Рис. 2. Блок-схема диспетчерського оперативного управління режимами роботи МГ

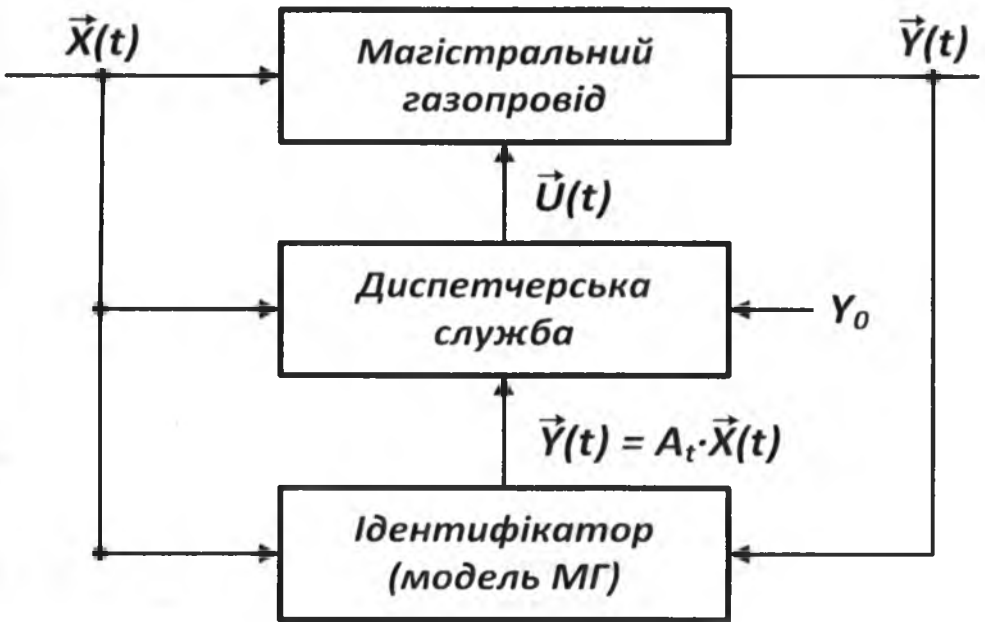


Рис. 3. Блок-схема диспетчерського управління МГ з ідентифікатором в ланцюгові зворотного зв'язку

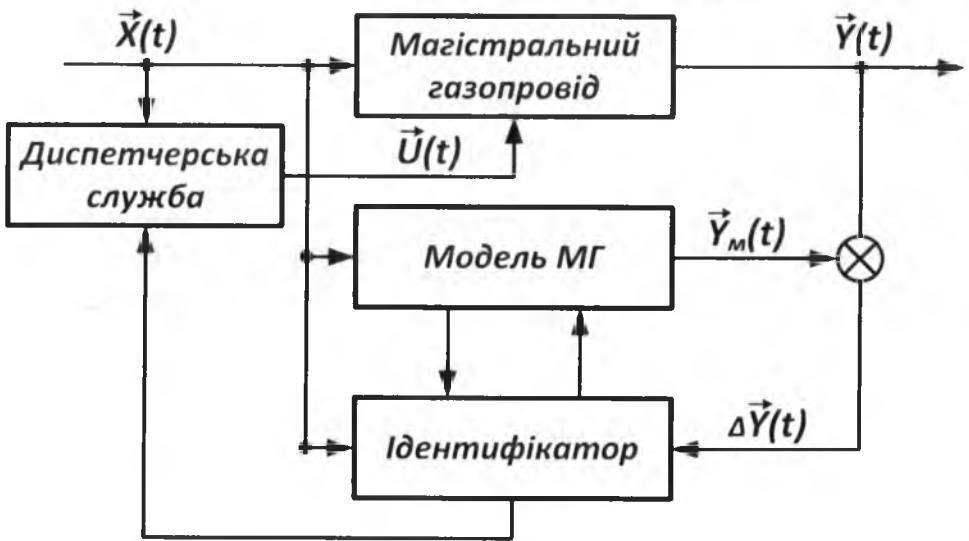


Рис. 4. Блок-схема диспетчерського адаптивного управління магістральним газопроводом

Процедура диспетчерського адаптивного управління працює безперервно і дозволяє відстежувати нестационарність моделі для МГ.

Задача ідентифікатора має дві сторони, вона виконує задачу стратегічної та оперативної ідентифікації МГ. В першому випадку визначається структура моделі, заданої регресійним рівнянням, у другому – відстеження (уточнення) коефіцієнтів моделі за значеннями неузгодженості в заданій структурі моделі. Наведені принципи управління реалізовані в роботі. Для стратегічної ідентифікації використовується алгоритм вибору найкращої моделі за умовою значимості факторів і мінімуму залишкової дисперсії, а для оперативної ідентифікації використовується однокроковий алгоритм адаптації

Основним недоліком використання регресійних рівнянь для цілей ідентифікації режимів роботи МГ є те, що МГ належить до класу нестационарних процесів. В той час, як регресійне рівняння використовуються для ідентифікації стаціонарних процесів і лише для тієї області зміни вхідних контрольованих змінних, в якій була проведена ідентифікація. При надходженні нової інформації коефіцієнти регресійної моделі необхідно постійно враховувати, в цьому випадку з'являється можливість використовувати регресійні рівняння для ідентифікації режимів роботи МГ.

На рис. 5 і 6 наведені приклади показують необхідність включення методів адаптації при використанні регресійних рівнянь для цілей прогнозування пропускну здатності магістрального газопроводу і вибору раціонального режиму експлуатації. На рис. 5 наведені три графіки, перший характеризує фактичні дані експлуатації магістрального газопроводу “Союз” в літній (липень) період часу, другий графік представ-

ляс собою передбачення цього ж параметра за моделлю режиму роботи в іншій період експлуатації – зимовий. Третій графік характеризує відхилення передбачених за моделлю фактичних значень Q_{ϕ} . Ця величина $RESI = Q_{\phi} - Q_v$ коливається в діапазоні $(-25 \div 380)$ т.м³/год, по відношенню до середнього значення для Q_{ϕ} , що дорівнює $Q_{\phi,ср} = 3269$ т.м³/год, помилка складає 11%. На рис. 5, 6 наведено графіки, відмінність полягає в тому, що тут для передбачення пропускнуї здатності в зимовий період експлуатації використовується “літня” модель. Параметр $RESI$ в цьому випадку змінюється в межах $(-75 \div 100)$ т.м³/год, по відношенню до середнього значення для фактичних даних за цей період (лютий 1982 р.) $Q_{\phi,ср} = 3666$ т.м³/год, помилка складас $(2 \div 2,8\%)$. Оскільки точність вимірювання фактичних значень складас 1,5%, то прогнозування за моделями на рис. 5 і рис. 6 є незадовільним.

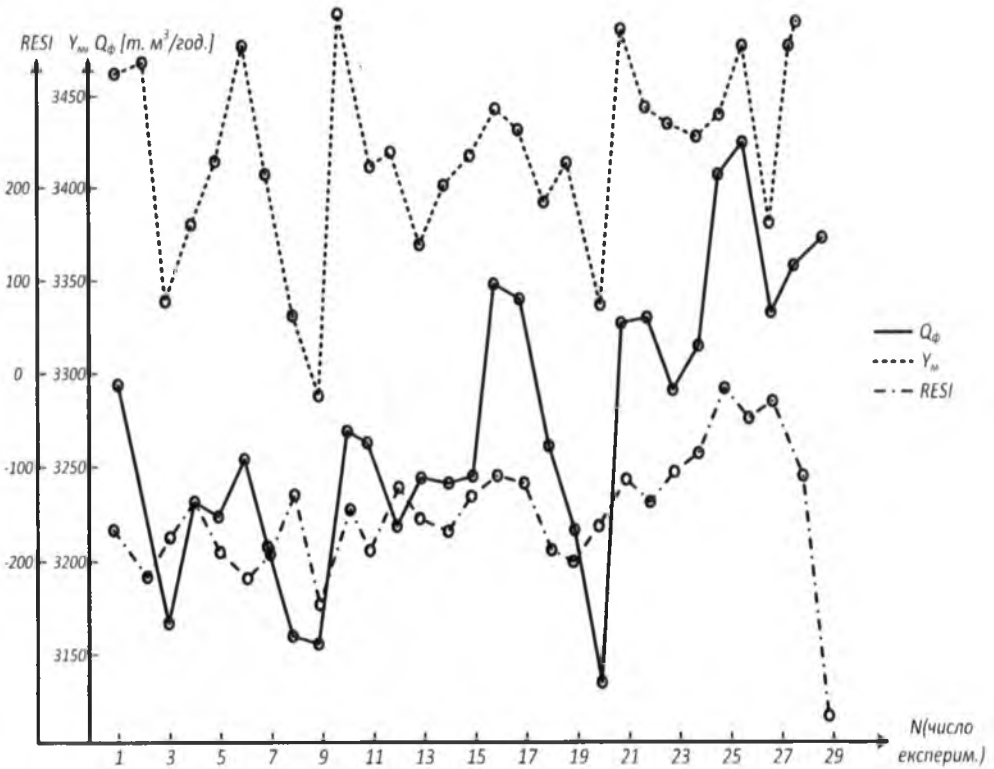


Рис. 5. Передбачення по «зимовій» моделі для МГ «Союз»

Як зазначалося вище, основним принципом ідентифікації в режимі постійного коригування коефіцієнтів регресії є принцип зворотного зв'язку. Перетворення вхідної функції $X(t)$ у вихідну $Y(t)$ здійснюється через оператор перетворення A_t , тоді $Y(t) = A_t X(t)$.

Блок ідентифікації обчислює оцінку вихідний функції $\hat{Y}(t)$ через оцінку оператора \hat{A}_t , $\hat{Y}(t) = \hat{A}_t \cdot X(t)$. Коригування оператора перетворення пропорційне відхиленню істинних значень для вихідної функції $Y(t)$ від обчисленої оцінки $\hat{Y}(t)$. На рис. 7 наведена блок-схема коригування оператора \hat{A}_t . Необхідність коригування оцінки оператора, крім перерахованих факторів, також пов'язана з наявністю неконтрольованої зміни самого оператора A_t . Причиною дрейфу може бути наявність неконтрольованих впливів, значення яких не були враховані або не могли бути враховані точно при побудові оператора, наприклад, старіння агрегатів на КС, зміна шорсткості внутрішньої поверхні трубопроводу і т.д. Як правило, зміна дрейфуючих параметрів значно повільніша, ніж зміна контрольованих параметрів для МГ, в цьому випадку вдасться скоригувати оцінку оператора A_t таким чином, щоб найкращим чином (в сенсі мінімуму квадрата відхилення $Y(t)$ від $\hat{Y}(t)$) компенсувати вплив цих неконтрольованих параметрів.

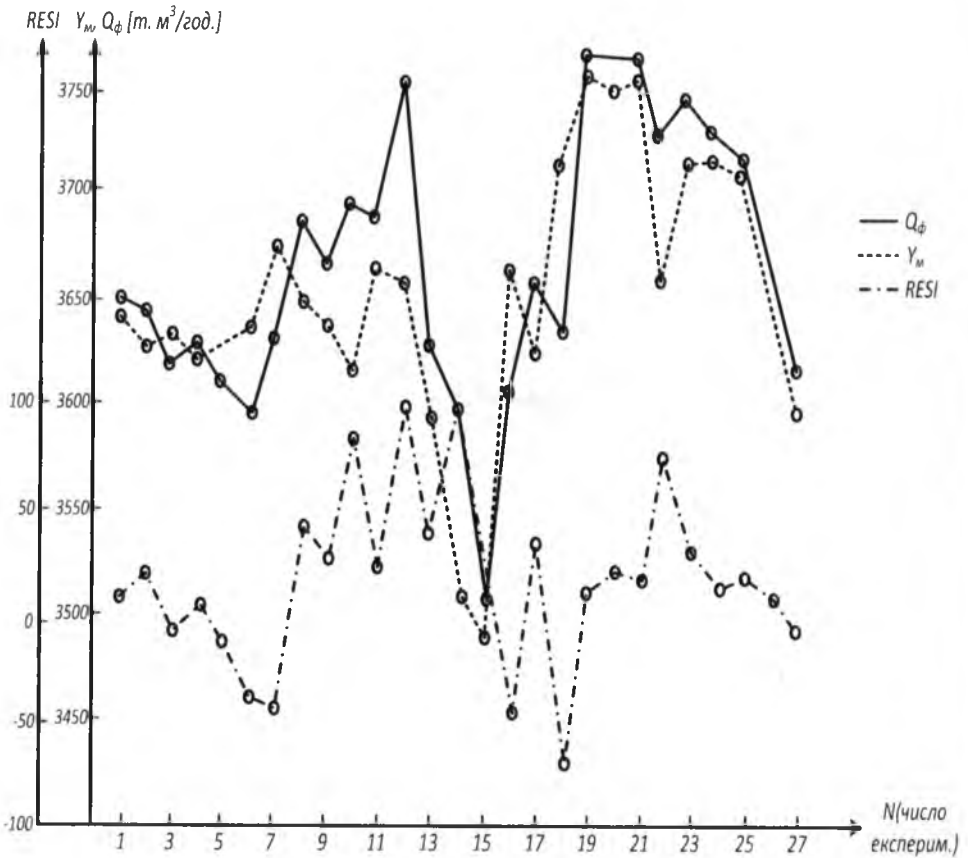


Рис. 6. Передбачення по «літній» моделі для МГ «Союз»

Нехай для опису режиму роботи МГ використовується регресійне рівняння виду:

$$Y_i = \sum_{j=1}^n \hat{a}_j X_j \tag{1}$$

або в матричному вигляді: $Y_i = \hat{A}^i \cdot X_i$,

де: Y_i , X_i – вихідна і вхідна змінні в момент часу.

Модель (1) будувалася за даними диспетчерської інформації, знятих у момент часу

$$i = t_0 + \Delta t; t_0 + 2\Delta t; \dots; t_0 + N\Delta t$$

де: i – дискретні моменти часу вимірювання Y_i та X_i ; Δt , N – інтервали часу, через які здійснюється експеримент і число експериментів відповідно.

Нехай значення y_i вимірюються з помилкою ε_i , тоді

$$y_i = y_i^* + \varepsilon_i$$

Для помилки ε_i зберігаються умови, введені в розділі 4.4. За наявності дрейфу коефіцієнти змінюються в часі. Задача ідентифікації полягає в знаходженні оцінки $\hat{A}(N + \alpha)$, тобто в моменти часу $i = N + \alpha$, де $\alpha = 0, 1, 2, \dots \ll N$, $\alpha \geq 0$. Нехай $\alpha > 0$, розв'язок цієї задачі відповідає задачі прогнозування (при $\alpha = 0$ фільтрації).

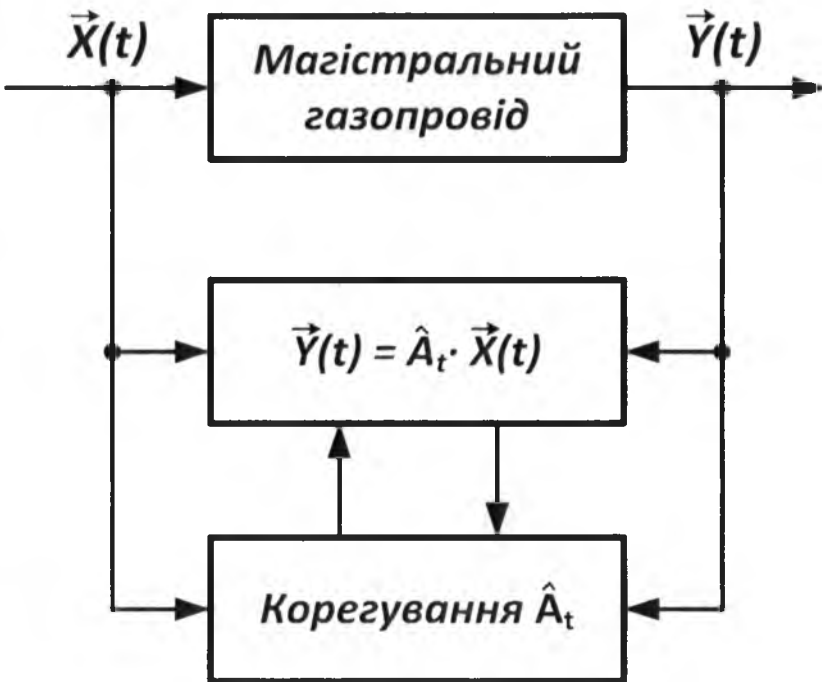


Рис. 7. Блок-схема корекції оператора \hat{A} , для МГ

Представимо алгоритм обчислення оцінок $\hat{A}(N + \alpha)$ в рекурентній формі, в якій пов'язується обчислення оцінки для моменту часу $(N + \alpha)$ з раніше знайденою оцінкою для моменту часу $(N + \alpha)$ та диспетчерською інформацією, що надійшла в момент часу N . В загальному вигляді рекурентний алгоритм записується у вигляді:

$$\hat{A}(N + \alpha) = F \left[\hat{A}(N + \alpha - 1), x_N, y_N, \gamma \right] \quad (2)$$

де: F – деяка функція, що задає структуру алгоритму; γ – параметр алгоритму, який підлягає визначенню в процесі налаштування алгоритму.

Вплив диспетчерської інформації, отриманої в моменти часу N , $N - 1$, $N - 2$ і т.д. на точність оцінки $\hat{A}(N + \alpha)$ не однаковий. Для того, щоб це врахувати, вводиться функція ваги $\varphi(N, i, \gamma)$, тут i – номер поточного спостереження диспетчерської інформації.

Для визначення структури алгоритму F скористасмося критерієм найменших квадратів. Розглянемо величину:

$$L = \sum_{i=1}^N \left[y(i) - \hat{A}'(N + \alpha) \cdot x(i) \right]^2 \varphi(N, i, \gamma). \quad (3)$$

Шукається мінімум L по $\hat{A}'(N + \alpha)$, цей метод відповідає методу поточного регресійного аналізу. Мінімізуючи L по $\hat{A}(i + \alpha)$ отримуємо наступне рівняння

$$\hat{A}(i + \alpha) = \left(X_i^T W_i X_i \right)^{-1} \cdot \left(X_i^T W_i Y_i \right). \quad (4)$$

Порівнюючи рівняння (4) з (4.23) видно, що рівняння (4.23) є окремим випадком рівняння (4) при W_i – одиничній, тобто коли всі зміни диспетчерських даних $i = 1, 2, \dots, N$ вважаються рівноцінними.

Оцінка $A(i + \alpha + 1)$ обчислюється через відому оцінку $\hat{A}(i + \alpha)$ та додаткову вхідну інформацію X_{i+1} та Y_{i+1} (диспетчерську інформацію) таким чином:

$$\begin{aligned} \hat{A}(i + \alpha + 1) &= \left[X_{i+1}^T W_{i+1} X_{i+1} \right]^{-1} X_{i+1}^T W_{i+1} Y_{i+1} = \\ &= \hat{A}(i + \alpha) + \frac{\left(X_i^T W_i X_i \right)^{-1} X_{i+1}}{X_{i+1}^T \left(X_i^T W_i X_i \right)^{-1} X_{i+1} + \gamma} \left(Y_{i+1} - X_{i+1}^T \hat{A}(i + \alpha) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Алгоритм (5) відноситься до класу однокрокових алгоритмів, тобто для обчислення оцінки невідомих параметрів моделі (1) використовуються результати одного виміру, так для отримання $\hat{A}(i + \alpha + 1)$ необхідні вимірювання X_{i+1} та Y_{i+1} .

Вплив окремих i -их вимірювань позначається на величині уточнення через вибір параметра A . Наведені рекурентні алгоритми досить

громіздкі, серед однокрокових алгоритмів адаптації широке поширення отримав алгоритм виду:

$$\hat{a}_j(i) = \hat{a}_j(i-1) + \frac{y(i) - \sum_{j=1}^n \hat{a}_j(i-1) \cdot x_j(i)}{\gamma + \sum_{j=1}^n x_j^2(i)} \cdot x_j(i). \quad (6)$$

Величина коефіцієнтів на i -му кроці уточнення залежить від оцінок коефіцієнтів на $(i-1)$ -му кроці і від результатів вимірювання на i -му кроці вхідних змінних $x_j(i)$ і вихідних змінних $y(i)$. В матричному вигляді рівняння (6) можна записати у вигляді:

$$\hat{A}(i) = \hat{A}(i-1) + \frac{Y(i) - \hat{A}^T(i-1) \cdot X(i)}{\gamma + X^T(i) \cdot X(i)} \cdot X(i). \quad (7)$$

Величина, на яку виправляються коефіцієнти моделі (1) пропорційні помилці прогнозування:

$$\Delta y(i) = y(i) - \hat{y}(i)$$

Введемо вектор помилки визначення оцінок коефіцієнтів \hat{a}_j , одержимо:

$$\Delta a_j(i) = a_j(i) - \hat{a}_j(i), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

де: i – крок уточнення коефіцієнтів.

Величина цієї помилки змінюється з тактом зміни коефіцієнтів з рівняння:

$$\Delta a_j(i) = \Delta a_j(i-1) - \frac{\sum_{j=1}^n \Delta a_j(i-1) \cdot x_j(i)}{\gamma + \sum_{j=1}^n x_j^2(i)} \cdot x_j(i). \quad (8)$$

Умова монотонної збіжності полягає в тому, що сума квадратів помилки визначення всіх коефіцієнтів \hat{a}_j в кожному наступному кроці i в усякому разі не збільшиться при будь-яких змінах вхідних даних $X(i)$ тобто

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \Delta a_j^2(i-1) - \sum_{j=1}^n \Delta a_j^2(i) \geq 0. \quad (9)$$

Для того, щоб на довільному кроці i відбулося зменшення помилки, достатньо, щоб вхідний вектор $X(i)$ не був перпендикулярним до попереднього вектору помилок $\Delta A(i-1)$, або вхідні вектори $X(i)$ та $X(i-1)$ не повинні бути паралельними, тобто повторне уточнення по одному і тому ж вхідному вектору не зменшує помилку в визначенні коефіцієнтів моделі, вхідні змінні повинні бути лінійно незалежними. Найбільша швидкість збіжності оцінок \hat{a}_j до a_j виходить тоді, коли

скалярний добуток вхідних векторів дорівнює нулю. При розмірності вхідного вектора, що дорівнює \hat{a}_i , існує тільки n лінійно незалежних векторів, ортогональних один одному, після n кроків такого уточнення всі коефіцієнти будуть визначені абсолютно точно. Умова ортогональності вхідних векторів $X(i)$ можлива тільки в тому випадку, коли всі змінні x_i керовані незалежно один від одного, це збігається з проведенням активного експерименту на МГ. В умовах нормальної експлуатації МГ випадок ортогональних вхідних векторів практично неможливий, оскільки умова безпеки роботи агрегатів на КС, а також можливих втрат при проведенні такого експерименту виключають таку ситуацію. Для МГ доцільно використовувати статистичну ортогональність вхідних векторів. Умова статистичної ортогональності рівносильна умові статистичної незалежності як самих векторів, так і їх компонент, при цьому помилка в обчисленні необхідних параметрів спадає по експоненті [3,4]. Найбільша ефективність досягається при нульових значеннях математичного сподівання компонент вхідного вектора $X(i)$, отже доцільно провести центрування змінних щодо значень математичного сподівання.

Розглянемо вплив параметра γ і його призначення в рекурентному алгоритмі (6) і (7). Параметр γ вводиться для зменшення впливу послід, переписавши рівняння (7) у вигляді матричних перешкод, отримаємо:

$$\hat{A}(i) = \hat{A}(i-1) + \Delta(i) \cdot X(i), \quad (10)$$

$$\text{де: } \Delta(i) = \frac{\Delta A(i-1) \cdot X(i)}{\gamma + X^T(i) \cdot X(i)}.$$

Якщо є повторні однакові вектори $X(i)$ та $X(i+1)$, то

$$\Delta(i+1) = \frac{\gamma \cdot \Delta(i)}{\gamma + X^T(i) \cdot X(i)}. \quad (11)$$

При S повторних вхідних впливах і $S \rightarrow \infty$ коефіцієнти моделі дорівнюють:

$$\hat{A}(i+\infty) = \hat{A}(i-1) + \frac{\Delta A^T(i-1) \cdot X(i)}{X^T(i) \cdot X(i)} \cdot X(i). \quad (12)$$

Відповідно уточнення буде аналогічним як при відсутності перешкод або оптимальному кроці. При $\gamma \neq 0$ вигідно проводити уточнення оцінок \hat{a}_i , навіть якщо вхідні дії не змінюються.

Розглянемо властивості алгоритму (7) при змінних параметрах оператора перетворення A_i . В цьому випадку коефіцієнти змінюються в часі, запишемо цю умову вигляді:

$$a_i(i) = a_i(i-1) + \delta_i,$$

де: δ_i – зміна істинних значень коефіцієнта за один такт.

Умову збіжності оцінок \hat{a}_i до істинних значень на i -му кроці уточнення можна записати у вигляді наступного матричного рівняння:

$$\frac{\Delta A^l(i-1) \cdot X(i)}{X^l(i) \cdot X(i)} > \delta^l \delta + 2 \frac{\Delta A^l(i-1) \cdot X(i) \cdot \delta^l}{X^l(i) \cdot X(i)} \cdot X(i) - 2 \Delta A^l(i-1) \cdot \delta. \quad (13)$$

При малих значеннях параметрів δ , ця нерівність завжди виконується, тобто при повільній зміні коефіцієнтів збіжності $\hat{a}_i \rightarrow a_i$ завжди буде забезпечена для $j=1,2,\dots,n$ з точністю до δ_j , при $\delta_j(i)$ та $\delta_j(i+1)$ незалежних для $i=1,2,\dots,n$.

Якщо для моделювання МГ використовуються диференціальні рівняння, то для їх розв'язання можна використовувати рекурентні процедури, в цьому випадку рівняння представляються за допомогою різних схем, або дискретного аналога цих рівнянь виду:

$$y(i) = \sum_{j=1}^n a_j x(i-j) + \sum_{j=1}^m q_j \cdot y(i-j), \quad (14)$$

де $y(i)$ – значення вихідного показника в момент часу i (в i -му такті); $x(i-j)$ – вхідне значення в момент часу $(i-j)$; a_j, q_j – невідомі параметри моделі.

Рівняння (14) відповідає одновимірному динамічному об'єкту. Для багатовимірного рівняння збільшиться в цьому випадку число сум – кожному виходу буде відповідати своя пара сум наведеного в (14) типу.

Якщо для моделювання береться модель (1), то при нестационарному режимі роботи магістрального газопроводу на основі розгляданого алгоритму адаптації для пропускної здатності в кінці розраховуваної ділянки можна вивести таку рекурентну процедуру:

$$Q_S = \sum_{j=1}^n a_{jS} \cdot x_{jS} = \sum_{j=1}^n \left(a_{j-1,S-1} \cdot x_{jS} + \frac{\Delta Q_j \cdot x_{jS}}{\gamma + \sum_{j=1}^n x_{jS}^2} \right) = \sum_{j=1}^n a_{j-1,S-1} \cdot x_{jS} +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{Q_{\phi S} - \sum_{j=1}^n a_{j-1,S-1} \cdot x_{jS}}{\gamma + \sum_{j=1}^n x_{jS}^2} \cdot x_{jS} = Q_{S-1} \cdot (1 - b_S) + Q_{\phi S} \cdot b_S. \quad (15)$$

Невідомий коефіцієнт b_S задається за структурою розраховуваного магістрального газопроводу, як це робилося в 4.2 розділу 4, він дорівнює:

$$b_S = \sum_{j=1}^n \frac{x_{jS}}{\gamma + \sum_{j=1}^n x_{jS}}; x_{jS} = \sqrt{P_{jS}^2 - P_{jS}^2},$$

S – крок ітерації.

У даній роботі для моделювання режимів роботи МГ використовується апарат статистичної ідентифікації, розглянутий у попередніх розділах роботи. При виборі методів оптимізації необхідно враховувати цю особливість. Якість чисельних методів оптимізації характеризується багатьма факторами: областю збіжності, швидкістю збіжності, часом виконання однієї ітерації, об'ємом пам'яті, який необхідний для реалізації обраного методу, класом розв'язуваних задач і т.д. Слід також враховувати особливості задач за розмірністю оптимального вектора, багатоекстремальні, гладкі і негладкі задачі і т.д.

Тому один і той же метод може виявитися ефективним для одного типу задач і абсолютно неприйнятним для іншого типу [1]. У зв'язку з перерахованими особливостями на сьогоднішній день не існує найкращого в усіх відношеннях універсального чисельного методу оптимізації. Тому є необхідним не пошук універсального методу, а розумне поєднання різноманітних методів, що дозволяє з найбільшою ефективністю вирішувати поставлені задачі. Для створення пакету програм необхідно мати такі методи оптимізації, що дозволяють всебічно досліджувати задачу. Найкращим способом використання пакету є робота в діалоговому режимі із заданим сценарієм розрахунків, такий динамічний режим роботи дає можливість на максимальному рівні використовувати досвід та інтуїцію розробника і користувача пакетом.

Для системи управління МГ відсутня можливість створення діалогового пакету оптимізації, тут структура пакету і послідовність обчислень зафіксована, це обмеження пов'язане з недостатньою технічною базою на ЦДП. Вимоги промислової експлуатації методів оптимізації накладає обмеження виду: заданий час роботи пакету на ЕОМ, задана точність обчислень, висока експлуатаційна надійність, клас розв'язуваних задач і т.д.

В основу створення пакету був покладений досвід підходу для розробки створення методології розрахунку оптимальних режимів роботи магістральних газопроводів провідних наукових організацій, який базується на виростанні сучасних комп'ютерних технологій і математичних методів оптимізації технологічних процесів. Пакет включає на різних рівнях розрахунку метод штрафних функцій і метод адаптивного випадкового пошуку який дозволяє виключити зациклення ітераційних процедур пошуку екстремуму в "особливих точках" за рахунок використання випадкового пошуку, тим самим підвищується надійність пакета в цілому. Також у пакеті є можливість врахування технологічних обмежень, які задані функціями довільного виду за рахунок використання методу штрафних функцій при розв'язанні задач нелінійного програмування. В пакеті в якості цільової функції використовується регресійне рівняння, задане у вигляді параболи і обмежень у вигляді багатовимірного еліпсоїда розсіювання та лінійних обмежувальних функцій. Розв'язання цієї задачі оптимізації відноситься до класу випуклого про-

грамування [1] з наявністю одного глобального екстремуму. На рис. 8 наведено структурну схему пакету оптимізації, тут \vec{X} – вхідний вектор стану МГ; $\vec{X}_{опт}$ – вихідний вектор оптимального режиму роботи МГ.

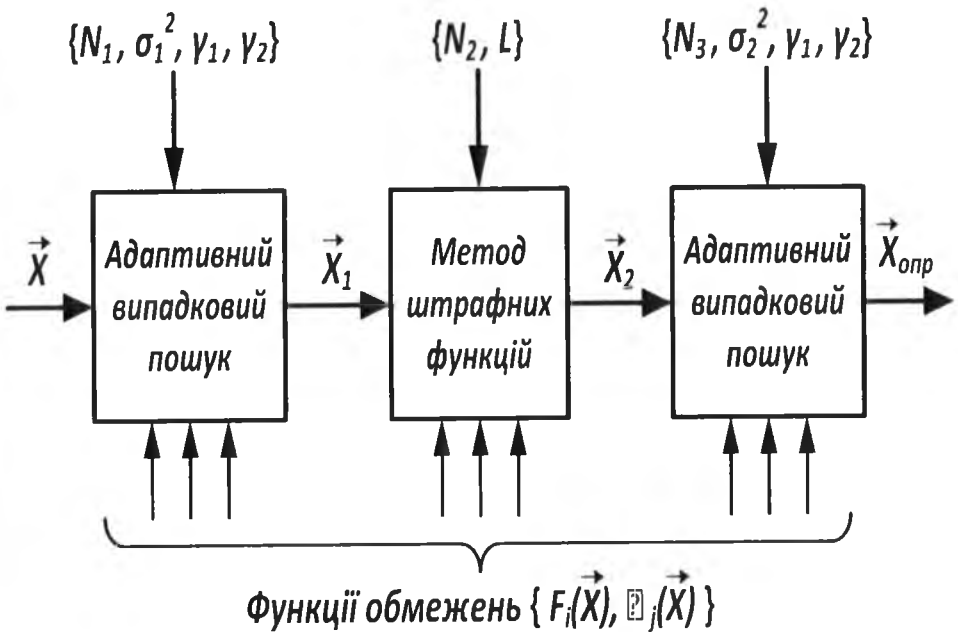


Рис. 8. Структурна схема пакету оптимізації

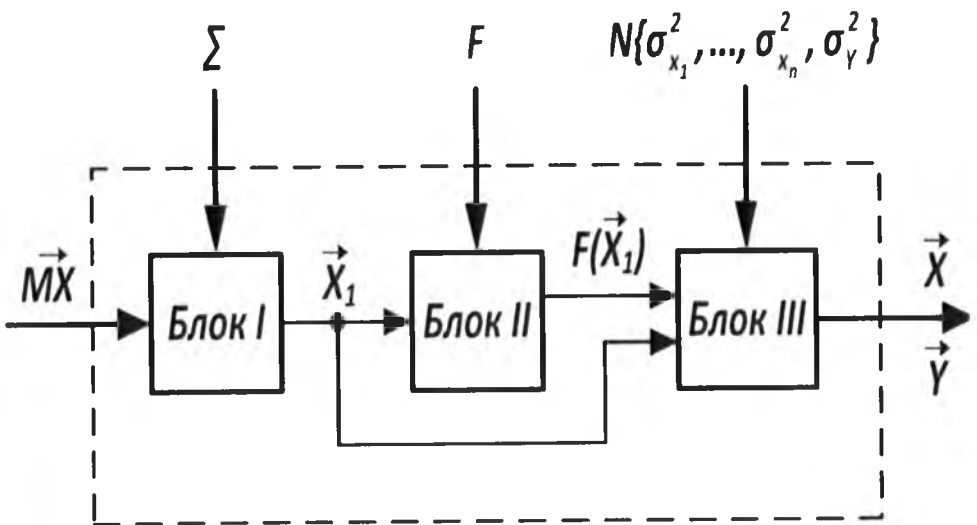


Рис. 9. Блок-схема імітації диспетчерських даних магістрального газопроводу на комп'ютері

Задача оптимізації режимів роботи МГ зводиться до наступної. Шукається $\max(F(\bar{X}))$ при $x \in \Omega_p$, цільової функції при обмеженнях:

$$F_i(\bar{X})=0; \quad i=1,2,\dots,l, \quad \varphi_j(\bar{X})\leq 0; \quad j=1,2,\dots,m, \quad (24)$$

де: Ω_p – область працездатності для функції; $F(\bar{X})$ – цільова функція, що оптимізується (модель МГ); $F_i(\bar{X})$ – функція обмеження у вигляді рівності; $\varphi_j(\bar{X})$ – функція обмеження у вигляді нерівності.

Розв'яжемо задачу (24) методом штрафних функцій, для чого складемо функцію штрафу такого вигляду:

$$P(x, \tau) = -F(x_k) + \tau \cdot \left(\sum_{m=1}^l F_i(x_k)^2 + \sum_{j=l+1}^m \varphi_j^+(x_k)^2 \right), \quad (25)$$

$$\text{де } \varphi_j^+(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } \varphi_j(x_k) \leq 0, \\ \varphi_j(x_k), & \text{при } \varphi_j(x_k) > 0. \end{cases}$$

Розглянемо задачу:

$$\max \min(P(x, \tau)) \text{ при } \tau \in T, x \in \Omega_p. \quad (26)$$

В роботах [1,2,3] показано, що при $T \rightarrow \infty$ розв'язання задачі (26) сходиться до розв'язання задачі (24). Вибравши значення штрафу τ досить великим ($\tau \approx 300$), градієнтним методом розв'язується тільки внутрішня задача рівняння (26). Рекурентний алгоритм пошуку екстремуму дорівнює:

$$x_i(s) = x_i(s-1) - B' \cdot P'(x, \tau), \quad (27)$$

де $i=1,2,\dots,n$, тобто пошук ведеться тільки за керуючими змінними. Тут s – крок ітерації за схемою (27).

Значення штрафу змінюється від 0 до τ_{\max} за законом:

$$\tau(s+1) = \tau(s) + \left(\sum_{i=1}^l F_i(x_k)^2 + \sum_{j=l+1}^m \varphi_j^+(x_k)^2 \right) \cdot \frac{C_1(\tau_{\max} - \tau(s))}{\sqrt{1+s}}.$$

Отже, якщо не виконуються обмеження у вигляді рівності або нерівності, то величина штрафу $\tau(s)$ збільшується пропорційно квадрату значень функцій $F_i(x_k)$, $\varphi_j(x_k)$. Параметри B' , C_1 підбираються для конкретного виду функцій, для початкового наближення його можна вибрати рівним $B' = 0,01$, $C_1 = 0,001$. Значення похідної обчислюється, якщо це можливо, аналітично, або чисельним методом, через приріст Δx , тоді

$$P'(x, \tau) = \frac{P(x + \Delta x, \tau) - P(x - \Delta x, \tau)}{2\Delta x}.$$

Адаптивний випадковий пошук за правильної організації є досить ефективним засобом пошуку глобального екстремуму [17, 29]. В області

пошуку Ω , що включає область Ω_p і обмеження у вигляді рівності і нерівності в постановці задачі (24) із заданою щільністю розподілу (в даному прикладі рівномірною) $P(X|m_v, \sigma_v^2)$ генеруються випадкові точки x_1, x_2, \dots, x_n . Для щільності розподілу: $m_x = \bar{X}$ – математичне сподівання, σ_v^2 – дисперсія випадкових величин. Алгоритм випадкового пошуку полягає в тому, що \bar{X} розташовується в точці з оптимальним (раніше знайденим) або похідним значенням функції, що оптимізується:

$$F_K(\bar{X}) = \min(-F(\bar{X})) = Q^*.$$

Пошук Q^* проводиться на підставі рекурентної процедури:

$$\bar{X} = X^* = \begin{cases} X_{i-1}^*; Q_i^* = Q_{i-1}^*, \text{ при } Q(X_i) \geq Q_{i-1}^*; \\ X_i; Q_i^* = Q(X_i), \text{ при } Q(X_i) < Q_{i-1}^*, \end{cases}$$

де: i – крок рекурентного пошуку.

Цей підхід гарантує знаходження глобального екстремуму, при цьому застосовується адаптація дисперсії σ_x^2 в процесі пошуку. Дисперсію зменшують при невдалих випадкових спробах і збільшують при вдалих, тобто

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta\sigma_i,$$

$$\text{де: } \Delta\sigma_i = \varphi(\sigma_{i-1}, \Delta Q_{i-1});$$

$$\text{або } \sigma_i = \begin{cases} \gamma_1 \sigma_{i-1}, \Delta Q_{i-1} > 0; \\ \gamma_2 \sigma_{i-1}, \Delta Q_{i-1} \leq 0. \end{cases}$$

Коефіцієнти $\gamma_1 < 1$, $\gamma_2 \geq 1$, чисельні значення для них підбираються в конкретно розв'язуваних задачах. При γ_1 і γ_2 близьких до одиниці, швидкість пошуку зменшується і адаптація дисперсії відсутня. При γ_1 і γ_2 відмінних від одиниці проводиться адаптація дисперсії, це збільшує швидкість пошуку, однак глобальний екстремум в цьому випадку може бути не знайдений. Для розв'язуваної задачі, цільова функція, що оптимізується, з системою обмежень утворюють випуклу множину, в якому локальний і глобальний екстремуми збігаються, отже, доцільніше використовувати алгоритм з адаптацією.

На першому кроці роботи пакета оптимізації (рис. 8) працює алгоритм випадкового пошуку (з адаптацією дисперсії пошуку). В якості початкової точки пошуку \bar{X}_0 береться вектор \bar{X} – вектор вхідної диспетчерської інформації. Далі вводяться параметри, що задають режими роботи цього методу пошуку: N_1 – число ітерацій; σ_{i1}^2 – дисперсія випадкового розкиду за керуючими параметрами; γ_1, γ_2 – коефіцієнти беруться відмінними від одиниці. Також вводяться функції обмежень для

задачі (24), які задають область працездатності цільової функції Ω_p і функції обмежень у вигляді рівностей і нерівностей.

Після N_1 ітерацій на виході одержується вектор \overline{X}_1 для якого виконуються обмеження і отримано максимальне значення цільової функції $Q_1^* = F(\overline{X}_1)$. Вектор \overline{X} є початковим вектором для методу штрафних функцій. Основним призначенням першого блоку в пакеті оптимізації є формування початкового вектора для алгоритму штрафних функцій, оскільки ефективність останнього дуже чутлива до його вибору.

Для задачі режиму роботи алгоритму штрафних функцій вводяться: N_2 – число ітерацій; σ_{lv}^2 – вектор параметрів, він включає наступні значення: τ_{\max} , l , m , c_1 , Δx . Також вводяться обмеження на допустиму область задачі (24). На виході цього блоку в пакеті оптимізації після N_2 ітерацій одержується вектор \overline{X}_2 для якого $Q_2^* = F(\overline{X}_2)$.

В останньому блоці пакету оптимізації знову використовується адаптивний випадковий пошук. Вхідним вектором цього блоку є вектор \overline{X}_2 . Режим роботи, як і для блоку 1, задаються параметрами: σ_{2l}^2 , N_3 , γ_1 , γ_2 . Відмінною особливістю роботи цього блоку в порівнянні з блоком 1 є: $\sigma_{2l}^2 > \sigma_{lv}^2$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$. Основним завданням блоку 3 є перевірка вектора \overline{X}_2 на глобальний екстремум.

Вигляд функції обмежень для задачі (24) задається наступним чином: область працездатності для цільової функції, заданої регресійним рівнянням, обмежена багатовимірним еліпсоїдом розсіювання виду:

$$\Omega_p : (X - \overline{X})^T \cdot (RX)^{-1} \cdot (X - \overline{X}) - Q \leq 0. \quad (28)$$

Матриця RX обчислюється на стадії попереднього статистичного вивчення МГ, вона характеризує взаємний парний вплив параметрів у векторі стану \overline{X} . Параметр Q також вибирають на стадії попереднього статистичного аналізу із заданим рівнем ймовірності попадання даних диспетчерської інформації всередину. Конкретний вигляд функції в рівностях і нерівностях визначається технологічними обмеженнями для конкретно розраховуваного МГ. Слід зазначити, що обмеження у вигляді рівності є найбільш складним видом обмежень для задачі нелінійного програмування. В практичних розрахунках доцільно їх замінити обмеженнями у вигляді нерівності.

З урахуванням вимог надійності найбільш вразливим місцем у пакеті є використання методу штрафних функцій. Згідно з ітераційним алгоритмом пошуку (27) зміна вектора стану в процедурі дорівнює:

$$\Delta x_s(s) = B \cdot \overline{P}'(x, \tau),$$

де: s – номер ітерації.

В разі невиконання обмежень різко зростає значення $P'(x, \tau)$ і відповідно $\Delta x_j(s)$. Оскільки для методу пошуку передбачається, що $\tau(s)$ велика величина, то вектор зміни $\Delta x_j(s)$ спрямований в напрямі виконання обмежень. При невдалому виборі параметра штрафу можливий випадок стрибків $(s) \rightarrow (s+1)$, в яких значення x_j на такті s та $s+1$ будуть поза допустимою областю обмежень (в різних напрямках). В цій ситуації можливе розгойдування алгоритму, яке при розрахунку на ЕОМ через обмеження розрядної сітки призведе до аварійної зупинки.

Для запобігання розгойдування алгоритму пошуку вводяться обмеження на величину зміни вектора, які дорівнюють:

$$|\Delta x_j(s)| \leq \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{jN}(s) - x_{jM}(s))^2}{3}}, \quad (29)$$

де: $x_{jN}(s)$, $x_{jM}(s)$ – розв'язок задачі перетину поверхні другого порядку з прямою.

Швидкість збіжності задачі оптимізації залежить від правильного вибору параметрів режиму роботи пакету σ_1^2 , L , σ_2^2 , γ_1 , γ_2 . Їх оптимальний вибір представляє розв'язання самостійної дослідної задачі. Час рахунку на ЕОМ залежить від числа ітерацій N_2 і N_3 .

Задача диспетчерського оптимального управління режимами роботи МГ включас в себе розв'язання наступних задач:

1. Задача статистичної ідентифікації або побудови регресійних моделей параболічного виду за даними диспетчерської інформації.
2. Задача визначення диспетчерського оптимального керування для МГ. В результаті розв'язання цієї задачі обчислюються оптимальні керуючі параметри режимів роботи МГ – тиску на КС вздовж траси МГ.
3. Задача адаптації в диспетчерському оптимальному управлінні розв'язання двома методами. В першому випадку вигляд моделі для МГ залишається невідомим, коригуються лише коефіцієнти моделі з використанням однокрокового алгоритму адаптації. В другому випадку передбачається побудова нового регресійного рівняння за новими диспетчерськими даними.
4. Задача прогнозування вихідного показника якості роботи МГ, вибір критерію якості задається значенням пропускнуої здатності в кінці розраховуваної ділянки МГ.

На рис. 10 наведено функціональну схему диспетчерського оптимального управління МГ, яка складається з семи основних блоків.

За результатами проведених досліджень можна помітити, що вплив неконтрольованих збурень призводить до зміщення режимів роботи магістрального газопроводу від проектного, запропоновані схеми

диспетчерського управління дозволяють компенсувати цей вплив в режимі оперативного диспетчерського управління за даними диспетчерської інформації.

Для моделювання несталого режиму магістрального газопроводу доцільно використовувати адаптивний підхід. Аналіз існуючих розв'язків цієї задачі з використанням різницевих схем показав, що рекурентна процедура послідовного уточнення коефіцієнтів моделі з використанням пропонованого однокрокового алгоритму адаптації є окремим випадком цих різницевих схем.

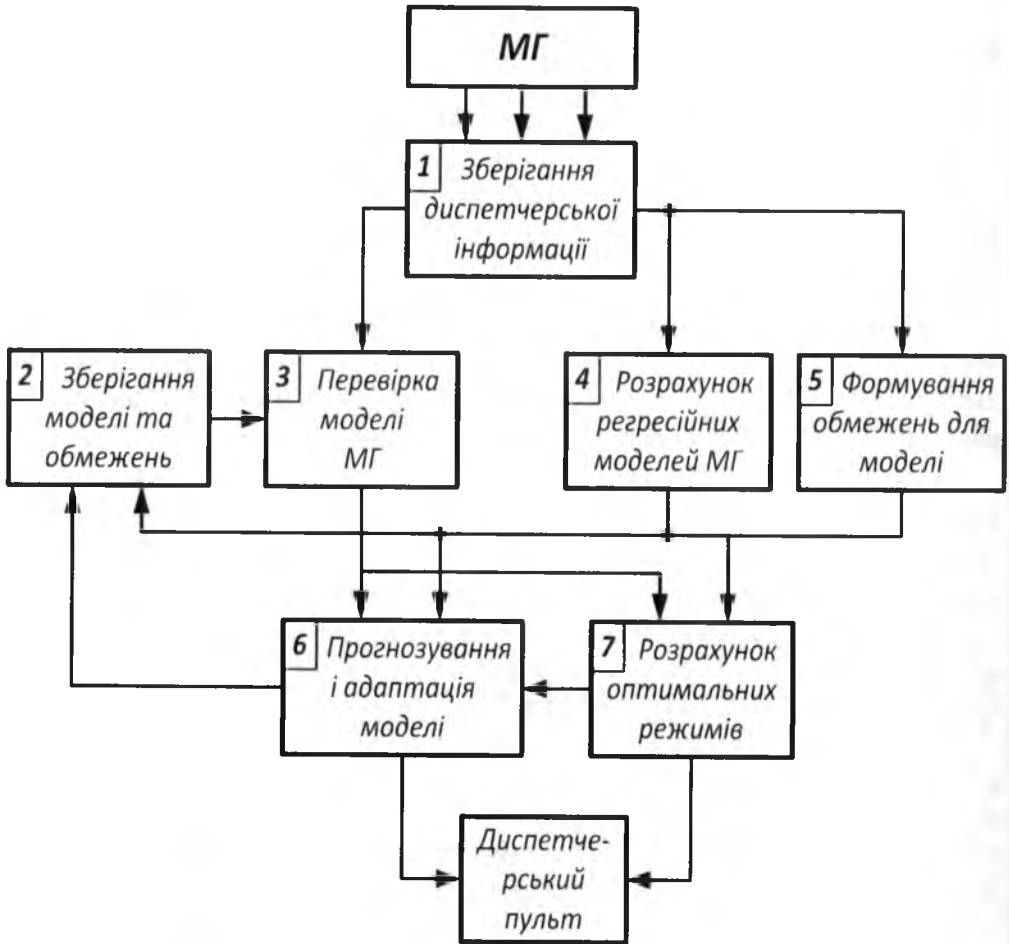


Рис. 10. Функціональна схема диспетчерського управління МГ

На відміну від використовуваних раніше стохастичних методів апроксимації режимів магістральних газопроводів, пропонований метод адаптації може бути використаний для диспетчерської інформації, навіть з урахуванням її неповної інформативності.

Розроблена програма адаптації дозволяє коригувати коефіцієнти регресійних моделей в реальному масштабі часу, що є суттєвим при

оперативному диспетчерському управлінні, аналітично доведено збіжність алгоритму адаптації та зроблено конкретні вимоги до диспетчерських даних, при яких швидкість збіжності буде максимальною. Досліджено стійкість алгоритму адаптації до похибки в обчисленні диспетчерських даних, встановлено аналітичними залежностями пороги точності, при яких збіжність алгоритму буде незадовільною.

Для розрахунку оптимальних режимів роботи магістральних газопроводів з використанням регресійних рівнянь для розрахунку пропускну здатності в кінці розраховуваної ділянки доцільно використовувати пакет програм оптимізації, що складається з різних за своєю структурою програм, це необхідно для підвищення надійності розв'язання задачі оптимізації в практичній експлуатації. Доцільно використовувати метод штрафних функцій і метод адаптивного випадкового пошуку.

Література

1. Грудз В.Я. Характеристика режимів роботи компресорних станцій магістрального газопроводу / В.Я.Грудз, Я.В.Грудз, В.І.Слободян // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – № 4. – 2010. – С. 124-126.
2. Грудз Я.В. Енергоефективність газотранспортних систем / Я.В.Грудз. – Івано-Франківськ: Лілея НВ, 2012. – 186 с.
3. Трубопровідний транспорт газу / М.П.Ковалко, В.Я.Грудз, В.Б.Михалків та ін. – Київ, АренаЕКО, 2002. – 600 с.
4. Грудз В.Я. Технічна діагностика трубопровідних систем / В.Я.Грудз, Я.В.Грудз, В.В.Костів та ін. – Івано-Франківськ.: Лілея-НВ, 2012. – 512 с.
5. Грудз Я.В. Оптимізація режимів роботи газопроводу з урахуванням енерговитратності транспорту газу/ Я.В.Грудз // Нафтогазова енергетика. – 2012. – №2. – С. 12-15.
6. Orynyak I.V. The spring splines procedure with prescribed accuracy for determination of the curvatures of the pipeline based on the 3-D measurements of its position / I.V.Orynyak, I.V.Lokhman // Rio Pipeline Conference & Exposition 2011, IBP1029–11.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2013 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., професором Грудзом В.Я., д.т.н., професором Говдяком Р.М. (м. Київ)

ALGORITHMS AND METHODS OF CONTROLLER'S OPTIMUM MANAGEMENT BY MODES OF MAIN GAS PIPELINES

D. F. Tymkiv

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15;
ph. +380 (3422) 4-21-57; e-mail: public@nung.edu.ua*

The decision of the tasks related to optimization of office hours MG is examined, taking into account the actual being GPA and being LD in a main gas pipeline. The existent charts of controller's management MG are parted on two systems centralized and decentralized. The second chart of controller's management takes certain advantages on firmness of decision and reliability of the realization, related to that for the first type of management necessary very difficult nonlinear dynamic model, and also large volume of controller's information.

Key words: *optimization of the modes, management charts, algorithms, methods.*

УДК 622.692.4

ПРИНЦИПИ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕЖИМІВ РОБОТИ ГАЗОПРОВОДУ

Я. В. Грудз

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 4-21-57; e-mail: public@nung.edu.ua*

Приведено принципи оптимізації режимів роботи магістральних газопроводів і складних газотранспортних систем з використанням різноманітних критеріїв оптимальності. Запропоновано методика оптимізації режимів роботи ГТС в умовах переходу до ринкових відносин.

Ключові слова: множина режимів, критерії оптимальності, оптимізація

Оптимальним режимом роботи газопроводу вважають режим, параметри якого забезпечують екстремальне значення деякого критерію оптимальності.

Нова реальність вимагає знаходити нові нетрадиційні рішення щодо максимізації прибутку за рахунок ефективного і повного використання виробничих ресурсів систем трубопровідного транспорту газу. Оперативне одержання відповідної інформації про ситуацію; автоматизована обробка, систематизація та аналіз інформації, яка використовується для підготовки рішень, має бути матеріалізована у вигляді системи розрахункових моделей, яка спроможна визначити економічно доцільні варіанти функціонування та адаптаційного розвитку виробничих структур, а також спрогнозувати ефективність (чи неефективність) вживаних на часі стратегічних орієнтирів щодо покращення економічного стану газотранспортної галузі.

Формування ринкових відносин в сфері трубопровідного транспорту газу пов'язане з необхідністю використання ринкових законів, на основі яких належить віднайти спонукальні мотиви для трансформаційних реформ, що мають забезпечити максимальну прибутковість газотранспортного виробництва. Ринкова переорієнтація газотранспортної галузі - найважливіша методологічна установка підвищення її економічної ефективності. Це прямо й безпосередньо виводить на економічний блок проблем.

Дослідження конкретизовані відповідно до стану газотранспортної галузі в короткостроковому Врахування "неекономічних факторів" зовнішнього середовища на сьогодні практично неможливе: правильна сама по собі ідея максимально розширити і поглибити розрахунковий аналіз наштовхується на невизначеність відокремлених аспектів проблеми та відсутність модельного і інформаційного її забезпечення.

До критеріїв оптимальності режимів відносять мінімум собівартості перекачування, максимум об'єму перекачування, мінімум сумарної потужності компресорних станцій, максимум показників надійності системи і т. д. На практиці для проведення оптимізації режимів користуються відразу декількома критеріями оптимальності. Кожному з них присвоюється певний ранг (пріоритет перед іншими) і певний ваговий коефіцієнт. Одержана таким чином функція носить назву функції мети. Параметри оптимального режиму повинні забезпечувати екстремум функції мети.

Процедура оптимізації режимів полягає в тому, що критерії оптимальності режиму виражаються через його параметри (тиски, температури, витрати газу) за допомогою відомих рівнянь стаціонарної течії газу в газопроводі. Далі глобальний екстремум функції мети може бути знайдено, якщо часткові похідні по параметрах режиму прирівняти до нуля. Проте ряд залежностей, які пов'язують параметри режиму з певними критеріями оптимальності, мають емпіричний характер, в зв'язку з чим ряд часткових похідних може не існувати. Крім того, часто функція мети може взагалі не мати глобального екстремуму. Тому вказаний напрямок не знайшов визнання в галузі оптимізації режимів роботи газопроводів.

Найбільш поширеними вважаються два методи оптимізації режимів: метод перебору варіантів і метод штрафних функцій. Перший полягає в тому, що для всіх режимів з області допустимих, знаходяться значення функцій мети. Оптимальним режимом вважають такий, для якого числове значення функцій мети найбільше (або найменше). Другий метод полягає в тому, що параметри деякого режиму з області допустимих змінюють на деякий дискретний крок і шукають значення функції мети для обох режимів. Якщо функція мети для нового режиму змінилась в сторону покращення, то продовжують пошук в тому ж напрямку. Якщо функція мети для нового режиму змінилась в сторону погіршення, то їй приписується певний штраф і пошук продовжується в іншому напрямку. Недоліком першого методу є великий обсяг можливих варіантів, що вимагає значних затрат часу. Реалізація другого методу можлива і доцільна тільки поблизу екстремальної точки. Тому для практичної реалізації запропоновано метод, який є поєднанням двох описаних. В комплексі з використанням області допустимих режимів та граничної області енергозатрат цей метод дає змогу зменшити затрати часу на пошук оптимального режиму в десятки разів.

Для оптимізації використовується метод пошуку глобального екстремуму функції мети, побудованої на основі диспетчерської інформації з врахуванням адаптації коефіцієнтів регресивного рівняння. При цьому частота адаптації коефіцієнтів регресивної моделі за даними диспетчерської інформації повинна задовольняти точності передбачення по моде-

лі для вибраного модельованого параметру режиму роботи газотранспортної системи.

Рішення задачі вибору оптимальних режимів газотранспортної системи визначається критерієм оптимізації і відповідним класом використовуваних моделей. Для моделювання режимів газотранспортної системи використовується апарат статистичної ідентифікації. Якість числових методів оптимізації характеризується такими факторами: областю збіжності алгоритму, часом виконання однієї ітерації, об'ємом пам'яті, необхідним для реалізації вибраного методу, класом задач, які розв'язуються і т. д.

Необхідно також враховувати особливості задач по розмірності оптимального вектора, багатоекстремальні, гладкі і негладкі задачі і т. д.

Тому один і той же метод може бути ефективним для одного типу задач і зовсім непридатним для іншого типу. У зв'язку з наведеними особливостями в даний час не існує найкращого у всіх відношеннях універсального числового методу оптимізації і ніколи не буде існувати. Тому необхідний не пошук універсального методу, а доцільніше об'єднати різні методи, які дозволяють з найбільшою ефективністю розв'язувати задачі оптимізації.

Одним з таких підходів є поєднання штрафних функцій з методом адаптивного випадкового пошуку. Сполучення цих методів дозволяє виключити зациклення ітераційних процедур пошуку екстремума в "особливих точках" за рахунок використання випадкового пошуку, тим самим підвищується надійність пошуку оптимального значення в цілому. Даний підхід дає можливість враховувати технологічні обмеження, які задаються функціями будь-якого виду за рахунок використання методу штрафних функцій при рішенні задач нелінійного програмування.

При даному підході до вирішення проблеми оптимізації транспорту газу в якості функції мети використовується регресивне рівняння, яке задається у вигляді параболі і технологічних обмежень у вигляді функцій обмежень для режимів роботи компресорних станцій вздовж траси трубопроводу. В цьому випадку задача оптимізації режимів роботи газотранспортної системи зводиться до таких дій:

- ♦ шукається $\max_{X \in \Omega_p} (F(\bar{X}))$ функції мети $F(\bar{X})$ при обмеженнях виду:

$$F_i(\bar{X}) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\varphi_j(\bar{X}) \leq 0; \quad j = l + 1, \dots, m + 1, \dots,$$

де Ω_p – область працездатності для функції $F(\bar{X})$; $F(\bar{X})$ – цільова оптимізуюча функція (модель газотранспортної системи); $F_i(\bar{X})$ – функція обмежень у вигляді рівності; $\varphi_j(\bar{X})$ – функція обмежень у вигляді нерівності.

Задача розв'язується методом штрафних функцій, для чого будуються функція штрафу такого вигляду:

$$P(X, \tau) = -F(X_k) + \tau \left(\sum_{j=1}^c F_j(X_k)^2 + \sum_{j=l+1}^m \varphi_j^\tau(X_k)^2 \right),$$

де $\varphi_j^\tau(X_k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \varphi_j(X_k) \leq 0 \\ \varphi_j(X_k), & \text{якщо } \varphi_j(X_k) > 0 \end{cases}$; τ – параметр штрафу.

Розглянемо задачу:

$$\max_{\tau \leq T, X \in \Omega} (\min(\rho(X, \tau))).$$

У багатьох роботах [130, 160, 172, 188] показано, що при $T \rightarrow \infty$ рішення задачі зводиться до рішення попередньої загальної задачі. Вибравши значення штрафу τ достатньо великим ($\tau = 100$), градієнтним методом рішається тільки внутрішня задача.

Рекурентний алгоритм пошуку екстремуму наступний:

$$X_i(S) = X_i(S-1) - B' \cdot P'(X, \tau),$$

$$B' = \frac{C}{\sqrt{1+S}},$$

де $i = 1, \dots, n$, n – число керуючих змінних; s – крок ітерації по схемі.

Значення штрафу змінюється від 0 до τ_{\max} по закону:

$$\tau(S+1) = \tau(S) + \left(\sum_{j=1}^c F_j(X_k)^2 + \sum_{j=l+1}^m \varphi_j^\tau(X_k)^2 \right) \cdot \frac{C_1(\tau_{\max} - \tau(S))}{\sqrt{1+S}}.$$

Параметри C і C_1 вибираються для конкретного виду функцій. Значення похідної в градієнтному методі обчислюється аналітичним або числовим методом через прирости ΔX , тоді:

$$\rho'(X, \tau) = \frac{(\rho(X + \Delta X, \tau) - \rho(X - \Delta X, \tau))}{2\Delta X}.$$

Адаптивний випадковий пошук при правильній організації є достатньо ефективним засобом пошуку екстремуму. В області пошуку Ω , яка включає область працездатності цільової функції і обмеження у виді рівності і нерівності в постановці загальної задачі, із заданою щільністю розподілу $P(X/\bar{X}, \sigma_x^2)$ генеруються випадкові точки x_1, x_2, \dots, x_n , де \bar{X} – математичне очікування; σ_x^2 – дисперсія випадкової величини.

Алгоритм випадкового пошуку полягає в тому, що \bar{X} розміщується в точці з оптимальним або довільним значенням оптимізуючої функції, тобто:

$$F_k(\bar{X}) = \min(-F(\bar{X})) = Q^*.$$

Пошук Q^* проводиться на основі рекурентної процедури:

$$\bar{X} = X^* = \begin{cases} X_{i-1}; Q^* = Q_{i-1}^* & \text{при } Q(X_i) \leq Q_{i-1}^* \\ X_i; Q^* = Q_i^*(X) & \text{при } Q(X_i) < Q_{i-1}^* \end{cases},$$

де i – крок рекурентного пошуку.

Цей підхід гарантує знаходження глобального екстремуму при $i \rightarrow N$, де N – досить велике число.

Для задання режиму роботи алгоритму штрафних функцій вводяться: N_1 – число ітерацій; L – вектор параметрів, він вмщує такі значення:

$$\tau_{\max}, l, m, c, c_1, \Delta x.$$

Також вводяться обмеження на допустиму область рішення задачі. Область працездатності моделі газотранспортної системи обмежується багатовимірним паралелепіпедом, який задає діапазони зміни незалежних змінних в матриці диспетчерської інформації X , по якій будувалась модель. Апроксимація робочої області таким методом не сдина, її також можна апроксимувати багатовимірним еліпсоїдом розсіювання, в будь-якому випадку метод оптимізації не обмежує класу функцій обмежень. Технологічні обмеження задаються обмежувачими нерівностями на режими компресорної станції (вхідні і вихідні тиски). Метод штрафних функцій при оптимізації працює першим, в деяких випадках краще, щоб перед методом штрафних функцій працював метод випадкового пошуку. Введення його принципово не ускладнює задачу оптимізації, зате підготує для штрафних функцій початкове значення для вектора \bar{X}_0 , в якому виконуються всі обмеження. Якщо є можливість наперед підготувати початкове значення для вектора \bar{X}_0 , то необхідність для введення цього випадкового пошуку відпадає. На виході методу штрафних функцій при оптимізації після N_1 ітерацій формується вектор \bar{X}_1^* для якого $Q_1 = F(\bar{X}_1^*)$. Після цього використовується адаптивний випадковий пошук. Вхідним вектором для нього є вектор \bar{X}_1^* . Режим роботи якого задається параметрами N_2, σ_x^2 . Основною задачею його є перевірка вектора \bar{X}_1^* на глобальний екстремум. На виході адаптивного випадкового пошуку формується вектор стану $\bar{X}_2^* = \bar{X}_{\text{opt}}$, який відповідає оптимальному керуванню по критерію максимуму перепускної спроможності на кінцевій компресорній станції для газотранспортної системи. Конкретний вигляд функції обмежень рівностей і нерівностей визначається технологічними обмеженнями для конкретних компресорних станцій. Необхідно зазначити, що обмеження у вигляді рівностей є найбільш складними обмеженнями для задач нелінійного програмування. У практичних розрахунках доцільно їх замінити обмеженнями у вигляді нерівності, для чого вводяться похибки вимірювань диспетчерських даних. В цьому випадку верхній і нижній діапазони для вимірювальних параметрів задає діапазон зміни і для функції обмеження, тим самим одне обмеження у вигляді рівності замінюють двома у вигляді нерівностей.

Даний підхід не є єдиним. Існує багато інваріантних підходів, але всі вони повинні давати швидкий пошук оптимального рішення задач для прийняття рішень в екстремальних умовах для забезпечення безаварійної та економічної роботи магістральних газопроводів

Задача побудови моделі газотранспортної системи пов'язана із задачею керування по моделі. Вибір критерію оптимізації визначається можливістю отримання оперативної інформації.

Оптимізація режимів роботи по критерію мінімальних енерговитрат на транспорт газу зводиться до побудови граничної області по енерговитратах для компресорної станції.

Розглянемо критерій мінімуму сумарних експлуатаційних витрат на транспорт газу. Необхідно зазначити, що експлуатаційні витрати на транспорт газу можуть бути зображені у вигляді суми:

$$E = E_0 + E_p, \quad (1)$$

де E_0 – експлуатаційні витрати на транспорт газу, які не залежать від режиму роботи газопроводу. Сюди необхідно віднести зарплату із відрахуваннями, амортизаційні відрахування, затрати на утримання будинків і споруд; E_p – витрати на транспорт газу, які залежать від режиму роботи газотранспортної системи:

$$E_p = E_{nv} + E_m, \quad (2)$$

де E_{nv} – витрати на паливний газ; E_m – витрати на матеріали.

Витрати на паливний газ залежать від витрат паливного газу і можуть бути визначені за формулою:

$$E_{nv} = q_{nv} \cdot C_{n,i}, \quad (3)$$

де q_{nv} – витрати паливного газу як функція параметрів перекачування; $C_{n,i}$ – вартість паливного газу на i -й компресорній станції. Необхідно зазначити, що величина $C_{n,i}$ залежить від порядкового номера компресорної станції, із його збільшенням зростає.

Витрати паливного газу пропорційні фактичній потужності, затраченій на перекачування газу:

$$q_{nv} = K \cdot N, \quad (4)$$

де K – коефіцієнт пропорційності (витрати паливного газу на одиницю потужності). Величина коефіцієнта K вважається відомою для даного типу газоперекачувальних агрегатів, встановлених на компресорній станції.

Сумарна потужність компресорної станції може бути визначена з умов політропного стиску газу:

$$N = \frac{n}{(n-1) \cdot \eta} \cdot Q_B \cdot P_B \cdot \left(e^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) = 11.5 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot Q \cdot T_B \cdot \left[\left(\frac{P_H}{P_B} \right) - 1 \right] \cdot 10^{-3}, \quad (5)$$

де $n = \frac{1}{\left((1 - \ln(\varepsilon)) / \ln(T_{II} / T_R) \right)}$ – показник політрони стиску; T_{II} , T_R – темпе-

ратура на виході і вході компресорної станції (дані беруться із диспетчерської інформації); ε – ступінь підвищення тиску на компресорній станції; Q – витрата газу при умовах всмоктування компресорної станції.

Таким чином, знаючи параметри режиму перекачування, можна визначити витрату паливного газу при цьому режимі і далі витрати на паливний газ.

Витрати на матеріали для транспортування газу також є функцією параметрів режиму роботи газопроводу. Однак отримати цю залежність в аналітичній формі неможливо. Тому для її побудови був застосований регресивний метод, який ґрунтується на кореляції статистичних даних по витратах на матеріали і показниках режиму роботи газопроводу “Братерство”.

При визначенні критерію оптимального режиму величина експлуатаційних витрат, яка не залежить від параметрів режиму перекачки, не є оцінкою раціональності режиму, оскільки оцінка якості режиму проводиться по різниці експлуатаційних витрат на i -му та $i+1$ -му режимах.

Отже, розрахункова схема визначення критерію оптимальності і вибору оптимального режиму по одному критерію буде наступною. Для всіх режимів із області допустимих режимів роботи газотранспортної системи вибираються параметри роботи кожної з працюючих компресорних станцій (тиск і температура на вході і виході, продуктивність, ступінь підвищення тиску, потужність). Передбачається, що на кожному з заданих режимів система буде працювати однакові проміжки часу. Визначається кількість мотогодин для кожного газоперекачувального агрегату на кожній компресорній станції і розраховується повна сумарна робота N . Для кожного із режимів розраховуються витрати на паливний газ і матеріали. Оптимальний режим вибирається за мінімумом експлуатаційних витрат.

Недоліком вказаного підходу є його статистичний характер, адже ряд показників, які суттєво впливають на режим і залежать від нього, беруться усередненими на основі результатів статистики. До таких параметрів слід, в першу чергу, віднести ККД системи. В явному вигляді величина ККД використовується для визначення потужності КС за формулою (5), яка в принципі відображає потужність виключно нагнітача. Величини ККД газотурбінної установки та лінійної ділянки, які суттєво залежать від параметрів режиму, тут не враховуються. Очевидно, що усереднено вони враховуються коефіцієнтом K у (4) при визначенні витрати паливного газу, але впливом залежності цього коефіцієнта від режиму знехтувано.

З іншого боку коефіцієнт корисної дії газотранспортної системи може бути знайдений за параметрами роботи з наступної залежності

$$\eta = \frac{Q_{cm}}{q_n} \cdot \frac{P_{cm}}{P_{cp}} \cdot \frac{T_{cp}}{T_{cm}} \cdot z_{cp} \cdot \frac{(P_n - P_k)}{Q_p^H} \quad (6)$$

Залежність (6) містить наступні параметри режиму роботи системи транспорту газу: початковий P_n , кінцевий P_k та середній P_{cp} тиски, середню температуру T_{cp} та продуктивність при стандартних умовах Q_{cm} . Окрім того, у формулу входить витрата паливного газу по КС q_n , та його енергетична характеристика Q_p^H . Отже, при побудові регресійної залежності функції мети вираз ККД може бути включений як один із параметрів, що дозволить знайти екстремум задачі з урахуванням ефективності енергозатрат на транспортування газу.

За даними диспетчерської служби і з переліку цілей оптимізації видно, що для задач оптимального керування можна також використовувати критерій максимізації газопостачання.

Далі в якості вихідного моделюючого параметру використовується значення коефіцієнта корисної дії газотранспортної системи [58]. Вибір цього критерію оптимізації розглядається для ГТС, що складається з однієї КС і прилеглої лінійної ділянки. Для систем з більшою кількістю елементів принцип оптимізації за критерієм максимуму ККД залишається аналогічним.

Нехай ККД системи визначається залежністю (6). Використовуючи основне рівняння газопроводів

$$Q_{cm} = Cd^{2.5} \sqrt{\frac{P_n^2 - P_k^2}{\lambda \Delta z_{cp} T_{cp} L}}, \quad (7)$$

рівняння середньої температури і середнього тиску

$$T_{cp} = T_0 + \frac{T_n - T_0}{aL} (1 - e^{-al}), \quad P_{cp} = \frac{2}{3} \left(P_n + \frac{P_k^2}{P_n + P_k} \right), \quad (8)$$

емпіричну формулу для коефіцієнта стисливості газу

$$z_{cp} = 1 - 5,5 \frac{P_{cp} \Delta^{1.3}}{T_{cp}^{3.3}}, \quad (9)$$

отримаємо залежність, яка виражає ККД системи через параметри режиму роботи ділянки газопроводу у вигляді

$$\eta = \frac{Cd^{2.5} \sqrt{\frac{P_n^2 - P_k^2}{\lambda \Delta z_{cp} T_{cp} L}}}{q_n} \cdot \frac{P_{cm}}{T_{cm}} \cdot \frac{T_0 + \frac{T_n - T_0}{aL} (1 - e^{-al})}{\frac{2}{3} \left(P_n + \frac{P_k^2}{P_n + P_k} \right)} \cdot \left(1 - 5,5 \frac{P_{cp} \Delta^{1.3}}{T_{cp}^{3.3}} \right) \cdot \frac{(P_n - P_k)}{Q_p^H}, \quad (10)$$

де $a = \frac{\pi k_l D}{Q_{cm} \Delta C_p}$, C – коефіцієнт пропорційності; T_0 – температура ґрунту; k_l – повний коефіцієнт теплопередачі від газу до ґрунту; q_n – витрата паливного газу, яка пропорційна наявній потужності.

Використавши (4) і (5) отримаємо

$$q_n = K \left(\frac{n}{n-1} Q_{cm} T_B \left(\left(\frac{P_n}{P_B} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) \right). \tag{11}$$

З урахуванням (11) вираз (10) матиме вигляд

$$\eta = \frac{Cd^{2.5} \sqrt{\frac{P_n^2 - P_k^2}{\lambda \Delta z_{cp} T_{cp} L}} \cdot \frac{P_{cm}}{T_{cm}} \cdot \frac{T_0 + \frac{T_n - T_0}{aL} (1 - e^{-aL})}{2} \times \left(\frac{n}{n-1} Q_{cm} T_B \left(\left(\frac{P_n}{P_B} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) \right) \cdot \frac{2}{3} \left(P_n + \frac{P^2_k}{P_n + P_k} \right)}{\times (1 - 5,5 \frac{P_{cp} \Delta^{1.5}}{T_{cp}^{3.3}}) \cdot \frac{(P_n - P_k)}{Q_p^H}} \tag{12}$$

Одержаний вираз (12) зв'язує ККД системи з параметрами режиму роботи. Для визначення оптимальних параметрів режиму необхідно відшукати глобальний екстремум (максимум) виразу з системи алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial \eta}{\partial P_n} = 0; \frac{\partial \eta}{\partial P_k} = 0; \frac{\partial \eta}{\partial T_n} = 0; \frac{\partial \eta}{\partial P_B} = 0; \frac{\partial \eta}{\partial T_B} = 0. \tag{13}$$

Однак, при реалізації задачі виникають труднощі обчислювального характеру. По-перше, система (13) є нелінійною, що утруднює аналітичні методи розв'язку. По-друге, ряд констант в (12) включають неявні залежності від параметрів режиму (наприклад, величини q_n і a залежать від пропускної здатності Q_{cm}). Тому більш раціональним є метод пошуку глобального максимуму шляхом випадкового адаптивного пошуку за наступним алгоритмом.

1. В початковому наближенні задаються параметри режиму початковий $P_n^{(s=0)} = P_{n\min}$ і кінцевий $P_k^{(s=0)} = P_{k\max}$ тиски, початкова температура $T_n^{(s=0)}$, а також відомими вважаються геометричні параметри газопроводу і фізичні властивості газу.

2. Розраховуються за (8) середні значення параметрів режиму і за (9) коефіцієнт стисливості газу.

3. Розраховується за (7) пропускна здатність газопроводу і за (11) витрата паливного газу; уточнюється параметр a , середня температура і коефіцієнт стисливості при середніх параметрах.

4. Уточнюється пропускна здатність і витрата паливного газу. Після досягнення заданої точності знаходять ККД з (6). Таким чином, для заданих параметрів режиму (тисків і температури) отримано значення пропускної здатності, витрати паливного газу і значення ККД. Розраховані значення вважаються базовими, всі подальші значення визначаються по відношенню до базових.

5. Надається певний приріст початковому значенню тиску $P_n^{(s+1)} = P_n^{(s)} + \Delta P$ (s – номер ітерації) і контролюється обмеження $P_n^{(s+1)} \leq P_{n\max}$; далі розрахунок повторюється за заданою схемою, в результаті отримують нові значення пропускної здатності, витрати паливного газу і значення ККД, які нормуються по відношенню до базових.

6. Якщо отримані нормовані безрозмірні значення параметрів ($s + 1$ ітерація) збільшуються порівняно з попередніми (s ітерація), то надається новий приріст значенню початкового тиску і виконуються розрахунки нової ітерації. Якщо на певній ітерації спостерігається зменшення всіх розрахункових параметрів (пропускної здатності, витрати паливного газу і значення ККД) або значення довільного параметра виходять за межі області допустимих режимів, то переходять до зміни наступного параметра (кінцевого тиску) і всі розрахунки повторюють за вказаним алгоритмом.

7. В результаті застосування методу адаптивного випадкового пошуку отримують залежності розрахункових параметрів (пропускної здатності, витрати паливного газу і значення ККД) від незалежних характеристик режиму (початкового і кінцевого тисків, початкової температури). Аналізуючи результати розрахунків визначають глобальний максимум, який відповідає оптимальному режиму.

Як приклад, проведено розрахунки з оптимізації режиму роботи гіпотетичного газопроводу, по якому перекачується метан і який складається з однієї лінійної ділянки діаметром 1420x20 мм і довжиною 127 км, та компресорної станції, обладнаної газоперекачувальними агрегатами ГТН-25І з нагнітачем 650-24-11. Розрахунки проводилися за приведеним алгоритмом, за результатами побудовано графічні залежності, які подано на рис. 1.

З рис. 1 видно, що максимальне значення функції мети (величини ККД системи) досягається при практично однакових значеннях тисків (в порівнянні з базовими значеннями). Це свідчить про наявність глобального екстремуму задачі. Зауважимо, що оптимум початкової температури в задачі не розглядався, оскільки максимум функції мети лежить за межами області допустимих режимів.

Шляхом виключення робочих тисків з результатів рішення задачі на основі основного рівняння газопроводів приходимо до залежності функції мети від пропускної здатності (продуктивності) системи (рис. 2). На графік накладено залежність енерговитрат на транспорт газу від

обсягу перекачування, яка також має максимум. Однак, оптимальне значення продуктивності газопроводу за критерієм максимуму ККД зміщене в порівнянні з аналогом за критерієм максимуму енергорвитрат на транспорт газу на величину 12,7% в більшу сторону. Це свідчить про необхідність врахування ККД в якості критерію оптимальності при вирішенні задачі оптимізації режимів.

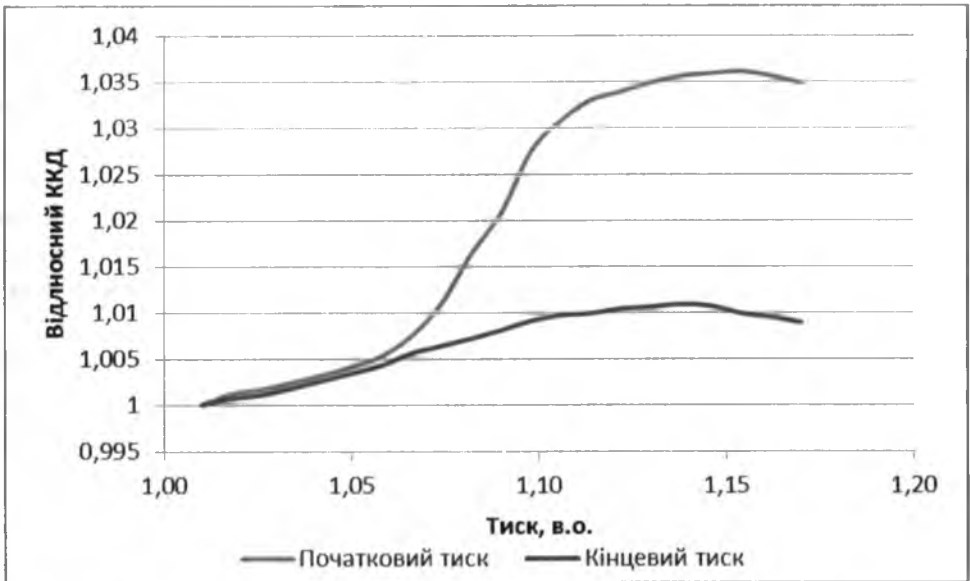


Рис. 1. Залежність ККД від тисків на початку і в кінці ділянки

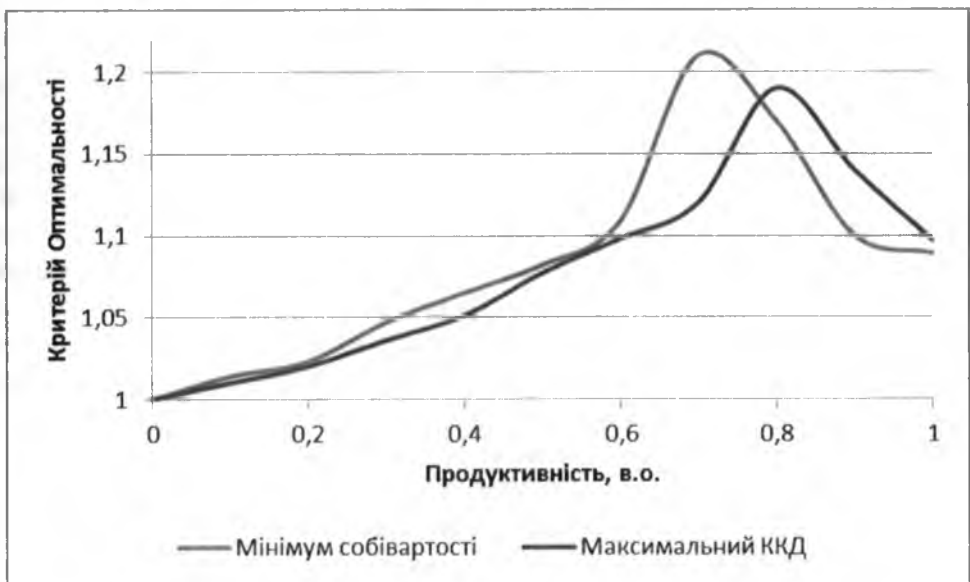


Рис. 2. Результати оптимізації режимів роботи газопроводу

На сьогодні роль наріжного каменю управлінської політики галузевого рівня відіграють показники витрат паливно-енергетичних ресурсів на компресорних станціях магістральних газопроводів. Традиційно обсяги витрат паливно-енергетичних ресурсів визначались за рівнем технологічно оптимальної (максимальної) пропускної спроможності магістральних газопроводів. В умовах ринкової економіки витрати енергетичних ресурсів і обсяги транспортованого газу підпорядковані і визначаються за критерієм оптимальності економічного змісту, а саме – надходжень коштів за виконувану газотранспортну роботу. Останні визначаються за приписами ринкової економіки, або ситуаційно, і це диктує концептуально нову схему розв'язку проблеми нормування витрат паливно-енергетичних ресурсів на трубопровідний транспорт газу. Провідна ідея ринкової концепції витрат паливного газу зводиться до побудови якісно нової інтегрованої системи критеріальних показників ефективності витрат технологічного і економічного походження, в якій домінують економічні фактори.

Традиційно газотранспортна робота магістральних газопроводів оцінюється добутком кількості транспортованого газу Q на відстань L . Вимірник газотранспортної роботи $Q \cdot L$ ($\text{м}^3 \cdot \text{км}$) за певний період є аналогічним вимірнику звичайних вантажоперевезень ($\text{кг} \cdot \text{км}$). Проте, фізична природа звичайних вантажоперевезень і трубопровідного транспортування газу різна. Відмінність полягає в тому, що вантаж, зазвичай, є пасивним переміщуваним предметом, а газ є носієм енергії тиску, яка уможливорює сам процес транспортування газу.

Енергія тиску змінює фізичний стан транспортованого газу (густину, температуру і тиск) по довжині газопроводу. Через це енергетичні витрати на транспортування газу залежать від кількості транспортованого газу неоднозначно. Ця неоднозначність не дозволяє використати успадковану традиційну товаротранспортну роботу $Q \cdot L$ в якості універсального вимірника “продукції” газотранспортного виробництва. Товаротранспортна робота $Q \cdot L$ може використовуватись тільки у випадках співставних режимно-технологічних варіантів транспортування газу. Можна відзначити і таке: для фіксованої довжини газопроводу і фіксованих шляхових відборах і надходженнях газу вимірником продукції може слугувати обсяг транспортованого газу за довільно визначений період, тобто продуктивність газопроводу. Продуктивність газопроводу є інтегральним показником. Отже, при з'ясуванні причин відхилення експлуатаційних режимів газопроводів від проектних чи планових, або технічно можливих необхідно використовувати поняття пропускної здатності газопроводу, яке визначас максимальний обсяг транспортованого газу при максимальному використанні потужностей компресорних станцій і фактичних розрахункових параметрах транспортування газу.

Для лінійної ділянки газопроводу еквівалентна товаротransпортна робота розраховується за формулою

$$A = c(P_{21} - P_{22})Q, \quad (10)$$

де c – константа, яка розраховується за параметрами лінійної ділянки; P_1, P_2 – тиски на початку і в кінці ділянки; Q – продуктивність газопроводу.

Як показано в [44], для визначення ККД газопроводу справедлива залежність

$$\eta = \frac{Q_{cm}}{q_{nc}} \cdot \frac{P_{cm}}{P_{cp}} \cdot \frac{T_{cp}}{T_{cm}} \cdot z_{cp} \cdot \frac{(P_1 - P_2)}{Q_p^H}. \quad (11)$$

Сумісний розв'язок (10) і (11) дає формулу для товаротransпортної роботи у вигляді

$$A = 2c \frac{\eta}{z_{cp}} q_{nc} P_{cp}^2 \frac{T_{cm}}{q_{nc}} \cdot \frac{Q_p^H}{P_{cm}} \cdot \frac{T_{cm}}{T_{cp}}. \quad (12)$$

Для компресорної станції в межах концепції еквівалентної товаротransпортної роботи політронна робота стискування газу визначається за формулою

$$N_{ПНА} = \frac{m}{(m-1) \cdot \eta_{пол}} \cdot P_{ax} \cdot Q_{ax} \left[\varepsilon^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right],$$

де ε – ступінь стискування газу, $z_{Н}$ і $T_{Н}$ – коефіцієнт стискуваності і температура газу на вході компресорної станції, Q – продуктивність КС.

Оскільки непроекtnі режими експлуатації магістральних газопроводів в ринкових умовах не є винятковими і їх ефективність має оцінюватись за економічними критеріями прибутковості, то проблема формування ринково-орієнтованого вимірника продукції газотransпортного виробництва є надзвичайно загостреною. Ринково-орієнтований підхід до її розв'язку пролягає через удосконалення і унормування методичної бази розрахунків непроекtnих режимів роботи магістральних газопроводів. Непроекtnо орієнтовані методи розрахунків виконуваної газотransпортної роботи (виробничої функції) в системах трубопровідного транспорту газу мають спиратися на адекватні моделі законів газової термодинаміки щодо основних технологічних процесів, які відбуваються в газопроводі: розширення газу в лінійних ділянках і стискування газу на компресорних станціях з врахуванням ККД.

Однією з гостро актуальних проблем транспортування газу є визначення оптимальної продуктивності магістрального газопроводу.

Доринкова порівняльна оцінка експлуатаційних варіантів транспортування газу зводилась до визначення найменшого значення питомих приведених витрат для різних обсягів транспортованого газу.

Щоб повернути механізм підходу до формування методичної бази підвищення ефективності магістральних газопроводів у ринкову пло-

щину, належить керуватися методичними стандартами ринкової економіки, як ідеологічним інструментом аналізу та оцінювання економічної ефективності використання основних фондів та керовано змінних паливно-енергетичних ресурсів.

Економічним змістом проблеми оцінювання і підвищення ефективності експлуатаційних режимів роботи магістральних газопроводів є визначення залежності витрат енергетичних ресурсів N від кількості транспортованого газу Q та економічної ефективності цих витрат за ринковим критерієм прибутковості [1]

$$\Pi_p = f(O\Phi, N),$$

де $O\Phi$ – витрати, що є незалежними від завантаження газотранспортної системи (витрати на обслуговування основних виробничих фондів $O\Phi$), а N – керовано змінні в короткостроковому періоді витрати (енергетичні та ін.), що залежать від обсягів транспортованого газу, тобто $N = f(Q)$. Технологічному змісту проблеми відповідає її математичне формулювання, сутність якого можна умовно поділити на дві частини:

1) – побудова цільової, критеріально екстремальної функції $N = f(Q)$;

2) – знаходження екстремуму функції $N = f(Q)$ при обмеженнях, які накладає формула прибутковості $\Pi_p = f(O\Phi, N)$.

За результатами розрахунків нижче наведена графічна модель залежності $\Delta P = f(Q)$ для лінійної ділянки Борова – Першотравнева газопроводу «Союз». Аналіз одержаних результатів дозволяє стверджувати наступне: залежність витрат в лінійних ділянках енергії тиску газу ΔP від обсягів транспортованого газу Q є нелінійною. Специфічність нелінійної характеристики $\Delta P = f(Q)$ проявляється в тому, що вона є вогнутою донизу. Саме ця її особливість дає можливість віднайти шляхом порівняння результатів розрахунків надходжень за кількістю транспортованого газу Q з результатами розрахунків енергетичних витрат $\Delta P = f(Q)$ оптимальний за показником енергоефективності режим роботи лінійної ділянки газопроводу. За оптимального режиму роботи лінійної ділянки надходження будуть більші, ніж витрати енергоресурсів ΔP .

Саме ця її особливість дає можливість віднайти шляхом порівняння результатів розрахунків надходжень за кількістю транспортованого газу Q з результатами розрахунків енергетичних витрат $\Delta P = f(Q)$ оптимальний за показником енергоефективності режим роботи лінійної ділянки газопроводу. За оптимального режиму роботи лінійної ділянки надходження будуть більші, ніж витрати енергоресурсів ΔP , тобто

$$H_{\text{до}} = \eta \times Q > \Delta P = f(Q).$$

Концепція оптимізації режимів роботи лінійних ділянок відіграє ключову роль у формуванні енергоефективних технологій трубопровідного транспортування газу. Проте слід мати на увазі, що для магістральних газопроводів високого тиску витрати ΔP залежать не тільки від завантаження газопроводу, а й від безпосередньо керованих режимів роботи (робочого тиску) компресорних станцій. Енерговитрати на лінійних ділянках взаємопов'язані з енерговитратами на КС і є важливим, проте похідним складником показника ефективності магістральних газопроводів.

Технологічні розрахунки трубопровідного транспорту газу ґрунтуються на використанні приведених термогазодинамічних характеристик відцентрових нагнітачів. В той же час стандартне відтворення цих характеристик не задовольняє потреби в розрахунках непроєктних режимів роботи магістральних газопроводів, які супроводжують зміну продуктивності газопроводу в діапазоні $0 - Q_{\max}$. В зв'язку з цим у практику розрахунків режимів роботи газопроводів введені моделі газоперекачувальних агрегатів з урахуванням їх ККД за результатами діагностування, які дозволяють визначати технологічні параметри роботи КС в експлуатаційних умовах.

Графічно ілюстрована концепція оптимізації режимів роботи магістральних газопроводів є стрижнем ринкового підходу до формування нової ринково орієнтованої методології аналізу, оцінювання та підвищення ефективності трубопровідного транспорту газу.

Виробничі потужності газотранспортних структур залишаються фіксованими в межах короткострокового періоду, але обсяг транспортованого газу може бути змінений шляхом зміни режимів роботи системи газопроводів, а отже і витрат енергетичних ресурсів на КС газопроводів. Центральним аспектом цієї проблеми є питання: як буде змінюватись кількість продукції, що виробляється (виконуваної газотранспортної роботи) при збільшенні витрат оперативно змінюваних потужностей КС, але фіксованих, незмінюваних у короткостроковому періоді інших ресурсах.

Відповідь на це питання дає залежність потужності КС від параметрів роботи і, зокрема, ККД ГПА. Ця залежність є такою, що має нелінійно змінювану пропорцію, яка з деякого моменту (сідлової точки) зменшується. Отже, віддача від збільшення витрат змінних ресурсів (енергетичних ресурсів КС) є зменшуваною. Ця закономірність в економіці відома як "закон зменшуваної віддачі" [4].

Логічне пояснення цьому закону стосовно магістральних газопроводів випливає з сутності фізики газотермодинамічних процесів транспортування газу, а саме: витрати енергії на подолання опору тертя зростають нелінійно залежно від потужності газового потоку.

З метою дослідження поведінки співвідношення між витратами ресурсів і віддачею як характеристики середньої віддачі від збільшення витрат енергетичних ресурсів проведено розрахунки середньої віддачі СВ (виробничої продуктивності) газопроводу "Союз".

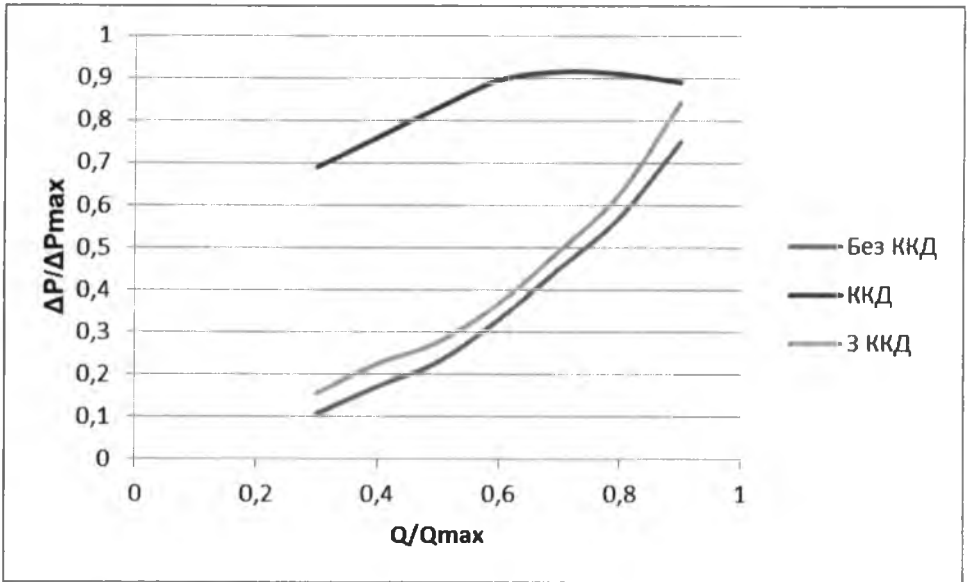


Рис. 3. Графічна модель залежності витрат енергії тиску газу $\Delta P = P_{\text{поч}} - P_{\text{к}}$ від продуктивності Q лінійної ділянки Борова – Першотравнева

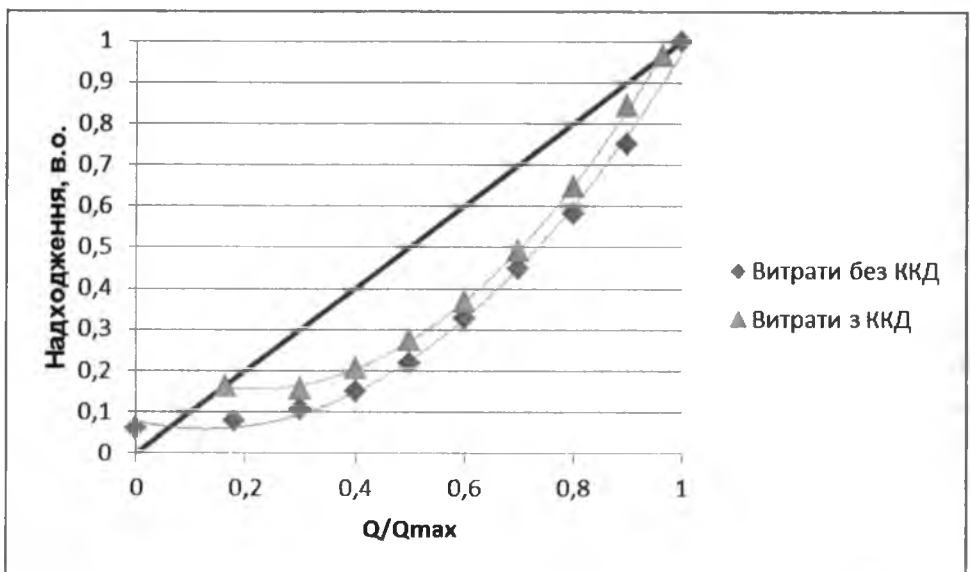
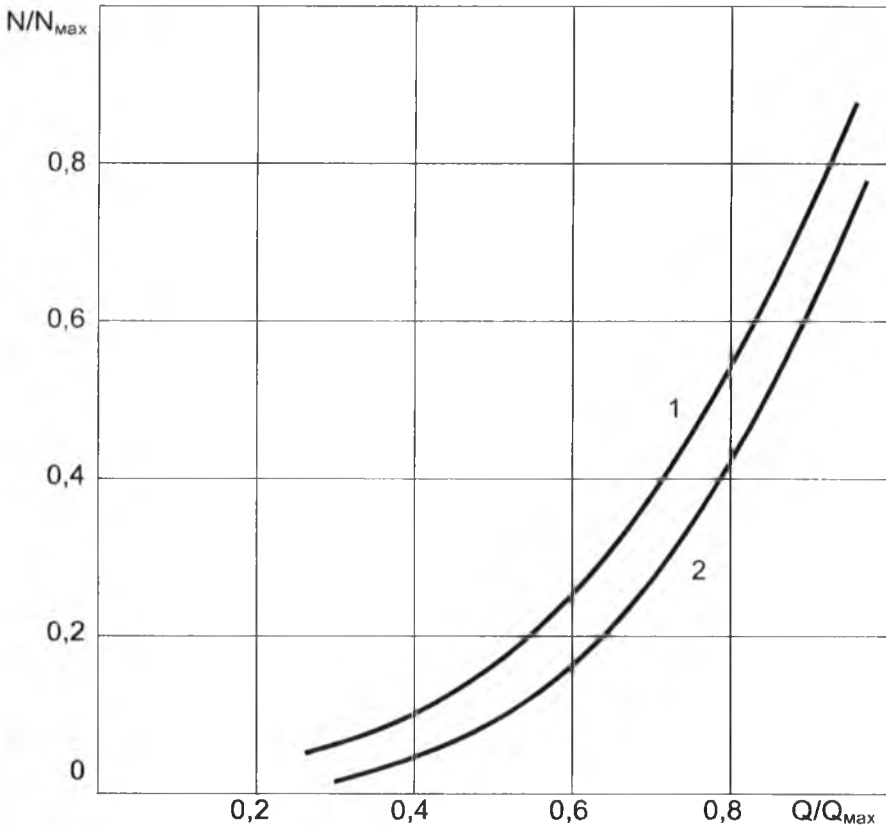


Рис. 4. Оптимальний режим для лінійної ділянки Борова – Першотравнева за показником $(H_{\text{оп}} - \Delta P) \rightarrow \max$

Другу характеристику ефективності функціонування газопроводів становить показник граничної віддачі від використання керованих енергетичних ресурсів. Цей показник є похідним від показника середньої віддачі СВ.



1. ККД=0,25; 2. ККД=0,30.

Рис. 5. Порівняльні графіки виробничих функцій Машівка КС при різних значеннях ККД

Показник граничної віддачі ГВ вимірює темп зміни загального обсягу виробництва (кількості транспортованого газу $Q_{гр}$) і проходить ті ж три фази, через які проходить показник середньої віддачі СВ. Якщо обсяг транспортованого газу зростає зі збільшенням швидкості, то гранична віддача теж зростає. Потім, обсяг виробництва зростає, але зі зменшеною швидкістю; гранична віддача залишається позитивною (плюсовою), але знижується. Коли обсяг транспортованого газу досягає максимальної точки, то гранична віддача дорівнює нулю.

Динаміка граничної віддачі є такою ж дугоподібною, як і залежність середніх витрат від кількості транспортованого газу. Але має місце суттєва відмінність: там, де гранична віддача перевищує середню

віддачу, остання зростає; а там, де гранична віддача менше середньої, середня віддача знижується. Звідси випливає, що крива граничної віддачі ГВ перетинає криву середньої віддачі якраз в тій точці, в якій остання досягає свого максимуму.

Показник граничної віддачі витрат енергоресурсів є центральним. Його побудова спирається на ідеологію формування виробничої функції в координатах: питомі витрати енергетичних ресурсів – обсяг транспортованого газу. Ця ідеологія постулює, що інтересам галузі на перспективу відповідає не менше за обсягом, а найбільш ефективно використання паливно-енергетичних ресурсів за показником граничної віддачі ГВ.

Щоб визначити загальні витрати на транспортування газу та витрати з розрахунку на одиницю транспортованого газу, необхідно об'єднати дані про виробничу функцію, яка ілюструє закон зменшеної віддачі, з інформацією на ціни використовуваних ресурсів [4].

Концепція граничних витрат має стратегічне значення, оскільки вона дозволяє визначити ті витрати, величину яких газотранспортна структура може контролювати безпосередньо. Показники середніх витрат такої можливості не дають.

Завантаження газопроводу, при якому енергетичні витрати починають зростати стрімкіше є оптимальним Q_{opt} . За оптимального режиму роботи газопроводу загальні витрати основних фондів OF та енергетичних ресурсів N_{kc} на транспортування газу є меншими, ніж при подальшому завантаженні газопроводу.

Отже, якщо розраховувати собівартість газотранспортного виробництва за обсягом транспортованого газу Q_{max} , то збільшення обсягів транспортування газу $Q_{opt} < Q_{max}$, тобто більш повне використання задіяних у виробництві ресурсів є збитковим. Цей парадокс командної економіки у ринковому середовищі спрацьовує як руйнівний фактор і мотивує необхідність і невідкладність глибокого аналізу сутності ринково-орієнтованого методу аналізу і підвищення ефективності трубопровідного транспорту газу.

Ідеологія ринково орієнтованого аналізу, оцінювання та використання методологічних засобів підвищення ефективності трубопровідного транспорту газу при повному завантаженні магістральних газопроводів пропонується такою [2]:

1. Оцінюємо надходження за командною і ринковою схемою. За командною схемою надходження при Q_{max} становлять

$$HQ = C_Q \times Q_{max} = OF + N_{kc \max}$$

2. Вартість транспортування одиниці транспортованого газу (ціна)

$$C_Q = \frac{OF + N_{kc \max}}{Q_{max}}$$

3. За ринковою схемою надходження визначаються як добуток ціни одиниці виконуваної газотранспортної роботи на її величину

$$HQ = P_Q \times U_{\text{тпр}},$$

де P_Q – ціна одиниці виконуваної газотранспортної роботи $U_{\text{тпр}}$.

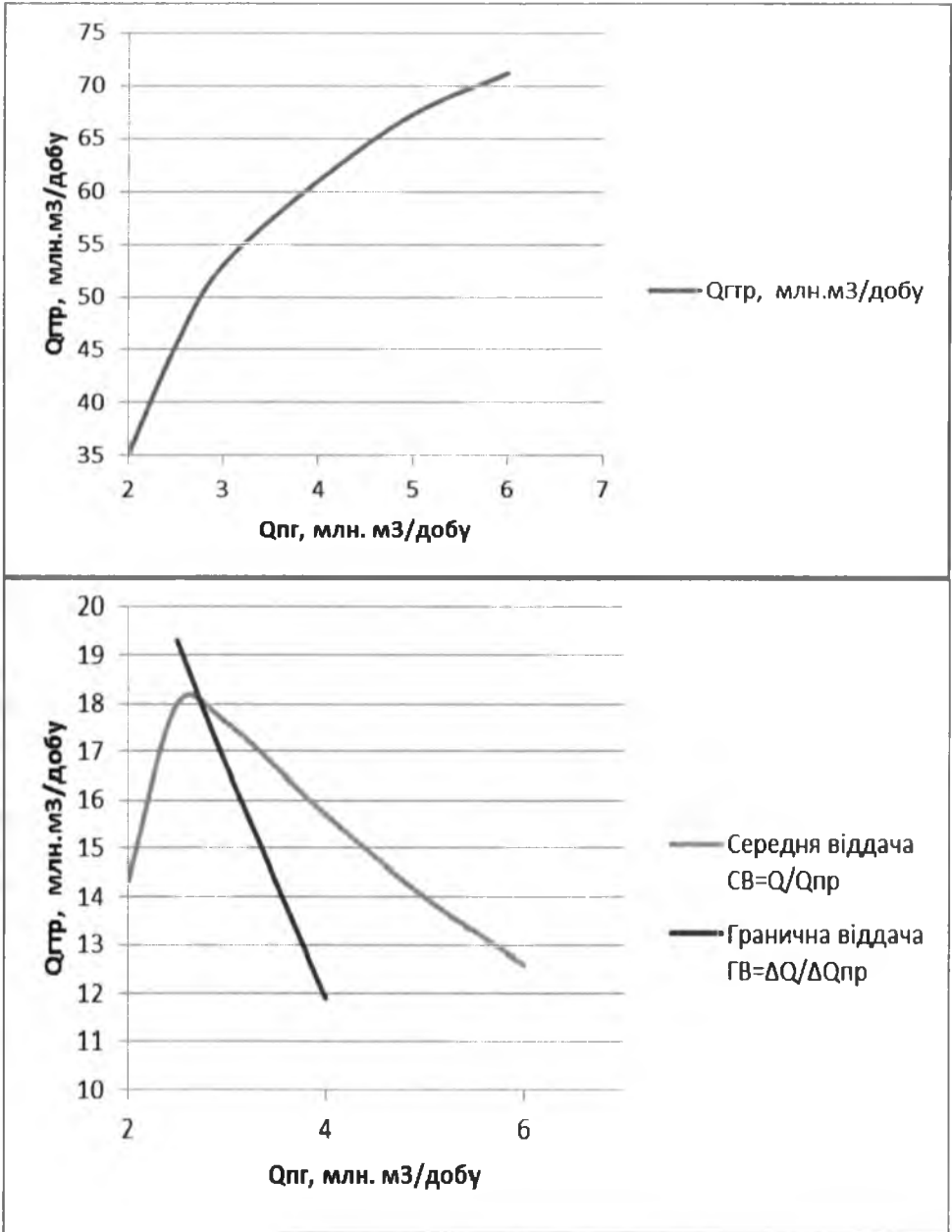


Рис. 6. Залежність між загальним обсягом транспортованого газу $Q_{\text{тпр}}$, витратами паливного газу $Q_{\text{пг}}$ та середньою СВ і граничною віддачею ГВ магістрального газопроводу “Союз”

4. У точці, де загальні витрати мінімальні, покладасмо

$$C_Q \times Q_{OPT} = C_{стр} \times U_{OPT} = \left(\frac{O\Phi + N_{кв.макс}}{Q_{макс}} \right) \times Q_{OPT}.$$

5. Звідси вартість одиниці виконуваної газотранспортної роботи $U_{стр}$ становить

$$C_{стр} = \left(\frac{O\Phi + N_{кв.макс}}{Q_{макс}} \right) \times \frac{Q_{OPT}}{U_{OPT}}.$$

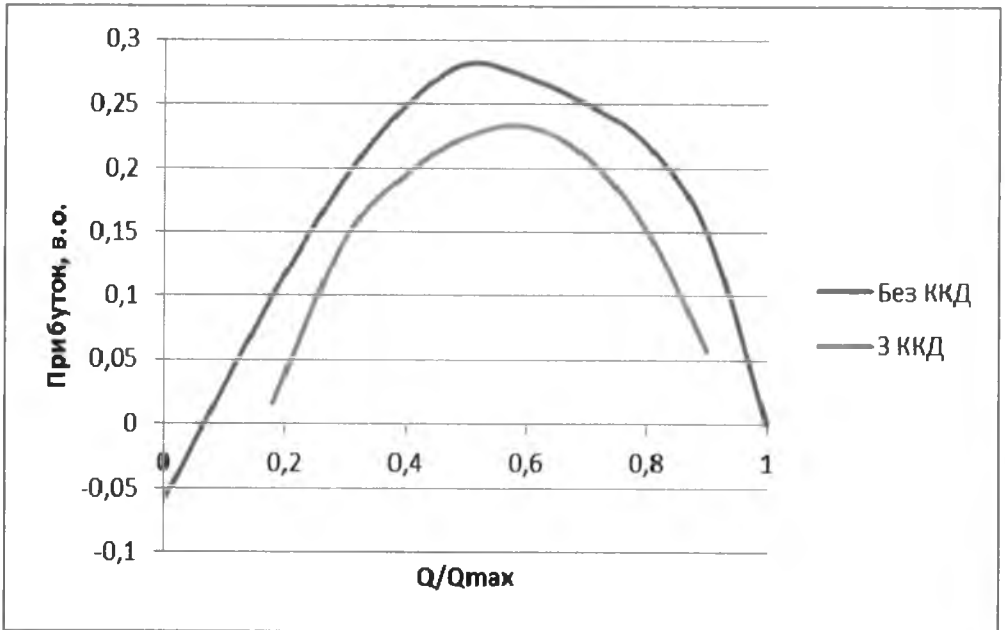


Рис. 7. Ефективність трубопровідного транспорту газу для газопроводу Союз

6. Отже, в будь-якій точці оптимізаційної області надходження такі: за ринковою схемою

$$H_{стр} = C_{стр} \times U_{стр} = \left(\frac{O\Phi + N_{кв.макс}}{Q_{макс}} \right) \times \frac{Q_{OPT}}{U_{OPT}} \times U_{стр},$$

$$H_Q = C_Q \times Q = \frac{O\Phi + N_{кв.макс}}{Q_{макс}} \times Q.$$

а за командною (витратною) схемою

$$H_Q = C_Q \times Q = \frac{O\Phi + N_{кв.макс}}{Q_{макс}} \times Q$$

7. Різниця між надходженнями $H_{стр}$ і H_Q за будь-якого завантаження газопроводу становить

$$H_{\text{змп}} - H_Q = \frac{N_{\text{кк. макс}}}{Q_{\text{макс}}} \times \left[\left(\frac{Q_{\text{макс}}}{N_{\text{кк. опт}}} \right) \times U_{\text{змп}} \right] - Q,$$

$$H_{\text{змп}} - H_Q = \frac{O\Phi + N_{\text{кк. макс}}}{Q_{\text{макс}}} \times \left[\left(\frac{Q_{\text{опт}}}{N_{\text{кк. опт}}} \right) \times U_{\text{змп. макс}} \right] - Q_{\text{макс}}.$$

Ця різниця, отже і прибуток Π_p , визначений як різниця між повною виручкою і всіма витратами, при максимальному завантаженні газопроводу становить:

$$\Pi_p = H_{\text{змп}} - H_Q = (O\Phi + N_{\text{кк. макс}}) \times \left[\left(\frac{Q_{\text{опт}}}{Q_{\text{макс}}} \times \frac{N_{\text{кк. макс}}}{N_{\text{кк. опт}}} \right) - 1 \right].$$

8. Якщо витрати на обслуговування основних фондів $O\Phi$ надмірні і такі, що $Q_{\text{опт}} = Q_{\text{макс}}$ і, отже, $Q_{\text{кк. опт}} = Q_{\text{кк. макс}}$, то прибуток $\Pi_p = H_{\text{змп}} - H_Q$ буде нульовим, тобто, газотранспортне виробництво за ринковими орієнтирами буде економічно збитковим.

Запропонована методологія оптимізації технологічних процесів реалізована для прикладу оптимізації режимів трубопровідного транспорту газу, однак принцип може бути застосований для різних технологій, зокрема процесу обслуговування об'єктів газотранспортного комплексу.

Таким чином, уперше вдосконалено принцип оптимізації режимів роботи магістральних газопроводів шляхом побудови функції мети, яка містить в якості складової структури врахування величини ККД і закономірності впливу на його величину параметрів режиму роботи.

Показано, що врахування величини ККД системи транспорту газу може суттєво вплинути на величину параметрів оптимального режиму роботи системи і змінити величину оптимальної пропускної здатності в залежності від параметрів в кожному сторону

Створено концептуально нову наукову основу для оцінювання, прогнозування та підвищення ефективності трубопровідного транспортування газу з урахуванням закономірностей залежності ККД від параметрів режиму в умовах формування ринкових відносин.

Література

1. Будзуляк Б.В. Методология повышения эффективности эксплуатации системы трубопроводного транспорта газа на стадии развития и реконструкции / Б.В. Будзуляк. – Москва, НЕДРА, 2003. – 170 с.
2. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем / Н.П. Бусленко. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
3. Грудз Я.В. Энергосберегаемость газотранспортных систем / Я.В. Грудз. – Ивано-Франківськ: Лілея-НВ, 2012. – 208 с.

4. Грудз В.Я. Технічна діагностика трубопровідних систем / В.Я.Грудз, Я.В.Грудз, В.В.Костів та ін. – Івано-Франківськ: Лілея-НВ, 2012. – 512 с.
5. Грудз Я.В. Оптимізація режимів роботи газопроводу з урахуванням енерговитратності транспорту газу / Я.В. Грудз // Нафтогазова енергетика. – 2012 – №2. – С. 12-15.
6. Orynyak I.V. The spring splines procedure with prescribed accuracy for determination of the curvatures of the pipeline based on the 3-D measurements of its position / I.V.Orynyak, I.V.Lokhman // Rio Pipeline Conference & Exposition 2011, IBP1029_11.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2013 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором Тимківим Д.Ф.,
д.т.н., професором Говдяком Р.М. (м. Київ)*

PRINCIPLES OF OPTIMIZATION OF MODES WORKS OF GAS PIPELINE

Y. V. Grudz

Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;

76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15;

ph. +380 (3422) 4-21-57; e-mail: public@nung.edu.ua

Principles of optimization of office hours of main gas pipelines and difficult gas-transport systems are resulted with the use of various criteria of optimum. The method of optimization of office hours GTS is offered in the conditions of transition to the market relations.

Key words: great number of the modes, criteria of optimum, optimization.

УДК 622.691.4

ВПЛИВ РІЗНИЦІ В'ЯЗКОСТІ РІЗНОСОРТНИХ НАФТ НА ЇХ СУМІШОУТВОРЕННЯ ПІД ЧАС ПОСЛІДОВНОГО ПЕРЕКАЧУВАННЯ МАГІСТРАЛЬНИМИ ТРУБОПРОВОДАМИ

Й. В. Якимів

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-39, e-mail: tzngkaf@rambler.ru*

Проведено аналіз впливу різниці в'язкості нафт на об'єм суміші, що утворюється під час їх послідовного перекачування магістральними трубопроводами. Розрахунки виконано для реальної трубопровідної системи за різних комбінацій включення насосів на станціях для широкого діапазону зміни в'язкості нафт. Розроблено алгоритм визначення пропускної здатності магістральних нафтопроводів за різних значень в'язкості, які використані для розрахунку об'єму суміші. Доведено, що із збільшенням різниці в'язкості нафт об'єм суміші зростає. Інтенсивніше зростання об'єму суміші відбувається за менших значень в'язкості.

Ключові слова: в'язкість, продуктивність, втрати напору, нафтоперекачувальна станція, об'єм суміші.

До недавнього часу актуальним було дослідження послідовного перекачування різносортних нафтопродуктів одним і тим же трубопроводом. Недоліком способу послідовного перекачування є утворення суміші в зоні контакту рідин. Основними фізичними процесами, внаслідок яких відбувається сумішоутворення в зоні контакту рідин, є явища конвективної і турбулентної дифузії. Послідовне перекачування здійснюється тільки за турбулентного режиму. В цьому випадку суттєвіший вплив на сумішоутворення має турбулентна дифузія. Питання послідовного перекачування нафтопродуктів достатньо вивчені як за перекачування прямим контактуванням, так і з використанням різного роду роздільників [1,2,3,4]. Для розрахунку об'єму суміші користуються залежностями, отриманими на основі дифузійної теорії змішування, а також емпіричними формулами.

Послідовне перекачування різносортних нафтопродуктів в Україні тепер майже не відбувається, оскільки більшість нафтопродуктопроводів законсервовані або демонтовані. А послідовне перекачування різносортних нафт стає все більше актуальним через різні джерела її надходження в Україну.

Послідовне перекачування різносортних нафт має ту особливість, що за своїми властивостями нафти можуть суттєвіше відрізнятися, ніж різносортні нафтопродукти. Тому виникає проблема додаткового дослі-

дження сумішоутворення при послідовному перекачуванні різносортих нафт.

Метою роботи є аналіз існуючих методик розрахунку об'єму суміші і можливість їх використання для розрахунків процесів змішування різносортих нафт, що в багатьох випадках суттєво відрізняються за в'язкістю.

В основу змішування рідин за їх послідовного перекачування при турбулентному режимі покладений закон Фіка, згідно з яким швидкість дифузії дорівнює

$$V = -D_e \frac{dK}{dx}, \quad (1)$$

де V – швидкість дифузії; D_e – ефективний коефіцієнт змішування рідин; $\frac{dK}{dx}$ – градієнт концентрації.

Об'ємом суміші вважають об'єм нетоварного продукту в трубопроводі, що обмежується граничними концентраціями, які вибираються залежно від запасу якості нафт чи нафтопродуктів, до яких приймається суміш.

Об'єм суміші залежить від діаметра трубопроводу, його довжини, фактичних витрат за перекачування кожної із рідин, в'язкості рідин, що перебувають в контакті під час перекачування та граничних концентрацій, за яких виділяється суміш.

Об'єм суміші згідно з дифузійною теорією змішування розраховується за формулою [3, 4]

$$V_{см} = \frac{V_{мп}}{Pe^{0,5}} 2(z_1 - z_2), \quad (2)$$

де $V_{мп}$ – об'єм порожнини трубопроводу; z_1, z_2 – аргументи інтеграла імовірності, що залежать від граничних концентрацій, за яких виділяється суміш; Pe – дифузійний параметр Пекле.

Об'єм порожнини трубопроводу дорівнює

$$V_{мп} = \frac{\pi D^2}{4} L, \quad (3)$$

де D – внутрішній діаметр трубопроводу; L – загальна довжина трубопроводу.

Для визначення параметра Пекле використовується вираз

$$Pe = \frac{WL}{D_e}, \quad (4)$$

де W – середня швидкість руху середини зони суміші,

$$W = \frac{W_1 + W_2}{2}, \quad (5)$$

W_1, W_2 – середні швидкості руху кожної із рідин, що перебувають в контакті.

Формулу для розрахунку ефективного коефіцієнта змішування вибирають залежно від зони гідравлічного тертя турбулентного режиму. Якщо рух відбувається в зоні гідравлічно гладких труб, то ефективний коефіцієнт змішування може визначатись за формула Асатуряна

$$D_e = 17,4\nu \text{Re}^{2/3}, \quad (6)$$

де ν – кінематична в'язкість середини зони суміші, яка розраховується за формулою Кадмера

$$\nu = \frac{3\nu_1 + \nu_2}{4}, \quad (7)$$

ν_1, ν_2 – кінематичні в'язкості нафт що перебувають в контакті, $\nu_1 < \nu_2$;
 Re – число Рейнольдса, з яким рухається середина зони суміші,

$$\text{Re} = \frac{WD}{\nu}, \quad (8)$$

Ефективний коефіцієнт змішування за турбулентного режиму руху в будь-якій зоні часто розраховують за формулою Нечваля-Яблонського

$$D_e = 28,7\nu(\text{Re}\sqrt{\lambda})^{0,755}, \quad (9)$$

де λ – коефіцієнт гідравлічного опору, що розраховується за відомими формулами гідродинаміки.

Для визначення швидкості руху кожної із рідин слід користуватись значеннями витрати, що відповідають пропускній здатності трубопровідної системи за вибраної схеми включення насосів на станціях.

Для розрахунку пропускної здатності магістрального нафтопроводу використовуються такі початкові дані [4]:

- фізичні властивості нафти;
- температура перекачування нафти;
- довжина, діаметр та різниця геодезичних позначок кінця і початку кожного перегону між нафтоперекачувальними станціями;
- математичні моделі напірних характеристик підпірного і основних насосів, що включаються в роботу на станціях;
- величини максимально допустимих тисків на виході нафтоперекачувальних станцій із умови міцності трубопроводу та мінімально допустимих тисків на вході станцій із умови безкавітаційної роботи насосів.

Визначення пропускної здатності магістральних нафтопроводів проводиться методом послідовних наближень і включає такі блоки розрахунків:

1) Розраховуються фізичні властивості нафти (густина і в'язкість) за температури перекачування.

2) Обчислюються значення максимально допустимих напорів на виході із станцій і мінімально допустимих підпорів на вході у кожну станцію.

3) Задаються першим наближенням пропускної здатності нафтопроводу Q .

4) Виконується гідравлічний розрахунок нафтопроводу для кожного перегону між станціями, в результаті якого визначаються втрати напорі з врахуванням різниці геодезичних позначок кінця і початку перегону, за формулою

$$h_i = K \lambda_i \frac{l_i}{D_i^5} Q^2 + \Delta z_i, \quad (10)$$

де K – сталий комплекс величин,

$$K = 1,02 \frac{8}{\pi^2 g}; \quad (11)$$

1,02 – коефіцієнт, що враховує 2 % на втрати напорі в місцевих опорах від втрат напорі на тертя; g – прискорення вільного падіння; λ_i – коефіцієнт гідравлічного опору для i -го перегону, що визначається за відомими формулами гідродинаміки; l_i і D_i – довжина та внутрішній діаметр i -го перегону між станціями; Q – витрата нафти; Δz_i – різниця геодезичних позначок кінця і початку i -го перегону.

5) Обчислюється напір, що створює підпірний насос на головній НС або початку експлуатаційної ділянки,

$$h_{n...} = a_n - b_n Q^2, \quad (12)$$

де a_n , b_n – сталі коефіцієнти математичної моделі напірної характеристики підпірного насоса.

6) Розраховується напори, що створюю насоси, які включаються в роботу на станціях,

$$h_{ji} = a_{ji} - b_{ji} Q^2, \quad (13)$$

де a_{ji} , b_{ji} – коефіцієнти математичної моделі напірної характеристики j -го насоса на i -ій станції

7) Визначається напір, що створюють основні працюючі насоси на головній станції (можлива одночасна робота не більше двох або трьох насосів залежно від марки насосів та обмежень з умови міцності трубопроводу)

$$H_1 = (a_{11} + a_{12} + a_{31} + a_{41}) - (b_{11} + b_{21} + b_{31} + b_{41}) Q^2, \quad (14)$$

де a_{11} , a_{21} , a_{31} , a_{41} , b_{11} , b_{21} , b_{31} , b_{41} – сталі коефіцієнти математичних моделей напірних характеристик основних насосів на першій станції.

8) Розраховується напір на виході головної НС (напір на початку першого перегону)

$$H_{cm_1} = h_{n_1} + H_1. \quad (15)$$

Напір на виході станції порівнюється із максимально допустимим значенням напору із умови міцності трубопроводу H_{max_1} . Якщо $H_{cm_1} > H_{max_1}$, то для подальших розрахунків приймається

$$H_{cm_1} = H_{max_1}.$$

9) Знаходиться величина підпору на вході в першу проміжну станцію (напору наприкінці першого перегону)

$$h_{n_1} = H_{cm_1} - h_1. \quad (16)$$

10) Розраховується перевищення підпору на вході в станцію над мінімально допустимою величиною підпору h_{min_1}

$$\Delta h_1 = h_{n_1} - h_{min_1}. \quad (17)$$

11) Якщо $\Delta h_1 > 0$, то визначається напір, який створюють насоси, що працюють на першій проміжній станції

$$H_2 = (a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42}) - (b_{12} + b_{22} + b_{32} + b_{42})Q^2, \quad (18)$$

де a_{12} , a_{22} , a_{32} , a_{42} , b_{12} , b_{22} , b_{32} , b_{42} – сталі коефіцієнти математичних моделей напірних характеристик основних насосів на першій станції.

12) Обчислюється напір на виході першої проміжної станції із врахуванням підпору, що передається на цю станцію (напір на початку другого перегону),

$$H_{cm_2} = h_{n_1} + H_2. \quad (19)$$

Якщо $H_{cm_2} > H_{max_2}$, то напір на початку другого перегону приймаємо

$$H_{cm_2} = H_{max_2}$$

і визначаємо величину підпору наприкінці другого перегону

$$h_{n_2} = H_{cm_2} - h_2. \quad (20)$$

13) Знаходиться перевищення підпору на вході в другу станцію над допустимою величиною

$$\Delta h_2 = h_{n_2} - h_{min_2}. \quad (21)$$

Такі розрахунки виконуються для всіх перегонів між станціями.

Якщо для всіх перегонів перевищення підпорів над мінімально допустимим значенням додатні, то збільшуємо продуктивність на величину ΔQ і розрахунки повторюємо, починаючи від пункту 4.

14) Перший перегін, для якого за певного значення продуктивності Q отримано перевищення підпору над мінімально допустимою величиною від'ємне, визначає пропускну здатність всього нафтопроводу або його експлуатаційної ділянки. Це свідчить про те, що за більших значень продуктивності на вході в станцію не забезпечується необхідний підпір і насоси будуть працювати в кавітаційному режимі. Тому пропускну здатністю нафтопроводу вважається продуктивність трохи мен-

ша (передостаннє наближення) від тієї продуктивності, за якої починається кавітаційний режим роботи насосів.

Проведено дослідження залежності об'єму суміші від різниці в'язкостей нафт, що перекачуються послідовно для ділянки реального нафтопроводу діаметром DN 700, на якій експлуатуються головна і дві проміжні нафтоперекачувальні станції. Довжини перегонів між нафтоперекачувальними станціями 63, 85 і 47 км, різниці геодезичних позначок кінця і початку кожного перегону відповідно 49,0, 41,1 та 323,3 м. Розглянута робота ділянки нафтопроводу, коли на станціях включаються один і два насоси НМ-3600-230 з базовим ротором, математична модель напірної характеристики яких $h = 306 - 75Q^2$, та на станціях працюють один і два насоси НМ3600-230 з ротором 0,7 на подачу 2500 м³/год з математичною моделлю напірної характеристики $h = 266 - 89Q^2$. Математична модель напірної характеристики підпірного насоса, встановленого на початку ділянки нафтопроводу, $h_n = 89 - 22Q^2$. Розрахунки виконані для нафти густиною 840 кг/м³. Дослідження проведені для нафт з кінематичною в'язкістю нафти меншої в'язкості в діапазоні 5–9 сСт з кроком 1 сСт та нафт, що характеризуються більшою в'язкістю в діапазоні 10–50 сСт з кроком 5 сСт. При розрахунках враховані обмеження на величину максимально допустимого тиску на виході із станцій з умови міцності трубопроводу та мінімально допустимого тиску на вході в проміжні станції із умови безкавітаційної роботи насосів. Розрахунки з визначення об'єму суміші різносортних нафт виконані за дифузійною теорією змішування для граничних концентрацій, якою обмежують суміш, 2–98 %.

Результаті розрахунків з визначення пропускної здатності ділянки нафтопроводу за різних значень в'язкості нафти і різних схем включення насосів на станціях наведені в табл. 1.

Аналіз даних, наведених в табл. 1, свідчить, що із збільшенням в'язкості нафти пропускна здатність ділянки нафтопроводу зменшується. Однакові значення пропускної здатності за в'язкості нафти в діапазоні 10–50 сСт у випадку роботи на станціях двох насосів з базовим ротором і з ротором 0,7 пояснюється тим, що робочий тиск в трубопроводі обмежується величиною максимально допустимого тиску із умови міцності трубопроводу.

Результати розрахунків з визначення об'єму суміші за різних схем включення насосів на станціях і різних послідовностях різниці в'язкості нафт наведені в табл. 2–5 та ілюструються графіками, зображеними на рис. 1–4.

Аналіз проведених розрахунків та побудованих графіків показує, що із збільшенням різниці в'язкості різносортних нафт, які перекачуються магістральними трубопроводами послідовно, об'єм суміші зростає, при-

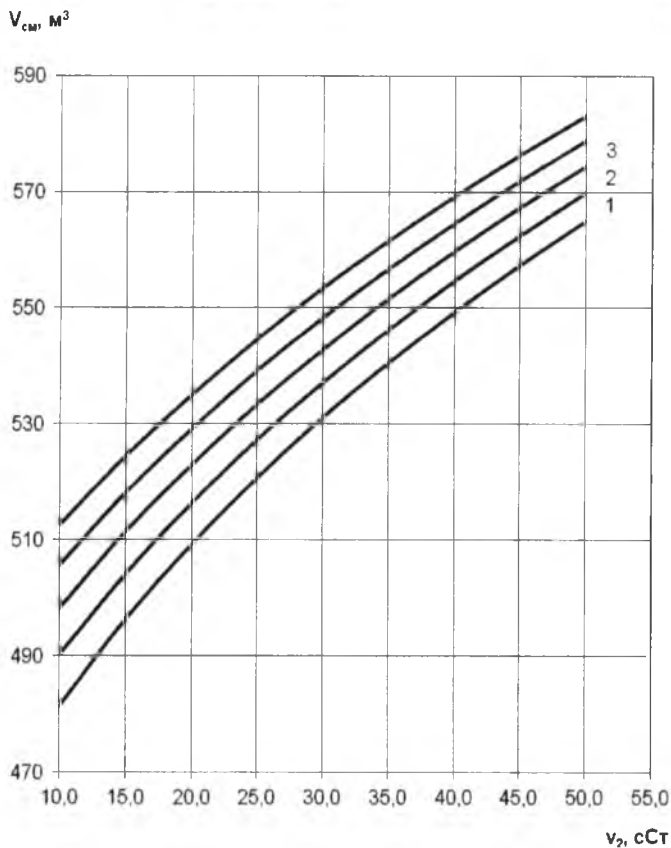
чому за менших значень в'язкості рідин інтенсивність зростання об'єму суміші більша.

Таблиця 1. Пропускна здатність ділянки нафтопроводу

Кінематична в'язкість нафти, сСт	Пропускна здатність ділянки нафтопроводу (м ³ /год) за роботи на станціях:			
	одного насоса з базовим ротором	одного насоса з ротором 0,7	двох насосів з базовими роторами	двох насосів з роторами 0,7
5	2034,0	1761,7	2908,2	2862,8
6	2000,2	1732,3	2853,2	2824,8
7	1971,2	1707,3	2806,8	2792,4
8	1946,0	1685,5	2766,4	2763,8
9	1923,6	1663,1	2730,8	2730,8
10	1901,0	1641,9	2698,8	2698,8
15	1808,1	1562,5	2565,9	2565,9
20	1744,1	1507,7	2462,5	2462,5
25	1695,5	1466,3	2385,3	2385,3
30	1656,7	1432,9	2323,9	2323,9
35	1624,3	1405,4	2273,3	2273,3
40	1596,7	1381,6	2230,4	2230,4
45	1572,5	1361,0	2193,2	2193,2
50	1551,3	1342,8	2160,4	2160,4

Таблиця 2. Об'єм суміші за різних поєднань різниці в'язкості нафт у випадку роботи на станціях одного насоса з базовим ротором

Кінематична в'язкість більш в'язкої нафти, сСт	Об'єм суміші (м ³) за в'язкості менш в'язкої нафти, сСт				
	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
10,0	481,5	490,3	498,3	505,7	512,7
15,0	496,4	504,2	511,5	518,2	524,6
20,0	509,3	516,4	523,0	529,2	535,1
25,0	520,7	527,3	533,4	539,2	544,7
30,0	531,1	537,1	542,8	548,3	553,5
35,0	540,5	546,2	551,6	556,7	561,6
40,0	549,2	554,6	559,7	564,5	569,2
45,0	557,3	562,4	567,3	571,9	576,4
50,0	564,9	569,8	574,4	578,8	583,1

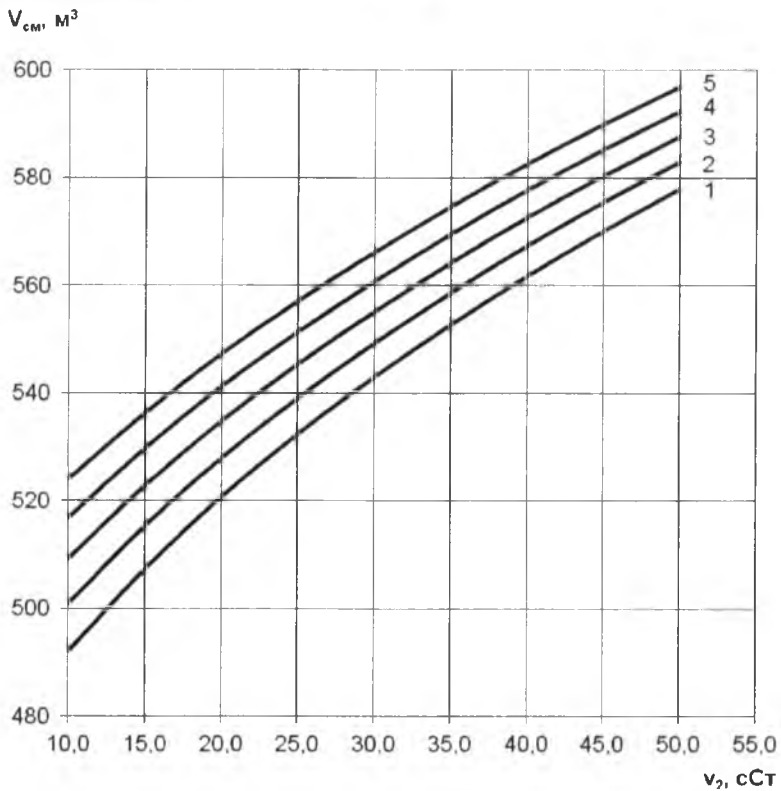


1 – в'язкість нафти меншої в'язкості 5 сСт; 2 – в'язкість нафти меншої в'язкості 6 сСт;
 3 – в'язкість нафти меншої в'язкості 7 сСт; 4 – в'язкість нафти меншої в'язкості 8 сСт;
 5 – в'язкість нафти меншої в'язкості 9 сСт

Рис. 1. Залежність об'єму суміші від в'язкості нафт за роботи на станціях одного насоса з базовим ротором

Таблиця 3. Об'єм суміші за різних поєднань різниці в'язкості нафт у випадку роботи на станціях одного насоса з ротором 0,7

Кінематична в'язкість більш в'язкої нафти, сСт	Об'єм суміші (м ³) за в'язкості менш в'язкої нафти, сСт				
	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
10,0	492,0	501,0	509,2	516,9	524,2
15,0	507,3	515,4	522,8	529,8	536,4
20,0	520,6	527,9	534,7	541,2	547,3
25,0	532,4	539,1	545,4	551,4	557,2
30,0	543,0	549,3	555,2	560,8	566,2
35,0	552,7	558,6	564,2	569,5	574,6
40,0	561,7	567,3	572,6	577,6	582,5
45,0	570,1	575,4	580,4	585,2	589,9
50,0	577,9	582,9	587,7	592,3	596,8

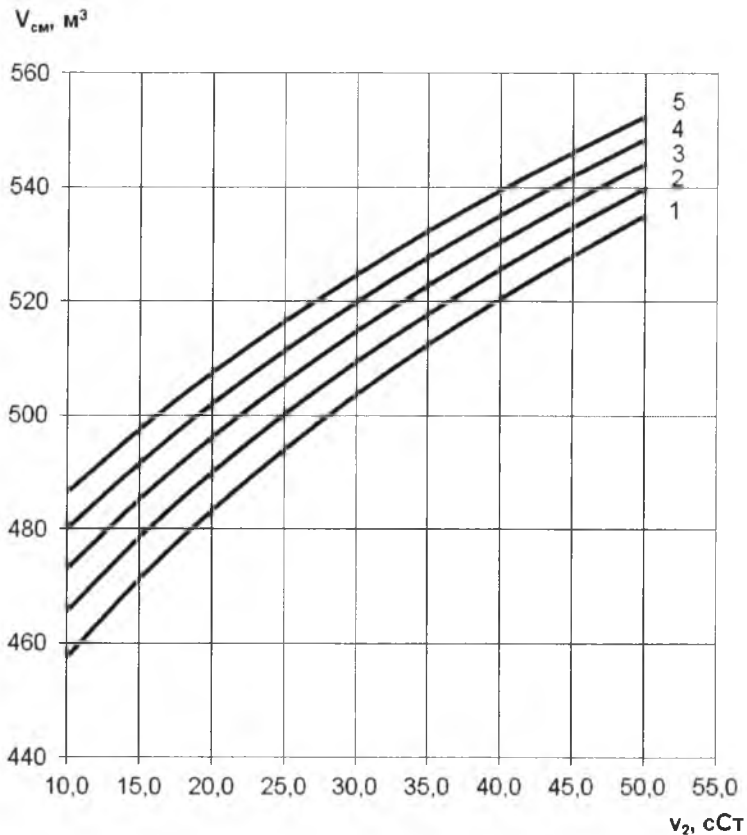


1 – в'язкість нафти меншої в'язкості 5 сСт; 2 – в'язкість нафти меншої в'язкості 6 сСт; 3 – в'язкість нафти меншої в'язкості 7 сСт; 4 – в'язкість нафти меншої в'язкості 8 сСт; 5 – в'язкість нафти меншої в'язкості 9 сСт

Рис. 2. Залежність об'єму суміші від в'язкості нафт за роботи на станціях одного насоса з ротором 0,7

Таблиця 4. Об'єм суміші за різних поєднань різниці в'язкості нафт у випадку роботи на станціях двох насосів з базовим ротором

Кінематична в'язкість більш в'язкої нафти, сСт	Об'єм суміші (м ³) за в'язкості менш в'язкої нафти, сСт				
	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
10,0	457,5	465,7	473,1	480,1	486,5
15,0	471,3	478,6	485,3	491,6	497,6
20,0	483,3	490,0	496,2	502,0	507,5
25,0	494,0	500,2	505,9	511,3	516,5
30,0	503,7	509,4	514,8	519,9	524,7
35,0	512,5	517,8	522,9	527,8	532,4
40,0	520,6	525,7	530,5	535,1	539,5
45,0	528,1	533,0	537,6	542,0	546,2
50,0	535,2	539,8	544,2	548,5	552,5

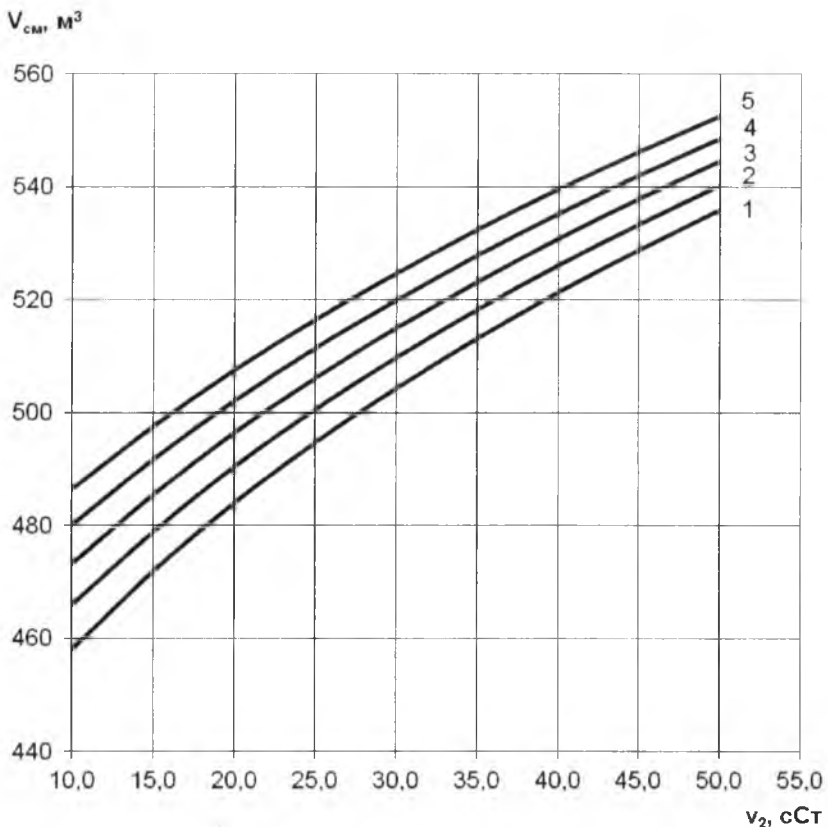


1 – в'язкість нафти меншої в'язкості 5 сСт; 2 – в'язкість нафти меншої в'язкості 6 сСт; 3 – в'язкість нафти меншої в'язкості 7 сСт; 4 – в'язкість нафти меншої в'язкості 8 сСт; 5 – в'язкість нафти меншої в'язкості 9 сСт

Рис. 3. Залежність об'єму суміші від в'язкості нафти за роботи на станціях двох насосів з базовим ротором

Таблиця 5. Об'єм суміші за різних поєднань різниці в'язкості нафти у випадку роботи на станціях двох насосів з ротором 0,7

Кінематична в'язкість більш в'язкої нафти, сСт	Об'єм суміші (м³) за в'язкості менш в'язкої нафти, сСт				
	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
10,0	458,0	466,0	473,3	480,1	486,5
15,0	471,9	478,9	485,5	491,7	497,6
20,0	483,9	490,4	496,4	502,0	507,5
25,0	494,7	500,6	506,1	511,4	516,5
30,0	504,3	509,8	515,0	519,9	524,7
35,0	513,1	518,3	523,1	527,8	532,4
40,0	521,3	526,1	530,7	535,1	539,5
45,0	528,8	533,4	537,8	542,0	546,2
50,0	535,9	540,3	544,5	548,5	552,5



1 – в'язкість нафти меншої в'язкості 5 сСт; 2 – в'язкість нафти меншої в'язкості 6 сСт; 3 – в'язкість нафти меншої в'язкості 7 сСт; 4 – в'язкість нафти меншої в'язкості 8 сСт; 5 – в'язкість нафти меншої в'язкості 9 сСт

Рис. 4. Залежність об'єму суміші від в'язкості нафти за роботи на станціях двох насосів з ротором 0,7

За постійної в'язкості нафти з меншим її значенням із збільшенням в'язкості більш в'язкої рідини об'єм суміші зростає. Спостерігається інтенсивніше зростання об'єму суміші за менших значень більш в'язкої нафти.

За постійної в'язкості нафти з більшим її значенням із збільшенням в'язкості менш в'язкої рідини об'єм суміші також зростає, інтенсивність зростання об'єму більша за менших значень нафти меншої в'язкості.

Наукова новизна результатів досліджень полягає у виявленні залежності об'єму суміші, що утворюється за послідовного перекачування різносортих нафт, які відрізняються широким діапазоном зміни в'язкості, на відміну від послідовного перекачування світлих нафтопродуктів.

Використання запропонованого алгоритму розрахунків дозволяє оцінити об'єм суміші, яка утворюється при послідовному перекачуванні

нафт за будь-якої різниці їх в'язкості, що важливо для правильної організації приймання суміші на кінцевому пункті магістрального нафтопроводу.

Література

1. Нечваль М.В. Последовательная перекачка нефтей и нефтепродуктов по магистральным трубопроводам / М.В.Нечваль, В.Ф.Новоселов, П.И.Тугунов. – М.: Недра, 1976. – 221 с.
2. Оптимизация последовательной перекачки нефтепродуктов / [М.В.Лурье, В.И.Марон, Л.А.Мацкин и др.]. – М.: Недра, 1979. – 256 с.
3. Середюк М.Д. Трубопровідний транспорт нафти і нафтопродуктів: [підруч. для студ. вищ. навч. зал.] / М.Д.Середюк, Й.В.Якимів, В.П.Лісафін. – Івано-Франківськ: Кременчук, 2001. – 517 с.
4. Якимів Й.В. Типові технологічні розрахунки трубопровідного транспорту нафти і нафтопродуктів: [навч. посіб. для студ. вищ. навч. зал.] / Й.В.Якимів. – Івано-Франківськ: Факел, 2006. – 366 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2013 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Грудзом В.Я.,
д.т.н., професором Говдяком Р.М. (м. Київ)*

THE IMPACT OF THE DIFFERENCE IN OIL VISCOSITY OF OILS ON THEIR MIXING DURING SEQUENTIAL PUMPING IN THE PIPELINES

J. Yakymiv

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
76019, Ivano-Frankivsk, Karpatska str., 15;
ph. +380 (3422) 72-71-39, e-mail: tzngkaf@rambler.ru*

There has been made the analysis of an impact of difference in oil viscosity on the volume of the mixture that is formed during their sequential pipe. The calculations are made for a real pipeline system for different combinations of pump inclusion in stations for a wide range of variation of oil viscosity. There has been worked out an algorithm for determining the throughput capacity of oil-trunk pipelines at different oil viscosities used for calculation the volume of the mixture. It is proved that the volume of the mixture increases when the difference of oil viscosity increases. Intensive growth of the mixture volume occurs at low viscosity values.

Key words: viscosity, efficiency, pressure loss, oil pumping station, volume of the mixture.

УДК 622.692.4

ЕКСПЛУАТАЦІЯ МАГІСТРАЛЬНИХ НАФТОПРОВІДІВ ПРИ НЕПОВНОМУ ЗАВАНТАЖЕННІ

М. П. Возняк, Г. М. Кривенко, Л. В. Возняк, С. О. Кривенко

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-16; e-mail: vozniak@tvnet.if.ua*

Одним із способів перекачування нафти при неповному завантаженні трубопроводів є циклічна експлуатація.

Визначено оптимальне число циклів, при якому експлуатаційні витрати на утримання смістості та на виштовхування в'язкої нафти з трубопроводу є мінімальними. Розрахунки проводилися для широкого діапазону масових витрат, з яких випливає, що "гарячий" нафтопровід при його неповному завантаженні не вигідно експлуатувати безперервно.

Ключові слова: трубопровід, циклічна експлуатація, нафта, продуктивність.

Україна, продовжує залишатися залежною від поставок російської нафти. Російська Федерація нині експортує до країн Євросоюзу майже 25% від загального споживання ним нафти, 42% – газу, 12% – вугілля та 35% – збагаченого урану.

Росія є основним постачальником енергетичних ресурсів для європейських держав.

Україна та Європейський Союз зацікавлені шукати альтернативні джерела постачань енергетичних ресурсів, особливо з огляду на те, що частка імпортованих до ЄС російських вуглеводнів поступово знижується [1]. Одним із пріоритетних напрямів є пошук нових шляхів постачання нафти та газу. Україна також зацікавлена в розширенні маршрутів постачання енергоресурсів власною територією.

У нафтовій сфері перспективним напрямом співпраці є продовження нафтопроводу "Одеса–Броди" до польського Плоцька та використання його для транспортування енергоносіїв з Каспійського регіону до Центрально-Східної Європи [2].

Важливим також є енергетичне співробітництво в Чорноморському регіоні. За висновком Міжнародного енергетичного агентства, нині близько 30% української транзитної потужності для газу та приблизно 50% транзитної потужності для нафти не використовується.

За таких умов магістральні трубопроводи, як правило, деякий час працюють з неповним завантаженням. Зменшення продуктивності відбувається унаслідок виснаження запасів нафтових промислів, зміною

напрямку вантажопотоків нафти і нафтопродуктів, сезонними коливаннями споживання та іншими причинами. У працях багатьох вчених розглядаються аспекти, пов'язані з експлуатацією неповністю завантажених трубопроводів. Але розв'язані далеко не всі питання оптимальної експлуатації систем магістральних нафтопроводів. Необхідно відмітити, що багато авторів рахують оптимальним такий режим роботи трубопроводу, при якому забезпечується задана продуктивність при мінімумі енергетичних затрат [3]. Такий підхід до вирішення задач з оптимізації є найбільш правильним, оскільки енергетичні затрати складають основну частку всіх затрат. Зменшення продуктивності "гарячого" трубопроводу спостерігається за рахунок зменшення живого перерізу трубопроводу унаслідок утворення парафінових відкладів на внутрішніх стінках труби, що призводить до зміни характеристики трубопроводу, а також до непродуктивних затрат енергії насосно-силового обладнання перекачувальних станцій. Одним із способів перекачування нафти при неповному завантаженні трубопроводів є циклічна експлуатація. Для ізотермічного нафтопроводу, якщо він працює з неповним завантаженням і без відключення насосних агрегатів, циклічна експлуатація буде тим вигіднішою, чим менше завантаження трубопроводу. При роботі ізотермічного нафтопроводу з неповним завантаженням при відключенні насосних агрегатів економічно більш вигідною буде безперервне перекачування нафти, а не циклічне. Необхідне число насосних агрегатів визначають за допомогою гідравлічного розрахунку. А при безперервному перекачуванні високов'язкої нафти з продуктивністю, яка нижча за проектну, для підтримання певного температурного режиму трубопроводу необхідно споруджувати додаткові пункти підігрівання або підвищувати температуру підігрівання на існуючих теплових станціях. У зв'язку з цим капітальні та експлуатаційні затрати можуть настільки вирости, що безперервне перекачування буде економічно не вигідним.

За циклічної експлуатації "гарячого" трубопроводу, коли його робота з повним завантаженням чергується із зупинками, нема необхідності додатково підігрівати нафту. Але для забезпечення безперервності роботи промислу та споживача необхідна наявність певних об'ємів резервуарного парку на початку та в кінці трубопроводу. Також потрібна малов'язка нафта або нафтопродукт в об'ємі, який достатній для заміщення високов'язкого продукту на час зупинки та наступного прогрівання при запуску трубопроводу в експлуатацію. Звідси випливає, що за циклічного перекачування є два види додаткових затрат, із умови оптимізації яких і необхідно визначати умови перекачування.

Можливий також і інший варіант експлуатації "гарячого" трубопроводу. За цим варіантом трубопровід працює зі змінною витратою: деякий час перекачування ведеться з витратою, яка близька до проектної, а деякий час – з набагато меншою витратою за проектну. У цьому випадку також необхідно правильно вибирати витрати, температури пі-

дiгрiвання та час роботи, щоби здiйснити планове перекачування i не "заморозити" трубопровiд.

Порiвняння дослiдних i розрахункових даних показує, що короткочаснi зупинки практично не впливають на час виходу трубопроводу на умовно-стацiонарний режим. Якщо час зупинок перекачування вiдповiдає або бiльше часу перекачування, то час виходу трубопроводу на умовно-стацiонарний режим збiльшується порiвняно з безперервним "гарячим" перекачуванням. Авторами [3] запропоновано спрощену методику визначення часу виходу трубопроводу на умовно-стацiонарний режим.

В роботах [3, 4] наведено порiвняльний економiчний аналiз безперервного i циклiчного перекачування в'язких нафтопродуктiв, що транспортуються по "гарячому" магiстральному нафтопроводу в залежностi вiд коефiцiєнта завантаження. Порiвнюються рiзні варiанти продуктивностi за зведеними рiчними затратами.

В капiтальних затратах враховується вартiсть спорудження лiнiйної частини, перекачувальних та теплових станцiй, резервуарної смностi на головному, промiжному та кiнцевому пунктах. В експлуатацiйні затрати входять витрати на утримання перекачувальних та теплових станцiй, резервуарних паркiв, витрати на замищення та амортизацiйні вiдчислення.

Для цього, щоби не порушувати температурний режим системи труба-грунт при замищеннi в процесi циклiчного перекачування, малов'язку нафту потрiбно пiдгрівати до тiєї ж температури, що i високов'язку. За вiдновлення перекачування пiсля зупинки також здiйснюється попереднє прогрівання ґрунту малов'язкою рiдиною. Цi заходи направленi на те, щоби циклiчне перекачування високов'язкої нафти вiдбувалося без ускладнень. Чим бiльше число циклiв, тим потрiбна менша резервуарна смнiсть на головнiй та перекачувальних станцiях та кiнцевому пунктi, але тим бiльшi затрати на замищення. Тому оптимальне число циклiв, а вiдповiдно й оптимальна смнiсть на головному та кiнцевому пунктах, визначається iз умови мiнiмуму експлуатацiйних затрат на утримання смностi та затрат, пов'язаних iз замищенням. Одержанi таким чином число циклiв i смнiсть резервуарного парку на головному та кiнцевому пунктах трубопроводу використовуються для складання функцiй зведених затрат при циклiчному перекачуванні та порiвняння їх з зведеними затратами при безперервному перекачуванні.

Отже, магiстральний трубопровiд при неповному завантаженнi можна експлуатувати як безперервно за меншої продуктивностi, так i циклiчно.

Циклiчна експлуатацiя "гарячих" магiстральних трубопроводiв полягає в наступному: деяке число днiв трубопровiд експлуатується з проектною продуктивнiстю, яка забезпечує розрахунковий тепловий режим

і гідравлічні втрати в межах можливостей насосної станції, а деяке число днів перекачування по трубопроводу не проводиться.

Циклічна експлуатація високов'язкої нафти викликає великі незручності в процесі експлуатації і значно ускладнює тепловий і гідравлічний розрахунки магістрального трубопроводу, але в ряді випадків вона є доцільною.

Порівняння доцільності варіантів безперервного чи циклічного “гарячого” перекачування проводять за зведеними річними затратами.

$$S = E + \varepsilon \cdot K, \quad (1)$$

де E – експлуатаційні витрати; ε – нормативний коефіцієнт ефективності капіталовкладень; K – капітальні затрати.

В результаті розрахунків зведених затрат для неперервного S_n та циклічного S_{cy} перекачування можна встановити характер їх змін [3].

При відносній витраті $\varphi = \frac{Q}{Q_1} < (\frac{Q}{Q_1})_c = \varphi_c$ економічно вигідніше циклічне перекачування, а при більшій відносній витраті неперервне перекачування.

Відносна витрата визначається за формулою [3]

$$\varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\chi^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\chi}{2} - \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\chi^3}{27}}}, \quad (2)$$

де χ - коефіцієнт.

Коефіцієнт χ визначається за формулою

$$\chi = \frac{N_m^2 \cdot (C_n \cdot (\alpha + \varepsilon) + \beta_m)^2}{2 \cdot Q_1 \cdot \sigma_p \cdot \alpha \cdot u_1 \cdot (3 + \frac{\varepsilon}{\alpha})^2}, \quad (3)$$

де N_m – число теплових станцій; C_n – вартість спорудження теплової станції; α – амортизаційні відрахування об'єктів трубопроводу; ε – нормативний коефіцієнт ефективності капіталовкладень; β_m – експлуатаційні витрати по тепловій станції; Q_1 – проектна продуктивність нафтопроводу (річний обсяг перекачування нафти); σ_p – вартість спорудження одиниці ємності резервуара; u_1 – сумарні затрати для одного циклу на заміщення.

При неперервній експлуатації трубопроводу з продуктивністю, яка менша проектної, необхідні додаткові капітальні затрати і затрати на утримання теплової станції, оскільки число їх збільшується із зменшенням витрати нафтопродукту.

При циклічній експлуатації “гарячого” трубопроводу, коли робота його за повного завантаження чергується із зупинками перекачування, відпадає необхідність спорудження додаткових пунктів підігрівання. Оскільки нафта поступає безперервно, то на початковому і кінцевому пунктах трубопроводу необхідно мати визначену ємність. На період зу-

пинки високов'язка нафта виштовхується із трубопроводу і заміщується малов'язкою. Малов'язкою нафтою проводиться прогрівання трубопроводу перед початком перекачування.

Отже, при циклічному перекачуванні існує два види додаткових витрат: із збільшенням числа циклів смінь зменшується, відповідно зменшуються затрати на її утримання і експлуатацію, але в цей час майже пропорційно числу циклів ростуть затрати на заміщення високов'язкої нафти при кожній зупинці і подальшому прогріванні трубопроводу.

Існує оптимальне число циклів, при якому експлуатаційні витрати на утримання смності і затрати на виштовхування в'язкої нафти із трубопроводу будуть мінімальними.

Кожній продуктивності відповідає оптимальне число циклів.

Доцільність циклічного перекачування розглянута на конкретному нафтопроводі:

- довжина траси $l = 58300$ м;
- внутрішній діаметр труб $d = 257$ мм;
- проектна продуктивність $M_1 = 1500$ тисяч тонн в рік;
- фактична продуктивність $M = 480$ тисяч тонн в рік.

У нафтопровід поступає нафта із родовища, середня температура перекачування якої $t = 30^\circ\text{C}$. Густина нафти за середньої температури $\rho_f = 838$ кг/м³.

Високов'язка нафта в процесі перекачування заміщується малов'язкою нафтою. Попереднє прогрівання трубопроводу відсутнє.

Визначимо доцільність циклічного перекачування по даному нафтопроводу.

Оптимальне число циклів для перекачування нафти по трубопроводу визначимо за формулою, запропонованою П. І. Тугуновим [3].

$$n_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2Q}{Q_1} \cdot \frac{Q_1 - Q}{u_1} \cdot (\sigma_p \alpha_n + k \cdot \frac{Q_1 - Q}{Q_1} \sigma_q)}, \quad (4)$$

де Q – дійсна продуктивність нафтопроводу (річний обсяг перекачування нафти); α_n – відчислення на поточний ремонт і амортизацію; k – стала величина; σ_q – затрати на тепло.

Об'ємна витрата

$$Q = \frac{M}{\rho}, \quad (5)$$

де M – масова витрата.

Число робочих днів експлуатації трубопроводу в рік складас

$$N_p = 365 \frac{Q}{Q_1} = 365 \frac{480 \cdot 10^3}{1500 \cdot 10^3} = 117 \text{ днів.}$$

Число неробочих днів

$$N_{\text{н}} = 365 - 117 = 248 \text{ днів.}$$

Годинна дійсна продуктивність нафтопроводу

$$Q = \frac{480 \cdot 10^6}{365 \cdot 24 \cdot 838} = 65,39 \text{ м}^3/\text{год.}$$

Годинна проектна продуктивність нафтопроводу

$$Q_1 = \frac{1500 \cdot 10^6}{365 \cdot 24 \cdot 838} = 204,34 \text{ м}^3/\text{год.}$$

Під час зупинок перекачування високов'язка нафта заміщується малов'язкою нафтою, яку не підігрівають. Отже, затрати на підігрівання нафтопродукту при заміщенні відсутні.

Швидкість руху нафти в трубі

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 204,34}{3,14 \cdot 0,257^2 \cdot 3600} = 1,095 \text{ м/с.}$$

Час заміщення

$$\tau = \frac{l}{v} = \frac{58300}{1,095 \cdot 3600} = 14,79 \text{ год.}$$

Оптимальне число циклів, визначене за формулою (4), складає 14.

Тоді час перекачування в період одного циклу повинен складати 216 годин, а час зупинки - 456 годин.

Сумарна ємність резервуарного парку на головному і кінцевому пунктах, необхідна для здійснення циклічного перекачування, буде дорівнювати

$$V_p = \frac{2Q}{Q_1} \cdot \frac{Q_1 - Q}{C} = \frac{2 \cdot 480 \cdot 10^3 (1500 - 480) \cdot 10^3}{1500 \cdot 10^3 \cdot 0,838 \cdot 14} = 55643 \text{ м}^3.$$

Відносна витрата, визначена за залежністю (2), дорівнює $\varphi_c = 0,90$.

$$\varphi = \frac{Q}{Q_1} = \frac{480 \cdot 10^6 \cdot 838}{1500 \cdot 10^6 \cdot 838} = 0,32.$$

Оскільки $\varphi < \varphi_c$, то економічно вигідніше циклічне перекачування.

Таким чином, для даного нафтопроводу економічно вигідніше циклічне перекачування. Оптимальне число циклів для даної продуктивності 14. При цьому необхідний об'єм резервуарного парку відповідає наявному.

Також визначено оптимальне число циклів для даного нафтопроводу при зміні продуктивності від 200 до 1400 тисяч тонн в рік. Знаючи число циклів, визначаємо час перекачування та зупинки в одному циклі та сумарну ємність резервуарного парку на головному і кінцевому пунктах, яка необхідна для здійснення циклічного перекачування відповідно за залежностями, наведеними вище (рис. 1).

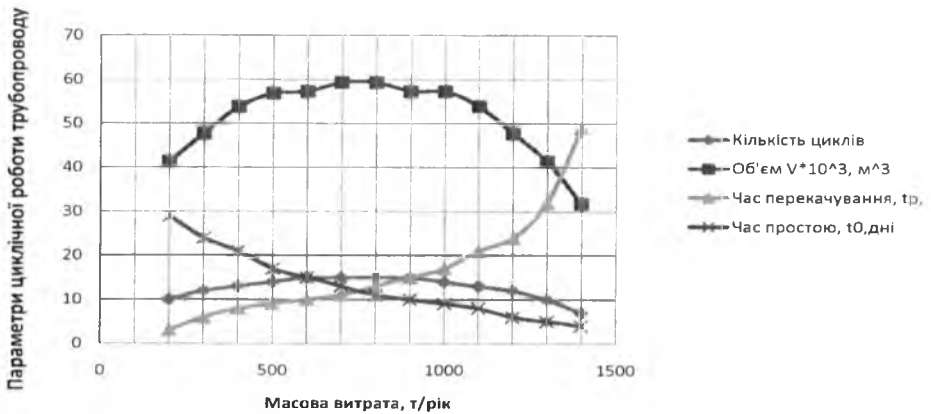


Рис. 1. Параметри циклічної роботи трубопроводу

З аналізу даного рисунка випливає, що за невеликого завантаження трубопроводу число циклів невелике і трубопровід більше простоює, ніж працює. При цьому собівартість перекачування буде високою. Із збільшенням завантаження собівартість перекачування нафти зменшиться і за проектної витрати буде мінімальною. Із збільшенням числа циклів необхідний об'єм резервуарного парку зменшиться, а отже знижуються затрати на його спорудження та експлуатацію, але збільшуються затрати на заміщення високов'язкої нафти при кожній зупинці. За оптимального числа циклів зведені затрати будуть мінімальними.

Із розглянутого необхідно зробити висновок, що “гарячий” трубопровід при його неповному завантаженні дуже не вигідно експлуатувати безперервно, оскільки у цьому випадку різко зростають затрати на підігрівання нафти до температури, яка необхідна за безперервного перекачування.

Література

1. Диверсифікація поставок нафти до України: актуальність, проблеми, шляхи їх вирішення [ел.ресурс] / Центр Разумкова // Національна безпека і оборона. – 2009. – № 6. – С. 27-36.
2. Адаменко С.В. Нафтопровід «Одеса – Броди» як чинник енергетичної безпеки України / С.В.Адаменко // Держава та регіони. – 2009. – №3. – С. 13-18.
3. Тугунов П.И. Нестационарные режимы перекачки нефтей и нефтепродуктов / П.И.Тугунов. – М.: Недра, 1984. – 224 с.
4. Типовые расчеты при проектировании и эксплуатации нефтебаз и нефтепроводов / П.И.Тугунов, В.Ф.Новоселов, А.А.Коршак, А.М.Шаммазов. – Уфа: ООО “Дизайн-ПолиграфСервис”, 2002. – 658 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2013 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Грудзом В.Я.,
д.т.н., професором Говдяком Р.М. (м. Київ)*

EXPLOITATION OF MAIN OIL PIPELINES AT AN INCOMPLETE LOADING

M. P. Vozniak, G. M. Kryvenko, L. V. Vozniak, S. O. Kryvenko

Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;

76019, Ivano-Frankivs'k, Ukraine, Carpatska st., 15;

ph. +380 (0342) 72 71 39; e-mail: vozniak@tvnet.if.ua

One of methods of pumping oil at an incomplete loading of pipelines is cyclic exploitation.

Certainly optimum number of cycles, at which operating costs on maintenance of capacity and on the extrusion of oil from a pipeline is minimum. Calculations were conducted wide for the wide range mass flow rates, from which swims out, that hot oil pipeline at his incomplete load unprofitably to exploit continuously.

Key words: pipeline, cyclic exploitation, oil, capacity

УДК 371.78.07

ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНА І ПРАВОВА ДІЯЛЬНІСТЬ У СИСТЕМІ УПРАВЛІННЯ МАЛИМ БІЗНЕСОМ

Б. С. Долішній

*Івано-Франківський університет права ім. Короля Данила Галицького;
м. Івано-Франківськ, вул. Коновальця, 35*

Стаття висвітлює специфіку інформаційного менеджменту в системі управління малим бізнесом (МБ), що вимагає системного підходу не тільки до аналізу первинної інформації, а й до її узагальнення у відповідності з циклічністю фаз (етапів) управлінського рішення, структурою органів управління, попереднім досвідом розв'язання проблемних ситуацій, характером взаємодії об'єкта і суб'єкта управління тощо.

Ключові слова: диференціація, об'єкт і суб'єкт управління, ефективність, кількість і якість інформації, циклічність фаз, достовірність, об'єктивність.

Постановка проблеми. Володіння достовірною і актуальною інформацією поряд з умінням ефективно використовувати адекватні методи її збирання, аналізу і надання, є основою успішної діяльності підприємств і організацій будь-якої *організаційно-правової форми*.

Диференціація попиту на всі види інформації – наукову, технічну, економічну, урядову, задоволення зростаючих інформаційних потреб є актуальним завданням у сфері управління. Інтуїтивні дії у цій сфері, відсутність інформаційної політики підприємства можуть призвести до неадекватних рішень і відчутних фінансових втрат.

Управління, як процес планування, організації, мотивації і контролю, передбачає наявність і єдність двох підсистем – керованої і керуючої.

Взаємодія об'єкта і суб'єкта управління – це, перш за все, інформаційна взаємодія. Завдяки обміну інформацією між суб'єктом і об'єктом управління система виробляє команди управління для підтримання своєї життєдіяльності і виконання поставлених перед нею завдань і потреб зворотнього зв'язку – надходження інформації про результати.

Суб'єкт управління, виробляючи управлінські рішення, передає їх об'єкту управління, оформляючи інформацію у вигляді організаційно-розпорядчих документів (положень, інструкцій, правил, наказів, постанов, рішень та ін.). Часто для одержання ефективного результату в процесі управління необхідна як усна, так і письмова взаємодія між суб'єктом і об'єктом, однак для більшості процесів управління важлива наявність інформації, закріпленої на матеріальному носії і тому давно назріла потреба диференціації (класифікації) управлінської інформації з кількісної і якісної сторони, використовуючи сучасні інформаційні технології (ІТ) [1; 6].

Актуальність дослідження полягає в тому, що управління будь-якою соціально-економічною системою пов'язане з інформаційними процесами, організацією інформаційного забезпечення.

Сучасні підприємства, організації, фірми, компанії в сьогоденних умовах господарювання стараються вижити, вести свій бізнес на одержання прибутку, без якого неможливе їх подальше процвітання, і питання організації належного інформаційного забезпечення є, було і буде відігравати одну з провідних ролей.

Власне організація інформаційної діяльності у сфері управління представляє собою спосіб функціонування структурних елементів будь-якої інформаційної системи (ІС) (підприємства, політичної партії, держави тощо). Відповідно організація інформаційної діяльності будь-якого суб'єкта управління – це спосіб функціонування структурних елементів ІС даного суб'єкта [4].

Використання сучасних ІТ для організації її інформаційного забезпечення стало останнім часом запорукою успішного ведення малого, середнього чи великого бізнесу не тільки в Україні, але і в усьому світі. Саме тому актуальність даної статті є своєчасною і беззаперечною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблеми інформаційно-аналітичної і правової діяльності у системі управління малим бізнесом досліджують як вітчизняні, так і зарубіжні вчені. В Україні над цією темою працювали такі науковці: Вовчак І.С., Щербаков П.А., Пінчук Н.С., Ярова І.І., Матвієнко О.В.; побічно розглянули окремі аспекти теми у своїх працях: Татарчук М.І., Петренко В.Р., Новак В.О., Костюк Р.Н., Палагін О.О., Твердохліб М.Г.

Постановка завдання. В даній статті ставиться за мету проаналізувати інформаційно-аналітичні можливості малого бізнесу в Україні, його правові аспекти, ролі і технології керівника і працівників офісу в управлінні організацією (фірмою, підприємством...), а також сучасний стан і перспективи розвитку.

Виклад основного матеріалу дослідження. Аналіз видів управлінської діяльності дозволяє визначити завдання, вирішувані в організації, і виконавців цих завдань [1; 3]. За ступенем інтелектуальності і складності завдання можна класифікувати наступним чином:

Перший клас – найбільш прості завдання, які складаються з повністю формалізованих процедур і виконання яких, крім витрат часу, не становить ніякої складності для виконавців. Ці завдання стандартизуються і програмуються. До них відносяться контроль і облік, оформлення документів, їх тиражування, розсилка та ін. Такі завдання вирішуються практично всіма автоматизованими інформаційними системами.

Завдання цього класу, якщо вони використовуються для прийняття рішень, називаються завданнями прийняття рішень в умовах повної визначеності. При цьому випадкові і невизначені чинники відсутні.

Другий клас – більш складні завдання: прийняття рішень в умовах ризику, тобто в тому випадку, коли наявні випадкові чинники, для яких відомі закони їх впливу. Постанова і вирішення таких завдань можливі на основі методів теорії *ймовірностей, аналітичного та імітаційного моделювання*.

Третій клас завдань складають слабко структуровані завдання, які містять невідомі або невимірювані компоненти (кількісно не оцінені). Для цих завдань характерна відсутність методів розв'язання на основі безпосереднього опрацювання даних. Постанова завдань базується на прийнятті рішень в умовах неповної інформації. У ряді випадків, на основі теорії *нечітких множин* і застосувань цієї теорії вдається побудувати формальні схеми рішення.

Четвертий клас завдань складають завдання прийняття рішень в умовах протидії або *конфлікту* (наприклад, необхідно враховувати наявність активно діючих конкурентів). В завданнях цього класу можуть бути наявні випадкові чинники, для яких невідомі закони їх впливу. Постанова і вирішення таких завдань можливі (але не завжди) методами теорії *ймовірностей, нечітких множин* і теорії ігор.

П'ятий клас – найбільш складні завдання прийняття рішень, які характеризуються відсутністю можливості формалізації через високий ступінь невизначеності. До таких завдань відноситься більшість проблем прогнозування, перспективного планування.

Технологія діяльності керівника характеризується такими особливостями:

- при централізації прийняття рішень різко збільшуються обсяги інформації, зменшується час на обдумування і аналіз, зростає складність комплексного врахування всіх даних;
- виникає значна частка поточних завдань, які не дозволяють зосередити увагу на стратегічних цілях;
- не враховується роль організаційної поведінки, вплив зовнішнього середовища і психологічних аспектів прийняття рішення;
- переважають проблеми, обумовлені звичками, досвідом, традиціями і іншими неформалізованими обставинами;
- при прийнятті рішень керівник не завжди у змозі описати і навіть уявити досить повну модель ситуації, а керується лише деякими уявленнями про неї;
- діяльність керівника значною мірою залежить від стилю керівництва, від ступеню знань причин і наслідків, ясності уявлення взаємозв'язків обсягу наявної інформації.

Ефективність функціонування організації в основному визначається продуктивністю діяльності спеціалістів, особливо у питаннях створення нової інформації [1; 2].

Спеціалісти (керівники...) у своїй галузі, які знайомі з основами інформаційного менеджменту, забезпечують практично всю інформа-

ційну підготовку (СППР). Вони є основними виконавцями різного роду (завдань, доручень, підготовкою правових документів і т.ін.), визначають їх якість.

Основний клас завдань, притаманний офісу, – документально-правове забезпечення управління. Незалежно від класу завдань, рішення будь-якого з них передбачає проведення великого обсягу типових офісних робіт, які включають:

– опрацювання вхідної і вихідної інформації, ознайомлення і відповіді на листи (як електронні, так і звичайні), написання звітів, циркулярів та іншої документації, яка може містити також малюнки і діаграми;

– збирання і подальший аналіз деяких даних, наприклад, звітності за певні періоди часу за різними підрозділами або організаціями, яка задовольняє різні критерії відбору;

– збереження інформації, яка надійшла, забезпечення швидкого доступу до неї і пошук необхідної у даний момент інформації.

Діяльність має бути чітко скоординована між особами, які її виконують; повинні бути забезпечені тісні зв'язки, які дозволяють обмінюватись інформацією у короткі терміни, а процес руху документів має бути ефективно організований за допомогою сучасних ІТ технологій.

Діяльність в галузі інформаційного менеджменту пов'язана з проведенням таких видів робіт:

1. Виявлення кола управлінських завдань, які розв'язуються як на рівні всієї організації, так і в кожному з її підрозділів.

2. Оцінка значущості окремих напрямів діяльності організації на певних етапах її розвитку.

3. Уточнення складу і структури інформаційних матеріалів, необхідних для забезпечення управлінських рішень.

Ефективність будь-якої інформаційної системи значною мірою залежить від якості інформації, яка до неї вводиться. Необхідний рівень якості забезпечується шляхом фільтрації вхідного потоку інформації.

Види інформаційно-аналітичної діяльності

У системі управління існує значна кількість проблем, які характеризуються інформаційною відкритістю і невизначеністю меж проблемної галузі, унікальністю кожної ситуації, високими вимогами до оперативності прийняття рішень за умови фрагментованості та протирічливості інформації і потребують інформаційно-аналітичного забезпечення.

До аналітичної діяльності відносять ті процедури і процеси інтелектуальної діяльності, які мають ознаки творчості, породжують нову інформацію, дозволяють виявляти нові проблеми або їх аспекти, пропонувати нетрадиційні способи їх вирішення [1].

Бізнес, як сфера інформаційної діяльності, є предметною галуззю з притаманними тільки їй завданнями, джерелами і каналами одержання

інформації, з новою понятійною парадигмою, пов'язаною із певною структурою управління діяльністю, її цілями і критеріями. Сфера підприємництва потребує осмислення нових підходів до інформаційної діяльності, вироблення адекватних форм і методів її забезпечення і підготовки кадрів, які володіють цими підходами, формами і методами.

Інформаційне забезпечення управління і бізнесу включає [7] :

- пошук і оцінку ідей, гіпотез, рішень;
- виявлення і опис проблем, тенденцій, альтернатив, *конфліктних і надзвичайних ситуацій*;
- багатокритеріальний аналіз даних і оцінка складних об'єктів;
- інформаційне моделювання проблем і вибір методів їх вирішення;
- формування системи критеріїв і оцінок, інформаційна експертиза планів, програм, наукових і конструкторських досліджень, проектних робіт;
- оцінка і впровадження науково-технічних досягнень і передового досвіду конкуруючих організацій;
- збирання і аналіз даних про партнерів і конкурентів;
- визначення поведінки в конкурентній боротьбі, конфліктах, протистоянні; аналіз і прогнозування надзвичайних ситуацій, пошук їх аналогів;
- аналіз і прогнозування “лідерів” у комерції, науці, технології, техніці, виробництві;
- інформаційне супроводження розробки прогнозів розвитку галузі, підприємства, регіону;
- акумулювання і оцінка ініціатив, інновацій і розробка пропозицій з їх використання;
- інформаційно-діагностичний аналіз ліцензійної діяльності і угод;
- діагностичний, прогнозний аналіз торговельних угод, пропозицій по бартеру, лізингу, біржових процедурах, контрактах, намірах, угодах, поставках, фінансових процедурах та ін.;
- інформаційна експертиза проектів з ризиковим фінансуванням;
- інформаційна експертиза проектів для інноваційних банків;
- прогнозування хвиль економічної кон'юнктури;
- прогнозування хвиль соціального розвитку;
- аналіз комерційного рейтингу фірм, партнерів і конкурентів;
- аналіз соціально-політичного рейтингу;
- накопичення відомостей і їх використання для посередницької діяльності в науці, технології, виробництві, в діяльності бірж, банків, у великих програмах, соціальних і політичних заходах;
- накопичення і використання відомостей про виставки, аукціони, ярмарки, конференції, наради;
- редакційно-аналітична діяльність і підготовка аналітичних матеріалів, довідок, доповідей, прогнозів, реклами.

З розвитком інформатизації бізнесу, особливо її технічної складової – комп'ютеризації, змінюється автоматизоване робоче місце (АРМ) працівників офісу – тепер їх оточують різні засоби інформатизації з новими можливостями. Широке впровадження глобальних комп'ютерних мереж дозволяє підприємствам розширювати міжнародні економічні зв'язки. Тому управлінцям доводиться працювати у відкритому інформаційному просторі з різномовним текстом, переглядати великі масиви інформації, здійснювати їх переклад і аналіз для виявлення тенденцій, закономірностей, створювати проблемно-орієнтовані бази даних.

Сучасний бізнес зробив якісний крок у бік глобальної комп'ютеризованої комерції. За допомогою електронних технологій здійснюються ділові операції – встановлення контактів, укладання угод, комп'ютеризована торгівля товарами і послугами та ін. Для будь-яких видів і форм інформаційного забезпечення можна сформулювати спільні вимоги, яким повинна відповідати інформація [1; 3].

1. Якісні:

– вірогідність – наближеність інформації до першоджерела або точність її передачі (відсутність випадкових або умисних спотворень інформації);

– об'єктивність – інформація, “очищена” від неминучих спотворень, які виникли при її передаванні, а також від суб'єктивних спотворень психологічного плану;

– однозначність – навіть достовірна і об'єктивна інформація повинна підлягати повторній перевірці;

– своєчасність – інформація потрібна у потрібний час і у потрібному місці;

– релевантність – характеристика ступеня відповідності змісту документа, знайденого в результаті інформаційного пошуку, змісту інформаційного запиту;

– пертинентність – характеристика ступеня відповідності змісту документа, знайденого в результаті інформаційного пошуку, інформаційній потребі, вираженій в інформаційному запиті;

– актуальність – важливість інформації у даний конкретний момент часу у прийнятті конкретного рішення.

2. Кількісні:

– повнота – необхідна і достатня кількість інформації для прийняття рішення;

– достатність – кількість інформації, достатня для вирішення поставленого вузького завдання.

3. Ціннісні:

– значущість для організації;

– вартість – всі видатки за фактом одержання інформації.

Успішна діяльність організацій залежить від його вміння ефективно використовувати інформаційні технології, серед яких помітне

місце займають (Інтернет, Інтранет, Екстранет). Дані технології доцільно використовувати практично у всіх бізнес-процесах, але найдоцільнішим є їхнє використання в організації та управлінні збутовою діяльністю підприємства, зокрема в просуванні продукції на ринок.

Таким чином, результат управління залежить від того, наскільки продумано, систематично і професійно відбувається інформаційна взаємодія між суб'єктом і об'єктом управління.

Малі підприємства – це організаційно-економічний вид підприємств, які згідно зі ст. 2 Закону України “Про підприємства в Україні” кваліфікуються за показником чисельності зайнятих працівників із градацією за сферами діяльності. На рис. 1 наведено структурну схему ролі і місця малого підприємництва в ринковій економіці.

Верховною Радою України 19 жовтня 2000 року було ухвалено Закон України “Про державну підтримку малого підприємництва”. Відповідно до цього Закону суб'єктами малого підприємництва є: фізичні особи, зареєстровані у встановленому законом порядку як суб'єкти підприємницької діяльності (громадяни-підприємці); юридичні особи – суб'єкти підприємницької діяльності будь-якої організаційно-правової форми та форми власності, в яких середньооблікова чисельність працюючих за звітний період (календарний рік) не перевищує 50 осіб та обсяг річного валового доходу не перевищує 500000 євро. Середньооблікова чисельність працюючих визначається з урахуванням усіх працівників, у тому числі тих, що працюють за договорами та за сумісництвом, а також працівників представництв, філій, відділень та інших відокремлених підрозділів. За оцінками експертів Світового банку, тільки у країнах, що розвиваються, існує близько 50 визначень малого підприємства. У різних країнах використовують різні класифікаційні ознаки (критерії) приналежності підприємства до розряду малих (табл. 1).

Формування правової бази підприємництва – найголовніша передумова його становлення та розвитку. Законодавство у сфері підприємництва має становити єдину систему як за взаємною узгодженістю норм, так і за цілісністю самого нормативно-правового регулювання підприємницької діяльності.

Закон України “Про державну підтримку малого підприємництва” визначає такі напрямки державної підтримки малого підприємництва:

1. Формування інфраструктури підтримки і розвитку малого підприємництва, організація державної підготовки, перепідготовки та підвищення кваліфікації кадрів для суб'єктів малого підприємництва.
2. Встановлення системи пільг для суб'єктів малого підприємництва.
3. Запровадження спрощеної системи оподаткування, бухгалтерського обліку та звітності.
4. Фінансово-кредитна підтримка малого підприємництва.

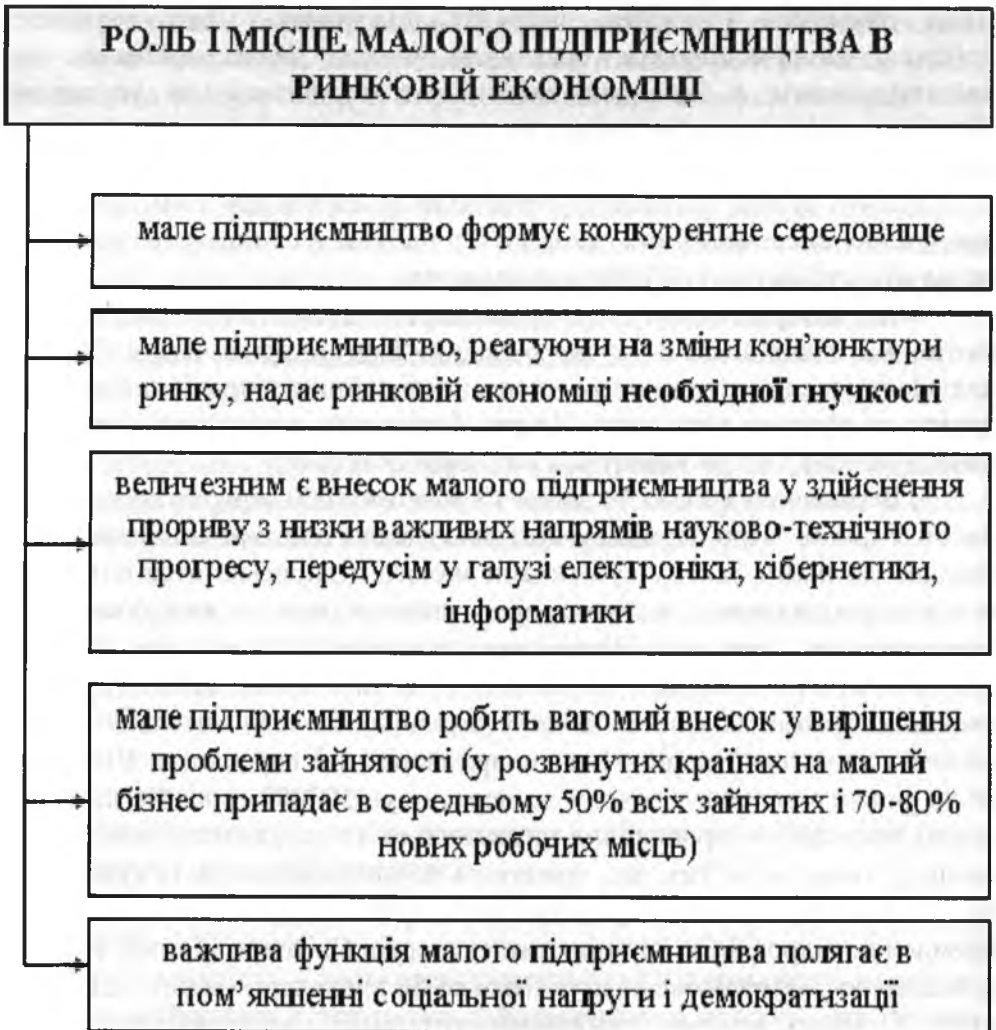


Рис. 1. Роль і місце малого підприємництва в ринкових умовах

Таблиця 1. Класифікаційні ознаки малих підприємств

Країна	Критерії приналежності господарюючих суб'єктів до підприємств малого бізнесу в деяких зарубіжних країнах		
	Загальна сума активів	Обсяг продажу(виручки)	Середня чисельність працівників
Франція	1500 тис. євро	3000 тис. євро	40
Німеччина	3,9 млн. євро	8 млн. євро	50
Італія	2 млрд. євро	4 млрд. євро	50
Люксембург	77 млн. євро	160 млн. євро	50
Португалія	180 млн. євро	370 млн. євро	50
Іспанія	230 млн. євро	480 млн. євро	50

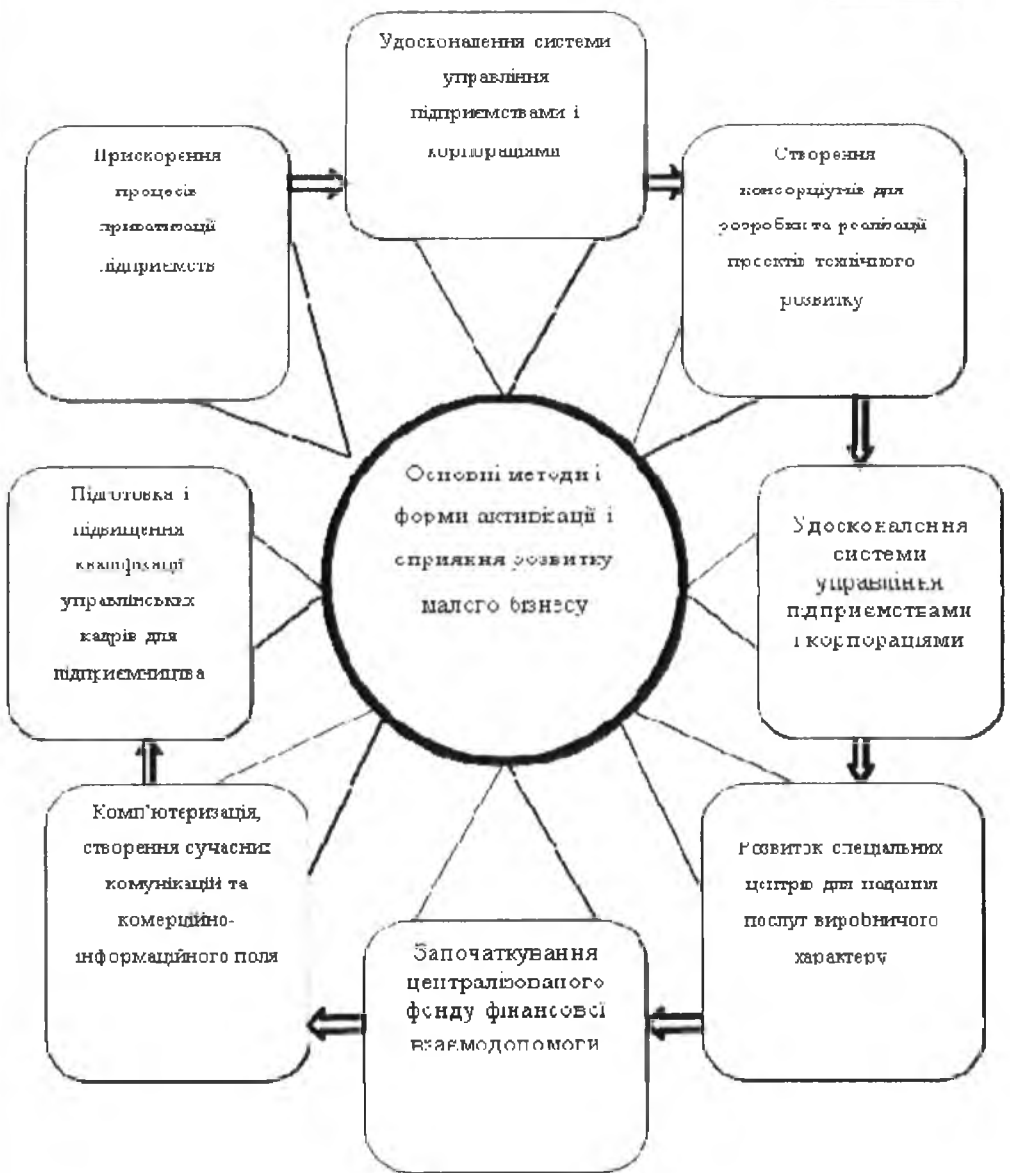


Рис. 2. Шляхи вирішення проблем розвитку малого бізнесу в Україні

5. Залучення суб'єктів малого підприємництва до виконання науково-технічних і соціально-економічних програм, здійснення поставки продукції (робіт, послуг) для державних та регіональних потреб.

Досить очевидно, що заходи державної підтримки малого бізнесу, які потребують скільки-небудь значного фінансового забезпечення, на даному етапі не можуть бути ефективно реалізовані. Тому найбільш реальним і дієвим резервом державної підтримки малого підприємництва у найближчій перспективі є вдосконалення нормативно-правового регулювання у відповідній сфері. Важливі напрями такого вдосконалення впливають із вищезгаданої концепції, це:

- встановлення чітких і надійних правових гарантій, які забезпечували б свободу і захист підприємницької діяльності;
- розробка і прийняття нормативних актів, спрямованих на забезпечення розвитку ринкових відносин;
- удосконалення діючого законодавства, що регулює підприємницьку діяльність, з метою усунення внутрішніх суперечностей і скасування норм, які перешкоджають розвитку приватної ініціативи та підприємництва.

Значний внесок у становлення та розвиток малого підприємництва в Україні робить міжнародна підтримка. Вона значно доповнює та компенсує заходи державної підтримки, особливо фінансової. На рис. 2 представлено шляхи вирішення проблеми малого бізнесу [2; 5; 6].

Висновки. Таким чином, дослідивши загальний стан інформаційно-аналітичної та правової діяльності в системі управління малим бізнесом, ми можемо зробити наступні висновки, по-перше, успішна діяльність фірм залежить від їх вміння ефективно використовувати інформаційні технології, серед яких помітне місце займають (Інтернет, Інтранет, Екстранет). Дані технології доцільно використовувати практично у всіх бізнес-процесах, але найдоцільнішим є їхнє використання в організації та управлінні збутовою діяльністю фірм, зокрема в просуванні продукції на *ринок*. По-друге, використання можливостей сучасних ІТ технологій в інформаційному забезпеченні малого бізнесу уможливить вирішення окремих проблем розвитку малого бізнесу в Україні. По-третє, узагальнюючи особливості створення в Україні інформаційного ринку, можна стверджувати, що держава не змогла взяти під контроль організацію інформаційної інфраструктури в окремих регіонах, галузях, виробництвах, а тому цей процес сьогодні розвивається досить стихійно. Проте модель інформаційно-аналітичної діяльності не може істотно відрізнитися від тих моделей, що вже сформувалися в розвинутих країнах в умовах ринкової економіки, оскільки на даному етапі має вирішуватися головне завдання – інтеграція вітчизняної інформаційної інфраструктури у світовий інформаційний ринок.

Література

1. Матвієнко О. В. Основи інформаційного менеджменту: навч. посібн. / О.В.Матвієнко. – К.: центр навч. літератури, 2004. – 128 с.
2. Вовчак І.С. Інформаційні системи та технології в менеджменті: навч. посібн. / І.С.Вовчак. – Тернопіль : Карт-Бланш, 2001. – 354 с.
3. Томашевський О.М. Інформаційні технології та моделювання бізнес-процесів: навч. посібн. / О.М.Томашевський, Г.Г.Цегелик, М.Б.Вітер, В.І.Дудук. – К.: В-во “Центр учбової літератури”, 2012. – 296 с.
4. Шеннон К. Работы по теории информации і кибернетике [Електронний ресурс] / Клод Шеннон. – М.: ИЛ, 1963. – 824 с.

5. Заїкіна О.О. Проблеми розвитку малого бізнесу на сучасному етапі трансформації економіки України / О.О.Заїкіна // Збірник матеріалів конференції “Проблеми розвитку малого бізнесу в Україні”: УПСК, 2006. – С. 47-51.
6. Долішній Б.С. Основи інформаційного менеджменту: навч. посібн. / Б.С.Долішній. – Івано-Франківськ: ПВНЗ “Галицька академія”, 2011. – 253 с.
7. Закон України “Про основні засади розвитку інформаційного суспільства в Україні на 2007-2015 роки”: за станом на 9 січня 2007 року / Верховна Рада України // Відомості Верховної Ради України. – 2007. – №12. – 102 с.
8. Закон України “Про державну підтримку малого підприємництва” // Офіц. вісн. України. – 2000. – № 46. – С. 22-26.
9. Долішня Т.І. Особливості методів оцінки ефективності управління діяльністю підприємства / Т.І.Долішня, Б.С.Долішній // Наукові вісті приватного вищого навчального закладу “Галицька академія”. – Івано-Франківськ, 2012. – №1(20). – С. 90-95.

Стаття надійшла до редакційної колегії 10.09.2013 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., професором Мойсичишином В.М., д.т.н., професором Говдяком Р.М. (м. Київ)

INFORMATION-ANALYTICAL AND LEAGAL ACTIVITY IN SMALL BUSINESS MANAGEMENT SYSTEM

B. S. Dolishni

*Ivano-Frankivs'k University of Right by King Danylo Galytsky;
76000, Ivano-Frankivs'k, Konovalets str., 35*

The article highlights the specific of information management in the management of small businesses (SB), which requires a systematic approach not only to the analysis of primary data, but also to its generalization in accordance with the cyclical phases (stages) management solutions, structure of government, previous experience in solving problematic situations and other. The interaction of object and subject management.

Keywords: differentiation, object and subject of management, efficiency, quality and quantity of information cyclicity of phases, reliability, objectivity.

ОЦІНЮВАННЯ ВПЛИВУ МІСЦЕВИХ ОПОРІВ НА ГІДРАВЛІЧНУ ЕНЕРГОВИТРАТНІСТЬ ПОЛІЕТИЛЕНОВИХ ГАЗОВИХ МЕРЕЖ

Ю. І. Дорошенко

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (0342) 72 71 39; e-mail: x-55@list.ru*

Роботу присвячено оцінюванню впливу місцевих опорів на гідравлічну енерговитратність поліетиленових газових мереж. Досліджено і проаналізовано практику проектування газових мереж. Проведено теоретичні та експериментальні дослідження динаміки руху газу терморезисторними з'єднаннями поліетиленових трубопроводів та визначено коефіцієнти їх місцевих опорів. Знайдено коефіцієнти еквівалентної довжини залежно від типу та кількості місцевих опорів на 1 км довжини газових мереж.

Ключові слова: газові мережі, динаміка руху, терморезисторне з'єднання, поліетиленові трубопроводи, еквівалентна довжина, муфта, сидловий трійник, терморезисторний трійник, коліно, редуційний перехідник, число Рейнольдса, математична модель, рівняння Нав'є-Стокса.

Поліетиленові труби усе ширше застосовуються у вітчизняній та світовій практиці спорудження та реконструкції газових мереж. Вони дешевші, ніж сталеві, їх легко монтувати, зварювання максимально автоматизоване, вони не кородують, дозволяють реконструювати газової мережі безтраншейними технологіями (метод "труба в трубі").

Основним чинним нормативним документом, який встановлює вимоги до проектування газових мереж як зі сталевих, так і з поліетиленових труб в Україні є ДБН В.2.5-20-2001 "Газопостачання. Інженерне обладнання будинків і споруд. Зовнішні мережі та споруди"[1]. За однією і тою ж самою методикою, наведеною у цьому нормативному документі, проектуються газові мережі як зі сталевих, так і з поліетиленових труб. Такий уніфікований підхід до проектування газових мереж із труб із різною шорсткістю внутрішньої поверхні та з різними за конструкцією місцевими опорами є сумнівним і вимагає досліджень. Так місцеві опори поліетиленових трубопроводів на сьогодні практично не вивчені. Для них відсутні довідкові дані значень їх коефіцієнтів, а залежностей для їх розрахунку немає. До того ж у ряді випадків вони мають значно складнішу конфігурацію внутрішньої поверхні, ніж аналогічні місцеві опори сталевих трубопроводів, а отже і їх коефіцієнти є значно більші.

Тому прийняті у ДБН В.2.5-20-2001 припущення про те, що втрати напорю у місцевих опорах рівні 10 % від втрат напорю по довжині для поліетиленових трубопроводів, шорсткість внутрішньої поверхні яких у декілька разів менша, ніж сталевих, вимагає перегляду. Тільки газові мережі, проектування яких здійснюється за методиками максимально наближеними до реальних умов є мінімально гідравлічно енерговитратні, завжди здатні забезпечити мінімально-допустимі тиски усім споживачам та мають перспективу розвитку. Тому теоретичні та експериментальні дослідження газових мереж із поліетиленових труб на сьогодні є актуальними.

Об'єктом та предметом досліджень даної наукової роботи є поліетиленові газові мережі довільної конфігурації (розгалужене дерево, кільцева) та газодинамічні процеси в поліетиленових газових мережах низького та середнього тисків.

Проведений аналіз методик проектування газових мереж засвідчив, що проектування газових мереж із сталевих та поліетиленових труб здійснюється за аналогічними методиками. В усіх методиках, у тому числі наведеній у нормативному документі, втрати тиску у місцевих опорах приймаються рівними 10 % від втрат по довжині. Таке положення для поліетиленових труб є сумнівним, оскільки шорсткість внутрішньої поверхні поліетиленових труб є в декілька разів менша, ніж сталевих, а місцеві опори в ряді випадків мають значно складнішу конфігурацію внутрішньої поверхні ніж аналогічні місцеві опори сталевих трубопроводів, а отже їх коефіцієнти є значно більші. Місцеві опори поліетиленових трубопроводів на сьогодні практично не вивчені, для них відсутні довідкові дані значень їх коефіцієнтів, а залежностей для їх розрахунку немає.

З метою вивчення місцевих опорів поліетиленових трубопроводів було розглянуто усі методи з'єднання поліетиленових труб в нитку та встановлено, що величини місцевих опорів поліетиленових трубопроводів залежать від технології зварювання поліетиленових труб. Тільки у разі застосування терморезисторного з'єднання утворюються місцеві опори, які не мають аналогів та чинять найбільший вплив на динаміку руху газу трубопроводом. Тому терморезисторні з'єднання вимагають детальних досліджень. В практиці спорудження газових мереж із поліетиленових труб саме ці з'єднання отримали найширше розповсюдження.

Здійснено аналіз конструкції кожного терморезисторного з'єднання та встановлено, що кожне з'єднання складається з декількох простих місцевих опорів, які близько розміщені один від одного (різких розширень, різких звужень, поворотів тощо), а отже, попередній місцевий опір впливає на місцевий опір розміщений за ним, що унеможливає здійснення розрахунку коефіцієнтів місцевих опорів терморезисторних з'єднань поліетиленових трубопроводів за відомими залежностями.

Не зважаючи на значну кількість робіт, присвячених удосконаленню методів проектування газових мереж, низка важливих для теорії та практики питань не знайшла у них відображення.

За результатами аналізу наведених в літературних джерелах методик проектування газових мереж [2-13] було сформовано задачі досліджень та обгрунтовано необхідність проведення теоретичних та експериментальних досліджень динаміки руху газу терморезисторними з'єднаннями поліетиленових трубопроводів.

Для теоретичних досліджень динаміки руху газу терморезисторними з'єднаннями поліетиленових трубопроводів було застосовано програмний комплекс Flow Vision, який базується на скінчено-об'ємному методі розв'язку рівнянь гідрогазодинаміки.

Математичною моделлю руху газу, яка застосовується в програмному комплексі є сукупність рівнянь, а саме рівняння Нав'є-Стокса, яке складається з двох рівнянь записаних у векторній формі: рівняння руху газу та рівняння нерозривності.

Для моделювання динаміки руху газу терморезисторними з'єднаннями поліетиленових трубопроводів була вибрана стандартна k - ε (k – турбулентна енергія, ε – швидкість дисипації турбулентної енергії) модель турбулентності, яка дозволяє отримати достатньо точні результати.

Стандартна k - ε модель турбулентності передбачає розв'язання наступних рівнянь:

- рівняння переносу турбулентної енергії k

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathcal{G} k) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + \mu_t G - \rho \varepsilon ; \quad (1)$$

- рівняння переносу турбулентної дисипації ε

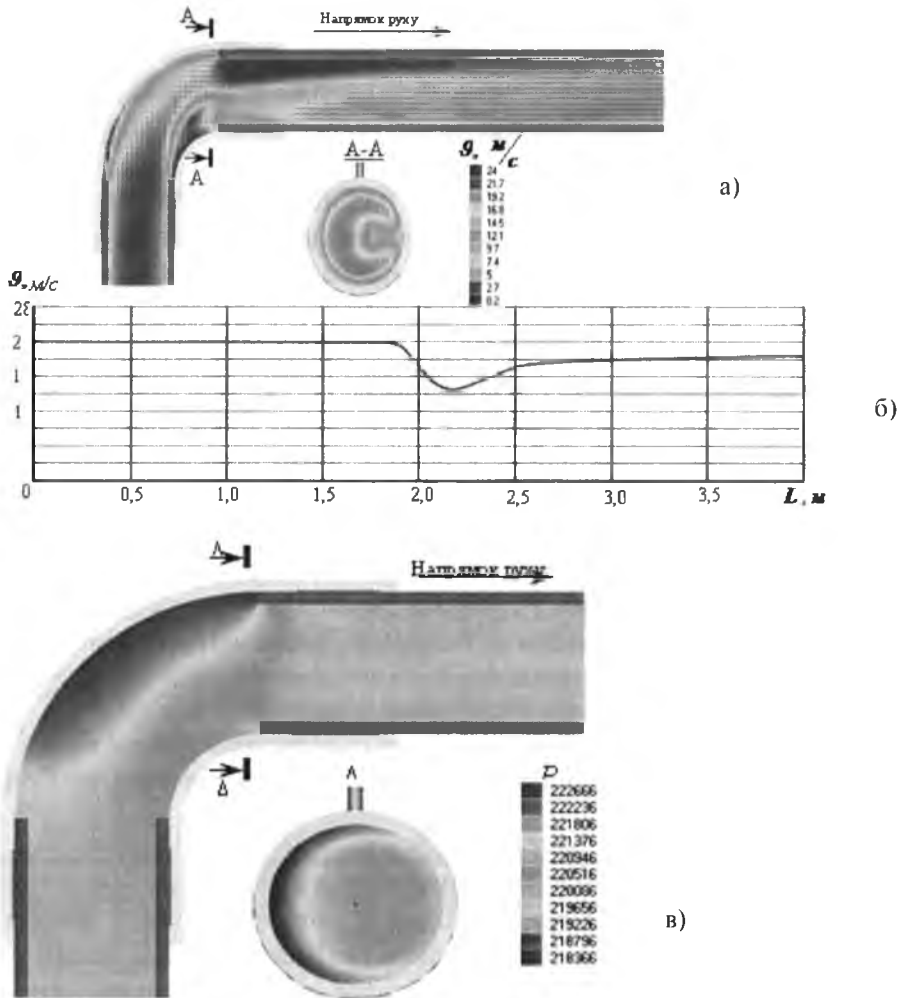
$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathcal{G} \varepsilon) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \mu_t G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} , \quad (2)$$

де \mathcal{G} – швидкість газу; μ – молекулярна динамічна в'язкість газу; μ_t – турбулентна динамічна в'язкість газу; σ_k – коефіцієнт, який рівний одиниці; G – розрахунковий параметр; σ_ε – коефіцієнт, який рівний $\sigma_\varepsilon=1,3$, C_1 – коефіцієнт, який рівний $C_1=1,44$; C_2 – коефіцієнт, який рівний $C_2=1,92$.

Тривимірні моделі терморезисторних з'єднань, конструкція та геометричні розміри яких ідентичні промисловим зразкам, створювались в програмному комплексі MSC Nastran звідки імпортувались в програмний комплекс Flow Vision [14].

Для аналізу зміни швидкості потоку газу та тиску газу вздовж поліетиленового трубопроводу в місці установлення терморезисторних

з'єднань результати розрахунків візуалізувались в постпроцесорі програмного комплексу шляхом побудови тонової заливки модуля швидкості, векторів швидкості, які вказують напрям руху газу, тонової заливки тиску та графіків зміни швидкості і тиску вздовж трубопроводу. Приклад одержаних результатів для терморезисторного коліна наведено на рис. 1.



- а) розподіл модуля швидкості потоку газу та вектори швидкості газу в площині горизонтального повздовжнього перерізу терморезисторного коліна;
- б) зміна швидкості потоку газу вздовж повздовжньої осі терморезисторного коліна;
- в) розподіл тиску в площині горизонтального повздовжнього перерізу терморезисторного коліна.

Рис. 1. Результати теоретичних досліджень терморезисторного коліна:

Так під час проходження газового потоку терморезисторним коліном, у місці різкого розширення біля зовнішньої стінки утворюється незначний вихор, а біля внутрішньої стінки відбувається значне зниження швидкості потоку із відриванням потоку від стінки і утворенням знач-

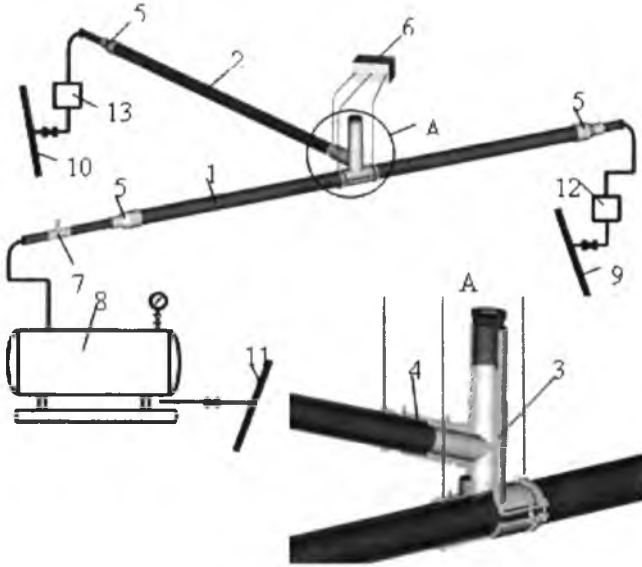
ного вихору (рис. 1,а). Такий розподіл швидкостей є нехарактерним для колін і зумовлений наявністю різкого розширення та різкого звуження та є однією з причин значного падіння тиску на виході коліна (рис. 1,в). У місці встановлення терморезисторної муфти між поліетиленовими трубами утворюється стійкий вихор, який приводить до незначного падіння тиску. У сідловому трійнику при русі газу основною магістраллю та відводом у сідловині трійника відбувається реверсний рух газу та відривання потоку від стінки на вході у відвід, що приводить до значного зменшення швидкості та тиску у відводі сідлового трійника. Аналогічна картина спостерігається при русі газу тільки відводом сідлового трійника.

Ці процеси є однією з причин падіння тиску на виході редуційного перехідника. Під час проходження газового потоку відводом та основною магістраллю терморезисторного трійника між поліетиленовими трубами напроти відводу спостерігається реверсний рух газу, що є однією з причин падіння тиску у основній магістралі, а на початку відводу відривання газового потоку від стінки, що є однією з причин падіння тиску у відводі. Виявлені місця реверсного руху газу, місця утворення вихорів та відривання потоку від стінки терморезисторних з'єднань свідчать, що під час розробки існуючих конструкцій терморезисторних з'єднань не враховувалось, який вплив вони будуть чинити на втрати тиску у газовій мережі. За падінням тиску на терморезисторних з'єднаннях визначених з графіків зміни тиску вздовж з'єднання та швидкістю газу перед входом у з'єднання визначено коефіцієнт місцевого опору кожного терморезисторного з'єднання (табл. 1).

Таблиця 1. Коефіцієнти місцевих опорів терморезисторних з'єднань поліетиленових трубопроводів визначені теоретично та експериментально

Коефіцієнт місцевого опору терморезисторного з'єднання	Терморезисторне з'єднання						
	муфта	коліно	сідловий трійник		трійник		перехід редуційний
			газ рухається тільки основною магістраллю	газ рухається тільки відводом	газ рухається тільки основною магістраллю	газ рухається тільки відводом	
Теоретичний	0,2	2,1	0,15	26	0,2	5,4	16,6
Експериментальний	0,2	2,8	0,20	35	0,2	6,5	20,8

Експериментальні дослідження динаміки руху газу терморезисторними з'єднаннями поліетиленових трубопроводів проводились на базі ВАТ "Івано-Франківськгаз" у лабораторії перевірки промислових лічильників газу на природному газі. Для цього було розроблено і побудовано експериментальний стенд (рис. 2).



1 – поліетиленовий трубопровід (основна магістраль); 2 – поліетиленовий трубопровід (відвід); 3 – сідловий трійник; 4 – терморезисторна муфта; 5 – редуційний перехідник; 6 – багатопараметричний перетворювач тиску, температури та перепаду тиску Фішер модель 3095; 7 – голковий вентиль; 8 – ресивер; 9, 10, 11 – діючий газопровід; 12, 13 – двоканальний обчислювач об'єму газу ОЕ-22ЛА/2.

Рис. 2. Схема експериментального стенда для дослідження динаміки руху газу сідловим трійником

Для експериментальних досліджень було підібрано об'єкти досліджень – терморезисторні з'єднання поліетиленових трубопроводів (муфти, сідлові трійники, коліна, редуційні перехідники, трійники) різних типорозмірів. Для вивчення одночасного впливу ряду чинників (багатофакторний експеримент) на досліджуваний об'єкт застосовують методи математичного планування експерименту.

За результатами експериментальних досліджень побудовано графічні залежності коефіцієнта місцевого опору від числа Рейнольдса для різного типорозміру терморезисторних з'єднань при низькому та середньому тисках (рис. 3). Різкі стрибки на графічних залежностях свідчать про виникнення завихрень під час проходження газового потоку з'єднаннями, місця розміщення яких були виявлені під час теоретичних досліджень динаміки руху газу терморезисторними з'єднаннями. Проведені дослідження виявили додатковий поділ турбулентної зони та було визначено відповідні перехідні числа Рейнольдса залежно від зна-

чення гідравлічної шорсткості труб. Зі збільшенням числа Рейнольдса коефіцієнт місцевого опору спочатку зменшується, а при досягненні критичного числа знову починає зростати. Критичне число Рейнольдса, при якому досягається мінімум, а також числа Рейнольдса загалом залежать від відносної (гідравлічної) шорсткості, яка у свою чергу залежить від товщини пристінового шару.

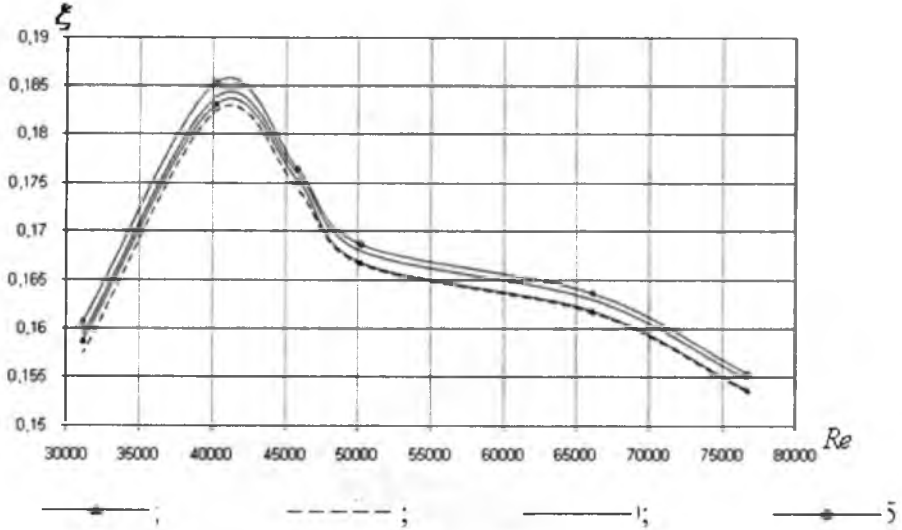


Рис. 3. Залежність коефіцієнта місцевого опору сідлового трійника від числа Рейнольдса при русі потоку газу тільки основною магістраллю для різних типорозмірів труб (мережа низького тиску)

Виведено математичні залежності, які дозволяють визначити коефіцієнти місцевих опорів терморезисторних з'єднань для кожної зони. Так для сідлового трійника при русі потоку газу тільки основною магістраллю (мережа низького тиску) залежність коефіцієнта місцевого опору від числа Рейнольдса наступна:

- при $31000 < Re < 40000$

$$\xi = 2,754 \cdot 10^{-6} \cdot Re + 0,07167; \quad (3)$$

- при $40000 < Re < 50000$

$$\xi = -1,579 \cdot 10^{-6} \cdot Re + 0,2462; \quad (4)$$

- при $50000 < Re$

$$\xi = -1,708 \cdot 10^{-11} \cdot Re^2 + 1,673 \cdot 10^{-6} \cdot Re + 0,1257. \quad (5)$$

Аналогічні графічні та аналітичні залежності одержані для решти терморезисторних з'єднань поліетиленових трубопроводів.

За результатами експериментальних досліджень було визначено значення коефіцієнтів місцевих опорів терморезисторних з'єднань (табл. 1). Експериментальні дослідження підтвердили адекватність теоретичних досліджень динаміки руху газу терморезисторними з'єднаннями поліетиленових трубопроводів.

Провівши теоретичні дослідження було прийнято рішення про необхідність розробки рекомендацій з удосконалення методики проектування газових мереж із поліетиленових труб, удосконалення конструкції терморезисторних з'єднань та дослідження ефективності застосування удосконалених конструкцій терморезисторних з'єднань.

Теоретичні та експериментальні дослідження засвідчили, що у терморезисторних з'єднаннях відбуваються значні втрати тиску, які є значно більші, ніж втрати тиску в аналогічних місцевих опорах сталевих трубопроводів. Також втрати тиску по довжині залежать від шорсткості внутрішньої поверхні труб, яка для поліетиленових трубопроводів є в декілька разів менша, ніж для сталевих, а тому втрати тиску по довжині для поліетиленових трубопроводів будуть менші, ніж для сталевих. Тому прийняте у ДБН В.2.5-20-2001 положення про те, що втрати напору у місцевих опорах дорівнюють 10 % від загальних втрат по довжині, для поліетиленових трубопроводів є сумнівним і вимагає проведення відповідних досліджень. З цією метою була розроблена схема газової мережі реального населеного пункту і проведено її розрахунок за методикою наведеною у ДБН В.2.5-20-2001 та розрахунок із урахуванням місцевого опору кожного терморезисторного з'єднання, які визначались за методикою розробленою у роботі. Результати розрахунку газової мережі за основними напрямками наведено в табл. 2.

Як бачимо, у разі розрахунку газової мережі із поліетиленових труб за методикою наведеною у ДБН В.2.5- 20-2001 втрати тиску набагато менші, ніж у разі розрахунку газової мережі із урахуванням кожного місцевого опору. Втрати тиску у місцевих опорах при урахуванні кожного місцевого опору на деяких ділянках досягають набагато більшої величини, ніж закладені в нормативну методику, а в окремих випадках набагато перевищують втрати тиску по довжині. Якщо ж урахувати ще підключення додаткових споживачів газу за допомогою сідлового трійника, то необхідно геометричні параметри системи, зокрема діаметр трубопроводів, на деяких ділянках треба збільшити на декілька порядків. Тому урахування кожного місцевого опору поліетиленових трубопроводів дозволить на стадії проектування забезпечити мінімально-допустимий тиск усім споживачам та можливість розвитку газової мережі.

На основі проведених досліджень було визначено коефіцієнти еквівалентної довжини залежно від кількості місцевих опорів на 1 км довжини газової мережі та типу місцевих опорів. Таким чином, при кількості місцевих опорів менше 3 треба враховувати коефіцієнт місцевого опору кожного з'єднання, при кількості місцевих опорів від 4 до 9 коефіцієнт еквівалентної довжини складас 1,1, від 10 до 14 – 1,2, від 15 до 19 – 1,3, від 20 до 24 – 1,4, від 25 до 49 – 1,5, від 50 до 59 – 1,93, від 60 до 69 – 2,12, від 70 до 79 – 2,3, від 80 до 89 – 2,5, від 90 до 100 – 2,7, а

вище 100 – 2,9. Для спрощення таких розрахунків розроблене відповідне програмне забезпечення.

Таблиця 2. Втрати тиску по основних напрямках газової мережі із поліетиленових труб розраховані за методикою наведеною у ДБН В.2.5-20-2001 та розраховані із урахуванням місцевого опору кожного терморезисторного з'єднання

Основний напрямок	Кількість місцевих опорів (загальна)	Кількість місцевих опорів (на 1 км)	Довжина, м	Загальні втрати, Па		Кінцевий тиск, Па		% від допустимого перепаду тиску (1200), Па	
				За методикою наведеною у ДБН В.2.5-20-2001	Із урахуванням місцевого опору кожного терморезисторного з'єднання	За методикою наведеною у ДБН В.2.5-20-2001	Із урахуванням місцевого опору кожного терморезисторного з'єднання	За методикою наведеною у ДБН В.2.5-20-2001	Із урахуванням місцевого опору кожного терморезисторного з'єднання
1	1123	598	1878	567	785	2433	2215	47	65
2	602	277	2174	650	905	2350	2094	54	75
3	18	37	486	365	347	2653	2635	30	29

Зменшити втрати тиску в газових мережах із поліетиленових труб можна зменшивши коефіцієнти місцевого опору терморезисторних з'єднань, що досягається шляхом удосконалення їх конструкції. Удосконалення полягає у виключенні чи суттєвому зменшенні втрат тиску у терморезисторних з'єднаннях, які зумовлені вихороутворенням, відриванням потоку від стінки та реверсним рухом газу, місця розміщення яких були виявлені під час теоретичних досліджень динаміки руху газу терморезисторними з'єднаннями.

На основі виконаних теоретичних та експериментальних досліджень динаміки руху газу терморезисторними з'єднаннями поліетиленових трубопроводів вирішено важливу наукову задачу зменшення гідравлічної енерговитратності поліетиленових газових мережах, а саме:

1. На основі досліджень сучасної практики проектування газових мереж встановлено, що для газопроводів із поліетиленових труб втрати тиску в місцевих опорах приймаються рівними 10% від загальних втрат

по довжині, тоді як значення еквівалентної шорсткості поліетиленових труб є значно меншим, ніж сталевих, а поліетиленові газові мережі містять місцеві опори, що мають складнішу конфігурацію внутрішньої поверхні.

2. Теоретичні дослідження динаміки руху газу місцевими опорами поліетиленових трубопроводів дозволили виявити, що у терморезисторних з'єднаннях спостерігається вихороутворення, наявний реверсний рух газу, відбувається відривання потоку від стінки фітинга, що у свою чергу приводить до значних втрат тиску. Теоретично визначено коефіцієнт місцевого опору кожного терморезисторного з'єднання, адекватність чого підтверджена експериментально. Експериментально виявлено додатковий поділ турбулентної зони і відповідні перехідні числа Рейнольдса та виведено математичні залежності для визначення коефіцієнта місцевого опору кожної зони.

3. Втрати тиску у терморезисторних з'єднаннях поліетиленових трубопроводів значно перевищують 10% від втрат по довжині. Визначено коефіцієнти еквівалентної довжини залежно від типу та кількості місцевих опорів на 1 км довжини газових мереж (коефіцієнт може бути рівний від 1 до 2,9).

Література

1. Газопостачання. Інженерне обладнання будинків і споруд. Зовнішні мережі та споруди: ДБН В.2.5-20-2001. – [Чинні від 2001-09-01]. – К.: Держбуд України, 2001. – 286 с.
2. Газопроводы из полимерных материалов: Пособие по проектированию, строительству и эксплуатации / [А.Л.Шурайц, В.Ю.Картин, Ю.Н.Вольнов]. – Саратов: Издательство “Журнал “Волга – XXI век””, 2007. – 612 с.
3. Гельмгольц Г. Основы вихревой теории / Г.Гельмгольц. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 82 с.
4. Микроструктура и качество стыковых сварных соединений полиэтилена / [А.Г.Гришок, А.Г.Шадрин, А.В.Золотарь и др.] // Автоматическая сварка. – 1990. – №11 (452). – С. 23-26
5. Грудницкая Т.Я. Определение коэффициентов гидравлического сопротивления на основе численного решения уравнений Навье–Стокса / Т.Я.Грудницкая, В.А.Люлька, А.В.Шипилин // Пневматика и гидравлика. – М.: Машиностроение, 1986. – Вып. 12. – С. 111-115
6. Зайцев К.И. Сварка полимерных материалов: [справочник] / [К.И.Зайцев, Л.Н.Мацюк, А.Г.Богдашевский и др.] – М.: Машиностроение, 1988. – 312 с.
7. Проектирование и строительство газопроводов из полиэтиленовых труб диаметром до 300 мм: СП 42-101-96. – [Чинний від 1996 – 08 – 01]. – М.: ВНИИСТ, 1996. – 101 с.

8. Свод правил по проектированию и строительству. Проектирование и строительство газопроводов из полиэтиленовых труб и реконструкция изношенных газопроводов: СП 42-103-2003. – [Чинний від 2003 – 11 – 27]. – М.: Полимергаз, 2003. – 201 с.
9. Уолтерс М. Полимеры используемые в Европе при производстве труб для газораспределительных сетей / М.Уолтерс, Б.Виккеринк // Инженерные сети из полимерных материалов. – 2007. – №3. – С. 43-45
10. Фаттахов М.М. Применение труб из термопластов при строительстве и реконструкции распределительных трубопроводов / М.М.Фаттахов // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело», 2006. – <http://www.ogbus.ru>
11. Cross H. Fnalysis of flow in networks of conduits or conductors – Illinois University, Urbana Eng. Exp.Station, Bul. 286, 1936.
12. Dynamic modelling of large-scale networks with application to gas distribution / J.Krblik, P.Stiegler, Z.Vostrá, J.Zbivorka // Academia Prague: 1988, 360 p.
13. PPI Handbook of Polyethylene Pipe – 1st Edition, 2006. – 542 p.
14. Дорошенко Я.В. Застосування сучасних програмних комплексів комп'ютерного моделювання для підвищення якості проектування та спорудження трубопроводів / Я.В.Дорошенко, Ю.І.Дорошенко, С.І.Тихонов // Науковий вісник Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу. – 2010. – №2 (24). – С. 117-120.
*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2013 р.
 Рекомендовано до друку д.т.н., професором Грудзом В.Я.,
 д.т.н., професором Говдяком Р.М. (м. Київ)*

EVALUATION OF THE INFLUENCE OF LOCAL HYDRAULIC RESISTANCE ON THE ENERGY CONSUMPTION OF PLASTIC GAS NETWORKS

J. I. Doroshenko

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
 76019, Ivano-Frankivs'k, Ukraine, Carpatska st., 15;
 ph. +380 (342) 72-71-39; e-mail: x-55@list.ru*

Dissertation is devoted to evaluating the impact of local resistance on the hydraulic energy consumption of plastic gas networks. Studied and analyzed the practice of design of gas networks. Theoretical and experimental studies of the dynamics of the gas connections of plastic pipe thermistors and their coefficients of local resistance. A coefficients of equivalent length, depending on the type and number of local resistance on the length of 1 km of gas networks. The recommendations to improve the calculation of the gas network of polyethylene pipes, improving the design thermistor connections

and the efficiency of their application. Analytical models dissertation is devoted to evaluating the impact of local hydraulic resistance on the energy consumption of plastic gas networks. Studied and analyzed the practice of design of gas networks. Theoretical and experimental studies of the dynamics of the gas connections of plastic pipe thermistors and their coefficients of local resistance. A coefficients of equivalent length, depending on the type and number of local resistance on the length of 1 km of gas networks.

Key words: gas network, the dynamics of movement, thermoresistive connection polyethylene piping equivalent length, nonstationary processes, coupling, tee saddle, thermistor tee, elbow, reduction adapter, the Reynolds number, mathematical model, finite-volume method, the equation Navier-Stokes equations.

УДК 622.276.04(048)

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ БУРОВОЇ СИСТЕМИ ПІД ЧАС БУРІННЯ СВЕРДЛОВИН НА МОРІ (ОГЛЯД)

О. О. Слабий

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: burewisnyk@gmail.com*

Проведено огляд існуючих конструкцій бурових систем, які використовуються при бурінні свердловин в умовах глибокого моря. Розглянуто фізичні і математичні моделі, які використовуються при вивченні динаміки роботи елементів морських бурових систем. Проведено аналіз існуючих методів, щодо вивчення динаміки роботи водовіддільної колони, натяжної системи водовіддільної колони і компенсатора вертикальних переміщень бурильної колони.

Ключові слова: буріння на морі, водовіддільна колона, компенсатор вертикальних переміщень бурильної колони, бурильна колона, бурова вежа.

Вступ

У зв'язку із виснаженням існуючих родовищ вуглеводнів на суші, постійних військових конфліктів у зонах їхнього видобутку, енергетичні компанії інтенсивно проводять розробку родовищ, які знаходяться на дні морів та океанів.

На сьогоднішній день розробляються родовища в Мексиканській затоці, біля північних берегів Бразилії, берегів Нігеру, в Персидській затоці, Північному морі, Індонезії. Останніми роками активно почав освоювати свою акваторію Китай. Великі відомі сучасні морські родовища розробляються в районах впадання в океан великих рік (Міссісіпі, Амазонки, Нігеру). Однак більшість родовищ на невеликих глибинах розроблені у сімдесятих – вісімдесятих роках минулого століття і на даний час розробка нових родовищ ведеться на більших глибинах моря. Виходячи з цього, провідні компанії світу розробили установки, що дають можливість проводити буріння на значних глибинах моря – в переважній більшості сучасні бурові установки розраховані на умови буріння на глибинах моря до 3000 м (10000-12000 футів), однак на сьогоднішній день проводяться розробки для буріння на ще більших глибинах [1].

Для буріння свердловин в умовах надглибокого моря використовують бурові судна (БС) і напівзанурені плавучі бурові платформи із динамічною системою позиціонування. Використання інших, більш традиційних методи утримання плавучих бурових установок (ПБУ) над гирлом свердловини не зустрічається через неможливість забезпечення

ними достатньої точності позиціонування ПБУ. Вартість більшості сучасних ПБУ для буріння свердловин в умовах надглибокого моря є більшою за 500 млн \$, а враховуючи енергетичні витрати на роботу динамічної системи позиціонування, оренда таких ПБУ в середньому складає 35000 \$/год. Тому на сьогоднішній день є великий науковий інтерес до вивчення таких систем, що б дало змогу покращити швидкісні показники буріння, а, відповідно, зменшити сукупні витрати на прокладання 1 м свердловини.

Бурові судна і напівзанурені бурові платформи для буріння в умовах надглибокого моря

На сьогоднішній день буріння в умовах глибокого моря ведуть за допомогою бурових суден і напівзанурених бурових платформ із динамічною системою позиціонування. На жовтень 2012 року у світі існувало 83 бурових судна, із яких 68 були здатні бурити на глибині моря понад 7000 футів (2,13 км), а також 220 напівзанурених плавучих бурових платформ, з яких 51 здатна проводити буріння на глибинах моря понад 7000 футів. До 2015 року планується ввести в експлуатацію ще 47 бурових суден, з яких всі будуть здатні бурити при глибинах моря понад 5000 футів (1,524 км), а також 20 напівзанурених плавучих бурових платформ, з яких 13 призначені для буріння на глибині моря понад 7000 футів [78]. Виходячи з цього, кількість бурових суден до 2015 року зросте 1,5 рази, кількість напівзанурених бурових платформ для буріння свердловин в умовах надглибокого моря зросте 1,25 рази при загальному рості будівництва установок для буріння на морі в 1,1 рази [78]. Дана статистика відображає збільшення будівництва установок для буріння свердловин в умовах надглибокого моря, що свідчить про велику зацікавленість світових енергетичних компаній у розробці родовищ на великих глибинах моря. Також слід зазначити, що основним засобом для буріння свердловин в умовах надглибокого моря залишаються бурові судна. Це спричинено низкою факторів, зокрема високою автономністю роботи суден, наявністю власного ходу, порівняно високими морехідними якостями. Більшість бурових суден побудовано на верфях компаній Південної Кореї – Samsung, Hyundai, Daewoo.

Так, із 83 існуючих суден 23 судна відносяться до типів S10000E і S12000E розробки корпорації Samsung, при чому на верфях закладено ще 17 суден даних типів, що складає приблизно 30% від усіх побудованих і закладених бурових суден у світі.

Основні характеристики судна Pacific Bora UDW Drillship, яке відноситься до типу S10000E наведено нижче:

Тип:	Samsung 10000 Double hull
Верф виробництва	Samsung Heavy Industries, South Korea
Максимальна швидкість ходу	12 вузлів
Максимальні характеристики за яких забезпечуються: бурильні роботи	

- висота хвилі	6.7 м;
- швидкість вітру	52 вузла.
позиціонування бурового судна	
- висота хвилі	8.53 м;
- швидкість вітру	60 вузлів.
штормовий відстій	
- висота хвилі	14.32 м;
- швидкість вітру	100 вузлів.
глибина моря в точці буріння:	
- забезпечується встановленим обладнанням	3048 м;
- максимально можлива	3048 м.
глибина буріння свердловини:	
- забезпечується встановленим обладнанням	10668 м;
- максимально можлива	11430 м.
Характеристики судна:	
довжина	228 м.
ширина	42 м.
висота	19 м.
осадка при русі	8,5 м.
осадка при бурінні	12 м.
водотоннаж	96000 тон.
ємкість сховища для бурових труб	3000 тон.
ємкість сховища для водовіддільної колони	
	126x96 футових секцій із поплавками
бурова шахта	28.8x12.5 метра.
обладнання:	
верхній привід	1 x Hydralift HPS 1000-2E-AC-KT,
компенсатор вертикальних переміщень	1 x NOV CMC-1000-25,
бурова вежа	200x60x80 футів вежа із підкронблочним КВПБК
натяжна система водовіддільної колони	
	8x подвійних НСВК канатного типу, 88,96кН,
Іншими поширеними типами бурових суден є судна проектів Deawoo і Gusto. На даний час налічується 7 суден типу DSME 10000 і DSME 12000, окрім цього ще 11 суден планується ввести в експлуатацію до 2015 року. Характеристики судна Norbe VIII типу DSME 10000 наведено нижче:	
рік будівництва	2011,
верф	DSME(Daewoo Shipbuilding & Marine Engineering Co., Ltd.),
класифікація	MODU,
тип	DSME 10000,
максимальна глибина моря в точці буріння	10000 футів,
довжина	238 м.
ширина	42 м.
висота	19 м.

осадка:

- при переміщені 8.5 м.
- при виконанні бурових робіт 12 м.

водотоннажність 102000 тон.

палуба 230x42 м.

водовіддільна колона 133x75 футів.

верхній привід Aker 970m x 1,125HP.

НСВК Aker 8x200kips.

технологічне обладнання для буріння

Aker 3rd generation automatic and touchscreen. Окрім цього на сьогоднішній день діють 7 суден типу Gusto P10000 і 13 суден планується ввести в експлуатацію до 2015 року.

Основні характеристики бурового судна типу **Gusto P10000** [77]:

довжина 230.3 м.

ширина 35.8 м.

висота 17.8 м.

висота до палуби 13.8 м.

розрахункова осадка 12 м.

водотоннажність 50000 т.

бурова шахта 12.8x12.8 м.

загальна потужність установок корабля 38.8 МВт.

максимальна швидкість переміщення 13 вузлів.

максимальні величини при яких забезпечується:

бурильні роботи

- швидкість вітру 23.9 м/с.
- висота хвилі 6.0 м.

штормовий відстій

- швидкість вітру 28.7 м/с.
- висота хвилі 10 м.

обладнання:

бурова вишка:

- статичне навантаження на крюку 907,18 тон.
- база 14,63x14,63 м.
- висота 54,86 м.
- підкронблочний компенсатор 450,209тон. 7,62 м компенсації.
- система вертикального утримування бурильних труб

НСВК 8x2x72,57тон.

секцій водовіддільних колон 10000 футів 75 футових секцій.

бурильних труб 29500 футів.

обсадних колон 32750 футів.

колон для спуску 10000 футів.

ремонтних труб 19500 футів.

Виходячи із високої вартості будівництва бурових суден, яка складає 550-700 млн \$ і високої вартості їхньої експлуатації, на сьогодніш-

ній день існує зацікавлення до розробки методик щодо зменшення часу на буріння свердловини. Аналізуючи конструкції основних типів бурових суден, призначених для буріння в умовах глибокого моря, можна зробити наступні висновки. В останні роки більшість закладених і спущених на воду бурових суден спроектовано для буріння в умовах глибини моря в точці буріння – 10000-12000 футів (3,04-3,65 км) і здатні бурити свердловини довжиною 30000-40000 футів (9,14-12,19 км). Основною країною будівництва БС є Південна Корея. Переважаюче число БС оснащено спареною буровою вежею, що дає можливість економити до 20-40% часу на технологічних переходах. Окрім цього в усіх новітніх суднах використовують компенсатори вертикального переміщення бурильної колони (КВПБК) підкронблочного типу з тяговим зусиллям 400-500 тон. Натяжна система водовіддільної колони (НСВК) використовується канатного типу із використанням 8-16 спарених натяжних пристроїв. Застосування НСВК прямої дії не зустрічалося. Лідером із виробництва бурового обладнання для БС виступає National Oilwell Varco (США). На БС встановлюється обладнання під її власним брендом і торговими марками Shaffer, Hydralift, Varco тощо. Обладнання NOV встановлюється на бурових суднах проєктів Samsung і Gusto. На БС проєктів Daewoo використовуються комплексні бурові рішення компанії конкурента - Aker Solutions (Норвегія). Використання обладнання інших підприємств носить поодинокий характер і не впливає на загальну картину.

Хитавиця судна

Хитавиця бурового судна є важливим фактором, що викликає збурення в динаміці роботи бурильної системи на морі. Вона впливає на роботу компенсатора вертикальних переміщень бурильної колони і натяжних пристроїв водовіддільної колони, що спричиняє виникнення додаткових динамічних навантажень в даних системах.

У загальному вигляді процес хитавиці судна є складним динамічним процесом, викликаним дією на судно хвильового і вітрового навантаження, на величину якого впливає робота гасителів хитавиці, системи динамічного позиціонування, положення судна відносно напрямку хвилювання моря і його швидкості, геометричних параметрів судна тощо, який можна подати, як сукупність коливань тіла з шістьма степенями вільності. Вибір степенів вільності залежить від вибору системи координат судна, проте на практиці говорять про шість видів хитавиці, які пов'язують із геометрією судна. Так розрізняють вертикальну, кільову і бортову хитавиці, ристання, повздовжню і поперечну хитавиці судна, які зображені на рис. 1.

На сьогоднішній день процес визначення хитавиці, як в теоретичній так і експериментальній площині є достатньою мірою вивченим, однак для отримання точних математичних формулювань хитавиці потрібно провести інтегрування рівняння Нав'є-Стокса або Рейнольда (залеж-

но від характеристик потоку, що омиває судно) і рівняння нерозривності зі складними граничними і початковими умовами, що мають нестационарні члени [114]. Розв'язок даної задачі є складним, тому для практичних цілей задачу спрощують, вводячи припущення. Виходячи із введених припущень, розрізняють лінійну і нелінійну теорію хитавиці. Однак, враховуючи складність математичного апарату, нелінійна теорія хитавиці розглядається при регулярному хвилюванні моря, і використовується в задачах дослідження роботи суден в критичних умовах, для перевірки їхніх суднохідних характеристик. В інших випадках, зазвичай, застосовують лінійну теорію хитавиці суден.

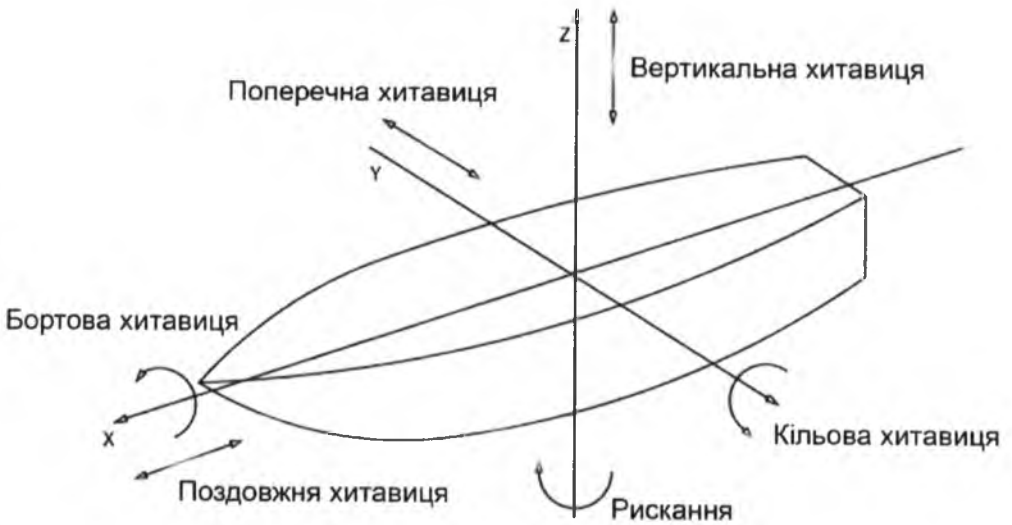


Рис. 1. Види хитавиці судна

При дослідженні впливу хитавиці на динаміку роботи бурової системи її часто моделюють для нерегулярного хвилювання моря, що дозволяє наблизити предмет досліджень до реальної системи. Враховуючи це в багатьох оглянутих роботах [16, 21, 30, 64, 84], для визначення хитавиці судна використовують передавальні функції (Response Amplitude Operator, RAO), які призначені для перетворення спектру хвилювання моря у спектр хитавиці судна. Наочний приклад використання RAO зображено на рис. 2.

Перетворення енергетичного спектру хвилювання моря в спектр хитавиці судна проводять за наступною формулою:

$$S_{\xi\xi}(\omega_c) = |H_i(\omega_c, \chi)|^2 S_{\zeta\zeta}(\omega_c), \quad i=1,2,\dots,6, \quad (1)$$

де $S_{\xi\xi}(\omega_c)$ – енергетичний спектр хитавиці судна; $H_i(\omega_c, \chi)$ – RAO; $S_{\zeta\zeta}(\omega_c)$ – енергетичний спектр хвилювання моря; ω_c – частота гармоніки; χ – кут напрямку дії хвилі відносно системи координат, пов'язаної із судном.

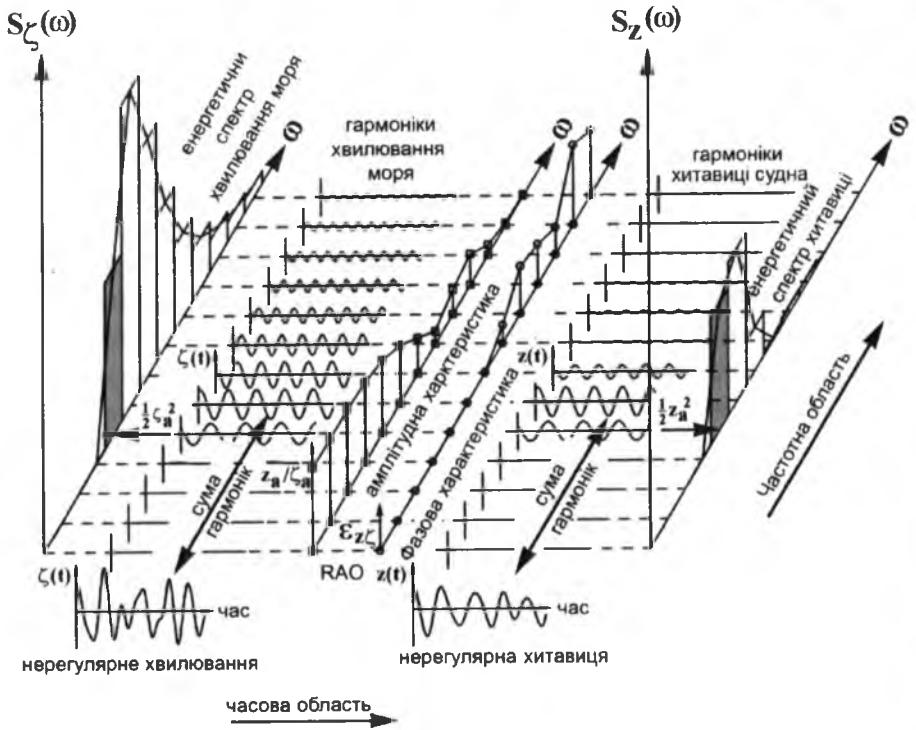


Рис. 2. Визначення хитавиці судна на нерегулярному хвилюванні

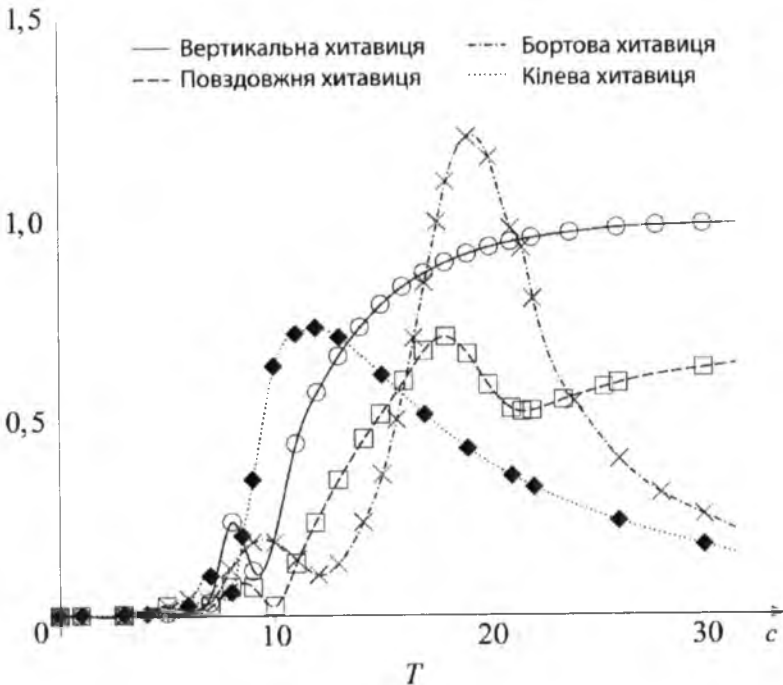


Рис. 3. RAO бурового судна West Navigator при куті набігання хвиль 45°[4]

За своєю природою RAO залежить від форми судна, його розмірів і навантаження, швидкості руху тощо. Тому використання RAO, як функції від багатьох змінних, в прикладних задачах є трудомістким, а іноді і неможливим. На практиці ж використовують залежності RAO, отримані в процесі натуральних експериментів над масштабованими моделями або в результаті постановки числового експерименту, для певних типових умов руху судна і його взаємодії із хвилюванням моря, а отримані значення подають у вигляді таблиць залежностей між частотою і значенням функції. Приклад розрахованих значень RAO для бурового судна West Navigator подано на рис. 3.

Даний метод є найбільш поширеним для моделювання хитами судна, однак у роботі [103] для визначення хитами пропонується розв'язувати систему лінійних диференціальних рівнянь за умови регулярного синусоїдального хвилювання. Перевагою запропонованої моделі є те, що при визначенні хитами враховують, окрім дії на судно гідродинамічних сил, також силову дію з боку водовіддільної колони і тросів системи позиціонування, однак отримана математична модель значно складніша і потребує багатьох додаткових даних.

Водовіддільна колона (райзер) Конструкція водовіддільної колони

Водовіддільна колона при бурінні свердловин на морі з'єднує гирло свердловини із палубою плавучої бурильної установки і виконує наступні функції:

- направлення бурильного інструменту в свердловину;
- забезпечення замкненої циркуляції промивальної рідини;
- захист бурильної колони від негативних силових факторів навколишнього середовища;
- захист навколишнього середовища від забруднення продуктами буріння;
- забезпечення каналу управління гирловим обладнанням.

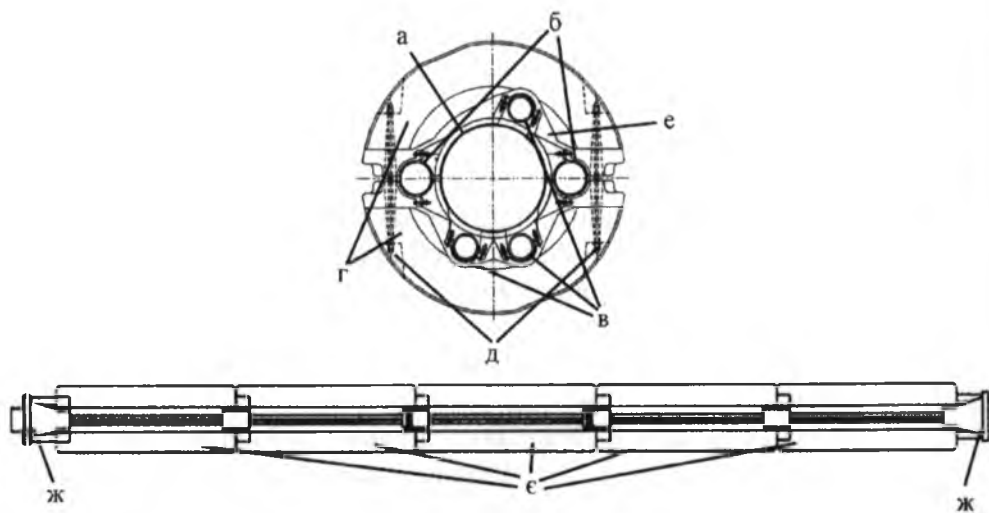
Конструктивно водовіддільна колона має вигляд стояка, що нараджується із секцій. Типова секція водовіддільної колони (рис. 4) складається із труби головного діаметру, по якій відбувається циркуляція промивальної рідини та направлення бурильної колони в свердловину, і прикріплених за допомогою хомутів до неї труб меншого діаметру, призначених для керування гирловим обладнанням і виконання технологічних завдань. Для уникнення критичних розривних зусиль в водовіддільних колонах великої довжини, до секцій кріплять поплавки, які компенсують 96-99% ваги у морській воді. Секції між собою з'єднують переважно муфтовим з'єднанням із кріпленням болтами, однак існують з'єднання, що забезпечують швидке монтування [81].

Матеріалом водовіддільної колони є корозостійкі сталі. Це спричинено їхньою помірною вартістю порівняно з іншими матеріалами. Однак існують колони для роботи на великих глибинах моря, виготов-

лені із сплавів алюмінію. Крім цього ведуться роботи з розробки колон із титанових сплавів [86].

Гирло свердловини складається із фундаментної плити, до якої кріпиться через муфтове з'єднання блок гирлового обладнання, що включає набір превенторів, гідроапаратуру керування, системи моніторингу і інше технологічне обладнання, яке з'єднується з нижнім сферичним шарніром і через кінцеву муфту-перехідник з водовіддільною колоною.

Основним конструктивним елементом, що впливає на динаміку роботи водовіддільної колони, є сферичний шарнір (рис. 3), який нівелює вплив негативних моментів, що виникають у водовіддільній колоні на гирлове обладнання. Різні конструкції водовіддільних колон допускають кут відхилення шарніру в межах $\pm 5-8^\circ$. Кінцева муфта-перехідник розташовується на останній секції водовіддільної колони і призначена для переведення ліній управління гирловим обладнанням в гнучкі шланги, щоб дати конструктивну можливість роботи нижнього сферичного шарніру.

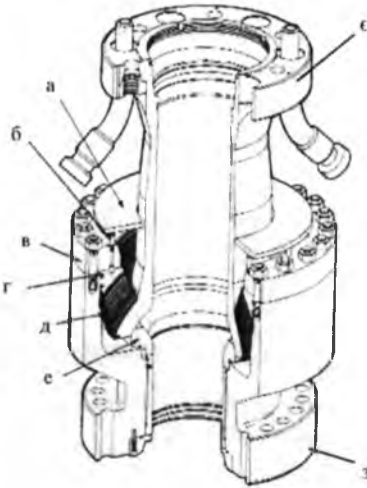


- а) труба головного діаметру; б) арматура нагнітання бурового розчину;
 в) арматура гідрокерування гирловим обладнанням і превенторами;
 г) елементи поплавка; д) шпилькове кріплення поплавків до водовіддільної колони; е) хомут, використовується для кріплення допоміжної арматури до основної труби; є) секції поплавків; ж) муфтове кріплення

Рис. 4. Типова секція водовіддільної колони [16].

Виробники пропонують різноманітні конструкції виконання гирлового обладнання і закінчення водовіддільної колони, однак в них присутні наступні елементи – група превенторів, система нагнітання бурового розчину, нижній сферичний шарнір і система швидкого від'єднання водовіддільної колони від свердловини.

Для запобігання негативного силового впливу, викликаного хитавицею ПБУ, а також забезпечення замкненої циркуляції промивальної рідини застосовується наступний спосіб приєднання водовіддільної колони до ПБУ, що зображений на рис. 6. Основний принцип роботи системи полягає у забезпеченні сталого натягу верхнього кінця водовіддільної колони, що забезпечує натяжна система водовіддільної колони через натяжне кільце. Над натяжним кільцем розташовується телескопічна секція, що дає змогу нівелювати зміну відстані між палубою й гирлом свердловини і сферичний шарнір, що нівелює дію кільцевої та бортової хитавиць.



а) гнучкий уретановий екран; б) проти обертова шпилька; в) водонепроникний фланець; г) перухоме кільцеве ущільнення; д) гнучкий елемент; е) захисна втулка; с) кінцевий перехідник водовіддільної колони; з) фланець для кріплення секції до блоку гирлового обладнання

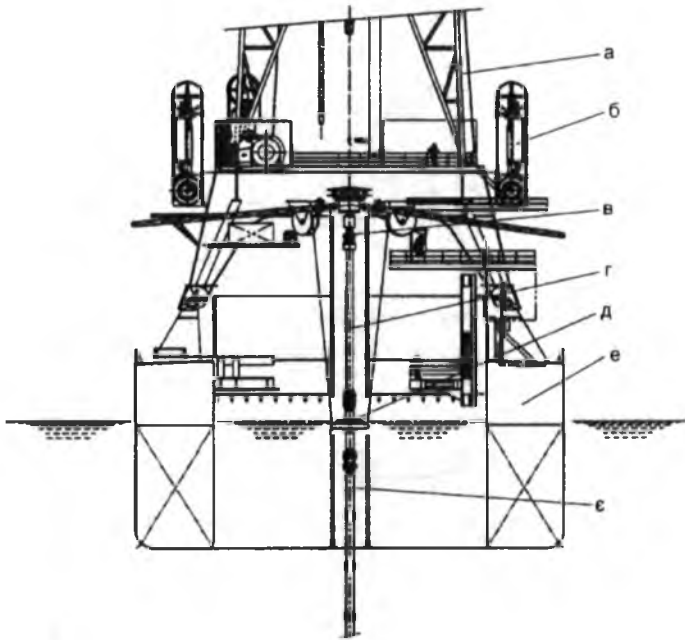
Рис. 5. Нижній сферичний шарнір водовіддільної колони.

Математична модель водовіддільної колони

На сьогоднішній день основним методом дослідження динаміки водовіддільної колони є побудова математичних моделей та їхній комп'ютерний аналіз. Це спричинено низкою факторів, зокрема великою вартістю даної системи, складністю проведення реального експерименту і обмеженими можливостями досліджень на масштабованих моделях, у процесі побудови яких неможливо врахувати низку важливих факторів, що діють на колону.

У переважній більшості оглянутих робіт водовіддільна колона моделювалась як довгий пустотілий натягнутий стрижень круглого перерізу з розподіленими параметрами по довжині. Існують моделі, де водовіддільна колона подається у вигляді абсолютно гнучкого тіла (нитки) круглого січення або у комбінованому вигляді: на кінцях, як стрижень, а основне тіло, як нитка [107]. Такий підхід використовується для

спрощення математичних розрахунків, однак фізична адекватність такої моделі є сумнівною. Використання інших фізичних моделей не зустрічалось, хоча в роботі [71] водовіддільна колона розглядається не круглого січення, а як система із трьох окремих труб, однак таке січення використовується тільки для визначення характеристик жорсткості перерізу водовіддільної колони, а при визначенні силового впливу моря колона приймалась круглого січення. В роботі [115] є посилання на статтю, де відмінність профілю від круглого січення (врахування впливу зовнішніх навісних допоміжних ліній) враховувалась у дослідженнях за допомогою додаткових інтегральних коефіцієнтів. Також існують праці де стрижень, який омивається потоком, є не круглого січення, а має «плавники» або спіральну поверхню для боротьби із зривом вихорів потоку омиваючої рідини. Однак такі дослідження зосереджено лише на вивченні питання зменшення поперечних вібрацій викликаних зривом вихорів а загальна задача динаміки колони не розглядається.



а) бурова вежа б) натяжний пристрій водовіддільної колони в) верхній сферичний шарнір г) телескопічна секція д) натяжне кільце е) бурове судно
є) водовіддільна колона

Рис. 6. Кріплення водовіддільної колони до палуби судна[16].

У більшості робіт вважається, що діаметр водовіддільних колон є незмінним по довжині, що дає змогу проводити розв'язок диференціального рівняння по всій довжині водовіддільної колони. Однак існують роботи, де враховуються секції із поплавками, а також неспостійність поперечного січення водовіддільної колони, в результаті чого

модель водовіддільної колони представляється, як стрижень із кусково-сталими параметрами [14, 55, 104].

В багатьох дослідженнях водовіддільна колона моделювалася за допомогою технічної теорії стрижнів (балка Бернуллі-Ейлера) виходячи із умови, що довжина водовіддільної колони і величина хвилі її вигину є значно більшими за розміри її поперечного перерізу вважається, що дана теорія дає достатньо точний результат.

Враховуючи вибір технічної теорії балок, математична модель водовіддільної колони, для дослідження поперечних коливань описується системою диференціальних рівнянь з частковими похідними, записаними на основі принципу д'Аламбера. Загальний вигляд математичної моделі водовіддільної колони для дослідження поперечних коливань є наступним:

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t), \quad (2)$$

де EI – жорсткість на згин; $T(x,t)$ – натяг водовіддільної колони; $m(x)$ – маса одиниці довжини водовіддільної колони; $f(x,t)$ – зовнішні зусилля, що діють на одиничний елемент водовіддільної колони; $u(x,t)$ – функція поперечного переміщення водовіддільної колони; x – координата довжини водовіддільної колони; t – час.

Зупинимося детальніше на граничних умовах за нормального режиму буріння. Нижній кінець водовіддільної колони у переважній більшості робіт представляють ідеальним шарніром з наступними граничними умовами:

$$u(0,t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

Однак в роботах [13, 86, 98] нижню граничну умову моделюють шарніром, в якому виникає момент опору руху, відповідно гранична умова набуває наступного вигляду:

$$u(0,t) = 0; \quad EI \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^3} = C_b \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \quad (4)$$

де C_b – жорсткість на кручення нижньої шарнірної секції.

Верхню граничну умову моделюють шарніром з відомими переміщеннями:

$$u(L,t) = f(t); \quad \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Функцію $f(t)$ приймають у наступному вигляді:

$$f(t) = r + \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t), \quad n = 1 \dots 3. \quad (6)$$

В роботі [111] верхня гранична умова визначається відомим кутом нахилу:

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = \theta(t), \quad (7)$$

який вважався бортовою (кільовою) хитавицею ПБУ. Однак фізична адекватність такої умови для сучасних колон є сумнівною через наявність в їхніх конструкціях верхнього сферичного шарніру.

Окрім цього, існують роботи, де окрім поперечних коливань водовіддільної колони в одній площині, розглядаються також поздовжньо-поперечних коливання водовіддільної колони в одній площині [9, 17, 43], а також дослідження просторового руху водовіддільної колони [7].

При розгляді поздовжньо-поперечних коливань водовіддільної колони, проводять розв'язок наступної системи диференціальних рівнянь з частковими похідними:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= f_u(x, t); \\ -EA \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial x} + m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} &= f_w(x, t); \quad \varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\varepsilon(x, t)$ – деформація; $f_i(x, t)$ – зовнішні зусилля що діють по осі i .

Враховуючи, що дана система рівнянь є нелінійною, дослідження поздовжньо-поперечних коливань не набули поширення, а в переважній більшості існуючих робіт автори замінюють нелінійний член деформації лінійним. Підходи для вирішення нелінійної постановки задачі можна знайти в роботах із досліджень механіки прискорених стрижнів, зокрема в [32, 43].

Меншого поширення набули дослідження водовіддільної колони, які ґрунтуються на варіаційних енергетичних методиках. Зокрема, даними методами досліджувалася водовіддільна колона в роботах [6, 7, 26, 42].

Зовнішні сили і моменти

В переважній більшості сили, що діють на колону проєктують на орти, які пов'язані з віссю водовіддільної колони. Нижче наведено загальний аналіз зусиль, які накладалися на водовіддільну колону в оглянутих роботах. Слід зауважити, що в залежності від постановки задачі, автори досліджень нехтують багатьма із них.

Вага водовіддільної колони у воді

Вага водовіддільної колони у морській воді включає в себе векторну суму сил ваги і Архімеда, обчислюється за формулою:

$$\vec{w} = \vec{g} \left(m - \frac{\pi}{4} (\rho_w D^2 - \rho_l d^2) \right), \quad (9)$$

де \bar{g} – прискорення вільного падіння; m – маса одиниці довжини водовіддільної колони; $\rho_{\text{н}}$ – густина морської води; ρ_r – густина бурового розчину; D – зовнішній діаметр водовіддільної колони; d – внутрішній діаметр водовіддільної колони.

В роботі [60] сила ваги колони представлялася як функція довжини колони, без її точного визначення. Це дало змогу більш точно описувати конструкцію складних водовіддільних колон, які мають в своїй будові секції із різними параметрами.

В оглянутих роботах зміною загальної ваги колони, внаслідок зміни довжини її зануреної частини, спричинену хвилюванням моря, нехтували. Цими зусиллями можна нехтувати при моделюванні довгих колон, однак для колон довжиною до 100 м даний силовий фактор є значним і ним нехтувати не можна [115].

Ефективний натяг водовіддільної колони

При розрахунку динаміки поперечних коливань водовіддільної колони проводять заміну значення натягу колони на, так званий, ефективний натяг. Він враховує, окрім сил натягу, прикладених до кінця водовіддільної колони ще й зусилля деформації, які виникають внаслідок дії навколишнього середовища на стінки колони. Хоча додаткове зусилля є незначним, воно призводить до істотних похибок в розрахунках, тому в сучасних дослідженнях його враховують [24, 45, 55, 68, 86, 91, 115]. В багатьох роботах для матеріалу стінки водовіддільної колони модуль Пуансона приймають рівним 0,5, а з врахуванням того, що водовіддільна колона моделюється пустотілим стержнем круглого січення, рівняння ефективного натягу записувалось наступним чином:

$$T_e = T + \frac{\pi g}{4} (x \rho_{\text{н}} D^2 - x_r \rho_r d^2), \quad (10)$$

де T – натяг водовіддільної колони; x – висота стовбура морської води в точці вимірювання натягу; x_r – висота стовбура бурового розчину в точці вимірювання натягу; $\rho_{\text{н}}$ – густина морської води; ρ_r – густина промивальної рідини; D – зовнішній діаметр водовіддільної колони; d – внутрішній діаметр водовіддільної колони.

Однак модуль Пуансона 0,5 є завищеним для сталі (значення модуля Пуансона для сталей складає 0,3–0,38), тому в роботах [7, 22, 91] подається загальна формула для визначення додаткового осьового зусилля, що виникає внаслідок тиску рідини на стінки водовіддільної колони:

$$T_i = 2\nu(p_e A_e - p_r A_r), \quad (11)$$

де ν – коефіцієнт Пуансона; p_e, p_r – відповідно внутрішній і зовнішній тиск; A_e, A_r – відповідно площа внутрішнього і зовнішнього січення.

В програмному пакеті Orcasflex в модель включають ще елемент демпфування, який є важливим для дослідження динаміки зриву вихорів [115]. Результуюча формула для визначення ефективного натягу наступна:

$$T_E = T_H - \left(EA\varepsilon + (1 - 2\nu)(P_e A_e - P_i A_i) + \frac{EAe \frac{dL}{dt}}{L_0} \right), \quad (12)$$

де E – модуль Юнга; A – площа поперечного січення; ε – загальна середня осьова деформація:

$$\varepsilon = \frac{L - \lambda L_0}{\lambda L_0}, \quad (13)$$

де L – поточна довжина; λ – коефіцієнт розширення; L_0 – довжина в недеформованому стані; ν – коефіцієнт Пуансона; P_e, P_i – відповідно внутрішній і зовнішній тиск; A_e, A_i – відповідно площа внутрішнього і зовнішнього січення; e – коефіцієнт демпфування в осьовому напрямку, $\frac{dL}{dt}$ – швидкість збільшення довжини.

Значення густини морської води і промивальної рідини приймаються сталими величинами. Хоча густина морської води і змінюється з глибиною до 3% [115] та цією зміною нехтують.

Нормальна гідродинамічна сила

Для визначення нормальної гідродинамічної сили в дослідженнях використовують нелінійну, аналітично-емпіричну формулу Морісона, загальний вигляд якої наступний:

$$f(x, t) = C_M \frac{\rho_w \pi D^2}{4} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - C_A \frac{\rho_w g p D^2}{4} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + C_D \frac{\rho_w D}{2} \left(u(x, t) - \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right) \left| u(x, t) - \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|, \quad (14)$$

де C_M – коефіцієнт інерційної складової; ρ_w – густина морської води; D – зовнішній діаметр водовіддільної колони; $u(x, t)$ – швидкість точки рідини потоку, що омиває водовіддільну колону. Визначається аналітично через обрану модель хвилювання моря і швидкісні градієнти течій; C_D – коефіцієнт опору.

На сьогоднішній день усталених рекомендацій, щодо вибору коефіцієнтів опору та інерції не існує. Питання щодо значень, природи походження даних коефіцієнтів, а також принципів їхнього розрахунку залишається відкритим, хоча ведуться інтенсивні роботи в цьому напрямку. З результатів стендових досліджень відомо, що дані коефіцієнти залежать від числа Рейнольда, числа Кьюлеган-Карпентера, форми тіла, яке омивається, шорсткості його поверхні, напрямку дії потоку на

тіло і багатьох інших факторів [73, 74, 75, 115, 116]. Хоча в стандартах з конструкцій морських споруд і присутні рекомендації щодо вибору даних коефіцієнтів, але вони носять лише рекомендаційний характер і рекомендується для важливих розрахунків проводити перевірку отриманих результатів в дослідних басейнах на імітаційних моделях.

В більшості оглянутих робіт дані коефіцієнти беруться сталими, а впливом їхньої зміни на значення гідростатичної сили нехтували заради спрощення математичних викладок. Так, коефіцієнт опору в більшості робіт є рівний $C_D = 0,6 - 1$, а коефіцієнт інерції – $C_M = 1,5 - 2,0$.

Однак в роботах [60, 91, 115] наголошується на тому, що дані коефіцієнти є функціями і для точності отриманих результатів це потрібно враховувати. Зокрема, для тонких довгих тіл (яким являється водовіддільна колона) рекомендується спочатку уточнювати значення коефіцієнту опору, так як він дає найбільший вклад при розрахунку зусиль, що виникають. Більш детально це питання описано в матеріалах з гідромеханіки. Зокрема великого визнання в зарубіжних роботах набули напрацювання Сарпкая. В роботі [73] наводяться наступні функції для виведення даних коефіцієнтів:

$$C_D = C_D(\text{Re}, \text{Kc}, D);$$

$$C_M = C_M(\text{Re}, \text{Kc}, D);$$

$$\beta = \frac{\text{Re}}{\text{Kc} d} = \frac{\rho D^2}{\mu T}; \quad (15)$$

$$C_D = \frac{3\pi^3}{2\text{Kc}} \left[(\pi\beta)^{\frac{1}{2}} + (\pi\beta)^{-1} + O(\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} \right];$$

$$C_M = 2 + 4(\pi\beta)^{\frac{1}{2}} + O(\pi\beta)^{-\frac{3}{2}}.$$

Для випадків, коли число Кьюлеган-Карпентера набагато менше 1, формула набуває наступного вигляду:

$$C_D = \frac{3\pi^3}{2\text{Kc}} \left[(\pi\beta)^{\frac{1}{2}} + (\pi\beta)^{-1} - \frac{1}{4}(\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} \right]; \quad (16)$$

$$C_M = 2 + 4(\pi\beta)^{-\frac{1}{2}} + (\pi\beta)^{-\frac{3}{2}}.$$

Дані функції перевірено у роботі [74] експериментально. Отримані результати свідчать про достатню точність даних формул.

Наявних досліджень недостатньо для формування єдиного розуміння процесів, які відбуваються. Більшість існуючих робіт ґрунтуються на опрацюванні отриманих результатів дослідів і отримання відповідних емпіричних формул. Однак отримані результати різних авторів часто розходяться, тому на сьогоднішній день можна вважати, що є зрозумілою лише тенденція залежності коефіцієнтів від тих чи інших параметрів, а отримання точних залежностей є невирішеною задачею [115, 116].

Вибір значення коефіцієнта приєднаної маси морської води в більшості досліджень задається рівністю, яка забезпечує достатню точність для тіл круглого січення:

$$C_M \equiv C_A + 1 \quad (17)$$

Лінеаризація нелінійного члену рівняння Морісона

Виходячи із того, що рівняння Морісона є нелінійним, в процесі розв'язку багато авторів приходять до лінеаризації нелінійного члену [13, 14, 19, 26, 48, 55, 60, 86, 98]. На сьогоднішній день існують декілька методів апроксимації нелінійного члену, детальний огляд існуючих моделей апроксимації наведено у роботах даної тематики [5, 18, 33, 47, 49, 82, 89].

Існуючі підходи до лінеаризації нелінійного члену рівняння Морісона значно відрізняються залежно від вибору методу дослідження водовіддільної колони в частотній або часовій області, а також вибору хвилювання моря (регулярного або нерегулярного) і присутності чи відсутності морської течії. Найбільшого поширення в роботах набув метод лінеаризації, вперше запропонований Борманом [11], побудований на основі методу «еквівалентної лінеаризації» Крилова і Боголюбова. В результаті апроксимації автор отримав наступну функцію лінеаризації:

$$F_D = C_D \frac{\rho_w D}{2} (u(x,t)) |u(x,t)| \approx \bar{C}_D \frac{\rho_w D}{2} u(x,t); \quad (18)$$

$$\bar{C}_D = \sqrt{\frac{8}{\pi}} C_D \sigma_u,$$

де σ_u – амплітуда синусоїди відносної швидкості рідини.

Схожі підходи до лінеаризації використовували інші автори, однак виходячи із різних характеристик розподілу Гаусса (для певних умов хвилювання), ними отримувалися різноманітні коефіцієнти лінеаризації. Графічне представлення лінеаризації нелінійного члена зображено на рис. 9.

Зокрема, даний метод лінеаризації використовується у роботах [13, 55, 91, 98], згадується у роботі [3].

В роботі [5] проводиться порівняння силового впливу, викликаного випадковим хвилюванням при розрахунку сил за формулою Морісона і методикою лінеаризації Бормана. Отриманий результат свідчить, що лінеаризація Бормана відчутно недооцінює силовий вплив у випадку ко-

ли швидкість є більшою за $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_u$. Так, при значенні висоти хвилі більшої за $H = 2H_S$, де H_S – значуща висота хвилі, похибка визначення зусилля між рівнянням Морісона і за лінеаризацією Бормана складає 57%.

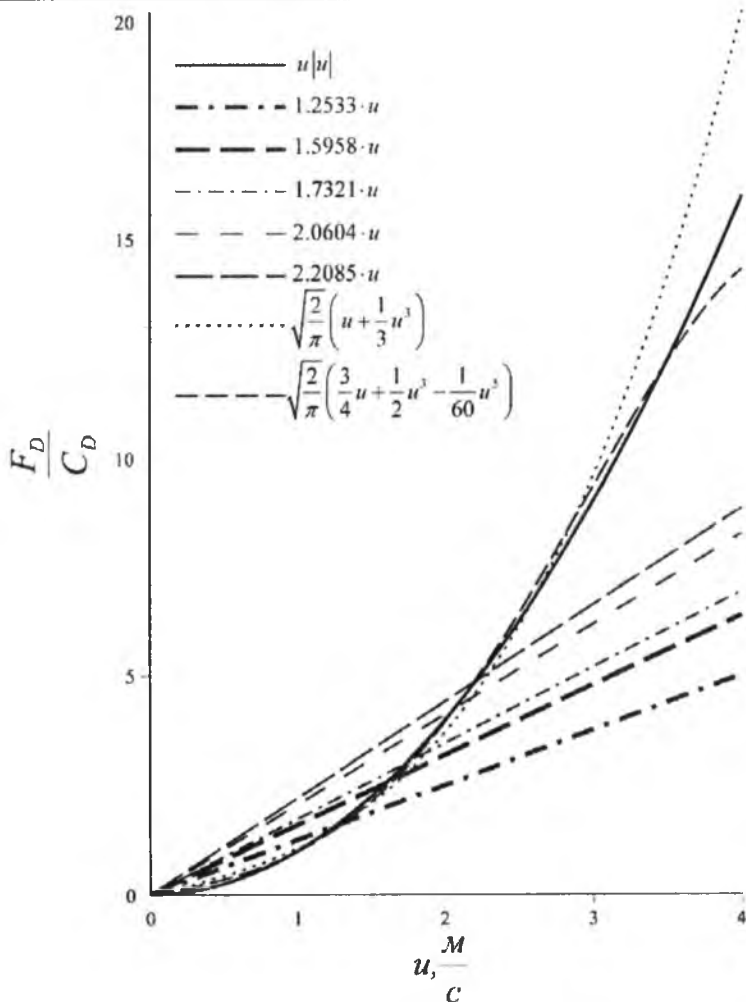


Рис. 7. Графічне представлення існуючих апроксимацій нелінійного члена рівняння Морісона $F_D = C_D u|u|$ [11, 56].

Виходячи із значної недооцінки зусиль, що виникають внаслідок лінеаризації Бормана у випадку значної переваги зусиль демпфування над силами інерції в рівнянні Морісона, Вольфрам у роботі [89] запропонував наступний метод лінеаризації, який застосовується для зменшення даного негативного явища:

$$F_D = C_D \frac{\rho_w D}{2} (u(x,t))|u(x,t)| = K_D (u(x,t))|u(x,t)| \approx \bar{K}_D u(x,t); \quad (19)$$

$$\bar{K}_D = K_D \sigma_u C^{(m)}(K),$$

де \bar{K}_D – приведений коефіцієнт лінеаризації; $C^{(m)}(K)$ – фактор лінеаризації, запропонований автором; K – безрозмірний параметр, який визначається за формулою:

$$K = \frac{K_D \sigma_u}{K_M \omega_{mv}}, \quad (20)$$

де ω_{mv} – середнє значення кутової швидкості.

В результаті запропонована модель, дає змогу проводити лінеаризацію виходячи із конкретних умов поставленої задачі, де коефіцієнт лінеаризації залежить від співвідношення між інерційною і опірною складовою рівняння Морісона. В роботі [33] розглянуто лінеаризацію нелінійного члена удосконаленого рівняння Морісона окремо по членах з урахуванням впливу течії, виходячи із розкладання нелінійного члену у степеневі ряди. В результаті отримано наступне рівняння апроксимації:

$$(u(t) - v(t))|u(t) - v(t)| \approx b_0 + b_1 \cdot u(t) - c_0 \cdot v(t). \quad (21)$$

де $u(t)$ - сумарне значення швидкостей точки рідини, викликане хвилюванням моря і морською течією; $v(t)$ - поперечна швидкість переміщення елемента водовіддільної колони; b_0, b_1, c_0 - коефіцієнти лінеаризації, визначення яких наведено в роботі.

Широкого застосування набули методики лінеаризації, запропоновані в класичній роботі Кроліковського і Гея [47]. В даній роботі розглянуто підходи до лінеаризації нелінійного члену рівняння Морісона для чотирьох умов дослідження водовіддільної колони в частотній області – регулярного хвилювання моря, регулярного хвилювання моря з урахуванням морської течії, нерегулярного хвилювання моря, що піддається нормальному розподілу, і нерегулярного хвилювання моря з урахуванням дії течії. Метод, запропонований авторами, побудовано на основі статистичних методів і методу гармонійного балансу:

$$F_D \approx \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot D \cdot C_D \cdot B_2 \cdot u_c + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot D \cdot C_D \cdot B_1 \cdot r(t);$$

$$B_1 = \left[4 \cdot \sigma_u \cdot \varphi \left(\frac{u_c}{\sigma_u} \right) + 4 \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{u_c}{\sigma_u} \right) \right];$$

$$B_2 = \left[2 \cdot \sigma_u \cdot \varphi \left(\frac{u_c}{\sigma_u} \right) + u_c \left(1 + \left(\frac{\sigma_u}{u_c} \right)^2 \right) \right] \left[2 \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{u_c}{\sigma_u} \right) - 1 \right]; \quad (22)$$

$$\sigma_u = \sqrt{\sum_{i=1}^n (j\omega_i y_i - u_c)^2};$$

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right); \quad \operatorname{erf}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

З наведених у роботі порівнянь можна зробити висновок, що запропонована модель апроксимації дає набагато кращі результати у порівнянні із моделлю Бормана. Така модель використовувалася при розрахунках в роботі [86].

Деякі дослідники проводять пошук нових способів апроксимації, так, в роботі [19] розвивається методика квазістатичного приближення. А в роботі [60] для побудови моделі використовується апарат ідентифікації системи.

Хвилювання моря

За своєю природою хвилювання моря є складним гідродинамічним процесом, який являє собою накладання великої кількості хвиль різної природи походження, що відрізняються частотою, амплітудою, енергією і напрямком дії. Моделювання такої поверхні моря потребує значних математичних викладок, реалізація яких в прикладних задачах є недоцільною або неможливою. Тому на сьогоднішній день розроблена значна кількість теорії хвилювання моря, які дають змогу спростити математичну модель хвилювання, що б дало змогу використовувати її у прикладних задачах. Модель типової хвилі із основними параметрами зображена на рис. 8.

Профіль хвилювання моря $\eta(x,t)$ знаходиться відносно системи координат x, z , що пов'язана із рівнем спокійного моря, із напрямком осей, так як це зображено на рисунку. Глибина моря є величиною між рівнем спокійного моря і дном моря та позначається літерою d . Серед основних параметрів гармонічної хвилі є її довжина – L і висота H . Значення швидкості певної окремої точки рідини визначається двома векторами, напрямки яких пов'язані із системою координат x, z .

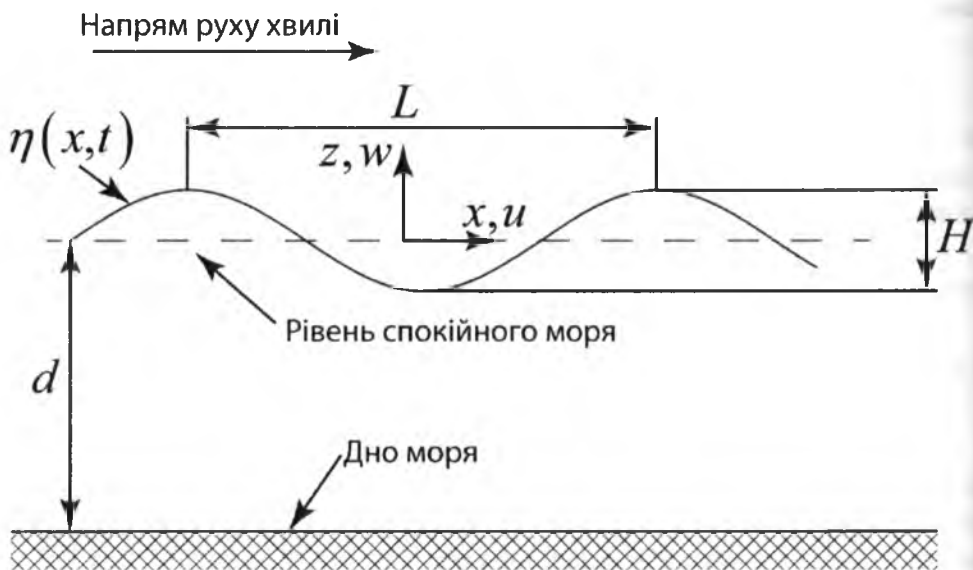


Рис. 8. Параметри типової гармонічної хвилі

На даний час розроблено низку підходів щодо представлення хвилювання моря, які можна поділити на три напрямки: статистичний, спектральний і гідромеханічний. Гідромеханічний напрямок є найбільш розвиненим. Теорії хвилювання моря, розроблені в даному напрямку дають змогу аналітично задавати швидкості і пришвидшення будь-якої точки рідини в процесі хвилювання, що є необхідним для визначення гідродинамічного зусилля згідно формули Морісона (14). Найбільшого поширення в наукових працях при моделюванні стану поверхні океану набула лінійна теорія Ейрі. В ній передбачається, що частинки рідини здійснюють колові обертання, причому радіус цих кіл зменшується з глибиною. Математична викладка даної теорії наступна:

профіль хвилі –

$$\eta = A \cos(kx - \omega t); \quad (23)$$

горизонтальна швидкість точки –

$$u = \frac{2\pi A}{T} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \cos(kx - \omega t); \quad (24)$$

вертикальна швидкість точки –

$$w = \frac{2\pi A}{T} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \sin(kx - \omega t); \quad (25)$$

горизонтальне пришвидшення точки –

$$\frac{du}{dt} = \frac{4\pi^2 A}{T^2} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \sin(kx - \omega t); \quad (26)$$

вертикальне пришвидшення точки –

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{4\pi^2 A}{T^2} \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \cos(kx - \omega t); \quad (27)$$

швидкість хвилі –

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kd}; \quad (28)$$

де A – амплітуда хвилі; k – хвильове число; T – період хвилі; z – координата точки; d – глибина моря; ω – частота хвилі; x – координата точки.

В багатьох роботах для полегшення математичних викладок вводять припущення. Так, для глибокої води приймають, що:

$$\tanh kd \approx 1, \quad (29)$$

а для мілководдя:

$$\tanh(kd) \approx kd. \quad (30)$$

Теорія Ейрі занижує значення горизонтальних швидкостей точок на поверхні моря, тому для дослідження гідродинамічного впливу на довгі морські споруди рекомендується використовувати нелінійну теорію Стокса другого або вище порядку.

Математична викладка теорії Стокса другого порядку наступна:

профіль хвилі –

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{H^2 \pi}{8\lambda} \frac{\cosh kd}{\sin^3 kd} [2 + \cosh(2kd)] \cos[2(kx - \omega t)]; \quad (31)$$

горизонтальна складова швидкості точки хвилі –

$$u = \frac{H\pi}{T} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \cos(kx - \omega t) + \frac{3H^2 \pi^2}{4T\lambda} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh^4 kd} \cos[2(kx - \omega t)]; \quad (32)$$

вертикальна складова швидкості точки хвилі –

$$w = \frac{H\pi}{T} \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \sin(kx - \omega t) + \frac{3H^2 \pi^2}{4T\lambda} \frac{\sinh 2k(z+d)}{\sinh^4 kd} \sin[2(kx - \omega t)]; \quad (33)$$

горизонтальна складова пришвидшення точки хвилі –

$$\ddot{u} = \frac{2H\pi^2}{T^2} \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \sin(kx - \omega t) + \frac{3H^2 \pi^3}{T^2 \lambda} \frac{\cosh 2k(z+d)}{\sinh^4 kd} \sin[2(kx - \omega t)]; \quad (34)$$

вертикальна складова пришвидшення точки хвилі –

$$\begin{aligned} \dot{w} = & -\frac{2H\pi^2}{T^2} \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \cos(kx - \omega t) - \\ & -\frac{3H^2 \pi^3}{T^2 \lambda} \frac{\sinh 2k(z+d)}{\sinh^4 kd} \cos[2(kx - \omega t)]; \end{aligned} \quad (35)$$

швидкість хвилі –

$$c = \left(\frac{g}{k} \tanh kd \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

В теорії Стокса перший доданок є доданком лінійної теорії хвилювання Ейрі, інші нелінійні доданки характеризують фізичні властивості реальної рідини, так звану «течію Стокса». Різниця між швидкостями точок біля поверхні океану за лінійною теорією і теорією Стокса другого порядку може сягати до 37% [116], що є вагомим показником при дослідженнях силового впливу на морські споруди. Однак, з глибиною додаткові доданки швидко зменшуються, що дає можливість нехтувати ними на значних глибинах моря.

Окрім використання гідромеханічних теорій опису хвилювання моря, для дослідження часто використовують нерегулярне хвилювання моря, яке отримується на основі розкладання енергетичних спектрів хвилювання. Такий підхід дає змогу моделювати поверхню моря наближену до реального стану, а також отримати взаємозв'язок між поривами вітру і хвилюванням моря. Однак з такою методикою пов'язані труднощі у визначенні швидкостей і пришвидшень точок, що належать рідині. Отримання профілю хвилі, а також значень швидкостей і прискорень точок рідини здійснюється шляхом дискретного розкладання спектру згідно лінійної теорії хвилювання моря. В результаті знаходження розподілу швидкостей і пришвидшень точок рідини моря

відбувається шляхом підсумовування отриманих результатів для кожної точки усіх гармонік. Складність даного методу полягає в тому, що отримання значень швидкостей і прискорень є можливим тільки при використанні чисельних методів, оскільки потрібні значні обчислювальні можливості.

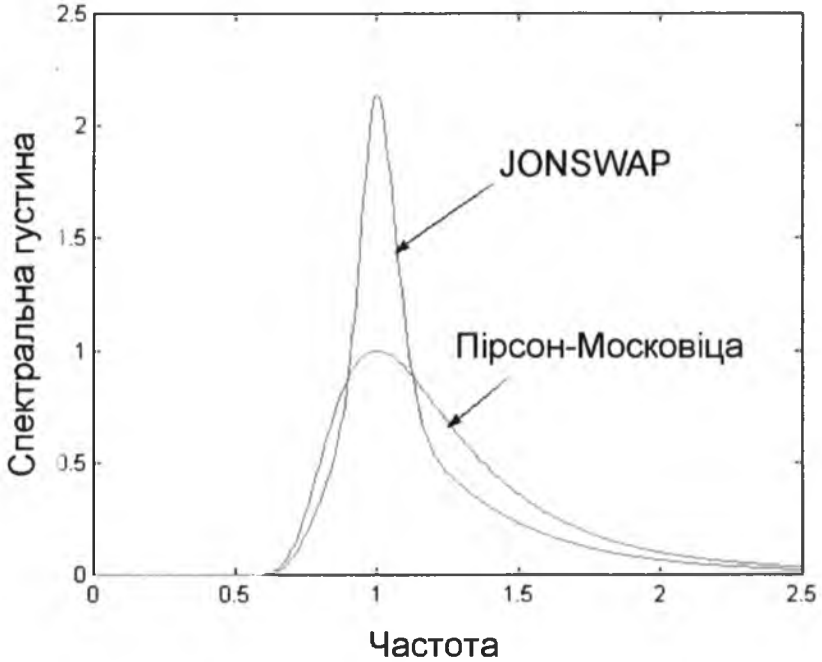


Рис. 9. Порівняння основних хвильових енергетичних спектрів

Найбільшого поширення серед спектрів опису поверхні моря набули спектри Пірсона-Московіца і JONSWAP (рис. 9). Спектри інших дослідників при дослідженні динаміки водовіддільної колони не використовувалися, однак в роботі [116] проводиться детальний аналіз 13 спектрів і відмінність між ними. Спектр Пірсона-Московіца описується наступним рівнянням:

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp \left[-\beta \left(\frac{g}{\omega W} \right)^4 \right]; \quad (37)$$

$$\alpha = 4\pi^3 \left(\frac{H_S}{gT_0^2} \right)^2; \quad \beta = 16\pi^3 \left(\frac{W}{gT_0} \right)^4,$$

де $T_0 = \frac{2\pi}{g\omega}$ – середній період хвиль; $H_S = 1.6\bar{h}$ – значуща висота хвилі;

W – розрахункова швидкість вітру.

Спектр JONSWAP:

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{ag^2}{\omega^5} \exp\left(-\beta\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)\right) \gamma^{\alpha}; \quad \alpha = \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\omega_p^2\sigma^2}\right); \quad (38)$$

$$\sigma = \begin{cases} 0,07 & \text{при } \omega \leq \omega_p; \\ 0,09 & \text{при } \omega > \omega_p; \end{cases} \quad \beta = \frac{5}{4},$$

де α – константа залежності швидкості вітру від довжини вибірки:

$$\alpha = 0,033 \left(\frac{\omega_p U_W}{g} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (39)$$

Для Північного моря α рівне 0,0081 – 0,01, U_W – швидкість вітру на висоті 10 м над поверхнею моря, ω – частота хвилі, ω_p – пікова частота хвилі (для Північного моря в середньому рівна 0,5):

$$\omega_p = 2.84 g^{0,7} L_f^{-0,3} U_W^{-0,4}, \quad (40)$$

L_f – довжина вибірки.

В дослідженнях хвильового навантаження в переважній більшості розглядається хвилювання моря, викликане вітром і брижі. Інші види хвилювання або відкидалися через їхню рідкість (сейсмічні, цунамі тощо), або вважалися сталими у часі і моделювалися, як течії, оскільки їхня зміна у часі є довготривалою у порівнянні із частотою коливань водовіддільної колони.

Морські течії

Морські течії в математичних моделях представляються у вигляді градієнтів швидкостей їхніх точок, які змінюються із глибиною. Таке формулювання дає змогу враховувати силовий вплив, який вони чинять на водовіддільну колону. Однак, в переважній більшості робіт течії представляються теоретичними моделями градієнтів, які мають доволі спрощену математичну викладку. Значення реальних швидкостей течії потребує додаткового вивчення району буріння. На сьогоднішній день існує багато робіт з дослідження зміни швидкості течій з глибиною, однак через об'ємність задачі дане питання є ще недостатньо вивченим. Серед оглянутих робіт найбільш детально існуючі моделі градієнтів течій представлені в роботі [70], де розглянуто реальні течії в Мексиканській затоці і Північному морі.

Більш детальне вивчення морських течій можна знайти в роботах з океанології, проте, виходячи із їхньої сезонності і залежності від кліматичних умов, отримання точного градієнту зміни швидкості і напрямку потоку від глибини моря на основі прогнозування неможливо.

Морські течії в основному представляють як потік, який діє в одній площині, градієнтом у вигляді лінійних або кусково-лінійних функцій, що полегшує математичні розрахунки. Окрім цього, за допомогою морських течій описують морські хвилі, які є тривалими у часі. Так, за

допомогою лінійного градієнту в роботі [69] моделювався приплив. В роботах [18] і [33] градієнт швидкості течії, яким описували приплив, представляється у вигляді степеневі функції:

$$u_c(x) = U_c \left(1 + \frac{x}{H} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (41)$$

Силовий вплив промивальної рідини, що рухається водовіддільною колоною

Внаслідок руху промивальної рідини в замкнутому просторі на водовіддільну колону діють силові навантаження у вигляді сил тертя та інерції промивальної рідини. Достатньо точно дане питання розглядається у роботах з динаміки шлангів і труб, [63, 112], а також в роботах з динаміки колон глибоководного видобутку корисних копалин [48], де дані силові фактори мають важливий вплив.

В роботі [63] при виведенні закону руху трубопроводу, що постачає рідину, інерційна складова від рідини, що протікає в трубі записується наступним виразом:

$$f_f = \rho_f A_f \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{dU}{dt} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right), \quad (42)$$

де $v(x,t)$ – поперечне переміщення трубопроводу в січenni x в момент часу t ; U – швидкість протікання рідини в трубопроводі; ρ_f – маса рідини в одиниці довжини трубопроводу; A_f – площа поперечного січення отвору трубопроводу.

Однак, враховуючи те, що швидкість протікання промивальної рідини у водовіддільній колоні можна вважати сталою, останнім доданком нехтують в усіх оглянутих роботах.

В результаті зусилля визначаються за наступною формулою:

$$f_f = \rho_f A_f \left(V^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \right), \quad (43)$$

де ρ_f – густина промивальної рідини; A_f – площа порожнини, через яку здійснюється помпування промивальної рідини; V – швидкість руху промивальної рідини у водовіддільній колоні; $v(x,t)$ – функція поперечного переміщення водовіддільної колони.

Такий математичний опис силового впливу від промивальної рідини при дослідженні динаміки водовіддільної колони зустрічався в роботах [48, 98]. В переважній більшості робіт з динаміки водовіддільної колони також нехтують доданком, який відповідає за силу, викликану пришвидшенням Коріоліса, а в деяких роботах нехтують ще й доданками від доцентрового пришвидшення припускаючи, що їхній вплив незначний. В результаті останню компоненту об'єднують із

масою водовіддільної колони і представляють її як єдину віртуальну масу одиниці довжини водовіддільної колони.

Сили тертя, що виникають внаслідок руху промивальної рідини водовіддільною колоною.

Через розгляд в багатьох роботах лише поперечних коливань водовіддільної колони даними зусиллями нехтували. А дослідження більш складніших просторових чи поздовжньо-поперечних коливань здійснюється на моделях типу «стрижень в потоці рідини», де наявність промивальної рідини нехтують. В роботі [98] проводилась побудова математичної моделі поздовжньо-поперечних коливань трубки, враховуючи рідину, що протікає в ній, однак сили тертя промивальної рідини до водовіддільної колони не враховували. В огляді [115] силовий фактор, який описує дію сили тертя промивальної рідини по стінках водовіддільної колони, описують наступною математичною викладкою:

$$f_{\tau} = \frac{\pi}{2} C_f \rho_f D_i \left(V - \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \right) \left| V - \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \right|, \quad (44)$$

де C_f – коефіцієнт сил тертя промивальної рідини по стінках водовіддільної колони; ρ_f – густина промивальної рідини; D_i – внутрішній діаметр водовіддільної колони; V – швидкість промивальної рідини у водовіддільній колоні; $q(x, t)$ – осьове (поздовжнє) переміщення перерізу x водовіддільної колони в момент часу t .

Дана формула також використовувалась в роботі [85] для моделювання впливу промивальної рідини на бурильну колону.

В роботах щодо динаміки бурильних колон, а також шлангів, автори для спрощення розрахунків часто замінюють даний член на його лінійний еквівалент:

$$f_{\tau} = k_f \left(V - \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \right) \quad (45)$$

де k_f – приведений коефіцієнт тертя.

Висновки

Моделювання водовіддільних колон активно розвивається і є актуальним, оскільки розбіжність між теоретичними розрахунками і фактичними даними є високою і може сягати 30% [115]. Проектування колон відбувається за методиками, описаними в галузевих стандартах (ANSI і DNV). Зокрема, перевіряється конструкція водовіддільної колони на критичні параметри: зрізні зусилля, що виникають в перерізах колони, на втомну міцність, розрахунок довговічності. Однак запропоновані підходи не дають можливості достатньо точно оцінити роботу водовіддільної колони в часовому відрізьку.

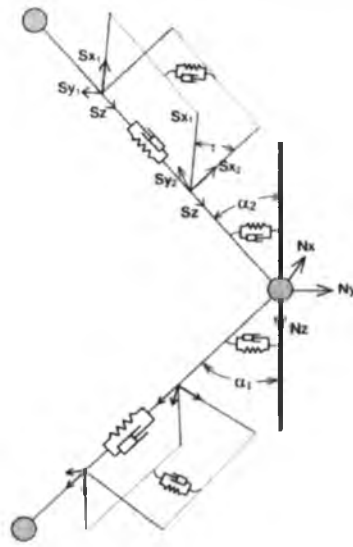


Рис. 10. Кінцевий елемент для моделювання роботи водовіддільної колони в середовищі OrcaFlex

Вивчення режиму роботи водовіддільної колони пов'язано із складністю математичних моделей, врахуванням в системі багатьох факторів і наявністю нелінійних членів. При розв'язанні математичної моделі водовіддільної колони багато авторів намагаються замінити нелінійний член рівняння Морісона, що містить знак модуля його еквівалентом, а отримані рівняння з частинними похідними апроксимувати в систему звичайних диференціальних рівнянь, які в подальшому розв'язуються чисельними методами. Серед оглянутих робіт для розв'язування використовувались метод кінцевих елементів, метод кінцевих різниць, апроксимація Гальоркіна-Канторовича, з подальшим розв'язуванням системи звичайних диференціальних рівнянь методами групи Рунге-Кутти або методом кінцевих різниць.

На сьогоднішній день виявлено тенденцію поступового переходу досліджень водовіддільної колони у спеціалізовані програмні продукти, які використовують чисельні методики розрахунку. Уже розроблено програми віртуального моделювання роботи водовіддільних колон, побудовані на методах кінцево-елементної апроксимації. Це, зокрема, програмні комплекси Deeplines, Flexcom, Riflex, Riserdyn і OrcaFlex. Дослідження методом кінцевих елементів роботи водовіддільних колон проводять із використанням універсальні системи САЕ – Abaqus і Ansys.

Хоча з розвитком комп'ютерної техніки і чисельних методів рішення задач питання обчислювальної складності уже не стоїть так гостро, перешкодою для отримання точної моделі водовіддільної колони залишається неможливість точного математичного опису багатьох факторів, що діють на неї. Це зокрема визначення коефіцієнтів інерції і

опору в залежності від параметрів набігаючого потоку і форми обтікаючого тіла, розвиток теорії виникнення поперечних зусиль внаслідок зриву вихорів, розробка загальної теорії поздовжньо-поперечних просторових коливань водовіддільної колони, дослідження впливу бурильної колони на динаміку водовіддільної колони, тощо. Вирішення даних проблем дасть можливість проводити більш детальні дослідження динаміки водовіддільної колони, що, в свою чергу, дасть змогу оптимізувати існуючі і розробити нові конструкції колон, які матимуть кращі робочі параметри.

Компенсатор вертикальних переміщень бурильної колони.

Натяжний пристрій водовіддільної колони

Конструкції компенсаторів вертикальних переміщень бурильної колони

Компенсатор вертикальних переміщень є гнучкою ланкою між плавучою буровою установкою і бурильною колоною. Використання компенсатора вертикальних переміщень в сукупності із динамічною системою позиціонування дає змогу проводити бурові роботи при шестибальному штормі, що значно розширило область можливого застосування ПБУ, і зменшило втрати, спричинені перебуванням ПБУ в штормових відстійниках[90].

Існуючі конструкції КВПБК за конструктивними особливостями можна розділити на наступні групи:

- КВПБК, які діють за принципом зміни довжини талевого канату. Конструктивно виконуються у вигляді лебідок, керування якими здійснюється за допомогою гідродвигунів або крокових двигунів;

- КВПБК, які встановлюються між гаком і талевою системою (КВП лінійного типу), що діють за принципом зміни довжини між точками закріплення від зміни сили розтягу, яка діє на них;

- КВПБК підкронблочного типу, принцип роботи ґрунтується на переміщенні каретки з кронблоком, напрямними, рух по яких, залежить від зусилля, що діє на каретку.

Перша група при бурінні практично не застосовується, оскільки потребує значних енергетичних витрат. Інші схеми набули широкого поширення на плавучих бурових установках. Це зумовлено тим, що кожна із даних схем має свої недоліки і переваги, тому вибір в конструктивному виконанні КВПБК залежить від проєктних умов його використання.

До переваг КВПБК лінійного типу можна віднести:

- компактність, можливість швидкої заміни і обслуговування в похідних умовах;

- забезпечення збігу лінії компенсування із віссю бурильної колони.

Однак вони мають наступні недоліки:

- загромождають периметр бурової вежі шлангами і кабелями управління;

- потребують вищої бурової вежі, яка б враховувала максимальну довжину КВПБК (для сучасних КВПБК це значення складає 10-12 м);
- створюють додаткове навантаження на талеву систему;
- оптимальна конструкція КВПБК передбачає, що робочими камерами є штокові, що впливає на масо-габаритні показники КВПБК. Хоча зараз й існують конструкції, які позбавлені даного недоліку, однак таке рішення досягається за допомогою ускладнення конструкції, що збільшує ремонтну складність.

У зв'язку із конструктивними особливостями КВПБК лінійного типу, вони є обмеженими у масо-габаритних показниках, а, відповідно, і у максимальній робочій вазі на гаку. Це обмежує область їхнього застосування і в даний час вони переважно застосовуються при бурінні розвідувальних і наукових свердловин.

На сьогоднішній день основними КВПБК для суден, що проводять промислове буріння в умовах глибокого моря є КВПБК підкронблочного типу

До переваг даних КВПБК можна віднести:

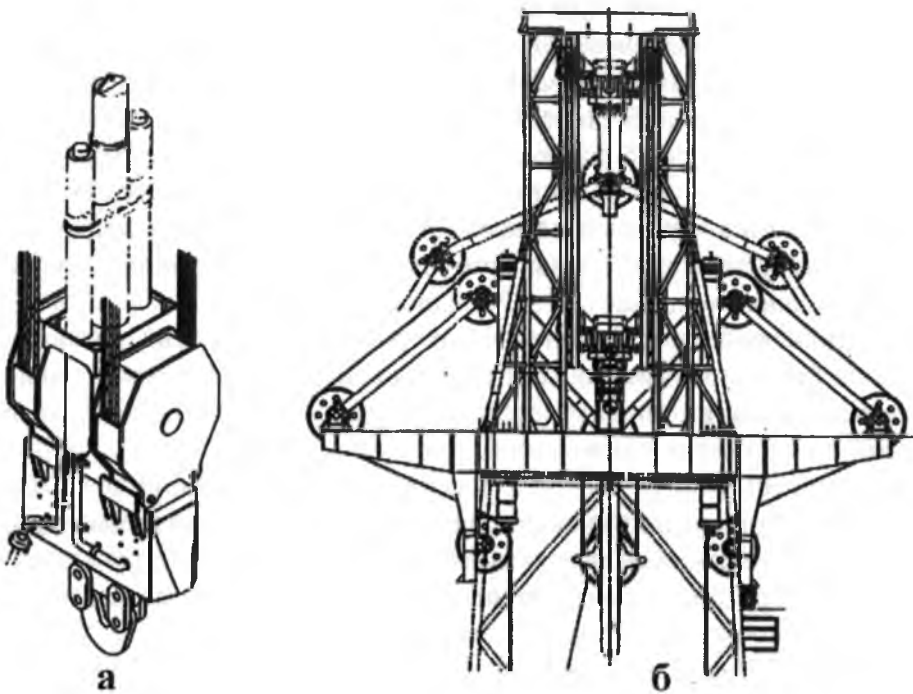
- доступність елементів КВПБК для діагностики і обслуговування під час роботи;
- можливість витримувати значні навантаження;
- відсутність додаткового навантаження на талеву систему, спричинену КВПБК.

До недоліків КВПБК даного типу можна віднести:

- виходячи із розташування КВПБК, вимоги до жорсткості бурової вежі збільшуються;
- складна конструкція;
- підвищення центру ваги ПБУ, що впливає на її морехідні характеристики.

Окрім цього, КВПБК поділяються за принципом роботи на компенсатори із пасивним, активним і гібридним режимами роботи. КВПБК пасивної дії працюють за принципом пневматичної подушки. Основним силовим елементом даного компенсатора є гідроциліндр (-и) і гідропневматичний акумулятор, які забезпечують стале зусилля на гаку. Використання гідроциліндра зумовлено його малими масо-габаритними показниками, вимогами до ущільнення поршня, можливість припинення роботи КВПБК шляхом перекидання поступлення рідини в камеру гідроциліндра.

Для забезпечення поглинання енергії від коливань використовують гідропневматичні акумулятори поршневого типу. Так як об'єм газової камери для забезпечення прийнятної роботи компенсатора є значним, акумулятор приєднується до системи із балонами стисненого газу. Затребуваний об'єм балонів визначають шляхом розрахунків між допустимою зміною тиску в пневмосистемі і ціною виготовлення та обслуговування балонів.



а) лінійного типу; б) підкронблочного типу

Рис. 11. Компенсатор вертикальних переміщень бурової колони

Слід зауважити, що даний тип КПВБК має невисоку точність компенсації коливань, яка становить приблизно 90% [3, 90]. Це спричинено обмеженим об'ємом газового резервуару і появою в системі таких негативних факторів, як тертя в поршнях акумулятора і гідроциліндра, опору в гідро- і пневмоарматурі тощо.

Альтернативним конструктивним рішенням є КВПБК активної дії. В ньому підведення рідини в порожнини гідроциліндра регулюється насосом, яким керує автоматизована система. Система на основі отриманих даних від датчиків і розробленої математичної моделі управління визначає потрібне положення поршня для компенсування хитаючи плавучої бурової установки. Даний вид компенсаторів є найбільш точним, оскільки дозволяє врахувати в процесі компенсації більшість факторів, які діють на ПБУ і бурильну колону, а також враховувати режими роботи гідронасоса і гідроциліндра. Теоретичні розрахунки свідчать, що можна досягти похибки компенсування порядку 0,5% [3, 90]. Однак такий КВПБК є енергозатратним, оскільки необхідна безперервна робота насоса, а, враховуючи зусилля, що мають місце на гаку, його потужність є значною.

В результаті було створено КВПБК з гібридним режимом роботи, який поєднує в собі кращі елементи двох попередніх систем. В гібридних КВПБК основне зусилля на гаку підтримується за допомогою «пасивної»

системи, а похибки, які виникають в «пасивній» системі нівелюються «активною» системою, яка прикладає додаткові навантаження для покращення точності компенсування. На даний час існують два конструктивних підходи для побудови КВПБК гібридного режиму роботи, – це конструкції, де прикладення додаткових зусиль відбувається безпосередньо до рами з гаком компенсатора, або конструкції, де компенсуюче зусилля передається через зміну тиску робочої рідини шляхом прикладення додаткового зусилля до поршня акумулятора. На сьогоднішній день компенсатори даного виду набули найбільшого поширення.

Активні роботи щодо оптимізації конструкції КВПБК, зменшення затрат на його виробництво і обслуговування призвели до розробки нових конструктивних рішень, серед яких варто відмітити компенсатор із похилими гідроциліндрами.

В процесі роботи кут між віссю штоків гідроциліндрів і віссю бурильної колони змінюється, що дає змогу змінювати зусилля утримання бурильної колони, яку розвивають гідроциліндри в залежності від положення каретки. Така конструкція використовується для зменшення об'єму пневмосистеми, так як збільшення тиску в системі (поршень гідроциліндра втягується) призводить до збільшення зусилля на штоку, яке нівелюється кутом нахилу гідроциліндра.



Рис. 12. Конструкція компенсатора з похилими гідроциліндрами (Aker Solutions)

Конструкція натяжних пристроїв водовіддільної колони

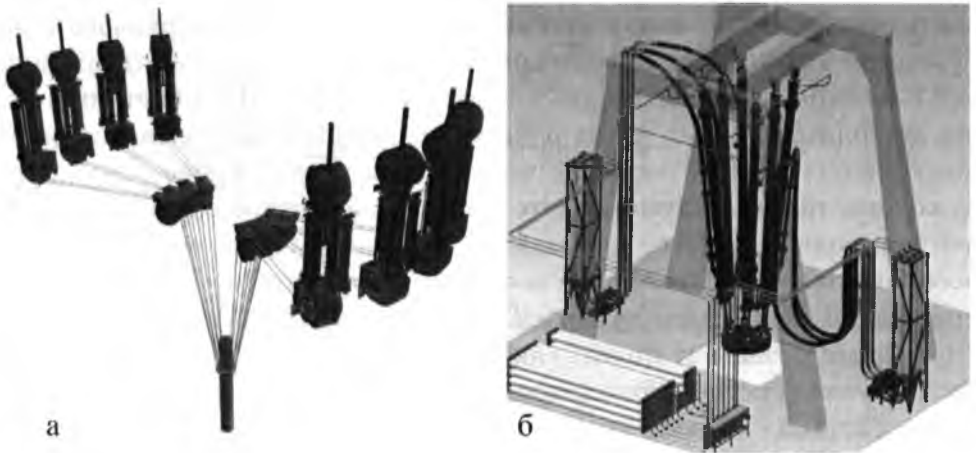
Натяжна система водовіддільної колони (НСВК) є однією із ланок, яка забезпечує з'єднання водовіддільної колони із палубою плавучої бурової установки. Основним конструкторським призначенням НСВК є забезпечення сталого зусилля натягу водовіддільної колони, яке не залежить від інших факторів (параметрів хитавиці ПБУ, просторового положення кінця водовіддільної колони і палуби судна тощо).

За конструкцією натяжні системи водовіддільної колони поділяють на два типи:

- натяжна система водовіддільної колони безпосередньої дії;
- натяжна система водовіддільної колони канатного типу.

НСВК безпосередньої дії складається із набору гідроциліндрів, які шарнірно закріплені до палуби. Даний вид НСВК є доволі компактний, складається із меншої кількості конструктивних деталей, однак через конструктивне виконання має наступні недоліки:

- хід поршня гідроциліндра повинен бути на всю довжину компенсування, що значно підвищує вартість його виготовлення і обслуговування;
- робочою камерою гідроциліндрів є штокова порожнина, що зменшує ефективну площу поршня і вимагає використання гідроциліндрів більшого діаметра;
- під час роботи виникає поперечна сила, яка є небажаною для гідроциліндрів;
- до циліндрів ставлять додаткові масо-габаритні вимоги.



а) НСВК канатного типу; б) НСВК безпосередньої дії

Рис. 13. Типові конструкції натяжних систем водовіддільної колони

Цих недоліків позбавлені НСВК канатного типу. Використання натяжних тросів дозволило винести натяжні конструкції на палубу корабля, де до них вже не ставляться жорсткі конструктивні вимоги. Це

дає можливість вносити в конструкцію натяжних пристроїв зміни. Перевагами цих НСВК є:

- зменшення ходу поршня через використання систем із рухомими блоками.

- робочою камерою в гідроциліндрах є безштокова камера, що дає можливість забезпечити більші зусилля при однакових розмірах;

- відсутність негативних поперечних зусиль, які діють на шток;

- мала довжина гідравлічного трубопроводу між компенсатором і акумулятором, що зменшує втрати тиску в трубопроводі і покращує режим роботи;

- можливість використання значної кількості натяжних канатів (і, відповідно, натяжних пристроїв) при забезпеченні натягу водовіддільної колони, що дає можливість теоретично розвивати довільне зусилля натягу.

Недоліком даної системи є її більша складність, що збільшує можливість її поломки.

Математичні моделі компенсатора вертикальних переміщень бурильної колони

З оглянутого матеріалу можна зробити висновок, що на сьогоднішній день існують два принципові підходи щодо побудови математичної моделі КВПБК. Перший – представлення всієї системи, де розміщений КВПБК, за допомогою еквівалентних спрощених моделей з поступовим їхнім уточненням. Такий підхід можна зустріти у роботах [10, 15, 34, 36, 37, 46, 51, 52, 88]. Дані моделі в основному використовуються для розробки алгоритмів управління «активною системою компенсації», дослідження залежності між динамікою верхнього кінця бурильної колони і динамікою долота тощо. Серед переваг таких моделей є можливість моделювання на одному рівні КВПБК і системи в якій він знаходиться. Так, в даних роботах відбувається моделювання на одному рівні із КВПБК таких систем, як бурова вежа, бурове судно, бурова колона, талева система, долото тощо. Однак значне спрощення моделей призводить до того, що моделювання впливу їхніх конструктивних особливостей на динаміку системи є недостатнім. Типові моделі притаманні даному методу можна побачити на рис. 14-15.

Більш розвинуті моделі використовувалися в роботах [36, 37], де досліджувана система представляється розвиненою системою КВПБК – талева система – верхній привід – бурильна колона – долото.

Інший підхід базується на побудові точної моделі КВПБК чи НСВК, а система в якій вони знаходяться не моделюється взагалі або моделюється спрощено. Таким шляхом здійснювалося моделювання в роботах [10, 25, 29, 34, 120]. Виходячи із складної конструкції системи, що моделюється, для побудови моделей використовують гібридні системи моделювання, які дають змогу створювати і вирішувати моделі складних механізмів, що складаються із механічних, гідравлічних,

електричних, електронних, пневматичних і ін-ших компонентів. Поєднання компонентів, кожен з яких описується набором рівнянь і вхідних параметрів, утворює математичну модель механізму, що є системою алгебраїчно-диференціальних рівнянь, яка розв'язується чисельними методами. Для дослідження динаміки роботи КВПБК і НСВК використовувались програмні продукти: SimulationX, Easy5, Simulink.

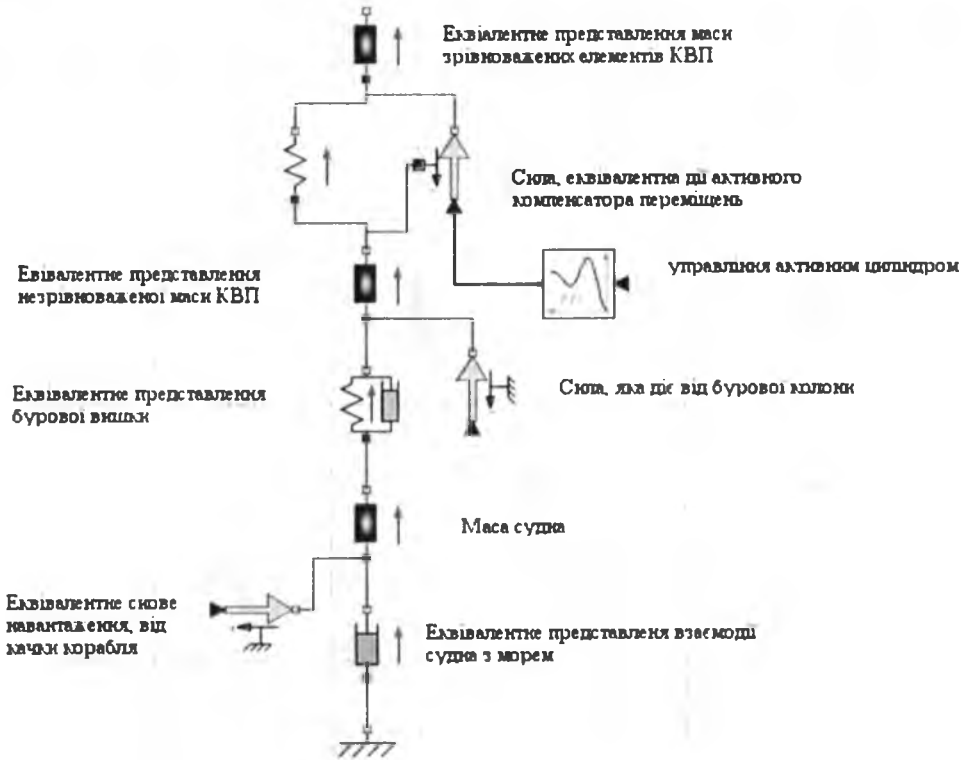


Рис. 14. Модель КВПБК для визначення алгоритму управління активним КВПБК [46, 51]

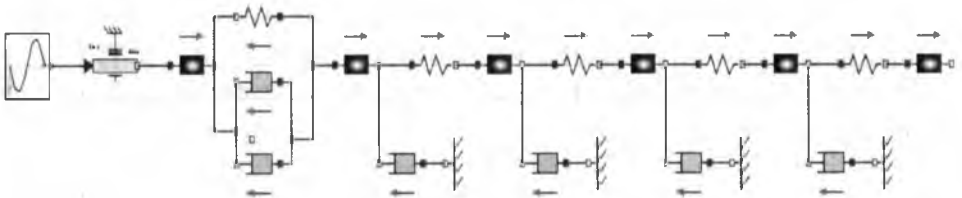


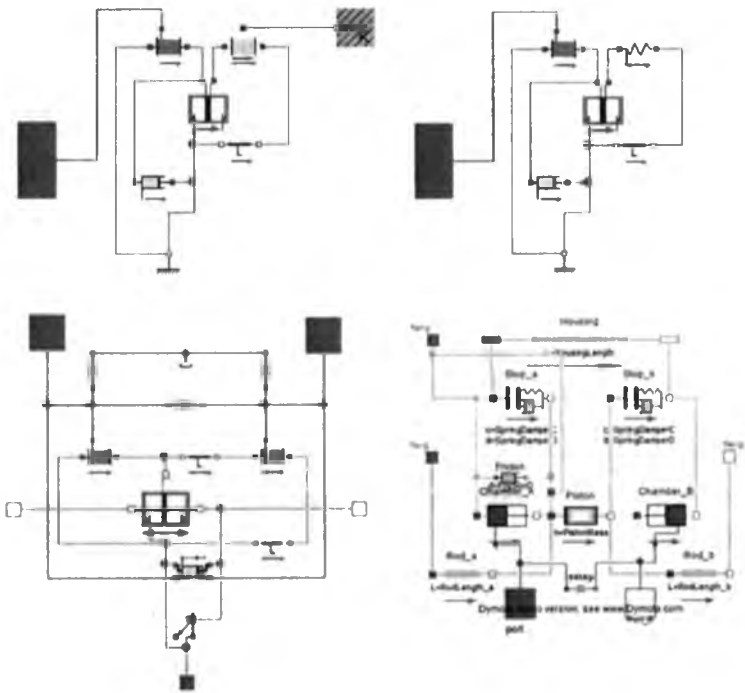
Рис. 15. Модель КВПБК для дослідження режиму роботи КВПБК - бурильна колона – долото [15]

Існуючі підходи до побудови моделей базових елементів із яких проводять побудову моделей КВПБК і НСВК подано нижче.

Моделювання складових елементів компенсатора вертикальних переміщень бурильної колони

Гідроциліндр і акумулятор

Основними елементами в конструкції КВПБК і НСВК є гідроциліндр і пневмо-гідрравлічний акумулятор. Перший виконує функцію забезпечення сталого зусилля компенсування, інший – забезпечення постійного тиску в гідравлічній системі. Враховуючи значні тиски в пневмо- і гідросистемі та постійний режим роботи, до конструкції гідроциліндра і акумулятора, а також властивостей робочої рідини і газу ставляться додаткові вимоги.



а) гідропневматичний акумулятор (бібліотеки Hydraulics 3.2.1.)

б) пружинний гідро акумулятор (бібліотеки Hydraulics 3.2.1.)

в) модель гідроциліндра двосторонньої дії бібліотеки HyLib 2.5 Modelon(c) г)

модель двостороннього гідроциліндра (бібліотеки Hydraulics 3.2.1.)

Рис. 16. Моделі бібліотек моделювання гідросистем в середовищі

Dymola

Акумулятор, виходячи із умов роботи, використовується поршневого типу. Щоб уникнути займання мастила, а також пригорання ущільнювача поршня, в пневмосистемі використовують інертні гази, зокрема азот [3, 90]. Ним також заповнюють неробочу камеру гідроциліндра. Окрім цього, ставляться додаткові вимоги до властивостей робочої рідини, яка повинна мати високі температури займання, високий коефіцієнт самозаймання від стискування, володіти антико-

розійними, антифрикційними властивостями, мати хімічну інертність до основних матеріалів конструкції гідроциліндра та акумулятора і відповідати ряду екологічних вимог. В продукції основних виробників КВПБК і НСВК робочою рідиною використовують рідини Elfion 818 виробництва Mac Dermid і Pelagic V18 виробництва Niche Products. Основою даних рідин є водо-гліколева суміш, до якої додаються антифрикційні, антикорозійні, антиорганічні та інші присадки. Вони володіють високими коефіцієнтами самозаймання від стискування, який становить 40:1 – 50:1, низькими температурами замерзання, що дає можливість працювати в умовах Арктики.

Модель акумулятора і гідроциліндра отримують шляхом зрівноваження всіх статичних і динамічних зусиль, які діють на поршень. Існуючі моделі відрізняються підходами до моделювання тих чи інших процесів, а також кількістю факторів, що враховуються.

На рис. 16 зображено створені моделі гідроелементів, бібліотек моделювання гідравлічних систем гібридної системи моделювання Dymola. Всі вони побудовані шляхом декомпозиції на складові елементи за принципом зрівноваження зусиль, прикладених до поршня від елементів, що моделюють конструкцію пристроїв. В залежності від пристрою ними є модель камери, заповненої рідиною, камери, заповненої газом, пружини тощо. Окрім цього, руху поршня протидіє тертя, яке залежно від досліджуваного об'єкта моделюється демпфером, тертям Стрібека, або тертям, що залежить від різниці тисків в камерах гідроциліндра.

Моделювання порожнини, заповненої рідиною

В простих моделях рідина вибирається із сталими параметрами і вважається не стискуваною, а корпус камери абсолютно твердим тілом, в результаті порожнина моделюється наступною системою рівнянь:

$$F = p_i \cdot A_i; \quad q_i = A_i \frac{dx_p}{dt}, \quad (46)$$

де p_i - тиск в порожнині; A_i - площа поршня; q_i - об'ємний розхід рідини в порожнині; x_p - координата положення поршня.

Слід зазначити, що такі моделі є неточними, тому на даний час в більшості робіт використовуються моделі порожнин, побудовані на математичних моделях реальних рідин, яким притаманний модуль об'ємної пружності, а в роботах [58, 93] обчислюють загальний зведений модуль пружності камери з рідиною:

$$\beta_c = \beta \frac{1}{1 + \frac{\beta}{E_{Si}} W}; \quad W = \frac{2 \left(\frac{D_0}{D_1} \right)^2 (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu)}{\left(\frac{D_0}{D_1} \right)^2 - 1}, \quad (47)$$

де β – об’ємний модуль пружності рідини; E_{St} – модуль Юнга матеріалу стінки корпусу; D_0 – зовнішній діаметр циліндра; D_i – внутрішній діаметр циліндра; ν – модуль Пуансона матеріалу стінки корпусу.

Модель порожнини з рідиною, відповідно, описується наступними рівняннями [58, 93]:

$$F = p_i A_i;$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\beta}{V_i} \left(q_i \cdot \operatorname{sgn} \left(\frac{dx_p}{dt} \right) - q_i - A_i x_p \right); \quad (48)$$

$$V_i = A_i x_p + V_{id},$$

де q_i – втрати робочої рідини внаслідок течії; $V_i = V_{id} + A_i x_p$ – поточний об’єм робочої порожнини; V_{id} – неробочий об’єм порожнини гідроциліндра.

Математична модель робочої рідини

Складність моделювання рідини в тому, що основні її характеристики – густина, кінематична і динамічна в’язкість, модуль об’ємної пружності не є постійними величинами і залежать від значень тиску і температури рідини. На сьогоднішній день розроблено велику кількість емпіричних формул, які описують зміну параметрів рідини в залежності від тиску і температури. Так, в роботі [58] наведено сім емпіричних формул для описування залежності модуля об’ємної пружності від тиску рідини, залежності зміни кінематичної в’язкості від температури. Однак через велике різноманіття рідин і їхніх властивостей найточнішим на сьогоднішній день є представлення зміни їхніх параметрів за допомогою таблиць даних, отриманих в результаті лабораторних досліджень. Таким чином, моделюються рідини в Simulink, Dymola, SimulationX. Залежність характеристик рідин, які використовуються в гідросистемах КВПБК і НСВК, від тиску на даний час є ще недостатньо вивченою.

Моделювання сил тертя поршня до стінок циліндра

Сили тертя за своєю природою є складним процесом, який залежить від багатьох факторів. В більшості існуючих моделей за основу вибирають модель тертя Стрібека, яка достатньо точно моделює тертя ущільнення по змащених поверхнях із малою шорсткістю [58]

$$F_{frS} = f_v v + \left[F_{Coulomb} + F_{Stribeck} \cdot e^{-f_{exp} |v|} \right] \operatorname{sgn}(v), \quad (49)$$

де f_v – коефіцієнт в’язкого тертя; v – швидкість переміщення одного тіла відносно іншого; $F_{Coulomb}$ – сила тертя Кулона; $F_{Stribeck}$ – сила тертя Стрібека; f_{exp} – коефіцієнт згасання тертя Стрібека.

Слід зауважити, що існують моделі, в яких використовують виключно модель Кулона [93]. Окрім цього, в модель тертя вводять дода-

нок, який враховує зміну сили тертя від тиску в камерах гідроциліндра. В роботі [58] даний вид тертя моделюється наступним чином:

$$F_f = |p_i - p_j| \cdot k_p \cdot \text{sgn}(v), \quad (50)$$

де p_i , p_j – тиски в робочій і неробочій камерах гідроциліндра; k_p – коефіцієнт тертя.

Коефіцієнт тертя в даній роботі повинен задаватися, однак в роботах [93, 106] визначається із площі контакту ущільнювача з циліндром.

В роботі [93] коефіцієнт тертя є рівним:

$$k_p = \pi \mu (d + d_i) \frac{b}{2}. \quad (51)$$

В роботі [106] сила тертя визначається за формулою:

$$F_f = \mu \pi d b (z k + p), \quad (52)$$

де μ – коефіцієнт тертя матеріалу поршневого кільця по матеріалу корпусу циліндра; b – ширина поршневого кільця; d – діаметр циліндра; z – кількість поршневих кілець; k – питомий тиск кільця на стінку циліндра; d_i – діаметр штока.

Моделювання камери, заповненої газом

В більшості випадків для моделювання використовують ідеальний газ, а процес, який проходить в акумуляторі вважається адіабатним:

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad \gamma = 1.44. \quad (53)$$

Однак теоретично отриманий коефіцієнт адіабати $\gamma = 1.44$ точно не моделює процес, що проходить у газовій камері за великих значень тисків. Тому при моделюванні камер високого тиску, де використовується модель ідеального газу, для отримання адекватної моделі рекомендується уточнювати показники адіабати в залежності від значення тиску і температури робочого газу [3, 58]. Залежність коефіцієнтів адіабати від тиску і температури для азоту подано на рис 16.

Іншим підходом до побудови моделі газу є використання моделей реального газу. Тут використовуються або теоретично розроблено моделі реального газу, яких на даний час є більше десяти, або ж використовуються емпіричні моделі газу, створені на основі численних досліджень.

Фундаментальним дослідженням властивостей азоту в цьому напрямку є робота [83], в якій, проаналізувавши 14000 експериментальних досліджень властивостей азоту і опрацювавши велику кількість робіт даної тематики, розроблено емпіричну математичну модель азоту в межах температур від 63 К до 1000 К і тиску до 2200 МПа. Дана модель використовується при моделюванні газової камери акумулятора в бібліотеці Hydraulics Modelon(c) і, мабуть, на сьогоднішній день є найточнішою.

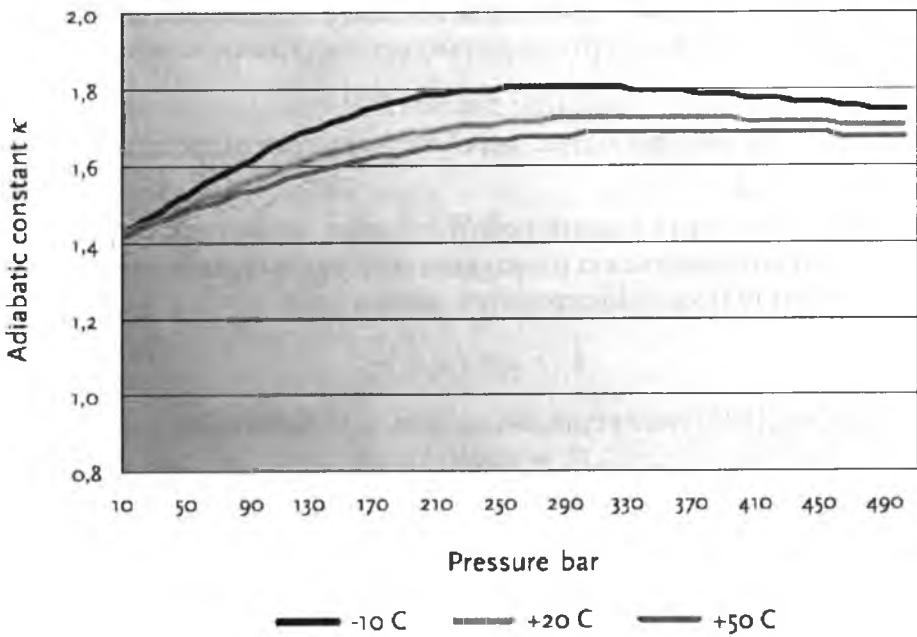


Рис. 17. Графіки залежності показника адіабати від тиску і температури для азоту [3]

В бібліотеці PneumoLib пневматична камера моделюється наступною системою рівнянь (використовується ідеальний газ):

$$\begin{aligned}
 pV_{\text{eff}} &= mRT_{\text{cam}}; \\
 m \frac{dT_{\text{cam}}}{dt} + T_{\text{cam}} \frac{dm}{dt} &= \gamma T_m \frac{dm}{dt} + \frac{Qp}{c_p} - \frac{S_{\text{ht}} \alpha (T_{\text{cam}} - T_{\text{sur}})}{c_p}; \\
 Q &= \frac{dx_p}{dt} A_p; \\
 V_{\text{eff}} &= x_p A_p + V_{\text{dead}}; \\
 F &= pA_p,
 \end{aligned} \tag{54}$$

де p – поточний тиск газу в порожнині; V_{eff} – ефективний об'єм порожнини; m – маса газу в порожнині; R – газова стала; T_{cam} – температура в камері; $\frac{dm}{dt}$ – масова витрата газу з порожнини; γ – питома теплоємність газу; T_m – температура газу, що входить в порожнину; Q – об'ємна витрата камери; S_{ht} – площа поверхні, через яку віддається тепло; α – коефіцієнт теплопередачі; T_{sur} – температура навколишнього середовища; V_{dead} – неробочий об'єм камери; F – зусилля, яке передається на поршень.

Математична модель шківів і тросів

В більшості оглянутих робіт моделюванням динаміки шківів і тросів нехтують, однак в роботах [29, 37, 88, 97] дані елементи враховувались. Модель троса представляють тілом Фойхта, пружні властивості якого залежать від довжини тросу і модуля пружності матеріалу, а демпфуючі характеризують внутрішню тертя і задаються авторами на свій розсуд. Так, в роботі [29] коефіцієнт пружності знаходять за формулою:

$$k = \frac{EA}{L} \eta, \quad (55)$$

де E - модуль пружності матеріалу тросу; A - площа поперечного сечення тросу; L - довжина тросу; η - коефіцієнт заповнення (відношення суми площ поперечного сечення дровинок, з яких виготовлений трос до площі поперечного перерізу тросу).

Коефіцієнт демпфування брався рівним 10% від коефіцієнту пружності. Хоча вагою тросу в більшості випадків нехтують, в роботі [88] вона моделювалася точковими масами, зосередженими по середині ділянок.

Модель роботи шківа в багатьох роботах отримують шляхом зрівноваження всіх моментів активних та інерційних сил, що діють на шків, і записують наступним рівнянням [88, 94, 97]:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i r_i + \sum_{i=0}^n \bar{M}_i - J \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} = 0, \quad (56)$$

де \bar{F}_i - зовнішня сила, що діє на шків; \bar{M}_i - зовнішні моменти, що діють на шків; r - відстань від лінії прикладання сили до центру обертання шківа.

Значення кута φ визначають за формулою:

$$\varphi = \frac{\Delta L}{R}, \quad (57)$$

де ΔL - довжина ділянки тросу, що пройшла через шків, R - радіус шківа.

Однак дана модель не враховує ефект проковзування канату по шківу.

Проковзування канату по шківу буде тоді, коли не забезпечуватиметься наступна умова:

$$\frac{T_1}{T_2} \leq e^{\alpha f}, \quad (58)$$

де T_1 і T_2 - сила натягу кінців канату; α - кут охоплення тросом шківа; f - коефіцієнт тертя між шківом і тросом.

В процесі дослідження роботи поліспастного механізму проковзуванням нехтують, однак при дослідженні роботи систем за умови обриву тросу, різкої зміни ваги на гаку, тощо цим чинником нехтувати не можна.

Бурові вежі

Бурова вежа в основному є просторовою фермовою конструкцією, яка монтується над палубою плавучих бурових установок (ПБУ) і служить для виконання спуско-підймальних операцій, монтування гирлового обладнання і водовіддільної колони, розвантаження бурильної колони, а також є місцем кріплення компенсатора вертикальних переміщень бурильної колони, системи верхнього приводу, підсвічника та механізмів подачі й укладання труб. Типове монтування бурової вежі і супутніх механізмів зображено на рис. 18.

При бурінні на морі найбільшого поширення набули бурові вежі баштового типу, а, виходячи із потреби в пришвидшенні підготовчих процесів при бурінні свердловин, на сьогодні більшість ПБУ для буріння в умовах надглибокого моря виконуються із спареними буровими вежами, використання яких дає змогу зменшити час на технологічні переходи за рахунок паралельного виконання операцій на 20-40%.

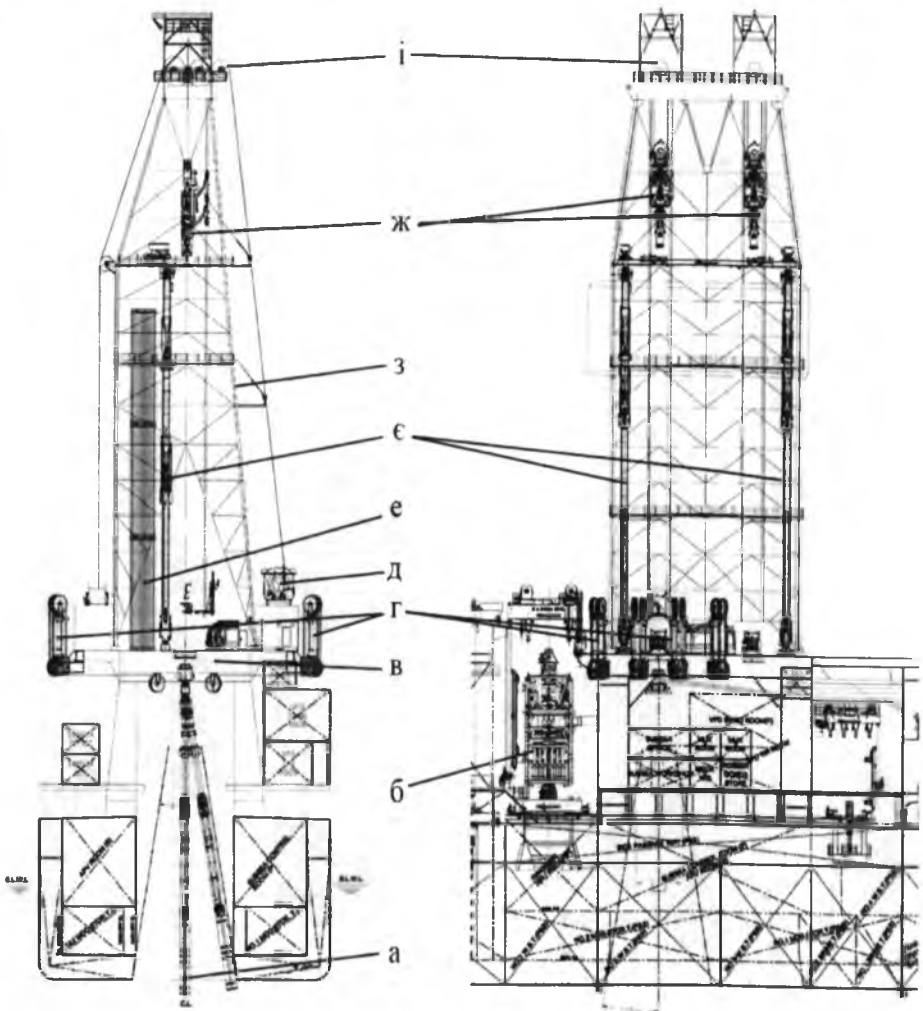
Так, найбільш поширена спарена бурова вежа, що використовується на бурових судах Samsung – NOV «Dual derrick» має наступні характеристики:

статичне навантаження:	907,2 т;
розміри основи вежі:	18,3x24,4 м;
розміри верху вежі:	5,48x5,48 м;
робоча висота вежі:	61 м;
максимальна вага труб встановлених у підсвічник:	1200 т.

Окрім цього, активно використовуються традиційні «одиничні» баштові бурові вежі. Характеристики вежі, що використовувалась на перших судах серії Gusto P10000 наступні:

статичне навантаження	907,2 т;
розміри основи вежі	14,63x14,63 м;
робоча висота	54,86 м;
змонтований КВПБК підкронблочного типу.	

Крім традиційної схеми із застосуванням вишки і лебідки на сьогоднішній день розроблено бурові установки, що використовують інші підходи для буріння свердловин. Зокрема, це системи National Oilwell Varco Cylinder Hoisting Rig і Aker MH RamRig. Дані системи побудовано за принципом утримання ваги бурильної колони за допомогою системи гідроциліндрів, що утримують рухому траверсу, яка рухається по вертикальних напрямних. Використання гідроциліндрів для утримання ваги бурильної колони дозволяє одночасно використовувати їх як у якості компенсатора вертикальних переміщень, так і зменшувати вимоги до конструкції фермової надбудови стоек. Конструкцію системи Aker RamRig подано на рис. 19.



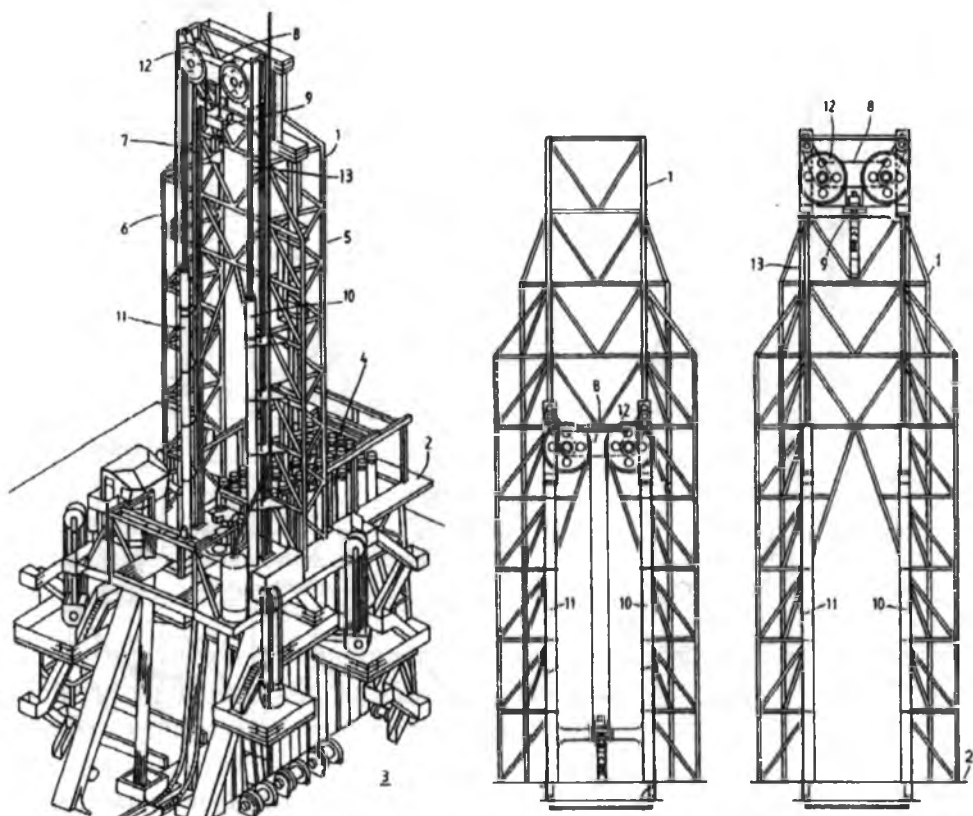
- а) водовіддільна колона; б) блок гирлового обладнання; в) бурова палуба; г) натяжні пристрої водовіддільної колони канатного типу; д) лебідка; е) підсвічник; є) механізм подачі і укладки труб; з) бурова вежа; ж) верхній привід; і) компенсатор вертикальних переміщень

Рис. 18. Схема монтування бурової вежі і супутнього обладнання бурового судна Ensc DS-8

Дана установка складатиметься із двох фермових стійок, що утворюють бурову вежу і монтуються на буровій площадці. На них кріпляться гідроциліндри для утримання ваги бурильної колони і напрямні для руху траверси. Залежно від проектного значення зусиль на гаку кількість гідроциліндрів в конструкції може змінюватися від 1 до 3. Траверса, що рухається між стійками, являє собою балку, до якої із однієї сторони через рухомі важелі прикладається зусилля від гідроциліндрів, а з іншої кріпляться шківні, через які перекинуті троси. З одного боку прикріплені до бурової палуби, а з іншого до верхнього приводу. Така система

використовується на БС West Navigator і Samsung Stena Ice MAX, а також на серії напів-занурених бурових платформ виробництва Aker Solutions.

Дана конструкція має ряд переваг в порівнянні із традиційною схемою. Зокрема, вона є компактнішою, має меншу вагу, більша безпека за рахунок відсутності лебідки, розташування підсвічника на рівні бурової площадки, нижчий центр ваги системи.



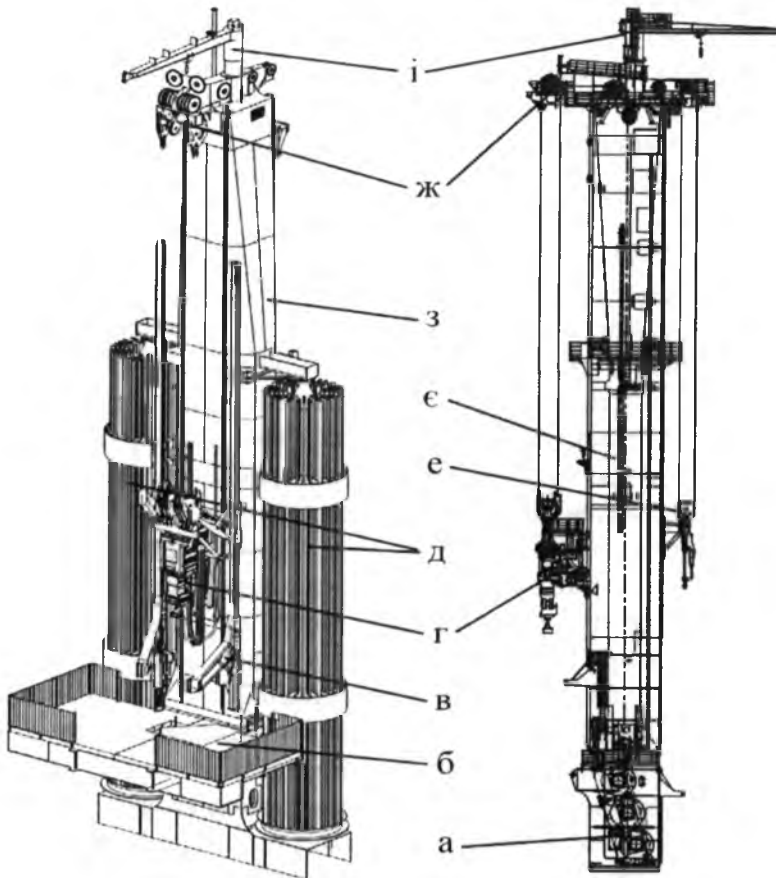
- 1) бурова вежа; 2) буровий майданчик; 3) палуба; 4) підсвічник;
5), 6) фермові стойки; 7) напрямна; 8) траверса; 9) верхній привід;
10), 11) гідравлічний поршень; 12) шків; 13) троси

Рис. 19. Конструкція установки Aker RamRig [87]

Іншим нетрадиційним рішенням є бурова вежа Huisman Multi Purpose Towers, що встановлена на бурових суднах Noble Globetrotter I і HuisDrill 12000, схему виконання якої подано на рис. 20.

В даному виконанні бурова вежа виконана у вигляді стояка прямокутного січення, в середині якого розташовується техноло-гічне обладнання: системи пасивної та активної КВПБК, бурова лебідка, допоміжна лебідка. Виходячи із того, що жорсткість такої конструкції є значно більшою за традиційну виробник заявляє наступні переваги такої вежі: менші розміри площадки для установки вежі (від 4x4 до 7x7

м), кращий доступ до бурового майданчика, швидкість монтування і ремонту, в порівнянні із традиційною конструкцією нижчий центр ваги.



- а) бурова лебідка; б) буровий майданчик; в) механізм подачі бурових труб; г) верхній привід; д) підсвічник карусельного типу; е) автомат для збирання спуску і підйому свічок; є) пасивний КВПБК; з) бурова вежа; ж) роздільний кронблок; і) обслуговуючий кран

Рис. 20. Конструктивна схема виконання Huisman Multi Purpose Towers[50]

Найбільш поширеним типом бурових веж для ПБУ залишаються традиційні фермові баштові конструкції, однак ведеться активний пошук альтернативи для них. Виходячи із умов роботи до конструкції бурової вежі ПБУ, ставлять додаткові вимоги пов'язаних із конструкцією корабля – низький центр ваги конструкції, враховуючи максимальне завантаження бурової вежі і малий опір вітровому навантаженню. Ці параметри впливають на стійкість корабля і параметри його хитамиці, а звідси і на його конструкцію. Окрім цього, важливу роль при бурінні на морі відіграє процес автоматизації і зменшення часу на виконанні операцій. Виходячи з цього, більшість бурових вишок облад-

нано автоматичними системами подачі, монтування і укладання свічок бурильних труб і секцій водовіддільної колони, системами верхнього приводу, комплексними системами управління буровими роботами. Тому на даному етапі розвиток конструкцій бурових веж скеровано в напрямку зменшення їхнього центру ваги і опору вітровому навантаженню, а також зменшення часу на простій і проведення технологічних операцій за рахунок автоматизації і розробки нових комплексних рішень бурової системи.

Бурова вежа є важливим елементом у процесі дослідження динаміки роботи системи «ПБУ - долото», однак на сьогоднішній день роботи щодо вивчення її режимів роботи є не багаточисельними, а більшість робіт щодо динаміки буріння, моделювання бурової вежі відводять другорядну роль і замінюють спрощеними еквівалентними моделями, які не достатньо точно представляють конструктивні параметри вежі. Аналіз моделей, які використовувалися для представлення верхнього закріплення бурової колони різними авторами наведено в роботі [94]. Представлені моделі верхнього закріплення бурильної колони не адекватно відображають реальну механічну систему.

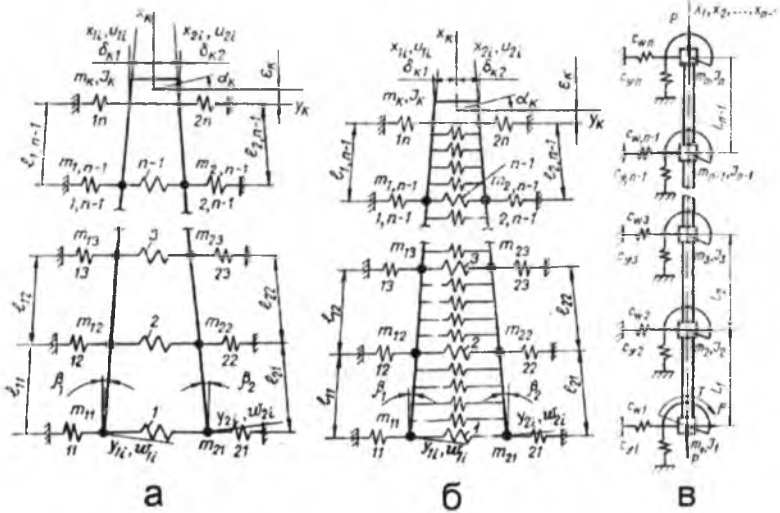
Бурова вежа є фермовою конструкцією, дослідження динаміки роботи якої можна віднести до групи задач вивчення динаміки стержневих систем. Даний розділ задач на сьогоднішній день є ґрунтовно дослідженим і використовується для досліджень цілого діапазону практичних задач. Загалом такі задачі розв'язуються методом кінцевих елементів, де кожна балка конструкції представляється кінцевим елементом типу «стрижень», що описаний технічною теорією або теорією Тимошенко з врахуванням внутрішнього тертя, сил демпфування тощо [27, 54, 65]. В основному дослідження динаміки відбувається в середовищах кінцево-елементного моделювання таких, як Ansys і Abaqus, або інших більш вузькоспеціалізованих програмах.

Хоча дані системи і дають можливість досить точно моделювати динаміку роботи і параметри бурових веж проте комплексне дослідження всієї бурової системи методом кінцевих елементів, яка включає також і вежу, через обчислювальну складність, не має практичного інтересу. В результаті цього виникає зацікавлення в інших методах моделювання бурової вежі.

Харченко С.В. [102, 117] в своїх роботах запропонував моделювати вежу за допомогою стрижня із кусково-сталими параметрами і прикладеними точковими масами, пружними елементами по його довжині. Отримані моделі давали змогу оцінити динаміку роботи різних елементів вежі.

В роботах [94, 97] бурова вежа моделюється у вигляді двох платформ з'єднаних чотирма еквівалентними стержнями і розглядається в комплексі із талевою системою. Хоча дана система є адекватною реальній конструкції при вивченні повздовжніх коливань бурової уста-

новки, проте можливість використання такої моделі при вивченні просторових рухів бурової вежі на морі є обмеженою, через проблему представлення в моделі інерційних і гравітаційних навантажень, а також поперечної жорсткості конструкції.



а) розрахункова схема А-подібної бурової вежі б) розрахункова схема баштової вежі в) розрахункова схема висотної споруди із кусково-постійними параметрами

Рис. 21. Розрахункові схеми бурових веж [102]

Зовнішні зусилля, що діють на бурову вежу

Серед основних навантажень, які діють на бурову вежу виділяють гравітаційне, інерційне і вітрове. Інерційне і гравітаційне навантаження напряму залежить від хитавиці ПБУ і конструкції бурової вежі. Дослідження хитавиці плавучої установки розглянуто в попередніх розділах. Вітрове навантаження на сьогоднішній день моделюють переважно емпіричними формулами. Зокрема, в роботі [38] зусилля визначається за наступною формулою:

$$F_D(t) = \frac{1}{2} \rho C_D A U^2(t), \tag{59}$$

де ρ – густина повітря; C_D – коефіцієнт опору; A – площа споруди; $U(t)$ – випадкова швидкість вітру.

В роботі [103] силу опору вітрового навантаження визначають за формулою:

$$P_D = C_D \frac{v}{16}, \tag{60}$$

де C_D – коефіцієнт обтікання надводних конструкцій, визначається шляхом експериментального дослідження зменшених моделей в аеродина-

мічній трубі. За рекомендаціями, для надводної конструкції ПБУ $C_D = 1,3$, для бурової вежі $C_D = 4$; v – швидкість вітру, яка задається експериментально або визначається за формулою Лайтмана:

$$v(z) = v_w \frac{\ln(z) + 6.215}{8.01}, \quad (61)$$

де v_w – швидкість вітру на висоті 6 м над рівнем моря; z – висота над рівнем моря.

Більш детально визначення зусиль від вітрового навантаження можна знайти в роботах з проектування висотних споруд. Однак слід зазначити, що на сьогоднішній день абсолютна більшість вітро-вих навантажень визначається шляхом емпіричних розрахунків через значну складність побудови теоретичних моделей обтікання газом складних конструкцій, і складність моделювання швидкості вітру як по висоті, так і в часовому діапазоні.

Бурильна колона

Бурильна колона являє собою ступінчастий порожнистий вал, що з'єднує породоруйнівний інструмент (долото) із обладнанням на палубі ПБУ. Призначена для передачі осьового навантаження і обертового руху долота і подачі промивальної рідини в зону вибою. Окрім цього, в деяких випадках бурильна колона слугує каналом передачі гідравлічної або електричної енергії до вибійних двигунів, а також є каналом передачі інформації телеметричних систем із зони вибою. Загалом, при бурінні свердловин на морі в основному буріння ведуть системою верхнього приводу, а, виходячи із складності обслуговування свердловин на дні моря, свердловини в переважній більшості є кушовими і з значним відхиленням вибою від вертикалі. Так, більшість наддовгих свердловин пробурено з берегів або на морі (рис. 22).

Конструкція бурильної колони при бурінні свердловин на морі не відрізняється від колони для буріння свердловин на суші, однак виходячи із того, що в процесі буріння потрібно додатково долати товщу води, а також поширеність похило-скерованого і горизонтального буріння, до бурильної колони ставляться додаткові вимоги. Зокрема, це можливість нарощування довгих бурильних колон, додаткові вимоги до жорсткості бурильних колон і замкових з'єднань, так як в них виникають згинаючі зусилля, викликані прогином водовіддільної колони внаслідок дії на неї хвилювання моря, а також в результаті викривлення свердловини. При бурінні свердловин із відхиленням вибою від вертикалі до бурильних труб ставляться вимоги щодо втрат тиску промивальної рідини в трубі, що впливає на якість промивання свердловини, жорсткості бурових труб і зусиль тертя, що виникають між буровими трубами і стінками свердловини. З іншої сторони використання бурильних труб великого діаметра призводить до збільшення водотоннажності ПБУ, зокрема збільшення тоннажності сховища бурильних і обсадних труб, а також

об'єму сховищ інгредієнтів промивальної рідини, потребує врахування зміни центру ваги ПБУ при нарощенні бурильної колони.

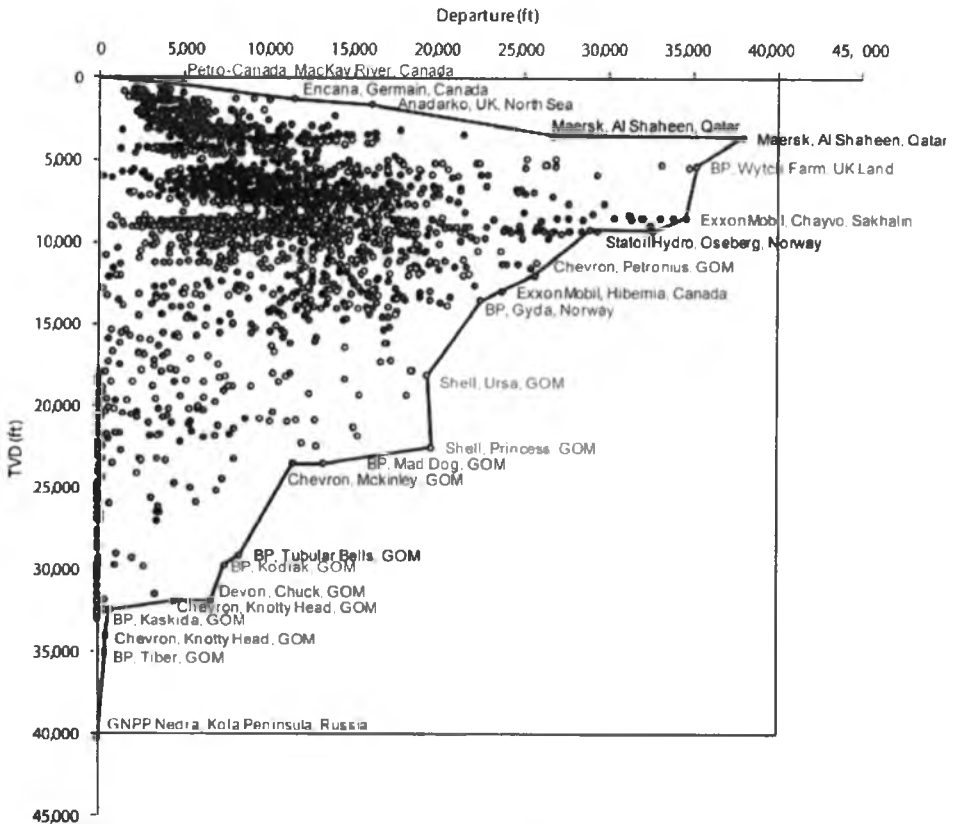


Рис. 22. Характеристики існуючих пробурених свердловин [12]

На сьогоднішній день при бурінні на морі використовують бурильні труби різних стандартів, однак враховуючи те, що переважна більшість ПБУ сертифікуються згідно API і DNV, бурильні труби для буріння на морі виконуються згідно нормалей API. Зокрема, найбільшого поширення набули бурильні труби діаметрів 5½, 5⅞, 6⅞ дюйма. Бурильні труби діаметром 6⅞ дюйма використовують при бурінні надглибоких свердловин в умовах глибокого моря, а основним діаметром бурильних труб для буріння свердловин на морі є 5⅞ дюйма [41, 79].

Так, типовим оснащенням бурових суден компанії Pacific Drilling є наступним:

- 10000 футів 6⅞” обсадної колони, матеріал S-135, з’єднання 6⅞ FH;
- 25000 футів 5⅞” бурильної труби, матеріали S-135, з’єднання 585 Turbotorque;
- 10000 футів 5” бурильної колони, матеріал S-135, з’єднання GPDS50.

Традиційним матеріалом для бурильних труб є сталь – S-135 специфікації API-5d, однак компаніями виробниками пропонуються бурильні труби, виготовлені із сталей з кращими характеристиками – V150, UD-165, а також алюмінію, титану і композиту. Основні характеристики матеріалів бурильних труб подано в табл. 1.

Таблиця 1. Загальні характеристики матеріалів для бурильних труб [61]

Параметри	S-135	V-150	UD-165	Алюм іній	Титан
Зовнішній діаметр, дюйм	5 $\frac{7}{8}$	5 $\frac{7}{8}$	5 $\frac{7}{8}$	5 $\frac{7}{8}$	5 $\frac{7}{8}$
Внутрішній діаметр, мм	130,89	130,89	130,89	121	130,89
Товщина стінки, мм	9,2	9,2	9,2	14,12	9,2
Границя текучості, МПа	930,8	1034,2	1137,6	482,6	827,4
Границя міцності на розрив, Н	3755294	4172546	4589802	2890609	3338037
Вага однієї труби на повітрі, Н	3719	3719	3719	2396	2469
Вага однієї труби в промивальній рідині густиною 950 кг/м ³	3180	3180	3180	1673	1931
Ціна відносно S-135	1	1.1	1.15	1.5-2.5	7-10

Бурильні труби, виготовлені із алюмінію, композиту і титану мають переваги в порівнянні із сталевими: краще відношення міцності до густини, менша густина матеріалу, володіють вродженою гнучкістю, мають кращу втомну довговічність і володіють кращою корозійною і ерозійною стійкістю, менше зношують обсадну колону і мають більшу стійкість під час буріння горизонтальних свердловин [40 , 79 , 92], що відкриває можливість їхнього використання при бурінні свердловин зі значним відхиленням вибою від вертикалі у місцях де використання сталевих бурильних труб є проблематичним. Також бурильні труби з титану і алюмінію володіють меншими показниками втрати тиску промивної рідини. В роботі [79] при порівнянні бурильних труб, виготовлених з сталі і титану, отримано залежності втрати тиску з глибиною свердловини, які зображено на рис. 23.

Так, при бурінні двох свердловин в Південно-китайському морі із застосуванням алюмінієвих бурильних труб діаметром 5 $\frac{7}{8}$ дюйма було досягнуто наступних результатів: при загальному збільшенні операційних витрат на буріння на 10-20% швидкість горизонтального відхилення свердловини збільшилась на 10-30% за рахунок кращої гнучкості, менших сил тертя і втрати крутного моменту, меншої втрати тиску промивальної рідини і кращій стійкості. Окрім цього, виявлено

кращий втомний опір і опір температури, менше зношення обсадних колон і менші енергетичні витрати при бурінні [92].

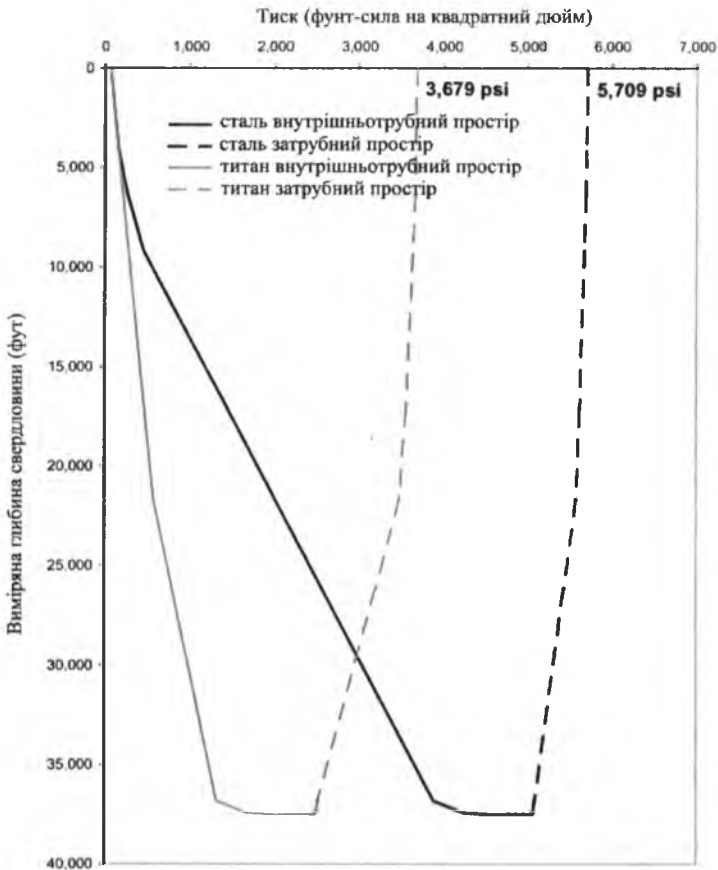


Рис. 23. Сумарна втрата тиску в залежності від довжини бурильної колони, складеної з сталевих і титанових бурильних труб [79]

Однак бурильні труби виготовлені з алюмінію, а особливо із композиту, виходячи із характеристик матеріалів мають в півтора і більше разів товщі стінки порівняно зі сталевими трубами, що впливає на зменшення площі внутрішнього отвору в бурильній трубі і призводить до втрат тиску. На поширеність несталевих бурильних труб впливає також висока вартість в порівнянні з традиційними, тому вони в більшості використовуються в свердловинах, де застосування сталевих труб неможливе або викликає додаткові ризики. Конструкція більшості бурильних труб є традиційною і складається із тіла труби і замкових з'єднань, приєднаних до труби зваркою, шляхом накату чи в результаті механічного з'єднання. Однак в роботі [8] пропонується конструкція алюмінієвих бурильних труб підвищеної плавучості, зображеної на рис. 24, особливістю якої є наявність в тілі труби порожнин, заповнених повітрям.

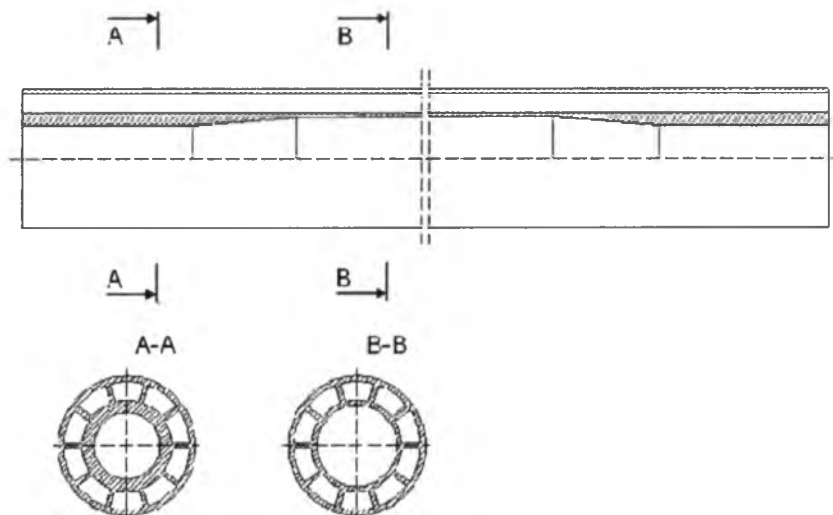


Рис. 24. Поперечний і повздовжній переріз алюмінієвої бурильної труби підвищеної плавучості [8]

Автори зазначають наступні переваги такої конструкції в порівнянні із традиційними – значне зменшення ваги бурильної труби в буровому розчині і значно більше відношення жорсткості до ваги бурильної колони, що є ключовими параметрами для буріння свердловин із значним відхиленням вибою від вертикалі. Основним недоліком є гідравлічний опір промиванню свердловини.

Окрім цього, бурові труби, що використовуються при бурінні горизонтальних свердловин можуть виготовляти із гвинтовим профілем для турбулізації потоку промивальної рідини і покращення процесу промивки свердловини.

Другим важливим елементом бурильних труб є бурильний замок. Більшість бурильних труб комплектуються стандартними бурильними замками згідно специфікацій API 5d. Однак провідні компанії розробляють нові різьбові з'єднання, розроблені для покращення механічних властивостей з'єднання, збільшення герметизації та зменшення напруження що виникають в різьбі. Компанія NOV GrandPrideco розробила серію бурових замків – GPDS™, HT™, TurboTorque™, eXtreme™, що активно використовуються при бурінні на морі. Основними змінами в нових різьбових з'єднаннях, порівняно зі стандартними, за специфікацією API є наявність двох упорних торців, спеціальних ущільнюючих конічних поверхонь, зменшення конуса різьби, спеціальний профіль різьби з більш пологою різьбою з великими радіусами заокруглень. Порівняння профілів різьби подано на рис. 25.

Бурильні замки в композитних, а також деяких конструкціях алюмінієвих і титанових бурильних труб у зв'язку із механічними ха-

рактеристиками даних матеріалів є слабкими тому в сучасних бурильних трубах їх виготовляють із сталі і з'єднуються з тілом труби за допомогою спеціальних з'єднань. Приклади таких з'єднань подано на рис. 26.

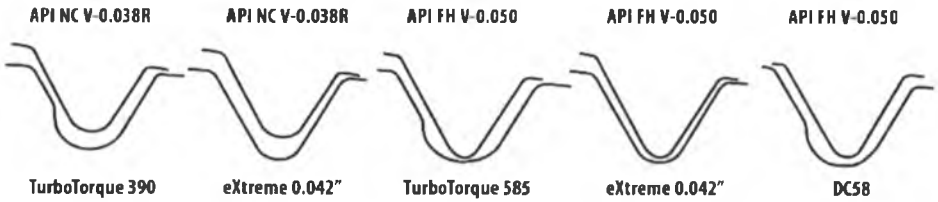
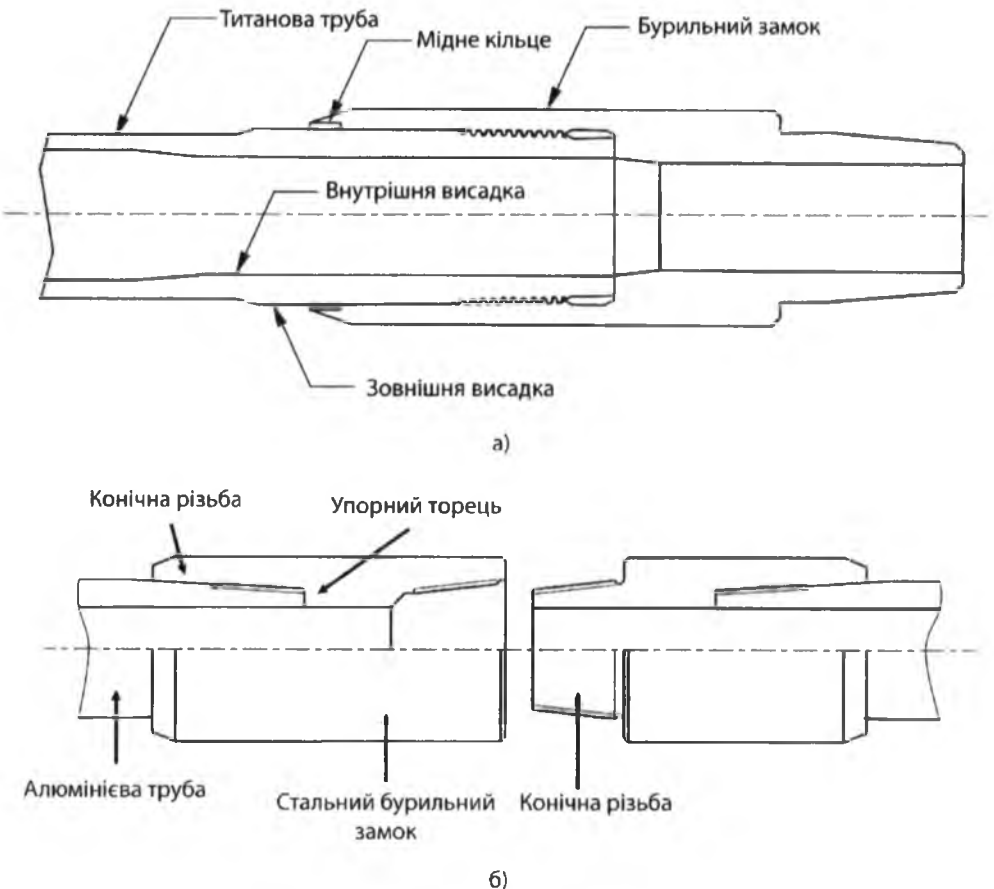


Рис. 25. Порівняння профілю різьби бурових труб [28]

Компоновка низу бурильної колони залежить від свердловини, яку потрібно отримати, умов роботи і характеристик породи (в даній роботі це не розглядається).



а) конструкція титанової бурильної труби,
б) конструкція алюмінієвої бурильної труби

Рис. 26. Конструкції бурових замків бурових труб [72, 80]

Дослідження динаміки роботи бурильної колони є важливим елементом в розумінні процесів роботи бурового інструменту, руйнування породи, що дає змогу розробляти методики та інструменти для покращення параметрів буріння і довговічності роботи бурового обладнання. Хоча й існує багато робіт з динаміки бурильної колони, через дію великої кількості силових факторів і неможливості їхнього точного математичного опису питання вивчення режимів роботи бурильної колони залишається відкритим.

Під час досліджень режимів роботи бурильної колони математичними моделями, бурильну колону представляють у вигляді сконцентрованих мас, з'єднаних пружними чи пружно-пластичними елементами [36, 37, 39, 59, 99] у вигляді вагомого стрижня із кусково-сталими розподіленими параметрами по довжині і нехтуванням бурильними замками [2, 35, 53, 76, 85, 95, 100, 109, 118] та з врахуванням геометрії бурильних замків [113]. Окрім цього, до моделі прикладають зусилля, які виникають в процесі буріння. В моделі можуть вводитися додаткові пружні, амортизуючі та інші елементи, які моделюють встановлене по довжині колони спеціальне обладнання – центратори, калібратори, розширювачі, амортизатори тощо [94, 100, 108].

У процесі побудови стрижневої моделі бурильної колони в усіх роботах використовувалась технічна теорія стрижня. Відповідно, при дослідженні поздовжніх коливань, модель частини бурильної колони, що має однакові параметри описувалась наступним типовим диференціальним рівнянням [94, 95, 100, 105, 107, 110, 111]:

$$AE \frac{\partial u(x,t)^2}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial u(x,t)^2}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \rho g, \quad (62)$$

де A – площа поперечного січення; E – модуль пружності матеріалу бурильної колони; ρ – маса одиниці довжини колони; γ – коефіцієнт в'язкого тертя; $u(x,t)$ – пружне переміщення січення труби; x – координата січення.

Для вивчення крутильних коливань бурильної колони, математична модель записувалась наступним чином [20, 111]:

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2}, \quad (63)$$

де $\theta(x,t)$ – значення кутового переміщення перерізу в точці x в час t ; λ – коефіцієнт в'язкого опору бурового розчину; ν – швидкість поширення хвилі скручування вздовж осі x .

Для поперечних коливань:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t), \quad (64)$$

де EI – коефіцієнт жорсткості на згин; $w(x,t)$ – поперечне переміщення перерізу в координаті x в момент часу t ; $T(x)$ – осьове зусилля, що діє в перерізі x ; $f(x,t)$ – сили, що діють в поперечному напрямку на колону.

Враховуюче те, що поперечні коливання відбуваються в двох координатних площинах, деякі автори [85, 113] для вивчення загального поперечного переміщення переходять в комплексну площину, враховуючи наступну умову:

$$r(x,t) = w(x,t) + iv(x,t), \quad (65)$$

де $r(x,t)$ – загальне поперечне переміщення перерізу x в момент часу t ; $w(x,t)$ – поперечне переміщення перерізу x в момент часу t вздовж осі z ; $v(x,t)$ – поперечне переміщення перерізу x в момент часу t вздовж осі y .

В результаті отримувалось комплексне диференціальне рівняння поперечних коливань бурильної колони. Окрім цього, зустрічалися роботи, де проводилося дослідження поздовжньо-осьових і поздовжньо-поперечних коливань бурильної колони.

Виходячи із поставленої задачі досліджень, різними авторами розвивались базові моделі, шляхом уточнення певних параметрів. Так, Мойсишин В.М. [108] при побудові моделі колони, для вивчення поздовжніх коливань враховував ефект гістерезисного демпфування матеріалу бурильних труб в результаті розглядалась наступна модель бурильної колони:

$$AE(1 + i\zeta) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \rho g, \quad (66)$$

де ζ – коефіцієнт внутрішнього гістерезисного демпфування.

В роботі [67] автори приділяли увагу втратам енергії бурильною колоною, в результаті вони отримали і розв'язали наступну модель:

$$EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \left(\left(2\pi(D-d) \left(\frac{\rho_m \gamma \omega}{2} \right) \right) + c_r + c_w \right) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad (67)$$

де D, d – зовнішній і внутрішній діаметр бурильної труби відповідно; ρ_m – вага одиниці довжини промивальної рідини; ω – кутова частота, c_r, c_w – коефіцієнт, який враховує втрати внаслідок випромінювання в навколишню формацію, згасання за рахунок внутрішніх гістерезисних втрат матеріалу труб і тертя об стінки свердловини.

Для замикання існуючих рівнянь на них накладалася низка граничних умов, які є різними в більшості авторів.

В найпростіших варіантах [2, 95, 99, 100, 111] нижня гранична умова мала вигляд відомого переміщення:

$$EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sum_{i=1}^n u_i \sin(\omega_i t + A_i) \quad (68)$$

В роботі [100, 111] $i = 1$, а в роботі [99] $i = 4$.

В роботі [110] для дослідження крутильно-повздожніх коливань бурильної колони при бурінні роторним способом в систему включали математичну модель долота. Враховуючи умову жорсткого закріплення долота до бурильної колони, гранична умова набувала наступного вигляду:

$$m_o \frac{\partial^2 U_o}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial U_o}{\partial t} + m_o g = AE \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + P_1, \quad (69)$$

а для крутильних коливань:

$$a_o \theta_o + \gamma_2 \theta_o + \sum_l I_l \cos\left(\psi_l, \frac{\partial^2 \beta_l}{\partial t^2}\right) = G_l I \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} + M, \quad (70)$$

В роботі [94] наведено посилання на роботи, де нижні граничні умови приймалися у вигляді закріплення колони до нерухомого елемента за допомогою пружного елемента, а також граничні умови, які враховували динаміку руху шарошочного долота, яка визначалась за допомогою набору коефіцієнтів, або визначались як функція від кутового переміщення долота.

Окрім цього в процесі буріння свердловин на морі важливим питанням постає визначення просторової умови рівноваги бурильної колони, яка дає змогу визначати точки її взаємодії із водовіддільною колоною, зусилля, що виникають в точках контакту тощо. Аналогічне питання в простішій викладці розглядається при бурінні похило-скерованих свердловин, однак робіт в цьому напрямку не зустрічалось.

Основною перешкодою в розробці методів визначення рівноваги бурильної колони в свердловині є складний математичний апарат опису просторової рівноваги стрижнів і наявність в системі односторонніх в'язей.

Однак слід зауважити роботи в напрямку вивчення просторової і плоскої рівноваги частини бурильної колони в довільно орієнтованих в просторі свердловинах і питаннях проектування та буріння похило-скерованих свердловин [96, 101, 113, 119].

Глибоко досліджено теорію просторової рівноваги бурильної колони в свердловині у роботі [113], де за допомогою варіаційного методу мінімуму потенціальної енергії чисельними методами було отримано рівняння рівноваги скручених стиснених і розтягнутих ділянок бурильної колони за різних кутів нахилу свердловини. Досліджено точки відриву від стінки свердловини стисненої ділянки бурильної труби в місці її переходу на ділянку просторової рівноваги, вивчено умови взаємодії бурильної колони із стінками похило-скерованої свердловини в місцях зміни діаметру свердловини. Однак в моделі колони, що розглядалася, відкинуто окрім сили ваги всі зовнішні силові фактори що

діють на колону, а уточнення моделі включенням, в неї додаткових членів, призведе до її значного ускладнення.

В роботі [96] автори вивчали рівновагу бурильної колони, шляхом побудови моделі на основі рівнянь Кірхгофа-Клебша. Даний підхід дає змогу прикладати до колони довільні зусилля, відповідно враховувати велику кількість факторів, що діють на колону. Однак, щоб замкнути модель потрібно знати сили взаємодії колони із стінкою свердловини. Дані зусилля легко знаходяться для стисненої ділянки труб, умови рівноваги якої є добре вивченими, проте на проблему визначення взаємодії розтягнутої ділянки колони із просторово-викривленою свердловиною автори вичерпної відповіді не дали.

В інших роботах, де вивчають взаємодію колони із стінками свердловини на ділянках її викривлення, розглядають в основному статичні моделі.

Іншим напрямком, який набув розвитку в останні роки є дослідження динаміки роботи бурильної колони методом кінцевих елементів [44, 57]. Дані підходи дозволяють отримувати як статичні, так і динамічні положення рівноваги бурильної колони в довільних свердловинах, шляхом вирішення моделі бурильної колони чисельними методами. Чисельні методи дають змогу також уникати проблем із односторонніми в'язями, які виникають в даних задачах, проте постановка і вирішення такої задачі потребуватиме значних обчислювальних ресурсів.

Висновки

Математичне моделювання широко використовується в процесі розробки морських родовищ, зокрема в проектуванні бурового обладнання і ПБУ, проектуванні свердловин, вибору оптимальних конструкцій водовіддільних і бурильних колон в залежності від умов буріння і поставлених задач, експрес аналізі процесу буріння. Окрім цього, математичне моделювання використовується при вивченні поведінки бурових систем в умовах суворої погоди, аварійних ситуацій, поломках окремих елементів, а також визначення ресурсу роботи системи.

Враховуючи невисоку вартість досліджень, можливість проводити їх незалежно від розташування досліджуваного об'єкту, а також постійний ріст обчислювальних можливостей комп'ютерної техніки і бурхливий розвиток чисельних методів, дослідження за допомогою побудови математичних моделей мають великий потенціал розвитку.

Точність математичних моделей визначається в основному за рахунок точності математичного опису вхідних параметрів системи, кількості вхідних параметрів, якими нехтують в моделі, а також похибки, яка виникає внаслідок вирішення задачі чисельними методами. Враховуючи велику кількість факторів, що діють на системи, виражену нелінійність більшості із них, наявність в системі недостатньо вивчених

явищ і односторонніх в'язей, розв'язок точних моделей є математично складною задачею і в більшості робіт вони не розглядаються. Отримання комплексної моделі і її дослідження є важливим елементом в розумінні процесів, що відбуваються в системі, тому в напрямку вирішення даної задачі, на думку автора, будуть проводитися дослідження в найближчому часі. На сьогоднішній день отримання нових математичних моделей елементів бурової системи стримує ряд невирішених і недостатньо вивчених задач, зокрема теорія силової взаємодії рідини із тілом, що омивається, теорія моделювання стану моря, задачі рівноваги стержня із накладеними обмеженнями на його рух, методи вирішення систем нелінійних рівнянь в часткових похідних.

Однак потреба в промислових програмних засобах, що дають можливість проведення моделювання роботи елементів системи у процесі виконання різноманітних операцій призвела до появи цілого сімейства вузькоспеціалізованих програмних продуктів для моделювання роботи водовіддільних і бурових колон. Це, зокрема, програмні продукти для дослідження водовіддільних колон – Deelines, Flexcom, Reflex, Riserdyn і OrcaFlex, для бурових колон – комплексні програмні рішення компаній Slumberger, National Oil Varco тощо. Більшість із них для вирішення задач застосовують метод кінцевих елементів або будуються за принципом експертних систем. Виходячи із тенденції збільшення вартості буріння нових свердловин, гостро постає питання попереднього моделювання буріння свердловини для оптимізації використання бурового обладнання.

Література

1. 2008 worldwide survey of deepwater drilling rigs. drilling Rigs Operations for Water Depths >4,000 / Offshore magazine, 2008.
2. Aarrestad T.V. Drillstring Vibrations: Comparison Between Theory and Experiments on a Full-Scale Research Drilling Rig / T.V.Aarrestad, H.A.Tonnesen, A.Kyllingstad // SPE/IADC Drilling Conference. – Dallas, Texas: 1986 Copyright 1986, IADC/SPE 1986 Drilling Conference, 1986.
3. Albers P. Motion Control in Offshore and Dredging / P. Albers. – New York: Springer, 2010. – 319 p.
4. Anundsen T. Operability comparison of three ultra-deepwater and harsh environment drilling vessels; Universitetet i Stavanger, 2008. – 106 p.
5. Arena F. On linearization of Morison force given by high three-dimensional sea wave groups / F.Arena, V.Nava // Probabilistic Engineering Mechanics. – 2008. – Т.23, №2-3. – P. 104-113.
6. Athisakul C. Large strain static analysis of marine risers via a variational approach / C.Athisakul, T.Huang, S.Chucheeepsakul // The Twelfth (2002) International Offshore and Polar Engineering Conference. – Kitakyushu, Japan: The International Society of Offshore and Polar Engineers, 2002. – P. 164-170.

7. Athisakul C. A variational formulation for three-dimensional analysis of extensible marine riser transporting fluid / C.Athisakul, T.Monprapussorn, S.Chucheepsakul // *Ocean Engineering*. – 2011. – Т.38, №4. – P. 609-620.
8. Balandin I. Buoyant Aluminum Drill Pipes for Extended-reach Drilling (Russian) / I.Balandin // *SPE Russian Oil and Gas Conference and Exhibition*. – Moscow, Russia: Society of Petroleum Engineers, 2010.
9. Bennett B. E. Nonlinear dynamic analysis of coupled axial and lateral motions of marine risers / B.E.Bennett, M.F.Metcalf // *Offshore Technology Conference*. – Houston, Texas, 1977.
10. Beutlich T. Multidisciplinary simulation of active heave compensators for offshore module handling systems / T.Beutlich, R.Lien // *Multibody dynamics 2009, ECCOMAS Thematic Conference*. – Warsaw, Poland, 2009. – P. 1-6.
11. Borgman L.E. *Ocean Wave Simulation for Engineering Design* / L.E.Borgman. – Berkeley: University of California, 1967. – 44 p.
12. Brock J. N. 2,500,000-Pound Landing String Challenges: Have We Reached the Limit of Today / J.N.Brock, D.S.Chin, L.W.Sanclemente // *Offshore Technology Conference*. – Houston, Texas, USA, 2010.
13. Brouwers J.J. H. Analytical methods for predicting the response of marine risers / J.J.Brouwers. – 1982.
14. Burke B.G. An Analysis of Marine Risers for Deep Water / B.G.Burke // *Journal of Petroleum Technology*. – 1974. – P. 455-465.
15. Butler B.V. Heave Compensation / B.V.Butler // *Society of petroleum engineers of AIME*. – Dallas, Texas, USA, 1973.
16. Chakrabarti S. *Handbook of Offshore Engineering* / S.Chakrabarti. – London: Elsevier, 2005.
17. Chatjigeorgiou I.K. A finite differences formulation for the linear and nonlinear dynamics of 2D catenary risers / I.K.Chatjigeorgiou // *Ocean Engineering*. – 2008. – Т. 35, № 7. – P. 616-636.
18. Chen Y.-H. General drag-force linearization for nonlinear analysis of marine risers / Y.-H.Chen, F.-M.Lin // *Ocean Engineering*. – 1989. – Т.16, №3. – P. 265-280.
19. Cheng Y. The linear vibration analysis of marine risers using the wkb-based dynamic stiffness method / Y.Cheng, J.K.Vandiver, G.Moe // *Journal of Sound and Vibration*. – 2002. – Т. 251, № 4. – P. 750-760.
20. Chi A. Prediction of Drillstring Fatigue Life Under Axial-Torsional-Combined Vibration / A.Chi, J.Zhang, W.Ge, B.Guo // *SPE Gas Technology Symposium*. – Calgary, Alberta, Canada: Society of Petroleum Engineers, 2006.
21. Chin C. Dynamic positioning simulation, thrust optimization design and control of a drill ship under disturbances and faulty thruster / C.Chin // *SIMULATION*. – 2012. – November 1, 2012. – Т. 88, № 11. – P. 1338-1349.

22. Chucheeepsakul S. A variational approach for three-dimensional model of extensible marine cables with specified top tension / S.Chucheeepsakul, N.Srinil, P.Petchpeart // Applied Mathematical Modelling. – 2003. – Т. 27, № 10. – P. 781-803.
23. Discoverer Enterprise. URL: <http://www.ship-technology.com/projects/discoverer/>.
24. Dareing D.W. Natural Frequencies of Marine Drilling Riser / D.W.Dareing, T.Huang // Journal of Petroleum Technology. – 1976. – July. – P. 813-818.
25. Do K.D. High Performance Control of an Active Heave Compensation System / K.D.Do // Proceedings of the 17th world congress / K.D.Do, J.Pan. – Seoul, Korea: The International Federation of Automatic Control, 2008. – P. 5059-5064.
26. Do K. D. Boundary control of transverse motion of marine risers with actuator dynamics / K.D.Do, J. Pan // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Т. 318, № 4–5. – P. 768-791.
27. Safety Evaluation of Marine Derrick Steel Structures Based on Dynamic Measurement and Updated Finite Element Model / H.Dongying, S.Peiming, Z.Guoqiang, L.Zifeng, L.Xujia, W.Lianjin // Procedia Engineering. – 2011. – Т. 26. – P. 1891-1900.
28. Drilling products & services / GrandPrideco NOV: NOV GrandPrideco, 2013. – 119 p.
29. Dyngvold O. Development of simulation model for virtual testing and design of a riser tensioner system University of Arder / O.Dyngvold. – 2011. – P. 103.
30. Ferrier D. B. d. Simulation Tools in the Calculation of Aircraft-Ship Interface Operational Limits / D.B.d.Ferrier, B.Langlois // RTO AVT Symposium on "Fluid Dynamics Problems of Vehicles Operating near or in the Air-Sea Interface". – Amsterdam, Netherlands: RTO-MP-15, 1998. – P. 11.
31. Motion Compensation Systems / Flow Control. – 116 p.
32. Ghayesh M.H. Coupled longitudinal–transverse dynamics of an axially accelerating beam / M.H.Ghayesh // Journal of Sound and Vibration. – 2012. – Т. 331, № 23. – P. 5107-5124.
33. Gudmestad O.T. Linearization methods and the influence of current on the nonlinear hydrodynamic drag force / O.T.Gudmestad, J.J.Connor // Applied Ocean Research. – 1983. – Т.5, №4. – P. 184-194.
34. The Effect of Friction in Passive and Active Heave Compensation of Crown Block Mounted Compensators / J.Хаao, S.Vangen, I.Tyapin, M.Choux, G.Hovland, M.R.Hansen // 2012 IFAC Workshop on Automatic Control in Offshore Oil and Gas Production. – Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway: International Federation of Automatic Control, 2012. – P. 316-320.

35. Drillstring Torsional Vibrations: Comparison Between Theory and Experiment on a Full-Scale Research Drilling Rig / G.W.Halsey, A.Kyllingstad, T.V.Aarrestad, D.Lysne // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. – New Orleans, Louisiana: 1986, Society of Petroleum Engineers, 1986.
36. Hatleskog J.T. Passive compensator load variation for deep-water drilling / J.T.Hatleskog, M.W.Dunnigan // Oceanic Engineering, IEEE Journal of. – 2007. – Т.32, №3. – P. 593-602.
37. Hatleskog J.T. An impedance approach to reduce the contact-instability whilst drilling with active heave compensation / J.T.Hatleskog, M.W.Dunnigan // Ocean Engineering. – 2012. – Т.49. – P. 25-32.
38. Jang J.-J. Analysis of maximum wind force for offshore structure design / J.-J.Jang, G.Jyh-Shinn // Journal of Marine Science and Technology. – 1999. – Т.7, №1. – P. 43-51.
39. Jansen J.D. Active Damping of Torsional Drillstring Vibrations With a Hydraulic Top Drive / J.D.Jansen, L.V.d.Steen, E.Zachariassen // SPE Drilling & Completion. – 1995. – 12/01/1995. – Т.10, №4. – P. 250-254.
40. Ultradeep Drilling Pushes Drillingstring Technology Innovations / M.J.Jellison, R.B.Chandler, M.Payne, J.S.Shepard // SPE Middle East Oil and Gas Show and Conference. – Kingdom of Bahrain: Society of Petroleum Engineers, 2007.
41. Next Generation Drill Pipe for Extended Reach, Deepwater and Ultradeep Drilling / M.J.Jellison, G.Prideco, M.L.Payne, J.S.Shepard, R.B.Chandler // Offshore Technology Conference. – Houston, Texas, 2003.
42. Kaewunruen S. Nonlinear free vibrations of marine risers/pipes transporting fluid / S.Kaewunruen, J.Chiravatchradej, S.Chucheepsakul // Ocean Engineering. – 2005. – Т.32, № 3-4. – P. 417-440.
43. Keber M. Dynamics of a vertical riser with weak structural nonlinearity excited by wakes / M.Keber, M.Wiercigroch // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Т. 315, № 3. – P. 685-699.
44. Khulief Y.A. Finite element dynamic analysis of drillstrings / Y.A.Khulief, H.Al-Naser // Finite Elements in Analysis and Design. – 2005. – Т. 41, № 13. – P. 1270-1288.
45. Kirk C.L. Dynamic and static analysis of a marine riser / C.L.Kirk // Applied Ocean Research. – 1979. – Т. 1, № 3.
46. Korde U.A. Active heave compensation on drill-ships in irregular waves / U.A.Korde // Ocean Engineering. – 1998. – Т. 25, № 7. – P. 21.
47. Krolikowski L.P. An improved linearization technique for frequency domain riser analysis / L.P.Krolikowski, T.A.Gay // Offshore technology conference. – Houston: Offshore technology conference, 1980. – P. 341-353.
48. Kuiper G.L. Dynamic stability of a submerged, free-hanging riser conveying fluid / G.L.Kuiper, A.V.Metrikine // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Т. 280, № 3-5. – P. 1051-1065.

49. Langley R.S. The linearisation of three dimensional drag force in random seas with current / R.S.Langley // *Applied Ocean Research*. – 1984. – Т. 6, № 3. – P. 126-131.
50. Lee R. Bully Rig Overview / R.Lee // Noble Corporation, 2011. – 27 p.
51. Li L. Modeling and Simulation of Active Controlled Heave Compensation System based on Dynamic Vibration Absorber for Deep-sea Mining System / L.Li // (назва китайською мовою). – 2007. – P. 5.
52. Li L. Study On Active Heave Compensation System of Deep-sea Mining Based On Dynamic Vibration Absorber And Its Feedback Control The International Society of Offshore and Polar Engineers / L.Li, S.Liu. – 2011.
53. Li Z. Analysis of Longitudinal Vibration of Drillstring in Air and Gas Drilling / Z.Li, B.Guo // *Rocky Mountain Oil & Gas Technology Symposium*. – Denver, Colorado, U.S.A.: Society of Petroleum Engineers, 2007.
54. The research of structural modal parameter identification for oil derrick / Z.Lina, L.Fengchen, Y.Zepin, H.Minghua // *Electrical and Control Engineering (ICECE), 2010 International Conference on – IEEE, 2010*. – P. 4443-4445.
55. Static and dynamic analysis of marine riser // XVI Symposium SORTA 2004 / A.M.Ljustina i інші. – Zagreb: FSB Zagreb, 2004.
56. Melchers R.E. Equivalent linearization and fatigue reliability estimation for offshore structures / R.E.Melchers, M.Ahammed // *Second international offshore and polar engineering conference*. – San Francisco, USA: The international society offshore and polar engineering conference, 1992. – P. 531-536.
57. Advancements in 3D Drillstring mechanics: From the Bit to the Topdrive / S.Menand, H.Sellami, M.Tijani, O.Stab, D.C.Dupuis, C.Simon // *IADC/SPE Drilling Conference*. – Miami, Florida, USA: Society of Petroleum Engineers, 2006.
58. Modeling of Hydraulic Systems. Tutorial for HyLib(r). Library of Hydraulic Components. – Modelon AB, 2008.
59. Navarro-López E.M. Avoiding harmful oscillations in a drillstring through dynamical analysis / E.M.Navarro-López, D.Cortés // *Journal of Sound and Vibration*. – 2007. – Т. 307, № 1-2. – P. 152-171.
60. Niedzwecki J.M., Liagre P.Y.F. System identification of distributed-parameter marine riser models / J.M.Niedzwecki, P.Y.F.Liagre // *Ocean Engineering*. – 2003. – Т. 30, № 11. – P. 1387-1415.
61. UltraDeep(TM) UD-165(TM) / GrantPrideco NOV: National Oilwell Varco, 2010.
62. Orcaflex manual. version 9.5a / Orcina – Cumbria: Orcina Ltd., 2012. – 445 p.
63. Païdoussis M.P. Slender Structures and Axial Flow. Fluid-Structure Interactions / M.P.Païdoussis: Academic Press, 1998. Fluid-Structure Interactions.

64. Simulation of ship motion in seaway / Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Newcastle. – Newcastle, Australia, 2002. – 13 p.
65. Qu W.L. Dynamic analysis of wind-excited truss tower with friction dampers / W.L.Qu, Z.H.Chen, Y.L.Xu // *Computers & Structures*. – 2001. – T. 79, № 32. – P. 2817-2831.
66. Real Gas. – 2012. – URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Real_gas.
67. Rashed G. An analytical model for drillstring axial vibration / G.Rashed, R.Ghajar, S.J.Hashemi // 14 international congress of sound & vibration. – Cairns, Australia, 2007.
68. Riserdyn 4.0.2 GM-33054-0800-37063 / Riserdyn: Global Maritime Technical Services, 2000.
69. Nonlinear Dynamics Analysis of Marine Risers under Random Loads for Deepwater Fields in Indian Offshore / K.A.Rizwan, Kaur, S.P.Singh, A.Suhail // The Twelfth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction *Procedia Engineering*. Elsevier, 2011. – P. 1334-1342.
70. Rustad A.M. Modeling and control of top tensioned risers. Thesis for the degree of doctor philosophiae / A.M.Rustad: Norwegian University of Science and Technology, 2007. Thesis for the degree of doctor philosophiae.
71. Safai V.H. Nonlinear dynamic analysis of deep water risers / V.H.Safai // *Applied Ocean Research*. – 1983. – T. 5, № 4. – P. 215-225.
72. Torsional strength comparison between two assembling techniques for aluminium drill pipe to steel tool joint connection / C.Santus, L.Bertini, M.Beghini, A.Merlo, A.Baryshnikov // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. – 2009. – T. 86, № 2-3. – P. 177-186.
73. Sarpkaya T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers / T.Sarpkaya // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1986. – T. 165. – P. 61-71.
74. Sarpkaya T. Hydrodynamic damping and quasi-coherent structures at large stokes numbers / T.Sarpkaya // *Journal of Fluids and Structures*. – 2001. – T. 15, № 7. – P. 909-928.
75. Sarpkaya T. A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations / T.Sarpkaya // *Journal of Fluids and Structures*. – 2004. – T. 19, № 4. – P. 389-447.
76. Drilling Dynamics in the Presence of Mud Flow / B.Schmalhorst, E.Brommundt, A.Baumgart, U.Richter // IADC/SPE Drilling Conference. – New Orleans, Louisiana: IADC/SPE Drilling Conference, 2000.
77. A new generation DP Drillships, the Gusto 10000 and Gusto P-10000 / W.Schoonmade, W.Janse, J.Lusthof, B.Rietveldt // Offshore Technology Conference. – Houston, Texas, 1998.
78. Ship. Shipbuilding History. – 2012. – URL: shipbuildinhistory.com.
79. Smith J.E. Titanium Drill Pipe for Ultra-Deep and Deep Directional Drilling / J.E.Smith, R.B.Chandler, P.L.Boster // SPE/IADC Drilling Confer-

- ence. – Amsterdam, Netherlands: 2001,. SPE/IADC Drilling Conference, 2001.
80. Smith J.E. Development of Titanium Drill Pipe for Short Radius Drilling / J.E.Smith, R.W.Schutz, E.I.Bailey // IADC/SPE Drilling Conference. – New Orleans, Louisiana: IADC/SPE Drilling Conference, 2000.
81. Deep water CLIP riser(TM) for marine drilling operations / Aker Solutions, 2012. – 12 p.
82. Song J.-B. A new linearized equation of random wave force / J.-B.Song, Y.-H.Wu, R.Collinson // MODSIM97. – University of Tasmania, Hobart, Australia, 1997. – P. 111-114.
83. A Reference Equation of State for the Thermodynamic Properties of Nitrogen for Temperatures from 63.151 to 1000 K and Pressures to 2200 MPa / R.Span, E.W.Lemmon, R.T.Jacobsen, W.Wagner, A.Yokozeki // Journal of Physical and Chemical Reference Data. – 2000. – T. 29, № 6. – P. 1361-1433.
84. Estimating directional wave spectrum based on stationary ship motion measurements / E.A.Tannuri, J.V.Sparano, A.N.Simos, J.J. Da Cruz // Applied Ocean Research. – 2003. – T. 25, № 5. – P. 243-261.
85. Tikhonov V.S. Investigation of Drillstring Transverse Vibrations at Rotary Drilling of Inclined Wells / V.S.Tikhonov, A.I.Safronov, M.Y.Gelfgat // ASME Conference Proceedings. – 2002. – T. 2002, № 3591X. – P. 305-315.
86. Selection of parametrs and bending vibrations of deepwater drilling aluminium riser in random waves / V.S.Tikhonov, A.I.Safronov, M.Y.Gelfgat, N.N.Grebtsov, A.M.Podrazhansky. – 1998.– P. 8.
87. Vatne p. N.-K. N. Stretch compensation in a hoisting system for a derrick / Office E. P. – Norway, 2003. – P. 10.
88. Modeling and Simulation of an Active Heave Compensated Draw-works / A.A.Walid, P.Gu, I Y.skandarani, H.R.Karimi // Recent Advances in Manufacturing Engineering. – 2005.
89. Wolfram J. On alternative approaches to linearization and Morison's equation for wave forces / J.Wolfram // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1999. – August 8, 1999. – T. 455, № 1988. – P. 2957-2974.
90. Woodall-Mason N. Value of Heave Compensators to Floating Drilling / N.Woodall-Mason, J.R.Tilbe // Journal of Petroleum Technology. – 1976. – august 1976. – P. 9.
91. Wu M.C. Effects of rigidity and internal flow on marine riser dynamics / M.C.Wu, J.Y.K.Lou // Applied Ocean Research. – 1991. – T. 13, № 5. – P. 235-244.
92. New Generation of Aluminum Drill Pipes Enhanced the ERD Performances in to the Huizhou Field □ South China Sea / S.Yu, A.Trocchia, W.Scaruffi, E.Cristofanelli, A.Merlo, C.Molaschi // 6th International Petro-

- leum Technology Conference. – Beijing, China: 2013, International Petroleum Technology Conference, 2013.
93. Бажин И.И. Автоматизированное пректирование машиностроительного гидропривода / И.И.Бажин; Под ред. И.И.Бажин, М.М.Гайцгори и др. – Москва: Машиностроение, 1988. – 312 с.
94. Векерик В.И. Совершенствование технологии углубления скважин изменением динамики работы бурильного инструмента / В.И.Векерик. – Ивано-Франковск: ИФИНГ, 1991. – С. 749.
95. Векерик В.И. Определение динамической составляющей осевой нагрузки на долото по данным колебаний верхней части бурильной колонны / В.И.Векерик // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 1986. № 4. – С. 22-26.
96. Векерик В.И. Уравнения равновесия участков бурильной колонны в скважине произвольно ориентированной в пространстве / В.И.Векерик, В.М.Мойсишин. – Ивано-Франк.: Факел, 2007. – 136 с.
97. Векерик В.І. Вплив параметрів бурової установки на динаміку роботи бурильного інструменту / В.І.Векерик // Нафтова і газова промисловість. – 1992–. № 2. – С. 31-35.
98. Григулецкий В.Г. Проектирование компоновок нижней части бурильной колонны / В.Г.Григулецкий, В.Т.Лукиянов. – Москва: Недра, 1990. – 302 с.
99. Гридчук Я.С. Моделювання повздовжніх коливань бурильної колони в середовищі Marlesim / Я.С.Гридчук // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: Х Міжнародна науково-технічна конференція "Вібрації в техніці та технологіях". – Львів: Український міжвідомчий науково-технічний збірник, 2011. – С. 31-37.
100. Дэринг. Продольные и угловые колебания колонны бурильных труб при наличии демпфирования / Дэринг, Ливсэй// Конструирование и технология машиностроения. Труды американского общества инженеров механиков. – 1968. – Т. 90, № 4. – С. 163-173.
101. Калинин А.Г. Искривление скважин / А.Г.Калинин. – Москва: Недра, 1974. – 304 с.
102. Калинин С.Г. Динамика несущих конструкций буровых установок / С.Г.Калинин, Е.В.Харченко – Львов: Вища школа, 1988. – 144 с.
103. Капустин К.Я. Плавающие буровые установки и буровые суда / К.Я.Капустин. – Москва: Недра, 1974. – 240 с.
104. Керимов З.Г. Динамика водоотделяющей колонны полногрузной буровой установки / З.Г.Керимов // Труды ИММ АН Азербайджана. – 1998. – Т. IX (XVII).
105. Кучер Т.В. Моделирование динамических процессов в бурильной колонне / Т.В.Кучер // Технологии информатизации профессиональной деятельности. – Ижевск, 2011. – С. 192-197.

106. Марутов В.А., Гидроцилиндри / В.А.Марутов, С.А.Павловський. – Москва: Машиностроение, 1966.
107. Мирзаджанзаде А.Х. Теория колебаний в нефтепромышленном деле / А.Х.Мирзаджанзаде; Под ред. А.Х. М. и інші. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 364 с.
108. Мойсишин В.М. Основы механики бурильной колонии при поглублені свердловин роторним способом / В.М.Мойсишин. – Івано-Франківськ, 1996. – С. 498.
109. Мойсишин В.М. Про натуральні граничні умови на долоті при при розв'язку загальної задачі стійкості бурильної колонії / В.М.Мойсишин, Є.І.Крижанівський, І.В.Восводко // Нафтогазова енергетика. – 2007. № 1. – С. 44-49.
110. Молдавцев С.А. Динаміка шарошкового долота і бурильного інструменту в процесі буріння: Монографія. / С.А.Молдавцев, В.І.Векерик. – Івано-Франківськ: Факел, 2006. – 182 с.
111. Сароян А.Е. Теория и практика работы бурильной колонии / А.Е.Сароян. – Москва: Недра, 1990. – 263 с.
112. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов / В.А.Светлицкий. – Москва: Машиностроение, 1982.
113. Сесюнин Н.А. Некоторые задачи стесненного пространственного изгиба упругих стержней / Н.А.Сесюнин. – Московский государственный открытый университет. Москва, 1997. – С. 216
114. Справочник по теории корабля. / Справочник – Ленинград: Судостроение, 1985. – 440 с.
115. Тихонов В.С. Прикладная механика глубоководных колон труб: опыт моделирования / В.С.Тихонов. – Москва: ВНИИЭгазпром – Обзорная информация серии бурения скважин на континентальном шельфе, 1988. – 31 с.
116. Халфин И.Ш. Воздействие волн на морские нефтегазопромышленные сооружения / И. Ш.Халфин. – Москва: Недра, 1990. – 310 с.
117. Харченко С. Розрахунок поперечних коливань довгомірних несівних конструкцій зі змінними параметрами / С.Харченко, І.Гілета, О.Квашенко // . – 2009? – URL: http://www.nbu.gov.ua/portal/natural/Tv/2009_1-2/35_harchenko.pdf.
118. Хуань. Продольный изгиб и поперечные колебания бурильных труб / Хаунь, Дэринг // ASME по нефтяному машиностроению, сосудам давления и трубопроводам. – Далас, Техас: Мир, 1968. – С. 99-106.
119. Расчет бурильных труб в геологоразведочном бурении / Е.Ф.Эпштейн, В.И.Маццейчик, И.И.Ивахин, А.Ш.Асатурян. – Москва: Недра, 1979. – 160 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 22.10.2013 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Векериком В.І.,
д.т.н. Кунцяком Я.В. (м. Київ)*

**THE DYNAMICS STUDY OF OFFSHORE DRILL SYSTEM
(OVERVIEW)****O. O. Slabyj**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka st., 15;
e-mail: burewisnyk@gmail.com*

The review of existing designs drilling systems used in the drilling of a deep sea. We consider the physical and mathematical models used in the study of the dynamics of the elements of offshore drilling. The analysis of existing methods for studying the dynamics of drilling riser, riser tensioner and drill string heave compensator.

Keywords: offshore drilling, drilling riser, drill string heave compensator, drill string, derrick.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Бандура Андрій Іванович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Борисевич Богдан Дмитрович – доцент кафедри механіки машин Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Витвицький Василь Степанович – студент Інституту інженерної механіки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Возняк Лідія Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри нафтогазової гідромеханіки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Возняк Мирослав Петрович – кандидат технічних наук, доцент кафедри транспортування та зберігання нафти і газу Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Гаврилів Юрій Львович – кандидат технічних наук, доцент кафедри технології нафтогазового машинобудування Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Гой Тарас Петрович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Грудз Володимир Ярославович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри спорудження та ремонту газонафтопроводів і газонафтосховищ Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Грудз Ярослав Володимирович – доктор технічних наук, доцент, професор кафедри спорудження та ремонту газонафтопроводів і газонафтосховищ Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Гургула Степан Іванович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Дем'янчук Ярослав Михайлович – кандидат технічних наук, доцент кафедри нафтогазового технологічного транспорту і теплотехніки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Долішній Богдан Семенович – кандидат технічних наук, доцент кафедри будівництва Івано-Франківського університету права імені Короля Данила Галицького.

Дорошенко Юлія Іванівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри транспорту і зберігання нафти і газу Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Заторський Роман Андрійович – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри диференціальних рівнянь Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Іващенко Василь Трифонович – кандидат технічних наук, доцент кафедри механіки машин Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Карнаухов Василь Гаврилович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу термопружності Інституту механіки імені Степана Тимошенка НАН України.

Коцкулич Ярослав Степанович – доктор технічних наук, професор кафедри буріння нафтових і газових свердловин Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Коцкулич Євген Ярославович – інженер відділу бурових розчинів і технологічних рідин НДІІ ПАТ “Укрнафта”.

Краснодембський Адам Михайлович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Кривенко Галина Мирославівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри безпеки життєдіяльності Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Кривенко Сергій Олександрович – студент газонафтопромислового факультету Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Кулініч Галина Михайлівна – асистент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Лушиков Олександр Володимирович – старший викладач кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Михайленко Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Мойсіншин Василь Михайлович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Негрнч Василь Васильович – кандидат хімічних наук, доцент кафедри нафтогазового технологічного транспорту і теплотехніки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Пономаренко Олександр Миколайович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та інженерної механіки Львівського національного аграрного університету.

Процюк Галина Ярославівна – асистент кафедри інформатики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

П'ятківський Станіслав Анатолійович – керівник групи відділу техніки і технології кріплення буріння свердловин НДІІ ПАТ “Укрнафта”.

Ріпецький Володимир Романович – студент Інституту прикладної математики Національного університету “Львівська політехніка”.

Ріпецький Євген Йосипович – доктор технічних наук, доцент, професор кафедри інженерної геодезії Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Ріпецький Роман Йосипович – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Савчук Ярослав Іванович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Сеничак Владислав Васильович – студент економічного факультету Прикарпатського національного університету ім. Василя Стефаника.

Сеничак Василь Михайлович – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Слабий Орест Олегович – аспірант кафедри буріння нафтових і газових свердловин Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Смага Богдан Ігорович – асистент кафедри механіки машин Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Ставничий Євген Михайлович – начальник відділу техніки і технології кріплення буріння свердловин НДПІ ПАТ “Укрнафта”.

Тимків Дмитро Федорович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Федак Іван Васильович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Федоришин Дмитро Дмитрович – доктор геологічних наук, професор, завідувач кафедри геофізичних досліджень свердловин Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Федоришин Сергій Дмитрович – кандидат геологічних наук, доцент кафедри геофізичних досліджень свердловин Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Цідило Іван Васильович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної механіки Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Чумаченко Ярослав Віталійович – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Шегда Любов Михайлівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Якимів Йосип Васильович – кандидат технічних наук, доцент кафедри транспорту і зберігання нафти і газу Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

При підготовці рукописів статей, які подаються в редакцію “Прикарпатського вісника НТШ” слід дотримуватись таких правил:

1. Стаття повинна містити короткий вступ, формулювання завдань (проблем) та виклад отриманих автором (співавторами) нових результатів. Не допускається переказ відомих фактів, наведення посилань на неопубліковані роботи.

2. В редакцію подаються:

- два примірники рукопису статті (включаючи ілюстрації і таблиці), надруковані на білому папері формату А4;
- рецензію на статтю;
- електронний варіант статті, підготовлений на комп'ютері, у вигляді не архівованого або не архівованого (ZIP, RAR) файлу – CDR/RW.

3. Мова статті повинна бути українською або англійською. Обсяг не повинен перевищувати 20 сторінок.

4. Статтю слід оформити так: УДК, назва роботи; прізвище та ініціали автора (співавторів), місце праці (назва організації, повна поштова адреса, контактний телефон, електронна пошта), текст анотації, ключові слова, текст статті, список літератури.

Якщо мова статті українська (англійська), то після статті усі перераховані елементи від назви роботи до ключових слів включно подаються англійською (українською) мовою.

5. Формули, які нумеруються, обов'язково слід подавати окремим рядком. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.

6. Використана література подається загальним списком (за алфавітом або у порядку посилань на джерела в тексті статті) та оформляється згідно з вимогами ВАК України (бюлетень №3, 2008 р.). Іноземна література пишеться мовою оригіналу. Посилання на відповідні джерела подаються в тексті у квадратних дужках, наприклад [4]. Зразки бібліографічного опису книги, статті, тез доповідей конференцій:

1. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. Кондрат Р.М. Підвищення газонафтоконденсатовіддачі родовищ / Р.М.Кондрат // Нафтова і газова промисловість. – 1992. – №2. – С. 35-38.
3. Бойко В.С. Проводка горизонтальних і похилих свердловин як метод ефективного освоєння і розробки покладу / В.С.Бойко, Р.В.Бойко // Стан, проблеми і перспективи розвитку нафтогазового комплексу Західного регіону України: Тези доповідей і повідомлень наук.-практ. конф. (Львів, 28-30 березня 1995 р.). – Львів, 1995. – С. 150.

7. Рукопис підписується автором (співавторами).

8. На окремому аркуші слід вказати прізвище, ім'я та по-батькові автора (співавторів), науковий ступінь, вчене звання, займану посаду (у кінці кожного випуску журналу формуємо відомості про авторів).

**Електронний варіант статті
повинен задовольняти таким вимогам:**

1. Стаття набирається у редакторі Microsoft WORD 95/7.0-97 на аркуші формату B5 182x257 мм, поля (мм): верхнє – 20, нижнє – 10, внутрішнє – 30, зовнішнє – 20.
2. **Основний текст** набирається таким чином:
 - 2.1. Стиль "обычный", гарнітура Times New Roman (Cyr), кегль 12, абзацний відступ – 0.75 мм, міжстроковий інтервал – "одинарний".
 - 2.2. Порядок набору:

УДК (Times New Roman (Cyr), кегль 12, без абзацного відступу, вирівнювання – зліва).

Назва **статті** (Times New Roman (Cyr), кегль 12, bold, прописом, без абзацного відступу, вирівнювання – по центру, відбивки зверху і знизу – 9 пт).

Ініціали, прізвище автора (співавторів) (Arial (Cyr), кегль 12, bold, без абзацного відступу, вирівнювання – по центру).

Назва організації, її повна поштова адреса, адреса електронної пошти (Times New Roman (Cyr), кегль 12, italic, без абзацного відступу, вирівнювання – по центру, відбивка знизу – 9 пт).
 - 2.3. Відбивки по тексту не використовуються за винятком підрозділів статті (підрозділи, підпункти і т. п. відділяються відбивками "перед" – 9, "після" – 6).
3. Для набирання **формул** використовується вбудований у Microsoft Office редактор формул Equation v. 3.0. **Стили:** **Text** - Times New Roman (Cyr), **Function** – Times New Roman (Cyr), italic, **Variable** – Times New Roman (Cyr), italic, **L.C.Greek** – Symbol, italic, **Symbol** – Symbol, italic, **Matrix/Vector** – Times New Roman (Cyr), **Number** – Times New Roman (Cyr). **Розміри:** **Full** – 12, **Subscript/Superscript** – 9, **Sub-Subscript/Superscript** – 5, **Symbol** – 14, **Sub-Symbol** – 9.

Для наочності рекомендується формули відділяти відбивками зверху і знизу – 6 пт.
4. **Таблиці** повинні бути складені лаконічно, зрозуміло і містити мінімальні відомості, необхідні для ілюстрування тексту статті
Назва таблиці: Times New Roman (Cyr), кегль 12, bold, без абзацного відступу, вирівнювання – по центру, відбивка зверху – 6 пт.
5. **Ілюстрації** до статей (схеми, графіки, діаграми) повинні бути виконані у растровому (векторному) форматах (BMP, TIF, PCX, JPG, GIF; CDR) і додаватися окремим файлом. Забороняється використовувати **графічний редактор MS WORD!!!** Ілюстрації типу фотографій повинні бути відскановані з роздільною здатністю не менше 400 dpi і/або додаватися в оригіналі.
Ілюстрації, перескановані з періодики, не приймаються!
Підписи до ілюстрацій: Times New Roman (Cyr), кегль 11-12, bold, без абзацного відступу, вирівнювання – по центру.
Написи на ілюстраціях виконуються гарнітурою Arial.

**Прикарпатський вісник
Наукового товариства ім. Шевченка**

**Число
2013. – № 1(21)
328 с.**

НБ ПНУС



794503

Відповідальний за випуск *Василь МОЙСИШИН*
Літературна редакція *Василя МОЙСИШИНА*
Набір та макетування *Любомири ДЯКІВ*
Комп'ютерна правка *Любомири ДЯКІВ*
Коректура *Наталії СТЕЦЮК*

Підп. до друку 1.07.2014 р.
Формат 60x84/8. Папір офсет. Гарнітура "Times New Roman".
Друк на різнографі. Ум.-друк. арк. 19,1.
Наклад 300 пр. Зам. №37

Видавець
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
76025, м. Івано-Франківськ,
вул. С. Бандери, 1; тел. 71-56-22
E-mail: vdvcit@pu.if.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2718 від 12.12.2006