Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЛАБОРАТОРИЯ СОЦИОКИБЕРНЕТИКИ

А. К. Гуц
Ю. В. Фролова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СОЦИОЛОГИИ

Предисловие
доктора физико-математических наук,
профессора *Г. Г. Малинецкого*

МОСКВА
URSS

ББК 22.18 60.5

Гуц Александр Константинович, Фролова Юлия Владимировна

Математические методы в социологии / Предисл. Г. Г. Малинецкого. М.: Издательство ЛКИ, 2007. — 216 с. (Синергетика: от прошлого к будущему.)

Настоящая книга посвящена изложению элементов математической социологии. Она представляет собой попытку познакомить социологов с современным математическим аппаратом, в том числе с тем, что составляет основу синергетических идей в социологии. В книге рассмотрены основные идеи и типичные примеры математического моделирования в социологии вместе с основными математическими понятиями синергетики и нелинейной науки в целом — такими как бифуркации, катастрофы, странные аттракторы, устойчивость. Наряду с изложением множества современных методов обработки социологических данных и описанием моделей (в числе которых отношения колонии и метрополии, тюремные бунты, гендерные отношения, деятельность малой фирмы и многие другие) проводится обсуждение принципов синергетики и ее концепций.

Издание предназначено для студентов, обучающихся по социологическим специальностям, и для математиков, интересующихся социологией. Может быть использовано в качестве учебного пособия.

Издательство ЛКИ. 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 13,5. Зак. № 902.
Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-382-00094-7

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (495) 135-42-16
URSS Тел./факс: 7 (495) 135-42-46

4647 ID 48233

От редакции

Издательство URSS продолжает новую серию книг «Синергетика: от прошлого к будущему».

Синергетика, или теория самоорганизации, сегодня представляется одним из наиболее популярных и перспективных междисциплинарных подходов. Термин синергетика в переводе с греческого означает «совместное действие». Введя его, Герман Хакен вкладывал в него два смысла. Первый — теория возникновения новых свойств у целого, состоящего из взаимодействующих объектов. Второй — подход, требующий для своей разработки сотрудничества специалистов из разных областей.

Но это привело и к замечательному обратному эффекту — синергетика начала оказывать все большее влияние на разные сферы деятельности и вызывать все больший интерес. Сейчас этим подходом интересуются очень многие — от студентов до политиков, от менеджеров до активно работающих исследователей.

Синергетика прошла большой путь. Тридцать лет назад на нее смотрели как на забаву физиков-теоретиков, увидевших сходство в описании многих нелинейных явлений. Двадцать лет назад, благодаря ее концепциям, методам, представлениям, были экспериментально обнаружены многие замечательные явления в физике, химии, биологии, гидродинамике. Сейчас этот междисциплинарный подход все шире используется в стратегическом планировании, при анализе исторических альтернатив, в поиске путей решения глобальных проблем, вставших перед человечеством.

Название серии «Синергетика: от прошлого к будущему» тоже содержательно. Как говорил один из создателей квантовой механики, при рождении каждая область обычно богаче идеями, чем в период зрелости. Видимо, не является исключением и синергетика. Поэтому мы предполагаем переиздать часть «синергетической классики», сделав акцент на тех возможностях и подходах, которые пока используются не в полной мере. При этом мы надеемся познакомить читателя и с рядом интересных работ, ранее не издававшихся на русском языке.

«Настоящее» — как важнейший элемент серии — тоже понятно. В эпоху информационного шума и перманентного написания то заявок на гранты, то отчетов по ним, даже классики синергетики очень немного знают о последних работах коллег и новых приложениях. Мы постараемся восполнить этот пробел, представив в серии исследования, которые проводятся в ведущих научных центрах страны.

«Будущее...» — это самое важное. От того, насколько ясно мы его представляем, зависят наши сегодняшние усилия и научная стратегия. Прогнозы — дело неблагодарное, — хотя и совершенно необходимое. Поэтому ряд книг серии мы надеемся посвятить и им.

В редакционную коллегию нашей серии любезно согласились войти многие ведущие специалисты в области синергетики и нелинейной динамики. В них не следует видеть «свадебных генералов». В их задачу входит анализ развития нелинейной динамики в целом и ее отдельных областей, определение приоритетов нашей серии и подготовка предложений по изданию конкретных работ. Поэтому мы указываем в книгах серии не только организации, в которых работают эти исследователи, но и важнейшие области их научных интересов.

И, конечно, мы надеемся на диалог с читателями. При создании междисциплинарных подходов он особенно важен. Итак, вперед — в будущее.

В нашей серии уже вышло более тридцати книг общим тиражом свыше шестидесяти тысяч экземпляров. Серия начала издаваться на испанском языке. Однако мы уверены, что и самые глубокие проблемы синергетики, и самые интересные книги серии впереди.

Редакционная коллегия серии
«Синергетика: от прошлого к будущему»

Наш электронный адрес — synergy@keldysh.ru

Синергетика и социология

> Эта книга была написана с верой в то, что социология призвана сыграть ключевую роль в современной интеллектуальной культуре и занять центральное место среди социальных наук.
>
> *Э. Гидденс*

Книга, которую вы держите в руках, дорогой читатель, является яркой, талантливой и долгожданной. Вполне возможно, что ей предстоит сыграть важную и необычную роль. Именно об этом, наверно, и стоит сказать в предисловии.

Английский писатель и физик Чарльз Сноу сетовал в 1960-х годах на возникшую в XIX веке и быстро растущую пропасть между двумя культурами — естественнонаучной и гуманитарной. Естественнонаучная культура устремлена в будущее, к новым возможностям и горизонтам. Гуманитарная — в прошлое, к традиции, к осмыслению нынешней и прошлых культур. Естественники отвечают на вопросы «как?» и «почему?», а гуманитарии должны были бы знать ответы на вопросы «что?» и «к чему стремиться?». Растущая пропасть между культурами, по мысли Сноу, представляет опасность для развития цивилизации. Прошедшие полвека подтвердили правоту этого мыслителя. Как недавно заметил на конференции один известный эксперт по стратегической стабильности: «У нас в России есть специалисты, которые дают анализ и прогноз, которые принимают решения, которые ведут переговоры. Беда только в том, что эти группы никак не взаимодействуют между собой и работают в приближении отсутствия коллег».

Поэтому построение моста между двумя культурами, организация диалога между представителями различных научных дисциплин, между учеными и властью стало важнейшей научной задачей. От ее успешного решения зависит и эффективность науки, и роль ее в обществе, и само ее существование как социального института.

Большие надежды, с этой точки зрения, возлагаются на теорию самоорганизации, или синергетику. Слово «синергетика» (в переводе с греческого — «теория совместного действия») было введено в научный оборот в 1970 году немецким физиком-теоретиком Германом Хакеном. В слово синергетика Г. Хакен изначально вкладывал два смысла.

С одной стороны, это подход, рассматривающий возникновение новых качеств у сложных систем различной природы, которыми составляющие их подсистемы не обладают. Иными словами, это попытка разобраться, опираясь на методы математического моделирования и на подходы естественных и гуманитарных наук, откуда у целого появляются свойства и черты, которыми не обладают части.

С другой стороны, это подход, развитие которого требует совместной творческой деятельности представителей различных научных дисциплин. Методология такого взаимодействия сама представляет собой непростой и интересный вопрос. Поэтому сейчас все чаще синергетику рассматривают как область, лежащую в пересечении сферы предметного знания, математического моделирования и философской рефлексии.

Казалось бы строить мост между естественнонаучной и гуманитарной культурами естественно, начав именно с социологии. В самом деле, еще Галилей писал, что книга природы написана языком математики. Но сейчас у нас есть веские основания думать, что многие ключевые главы книг о человеке и обществе написаны тем же языком. И здесь в применении математических инструментов социология, по сравнению с другими гуманитарными науками, продвинулась очень далеко.

Ее основными инструментами являются проведение и анализ социологических опросов. И здесь мы, естественно, оказываемся в царстве статистики. «Опрашивая немногих (выборную совокупность), социолог выводит знание обо всех (генеральная совокупность), поскольку индивидуальные мнения он обязательно обобщает, группирует, строит типологии и классификации, применяя для усреднения данных методы математической статистики», — справедливо утверждает один из наиболее популярных вузовских учебников[1].

Социологию и синергетику сближает и многое другое. Начинающих социологов обычно поражает, насколько обширен и многогранен их предмет и насколько велико «пограничье», где он соприкасается с другими

[1] *Кравченко А. И.* Социология. Екатеринбург: Деловая книга; М.: Логос, 1999. 368 с.

дисциплинами — демографией, экономикой, историей, медициной, религиоведением, этнографией, другими сферами научного знания. И здесь продвижение вперед зависит от сотрудничества и совместных усилий представителей многих научных дисциплин.

Наконец, в центре внимания обоих подходов — феномен *самоорганизации*. Статусы, роли, социальные функции, социальный контроль и социальная стратификация — основные понятия социологии неразрывно связаны со спонтанным, сплошь и рядом не зависящим от характеристик и желаний отдельного элемента возникновением упорядоченности. То есть с самоорганизацией.

И несмотря на все это социология и синергетика пока очень и очень далеки друг от друга. И книга, подобная этой, в которой предлагается взглянуть на социологию глазами синергетики и на синергетику глазами социологии, — одна из первых и в отечественной, и в мировой литературе. В чем же дело? Почему только сейчас начинается строительство моста между культурами в том месте, где берега особенно близки?

Наверно, для этого есть несколько причин.

Кто-то из великих говорил, что в каждой науке столько истины, сколько в ней математики. Наверно, на рубеже XXI века можно сказать более определенно — каждая наука является настолько зрелой и успешной, насколько она способна давать *прогноз*. В этом сильная сторона естественных наук. Они позволяют очень многое предсказывать. И в этом же слабость социологии, психологии. Отчасти экономики. Они имеют дело со сверхсложными объектами и по-прежнему остаются в основном науками «объясняющими», а не «предсказывающими». Поэтому и модели в этих науках сплошь и рядом являются вербальными или концептуальными, а не математическими. Идеи синергетики особенно успешны, когда речь идет о прогнозе, моделировании, динамике исследуемых процессов.

Другая причина состоит в методологии социологических исследований. В их основе лежат социологические опросы, другими словами, мнение объекта о нем самом. Или отражение социологической реальности в кривом зеркале. Вспомним историю развития психологии. Она начинала с того же — расспросов, толкований сновидений, сравнительного анализа. Но прорыв к объективным законам субъективной реальности оказался связан с фактическим отказом от таких подходов. Опыты Г. Эббингауза в конце XIX века позволили выявить законы запоминания информации и обучения, закон Вебера—Фехнера позволил по-новому взглянуть на психологию восприятия. Существенна реальность, действия, конкретные тесты, а не мнения объекта исследования обо всем этом. В социологии, на мой взгляд, такого прорыва пока не произошло.

Кроме того, социологи в своей деятельности сталкиваются с «эффектом Эдипа». Результаты опросов (или даже сам факт проведения таких опросов), став известными обществу, меняют общественное сознание. Огромно влияние прогнозов и ожиданий. Мир становится все более *рефлексивным* — мы все более зависим не только от того, что делаем, но и от того, что мы думаем о своих действиях. Мы приходим туда, куда предполагали, сталкиваемся с бедами, которые предвидели и боялись. Материальной силой становится совесть или ее отсутствие.

В традиционной социологии в применяемых методиках все это обычно «заметается под ковер» либо старательно избегается. Хотя понятно, что именно феномен рефлексии во множестве социальных явлений оказывается главным. И специалисты по математическому моделированию, откровенно говоря, только подходят к описанию и прогнозированию этого круга явлений. При этом многие основополагающие идеи в этой области были высказаны еще в 1970-х годах Владимиром Лефевром[2]. При этом существует научное сообщество, активно развивающее эти подходы и с 2001 года издающее международный междисциплинарный журнал «Рефлексивные процессы и управление»[3]. При этом соответствующие технологии активно используются в области глобальной экономики (как убедительно показал Джордж Сорос[4]), в сфере манипуляции сознанием (ярким примером здесь являются «финансовые революции»), в работе спецслужб (в частности, в сфере борьбы с терроризмом)[5]. Однако это направление, как и многие другие, до сих пор остается вне сферы внимания современной социологии.

Наверно, еще одна важная причина состоит в том, что синергетика начинала с явлений самоорганизации в физике, химии, биологии. И здесь добилась больших успехов, развила соответствующие концепции, модели, математический аппарат. В социологии самоорганизация во многом иная. Разная на разных масштабах и в разных ситуациях. И, вероятно, для синергетики это пока перспектива, дело будущего.

И тем важнее смелая, энергичная попытка, предпринятая в книге, показать социологам, что *уже умеют* специалисты по прикладной математике и математическому моделированию в сфере социологии. И, с другой стороны, попытки показать математикам, что и как из их арсенала востребовано в сфере социальных наук.

Предисловие должно соответствовать по форме и стилю самой книге. А стиль этот ясный, точный, несколько конспективный. Поэтому, видимо, разумно последовать гегелевской традиции.

---

[2] *Лефевр В. А.* Рефлексия. М.: Когито-Центр, 2003. 496 с.

[3] http://www.reflexion.ru/Journal.html.

[4] *Сорос Дж.* Алхимия финансов. М.: ИНФРА-М, 1999. 416 с.

[5] *Крамер З. Х., Найдер Т. Б., Лефевр В. А.* От предсказаний к рефлексивному управлению // Рефлексивные процессы и управление. 2003. Т. 3. № 2. С. 35–52.

Тезис

Знание некоторых принципов легко возмещает незнание некоторых фактов.

Гельвеций

На Физтехе учат одному — отлично сдавать экзамены по всем предметам.

Фольклор Физтеха

В книге рассмотрены основные идеи и типичные примеры «мягкого моделирования». Рене Том — один из создателей теории катастроф — в свое время разделил математические модели на «жесткие» и «мягкие». Первые основаны на известных законах природы и связаны с получением следствий из известных законов. Они типичны для механики, физики, химии. «Мягкие модели» исходят из предположений и гипотез о сущности описываемых явлений, извлечении следствий из этих гипотез и уточнения самих гипотез. Они характерны для социологии, психологии, истории[6].

Эти модели рассмотрены вместе с основными математическими понятиями синергетики и нелинейной науки в целом — бифуркации, катастрофы, странные аттракторы, устойчивость.

Описанные модели интересны, разнообразны и относятся к разным сферам социологии. Здесь тюремные бунты и отношения колонии и метрополии, гендерные отношения и деятельность малой фирмы, а также многие другие.

Наряду с традиционными для мягкого моделирования идеями теории динамических систем и теории катастроф обсуждаются необычные для этой сферы инвариантно-групповые методы (очень интересна теория систем отношений Ю. И. Кулакова).

Очень ценно обсуждение принципов синергетики и ее концепций, а не только идей и моделей. Видимо, математическое моделирование в социологии будет очень активно развиваться и будущих социологов естественно ориентировать на концепции и принципы, а не на конкретные модели.

Изложено множество современных методов обработки социологических данных. Здесь и кластерный, и регрессионный, и факторный, и дисперсионный, и дискриминантный анализ.

---

[6] В настоящее время активно развивается исследовательская программа, связанная с построением теоретической и математической истории, опирающаяся на построение моделей исторических процессов, выдвинутая в работе: *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. М.: УРСС, 2003. 288 с.

Методы обработки данных описываются во взаимосвязи с наиболее популярными понятиями прикладных программ, используемыми социологами. Настоящая книга — учебник нового поколения. Тут показано и то, что студент или исследователь увидит на экране, и что будет напечатано в таблице, и объяснено, что это значит и как таким результатом можно воспользоваться.

Антитезис

— Нет в мире совершенства! — вздохнул Лис.

А. Сент-Экзюпери

Недостатки можно рассматривать как продолжение достоинств или достоинства — как продолжение недостатков. Все зависит от точки зрения.

В краткости книги есть свои подводные камни. К примеру, множество процедур обработки социологических данных есть глубокая основа, опирающаяся на результаты математической статистики. С сожалением приходится признать, что во многих вузах ныне статистика преподается неудовлетворительно. Так что многим читателям, решившим разобраться в алгоритмах обработки данных и понять их, придется во многих вопросах статистики разбираться самому.

Обратная сторона ясности — впечатление, что все в данной области уже понятно. Да в учебнике и трудно остановиться на нерешенных вопросах. Целью математического моделирования, компьютерных расчетов являются не цифры, а понимание. Однако сейчас все более ясно становится, что именно его сейчас в российской социологии даже на качественном уровне остро не хватает.

Обращу внимание на мнение одного из наиболее авторитетных российских социологов, профессора Владимира Александровича Ядова: «Я бы уверенно сказал, что методология эмпирического исследования диктуется соответствующим общетеоретическим подходом. Пол Лазерефельд, как и Гэллап, в своих работах по технологии надежной регистрации эмпирических результатов опирались на постулаты структурного функционализма Парсонса и Мертона. Чикагская школа, напротив, предложила целый комплекс качественных методологий, исходя из теоретических идей феноменологов и этносоциологов, пафос которых не столько репрезентация массовых процессов, сколько понимание социокультурных смыслов действий людей. Популярность качественной методологии в нашем сообществе последних лет можно объяснить и так и эдак. Я убежден, что основная, именно социальная причина — та же, что породила Чикагскую школу: полная неясность, „Что же происходит в обществе?“. В 30-е годы американское правительство ввело сухой закон, расцвела мафия, уличные банды и т. д. Следовало понять и осмыслить эти явления. Аналогичная ситуация в современной России»[7].

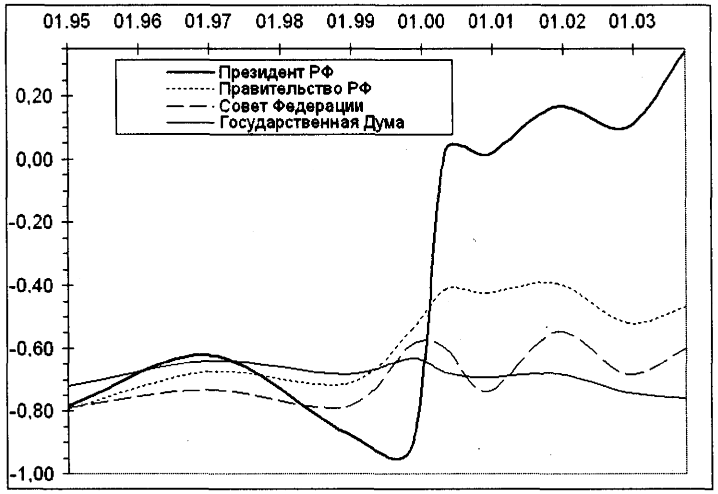
Еще более острой является ситуация в «количественной социологии», в понимании динамики социальных систем. Трудно оказывается даже интерпретировать результаты мониторинга общественного мнения, не говоря уже о задаче прогноза динамики состояния общества. Приведем данные, касающиеся социально политической катастрофы новой России, любезно предоставленные российским социологом В. К. Левашовым. Обсуждаемая книга прекрасно иллюстрирована, поэтому мне показалось уместным поместить несколько картинок и во введении. На рис. 1 показано число респондентов, доверяющих или не доверяющих различным социальным институтам. В социально стабильном обществе, как показывает мировой опыт, есть 6–8 институтов, которым доверяют более половины населения (они могут быть различны — политические партии, газеты, церковь, армия, профсоюзы и т. д.; важно, чтобы они были).

С 1991 по 2000 год, как показывают результаты мониторинга, таких институтов в России не было ни одного. С 2000 года такой социальный институт появился — это Президент Российской Федерации. И это был шанс для построения устойчивой социально-политической системы. К сожалению, за прошедшие годы его не использовали — ни одному из других социальных институтов России завоевать доверие общества не удалось (это корень того кризиса всех политических партий современной России, который мы наблюдаем). Обратим внимание на немонотонный характер представленных зависимостей. Казалось бы интересно узнать, что в определенные моменты приводило к утрате доверия, а что к его росту, были на это глубокие внутренние причины или это результат манипуляции общественным сознанием. Но это дело будущего.

В книге, на мой взгляд, есть с чем спорить. Точнее, в ней нашел отражение тот спор, который идет в нашем научном сообществе между исследователями, развивающими и использующими синергетику, и некоторыми ее интерпретаторами. В самом деле, в большей части книги представлены методы, модели, алгоритмы, в конечном счете направленные на поиск, анализ и использование объективных социальных закономерностей (если бы их не было, то социология просто не состоялась бы как наука!). А с другой... В главе про синергетику мы читаем: «Согласно синергетике, в мире нет тех универсальных законов, которые делали возможным его познание в классическом смысле слова (деонтологизация знания). Синергетическая теория не ориентирована на выявление законов, а направлена на конструктивный диалог, на создание интерпретаций. Пригожинская формулировка законов природы включает в себя несводимые вероятностные представления».

---

[7] *Ядов В. А.* Размышления по случаю юбилея журнала // Социология: методология, методы, математические модели. 2005. № 20. С. 8.



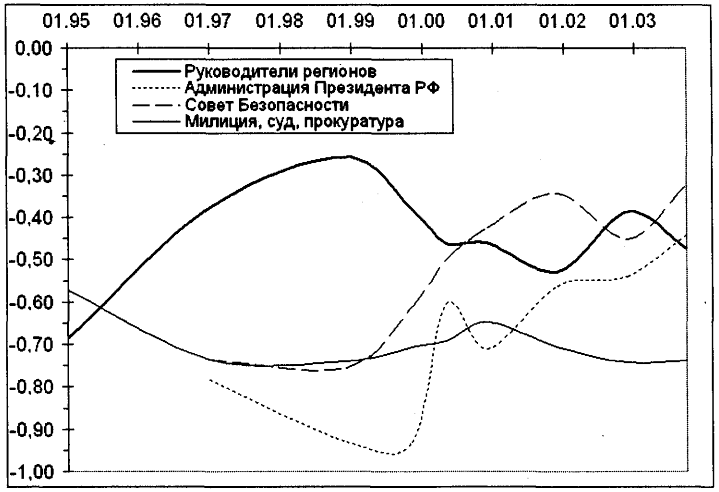
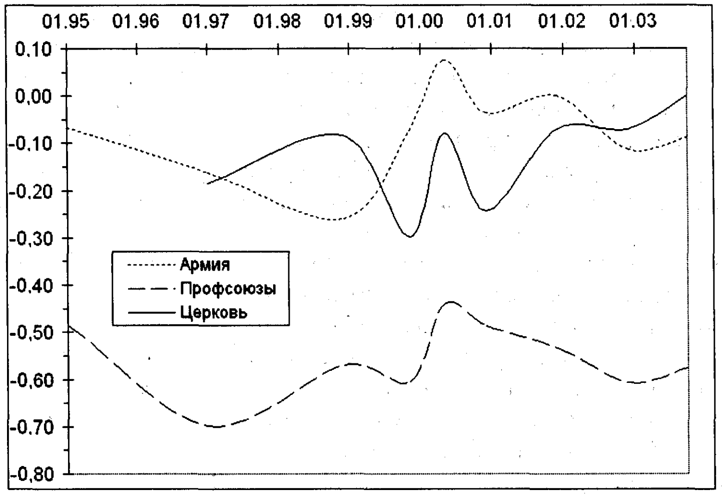
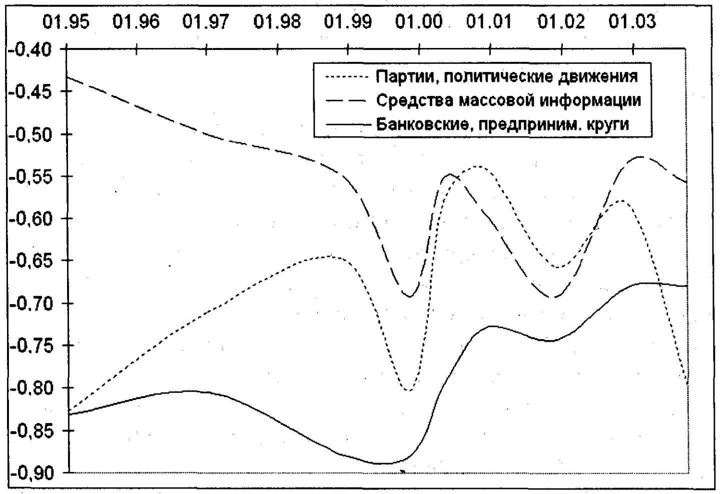


Рис. 1. Динамика отношения населения к политическим и общественным институтам.

Индекс отношения определялся как разность между количеством опрошенных, доверяющих и не доверяющих рассматриваемому институту, деленная на их сумму; значения индекса, равные ±1, соответствуют полному доверию/недоверию





Окончание рис. 1

На мой взгляд, это неверно. И три десятка книг, вышедших в нашей серии «Синергетика: от прошлого к будущему», и почти сотня томов в шпрингеровской серии по синергетике говорят об обратном. И, в первом приближении, к постмодерну синергетика никакого отношения не имеет.

Синергетика ныне в моде, поэтому исходя из концепции философа и методолога В. Г. Буданова[8] разумно выделить *аутентичную синергетику,* которая имеет дело с решением конкретных научных задач, возникающих в разных областях, является инструментом сборки больших научных проектов. Здесь есть и конкретное предметное знание, и моделирование, и философская рефлексия. Тут действуют критерии научности, верификации, достоверности. Но одновременно существует и *метафорическая синергетика.* При этом образы, понятия, идеи, взятые из синергетики, упрощаются, обобщаются, поясняются с помощью аналогий. Образное восприятие играет не менее важную роль в формировании картины мира. Попытки, на мой взгляд не очень удачные, связать синергетику с постмодерном явно относятся к метафорической синергетике. Подробно это обсуждалось на круглом столе в журнале «Вопросы философии»[9], одним из участников которого был известный специалист по философии постмодерна Я. И. Свирский, цитируемый в настоящей книге.

Может быть обойтись одной из двух «синергетик»? Наверное, не стоит. Обе ипостаси этого междисциплинарного подхода важны. По мысли одного из крупнейших специалистов по философии науки — академика В. С. Стёпина — в XXI веке именно синергетике предстоит стать основой научной картины мира. И тут, конечно, речь идет об аутентичной синергетике.

С другой стороны, в человеке воплощены и рациональное, и эмоциональное, и интуитивное начала. «Синергетика, как квантовая механика или теория относительности, должна стать культурным феноменом, изменить мировоззрение. И мы тоже должны думать об этом. Ведь если ее будут трактовать и интерпретировать люди, не имеющие о ней понятия, то и синергетики может не остаться», — часто говорил мой учитель — выдающийся специалист в области прикладной математики и междисциплинарных исследований, чл.-корр. РАН С. П. Курдюмов[10]. Этой метафорической ипостаси синергетики последние десять лет жизни он уделял большое внимание. Он написал около полусотни статей и несколько книг по философии синергетики и всегда гордился своей «философской ученицей», профессором Е. Н. Князевой.

Хочется надеяться, что и в будущем равновесие между аутентичной и метафорической синергетиками сохраниться, что синергетику не постигнет судьба кибернетики, что ребенок не будет выплеснут с водой.

---

[8] *Буданов В. Г.* О методологии синергетики // Вопросы философии. 2006. № 5. С. 53–69.

[9] Синергетика. Проблемы, трудности, перспективы. // Вопросы философии. 2006. № 9.

[10] В серии «Синергетика: от прошлого к будущему» вышло две его книги: *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* Основания синергетики. Синергетическое мировидение. М.: КомКнига/URSS, 2005. 240 с.; *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* Основания синергетики. Человек, конструирующий себя и свое будущее. М.: КомКнига/URSS, 2006. 232 с.

В основе синергетического подхода лежит глубокое внутреннее единство динамики, свойств, характеристик различных сложных систем, в том числе и социальных. Таких примеров в учебниках хочется видеть больше. На мой взгляд, один из наиболее интересных примеров глубокого внутреннего единства позволяет выявить *ранг-размерный* анализ. Для простейших систем характерны *гауссово распределение* вероятностей с плотностью $\rho(x) \approx \exp\left(-(x-M)^2/\sigma^2\right)$. Среднее значение случайной величины определяется математическим ожиданием *M*, характерное отклонение — величиной дисперсии σ. Однако, как показали исследования, для многих систем характерны степенные распределения $\rho(x) \approx x^{-(1+\alpha)}$ с $\alpha \sim 1$, называемые *распределениями с тяжелыми хвостами.* Именно такие распределения характеризуют землетрясения, наводнения, техногенные катастрофы, биржевые крахи, ущерб от утечки конфиденциальной информации.[11]

Во многих случаях удобно рассматривать не плотность вероятности, а зависимости ранг — размер. При этом самому крупному событию присваивается ранг r_0 (обычно его подбирают, исходя из свойств выборки), второму по величине — r_0+1 и т. д. Для степенных распределений зависимости ранг — размер также имеют степенной вид $x(r) \approx r^{-1/\alpha}$. Поразительным свойством сложных систем является их *целостность* — отсутствие характерного масштаба отклика на внешнее возмущение, что означает возможность катастрофических событий (см. рис. 2).

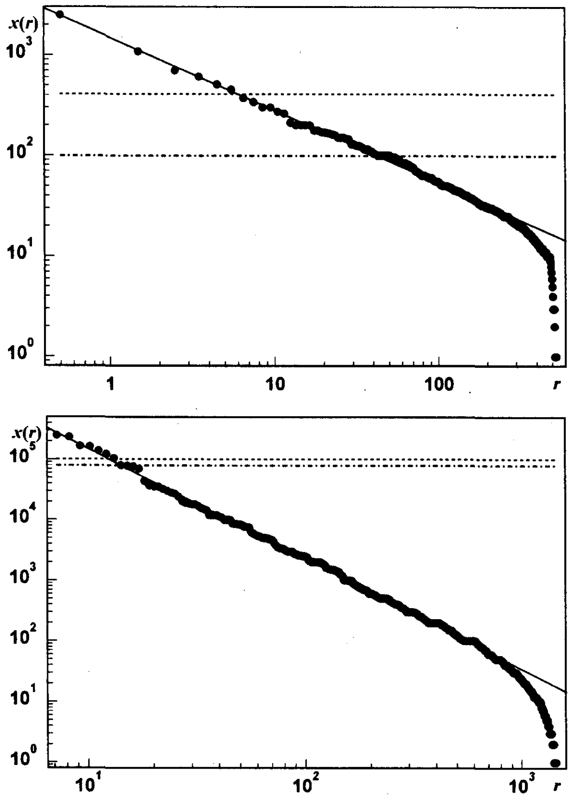
В социологии ранг-размерный анализ часто используют для выявления подтасовок на выборах. Они видны по отклонениям от степенного распределения. Обычно такие отклонения очень важны и значимы. Приведем наглядный социологический пример. Степенная зависимость ранг — размер характерна для более 42 тысяч населенных пунктов России (рисунки любезно предоставлены А. В. Подлазовым). «Выпадают» из этой, характерной для всей страны зависимости только два города — Москва и Санкт-Петербург (см. рис. 3). Эти города как бы живут в другом пространстве. Как тут не вспомнить поговорку: «Москва — не Россия и Россия — не Москва». Это показывает и социальная динамика. Из рис. 4 видно, что жители этих городов более нервно реагировали на происходящие события. И, что еще более значимо, реагировали в противофазе по отношению ко всему остальному населению России.

Здесь видно огромное поле работы и для социологов, и для специалистов по математическому моделированию, и для тех, кто развивает междисциплинарные подходы.

---

[11] *Владимиров В. А., Воробьев Ю. Л., Малинецкий Г. Г.* Управление риском. Риск, устойчивое развитие и синергетика. М.: Наука, 2000.

а)



б)

Рис. 2. Зависимости ранг — размер для статистик бедствий различной природы.

(а) — ранжировка аварий на производстве по количеству погибших в их результате;
(б) — ранжировка стихийных бедствий по количеству людей, получивших ранения (данные начиная с 1975 года)[12];
(в) — ранжировка 164 стран по доле ВИЧ-инфицированного населения в возрасте от 15 до 49 лет по состоянию на конец 1999 года[13];
(г) — ранжировка наиболее распространенных компьютерных вирусов по интегральному проценту пораженных компьютеров (ежемесячные данные за период с января 1998 года по ноябрь 2002 года)[14].

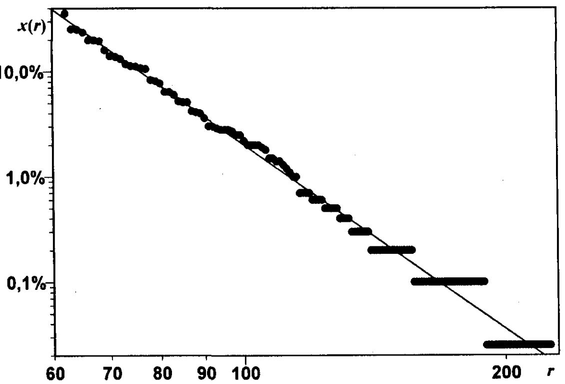
В двойном логарифмическом масштабе все зависимости имеют линейный вид, что говорит о степенном характере соответствующих распределений вероятностей

[12] The OFDA/CRED International disaster database. http://www.cred.be/emdat (по состоянию на 17.07.02).

[13] Population & Société. 2001. № 370. http://www.ined.fr/publications/pop_et_soc/pes370/index.html, http://www.ined.fr/englishversion/publications/pop_et_soc/pesa370.pdf; Population Reference Bureau. 2001 world population data sheet. http://www.prb.org/Content/NavigationMenu/Other_reports/2000-2002/2001_World_Population_Data_Sheet.htm.

[14] Top ten viruses reported to Sophos. http://www.sophos.com/virusinfo/topten.

в)



г)

Окончание рис. 2

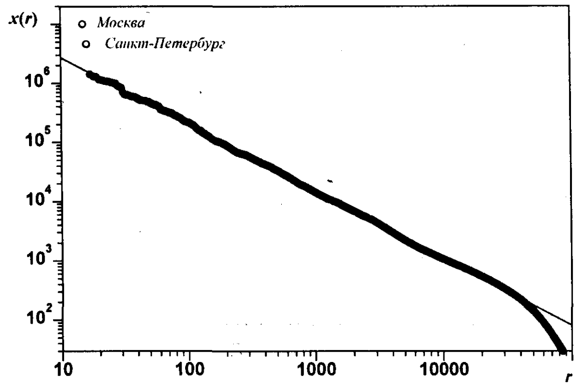


Рис. 3. Ранжировка населенных пунктов России по числу жителей в 2002 году.

Степенной зависимостью с $r_0 = 15$ и $\alpha = 0{,}88$ описываются более 42 тыс. населенных пунктов с населением свыше 200 человек за исключением двух столиц, выбивающихся из общего ряда

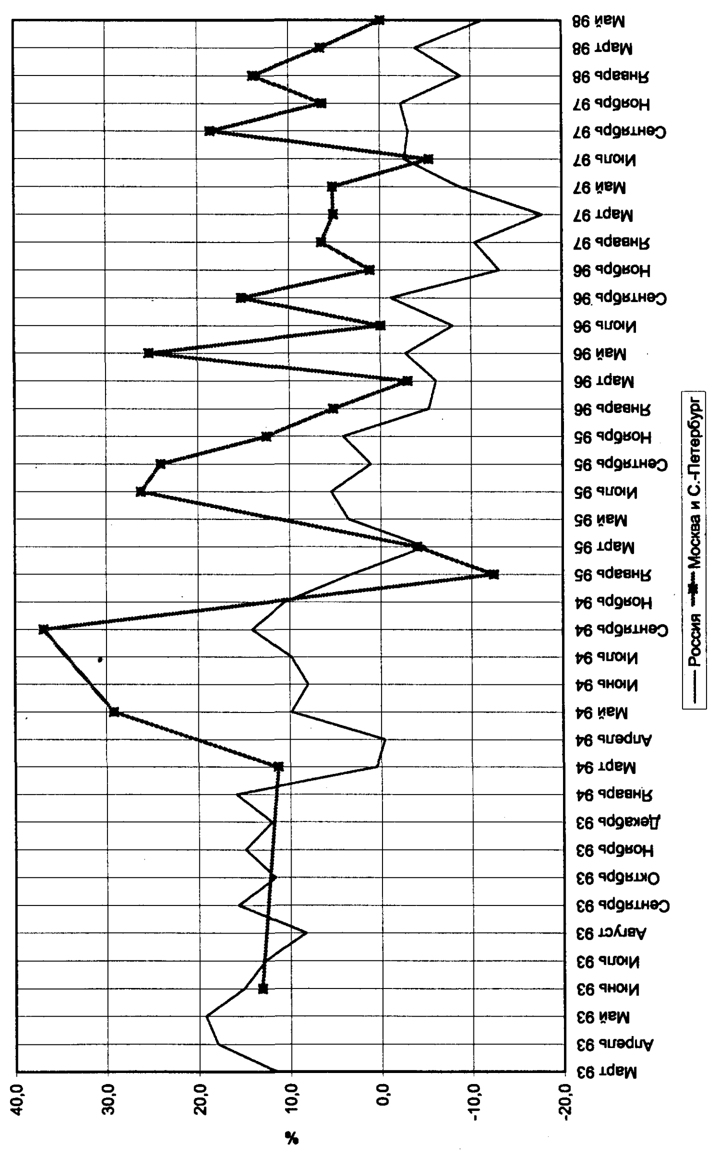


Рис. 4. Результаты опроса ВЦИОМ.

Разность между позитивными (и нейтральными) и негативными ответами на вопрос: «Как Вы бы оценили в настоящее время материальное положение вашей семьи?»

Синтез

> Как бы то ни было, новая ситуация, возможно, поможет нам навести мосты между науками и другими видами культурной деятельности человека. Мир не является ни автоматом, ни хаосом. Наш мир — мир неопределенности, но деятельность индивидуума в нем не обязательно обречена на малозначимость. Наш мир не поддается описанию одной истиной. Мысль о том, что наука может помочь нам навести мосты и примирить противоположности, не отрицая их, доставляет мне глубокое удовлетворение.
>
> *И. Р. Пригожин*

Книг, в которых рассматриваются достаточно полно и системно и модели, и методы обработки данных в социологии, в отечественной литературе практически нет. А работ, где все это анализируется с позиций синергетики, просто нет. Мы имеем дело с первым и очень удачным опытом.

Очень ценно, что в книге представлена объемная картина. Ее авторы представляют и кафедру социологии и политологии Омского государственного университета, и кафедру кибернетики того же учебного заведения. Междисциплинарность взгляда, изложение на языке, понятном и для математиков, и для социологов, использующих количественные данные, трудно переоценить.

Судя по списку цитируемой литературы, книги серии «Синергетика: от прошлого к будущему», которая уже 5 лет выпускается издательством URSS, до Омска пока еще не дошли. В этой серии к настоящему времени выпущено более 30 книг общим тиражом около 60 тысяч экземпляров. Но в магазинах таких крупных городов, как Уфа, Ярославль, Тверь и многих других, их трудно найти. Да и самих магазинов, в которых продается литература по точным наукам, сейчас, признаться, немного. Поэтому с выходом книги омских коллег мы связываем расширение географии не только авторов серии, но и идей синергетики в России.

Научная школа профессора А.К. Гуца ведет активные исследования не только в области математической социологии, но и во многих других направлениях нелинейной науки. И эта междисциплинарность видна и в данной яркой и талантливой книге.

Пожалуй, эту книгу можно рассматривать и как своеобразное приглашение к диалогу. В частности, к диалогу между специалистами, работающими в разных областях. С одной стороны, в одних областях могут работать те, кто решал и решил проблемы, которые в других областях только возникли. Приведу наглядный пример. Центральное понятие синергетики — *параметры порядка* — ведущие переменные, которые определяют динамику остальных степеней свободы системы. В социологии часто возникает проблема определить параметры порядка в общественном сознании (метод главных компонент, о котором речь идет в этой книге — один из алгоритмов для этого). Естественно такие параметры возникают в ходе самоорганизации в пространстве смыслов, ценностей, ожиданий, предпочтений. При этом у самого субъекта эти параметры не отрефлексированы, и исследователю приходится определять их на основе результата опросов.

Однако аналогичная проблема возникает в медицине, когда математик вместе с врачом выявляет параметры порядка у успешно работающего лечащего врача, результат его многолетнего опыта. Для этого у нас в Институте прикладной математики под руководством академика И. М. Гельфанда была разработана теория диагностических игр, давшая блестящие результаты[15]. Сейчас рано говорить о «профессиональном бессмертии» крупных специалистов, которое дают подобные технологии, но движение идет в этом направлении. Возможно и в социологии такие алгоритмы, опирающиеся на представления о самоорганизации, пригодятся.

Другой наглядный пример. В настоящее время все более широко развивается направление, называемое в западной литературе data-mining — *раскопки данных*. И там возникают схожие проблемы — диагностика, выявление связей, сетевых структур, теневых субъектов, параметров порядка, образов в массовом сознании на основе косвенных и обычно неполных данных. И это тоже новый и важный класс задач математической социологии. И здесь тоже есть интересный задел, связанный с анализом данных, имеющих пробелы, с небольшими выборками. И этот задел тоже связан с математической медициной и с применением в ней идей синергетики[16].

У студентов, читающих учебники, часто возникает впечатление, что все простые, «наивные» вопросы уже прояснены, что главное уже сделано. В социологии это не так! Отчасти это показывает и обсуждаемая книга. Большое впечатление производит такой нерешенный вопрос — каким образом могут в ходе эволюции возникнуть альтруистические стратегии поведения. Ведь каждому их обладателю они крайне невыгодны! И кажется, что проще, безопаснее и приятнее руководствоваться правилом «Каждый за себя! Один Бог за всех». Но ведь тогда общество не выживает.

[15] *Гельфанд И. М., Гельфанд Б. И., Шифрин М. А.* Очерки о совместной работе математиков и врачей. М.: УРСС, 2004. 320 с.

[16] *Котов Ю. Б.* Новые математические подходы и задачи медицинской диагностики. М.: УРСС, 2004. 328 с.; *Burtsev M. S., Турчин P. V.* Evolution of cooperative strategies from first principles. Nature (Letters to Editor). 2006. Vol. 440. P. 1041–1044.

Прояснить этот фундаментальный социологический вопрос удалось только в последние годы на основе теории искусственной жизни — бурно развивающегося направления синергетики[17].

Учебники похожи на те науки, которые в них излагаются. В сложившихся устоявшихся дисциплинах есть канон. В учебниках шлифуются детали и оттачивается педагогическое мастерство авторов. И каждое следующее издание очень немногим отличается от предыдущего. Однако в активно развивающихся, молодых областях, а к таковым, безусловно, относится математическая социология, все иначе. Меняются приоритеты. Новые идеи теснят классику. Следующие издания очень сильно отличаются от предшественников. Хочется надеяться, что такая судьба будет и у этой книги. Наверно, у математической социологии в новой реальности все главное еще впереди. И увидеть, найти, заняться этим главным может помочь книга, которую вы держите в руках.

Г. Г. Малинецкий

[17] *Турчин П. В.* Историческая динамика. На пути к теоретической истории. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007.

Введение

Социология – это наука, занимающаяся изучением общих законов эволюции общества с точки зрения развития социальных отношений.

Как любая наука, социология использует характерные только для нее методы исследования социальной реальности. Отличительной особенностью практической социологии является применение крупномасштабных опросов населения. Самые различные типы анкетирования – это то, что прочно увязывается с профессией социолога. При распространении и обработке анкет широко используются методы, разработанные в математической статистике.

Стоит, однако, отметить, что под математическими методами, применяемыми в социологии, сами социологи чаще всего понимают методы математической статистики, кластерный анализ, факторный анализ, регрессионный и т.д. Иногда говорят о математическом и компьютерном моделировании. Казалось бы, социология в полной мере осваивает математику и широко ее использует.

Вместе с тем, по мнению социолога, «реалии отечественной социологической практики говорят, как правило, о неприятии математического формализма. Это, к сожалению, наносит огромный вред развитию методологии эмпирической социологии, и, что особенно важно, в ряде высших учебных заведений студентам – будущим социологам – не прививается математическая культура, без которой трудно рассчитывать на воспитание аналитиков с высоким уровнем профессионализма...

В лучшим случае математической культурой в социологии считается применение факторного анализа (только тех моделей, которые задействованы в популярном пакете программ SPSS) без всякого обоснования, ибо сегодня это красивый, необходимый атрибут

социологического исследования. Разумеется, существуют «островки», где по-прежнему развивается логика математической формализации в социологических исследованиях, но, к большому сожалению, их очень мало. Подтверждением тому является скромная доля литературы по методам сбора информации, математическому анализу данных и методам математического моделирования среди огромного потока издающейся литературы по социологии» [77].

Чем занимается социология как наука? Неполный перечень задач, решаемых социологий, может выглядить следующим образом:

- анализ данных (объяснение результатов опросов или других исследований, представленных в виде массивов числовых данных)[1];
- описание социальных явлений (построение моделей явлений, в том числе и математических моделей);
- объяснение социальных явлений;
- предсказание социальных явлений (целям предсказания служат методы моделирования, в том числе и математического).

С точки зрения применения математических методов, можно сказать, что первая задача хорошо освоена социологами. Три других являют собой необъятные гуманитарные просторы, на которых лишь кое-где чахнут чудом явившиеся свету уродцы, рожденные редким на сегодня существом, представляющим симбиоз социолога и математика.

Однако социология – единственная на сегодня гуманитарная наука, способная к метаморфозе: сегодня только на социологических факультетах старшее поколение, не знающее математики, способно породить новое молодое пооколение, владеющее современными математическими методами. Отчасти этому способствует то, что социологи быстрее других воспринимают и принимают идеи синергетики и больше других представителей гуманитарных наук говорят о значении синергетической парадигмы.

Данное учебное пособие представляет собой попытку познакомить социологов с современным математическим аппаратом, в частности и с тем, что составляет основу синергетических идей в социологии.

[1] Используются кластерный анализ, компонентный анализ, факторный анализ, регрессионный и т.д.

Часть I

Математические методы в социологии

Глава 1

Динамические социальные системы

1.1. Понятие динамической социальной системы

1.1.1. Формализация социальных систем

Социальная система с точки зрения социолога – это нечто, что не может быть описано в нескольких словах. Более того, даже в том случае, когда социолог дает ёмкое и достаточно полное (текстовое) описание социальной системы, то легко, обратившись к другому социологу, убедиться, что существует другое, мало чем похожее на первое описание социальной системы. Отчасти это связано с тем, что социология по сей день сугубо гуманитарная наука и в ней отсутствуют *формализованные* описания социальных систем.

Под формализацией в данном случае мы понимаем символическое описание, т.е. описание, использующее большое количество специальных символов и знаков (например математических) без того, чтобы за этими символами и знаками были закреплены какие-либо конкретные значения[1], без того, чтобы они были наполнены

[1] Придание значения, смысла символам – это следующий шаг в исследовании, связанный с приложениями введенного формализма.

каким-либо «житейским» смыслом.

Формализация хороша тем, что она позволяет незамедлительно начать исследование, используя формальные правила и законы, ранее установленные другими исследователями для данной формальной системы. Иначе говоря, очень быстро могут быть получены конкретные результаты, на основе которых делаются те или иные заключения и прогнозы.

Может оказаться, что формализация была чрезмерно упрощенной и это повлекло скудные заключения и прогнозы. Однако важно, что они были *получены*, т.е. налицо некоторое продвижение, прогресс, и это лучше, чем ничего. Тем более, что усложнение формальной системы, как правило, не проблема. Другой вопрос – поддастся ли анализу усложненная формальная система? Последнее было серьезным препятствием в эпоху, предшествующую появлению электронно-вычислительной техники. В настоящее время наличие мощных вычислительных систем позволяет получать решения и прогнозы там, где ранее исследователь отступал перед чрезмерно усложненными формализованными (математизированными) описаниями природных и, что важно для нас, социальных систем.

1.1.2. Математические модели

Математической моделью реального объекта (явления) называется ее упрощенная, идеализированная схема, составленная с помощью математических символов и операций (соотношений) [23].

Математическая модель – это пример формализации, основанной на использовании самого различного инструментария, разработанного в математической науке.

Можно говорить лишь о некоторых общих принципах и требованиях к таким моделям. Перечислим основные из них:

- адекватность (соответствие модели своему оригиналу),
- объективность (соответствие научных выводов реальным условиям),
- простота (незасоренность модели второстепенными факторами),
- чувствительность (способность модели реагировать на изменение начальных параметров),
- устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи),

- универсальность (широта области применения).

В данном учебном пособии мы пойдем по самому простому пути (математической) формализации социальной системы с помощью дифференциальных уравнений. Иначе говоря, мы будем строить модели реальных социальных систем на основе теории дифференциальных уравнений.

1.1.3. Дифференциальное уравнение? Что оно означает?

Пусть состояние социальной системы в момент времени t описывается вектор-функцией $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Есть ли какая-то связь между состоянием социальной системы в разные моменты времени, скажем, в моменты t и $t+h$? Житейский опыт говорит, что это может быть причинно-следственная связь. Иначе говоря, знание состояние в момент t *предопределяет* состояние в момент $t+h$. Математически это должно означать возможность *вычислить* $x(t+h)$ с помощью $x(t)$. Следовательно, должны иметь уравнение

$$x(t+h) = x(t) + A(t,h), \tag{1.1}$$

если мы стоим на позициях *детерминизма*, или должны иметь уравнение для вычисления *вероятности* $P(t, t+h)$ перехода из состояния системы в момент t к состоянию системы в момент $t+h$, т.е.

$$P(t, t+h) = A(t,h), \tag{1.2}$$

если мы придерживаемся недерминисткого (вероятностного) описания поведения социальной системы.

В первом случае при предположении, что $A(t,h) = a(t)h + o(h)$, $o(h)/h \to 0$ при $h \to 0$, получаем вместо уравнения (1.1) то, что называется *дифференциальным уравнением*:

$$\frac{dx}{dt} = a(t). \tag{1.3}$$

Этот случай связан с традиционной трактовкой *бесконечно малой* величины $o(h)$ в математическом анализе, которая связывается с именем французского математика Коши. [2]

[2] Возможна иная трактовка: принимается, что $o(h) = h^2 = 0$, хотя при

Таким образом, дифференциальное уравнение – это один из самых естественных и традиционных способов прогноза будущего состояния социальной системы по настоящему ее состоянию.

1.1.4. Дифференциальные уравнения – насколько они оправданы?

«Использование дифференциальных уравнений с самого начала было сопряжено с идеей устойчивых законов природы, пользуясь знанием которых можно было бы **однозначно предсказывать будущее**. Иными словами – с детерминацией настоящим будущего... Соответствующая самая общая и законченная постановка вопроса была дана Лапласом и получила название «лапласовский детерминизм»...

Общая связь между дифференциальным уравнением и детерминацией такова. Пусть $x(t)$ – некоторая физическая переменная, зависящая от времени, мы знаем ее значение $x(t_0)$ в начальный момент $t = t_0$ и знаем закон

$$\frac{dx}{dt} = a \tag{1.4}$$

в форме дифференциального уравнения, которым управляется величина $x(t)$ всегда, во все моменты времени. Тогда математические теоремы говорят, что $x(t)$ в любую дату $t > t_0$ определяется ОДНОЗНАЧНО, т.е. детерминированно... Для этой-то цели и ищут-пишут в физике дифференциальные уравнения, чтобы иметь возможность потом оперировать с переменной $x(t)$ как с однозначной, как с данной» [62].

Как видим, дифференциальное уравнение дает однозначно предсказуемое будущее по заданному настоящему. Следует отметить, что эта однозначность – следствие неявного предположения о **гладкости** величины $x(t)$. Фактически изначально фиксируется гладкость в пространстве-времени, относительно которой гладкой, дифференцируемой берется кривая $x(t)$.[3]

Однако социальный опыт говорит о том, что поведение, эволюция социальных систем часто бывают непредсказуемыми. Часто

этом $h \neq 0$. Такая трактовка несовместима с обычным пониманием h как действительного числа, но допустимо, если **расширить** множество классических действительных чисел $\mathbb{R}$ за счет добавления *бесконечно малых чисел* со свойствами, подобными $h^2 = 0$.

[3] См. подробности в статье Р.И.Пименова [62].

возникают ситуации, когда будущее социальной системы возможно в нескольких весьма различных вариантах. И заранее нельзя сказать, какой именно вариант реализуется в действительности.

Означает ли сказанное, что следует отказаться от аппарата дифференциальных уравнений при моделировании социальных систем? Поступать так было бы неосмотрительно, т.к. теория дифференциальных уравнений – это одна из самых разработанных математических теорий, успешно справлявшаяся со многими прикладными задачами.

Скорее, надо воспользоваться дифференциальными уравнениями с параметрами, поскольку для них возможны так называемые бифуркации, приводящие к тому, что эволюция описываемой подобными уравнениями системы как раз и бывает непредсказуемой. Но именно это нам и требуется.

1.1.5. Социальная система как дифференциальное уравнение с управляющими параметрами

Будем предполагать, что состояние социальной системы характеризуется некоторой переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и некоторым управляющим k-мерным параметром $\mu \in \mathbb{R}^k$, изменение которого влияет на переменную $\mathbf{x}$. Пространство $\mathbb{R}^n$ называется *фазовым пространством.*

Скорость изменения переменной $\mathbf{x}$ во времени задается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu). \tag{1.5}$$

Специфика социальных систем, их отличие от многих технических и физических систем заключаются в существовании большого числа *скрытых* управляющих параметров. Скрытость часто бывает специально организованной или государственными органами, или отдельными влиятельными общественными организациями и партиями, не заинтересованными в разглашении механизмов по управлению обществом. Скрытые параметры могут быть выявлены в ходе исследований. Для этого, например, можно применять факторный анализ (гл.9). Важно, однако, не только выявлять эти параметры, но и предсказывать следствия изменения этих параметров. Как показывает теория бифуркаций, которая излагается ниже, часто незначительные изменения значений параметров могут повлечь катастрофические изменения в эволюции социальной системы.

1.1.6. Равновесные состояния и равновесные процессы социальных систем

Состояние социальной системы, которое не меняется во времени, назовем *стационарным равновесием*. Ясно, что для стационарного равновесия имеем условие

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0$$

или уравнение стационарных равновесий

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) = 0. \tag{1.6}$$

Если при заданном параметре μ уравнение (1.6) имеет решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mu)$, то это *стационарное равновесное состояние* социальной системы, в котором она пребывает при данном управлении μ.

Мы будем вместо слов «стационарное равновесие» писать просто «равновесие».

Нетрудно понять, что желательно иметь описание всех равновесных состояний и описание *переходов* из одного равновесия в другое, коль таковые могут иметь место. *Процесс*, состоящий из последовательности равновесных состояний, называется *равновесным*, или *квазистатическим*. Мы имеем дело с равновесным процессом, если начинает изменяться (управляющий) параметр μ.

Поскольку равновесие – это состояние, в котором социальная система пребывает достаточно длительное время, то важно уметь определять, насколько *устойчиво* это равновесие. Под устойчивостью в данном случае мы имеем в виду упорное стремление социальной системы сохранять свое достигнутое состояние. С точки зрения математики, это означает стремление социальной системы даже в том случае, если она слабо эволюционирует, т.е. переменная $\mathbf{x}$ слегка изменяется во времени, иметь значение переменной $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, близкое к исходному равновесному значению $\mathbf{x}(\mu)$.

1.1.7. Устойчивость социальной системы по Ляпунову

Дадим формальное определение устойчивости (стационарного) равновесного состояния $\mathbf{x}(\mu)$.

Состояние равновесия $\mathbf{x}(\mu)$ системы *устойчиво по Ляпунову*, если для любого заранее заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого решения $\mathbf{x} = \phi(t, \mu)$, $t \geq 0$ уравнения (1.5) с начальным данным $\mathbf{x_0}(\mu)$, т.е.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\phi(t,\mu) = \mathbf{f}(\phi(t,\mu),\mu), \\ &\phi(0,\mu) = \mathbf{x_0}(\mu), \end{aligned} \tag{1.7}$$

если

$$|\mathbf{x}(\mu) - \mathbf{x_0}(\mu)| < \delta,$$

то

$$|\mathbf{x}(\mu) - \phi(t,\mu)| < \varepsilon.$$

Состояние равновесия $\mathbf{x}(\mu)$ системы *асимптотически устойчиво по Ляпунову*, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t,\mu) = \mathbf{x}(\mu).$$

Устойчивое равновесие называется часто *притягивающим*, а асимптотически устойчивое – *аттрактором*.

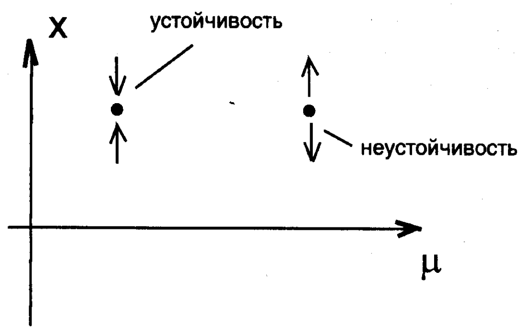


Рис. 1.1: Изображение устойчивого и неустойчивого равновесия (точка) в плоскости (x, μ).

1.1.8. Способ проверки устойчивости стационарного равновесия системы

Как проверить устойчивость (стационарного) равновесия системы (1.5)?

Разложим функцию $\mathbf{f}(\phi(t,\mu),\mu)$ в ряд Тейлора в «точке» равновесия $\mathbf{x}(\mu)$:

$$\mathbf{f}(\phi(t,\mu),\mu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu),\mu) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^k}(\mathbf{x}(\mu),\mu)(\phi^k(t,\mu) - x^k(\mu)) + ... =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^k}(\mathbf{x}(\mu),\mu)(\phi^k(t,\mu) - x^k(\mu)) + ..., \tag{1.8}$$

где мы учли то, что $\mathbf{x}(\mu)$ – равновесие, т.е.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu),\mu) = 0.$$

Пусть

$$\mathbf{f} = (f^1, ..., f^n), \quad a^i_k = \frac{\partial f^i}{\partial x^k}(\mathbf{x}(\mu),\mu).$$

Тогда (1.7) с учетом (1.8) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}\phi^i(t,\mu) = \sum_{k=1}^{n} a^i_k \cdot (\phi^k(t,\mu) - x^k(\mu)) + ... \tag{1.9}$$

Следующая теорема дает способ проверки (стационарного) равновесия на устойчивость (или неустойчивость) по Ляпунову.

Напомним, что собственное число матрицы A – это такое число λ, которое является решением уравнения

$$|A - \lambda E| = 0,$$

где E – единичная матрица.

Теорема 1.1 (А.М.Ляпунов). *Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – собственные числа матрицы $||a^i_k||$. Тогда*

1) *если все вещественные части $Re\lambda_j < 0$ $(j = 1, ..., n)$, то равновесие $\mathbf{x}(\mu)$ устойчиво по Ляпунову;*

2) *если хотя бы одно $Re\lambda_j > 0$, то равновесие $\mathbf{x}(\mu)$ не является устойчивым по Ляпунову.*

1.1.9. Равновесия двумерной линейной социальной системы

Изучим возможные типы равновесных состояний для системы вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = ax^1 + bx^2 \\ \dfrac{dx^2}{dt} = cx^1 + dx^2, \end{cases} \tag{1.10}$$

где

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Легко видеть, что равновесие в данном случае – это нулевое решение $\mathbf{x_0} = (x^1, x^2) = (0,0)$ системы (1.10). Посмотрим, как ведут себя прочие решения $\mathbf{x} = \phi(t)$ вблизи от равновесия $\mathbf{x_0}$. Для этого необходимо провести несложное исследование, которое впервые сделал Пуанкаре. Результаты представлены на рис.1.2, 1.3, 1.4, 1.5 [104, с.206-210].

Пусть λ_1, λ_2 собственные числа матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

В зависимости от собственных чисел меняется картина фазового портрета, т.е. изображения поведения интегральных кривых на плоскости (x^1, x^2).

Узлы. Если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, то равновесие $\mathbf{x_0} = (0,0)$ называется *устойчивым узлом* (рис.1.2). Все интегральные кривые, задаваемые уравнениями

$$\begin{cases} x^1 = c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_1 e^{\lambda_2 t} \\ x^2 = c_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \tag{1.11}$$

стремятся при $t \to +\infty$ к точке $(0,0)$. Это означает асимптотическую устойчивость равновесия по Ляпунову.

Если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то равновесие $\mathbf{x_0} = (0,0)$ называется *неустойчивым узлом* (рис.1.2). Все интегральные кривые (1.11) при $t \to +\infty$ уходят от точки (0,0) на бесконечность. Это неустойчивость равновесия.

Узлы появляются также при $\lambda_1 = \lambda_2$ (рис.1.3). Интегральные кривые в этом случае задаются уравнениями

$$\begin{cases} x^1 = (c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 t)e^{\lambda_1 t} \\ x^2 = (c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 t)e^{\lambda_1 t}. \end{cases} \tag{1.12}$$

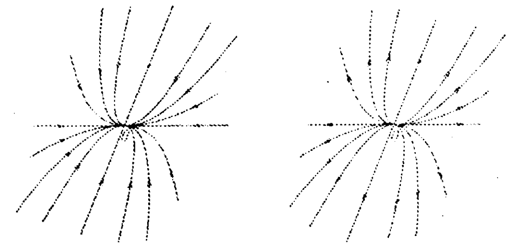


Рис. 1.2: Устойчивый (слева) узел: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Неустойчивый (справа) узел: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

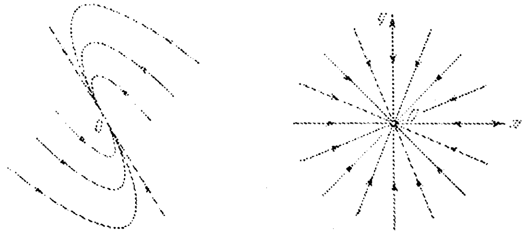


Рис. 1.3: Устойчивый (слева) узел: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Устойчивый дикритический узел (справа): $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ и $\beta_1 = \beta_2 = 0$

Седло. Если $\lambda_1 < 0$, но $\lambda_2 > 0$, то равновесие $\mathbf{x_0} = (0,0)$ называется *седлом* (рис.1.4). Все интегральные кривые (1.11) при $t \to +\infty$ вначале приближаются к равновесию $(0,0)$, затем уходят от него на бесконечность. Это неустойчивость равновесия.

Центр. Если $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$, $Im\lambda_i \neq 0$, то равновесие $\mathbf{x_0} = (0,0)$ называется *центром* (рис.1.4). Все интегральные кривые, задаваемые уравнениями

$$\begin{cases} x^1 = c_1 \cos(Im\lambda_1 t) + c_2 \sin(Im\lambda_1 t) \\ x^2 = c_1^* \cos(Im\lambda_1 t) + c_2^* \sin(Im\lambda_1 t), \end{cases} \tag{1.13}$$

при $t \to +\infty$ не уходят далеко от $(0,0)$, если изначально были близки к равновесию. Это означает устойчивость равновесия по Ляпунову.

Фокусы. Если $\lambda_1 = Re\lambda_1 + iIm\lambda_1$, $Re\lambda_1 \neq 0$. Если $Re\lambda_1 < 0$, то равновесие $\mathbf{x_0} = (0,0)$ называется *устойчивым фокусом* (рис.1.5). При

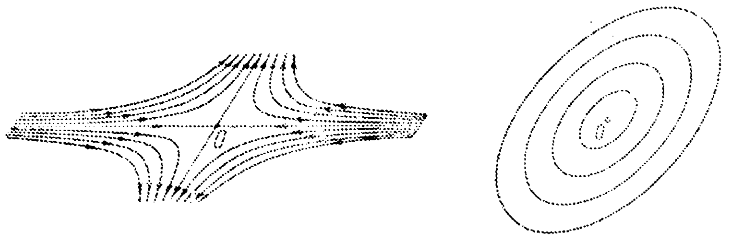


Рис. 1.4: Седло (слева):$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Центр (справа): $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$.

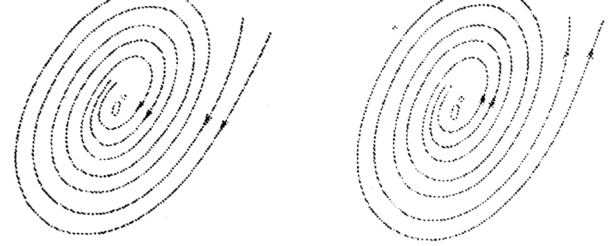


Рис. 1.5: Устойчивый (слева) фокус: $\lambda_1 < 0$. Неустойчивый (справа) фокус: $Re\lambda_1 > 0$.

$Re\lambda_1 > 0$ имеем *неустойчивый фокус* (рис.1.5). Все интегральные кривые задаются уравнениями

$$\begin{cases} x^1 = e^{Re\lambda_1 t}[c_1 \cos(Im\lambda_1 t) + c_2 \sin(Im\lambda_1 t)] \\ x^2 = e^{Re\lambda_1 t}[c_1^* \cos(Im\lambda_1 t) + c_2^* \sin(Im\lambda_1 t)], \end{cases} \tag{1.14}$$

при $Re\lambda_1 < 0$ стремятся при $t \to +\infty$ к точке $(0,0)$. Это означает (асимптотическую) устойчивость равновесия по Ляпунову. При $Re\lambda_1 > 0$ и $t \to +\infty$ интегральные кривые уходят на бесконечность. Это неустойчивость равновесия.

Пример 1.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = x^1 - x^2 \\ \frac{dx^2}{dt} = 2x^1 + 3x^2. \end{cases} \tag{1.15}$$

Находим собственные числа

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Откуда $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Следовательно, равновесие $(0,0)$ – это неустойчивый фокус.

1.2. Одномерные динамические системы с одним параметром и их бифуркации

Рассмотрим одномерную динамическую систему, состояние которой определяется значением одной переменной $x \in \mathbb{R}$, управляемую одним параметром $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu). \tag{1.16}$$

Рассмотрим уравнение равновесий

$$f(x, \mu) = 0. \tag{1.17}$$

По заданному μ равновесие $x = x(\mu)$ находится однозначно как решение уравнения (1.18), т.е.

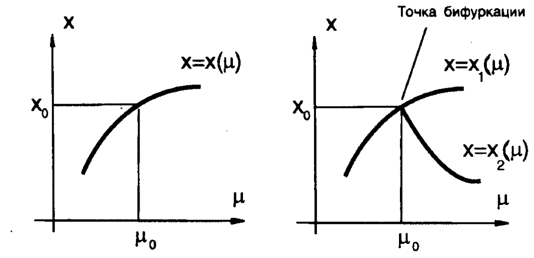
$$f(x(\mu), \mu) = 0,$$

если это разрешает так называемая теорема о неявной функции. При однозначном разрешении мы, меняя μ, получаем различные[4] равновесия $x = x(\mu)$, геометрически лежащие на одной (непрерывной) кривой (см. рис.1.6, a)). Однако если условия этой теоремы нарушены, а это означает, что в «точке» равновесия $(x, \mu) = (x_0, \mu_0)$ имеют место равенства:

$$f(x_0, \mu_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 0, \tag{1.18}$$

то равновесия лежат как минимум на двух различных (непрерывных) кривых, пересекающихся в точке (x_0, μ_0) (см. рис.1.6, b)). В точке (x_0, μ_0) происходит *бифуркация*, т.е. раздвоение (!) ветвей кривых равновесия.

[4]Каждое равновесие соответствует «своему» значению μ.



a) b)

Рис. 1.6: a) регулярная ветвь равновесий; b) бифуркация: две ветви равновесий.

Раздвоение появляется следующим образом. Если находиться на оси μ левее точки μ_0 и двигаться вправо, переходя точку μ_0, то, находясь на одной ветви кривой равновесий, мы на ней и останемся на рис.1.6, a), но раздвоимся на рис.1.6, b), поскольку появляются две разные ветви: $x = x_1(\mu)$ и $x = x_2(\mu)$.

Таким образом, уравнения (1.18) – это условия существования точки бифуркации среди равновесных состояний.

1.2.1. Типы точек бифуркации

Двойная точка бифуркации – это такая точка бифуркации (x_0, μ_0), через которую проходят две (гладкие) кривые (рис.1.7)

$$x = x_1(\mu), \quad x = x_2(\mu)$$

или

$$\mu = \mu_1(x), \quad \mu = \mu_2(x).$$

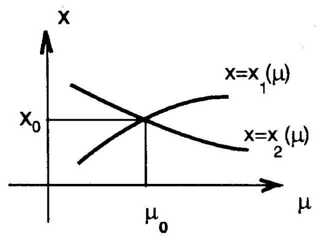


Рис. 1.7: Двойная точка бифуркации.

Это *две ветви* кривой равновесий. Кривая равновесий ветвится, раздваивается (бифурцирует).

Для двойной точки бифуркации выполняется неравенство

$$D = [f''_{x\mu}]^2(x_0, \mu_0) - f''_{xx}(x_0, \mu_0) f''_{\mu\mu}(x_0, \mu_0) > 0.$$

Экстремальная (двойная) точка бифуркации – это такая двойная точка бифуркации, у которой одна ветвь кривой равновесий, скажем, $x = x_2(\mu)$ имеет в точке (x_0, μ_0) касательную, параллельную оси x, и лежит по одну сторону от этой касательной (рис.1.8).

Обратим внимание на то, что при переходе параметра μ через значение μ_0, если идти слева направо по оси μ, у системы появляется возможность не «выбирать» единственным образом (однозначно) место (равновесие) на одной ветви, как это было при $\mu < \mu_0$, а находить «место под солнцем» уже на одной из трех ветвей, появляющихся при $\mu > \mu_0$. Какая из трех ветвей выбирается? На это ответ один – та, где равновесия устойчивы. А если на всех трех ветвях равновесия устойчивы? В этом случае **невозможно предсказать**, где окажется система!

Отсутствие однозначности, определенности в эволюции социальной системы, подверженной бифуркации данного типа, есть самое главное в теории бифуркации социальных систем.

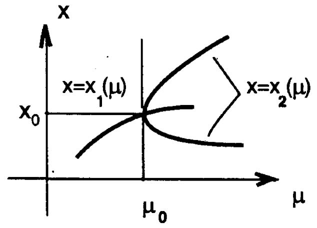


Рис. 1.8: Экстремальная точка бифуркации.

Точка возврата – это двойная точка бифуркации, для которой ветви имеют общую касательную в точке (x_0, μ_0) (рис.1.9).

Для точки возврата $D = 0$, но не все вторые производные $f''_{x\mu}, f''_{xx}, f''_{\mu\mu}$ в (x_0, μ_0) обращаются в нуль.

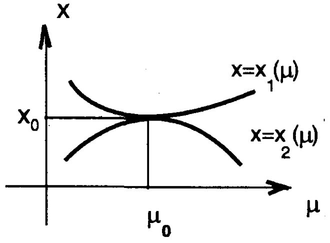


Рис. 1.9: Точка возврата.

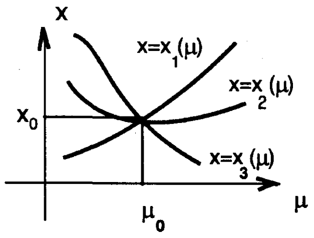


Рис. 1.10: Тройная точка бифуркации.

Тройная точка бифуркации – это такая точка бифуркации, для которой имеем три ветви у кривой равновесий (рис.1.10).

Для тройной точки бифуркации выполняются условия:

$$f''_{x\mu}(x_0, \mu_0) = f''_{xx}(x_0, \mu_0) = f''_{\mu\mu}(x_0, \mu_0) = 0.$$

Очевидно, что можно говорить о четверных, пятерных и т.д. точках бифуркации. Однако важнее выяснить наличие принципиальных различий между, скажем, двойными и четверными точками бифуркаций.

1.2.2. Типичность двойных точек бифуркации. Структурная устойчивость социальных систем

Подвергнем социальную систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) \tag{1.19}$$

внешним воздействиям:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) + R(x, \mu). \tag{1.20}$$

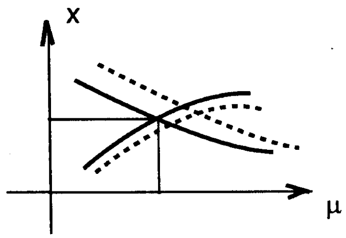


Рис. 1.11: Шевеление (пунктирные линии) двойной точки бифуркации не разрушает ее.

По существу, мы имеем новую социальную систему, которую при малом шевелении (возмущении) $R(x, \mu)$ следует считать *близкой* к системе (1.19).

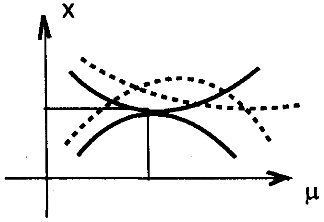


Рис. 1.12: Шевеление (пунктирные линии) точки возврата разрушает ее. Появляются две двойные точки бифуркации.

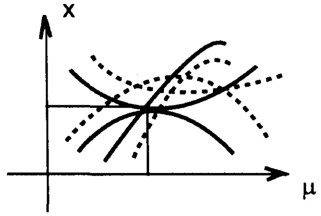


Рис. 1.13: Шевеление (пунктирные линии) тройной точки бифуркации разрушает ее. Появляются (три) двойные точки бифуркации.

Если система (1.19) имеет точку бифуркации (x_0, μ_0), то интересно знать: во-первых, обладает ли ею близкая социальная система

(1.20) и, во-вторых, если сохраняется, то того же типа эта бифуркация или тип меняется?

На рис.1.11 показано, что двойная точка бифуркации при малом шевелении может изменить свои координаты, но остается двойной точкой бифуркации. Сохранение двойной точки при малых шевелениях бифуркации говорит о ее *типичности* для социальных систем.

Однако точки возврата и тройные точки бифуркации разрушаются при малых шевелениях (рис.1.12, 1.13), они *нетипичны.* При их разрушении, как правило, появляются двойные точки бифуркации.

Социальная система называется *структурно устойчивой,* если при малых шевелениях сохраняется тип ее точек бифуркаций.

1.2.3. Основные задачи анализа эволюции социальных систем

Выделим три основные проблемы, требующие решения при анализе социальных динамических систем с управляющими параметрами:

- Нахождение *равновесных состояний, точек бифуркации,* определение их типа. Выделение равновесных ветвей.
- Установление *устойчивости равновесий;* изучение потери и приобретения устойчивости при прохождении точек бифуркации.
- Установление *структурной устойчивости* социальной динамической системы в среде близких социальных систем.

Важно помнить, что в точках бифуркации решающее значение имеют флуктуации, т.е. случайные процессы. Случайные воздействия (флуктуации) делают непредсказуемым ход эволюции социальной системы, преодолевающей точку бифуркации.

1.2.4. Смена устойчивости в точке бифуркации

Рассмотрим социальную динамическую систему с точкой бифуркации. Равновесия, лежащие на ветвях кривой равновесий до точки бифуркаци, могут быть устойчивыми (неустойчивыми), а после

прохождения точки бифуркации либо остаться устойчивыми, либо стать неустойчивыми. Полная картина *смены устойчивойсти* в случае двойной точки бифуркации дана на рис.1.14 (для точки возврата см. в [32, с.33]).

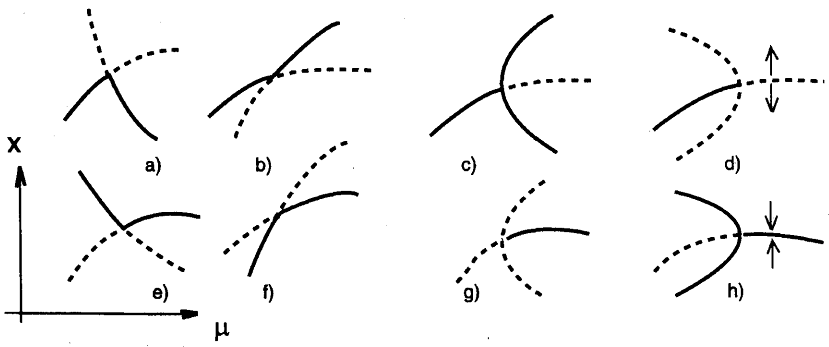


Рис. 1.14: Смена устойчивойсти в случае двойной точки бифуркации (сполошная линия – устойчивость, пунктирная – неустойчивость).

1.3. Реформы и структурная устойчивость

Если модель общества имеет внешние параметры, воздействие на которые возможно извне, то при изменении этих параметров общество может потерять равновесие, то есть состояние, в котором оно пребывало и которое было стабильным, и совершить переход к новому равновесию. Таких новых равновесий может быть много, но социальная система выберет рано или поздно то из них, которое устойчиво. Такой эпизод в эволюции социальной системы, как мы знаем, называют бифуркацией. Если среди новых равновесий устойчиво только одно, то будущее общества предсказуемо. Нечто подобное было описано в предыдущем параграфе. Но если новых устойчивых равновесий несколько, то будущее общества предсказать в общем-то невозможно. Такова цена потери устойчивости общественного равновесия.

Рассмотрим простейшую модель [18] социальной системы, на которой хорошо видна значимость понятия «структурная устойчивость», и демонстрируются непредсказуемые последствия бифуркации.

Пусть состояние социальной системы характеризуется уровнем интеграции $x(t)$, где $t > 0$ – время, и состояния с $x \geq 0$ отвечают «социализму», а состояния с $x < 0$ – «капитализму». Укреплению «социазлима» отвечает увеличение величины x; укреплению «капитализма» – уменьшение. Предположим, что состояние описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = kx^3 - mx + r, \tag{1.21}$$

где $k > 0$ – интенсивность усилий нового поколения группы «правителей» из правящей элиты, которые определяют уровень жизни в обществе; m – интенсивность действий группы «реформаторов», или революционеров, которые желают изменить и улучшить общественное состояние (повысить уровень интеграции x); r – интенсивность ведущихся в обществе реформ (их вполне могут проводить и власти). При $r < 0$ – это действия по улучшению управления общества в рамках политической системы: а при $r > 0$ – действия ведутся на разрушение структуры социальной системы. Реформирование должно уменьшать скорость развития уровня интеграции x, то есть притормаживать действия «управленцев». Здоровый консерватизм сдерживает субъективизм.

Предположим, что $k = const$, поскольку все поколения «правителей» ведут себе в принципе одинаково.

Уравнение (1.21) с двумя «внешними» параметрами m и r не имеет бифуркации при $r \neq 0$ [32, с.41,45]. Если $r < 0$ для начального значения $x(0) > 0$ или, второй случай, $r > 0$ для начального значения $x(0) < 0$, то социальная система в своей эволюции не изменит своего качественного состояния, то есть социализм остается социализмом, и соответственно капитализм – капитализмом (см. рис.1.15, 1.16).

Это говорит о том, что реформы обуздывают развитие интегративных сил в обществе. Реформы обеспечивают эволюцию общества и никак не революцию. Более того, они препятствуют совершению революций.

При $r = 0$ уравнение (1.21) с одним уже параметром m имеет бифуркацию, если m, меняясь, скажем, от -1 до $+1$, пройдет через значение 0 (см. рис. 1.17).

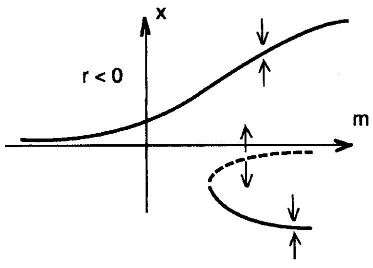


Рис. 1.15: Развитие социализма.

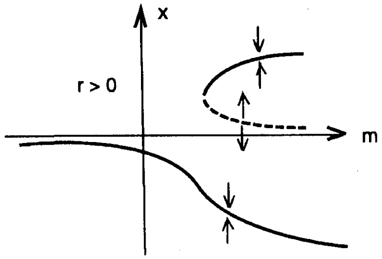


Рис. 1.16: Развитие капитализма.

Значит, наращивающиеся усилия группы «реформаторов» в условиях отсутствия реформ r могут дать непредсказуемый результат, ибо при $m < 0$ у системы было только одно (устойчивое) социалистическое равновесие $x = 0$, а при $m > 0$ их три: устойчивый обновленный социализм, неустойчивый старый социализм и устойчивый капитализм. Где окажется система, сказать невозможно.

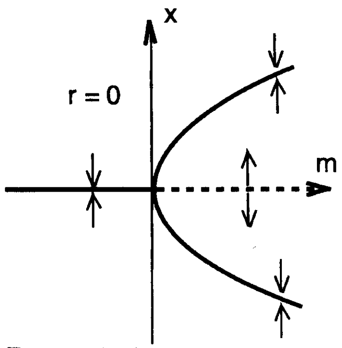


Рис. 1.17: Бифуркация: непредсказуемость эволюции.

Система (1.21) при $r \neq 0$ структурно устойчива. При $r = 0$ имеем структурно неустойчивую систему. Шевеление – изменения параметра r. Это говорит о том, что реформы ($r \neq 0$) являются фактором, разрушающим саму возможность бифуркации системы.

Следовательно, если в обществе был «застой» $r = 0$, т.е. отсутствовали какие-либо непрерывно ведущиеся реформы, то действия группы «реформаторов», пусть даже направленные во благо, могут дать обратный эффект. Вместо совершенствования социализма произойдет переход к капитализму. Не это ли случилось в России с группой М.С. Горбачева?

1.4. Численность населения

Рассмотрим уравнение, описывающее рост численности популяции (населения) и называемое *логистическим*:

$$\frac{dx}{dt} = [(\mu - \mu_0) - k(x - x_0)](x - x_0)], \qquad (1.22)$$

где

x – численность популяции (x_0 – численность при $t = 0$);

$\mu > 0$ – внутренняя скорость роста популяции без учета лимитирующего влияния среды; μ_0 – фиксированное значение параметра;

$k = const > 0$ – вклад единицы популяции в уменьшение внутренней скорости роста популяции вследствие лимитирующего ограничения среды (к примеру, количество пищевых ресурсов).

Уравнение равновесий дает два решения (рис.1.18)

$$x = x_0 \quad \text{и} \quad x = x_0 + (\mu - \mu_0)/k.$$

Бифуркация. Точка бифуркации – это решение $x = x_0, \mu = \mu_0$ системы (1.21)

$$\begin{cases} f(x,\mu) = [(\mu - \mu_0) - k(x - x_0)][x - x_0] = 0 \\ f'_x(x,\mu) = (\mu - \mu_0) - 2k(x - x_0) = 0 \\ f'_\mu(x,\mu) = x - x_0 = 0. \end{cases} \qquad (1.23)$$

Поскольку

$$D = \{[f''_{x\mu}]^2 - f''_{xx} f''_{\mu\mu}\}|_{\substack{x=x_0 \\ \mu=\mu_0}} = 1 - 0 \cdot (-2k) = 1 > 0,$$

то имеем двойную точку бифуркации.

Устойчивость равновесий. Для того чтобы установить устойчивость равновесий, используем теорему 1.1.

Имеем, раскладывая правую часть логистического уравнения в ряд Тейлора в «точке» равновесия $(x(\mu), \mu)$,

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{f(x(\mu),\mu)}_{=0} + f'_x(x(\mu),\mu)(x - x(\mu)) + ...$$

$$= f'_x(x(\mu),\mu)(x - x(\mu)) + ...$$

Как следует из теоремы 1.1, если $f'_x(x(\mu),\mu) < 0$, то равновесие устойчиво.

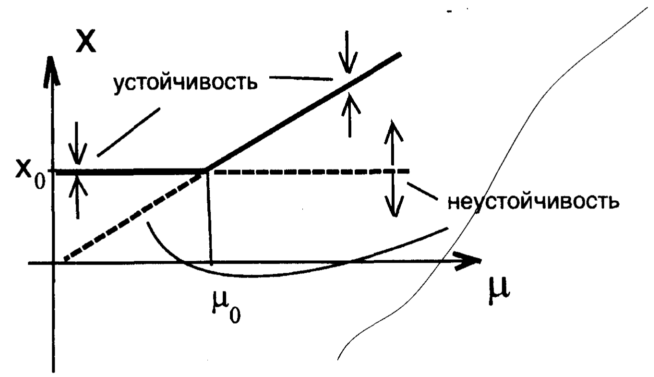


Рис. 1.18: Бифуркация: две ветви равновесий для логистического уравнения. Пунктирная линия – неустойчивые равновесия; сплошная линия – устойчивые равновесия.

Для равновесий $x = x_0$

$$f'_x(x_0,\mu) = \mu - \mu_0.$$

Следовательно, равновесия с $x = x_0$ устойчивы при $\mu < \mu_0$ и неустойчивы при $\mu > \mu_0$ (рис.1.18).

Для равновесия $x = x_0 + (\mu - \mu_0)/k$

$$f'_x(x_0,\mu) = \mu - \mu_0 - 2k(x - x_0) = \mu - \mu_0 - 2(\mu - \mu_0) = -(\mu - \mu_0).$$

Поэтому равновесия, лежащие на $x = x_0 + (\mu - \mu_0)/k$, неустойчивы при $\mu < \mu_0$ и устойчивы при $\mu > \mu_0$ (рис.1.18).

Вывод. Таким образом, популяция, имея численность x_0 при $\mu < \mu_0$ и находясь в равновесном состоянии, при увеличении значения параметра μ, сразу после перехода через значение $\mu = \mu_0$ уже не может находиться в состоянии с неизменной численностью, поскольку эти равновесия становятся неустойчивыми. Популяция неизбежно «переместится» в устойчивое равновесие, лежащее на ветви $x = x_0 + (\mu - \mu_0)/k$. Это перемещение сопровождается ростом численности популяции.

1.5. Бифуркация Андронова-Хопфа

Помимо стационарных равновесий возможны периодические равновесия. *Периодическое равновесие* – это решение $x = \phi(t,\mu) \in \mathbb{R}^n$

уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \tag{1.24}$$

получаемое при фиксированном параметре μ и удовлетворяющее условию периодичности:

$$\phi(t + T, \mu) = \phi(t, \mu),$$

где $T > 0$ конкретное число, называемое периодом.

Периодические равновесия могут рождаться из стационарных равновесий при изменении управляющего параметра μ.

1.5.1. «Колония-метрополия» – пример рождения периодического равновесия

Рассмотрим отношение колонии и метрополии. Это двумерная социальная система, описываемая двумя переменными x^1, x^2 и параметром $\mu \in \mathbb{R}$. Значения переменных x^1, x^2 – это некоторый экономический показатель, характеризующий уровень благосостояния населения колонии и метрополии соответственно. Будем считать, что метрополия тормозит развитие колонии. При написании уравнения для экономики колонии это учитывается добавлением в правую часть слагаемого $(-x^2)$. Напротив, ресурсы колонии способствуют развитию метрополии. Следовательно, в уравнении для экономики колонии это учитывается добавлением в правую часть слагаемого $(+x^1)$. В действительности важен еще знак показателя x^i. Отрицательное значение для x^i означает серьезные проблемы, которые, как это ни странно, будем считать благоприятными для колонии и неприятным событием для метрополии.

Экономики колонии и метрополии развиваются отчасти за счет своих внутренних ресурсов, и это учитывается тем, что dx^i/dt пропорциональна x^i с одним и тем же[5] коэффициентом μ.

То, что взаимоотношения колонии и метрополии имеют и более сложный, *нелинейный* характер, учитывается за счет слагаемого $cx^i(x^{1^2} + x^{2^2})$, $c \in \mathbb{R}$.

[5]Одинаковый коэффициент – это идеализация, которая говорит, что, в принципе, и колония и метрополия могли бы существовать независимо друг от друга.

В итоге имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = \mu x^1 - x^2 + cx^1(x^{1^2} + x^{2^2}) \\ \dfrac{dx^2}{dt} = x^1 + \mu x^2 + cx^2(x^{1^2} + x^{2^2}), \end{cases} \tag{1.25}$$

где $c \neq 0$.

Полагая $z = x^1 + ix^2$, перепишем систему (1.25) в виде

$$\frac{dz}{dt} = z(i + \mu + cz\bar{z}). \tag{1.26}$$

Пусть $\rho = z\bar{z} = x^{1^2} + x^{2^2} \geq 0$. Тогда из (1.26) имеем уравнение

$$\frac{d\rho}{dt} = 2\rho(\mu + c\rho). \tag{1.27}$$

Из (1.27) получаем два равновесия:

$$\rho = 0 \quad \text{и} \quad \rho = -\mu/c$$

Случай $c < 0$.
Это означает, что нелинейная часть взаимодействия притормаживает экономики колонии и метрополии в то время, когда они успешны.

Имеем два равновесия $\rho = 0$ и $\rho = -\mu/c$ при $\mu > 0$ и одно $\rho = 0$ при $\mu < 0$. Равновесие $\rho = 0$ – это фокус; устойчивый при $\mu < 0$ и неустойчивый при $\mu > 0$. Равновесие $\rho = -\mu/c$ – это особое равновесие, называемое *предельным циклом*. Такие равновесия не есть точки, как для линейных систем из §1.1.5, а являются периодическими интегральными кривыми. На фазовом портрете в плоскости (x^1, x^2) цикл представляет окружность (рис.1.19).

При изменении управляющего параметра μ от значения $\mu < 0$ к значению $\mu > 0$ наблюдаем особый тип бифуркации, называемый *бифуркацией рождения цикла* или *бифуркацией Андронова-Хопфа*. Она заключается в том, что исчезает устойчивое (стационарное) равновесие $\rho = 0$, а вместо него появляется устойчивое периодическое равновесие – предельный цикл (рис.1.20). Происходит возбуждение *автоколебаний* в динамике социальной системы.

При этом «старое» стационарное равновесие остается и при $\mu > 0$, но оно уже становится неустойчивым. Система не может долго в нем находиться; она обязательно переместится к устойчивому равновесию, в данном случае – это цикл.

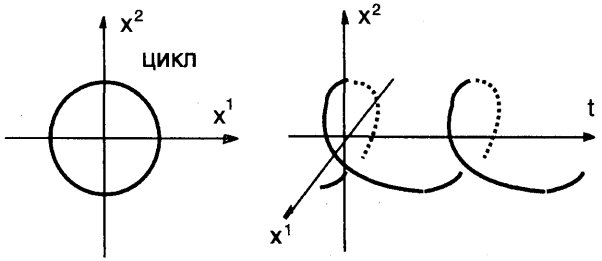


Рис. 1.19: Цикл – периодическое равновесие.

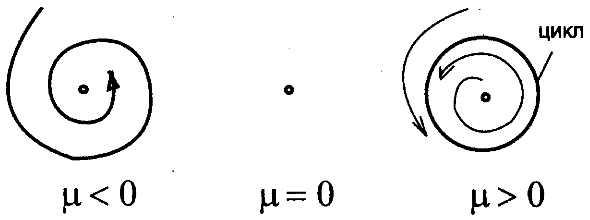


Рис. 1.20: Бифуркация рождения устойчивого цикла.

Интерпретация модели. До завоевания колонии, т.е. при $\mu < 0$, и метрополия и колония находились в стационарном равновесии $x^1 = x^2 = 0$. Затем захват колонии привел к рождению устойчивого цикла: экономики колонии и метрополии претерпевают периодические спады и подъемы. Но система «колония-метрополия» устойчива.

Случай $c > 0$.
Это означает, что нелинейная часть взаимодействия «ускоряет» экономики колонии и метрополии в то время, когда они успешны. Имеем два равновесия $\rho = 0$ и $\rho = -\mu/c$ при $\mu < 0$ и одно $\rho = 0$ при $\mu > 0$. Равновесие $\rho = 0$ – это фокус; устойчивый при $\mu < 0$ и неустойчивый при $\mu > 0$. Равновесие $\rho = -\mu/c$ – это *неустойчивый цикл*.

При изменении управляющего параметра от значения $\mu < 0$ к $\mu > 0$ наблюдаем исчезновение неустойчивого цикла (рис.1.21). Однако при этом устойчивое стационарное равновесие становится неустойчивым. Система естественно стремиться перейти к какому-либо устойчивому равновесию. Однако в данном случае мы его не

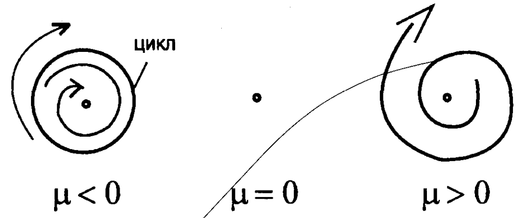


Рис. 1.21: Исчезновение неустойчивого цикла.

находим. Модель предсказывает только уход «на бесконечность» (рис.1.21), в которой она «найдет» желанное устойчивое равновесие.

Интерпретация модели. Знак параметра c заставляет ускоренно развиваться обе экономики. После завоевания колонии экономическое состояние колонии и метрополии существовали во временном неустойчивом, но взаимовыгодном периодическом режиме спадов и подъемов. В какой-то момент обе достигли уровня самодостаточности (μ изменило знак). Временный «союз» распадается с неизвестными последствиями и для колонии, и для метрополии.

1.5.2. Теорема Андронова-Хопфа

Приведем двумерный вариант [36, с.157] теоремы, гарантирующей рождение периодических равновесий. Речь идет о системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = f_1(x^1, x^2, \mu) \\ \\ \dfrac{dx^2}{dt} = f_2(x^1, x^2, \mu). \end{cases} \tag{1.28}$$

Многомерный вариант можно найти в [53, с.86].

Теорема 1.2. *Пусть $f_1(0,0,\mu) = f_2(0,0,\mu) = 0$ при всех μ. Допустим, что матрица*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x^1}(0,0,\mu) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x^2}(0,0,\mu) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x^1}(0,0,\mu) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x^2}(0,0,\mu) \end{pmatrix}$$

имеет комплексно-сопряженное собственное число $\lambda(\mu)$ такое, что Re $\lambda(\mu) > 0$ при $\mu > 0$. Предположим, что

$$\frac{dRe\ \lambda(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=0} > 0.$$

Тогда

1) существуют функция $\mu = \mu(\varepsilon)$, зависящая от параметра ε, $\mu(0) = 0$, и периодическое равновесие $x = \phi(t, \mu(\varepsilon))$ с периодом $T = 2\pi/|\lambda(\mu(\varepsilon))|$, радиус которого растет как $\sqrt{|\mu(\varepsilon)|}$;

2) если стационарное равновесие 0=(0,0) – аттрактор при $\mu = 0$, то $\mu(\varepsilon) > 0$ и периодические равновесия являются устойчивыми.

Глава 2

Теория катастроф

2.1. Социальное поле

Одним из самых эксплуатируемых понятий в науке является понятие *поля*. Очень часто можно слышать об энергетическом поле, информационном поле, этническом поле, психическом (ментальном) поле и социальном поле. Это понятие пришло из физики, где говорят о гравитационном поле и электромагнитном поле. Физики имеют точное определение того, что они понимают под полем. Что в таком случае следует понимать под *социальныи полем*?

Теорию поля применительно к социальным наукам развивал психолог Курт Левин. Он писал: «Основной инструмент для анализа групповой жизни – представление группы и ее ситуации как «социального поля». Это означает, что социальное событие рассматривается как происходящее в (и являющееся результатом совокупности) сосуществующих социальных объектов, таких, как группы, подгруппы, члены, барьеры, каналы коммуникаций и т.п. Одна из фундаментальных характеристик этого поля – относительная позиция объектов, которые являются частями поля. Эта относительная позиция представляет структуру группы и ее экологическую[1]

[1] *Экология* [гр. oikos дом, родина + ...*логия*] – 1) наука, изучающая взаимоотношения животных, растений, микроорганизмов между собой и с окружающей средой; 2) *э. человека, социальная э.* – наука, рассматривающая проблемы взаимоотношений человеческого общества и окружа-

обстановку. Она также отражает основные возможности передвижения внутри поля» [45, с.226]).

Для более краткой характеристики понятия поля Левин использовал следующее определения поля, принадлежащее Эйнштейну [45, с.265].

> *Совокупность сосуществующих фактов*[2]*, которые понимаются как взаимозависимые, называется* **полем**.

Прокомментируем абстрактное определение поля, данное Эйнштейном, перефразируя другое его утверждение: все факты, взятые вместе, создают в окружающем *жизненном пространстве группы* определенное состояние, которое, в свою очередь, производит характерное воздействие на определенные объекты, появляющееся в данном жизненном пространстве. Это состояние пространства и есть *социальное поле.*

Каковы упомянутые объекты, на которые воздействует социальное поле? Это зависит от типа соответствующей социальной системы, для описания свойств которой и привлекается теория поля или полевые модели. К примеру, этническое поле обнаруживается по поведению определенного типа индивидов, называемых в теории этнических систем Гумилёва пассионариями [19]. В случае гендерной системы, описывающей процесс образование семьи [21], поле, названное «запахом денег», сказывается на поведении женщин. Другими словами, женщины являются теми «пробными зарядами», которые обнаруживают данное поле.

«Полевая теория, как правило, считает полезным начинать с характеристики ситуации в целом... Такой метод предполагает, что существует нечто вроде свойств поля в целом... Некоторые из этих общих свойств – например, величина «пространства свободного движения» или «атмосфера дружелюбия» – характеризуются терминами, которые, возможно звучат очень ненаучно для уха человека, привыкшего думать на языке физики. Однако если этот человек на мгновение задумается о фундаментальном значении, которое имеет поле силы тяжести, электрическое поле или величина давления для физических событий, он будет меньше удивлен, обнаружив

ющей среды.

[2] *Факт* – 1) действительное, невымышленное происшествие, событие, явление; 2) действительность, реальность, то, что объективно существует.

похожую значимость проблем атмосферы в психологии. К тому же можно вполне точно определить и измерить психологические атмосферы... Каждый ребенок чувствителен даже к небольшим изменениям в социальной атмосфере, как, например, степени дружелюбия или безопасности. Учитель знает, что успех преподавания французского языка или любого предмета в значительной мере зависит от атмосферы, которую он может создать» [45, с.84].

Поле в социологии (и психологии) – это то, что обеспечивает взаимосвязь различных частей *жизненного пространства* изучаемой группы (соотв.: индивида). Жизненное пространство определяется так, чтобы в любой данный момент оно включало все факты, которые обладают существованием, и исключало те, которые не обладают существованием для данной группы индивидов. При этом существование приписывается всему, что оказывает демонстрируемое воздействие [45, с.12-13].

Математически поле задается некоторой функцией $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенной на *фазовом пространстве* $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющей *уравнению поля.*

2.2. Динамическая система в социальном поле

Будем предполагать, что динамическая социальная система, состояние которой описывается некоторой переменной $\vec{x} = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$ находится в «силовом» социальном поле, которое задается функцией $V(\vec{x}, \vec{u})$, где $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$ – k-мерный управляющий параметр.

Будем описывать нашу социальную систему уравнением вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -\nabla V(\vec{x}, \vec{u}), \qquad (2.1)$$

где

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial V}{\partial x^n}\right).$$

Поставим перед собой задачу описать *все наиболее типичные* социальные поля $V(\vec{x}, \vec{u})$. Эту задачу будем решать при предположении, что управляющих параметром не более 4, т.е. $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$, $k \leq 4$.

2.3. Семь катастроф Рене Тома

Точка $(\vec{x_0}, \vec{u_0})$ называется *критической* для поля $V(\vec{x}, \vec{u})$, если

$$\nabla V(\vec{x_0}, \vec{u_0}) = 0.$$

Введем множество в рассмотрение критических точек

$$M_V = \{(\vec{x}, \vec{u}) : \nabla V(\vec{x}, \vec{u}) = d_{\vec{x}} V(\vec{x}, \vec{u}) = 0\}.$$

Критическая точка $(\vec{x_0}, \vec{u_0})$ является *вырожденной*, если

$$d^2_{\vec{x}} V(\vec{x_0}, \vec{u_0}) = 0$$

или

$$det H(\vec{x_0}, \vec{u_0}) = 0,$$

где

$$H(\vec{x_0}, \vec{u_0}) = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}(\vec{x_0}, \vec{u_0}) \right\|.$$

Теорема 2.1. *Пусть для вырожденной критической точки поля* V *собственные числа матрицы* $H(\vec{x_0}, \vec{u_0})$ $\lambda_1(\vec{u_0}) = ... = \lambda_l(\vec{u_0}) = 0$, $l \leq n$. *Тогда с помощью замены координат вида*

$$\vec{y} = (y_1(\vec{x}, \vec{u}), ..., y_l(\vec{x}, \vec{u}), y_{l+1}(\vec{x}), ..., y_n(\vec{x})) \tag{2.2}$$

поле можно привести к виду

$$V(\vec{x}, \vec{u}) = f(y_1(\vec{x}, \vec{u}), ..., y_l(\vec{x}, \vec{u})) + \sum_{j=l+1}^{n} \lambda_j(\vec{u})[y_j(\vec{x})]^2.$$

Доказательство см.[91, 128-129].

Теорема 2.2. (Рене Том о семи катастрофах.) *В условиях теоремы* 2.1 *при* $k \leq 4$ *существует замена переменных* (2.2) *такая, что*

$$V(\vec{x}, \vec{u}) = G_l(\vec{x}) + P_{lk}(\vec{x}, \vec{u}) + \sum_{j=l+1}^{n} \lambda_j y_j^2, \tag{2.3}$$

где функции G_l, P_{lk} *даны в табл.*2.1 *(с заменой* $\vec{y}$*):*

l	k	G_l	P_{lk}	**Название катастрофы**
1	1	x^3	$u_1 x$	Складка
1	2	x^4	$u_1 x^2 + u_2 x$	Сборка
1	3	x^5	$u_1 x^3 + u_2 x^2 + u_3 x$	Ласточкин хвост
1	4	x^6	$u_1 x^4 + u_2 x^3 + u_3 x^2 + u_4 x$	Бабочка
2	3	$x^3 + y^3$	$u_1 xy + u_2 x + u_3 y$	Гиперболическая омбилическая точка
2	3	$x^3 - xy^2$	$u_1(x^2 + y^2) + u_2 x + u_3 y$	Эллиптическая омбилическая точка
2	4	$x^2 y + y^4$	$u_1 x^2 + u_2 y^2 + u_3 x + u_4 y$	Параболическая омбилическая точка

Доказательство см.[91].

Теорема 2.2 описывает социальные поля, зависящие от не более чем четырех управляющих параметров и имеющие вырожденные критические точки. Такие поля содержат *катастрофы*, т.е. скачкообразные изменения равновесных состояний социальной системы при малых изменениях управляющих параметров, когда происходит пересечение границ так называемых *бифуркационных множеств*.

Рис. 2.1: Катастрофы сборки (одна точка сборки), ласточкин хвост (две точки сборки) и бабочка (три точки сборки).

Графическое представление о катастрофах сборки, «ласточкин хвост» и «бабочка» можно получить, разглядывая [3] рис.2.1. Ниже мы изучим более подробно катастрофу сборки и «ласточкин хвост».

[3]Рис. с сайта http://www.worthhall.demon.co.uk/theory/chen.htm

2.4. Катастрофа сборки

Для сборки

$$V(x,u,v) = x^4 - ux^2 + vx.$$

Рассмотрим множества

$$M_V = \{(x,u,v) : \nabla V = 4x^3 - 2ux + v = 0\},$$

$$S_V = \{(x,u,v) \in M_V : d^2V = 12x^2 - 2u = 0\}$$

и бифуркационное множество

$$B_V = \{(u,v) \in prS_V : 27v^3 = 8u^3\}.$$

Заметим, что B_V – это проекция множества S_V на плоскость (u,v) (рис.2.2)

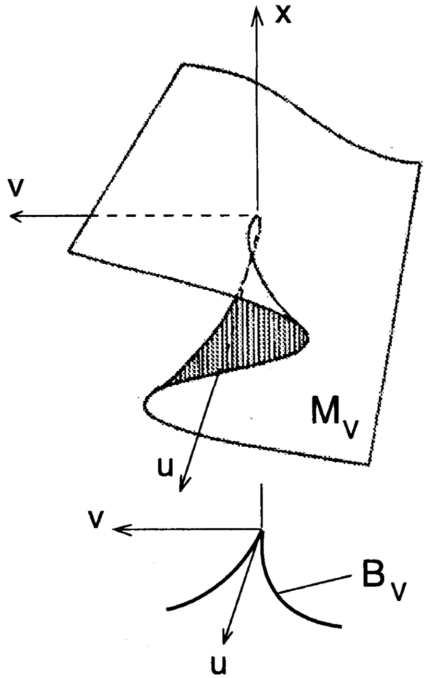


Рис. 2.2: Катастрофа сборки.

и его уравнение получается подстановкой уравнения, задающего S_V в уравнение для M_V:

$$4x^3 - 2ux + v = 0 \sim 2x(2x^2 - u) = -v \sim 4x^2(2x^2 - u)^2 = v^2 \sim$$

$$\sim \frac{4}{6}u(\frac{u}{3} - u)^2 = v^2 \sim \frac{4}{6}\frac{4}{9}u^3 = v^2 \sim 8u^3 = 27v^2.$$

Точки, лежащие на поверхности M_V – это критические точки функции $V_{(u,v)}(x) = V(x,u,v)$, т.е. это потенциально возможные точки максимума или минимума данной функции. Точки перегиба принадлежат множеству S_V и проецируются на бифуркационное множество. Следовательно, фиксируя (u,v) и рисуя график функции $V_{(u,v)}(x)$, мы имеем ситуацию, изображенную на рис.2.3.

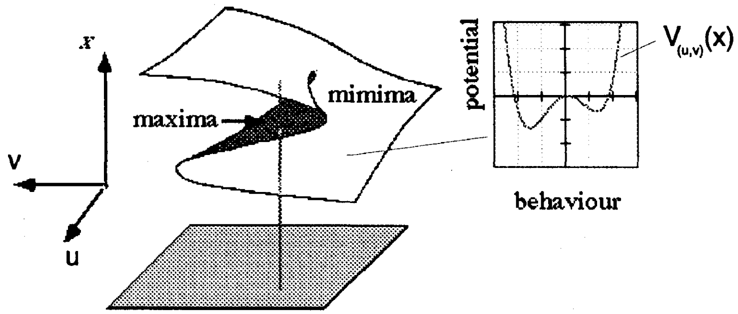


Рис. 2.3: Катастрофа сборки.

Два минимума у функции $V_{(u,v)}(x)$ – два «предпочтительных»[4] состояния равновесия, которыми обладает социальная система. Например, это две супердержавы в социально-политическом поле.

Если теперь начать обходить на плоскости (u,v) по кругу точку $(0,0)$, то будем наблюдать (см. рис.2.4) появление и исчезновение максимумов и минимумов у функции $V_{(u,v)}(x)$. Обращаясь к нашему примеру, можно скзать, что происходит крушение одной из супердержав, временное единовластие оставшейся и рождение новой супердержавы, подавляющей постепенно оставшуюся от прежних времен «победившую» супердержаву. Иначе говоря, имеем то, что Рене Том назвал *петлей охоты* [13, с.200-201].

[4]Предполагается, что максимум не является «предпочтительным» равновесием.

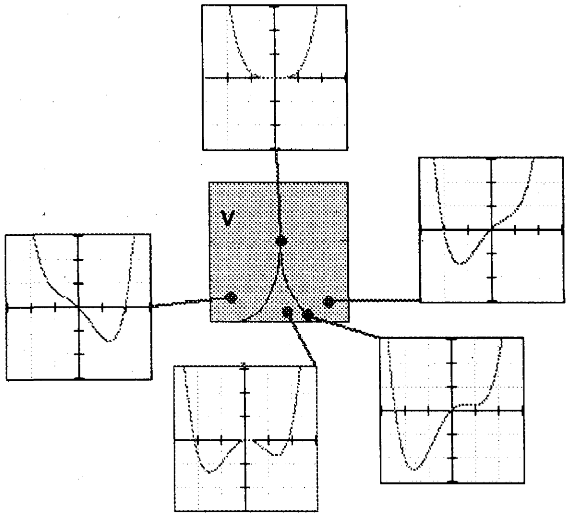


Рис. 2.4: Динамика появления и исчезновения максимумов и минимумов у функции $V_{(u,v)}(x)$.

2.5. Примеры катастрофы сборки

2.5.1. Криминальная катастрофа

Рассмотрим систему, описывающую скорость роста плотности преступности в городе:

$$\frac{dx}{dt} = (u - x^2)x - v, \tag{2.4}$$

где

x – плотность преступности в городе (*чел/км*^{2});

u – внутренняя (естественная[5]) скорость роста плотности преступности без лимитирующего ограничения среды;

v – скорость вымирания отдельных видов преступности, борьба с преступностью.

Уравнение (2.4) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = -(x^3 - ux + v) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{u}{2}x^2 + vx\right). \tag{2.5}$$

[5]Преступники «рождают» преступников.

Отсюда видно, что эволюция преступности в городе характеризуется социальным полем $V(x,u,v) = x^4/4 - ux^2/2 + vx$, допускающим катастрофу сборки (рис.2.5).

Член $(-x^2)$ – это лимитирующее внутреннюю скорость роста преступности влияние среды, возникающее за счет раздела территории города между преступными группировками.

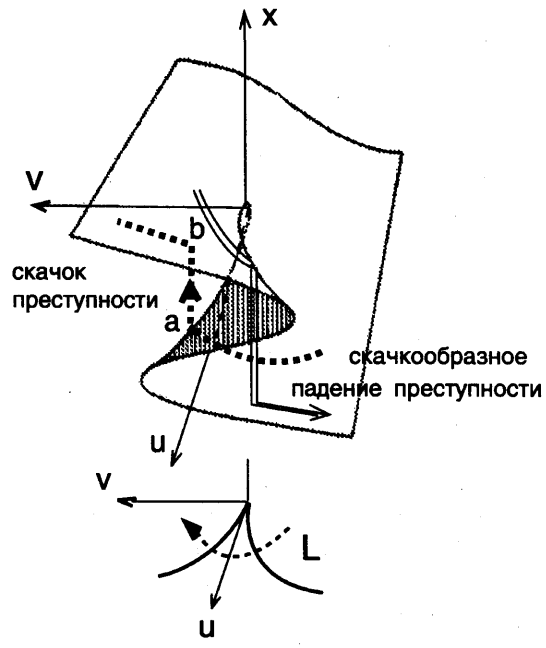


Рис. 2.5: Криминальная катастрофа.

Если двигаться в пространстве управляющих параметров u, v вдоль контура L в обратном указанному на рис.2.5 направлении, то при малом росте u и на фоне ослабления борьбы с преступностью возможен скачкообразный спад преступности. Почему это происходит? Возможно, потому, что мы имеем дело с ситуацией в обществе, когда новых видов преступления не возникает (стабилизация), законодательная база совершенна, опираясь на нее, органы правопорядка работают эффективно, в силу этого не стоит удивляться тому, что усилия привели к ожидаемому резкому спаду преступности.

Однако если двигаться в пространстве управляющих параметров u, v вдоль контура L в указанном на рис.2.5 направлении, то можно увидеть, что при мало меняющемся u и на фоне *роста скорости вымирания отдельных видов преступности и борьбы с преступностью* возможен скачкообразный рост преступлений. Прогноз достаточно неожиданный. Возможно парадоксальное объяснение: преступниками становятся те, кто должен бороться с преступностью! Это криминальная катастрофа!

2.5.2. Тюремные бунты

Тюремный бунт – это катастрофа сборки, описываемая социальным полем [6] [64, с.525]

$$V(x, u, w) = x^4 - ux^2 + v,$$

где

x – волнения, беспорядки;

u – разобщенность (чувство разочарования и безысходности, бедственное положение);

v – напряженность (взаимная отчужденность, отсутствие общения, разбиение на два лагеря).

Бунт происходит при пересечении линии бифуркации при росте напряженности и усилении разобщенности.

Ясно, что для того, чтобы на практике осуществлять профилактические мероприятия по предупреждению тюремных бунтов, нужны рекомендации для тюремного персонала. Эти рекомендации основываются на выработанных *мерах* по определению степени разобщенности и напряженности. Например, могут быть приняты следующие меры:

- Мера разобщенности – число ежедневных обращений к врачу, жалобы на недомогание во время работы, санкции начальника тюрьмы, благотворительные посещения.

- Мера напряженности – число заключенных в карцере, число заключенных, просящих об их отселении, и др.

[6] Zeeman E.C., Hall C., Harrison P., Marriage H., Shapland P. A model for institutional disturbancees // Br. J. Math. Statist Psych. 1976, V.29. P.66-80.

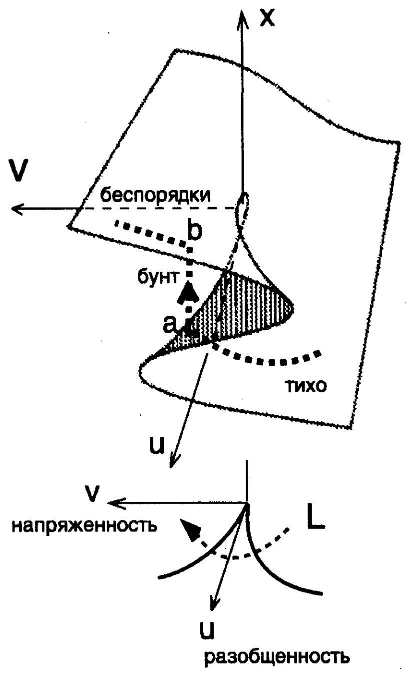


Рис. 2.6: Тюремный бунт.

2.5.3. Крах биржи

Один из самых распространенных примеров теории катастроф – это описание биржевых операций[7].

Состояние биржи описывается переменной x – индексом биржи, к примеру индексом Доу-Джонса.

Управляющие параметры:

u – доля денежных средств, направленных на спекулятивные операции;

[7] Zeeman E.C. On the unstable behaivior of stock exchanges // J. Math. Econ. 1974. V.1. P.39-49.

v – дополнительный спрос на акции со стороны основных покупателей.

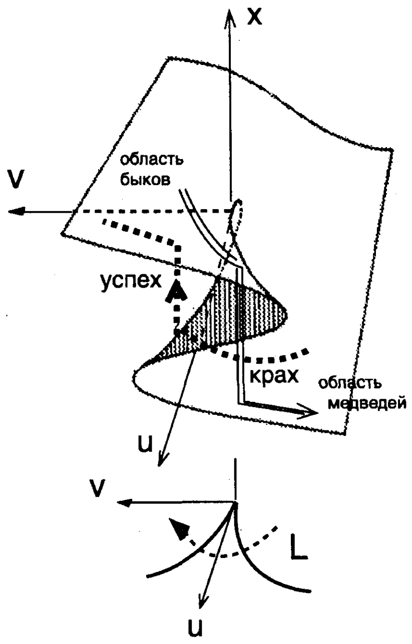


Рис. 2.7: Биржевые катастрофы.

Крах биржи – это скачкообразное падение индекса биржи. Он происходит, если в области быков[8] наблюдается тенденция к падению спроса на акции со стороны основных покупателей, либо при увеличении доли средств, идущих на спекулятивные операции.

Успех биржи – скачкообразный рост индекса биржи. Имеет место при дополнительном спросе на акции.

[8] «Быки» и «медведи» – названия для людей, играющих на повышение или понижения курса акций соответственно.

2.6. Катастрофа «ласточкин хвост»

Для катастрофы «ласточкин хвост» потенциал

$$V(x,u,v) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx.$$

Рассмотрим множества

$$M_V = \{(x,u,v,w) : \nabla V = 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0\},$$

$$S_V = \{(x,u,v,w) \in M_V : d^2V = 20x^3 + 6ux + 2v = 0\}$$

и бифуркационное множество

$$B_V = \{(u,v,w) \in prS_V : \exists x(5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0 \\ \& \ 20x^3 + 6ux + 2v = 0\}.$$

Множество B_V – это проекция множества S_V на плоскость (u,v,w). Оно изображено на (рис.2.8)

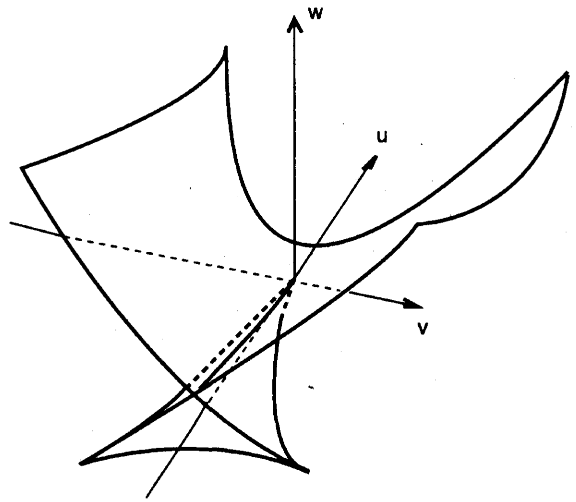


Рис. 2.8: Бифуркационное множество B_V для катастрофы «ласточкин хвост».

Фиксируя управляющие параметры (u,v,w) и рисуя график функции $V_{(u,v,w)}(x)$, мы имеем ситуацию, изображенную на рис.2.9.

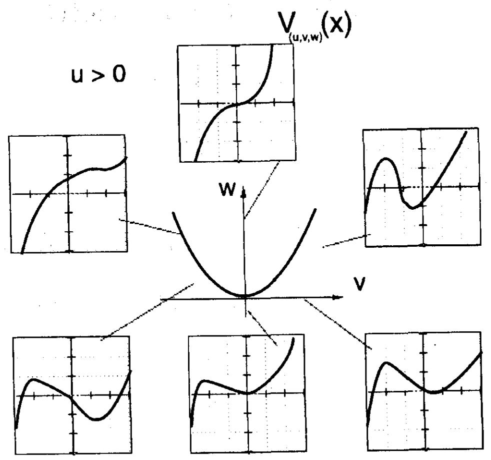


Рис. 2.9: Катастрофа «ласточкин хвост». Динамика появления и исчезновения максимумов и минимумов у функции $V_{(u,v,w)}(x)$ в сечении $u = const > 0$. При переходе через B_V рождается или умирает равновесие.

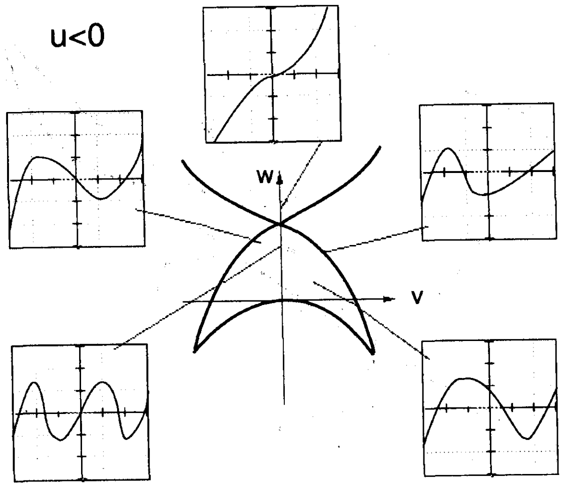


Рис. 2.10: Катастрофа «ласточкин хвост». Динамика появления и исчезновения максимумов и минимумов у функции $V_{(u,v,w)}(x)$ в сечении $u = const < 0$. При переходе через B_V рождается (умирает) одно или два равновесия.

Глава 3

Синергетика

Синергетика[1] – дисциплина, в которой исследуется совместное действие многих подсистем, в результате которого возникает структура и соответствующее функционирование (Г.Хакен, основатель этой теории).

Синергетику часто определяют как науку о самоорганизации. При этом под самоорганизацией понимается *самопроизвольное усложнение формы* или в более общем случае структуры системы при медленном и плавном изменении ее параметров. Нобелевский лауреат Илья Пригожин предложил называть самопроизвольно возникающие образования *диссипативными структурами.*

Одной из главных задач синергетики является выяснение законов построения организации, возникновения упорядоченности. В отличие от кибернетики здесь акцент делается не на процессах управления и обмена информацией, а на принципах построения организации, ее возникновении, развитии и самоусложнении [44].

Нетрудно заметить, что теория катастроф (гл.2) или более общая теория – теория бифуркаций (гл.1), входящая в теорию динамических систем, являются составной частью синергетики. В самом деле, достаточно вспомнить, что в точке бифуркации вместо старого состояния равновесия происходит зарождение одного или нескольких новых состояний равновесия социальной системы. Учитывая, что это является следствием малых изменений *скрытых,*

[1] Synergetikos [гр.] – совместный, согласованно действующий.

неизвестных параметров, да еще в условиях непредсказуемости хода эволюции системы, можно говорить о самоорганизации, или самоперестройке, состояния социальной системы.

Однако теория катастроф описывает социальные процессы, основываясь на некотором фиксированном числе потенциальных функций $V(x,u)$. Никто, естественно, не гарантирует, что таким образом можно исследовать любую социальную систему. В силу этого синергетика включает помимо теории бифуркаций и другие теории. Значительное место в синергетике занимают методы статистической физики.

3.1. Неравновесные системы и процессы

В статистической физике и физической кинетике изучаются так называемые *неравновесные процессы*. Они протекают в системах, состояния которых не являются равновесными. Следовательно, состояние, в котором хотя бы одна из описывающих его переменных (параметров) не имеет определенного значения при неизменных внешних воздействиях (т.е. изменяется), называется *неравновесным*.

Было замечено, что

- во-первых, если систему, находящуюся в неравновесном состоянии, изолировать от окружающей внешней среды, т.е. предоставить самой себе, то она перейдет в равновесное состояние. Такой переход называется *релаксацией*; [2]
- во-вторых, упорядоченность (организация, структура) зарождается (самопроизвольно) в *открытых*[3] неравновесных системах. Илья Пригожин один из первых заговорил о самопроизвольном возникновении порядка и организации из беспорядка и хаоса в результате процесса самоорганизации.

[2] Время, за которое первоначальное отклонение какой-либо величины от равновесного значения уменьшается в e (e = 2,718) раз, называется *временем релаксации*. Для каждой переменной (параметра) состояния время релаксации свое. Наибольшее из этих времен является временем релаксации системы.

[3] *Открытой* называют систему, которая не является изолированной от окружающей среды. Такая система обменивается со средой веществом (продуктами), энергией, информацией.

Синергетика переносит методы статистической физики на социальные системы. В результате в социологии возникает новый взгляд на социальные процессы, именуемый *синергетической парадигмой*. На эту тему написано множество статей, но, к сожалению, гораздо меньше можно обнаружить исследований, изучающих социальные системы **математическими** методами[4], относимыми к синергетике.

3.1.1. H-теорема Больцмана. Переход к равновесию

В статистической физике неравновесная система описывается верятностно, т.е. ей ставится в соответствие плотность функции распределения $f(q,p,t)$, где $(q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ – пара (сопряженных) переменных, описывающих элементы, из которых состоит система. Число элементов огромно; это «микрочастицы» (молекулы, особи, избиратели, солдаты и т.д.). Элементы [5] перемещаются в абстрактном *фазовом пространстве* с осями q,p по некоторым законам. Уследить за их «движениями» дело безнадежное. Однако возможны вероятностные предсказания о поведении всей системы в целом. Это означает, что можно предсказывать будущее состояния системы и их (усреденнные) характеристики.

Функция распределения $f(q,p,t)$ равновесной системы может зависеть от координаты q (например, это географические координаты элемента системы), но в отсутствии *внешних сил* $f(q,p,t) = f(p,t)$, т.е. не зависит от q. Напротив, для неравновесной системы функция распеделения $f(q,p,t)$ может зависеть от q даже в отсутствии внешних сил.

В XIX веке австрийский физик Людвиг Больцман вывел *кинетическое уравнение*, описывающее поведение функции распределе-

[4] О математических методах синергетики см., например, на сайте http://galactic.org.ua/SLOVARI/Sinergetika.htm

[5] Элементы системы в теории неравновесных процессов не обладают индивидуальностью. До распространения идей синергетики в социологии и философии отсутствие индивидульности у элементвов служило главным возражением против применения методов статистической физики в науках об обществе. Сегодня терминология, пришедшая в общественные науки из статистической физики, широко используется, ее происхождение приписывается синергетике и рассматривается как торжество *синергетической парадигмы*.

ния $f(q,p,t)$ во времени. Оно имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q^i}(p^i f) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p^i}(F^i f) = St, \qquad (3.1)$$

где St так называемый *интеграл столкновений*, учитывающий взаимодействия (столкновения) элементов, составляющих систему, друг с другом или с «инородными» объектами, присутствующими в системе, и, наконец, $F^i = dp^i/dt$.

Больцман ввел в физику H-функцию

$$H(t) = -\int f(q,p,t) \ln f(q,p,t) dq dp \qquad (3.2)$$

и доказал, что

$$\frac{dH}{dt} \leq 0. \qquad (3.3)$$

Это знаменитая H-теорема Больцмана. Для равновесных систем

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

Функция $H(t)$ трактуется как информация о системе. Она связана с *энтропией* $S(t)$ системы простым соотношением [7, с.122]

$$S(t) = -kH(t) + const.$$

Из H-теоремы делают заключение, что в *закрытой эволюционирующей системе энтропия растет (информация, т.е. полнота знаний о системе, уменьшается) и система стремится к равновесию.*

3.1.2. Энтропия, беспорядок и сложность

Энтропия пониматся в современной науке как мера беспорядка, дезорганизации социальной системы. Чем она больше, тем меньше в системе порядка и тем ближе она к хаосу.

Это традиционное понимание энтропии означает, что рост энтропии влечет упрощение системы. Однако в действительности мы наблюдаем то, что называется эволюцией, которая сопровождается усложнением самых разнообразных систем, и человеческой цивилизации в частности. Иначе говоря, закон возрастания энтропии для замкнутых систем вступает в противоречие с фактом существования человеческого общества.

Для разрешения этого противоречия предлагались различные рецепты. Перечислим некоторые из них [95]:

- прежде всего делались заявления, что наша Вселенная является открытой системой;
- предполагалось, что закон возрастания энтропии не имеет универсального характера, что он действует не везде;
- наша Вселенная – это гигантская флуктуация (Больцман), случайность «местного значения»; мир вне ее находится в мертвом равновесии;
- энтропия не является мерой беспорядка.

Так или иначе, но на сегодня воспринимать энтропию как меру беспорядка очень удобно, поскольку иной меры беспорядка у нас пока нет.

3.1.3. Релаксация неравновесной этнической системы

Допустим, что наша система – это этническая система. Она состоит из людей, составляющих некоторый этнос. Координаты $q = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ трактуем как географические координаты члена этноса. Компоненты вектора $p = (\xi,\eta,\zeta)$ понимаем следующим образом: ξ – степень субпассионарности члена этноса, т.е. паталогическое преобладание инстинкта самосохранения, η – гармоничное, нормальное поведение, ζ – полное подавление инстинкта самосохранение (пассионарии Л.Н.Гумилева [17]).

Будем считать, что отсутствуют взаимодействия («столкновения») между элементами системы, т.е. между членами этноса, но имеются «столкновения» элементов с «встроенными» в этнос «массивными» объектами. Под объектами можно понимать достаточно мобильные влиятельные сплоченные группы людей, присутствующие в этносе, но не являющимися его членами.

Пусть система находится под воздействием внешней силы, которая выражается в том, что этнос *стремится переселиться* (Drank nach Osten, освоение Запада, или золотая лихорадка в США) на соседнюю территорию. Это означает, что члены этноса неравномерно распределены по одной из осей координат, пусть это координата x, а стремление к переселению – это явное проявление влияния пассионариев. Иначе говоря, особую роль играет зависимость функции распределения $f(q,p,t)$ от ζ.

В равновесном состоянии функция распределения $f_0 = f_0(x,|p|)$, т.е. наблюдается неравномерное расселение (мысль о переселении = внешняя сила имеет место), но ни одна из компонент вектора пассионарности p не имеет преимущества (наблюдается уравновешенность сил внутри этноса).

Неравновесное состояние описываем функцией распределения

$$f = f_0 + \zeta f_1(x,|p|),$$

говорящей о в общем-то небольших отклонениях от равновесия.

Тогда [72, с.372] кинетическое уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q^i}(p^i f) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p^i}(F^i f) = -\frac{f - f_0}{\tau}, \tag{3.4}$$

где τ задается в виде

$$\tau^{-1} = -2\pi\zeta f_1(x,|p|) \int_0^{\pi} \sigma(|p|,\theta)(1-\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

Величина τ называется *временем релаксации* неравновесной системы. Это название связано с тем, что если считать, что внешняя сила F^i не зависит от времени, т.е. стремление к переселению неизменно, а τ не зависит от $|p|$ («столкновения» с «инородными» объектами в системе не связаны с пассионарным напряжением в этносе), то можно найти частное решение уравнения (3.4) методом разделения переменных:

$$f = f_0 + \Phi(t)\varphi(q,p). \tag{3.5}$$

Действительно, подставляя (3.5) в (3.4), получаем

$$\frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{1}{\tau} = -\frac{1}{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q^i}(p^i\varphi) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p^i}(w^i\varphi)\right) = const.$$

Откуда

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно,

$$f \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} f_0,$$

т.е. рассматриваемая система стремится к равновесию. Страсти, вносимые в общество пассионариями, гасятся с течением времени.

3.1.4. Самозарождение порядка из хаоса. Пример фазового перехода в неравновесной социальной системе

Теория фазового перехода, разработанная в физической и химической кинетике и обсуждаемая в синергетике, *словесно* переносится в общественные науки в форме синергетической парадигмы. Покажем, как это выглядит, если использовать соответствующий математический аппарат [47, с.503].

Опишем самопроизвольный рост зародышей настроений по наведению правопорядка в обществе, охваченном хаосом вследствие поражения в войне или стихийного бедствия.

Будем измерять настроения в обществе, направленные на наведение порядка, используя некоторый показатель $a \in [0,A]$. Желательные для общества настроения появляются самопроизвольно и случайно у отдельных людей. Такие люди всегда находятся. Но их настроения слабы, они лежат в интервале $(0,a_c)$, где a_c некоторое малое число. Процесс наведения порядка состоит в том, что зародыши нужного настроения должны охватить все большее число людей, группы людей, большие группы людей и т.д. и, наконец, охватить все общество. Произойдет *рождение порядка, организации из хаоса* (фазовый переход).

Зарождение настроения – это флуктуация, т.е. случайность. Она незначительна, малозаметна, для нее $a \ll a_c$. Эти зародыши порядка образуют в некотором смысле равновесное состояние общественной системы и описываются функцией распределения

$$f_0(a) = e^{-R(a)},$$

где $R(a) = \gamma a_c^2/3 - \gamma(a - a_c)^2$, $\gamma > 0$ – «работа», затрачиваемая на порождение зародыша настроения по наведению порядка.

Рост нужных настроений представляет собой отклонение от равновесия, и их наличие говорит о неравновесном общественном процессе. Будем этот процесс описывать функцией распределения $f(a,t)$, удовлетворяющей уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial s}{\partial a}, \tag{3.6}$$

где

$$s = -\beta\frac{\partial f}{\partial a} + \alpha f \tag{3.7}$$

– плотность потока в «пространстве настроений». Для равновесия f_0 поток s, естественно, равен нулю. Следовательно,

$$\alpha = -\beta R'(a).$$

Пусть процесс является стационарным, т.е. f не зависит от времени. Тогда $s = s_0 = const$ и уравнение (3.7) перепишется в виде

$$-\beta f_0 \frac{\partial}{\partial a}\frac{f}{f_0} = s_0. \tag{3.8}$$

Откуда

$$\frac{f}{f_0} = -s_0 \int \frac{da}{\beta f_0} + const. \tag{3.9}$$

Граничные условия

$$\lim_{a\to 0}\frac{f}{f_0} = 1, \quad \lim_{a\to+\infty}\frac{f}{f_0} = 0.$$

Второе условие связано с тем, что $f_0(a) \to +\infty$ при $a \to +\infty$, и поэтому верхняя грань A шкалы настроений заменена на $+\infty$.

В результате можно окончательно написать, что

$$f(a) = f_0(a)s_0 \int\limits_a^{+\infty} \frac{da}{\beta f_0(a)}, \tag{3.10}$$

где

$$\frac{1}{s_0} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{da}{\beta f_0(a)}.$$

Таким образом, описан неравновесный процесс рождения новой структуры – общества, в котором торжествует закон.

3.2. Реакция Белоусова-Жаботинского. Цикличность общественных настроений

Реакция Белоусова-Жаботинского – это периодическая химическая реакция. Первым такую реакцию обнаружил проф. Б.П.Белоусов в 1951 году. Но ему не удалось опубликовать свое открытие в журналах, широко распространяемых в СССР. Работу отклоняли на том основании, что «такого не может быть, потому что не может быть никогда». Была напечатана лишь небольшая заметка [9, 10], которая принесла Белоусову мировую известность.

О реакции Белоусова-Жаботинского рассказывают всякий раз, когда речь идет о синергетике, поскольку эта реакция – пример саморганизующейся системы. С математической точки зрения, следует говорить о бифуркации Андронова-Хопфа, о которой говорилось в § 1.5.

Однако мы приведем соответствующую систему дифференциальных уравнений, называемую часто уравнением брюсселятора.

Схему

$$\begin{aligned} A &\to X, \\ M + X &\to Y + D, \\ 2X + Y &\to 3X, \\ X &\to E, \end{aligned} \tag{3.11}$$

представляющую химическую реакцию, проинтерпретируем следующим образом.

Лояльное отношение X к власти появляется в общем-то с молодым поколением A. Это первое уравнение схемы реакций (3.11). Условия жизни M приводят лояльного человека в ряды диссидентов Y (с возможными эксцессами D), т.е. $M + X \to Y + D$. Иначе говоря, диссидентство рождается с необходимостью M. Один диссидент Y в разговоре с группой $2X$ лояльных людей способен лишь усилить их лояльность (как правило, диссиденты весьма эксцентричные люди, их поведение отпугивает). Наконец, лояльность не вечна ($X \to E$).

В результате имеем следующую динамическую социальную систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - \mu x + x^2 y - x \\ \frac{dy}{dt} = \mu x - x^2 y. \end{cases} \qquad (3.12)$$

Управляющий параметр, естественно, μ (условия жизни). Стационарное равновесие – это $x = a, y = \mu/a$. Оно является устойчивым при $\mu < \mu_c = 1 + a^2$ и неустойчивым при $\mu > \mu_c$. При $\mu = \mu_c$ рождается устойчивый предельный цикл [84, с.127-130]. Рост «мерзостей» жизни μ приводит к самопроизвольной периодической вспышке диссидентских настроений.

3.3. Странный аттрактор. Переход к хаосу

Напомним, что аттрактором мы назвали асимптотически устойчивое равновесие $x(\mu)$ динамичекой системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (3.13)$$

Как видим, аттрактор – это точка в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Аттракторами называют также устойчивые предельные циклы, являющиеся кривыми в фазовом пространстве. Имеются еще так называемые странные аттракторы. Все аттракторы обладают притягивающим свойством: к ним стремятся при $t \to +\infty$ траектории из окрестных областей.

Странный аттрактор – это множество точек в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ социальной динамической системы, которое кроме притягивающего свойства имеет еще два дополнительных необычных свойства:

- во-первых, необычна его геометрическая структура. Размерность странного аттрактора является дробной (фрактальной);
- во-вторых, все траектории внутри странного аттрактора динамически неустойчивы, что выражается в сильной (экспоненциальной) расходимости близких в начальный момент траекторий.

Последнее свойство странного аттрактора говорит о *непредсказуемости поведения элементов (решений) системы*: стоит слегка изменить начальные данные, как траектория уйдет от того, что давала траектория с первоначально взятыми данными. В синергетике в таком случае говорят, что имеет место *детерминированный хаос*.

Слово «детерминированность» в классической физике является синонимом слова «предсказуемость». Таковыми, т.е. предсказуемыми, были поведения социальных систем, описываемых решениями линейных (и многих нелинейных) дифференциальными уравнений. Предсказуемость поведения определялась устойчивостью решения. Однако в XX веке были обнаружены системы нелинейных дифференциальных уравнений, для которых близкие по своим исходным состояниям элементы (решения) социальных систем могут со временем все больше различаться, а последовательное изменение их состояний может происходить все менее скоррелированно. Это эффект так называемого разбегания траекторий (решений) в фазовом пространстве.

Быстрое затухание исходных корреляций – свидетельство высокой степени неупорядоченности, хаотичности движения. Отсутствие корреляции означает, что состояния, являющиеся следствиями близких в начальный момент времени состояний, в ходе этих процессов «забыли» их близкие (почти одинаковые) исходные причины и характеризуются в отношении друг друга как элементы независимых причинно-следственных цепей, т.е. взаимное отношение этих состояний случайно [103].

Хаос присутствует в поведении элементом (решений) динамической социальной системы. Он дает основание говорить о случайном характере взаимоотношений элементов системы, но все это происходит «при абсолютном отсутствии каких-либо случайных факторов внешнего или внутреннего происхождения... такой хаос неправомерно отождествлять со случайностью» [103]. Хаос, случайности в динамической социальной системе – следствие неустойчивости траекторий (элементов) системы.

Траектории представляют хаотическую эволюцию элементов социальной системы. В фазовом пространстве они приближаются, «притягиваются» к множеству состояний, т.е. множеству точек фазового пространства, называемому странным аттрактором.

Странный аттрактор по самому своему названию является устойчивым множеством состояний. Траектории, выходящие из точек фазового пространства, близких к странному аттрактору, «тя-

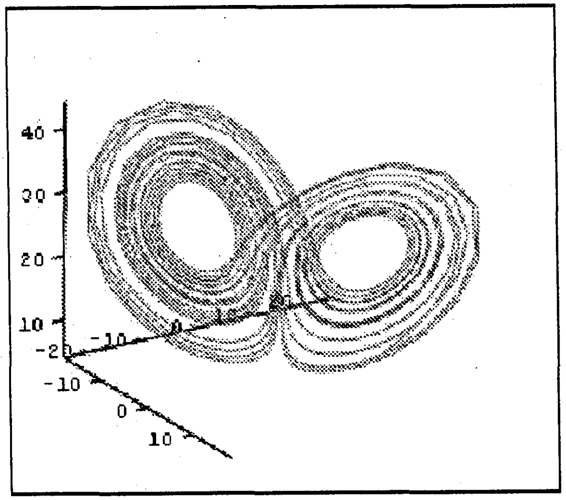


Рис. 3.1: Поведение траекторий в окрестности аттрактора Лоренца.

нутся» к аттрактору. Но внутри аттрактора их поведение неустойчиво, хаотично.

Странный аттрактор является *фракталом*, т.е. самоподобным множеством. Любая малая его часть повторяет устройство, структуру всего аттрактора. Малая часть малой части в свою очередь подобна атрактору, и так до бесконечности.

Приведем в качестве примера странный аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \tag{3.14}$$

где σ, r, b– параметры.

Поведение интегральных траекторий этой системы дано на рис.3.1.

Хаотическое поведение интегральных траекторий системы Лоренца хорошо видно на примере поведения координаты $y = y(t)$ одной отдельно взятой траектории (см. рис.3.2).

Дадим интерпретацию системы (3.14), применительной к поведению человека в зависимости от его окружения.

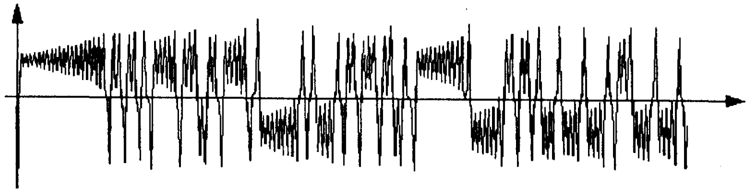


Рис. 3.2: Поведение $y = y(t)$.

Пусть x – это состояние дел в семье, y – состояние дел на службе и, наконец, z – эмоциональное состояние психики человека. Таким образом, человек, его состояние как личности в любой момент времени t характеризуется тройкой (x, y, z). Знак (-) переменных x, y, z означает способность личности преодолевать негативные тенденции в семье, на службе и в душе. Напротив, знак $(+)$ характеризует «сдачу позиций», «отказ от борьбы».

В таком случае первое уравнение в системе (3.14) – это скорость изменения семейных отношений. Они в большой степени зависят (член σy) от состояния дел на службе и способности человека регулировать семейные отношения (член $-\sigma x$).

Второе уравнение дает скорость состояния дел на службе. Очевидно, что хорошая работа зависит от отношений в семье (член rx) и от деловых (бойцовых) качеств работника (член $-y$). На состояние служебных дел влияет и то, как чловек переживает семейные дела. Это учитывается с помощью члена взаимодействия $(-xz)$.

Наконец, третье уравнение описывает скорость изменения эмоционального состояния человека. В первую очередь она определяется тем, что происходит на службе и в семье (член xy), и, естественно, способностью человека управлять своим душевным состоянием (член $-bz$).

Как мы уже знаем, данная система демонстрирует наличие неустойчивости для траекторий. В нашей интерпретации это означает, что поведение людей с близкими начальными состояниями, т.е., скажем, одинаково благополучных в начальный момент времени, со временем становится в большой степени различным, независимым друг от друга, хаотичным. Казалось, незначительная разница в эмоциональном состоянии человека малозаметна, не должна на что-то повлиять. Тем не менее это ведет к совершенно иной динамике «жизненного пути» человека, чем у его коллеги. Хотя все у них изначально было прекрасно: и карьера, и дела в семье.

Теперь представим, что одна траектория – это клерк вчерашний, а другая с близкими начальными данными (отличается слегка эмоциональное состояние клерка) – это он сегодняшний. Что заставило так резко уйти траекторию сегодняшнюю от траектории вчерашний. Ответ находим у социологов: «стук женских каблучков по Уолл-стрит вполне мог быть причиной биржевого кризиса осенью 1987 года».

3.4. Синергетика глазами социолога

Синергетика – это один из вариантов постнеклассического типа научности. Используемое ниже разграничение на классический, неклассический и постнеклассический типы рациональности условно. Однако представляется, что это позволит более четко определить те черты научного исследования, которые начали осознаваться учеными со второй половины XX века и которые свойственны синергетике как постнеклассическому типу научности.

3.4.1. Классическая рациональность

Классическая рациональность доминировала в сознании европейцев в течение длительного времени (в основном на протяжении рационалистических XVII-XIX веков, после разрушения традиционной религиозной картины). При этом классическая социальная эпистемология и онтология характеризуются нижеследующими положениями.

1. Классическая социальная эпистемология (теория познания):

- Разделение субъекта и объекта познания, ценностно нейтральная позиция объективного наблюдателя. Социолог – это независимый от внешней реальности субъект, беспристрастный, рациональный исследователь, независимый от религиозных догм и предрассудков.
- Абсолютизация опыта как источника познания.
- Сциентизм (отождествление рациональности и научности).
- Фундаментализм – признание наличия единых объективных закономерностей в природе и обществе.

- Кумулятивный характер знания – научное знание непрерывно наполняется новым содержанием и приближается к Истине. Истина имеет статус определенности и конечности (метафорический образ познания как приближение к истине – «раздевание капусты»).

2. Классическая социальная онтология:

- Принцип системной организованности, целостности и структурной упорядоченности общества (механицизм, органицизм, функционализм, структурный функционализм, структурализм).
- Иерархическая центр-периферическая модель социального мира.
- Линейность, одновариантность, жесткая детерминированность социальных изменений, идея Прогресса.
- Идея упорядоченности и стабильности общества. Образ общества основан прежде всего на идее порядка, механистическом понимании движения, инерции и покоя, дихотомическом отношении к взаимодействию стабильности и хаоса. «Вследствие того, что стабильное общество стало общественным идеалом, в социологических теориях XX века существовала традиция рассматривать общество прежде всего в его статическом виде. Если речь шла об изменениях, то они большей частью считались аномалией, ненормальным состоянием общества. Так, например, с точки зрения классического функционализма, изменения – это отклонения от должного стабильного состояния» [73].
- Социальный менеджмент – стремление социологии создать идеальную модель общественного устройства, которая позволила бы привести самые различные общества к единому «светлому будущему».

3.4.2. Неклассическая рациональность

В классическом типе научности критерии научного познания таковы, что внимание исследователя сосредотачивается на характеристике объекта при элиминации всего того, что связано с субъектом. В конце XIX - начале XX вв. происходит постепенный переход к новому типу рациональности – неклассическому.

Неклассическая рациональность учитывает соотнесенность характеристик объекта и средств познания, используемых субъектом. «Суть неклассического подхода – переход от описаний и классификаций к поиску конечных оснований теории, к анализу того, как методы и познавательные средства обусловливают сущность и форму теории. Теория не рассматривается больше ни как отражение реальности один к одному, ни как простое описание опытных данных, но, в первую очередь, как идеализация, рационализация, упрощение. Основная черта неклассической методологии – рефлексия над методом: в процессе познания реальность отвечает на наши вопросы, но ее ответы зависят не только от ее устройства, но и от нашего способа постановки вопросов. Если для классического подхода характерно рассматривать позицию исследователя как отстраненно-созерцательную (разум как бы со стороны наблюдает реальность), то при переходе к неклассической методологии происходит осознание того, что познающий субъект находится внутри предметного мира, составляет его часть, понимает, переживает этот мир, следовательно, его знание субъективно» [28].

В социологии переход к неклассической методологии намечен в значительной мере работами М. Вебера. В рамках неклассической социологии зародились те исследовательские интересы и позиции, которые будут впоследствии характерны для современной нам социологии: ориентация на изучение единичности, многообразия, субъективности, внимание к методу и личности исследователя.

3.4.3. Постнеклассическая рациональность

С 70-х годов XX века классическая и неклассическая наука, сложившаяся на рубеже XIX-XX веков, сменяется постнеклассической наукой. Рождается новый тип знания, принципиально отличный от прежних эталонов научности. Синергетика – один из вариантов постнеклассической научности. Что характерно для этого типа рациональности? Что кардинально нового происходит в нашем понимании мира в связи с синергетической парадигмой мышления? Какие точки соприкосновения можно обнаружить между синергетикой и современной социологией?

Синергетическая эпистемология

Как пишут И.Пригожин и И. Стенгерс «для древних природа была источником мудрости. Средневековая природа говорила о Боге. В Новое время природа стала настолько безответной, что Кант счел необходимым полностью разделить науку и мудрость, науку и истину. Этот раскол существует на протяжении двух последних столетий. Настала пора положить ему конец. Что касается науки, то она созрела для этого» [66, с.150].

Принцип наблюдателя

Синергетика предполагает, что субъект входит в познаваемую им систему как составляющая этой системы (наблюдатель). Принцип наблюдаемости связан с осознанием того, что за любой исследовательской программой стоит субъект со своими теориями, гипотезами и соответствующими экспериментальными установками. Как отмечает Я. И. Свирский, «в синергетической трактовке мир оказывается одним из конституируемых аспектов бытия, также как и Я субъекта. Взаимосвязь мира и субъекта воспроизводится некой третьей внешней инстанцией, которая показывается не просто инструментально выполненной конструкцией, а метафизическим порядком, обеспечивающим присутствие и того, и другого здесь и теперь» [74, с.83].

Отказ от разделения субъекта и объекта произошел еще раньше в квантовой физике (Н.Бор, В.Гейзенберг, А.Эйнштейн). В истории философии и социологии такого рода ходы сознания уже осуществлялись в феноменологии, герменевтике, структурной лингвистике (понятия «интенциональные акты» Э.Гуссерля, «плоть» М.Мерло-Понти, «язык» Ж.Лакана, «поверхность смысла» Ж.Делеза, принцип лингвистической относительности Сепира-Уорфа). При всей схожести позиций у синергетики есть определенные отличия прежде всего от феноменологии: «Не мы, как расширенно понятая субъективность, конституируем мир и интенционально к нему «прикасаемся» через средний термин «плоть», а в самом мире присутствует что-то такое, что заставляет нас самих конституироваться как субъектов» [74, с.78].

Также не случайно некоторые видные постмодернисты, например Ж.-Ф.Лиотар, Ж.Делез и др., широко используют идеи синергетики: между децентрацией субъекта и де-конструкцией текста в постмодернизме и деонтологизацией объекта познания в синергетике имеется не внешняя, а более органичная, содержательная связь.

Деонтологизация знания

Согласно синергетике, в мире нет тех универсальных законов, которые делали возможным его познание в классическом смысле (деонтологизация знания). Синергетическая теория не ориентирована на выявление законов, а направлена на конструктивный диалог, на создание интерпретаций. Пригожинская формулировка законов природы включает в себя несводимые вероятностные представления.

Критика присущего классической рациональности поиска фундаментальных оснований бытия становится знаменем современной социологической рефлексии, разрушающей веру в их существование. Это характерно прежде всего для постмодернистской социологии. С точки зрения постмодернизма, поиск социологией универсальных законов выглядит утопическим. В фрагментированном и неиерархизированном современном мире имеет смысл только описание локальных, специфических феноменов. Констатация общих законов, свободных от контекста, не имеет смысла.

Плюрализм знания

Постнеклассическая наука отказывается от идеи бесконечного поступательного приращения знания на пути к истине. В социологии эта идея наиболее ярко представлена постмодернистским направлением, провозглашающим локальность знания и плюрализм теорий. Синергетика также воспринимает эту идею. Продолжая игру со старым образом познания «раздевание капусты» как движения в Истине, один из отечественных приверженцев синергетики В.И.Аршинов отмечает: «И здесь мы, движимые познавательным инстинктом, производим операции раздевания, чтобы добраться до чего-то, до сути вещей мы уже не добираемся: здесь нет твердого ядра, нет выделенной ориентации, куда, зачем и почему мы движемся в наших познавательных условиях» [6, с.13]. Поэтому В.И.Аршинов предлагает лук как метафорический образ новой парадигмы и замечает, что она имеет более горький вкус. Это обусловлено не только крушением надежд на обретение полноты и ясности, но и осознанием новых горизонтов, открывшихся в прагматической теории истины философии и в синергетической парадигме науки [87].

Постмодернист Ж.Лиотар охарактеризовал данное эпистомологическое положение следующим образом: «Интересуясь неопределенностями, ограничениями точности контроля, квантами, конфликтами с неполной информацией, «fracta», катастрофами, прагматическими парадоксами, постмодернистская наука строит теорию собственной эволюции как прерывного, катастрофического,

несглалимого, парадоксального развития. Она меняет смысл слова «знание» и говорит, каким образом это изменение может происходить. Она производит не известное, а неизвестное. И она внушает модель легитимации, не имеющую ничего общего с моделью наибольшей результативности, но представляющую собой модель различия, понимаемого как паралогия» [46, с.201].

Принцип согласия (коммуникативности, диалогичности)

Этот принцип означает, что бытие как становление формируется и узнается лишь в ходе диалога, коммуникативного, доброжелательного взаимодействия субъектов и установления гармонии в результате диалога. Один из источников принципа согласия – принцип конвенциональности в научном познании, сформулированный А.Пуанкаре.

Принцип диалога также близок современной социологии (идеи диалогичности М.Бахтина, идеи деконструкции, теория коммуникативного действия Ю.Хабермаса и т.п.).

Синергетическая онтология

Принцип сложности

Сложность – одно из центральных в синергетике понятий. Само это понятие не является тривиальным, его общепринятого определения не существует. Обычно системы, не допускающие «грубого или операционального описания в терминах детерминистских причинностей» [66, с.81], и называются в синергетике сложными. Единственно возможным описанием сложных систем становится только вероятностное описание.

Представление объекта с позиции сложной системы привлекает внимание социологов не одно десятилетие. Например, постмодернистская социология стремится показывать многозначность социальной реальности, выявлять различные варианты дальнейшего развития, из которых ни про один нельзя сказать, что он реализуется «по необходимости». Как пишут Н.Н.Козлова и Н.М.Смирнова, характеризуя современную социологию, «казавшееся цельным и монолитным на глазах расползается на относительно автономные локальные области и подсистемы, анклавы и временные (диссипативные) структуры. Словом, реальность воспринимается как неоднородная и многообразная» [39, с.15].

Нелинейность процессов

Нелинейность в математическом смысле означает наличие более одного решения при одинаковых условиях. «Физический смысл нелинейности в том, что имеется множество путей эволюции системы, выбор эволюционного пути выглядит спонтанным. Случайность в общем виде рассматривается как отсутствие закономерности или же как нечто ей противоположное. Синергетическая бифуркационная модель демонстрирует, что на уровне результата (скажем, большие следствия) нет непосредственных равновеликих, равнозначимых причин, его обуславливающих» [87].

Социальные изменения, согласно постмодернизму, носят нелинейный, многовариантный характер и никогда до конца не детерминированы. Такое видение социальной реальности исходит из отказа от идеала всеобщего прогресса, имеющего глобальный и необходимый характер.

Время

Принцип наблюдателя связан с пониманием времени. Поэтому ключевое место в исследовательской программе бельгийского ученого И.Пригожина занимает проблема времени как важнейшего вопроса познавательной деятельности человека, без понимания которого невозможно говорить о восприятии и понимании мира.

- Время не является независимой от происходящих событий субстанцией, т.к. оно само состоит из этих событий.
- Необратимость процессов (различие между прошлым и будущим). Необратимые процессы реальны так же, как и обратимые; необратимые процессы играют существенную конструктивную роль в физическом мире, будучи основой когерентных процессов самоорганизации
- Образ времени как темпа становления, как процесса возникновения-исчезновения, как периодической смены упорядоченных структур хаосом.

Большое внимание современные социологи уделяют времени [15] (Н.Эллиас, Э.Гидденс). Стремление к процессуальному описанию социального мира вообще становится знаком эпохи (понятия «практики», «стратегии», «фигурация», «коммуникация» и т.п.).

Неравновесность, нестабильность, хаотичность

Неравновесность и нестабильность перестали рассматриваться как нечто разрушающее и негативное. В результате перехода от равновесного состояния к сильно неравновесному возникает порядок нового, ранее неизвестного типа. Хаос выступает как созидательное начало. Поэтому внимание синергетики всегда обращено к неустойчивому и меняющемуся. Страх перед хаосом, энтропией, беспорядком был преодолен. На смену ему возникла мысль: «Без неустойчивости нет развития». «Неустойчивость не всегда есть зло, подлежащее устранению, или же некая досадная неприятность. Неустойчивость может выступать условием стабильного и динамического развития» [38, с.13]. Устойчивость и равновесность могут даже оцениваться как тупики эволюции (И. Пригожин).

Однако, с точки зрения современной синергетики (Е.Н.Князева, С.П.Курдюмов и другие), нельзя вообще не учитывать состояние стабильности. Устойчивость вырастает из неустойчивости, в результате неустойчивости, ибо начало нового структурного образования связано со случайностью, хаосом. Но затем устойчивость снова оборачивается неустойчивостью. «Стадии устойчивости и неустойчивости, оформления структур и их разрушения сменяют друг друга» [38, с.17]. Таким образом, ценностное отношение смягчается.

Каким образом современная социология, традиционно провозглашающая идеалы порядка и стабильности, анализирует неравновесие, нестабильность и хаос? Социальное изменение (в том числе и хаотичное) начинает восприниматься как нормальное функционирование системы. Конфликтологи приходят к выводу о позитивной и созидательной, а не разрушающей функции конфликта в обществе. Социологи, изучающие повседневную жизнь, обращают внимание на сбои в коммуникации (troubles) и их социальное значение. Постмодернисты рисуют мир, в котором человеческая жизнь становится призрачной, неаутентичной, вызывает ощущение пустоты и бессмысленности, хаоса и отсутствия гармонии, нестабильности и всеобщей дезорганизованности мира. Однако эта нестабильность уже не вызывает страха. Она воспринимается как особый тип социального порядка.

С 70-80 гг. XX в. в активно развивается так называемая «социология хаоса». Продолжатели естественнонаучной теории хаоса в социологии перенесли отношение к материи как к хаосу на исследование человеческого общества, что породило следующие социологические и философские формулы: «общество – это спонтанная виталистская толпа» (Маффесоли), «история – это движение плюс неопределенность» (Баландье), «мир – это не мир, а экстравагантный ансамбль» (Конш) и т.д. Если физики хаоса утверждали, что «хлопанье крыльев бабочки в Японии может вызвать снежную лавину в Перу», то социологи хаоса пришли к выводу, что «движение женских ножек по Уолл-стрит вполне могло быть причиной биржевого кризиса осенью 1987 года» (Х.Эспарса). С действием таинственного «постороннего притягивающего элемента» социологи хаоса сталкивались повсюду – во внезапном появлении болезней типа СПИДа, в волнах безработицы, в непредсказуемом поведении электората в демократических обществах, во взрыве современного терроризма, тем более странного, что он не достигает, как правило, вообще никаких целей, и часто бесцельность и есть основной мотив террористических акций. Результатом этих исследований стал призыв «помыслить хаос», т.е. согласиться с видением общества как процесса, находящегося в постоянном дисбалансе, нестабильности, со все возрастающей сложностью, гетерогенностью и неравенством. «Помыслить хаос» – означает принципиальный отказ от рациональных и логичных моделей и структур, которые до последнего момента служили основным инструментом в постижении людьми мира и общества» [29].

Принцип неопределенности процессов

Неклассическая наука как бы обрезает прямую статической концепции времени в точке настоящего, помещая туда неклассического наблюдателя, и будущее разветвляется, предоставляя наблюдателю целый спектр возможных состояний и путей развития. Теперь будущее приобретает статус возможного, но неопределенного.

Современная социология также стремится анализировать неопределенность социальной реальности. Определенность воспринимается не более, чем цель утопического политического проекта, о котором вещали классические социологические теории. Например, в социологических работах все чаще появляется понятие «игра» (Э.Гоффман, П.Бурдье, М.Маффезоли, Ж.Лиотар). Употребление понятий игры и игровых моделей «позволяет схватить вероятностный характер социальных процессов, дать их полицентрическое объяснение, решить на уровне выбора методологических средств проблему альтернативности истории как оппозиции социального детерминизма и прогрессистской установки» [39, с.19-20].

Идея альтернативности в общественном развитии, получающая

фундаментальное обоснование с помощью принципов синергетики, более чем актуальна в постсоветской России. В связи с этим в 90-е годы в отечественной науке появлялись синергетические исследования перестройки М.С.Горбачева.

Принцип случайности

Случайность выступает как самостоятельное начало, как имманентное свойство нелинейного мира. При описании динамики диссипативных систем случайность стала рассматриваться как близкая по смыслу таким понятиям, как независимость, неоднородность, спонтанность, свобода, неопределенность, хаотичность.

Смена познавательной перспективы в современной социологии также характеризуется вниманием к случайным явлениям и процессам. В фокусе социологического интереса оказывается не только массовидное как частный случай общего закона, но и индивидуальное, требующее внимания к специфике «отдельного случая». Все более распространенным становится метод case study (исследование случая, казус).

Идея случайности в синергетике опирается на то, что причины не всегда могут быть разумно соотнесены со своими следствиями, что во взаимосвязях существует своего рода иррациональные элементы, однако это не означает, что случай беспричинен. Современной социологии также близко это положение синергетической науки. Социологи все чаще обращаются к изучению форм аргументации и поведения, ранее считавшихся иррациональными, а теперь воспринимаемых в качестве разных форм рациональности.

***

Таким образом, в центр внимания современной, т.е. постнеклассической социальной методологии, выдвигаются темы, близкие синергетике (нестабильности, неравновесности, вариативности, переходных периодов, моделирования альтернативных сценариев, исследование маргинальных сфер). Отчетливо ощутим интерес к действию синергетических механизмов в общественном развитии. Привлекательность синергетики для обществоведов связана с ее рефлексивными и прогностическими возможностями. Она позволяет развивать новые нестандартные подходы в социальном познании и социальном управлении.

Близость социальных наук и естественнонаучных исследований Ж.-Ф.Лиотар объясняет следующим образом: постмодерн есть переписывание модерна с позиций новых методологий. Синергетика дает своего рода «естественнонаучную» легитимацию идеям постмодернизма. Их резонанс способствует «утверждению нового мировоззрения, новой методологии познания, ускоряя распад классических стадиально-линейных моделей истории, выработке новых подходов к ней как принципиально открытому, вариабельному, альтернативному процессу, необходимо предполагающему «выбор» [46].

Глава 4

Первичные структуры социальных и экономических отношений

Общество – это социальные отношения. Правильное описание структуры социальных отношений является и правильным описанием структуры общества. Из каких простейших структурных элементов, или «первоструктур», складываются социальные отношения? Задавая такой вопрос, мы во главу угла ставим не простейшие элементы, такие как, скажем, крестьяне, рабочие, управленцы и т.д., образующие общество, а простейшие структуры, составляющее в конечном итоге структуры и организацию всего общества.

Поиск «первоструктур» не в традиции западной науки. Тем не менее в 1970 году нобелевский лауреат И.Е.Тамм писал: «...более перспективно искать не исходную «первоматерию», а исходные «первоструктуры» – такая переформулировка проблемы единства мира представляется нам несравненно более преимущественной и в логическом, и в естественно-научном отношении...». Он усматривал при этом необходимость отказа от наглядных представлений: «...Проблема отказа от «наглядности» вставала перед человеческим интеллектом и раньше. Так, уже пифагорейская традиция осознавала необходимость перехода от пластического Эйдоса к чистому Логосу, однако «телесно-чувственная» природа греческой цивилизации помешала реализации этой программы, – европейская наука в каком-то смысле унаследовала это бремя «наглядности», в несении которого есть своя прелесть» [41].

И.Е.Тамм высказал эту мысль в предисловии к книге своего ученика Ю.И.Кулакова, в которой «первоструктуры» были найдены для описания физики и геометрии. Однако идеи Ю.И.Кулакова актуальны и для социологии, и для экономики.

4.1. Теория систем отношений Ю.И. Кулакова

В теории Ю.И. Кулакова постулируется наличие одного или нескольких множеств $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$ элементов, между которыми определены отношения, обладающие двумя свойствами. Во-первых, некоторый набор этих отношений, выраженных в виде чисел, должен удовлетворять специальному уравнению, именуемому *законом*, и, во-вторых, в данном законе можно одни элементы заменять на другие по правилу, называемому *фундаментальной симметрией.*

В простейшем случае отношение – это вещественное число, сопоставляемое паре, тройке, четверке и т.д. элементов [41]. В качестве элементов могут выступать объекты любой природы: физические тела, индивиды социальной группы, мужчины и женщины, элементарные частицы и т.д., а в качестве отношений между элементами могут рассматриваться расстояния между телами (точками), родственные связи, отношения между полами, взаимодействия между частицами. Если ограничиваются одним множеством, то теория, которая строится, называется *унарной системой фундаментальных отношений.* В случае двух множеств соответствующая теория носит название *бинарная система фундаментальных отношений.*

Каждая система отношений отличается от любой другой парой натуральных чисел (r, s), называемой рангом. Ю.И. Кулаков [41] и его ученик Г.Г. Михайличенко показали, что существует классификация систем отношений, и нашли соответствующие алгебраические формулы для всех рангов (r, s) (см. § 4.2.1).

Ю.И.Кулаков, Ю.С.Владимиров и их ученики, ограничивая свои исследования рамками физики, продемонстрировали, что каждая система бинарных отношений, описываемая очень простыми алгебраическими формулами, приводит после некоторых преобразований и выкладок к строго определенному физическому закону, например ко второму закону Ньютона, закону Ома или к той или иной геометрии (геометрии Евклида, геометрии Лобачевского и т.д.).

Успех теории систем отношений в физике заставляет подумать о возможности применения этой теории в социологии. Это имеет смысл сделать несмотря на то, что в XX веке существует предубеждение против перенесения методов естествознания на науки об обществе. Такое предубеждение удерживается, как правило, среди исследователей, которых называют узкими специалистами. Те же, кто более склонен к философским обобщениям, чаще пытаются увидеть за достижением в конкретной области знаний пути к получению новых результатов в других областях науки.

4.2. Гендерные отношения

Говоря об обществе, мы не должны забывать, что люди делятся на мужчин и женщин. Учет этого обстоятельства при изучении социальных систем и общества в частности, осуществляется в социологии с помощью понятия *гендер.*

Гендер (от англ. gender – пол) – это система социальных отношений между мужчинами и женщинами, не только характеризующая их межличностное общение или взаимодействие в семье, но и определяющая их социальные отношения в основных институтах общества, например в социальных классах, в иерархиях крупных организаций и при формировании структуры занятости [86].

Как видно из определения гендера, оно предполагает прежде всего существование вполне определенных отношений между мужчинами и женщинами. Причем эти отношения не сводятся только к сексуальным отношениям и семейным делам, но и дают представление о том, как организовано само общество. Такие отношения будем называть *гендерными.*

Для социолога «гендер – это повседневный мир взаимодействия мужского и женского, воплощенный в «практиках», представлениях, нравах; это системная характеристика социального порядка, от которой невозможно отказаться, – она постоянно воспроизводится и в структурах сознания, и в структурах действия. Задача исследователя – выяснить, каким образом создается мужское и женское в социальном взаимодействии, в каких сферах и каким образом оно поддерживается и воспроизводится» [33].

Напротив, для математика важно описать гендерные отношения посредством математических понятий и формул, классифицировать по возможности типы гендерных отношений и выяснить, как каждый тип гендерных отношений сказывается на структуре и организации общества.

Гендер – это социальный пол. Поэтому мужское и женское – продукты социальной системы, и в силу этого мужчина как существо, имеющее мужской биологический пол, может обладать чертами женского социального пола, и наоборот. Данное обстоятельство вполне уместно будет вспомнить при формализации гендера, когда нам придется дать числовые «координаты» мужчинам и женщинам. Более того, эти координаты будут подлежать *трансформациям*, т.е. преобразованиям, «перепутывающим» мужское и женское.

4.2.1. Формализация гендерных отношений

Общество состоит из индивидов, членов общества. Обозначим совокупность индивидов общества через $\mathcal{P}$. *Гендер* есть не что иное, как постулат о наличии в обществе двух типов индивидов: мужчин и женщин. *Гендерное отношение* – это отношение между множеством мужчин $\mathcal{M}$ и множеством женщин $\mathcal{F}$. Будем обозначать мужчин малыми латинскими буквами $i, k, j, ...$, а женщин малыми греческими – $\alpha, \beta, \gamma, ...$[1]. В таком случае поставим в соответствие гендерному отношению отображение $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Если $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{F}$, то значение гендерного отношения между мужчиной i и женщиной α представляется в виде формулы

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha). \qquad (4.1)$$

Другими словами, гендерное отношение между любым мужчиной i и любой женщиной α характеризуется вещественным числом $a_{i\alpha}$.

[1] Более правильно говорить не о мужчинах и женщинах, а о мужских и женских признаках.

Будем предполагать, что гендерное отношение ϕ является *универсальным* в том смысле, что для данного гендера существуют два натуральных числа r и s, такие, что найдется отображение $\Phi : \mathbb{R}^{rs} \to \mathbb{R}$, обладающее следующим свойством: для любого произвольного набора из r мужчин $i_1, ..., i_r$ и любого набора из s женщин $\alpha_1, ..., \alpha_s$ справедливо равенство

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_s} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_s} \end{pmatrix} = 0. \qquad (4.2)$$

Пара чисел (r, s) называется *рангом* рассматриваемого гендера. В данном определении отчетливо видна постулируемая симметрия данного гендера: любая женщина может быть заменена на любую из множества $\mathcal{F}$, так же как и мужчина из множества $\mathcal{M}$. Но при этом мужчин берут в количестве r, а женщин – s.

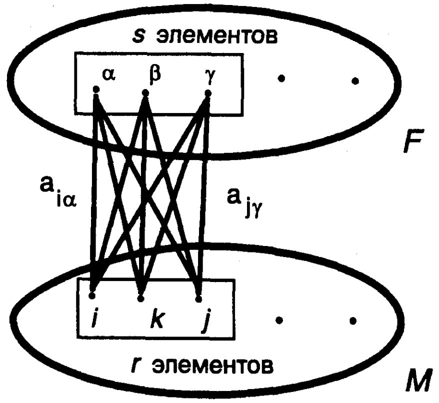


Рис. 4.1: Бинарная система отношений.

4.2.2. Об однополых и трехполых гендерах

Закономерен вопрос: можно ли рассматривать гендер как унарную систему отношений, что соответствует обществу с индивидами одного пола, или – тернарную, построенную на трех множествах $\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{S}$ (три пола), а также тетрадную (четыре пола) и т.д.?

Как показано группой Ю.И. Кулакова, однополый гендер ранга r возможен, но соответствующие отношения вида (4.1), которые в данном случае надо писать как a_{ik}, выражаются в виде более сложных математических формул, чем бинарные отношения для «двуполых» гендеров. А вот «трехполые» гендеры и другие экзотические многополые гендеры не приводят к содержательной теории, по крайней мере для случая вещественных отношений.

4.2.3. Классификация бинарных гендеров

Для того чтобы найти классификацию гендеров, необходимо представить соотношение (4.1) в форме вещественной функции от двух вещественных переменных x_i и y_α. С точки зрения математики, это означает, что $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ рассматриваются как (гладкие) многообразия размерности соответственно m и n и на них вводятся локальные координаты

$$\begin{cases} i \to \ x_i = (x_i^1, ..., x_i^m) \\ \alpha \to y_\alpha = (y_\alpha^1, ..., y_\alpha^n). \end{cases}$$

В этих координатах формула (4.1) принимает вид

$$a_{i\alpha} = \phi(x_i^1, ..., x_i^m, y_\alpha^1, ..., y_\alpha^n). \tag{4.3}$$

Выражение (4.3) подставляется в (4.2), и после достаточно кропотливых выкладок находится вид функций ϕ и Φ. Приведем итог этих исследований.

Классификация бинарных гендеров. Если m размерность многообразия $\mathcal{M}$, а n размерность многообразия $\mathcal{F}$, то ранг (r, s) связан с ними соотношениями: $r = n + 1, s = m + 1$.

- Не существует гендера ранга $(1, 1)$.
- Существуют гендеры только ранга (r, r), $r \geq 2$, $(r - 1, r)$, $r \geq 3$ и $(r + 1, r)$, $r \geq 2$.
- Существуют гендеры ранга $(2, 4), (4, 2)$.
- Все диагональные системы отношений с рангом (r, r) могут быть двух типов. Их ранги обозначают как (r, r) и $(r, r; a)$. Для системы отношений ранга (r, r) закон в некоторых координатах записывается в виде

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_r} \end{vmatrix} = 0, \tag{4.4}$$

где отношения между элементами гендеров $\mathcal{M}, \mathcal{F}$

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} x_i^l y_\alpha^l, \quad r \geq 2. \tag{4.5}$$

Системы отношений ранга $(r, r; a)$ характеризуются законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_r} \end{vmatrix} = 0, \tag{4.6}$$

где отношения между элементами гендеров $\mathcal{M}, \mathcal{F}$

$$a_{i\alpha} = x_i^0 + y_\alpha^0, \quad r = 2;$$

$$a_{i\alpha} = x_i^0 + y_\alpha^0 + \sum_{l=1}^{r-2} x_i^l y_\alpha^l, \quad r > 2. \tag{4.7}$$

- Для систем отношений ранга $(r + 1, r)$, $r \geq 2$, имеем

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ 1 & a_{i_2\alpha_1} & \dots & a_{i_2\alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots & \\ 1 & a_{i_{r+1}\alpha_1} & \dots & a_{i_{r+1}\alpha_r} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.8}$$

с отношением

$$a_{i\alpha} = y_\alpha^0 + \sum_{l=1}^{r-1} x_i^l y_\alpha^l, \quad r \geq 2; \tag{4.9}.$$

для систем ранга $(r - 1, r)$, $r \geq 3$,

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{i_{r-1}\alpha_1} & a_{i_{r-1}\alpha_2} & \dots & a_{i_{r-1}\alpha_r} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.10}$$

с отношением

$$a_{i\alpha} = x_i^0 + \sum_{l=1}^{r-2} x_i^l y_\alpha^l, \quad r \geq 3. \tag{4.11}$$

- Для системы $(4,2)$ закон и отношения могут быть записаны в виде

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & (a_{i_1\alpha_1}a_{i_1\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_2\alpha_1} & a_{i_2\alpha_2} & (a_{i_2\alpha_1}a_{i_2\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_3\alpha_1} & a_{i_3\alpha_2} & (a_{i_3\alpha_1}a_{i_3\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_4\alpha_1} & a_{i_4\alpha_2} & (a_{i_4\alpha_1}a_{i_4\alpha_2}) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.12}$$

и

$$a_{i\alpha} = \frac{x_i^1 y_\alpha^1 + y_\alpha^2}{x_i^1 + y_\alpha^3}, \tag{4.13}$$

а для системы $(2,4)$ –

$$\Phi =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & a_{i_1\alpha_3} & a_{i_1\alpha_4} \\ a_{i_2\alpha_1} & a_{i_2\alpha_2} & a_{i_2\alpha_3} & a_{i_2\alpha_4} \\ (a_{i_1\alpha_1}a_{i_2\alpha_1}) & (a_{i_1\alpha_2}a_{i_2\alpha_2}) & (a_{i_1\alpha_3}a_{i_2\alpha_3}) & (a_{i_1\alpha_4}a_{i_2\alpha_4}) \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \tag{4.14}$$

и

$$a_{i\alpha} = \frac{x_i^1 y_\alpha^1 + x_i^2}{x_i^3 + y_\alpha^1}. \tag{4.15}$$

4.2.4. Эталоны системы фундаментальных отношений

Запишем закон Φ для системы отношений ранга (r,s) в виде

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{k\beta}, ..., a_{j\gamma}) = 0. \tag{4.16}$$

Потребуем, чтобы уравнение (4.16) было разрешимо относительно любого из rs аргументов, т.е. чтобы его можно было всегда записать в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(a_{i\beta}, ..., a_{k\alpha}, a_{k\beta}, ...). \tag{4.17}$$

Выберем в множествах $\mathcal{M}, \mathcal{F}$ соответственно по $r-1$ и $s-1$ элементов и назовем их *эталонными* или образующими базис системы

фундаментальных отношений. Пусть это элементы $k, j, ...$ из множества $\mathcal{M}$ и $\beta, \gamma, ...$ из множества $\mathcal{F}$. Тогда для неэталонных элементов i и α формулу (4.17) можно переписать в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(a_{i\beta}, a_{i\gamma}...; a_{k\alpha}, a_{j\alpha}, ...; a_{k\beta}, a_{k\gamma}..., a_{j\beta}, a_{j\gamma}, ...), \tag{4.18}$$

где в первой группе аргументов находятся бинарные отношения элемента i со всеми $s-1$ эталонными элементами множества $\mathcal{F}$, во второй группе выделены бинарные отношения элемента α со всеми $r-1$ эталонными элементами множества $\mathcal{M}$. Наконец, в третьей группе сосредоточены бинарные отношения эталонных элементов друг с другом. Введем обозначения

$$x_i^1 = a_{i\beta}, x_i^2 = a_{i\gamma}, ..., x_i^{s-1} = \cdot$$

$$y_\alpha^1 = a_{k\alpha}, y_\alpha^2 = a_{j\alpha}, ..., y_\alpha^{r-1} = \cdot.$$

Другими словами, мы вводим *координаты* для неэталонных элементов i, α относительно зафиксированного базиса эталонных элементов в множестве $\mathcal{M} \times \mathcal{F}$. Считая отношения между эталонными постоянными (известными) для данного базиса, перепишем формулу (4.18) в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(x_i^1, ..., x_i^{s-1}, y_\alpha^1, ..., y_\alpha^{r-1}). \tag{4.19}$$

Таким образом, бинарное отношение между любыми элементами i, α является функцией, определенной в некоторой области D *координатного* пространства $\mathbb{R}^{r+s-2}$. Числа $m = s-1$ и $n = r-1$ – это размерности[2] соответственно «многообразий» $\mathcal{M}$ и $\mathcal{F}$.

В этих рассуждениях для нас особое значение имеет то обстоятельство, что выражения для координат элементов множества $\mathcal{M}$ определяется через эталоны множества $\mathcal{F}$, и наоборот. На языке гендерной социологии это означает, что маскулинность[3] становится явно выраженной лишь при фиксации эталонов феминности[4], а феминность видна только на фоне зафиксированных эталонов маскулинности.

[2]Обратите внимание на то, что размерность «многообразия» мужчин $\mathcal{M}$ определяется «женским» числом s, а размерность женского «многообразия» $\mathcal{F}$ – «мужским» числом r.

[3]*Маскулинность* [< лат. masculinus мужской] – комплекс характерологических особенностей, традиционно приписываемых мужчинам. Это – сила, жестокость и пр.

[4]*Феминность* [< лат. femina женщина, самка] – комплекс психологических особенностей, традиционно приписываемых женщине. Это – характерологические черты мягкости, готовности помочь и пр.

4.2.5. Индекс различий Дункана

Для того чтобы убедиться в том, что формализация гендера на основе теории систем фундаментальных отношений эффективна, необходимо:

1) показать, что известные числовые характеристики гендерных отношений являются гендером некоторого ранга;

2) продемонстрировать, что найденные в 4.2.3 законы и соответствующие отношения являются характеристиками вполне определенных гендерных отношений.

К сожалению, в отличие от физики, гендерная социология от силы насчитывает 30 лет с момента своего появления, более того, является гуманитарной наукой и в силу этого предпочитает качественные описания количественным. Другими словами, в учебниках и монографиях по социологии гендера практически нет формул, поэтому трудно реализовывать намеченную программу по проверке адекватности предложенной формализации.

Тем не менее в научной литературе можно найти формулы, имеющие отношение к гендерным отношениям. Одной из таких формул является *индекс различий Дункана:*

$$I = 100 \sum_{l=1}^{p} \frac{\left| \frac{m_l}{m} - \frac{f_l}{f} \right|}{2}. \tag{4.20}$$

Здесь p число сфер производственной деятельности, или сфер занятости населения в обществе; m_l, f_l – число мужчин и соответственно женщин, занятых в сфере с номером l; m, f – общее число трудоспособных мужчин и женщин. Индекс изменяется от 0 (совершенная интеграция) до 100 (совершенная сегрегация). Чем ближе индекс I к нулю, тем больше в обществе справедливости при получении работы для женщин.

Формула (4.20) легко приводится к виду (4.5) для гендера ранга (r, r), $r = p + 1$. Достаточно ввести новые *координаты* для маскулинности и феминности

$$\begin{cases} x_i^l = \left| \sqrt{\frac{50m_l}{m}} - \sqrt{\frac{50f_l}{f}} \right| \\ y_\alpha^l = \left| \sqrt{\frac{50m_l}{m}} + \sqrt{\frac{50f_l}{f}} \right|. \end{cases} \tag{4.21}$$

Таким образом, индекс различий Дункана – это гендерное отношение ранга (r, r), $r \geq 2$. В книге [20] показано, как приводятся к видам, перечисленным в § 4.2.3, различные социометрические и психометрические индексы, использующиеся при измерениях социальных и ментальных отношений.

4.3. Первичные структуры микроэкономики

Фундаментальный характер идей Ю.И.Кулакова был бы в большой степени подтвержден, если бы бинарные системы отношений, которые будем называть первичными структурами Кулакова, были обнаружены в экономике. Это было сделано для микроэкономики в совместной работе М.А.Добренко с одним из авторов данного учебника [26].

4.3.1. Выручка предприятия

Предположим, что имеется некоторое множество $\mathcal{M} = \{i, j, k, ...\}$ предприятий-производителей некоторого товара и множество $\mathcal{F} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ групп покупателей этого товара. Группа покупателей – это локализованная группа покупателей, т.е. население микрорайона, деревни, поселка, города.

Отношение «производитель-группа покупателей» – это отображение $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Мы примем, что это микроэкономическое отношение является структурой Кулакова ранга $(2, 2)$. В таком случае

$$\begin{cases} i \to x_i = x_i^1 \\ \alpha \to y_\alpha = y_\alpha^1, \end{cases}$$

и в силу (4.5)

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^1 y_\alpha^1. \tag{4.20}$$

Если принять, что x_i^1 – это цена на товар i–о производителя, а y_α^1 – количество (в потенциале) товара, приобретаемого α -й группой покупателей, то формула (4.20) есть не что иное, как выручка i–го предприятия от продажи своего товара α-й группе покупателей.

Универсальность данной первоструктуры состоит в предположении, что пары производителей и пары групп покупателей могут заменяться на любые другие аналогичные пары. Выделение пары производителей, по существу, представляет требование отсутствия монополии какого-либо производителя на товарном рынке. Пара групп покупателей – это отсутствие на рынке диктата одной группы покупателей (монопсония).

Таким образом, микроэкономическая структура Кулакова ранга (2, 2) описывает формулу выручки предприятия-производителя, работающего в условиях идеального рынка.

4.3.2. Потенциальная потребность в товаре

Рассмотрим теперь структуру Кулакова ранга (3, 3). Для нее

$$\begin{cases} i \to \ x_i = (x_i^0, x_i^1) \\ \alpha \to y_\alpha = (y_\alpha^0, y_\alpha^1), \end{cases}$$

и в силу (4.7)

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^0 + y_i^0 + x_i^1 y_\alpha^1. \tag{4.21}$$

Теперь мы примем, что $x_i^0 = (r_t)_i$ – объем товаров, требующих замены (потребленных или отслуживших свой срок); $x_i^1 = (b_t)_i$ – среднее количество товара, приобретаемое одним покупателем в период t; $y_\alpha^0 = (l_t)_\alpha$ есть изменение потребности (потенциального спроса) на товар за счет воздействия различных факторов (рекламы, появления новых товаров-субститутов, социально-экономической политики и др.); $y_i^1 = (m_t)_\alpha$ – изменение количества покупателей в группе α.

В таком случае формула (4.21) примет вид

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = (r_t)_i + (l_t)_\alpha + (b_t)_i (m_t)_\alpha, \tag{4.22}$$

и описывает она потенциальную потребность в товаре в период t. Данная формула известна в микроэкономике [42, с.57].

Теперь, говоря об универсальности данной первоструктуры, мы должны представлять себе, что речь идет о более сложной симметрии троек производителей и троек групп покупателей, означающей более развитую систему конкуренции, антимонополии и антиолигополии.

Производитель i характеризуется парой чисел $((r_t)_i, (b_t)_i)$. Экономический смысл этих данных оговаривался выше. Очевидно, что подобные экономические показатели обязано иметь серьезное предприятие-производитель для того чтобы успешно продавать свой товар.

Группа покупателей α характеризуется парой чисел $((l_t)_\alpha, (m_t)_\alpha))$. Очевидно, что речь идет о большом количестве групп покупателей, т.к. деятельность предприятий-производителей, описанных в данной структуре, для того, чтобы быть успешной, должна быть направлена на большое количество групп покупателей.

4.3.3. Финансирование предприятия с помощью заемного капитала

Рассмотрим теперь структуру Кулакова ранга (4, 2). Имеем

$$\begin{cases} i \to \ x_i = x_i^1 \\ \alpha \to y_\alpha = (y_\alpha^1, y_\alpha^2, y_\alpha^3), \end{cases}$$

и в силу (4.7)

$$a_{i\alpha} = \frac{x_i^1 y_\alpha^1 + y_\alpha^2}{x_i^1 + y_\alpha^3}. \tag{4.23}$$

Осталось обнаружить эту структуру в экономике. Известно, однако, что фирма-заемщик при кредитном финансировании получает особое преимущество, которое называется «левиридж-эффект», или действие финансового рычага.

Исходным пунктом действия эффекта является процентная ставка за кредит I и общая рентабельность капитала активов R_A, вычисляемая по формуле

$$R_A = \frac{\Pi + I \cdot ЗС}{СС + ЗС}, \tag{4.24}$$

где П – прибыль за рассматриваемый период, CC, ЗС – соответственно собственные и заемные средства (капитал) за тот же период [42, с.340].

Положим

$$a_{i\alpha} = R_A,\ x_i^1 = ЗС,\ \ y_\alpha^1 = I,\ y_\alpha^2 = \Pi,\ y_\alpha^3 = CC.$$

Тогда формулы (4.23),(4.24) преобразуются одна в другую.

Таким образом, кредитор i характеризуется числом ЗС, т.е. предоставляемым кредитом, а предприятие (фирма-заемщик) α – числами (I, Π, CC). То, что ставка за кредит I является характеристикой предприятия, а не кредитора, объясняется тем, что от самой фирмы зависит, берет ли она кредит на предложенных условиях или не берет.

Обратим внимание на естественность фундаментальной симметрии в данном случае. Она требует инвариантности отношения (4.23) между кредиторами и предприятиями относительно замены пар кредиторов и четверок предприятий. Наличие двух кредиторов дает возможность выбора для предприятия (у кого брать, на каких условиях), а существование четырех фирм-заемщиков обеспечивает само существование кредита как формы бизнеса.

Как видим, все структуры Кулакова присутствуют в микроэкономике.

4.4. Первичные структуры макроэкономики

Макроэкономика изучает национальную экономику государства. Покажем, что первичные структуры Кулакова легко обнаруживаются и в современной макроэкономике, подверженной процессу глобализации (М.А.Добренко, А.К.Гуц [27]).

Закономерности функционирования макроэкономики связаны с *потреблением* и *инвестициями.*

Потребление домашних хозяйств C – это расходы на конечные товары и услуги, купленные в целях получения удовлетворения или насыщения потребностей посредством их использования.

Вторым важным компонентом частных расходов являются инвестиции I предпринимателей (фирм). Инвестиции играют две роли в макроэкономике. Во-первых, поскольку они – большой и изменчивый компонент расходов, резкие увеличения или уменьшения инвестиций могут оказывать огромное воздействие на совокупный спрос; а изменения последнего, в свою очередь, влияют на выпуск и занятость. Кроме того, инвестиции приводят к накоплению капитала. Прирост запаса сооружений и оборудования увеличивает потенциальный выпуск страны и обеспечивает экономический рост в длительном периоде. Таким образом, инвестиции играют двоякую роль, воздействуя в коротком периоде на выпуск через совокупный спрос, и в длительном периоде на рост выпуска через влияние образования капитала на потенциальный выпуск и совокупное предложение.

4.4.1. Потребительский спрос

Таким образом, национальная макроэкономика (i,α) характеризуется двумя основными компонентами: потребительским спросом (потреблением) домашних хозяйств C_i и инвестиционным спросом предпринимателей I_α . Примем, что элементами множества $\mathcal{M} = \{i,j,k,...\}$ – являются домашние хозяйств всех государств, элементами а $\mathcal{F} = \{\alpha,\beta,\gamma,...\}$ – предприниматели (фирмы) этих государств.

В простой макроэкономической кейсиановской модели [16, с.28] известна формула

$$Y = C + I, \tag{4.25}$$

где Y – совокупный спрос.

Мы ей придадим более широкий смысл:

$$Y_{i\alpha} = C_i + I_\alpha. \tag{4.26}$$

Формулу (4.26) можно получить в рамках теории фундаментальных отношений, лишь допуская существование фундаментальной симметрии ранга (r,s). Это означает, что мы должны допустить инвестиции фирм одного государства в национальную экономику другого и наоборот. Иными словами, это означает, наличие отношений $Y_{i\alpha}$ без оговорки, что домашнее хозяйство i связано только с инвестициями своих фирм. Инвестиции α должны вкладываться (более того, быть заметными) в другую национальную экономику. Это предположение означает возможность фундаментальной симметрии и, следовательно, появляются первоструктуры Кулакова. В рассматриваемом случае это первоструктура ранга (2,2; а), поскольку для нее:

$$\begin{cases} i \to \ x_i = x_i^0 \\ \alpha \to y_\alpha = y_\alpha^0, \end{cases}$$

и в силу (4.7) (для $r = 2$)

$$a_{i\alpha} = \phi(i,\alpha) = x_i^0 + y_\alpha^0. \tag{4.27}$$

Следовательно, если принять, что $a_{i\alpha} = Y_{i\alpha}, x_i^0 = C_i,\ y_\alpha^0 = I_\alpha$, то формула (4.27) перейдет в формулу (4.26).

Насколько экономически обоснована описанная процедура введения фундаментальной симметрии национальных экономик? Удивительно, но ее легко увидеть, если обратиться к наблюдаемому в мировой экономике процессу, называемому *глобализацией.*

«Глобализация – это единый рынок, единое финансово-информационное пространство для конкуренции. Глобализация – это не то что все одной семьей теперь будут. Наоборот, глобализация есть предельно жесткая конкуренция!».[5]

«Под глобализацией экономики чаще всего понимается стремительное увеличение потоков товаров, инвестиций, кредитов, информации, обменов людьми и идеями, а также расширение географии их распространения. Скорость, интенсивность и глубина проникновения этих потоков возрастает до степени, когда национальные экономики становятся взаимозависимыми. Элементы национальных экономик (национальные производители, потребители, финансовые и другие институты) напрямую интегрируются в общее мировое экономическое пространство. В результате национальные производители становятся все больше связаны с иностранными потребителями. Соответственно и на внутренних рынках в борьбе за национальных потребителей они вынуждены на равных конкурировать с иностранными экономическими субъектами. Таким образом, если раньше происходило количественное увеличение взаимодействия отдельных национальных экономик в форме роста потоков товаров, капитала и инвестиций, то сегодня наблюдается качественное изменение в их взаимодействии... Глобализация ... приводит к тому, что национальные экономики становятся частью единой мировой экономической системы, т.е. глобализированной экономики»[6].

Приведенное определение заставляет предположить, что процессы глобализации не дадут преимущества ни одной национальной экономике. В случае «гибели» конкретной национальной экономики, включенной в систему глобальных экономических отношений, ее место займет другая, более удачливая в конкурентной борьбе. Это говорит о наличии некоторой *фундаментальной симметрии*, характерной для эпохи глобализации.

4.4.2. Валовый внутренний продукт

Рассмотрим другую формулу макроэкономики [16, с.10]:

$$\text{ВВП} = C + I + G + NX, \tag{4.28}$$

[5] Делягин М. http://www.ropnet.ru/ogonyok/win/200210/10-18-20.html

[6] Насырова Л.Р., Литвиненко Н. Глобализация экономики. 2002 http://www.univer.omsk.ru/omsk/socstuds/glob/economic.html

где ВВП – валовый внутренний продукт государства, C – потребительские расходы домовых хозяйств, I – инвестиционные расходы фирм, т.е приобретение нового физического капитала или материальных активов, G – государственные закупки товаров и услуг (оно не включают государственные трансферты, которые лишь перераспределяют доходы), NX – чистый экспорт – разница (сальдо) между экспортом и импортом товаров и услуг (если импорт больше, чем экспорт, то NX – отрицательная величина).

Используя наши предположения, перепишем формулу (4.28) в виде:

$$\text{ВВП}_{i\alpha} = C_i + I_\alpha + G_\alpha + NX_i. \tag{4.29}$$

Покажем, что в данном случае имеем дело с первоструктурой ранга (4,4;a):

$$\begin{cases} i \rightarrow \ x_i = (x_i^0, x_i^1, x_i^2) \\ \alpha \rightarrow y_\alpha = (y_\alpha^0, y_\alpha^1, y_\alpha^2), \end{cases}$$

и в силу (4.7)

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^0 + y_i^0 + x_i^1 y_\alpha^1 + x_i^2 y_\alpha^2. \tag{4.30}$$

Примем, что $a_{i\alpha} = \text{ВВП}_{i\alpha}, x_i^0 = C_i, x_i^1 = 1, x_i^2 = NX_i, y_\alpha^0 = I_\alpha, y_\alpha^1 = G_\alpha, y_\alpha^2 = 1$, то формула (4.30) перейдет в формулу (4.29).

Заметим, что государство в данном случае рассматривается как фирма, а чистый экспорт отнесен к домовым хозяйствам. У экономиста это может вызвать возражения: они выделяют государство как самостоятельный элемент усложненной макроэкономической модели (см.[16, с.7]), но нам думается, что на данном этапе обнаружения первичных структур Кулакова в макроэкономике наше допущение вполне оправдано.

Часть II

Методы обработки данных

Глава 5

Данные, подлежащие анализу

5.1. Измерение и шкалы

Данные, собираемые и анализируемые социологами, как правило, предварительно подвергаются измерению.

Измерением в социологии называют процедуру, с помощью которой изучаемым объектам социальной реальности и отношениям между ними ставятся в соответствие элементы и отношения, принадлежащие некоторой математической структуре.

Математическая структура $\mathcal{M} = \{M, P_1, ..., P_m\}$ – это множество $M = \{a_i : i \in I\}$ с элементами a_i той или иной математической природы и совокупность отношений $P_1, ..., P_m$ между элементами множества M.

Самый простой случай, когда элементы a_i являются действительными числами и измерение сводится к приписыванию социальному объекту того или иного числа (рост, вес, скорость реакции, процент поданных голосов и пр.).

Таким образом, при *измерении* каждому объекту социальной реальности приписывается определенный элемент используемой математической структуры.

После того как сопоставление произведено, мы сможем с большой точностью и уверенностью, используя *возможности* выбранной математической структуры, говорить о том, *в какой степени* данный объект наблюдения (индивид, группа, город, организация, социальная система) проявляет свойство, которое представлено измеряемой переменной.

Мы видим, что предоставляемые математической структурой возможности являются возможностями *сравнения социальных объектов*. В социологии их называют *шкалой*[1] *измерения*.

Шкала – это инструмент, способ измерения. Различают следующие типы шкал:

- **Номинальные шкалы.** Используются только для качественной классификации. Это означает, что социальные объекты могут быть измерены только в терминах принадлежности к некоторым существенно различным подмножествам множества M. Например, вы сможете сказать, что два индивидуума различимы в терминах отношения P_1 – скажем, индивидуумы принадлежат к одной или к разным национальностям, или в терминах отношения P_2 – блондины или не блондины. Но мы не имеем возможности сравнивать национальность и цвет волос. Типичные примеры номинальных переменных – пол, национальность, цвет, город и т.д.
- **Порядковые шкалы.** Позволяют ранжировать (упорядочить), сравнивать объекты, указав, какие из них в большей или меньшей степени обладают качеством, выраженным данной переменной. Типичный пример порядковой переменной – это социоэкономический статус семьи. Мы понимаем, что верхний уровень выше среднего уровня, однако сказать, что разница между ними равна, скажем, 18% мы не сможем. Следовательно, в случае порядковой шкалы нельзя сказать «насколько больше» или «насколько меньше» разница между объектами, попавшими при измерении в разные классы.
- **Интервальные шкалы.** Позволяют не только упорядочивать объекты измерения, но и численно выразить и сравнить различия между ними. Данная шкала измеряет в интервальных значениях возраст, доход и пр.

[1] *Шкала* [< лат. scala *лестница*] – 1) последовательность чисел, служащая для количественной оценки каких-либо величин; 2) линейка (или циферблат) с делениями в различных измерительных приборах.

Для интервальных шкал часто используются следующие названия: шкалы высокого типа, количественные шкалы, числовые шкалы. Номинальные же и порядковые шкалы называют шкалами низкого типа, качественными, нечисловыми. Смысл таких определений очевиден: числа, полученные с помощью шкал высокого типа, больше допускают те опрерации над числами, которые нам привычны и которые мы совершаем не задумываясь.

5.2. Прикладные статистические пакеты

Обработка полученных данных производится с помощью различных прикладных статистических пакетов. Существует множество статистических пакетов.

Социологи традиционно используют пакет SPSS, включающий весь спектр статистических методов и обладающий богатыми графическими возможностями.

Другой распространенный пакет – «STATISTICA». Пакет является хорошим инструментом для статистической, аналитической и графической обработки информации. STATISTICA предоставляет в распоряжение пользователя все методы современного статистического анализа.

Часто используется известный российский статистический пакет STADIA. Он создан А.П.Кулаичевым в 1988 году (НПО «Информатика и компьютеры», МГУ, Москва). Обучающая версия STADIA свободно доступна через Internet. Пакет занимает на диске 4.1 Мб и довольствуется минимальной оперативной памятью (от 8 Мб и выше).

Другие статистические пакеты, разработанные в России, – Класс-Мастер (НПО «Стат-Диалог», Москва), Олимп, КВАЗАР, Статистик-Консультант.

5.3. Проверка нормальности распределения признака

Многочисленные методы статистической обработки данных основаны на предположении, что данные распределены в соответствии с нормальным законом. При таком распределении большая часть значений данных группируется около некоторого среднего значения, по обе сторона от которого частота наблюдаемых значений равномерно снижается. Классическим примером статистического теста, который основан на гипотезе о нормальном распределении данных, является t-тест Стьюдента, с помощью которого сравнивают две независимые выборки.

Следовательно, перед применением методов статистической обработки данных необходимо проверять, распределены ли данные по нормальному закону. Для того чтобы ответить на вопрос, подчиняются ли анализируемые данные нормальному распределению, можно использовать следующие методы:

1. *Графический*, заключающийся в построении гистограммы распределения признака x и сравнении ее с кривой нормального распределения.
2. *Правило «трех сигм»*, гласящее, что при нормальном распределении признакаx $97,7-97,8\%$ всех его значений лежат в интервале $\mathrm{M}x \pm 3\sigma$, где $\mathrm{M}x$ – математическое ожидание, σ – стандартное отклонение.
3. *Критерий Колмогорова-Смирнова.* Вычисляется величина
$$ks = \sqrt{N} \sup_x \left| F_N(x) - F(x) \right|,$$
где $F_N(x)$ – эмпирическая функция распределения, $F(x)$ – теоретическая функция распределения (в нашем случае нормальное распределение), N – количество наблюдений. Очевидно, что чем меньше ks, тем ближе распределение признака x к гипотетическому теоретическому закону $F(x)$.

В качестве примера рассмотрим возможности проверки нормальности распределения в пакете SPSS. Сначала осуществим проверку графически, т.е. при помощи гистограммы с нанесением на нее кривой нормального распределения (рис. 5.1). По графику видно, что реальное распределение в большей или меньшей степени отклоняется от этой кривой. Поэтому необходимо выяснить, насколько значительно заданное распределение отличается от нормального.

Если сравнение «на глазок» гистограммы с кривой нормального распределения представляется недостаточным, можно применить тест Колмогорова-Смирнова.

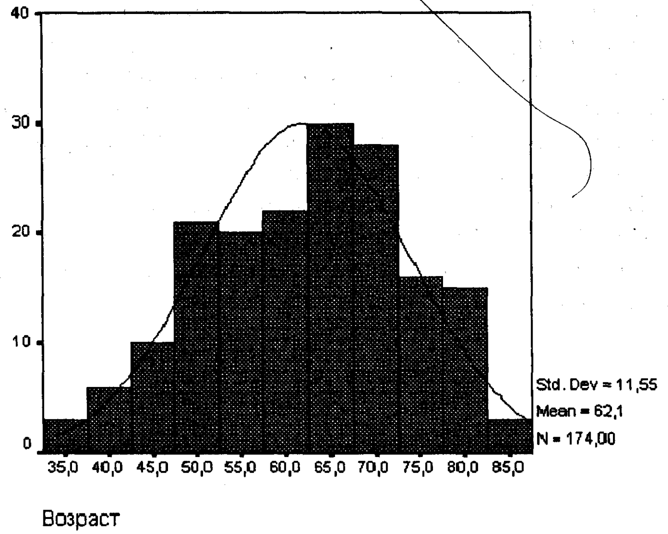


Рис. 5.1: Гистограмма и кривая нормального распределения.

Таблица 5.1: Проверка нормальности распределения возраста.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Возраст
N		174
Normal Parameters[a,b]	Mean	62,11
	Std. Deviation	11,55
Most Extreme Differences	Absolute	,059
	Positive	,055
	Negative	-,059
Kolmogorov-Smirnov Z		,785
Asymp. Sig. (2-tailed)		,569

a. Test distribution is Normal.
b. Calculated from data.

С помощью пакета SPSS вычисляется величина ks. В нашем примере $ks = 0,785$. Результат проверки на нормальность приведен в табл. 5.1. Мы можем видеть так называемую двустороннюю значимость, т.е. вероятность ошибки в условиях принимаемой гипотезы о законе распределения наблюдаемого признака x случайно превзойти выборочное значение статистики, фиксирующей отличие эмпирического распределения от нормального. Отклонение от нормального распределения считается значимым при значении α меньше 0,05. В рассматриваемом примере это значение равно 0,569, т.е. вероятность ошибки является незначимой. Поэтому можно сделать вывод, что значения переменной x хорошо подчиняются нормальному распределению.

Глава 6

Кластерный анализ

Цель кластерного анализа – построение алгоритмов классификации исследуемых объектов. Каждый объект характеризуется одинаковым числом из n переменных и является поэтому точкой некоторого n-мерного пространства M. В результате кластеризации «близкие» объекты включаются в одну группу. Таким образом, множество изучаемых объектов разбивается на группы.

Что понимается под близостью объектов? Поскольку объекты – это точки многомерного пространства M, то один из естественных способов их кластеризации состоит в введении *расстояния* d в пространстве M, с помощью которого и реализуется (формализуется) интуитивное представление о близости: близкими считаются объекты, находящиеся друг от друга на расстоянии, не превышающим некоторого заданного числа.

Группа близких объектов – *кластер* – представляет собой сгусток точек в пространстве M, подобие галактики (туманности) на ночном небе.

6.1. Расстояние между объектами

Расстояние (метрика) на множестве объектов – это число $d(x, y)$, поставленное в соответствие любым двум объектам x и y и обладающее свойствами:

1) $d(x, y) \geq 0$,

2) $d(x,y) = d(y,x)$,
3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ (неравенство треугольника).

Помимо расстояния вводится понятие *близости* между объектами. *Меры близости* отличаются от расстояний тем, что они тем больше, чем более похожи объекты.

Близость на множестве объектов – это число $\beta(x,y)$, поставленное в соответствие любым двум объектам x и y и обладающее свойствами:

1) $\beta(x,y)$ – непрерывная функция двух переменных x и y, т.е

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \beta(x,y) = \beta(x_0,y_0),$$

2) $\beta(x,y) = \beta(y,x)$,
3) $0 \le \beta(x,y) \le 1$ и $\beta(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

6.1.1. Примеры расстояний между объектами

Чаще всего рассматриваются следующие способы измерения расстояния между объектами $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$:

- Линейное расстояние

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

- Евклидово расстояние

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

- Расстояние по Минковскому степени $p \ge 1$

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Расстояние Махаланобиса между объектами x_i x_j, заданными табл.6.1,[1]

$$d(x_i, x_i) = (x_i - x_j) A_x^{-1} (x_i - x_j)',$$

[1]Не путайте объект x_i с координатой x_i.

$A_x = ||a_{ij}||$ – выборочная ковариационная матрица и $'$ – знак транспонирования.

Здесь координаты объекта $x_i = (x_{i1}, ..., x_{in})$ – это значения изучаемого набора признаков (свойств) $p_1, ...p_n$, которыми обладают объекты.

Таблица 6.1.

		Признаки			
Номер объекта k	Объекты	p_1	p_2	...	p_n
1	x_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
2	x_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...	...
p	x_p	x_{p1}	x_{p2}	...	x_{pn}

6.1.2. Примеры близости между объектами

Приведем основные способы определения близости между объектами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

- Косинус

$$\beta(x,y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}}.$$

- Коэффициент корреляции

$$\beta(x,y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)\sigma_x \sigma_y},$$

где $\bar{x}$, σ_x и $\bar{y}$, σ_y – соответственно среднее и среднее квадратичное отклонение объектов x и y.

- Мера близости Воронина

$$\beta(x,y) = \sum_{i=1}^{n} s_i \frac{|\lambda_i|}{n},$$

где

$$\lambda_i = 1 - \frac{|x_i - y_i|}{\max\limits_i x_i - \min\limits_i y_i}$$

– мера близости объектов по i-ому признаку, s_i – информационный вес признака.

- Мера близости Журавлева

$$\beta(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{xy}^{i},$$

где

$$\alpha_{xy}^{i} = \begin{cases} 1, & \text{если } |x_i - y_i| \le \varepsilon_i, \\ 0 & \text{в любом другом случае} \end{cases}$$

ε_i — значение порога для i-го признака.

6.2. Расстояние между кластерами

Расстояние между парой кластеров может вводиться самыми различными способами. Например, в пакете SPSS предусмотрены следующие методы вычисления расстояния между кластерами, основанными на понятии расстояния между объектами:

- Среднее расстояние между всеми объектами пары кластеров с учетом расстояний внутри кластеров (Within-groups linkage).
- Расстояние между ближайшими соседями – ближайшими объектами кластеров (Nearest neighbor).
- Расстояние между самыми далекими соседями (Furthest neighbor).
- Расстояние между центрами кластеров (Centroid clustering).
- Метод медиан – тот же центроидный метод, но центр объединенного кластера вычисляется как среднее всех объектов (Median clustering).
- Среднее расстояние между кластерами (Between-groups linkage).
- Метод Варда (Ward's method). В качестве расстояния между кластерами берется прирост суммы квадратов расстояний объектов до центров кластеров, получаемый в результате их объединения.

6.3. Алгоритмы кластеризации

Процесс объединения заданного множества объектов в кластеры основывается на конкретном *алгоритме кластеризации.* Обзор алгоритмов кластеризации можно найти в книге [50].

6.4. Иерархический алгоритм

Иерархический алгоритм осуществляется в несколько шагов.

Шаг 1. Каждый объект объявляется кластером. Это кластеры 0-го уровня.

Шаг 2. Два ближайших кластера объединяются в новый кластер. В качестве расстояния между кластерами используется расстояние между объектами. Получаем кластеры 1-го уровня.

Шаг n. Пусть даны кластеры $(n-1)$-го уровня. Два ближайших кластера объединяются в новый кластер. В качестве расстояния между кластерами используется заранее выбранное расстояние между кластерами. Получаем кластеры n-го уровня.

Шаг N. Все объекты объединены в единый кластер.

При программной реализации алгоритма пользователь задает число p требуемых кластеров. Тогда процесс кластеризации будет остановлен, как только будет получено p кластеров.

Процесс кластеризации удобно изображать в виде *дендрограммы* (см. рис.6.1), на которой видно, как происходит объединение объектов в кластеры.

6.5. Пример кластерного анализа в SPSS

Применим кластерный анализ к собранным данным о семнадцати марках пива. Данные содержат сведения о расходе пива, калорийности и содержании алкоголя [14]. Воспользуемся пакетом SPSS. Выберем для кластеризации иерархический алгоритм.

Набор признаков (параметров) состоит из калорийности и расхода. Среднее расстояние между кластерами (Between-groups linkage) вычисляем с помощью дистанционной меры, т.е. евклидова

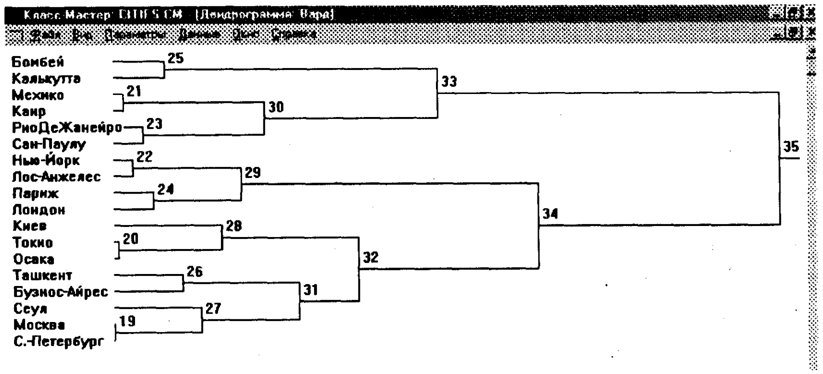


Рис. 6.1: Дендрограмма Варда в пакете «Класс-Мастер».

Таблица 6.1: Порядок объединения кластеров. Agglomeration Schedule

Stage	Cluster Combined		Coefficients	Stage Cluster First Appears		Next Stage
	Cluster1	Cluster2		Cluster1	Cluster2	
1	5	12	8,508E-03	0	0	9
2	10	17	2,880E-02	0	0	4
3	2	3	4,273E-02	0	0	13
4	8	10	6,432E-02	0	2	7
5	7	13	8,040E-02	0	0	8
6	1	15	,117	0	0	8
7	8	9	,206	4	0	14
8	1	7	,219	6	5	12
9	5	11	,233	1	0	11
10	14	16	,313	0	0	14
11	4	5	,487	0	9	16
12	1	6	,534	8	0	13
13	1	2	,820	12	3	15
14	8	14	1,205	7	10	15
15	1	8	4,017	13	14	16
16	1	4	6,753	15	11	0

расстояния, определенного с использованием стандартизированных значений.

Результат кластеризации в пространстве «калории-расходы» представляется с помощью простой *диаграммы рассеяния* (рис. 6.2). Из диаграммы видны четыре отдельных группы точек; три из них лежат в нижней половине диаграммы и одна в верхнем правом углу.

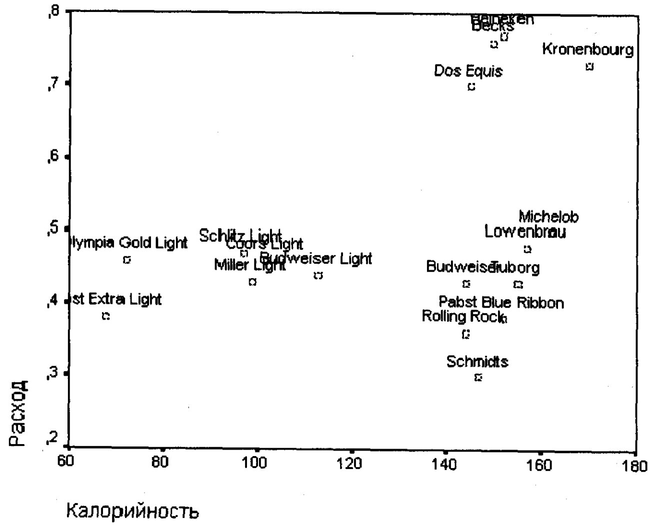


Рис. 6.2: Диаграмма рассеяния.

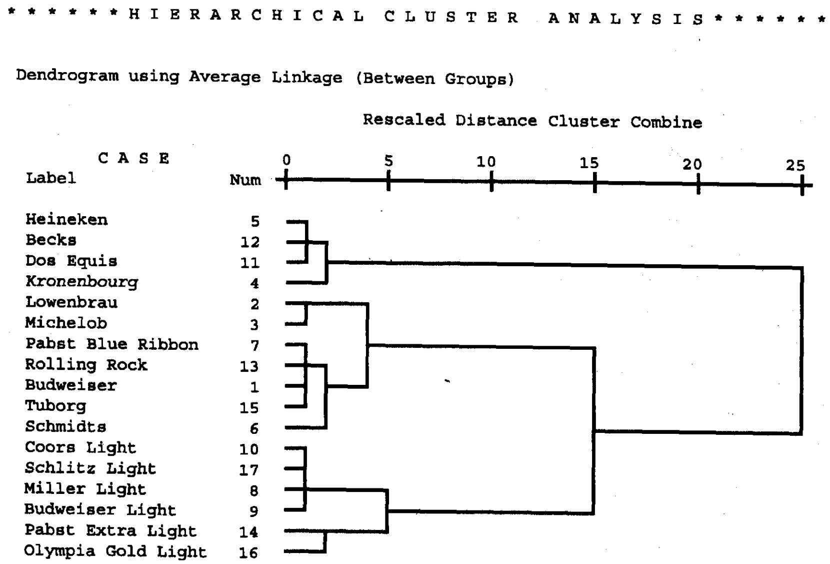


Рис. 6.3: Дендрограмма классификации.

Таблица 6.2: Принадлежность к кластеру.
Cluster Membership

Case	5 Clusters	4 Clusters	3 Clusters	2 Clusters
1:Budweiser	1	1	1	1
2:Lowenbrau	2	1	1	1
3:Michelob	2	1	1	1
4:Kronenbourg	3	2	2	2
5:Heineken	3	2	2	2
6:Schmidts	1	1	1	1
7:Pabst Blue Ribbon	1	1	1	1
8:Miller Light	4	3	3	1
9:Budweiser Light	4	3	3	1
10:Coors Light	4	3	3	1
11:Dos Equis	3	2	2	2
12:Becks	3	2	2	2
13:Rolling Rock	1	1	1	1
14:Pabst Extra Light	5	4	3	1
15:Tuborg	1	1	1	1
16:Olympia Gold Light	5	4	3	1
17:Schlitz Light	4	3	3	1

Помимо диаграммы рассеяния результаты иерархического кластерного анализа представляются в SPSS в виде табл.6.1, 6.2 и дендрограммы (рис. 6.3). Процесс объединения в кластеры во всех подробностях дан в табл.6.1. Благодаря этим данным можно выяснить очередность построения кластеров, а также их оптимальное количество. Указаны стадии объединения и объединяемые кластеры (после объединения кластер получает меньший из номеров объединяемых кластеров). Приводится расстояние между кластерами, номер стадии, на которой кластеры ранее уже участвовали в объединении, и следующая стадия, где происходит объединение с другим кластером. В нашем примере на первом шаге были объединены в один кластер марки 5 и 12 (т.е. марки пива Heineken и Becks). Они образовывают кластер с номером 5. На следующем шаге происходит объединение марок 10 и 17, затем 2 и 3 и т.д.

По показателю Coefficients можно определить оптимальное количество кластеров. На этапе, где этот показатель, сопоставленный двум кластерам, увеличивается скачкообразно, процесс объединения в кластеры можно завершить и определить количество полученных кластеров. В приведенном примере – это скачок с 1,205 до 4,017. Таким образом, оптимальное число кластеров равно трем (количество случаев минус количество шагов, после которого Coefficients увеличивается скачкообразно ($17 - 14 = 3$)).

Результаты анализа, предлагающие разбиение марок пива на 5, 4, 3 и 2 кластера, приводятся в табл.6.2. Таблица содержит информацию, говорящую о принадлежности каждой марки пива (case) к конкретному кластеру. Из таблицы видно, что марки 14 и 16 (case 14, 16) при переходе от четырехкластерного разбиения к трехкластерному были включены в кластеры, соседствующие на диаграмме рассеяния (рис. 6.2). Если посмотреть на двухкластерное разбиение, то видно, что оно объединяет в один кластер марки (case) 4, 5, 11 и 12, т.е. марки пива, лежащие в верхней части диаграммы рассеяния, а марки из нижней части диаграммы в другой кластер.

Дендрограмма классификации дана на рис. 6.3. Она наглядно представляет процесс образования кластеров (табл.6.1).

Глава 7

Регрессионный анализ

Пусть дана независимая переменная x и ее n значений $x_1, ..., x_n$, полученных в ходе эксперимента. Одновременно с измерением переменной x измерялись значения $y_1, ..., y_n$ другой, зависимой от x переменной y. Задача линейного регрессионного анализа заключается в определении переменной y как линейной функции переменной x, т.е.

$$y = a + bx. \tag{7.1}$$

7.1. Метод наименьших квадратов

Для определения коэффициентов в формуле (7.1) воспользуемся методом наименьших квадратов. Для этого будем предполагать, что числа a, b таковы, что

$$U(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 \to \min. \tag{7.2}$$

Из (7.2) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial b} = 0. \tag{7.3}$$

Решая систему (7.3), находим

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \\ b &= \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

7.2. Статистическая значимость модели линейной регрессии

Можно ли быть уверенным, что найденное уравнение (7.1) линейной регрессии не является результатом статистических ошибок, накопленных при измерении величин x, y?

Для проверки используется F-критерий Фишера. Вычисляются следующие величины:

$$\overline{S}_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (1/n)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n-1}$$

– дисперсия среднего,

$$\overline{S}_{y,\text{ост}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2}{n-2}$$

– остаточная дисперсия и

$$F = \frac{\overline{S}_y^2}{\overline{S}_{y,\text{ост}}^2}. \tag{7.5}$$

Нетрудно понять, что чем меньше величина $\overline{S}_{y,\text{ост}}^2$, тем лучше уравнение регрессии описывает переменную y.

Величина (7.5) распределена по Фишеру. Для проверки значимости[1] уравнения регрессии зададим уровень значимости α ($=0{,}05$; $0{,}01$; $0{,}001$) и рассмотрим критерий [2]

$$\mathbf{P}(F < F^{\text{табл.}}_{(n-1,n-2,\alpha)}) = \alpha, \tag{7.6}$$

где $F^{\text{табл.}}_{(n-1,n-2,\alpha)}$ берется из таблиц распределения Фишера. Как следует из (7.6), если вычисленное $F > F^{\text{табл.}}_{(n-1,n-2,\alpha)}$, то при $\alpha\cdot 100\%$-ном уровне значимости уравнение регрессии статистически значимо, т.е. найденное уравнение (7.1) адекватно описывает результаты эксперимента (ему можно доверять на $(1-\alpha)100\%$).

7.3. Проверка наличия корреляции

Полезно проверить наличие *корреляции*, т.е. линейной зависимости между данными $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_n$. Для этого вычисляется *коэффициент корреляции*

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}. \tag{7.7}$$

Напомним, что если $r \neq 0$, то можно говорить о наличии корреляции. Для того чтобы убедиться, отличается ли статистически значимо коэффициент корреляции от нуля, проводят проверку статистической гипотезы $H_0 : r = 0$. Для этого используют критерий Стьюдента

$$\mathbf{P}(|t| > t^{\text{табл.}}_{(n-2,\alpha)}) = \alpha,$$

где

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}.$$

[1] Статистическая значимость результата представляет собой оцененную меру уверенности в его «истинности» (в смысле «репрезентативности выборки»).

[2] F-статистика – критерий для проверки существенности уравнения регрессии. Если расчетное значение критерия больше табличного (с уровнем значимости α и с определенными степенями свободы, то можно считать, что уравнение регрессии значимое).

Если $|t| < t^{\text{табл.}}_{(n-2,\alpha)}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0. Но если $|t| > t^{\text{табл.}}_{(n-2,\alpha)}$, то гипотезу отвергают и принимают конкурирующую гипотезу $H_1 : r \neq 0$.

7.4. Пример в пакете SPSS

Рассмотрим пример проведения регрессионного анализа с помощью пакета SPSS для данных обследования рынка недвижимости. В результате анализа зависимости цены (тыс. долларов) от общей площади квартир (кв. м.) были получены следующие результаты:

Таблица 7.1: Коэффициенты.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	4,367	1,482		2,946	,004
	Жилая площадь (кв.м)	,172	,018	,563	9,790	,000

a Dependent Variable: Цена (тыс. долларов)

Таблица 7.2:

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2430,618	1	2430,618	95,850	,000[a]
	Residual	5249,218	207	25,359		
	Total	7679,837	208			

a Predictors: (Constant), Жилая площадь (кв. м)

b Dependent Variable: Цена (тыс. долларов)

Рассмотрим сначала результаты анализа, представленные в табл.7.1. Мы находим в ней коэффициент регрессии b и смещение a

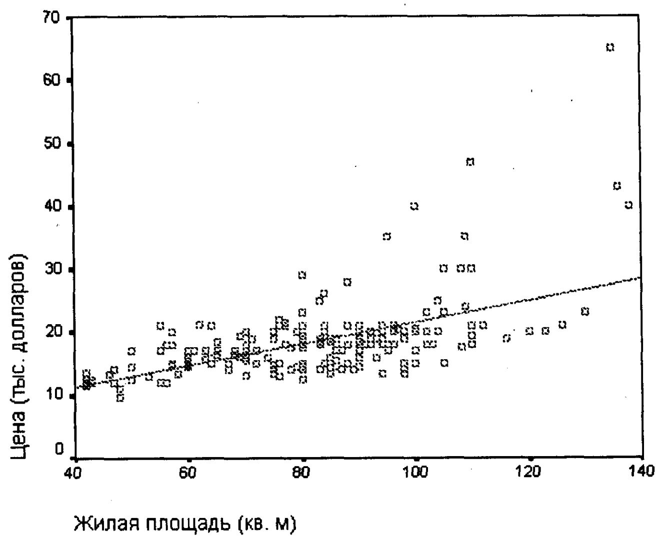


Рис. 7.1: Диаграмма рассеяния с регрессионной прямой.

по оси ординат под именем «Constant». Таким образом, уравнение регрессии выглядит следующим образом:

$$\text{Цена} = 4,367 + 0,172 \cdot \text{Площадь}.$$

Если площадь квартиры составляет, к примеру, 63 кв.м., то предполагаемая цена квартиры будет равна 15,2 тыс. долларов.

Диаграмма рассеяния (рис.7.1) иллюстрирует зависимость цены квартиры от жилой площади. Можно легко заметить очевидную связь: обе переменные изменяются в одном направлении, и множество точек, соответствующих наблюдаемым значениям, концентрируется (за некоторыми исключениями) вблизи прямой регрессии.

Табл.7.2 содержит величины дисперсии, описываемой уравнением регрессии (сумма квадратов (Sum of Squares) и обусловлена регрессией (Regression)), и дисперсии, которая не учитывается при записи уравнения (остаточная (Residual) сумма квадратов). Приводятся также их средние значения (Mean Square), т.е. величины $\overline{S}_y^2 = 2430,618$, $\overline{S}_{y,\text{ост}}^2 = 25,359$, и степень свободы df. В данном примере $df = 1$ показывает, что регрессия линейная. Статистическая

Таблица 7.3: Сводная таблица по модели.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,563^a	,316	,313	5,036

a. Predictors: (Constant), Жилая площадь (кв. м)

значимость, т.е. существование ненулевых коэффициентов регрессии a, b проверяется с помощью вычисления величины F (формула (7.5)).

Нулевая гипотеза $H_0 : a = b = 0$. В нашем примере $F = 2430,618/25,359 = 95,850$. SPSS проводит сравнение этого значения F с табличными данными. Полученный компьютером уровень значимости $\alpha = Sig.F < 0,001$ говорит о том, что гипотеза H_0 отвергается, линия регрессии найдена и данные распределены вдоль линии регрессии.

В табл.7.3 дано значение коэффициента корреляции Пирсона R, вычисляемое по формуле (7.7). В нашем случае $R = 0,563$ говорит о наличии средней корреляции. Из таблицы также видно, что полученное уравнение объясняет всего 31,6% дисперсии зависимой переменной «Цена» (коэффициент определенности $R^2 = 0,316$).

Глава 8

Компонентный анализ

Пусть дано n наблюдаемых величин $x_1, ..., x_n$, описывающих исследуемое явление.

Цель компонентного анализа состоит в том, чтобы преобразовать величины $x_1, ..., x_n$ в набор *главных компонент* $f_1, ..., f_m$ так, чтобы учет каждой следующей компоненты f_{j+1} соответствовал все более точному приближению суммарной дисперсии

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}x_i \tag{8.1}$$

переменных $x_1, ..., x_n$.

Обычно выделение первой главной компоненты f_1 должно отвечать самой большой доле λ_1 вклада этой компоненты в суммарную дисперсию (8.1). Вторая компонента f_2 объясняет уже меньшую долю $\lambda_2 < \lambda_1$ суммарной дисперсии и т.д.

Как видим, компонентный анализ *ориентирован на исследование суммарной дисперсии.*

8.1. Модель компонентного анализа

Поиск компонент $f_1, ..., f_m$ подобен вращению «осей» $x_1, ..., x_n$, поскольку используются следующие уравнения, связывающие x_i с f_j:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} f_j \quad (i = 1, ..., n). \tag{8.2}$$

Величины x_i называются переменными (признаками), w_{ij} – *нагрузками* j-й компоненты в i-й переменной.

В матричной записи уравнения (8.2) выглядят так:

$$X = WF. \tag{8.3}$$

На первом этапе поиска главных компонент вместо «осей» $f_1, ..., f_m$ рассматриваем вспомогательные «оси» $y_1, ..., y_m$. Предполагаем, что величины x_i, y_i, f_i центрированные, т.е.

$$\mathbf{M}x_i = \mathbf{M}y_i = \mathbf{M}f_i = 0 \quad (i = 1, ..., n),$$

«Вращение осей» задается в виде

$$Y = UX, \ X = U'Y, \tag{8.4}$$

где U ортогональная матрица.

Если обозначить через u_k k-ю строку матрицы U, то

$$y_i = u_i X = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} x_k.$$

Положим

$$\lambda_i = \mathbf{M}y_i^2.$$

Это дисперсия переменной y_i. Естественно считать, что величины y_i некоррелированные[1], т.е. $\mathbf{M}(y_i y_j) = 0$ $(i \neq j)$, то

$$\mathbf{M}y_i y_j = \mathbf{M} \sum_{k=1,s=1}^{n} u_{ik} x_k u_{js} x_s = \sum_{k=1,s=1}^{n} u_{ik} \mathbf{M}(x_k x_s)(u)'_{sj} =$$

$$= \sum_{k=1,s=1}^{n} u_{ik} k_{ks} (u)'_{sj} = u_i K_x u'_j = \lambda_i \delta_{ij},$$

где $K_x = \|k_{kj}\|$, $k_{kj} = \mathbf{M}(x_k x_j)$ – ковариационная матрица для x-ов. Следовательно, матрица

$$\Lambda = U K_x U'$$

является диагональной. Иначе говоря, за счет вращения осей мы привели ковариационную матрицу к диагональному виду.

[1]Мы ищем «независимые» главные компоненты, которые будут пропорциональны величинам y_i.

Элементы $\lambda_1, ..., \lambda_n$ матрицы Λ расположим в порядке убывания по величине.

Поскольку

$$u_i K_x u_i' = \lambda_i,$$

а матрица U ортогональная, т.е. $u_i u_i' = 1$, то

$$K_x u_i' = \lambda_i u_i'.$$

Иначе говоря, λ_i собственное число матрицы K_x, а u_i – ее собственные векторы.

Теперь мы в состоянии вычислить главные компоненты, нормируя компоненты y_i:

$$f_i = \lambda_i^{-1/2} y_i = \lambda_i^{-1/2} u_i X$$

или в матричном виде

$$F = \Lambda^{-1/2} Y = \Lambda^{-1/2} U X.$$

Отсюда

$$X = U' \Lambda^{1/2} F,$$

и для матрицы весов имеем

$$W = U' \Lambda^{1/2}.$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{D} x_i = Sp[K_x] = Sp[\Lambda] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D} y_i,$$

т.е. *суммарная дисперсия переменных x_i равна суммарной дисперсии ненормированных главных компонент y_i*. Таким образом, можно легко теперь найти процент, вносимый каждой главной компонентой в суммарную дисперсию переменных x_i.

Обычно оставляют, и это основная идея *метода главных компонент*, несколько главных компонент $f_1, ..., f_m$ $(m < n)$, дающих высокий процентный вклад в суммарную дисперсию.

8.2. Геометрическая иллюстрация метода главных компонент

Каждая переменная x_i $(i = 1, ..., n)$ при измерении получает значение x_{ij} $(j = 1, ..., p)$. Назовем вектор $Ob_j = (x_{1j}, ..., x_{nj})$, $j = 1, ..., p$, *j-м объектом*.

При обработке экспериментальной информации встречаются ситуации, когда данные типа «объект-признак» содержат общее число признаков до ста и более, а число объектов, как правило, в несколько раз превышает число признаков. Задача компонентного анализа состоит в существенном уменьшении числа признаков без потери значительной части информации, содержащейся в данных.

Результаты наблюдений представляют в виде матрицы «объекты-признаки»

		Признаки			
Номер объекта k	Объекты	x_1	x_2	...	x_n
1	Ob_1	x_{11}	x_{21}	...	x_{n1}
2	Ob_2	x_{12}	x_{22}	...	x_{n2}
...	...	...	...	...	...
p	Ob_p	x_{1p}	x_{2p}	...	x_{np}

Каждой переменной x_i сопоставим в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ ось x_i. Тогда объекты – это точки в пространстве $\mathbb{R}^n$.

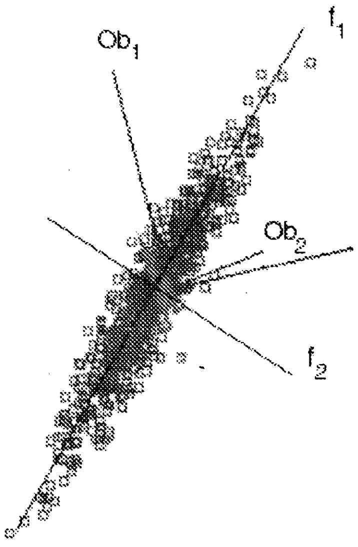


Рис. 8.1: Объекты в пространстве признаков.

Геометрически поиск компонент означает, что для построения первого главного компонента берется в $\mathbb{R}^n$ прямая, проходящая через центр координат и облако рассеяния объектов (данных).

В основном процедура выделения главных компонент подобна вращению, максимизирующему дисперсию (варимакс) исходного пространства переменных. Цель вращения заключается в максимизации дисперсии (изменчивости) «новой» переменной f_1 (компонента) и минимизации разброса вокруг нее.

Объектам можно сопоставить расстояния их проекций на эту прямую до центра координат, причем для одной из половин прямой (по отношению к нулевой точке) можно взять эти расстояния с отрицательным знаком. Такое построение представляет собой новую переменную, которую мы просто назовем осью. При построении компоненты отыскивается такая ось, чтобы ее дисперсия была максимальна. Это означает, что этой осью объясняется максимум дисперсии переменных. Найденная ось после нормировки используется в качестве первой компоненты. Если облако данных вытянуто в виде эллипсоида (имеет форму «огурца»), компонента совпадает с направлением, в котором вытянуты объекты, и по нему (по проекциям) с наибольшей точностью можно предсказать значения исходных переменных [93].

8.2.1. Интерпретация главных компонент

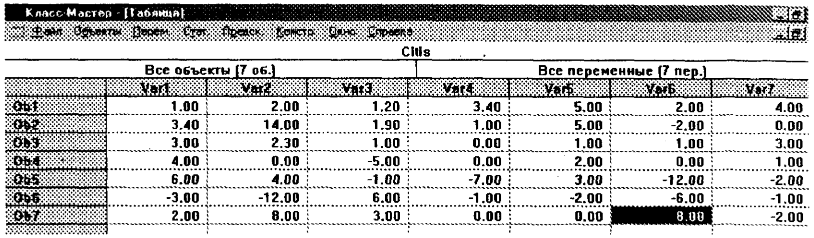
После того, как главные компоненты найдены и известен их вклад в суммарную дисперсию, главной задачей становится *интерпретация* (поиск смысла) найденных главных компонент в контексте проводимого исследования. Для интерпретации необходимо приписать главной компоненте *термин*. Этот термин появляется на основе анализа нагрузок (корреляций[2]) компоненты в исходных переменных. Чем больше значение нагрузки, тем больше эта переменная участвует в *определении* термина компоненты. Иначе говоря, интерпретация компоненты определяется переменными, нагрузка в которые изучаемой компоненты наибольшая.

Пример 8.1.

Рассмотрим данные наблюдений, занесенные в пакет «Класс-Мастер»:

Задавая две главные компоненты, получаем следующие результаты.

[2]Поскольку $w_{ij} = \mathbf{M}(x_i f_j)$.


Класс-Мастер - [Таблица]

Cltls

	Все объекты (7 об.)			Все переменные (7 пер.)			
	Var1	Var2	Var3	Var4	Var5	Var6	Var7
Ob1	1.00	2.00	1.20	3.40	5.00	2.00	4.00
Ob2	3.40	14.00	1.90	1.00	5.00	-2.00	0.00
Ob3	3.00	2.30	1.00	0.00	1.00	1.00	3.00
Ob4	4.00	0.00	-5.00	0.00	2.00	0.00	1.00
Ob5	6.00	4.00	-1.00	-7.00	3.00	-12.00	-2.00
Ob6	-3.00	-12.00	6.00	-1.00	-2.00	-6.00	-1.00
Ob7	2.00	8.00	3.00	0.00	0.00	8.00	-2.00

Рис. 8.2: Матрица «объекты-признаки».

Объясненная дисперсия

Компонента	Дисперсия	%	Накопление
f_1	3.73	53.30	53.30
f_2	1.65	23.63	76.93

Нагрузки

Факторы	Признаки						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
f_1	0.47	0.27	0.36	0.22	-0.31	-0.43	-0.50
f_2	0.04	-0.60	0.13	0.67	-0.21	0.36	-0.08

Как видим, наиболее компонента f_1 коррелирует с переменными с x_1, x_7 (но с разным знаком), а компонента f_2 с переменными x_2, x_4 (с разным знаком). Это дает возможность выявить смысл компонент, т.е. дать содержательную интерпретацию компонентам f_1, f_2.

8.3. Сколько главных компонент следует выделять?

Решение о том, когда следует остановить процедуру выделения компонент, главным образом зависит от точки зрения на то, что считать малой долей дисперсии. Это решение достаточно произвольно, однако имеются два критерия: критерий Кайзера (Kaiser, 1960) и критерий каменистой осыпи Кэттелла (Cattell, 1966), которые в большинстве случаев позволяют рационально выбрать число компонент [54].

При применении критерия Кайзера берутся только компоненты, собственные числа λ_i которых больше единицы. В примере 8.1 так и было сделано.

Критерий каменистой осыпи является графическим методом. На график наносятся собственные числа λ_i в порядке их убывания. Выделение компонент заканчивается на той компоненте, после которой исследуемая зависимость близка к горизонтальной (см. рис.8.3).

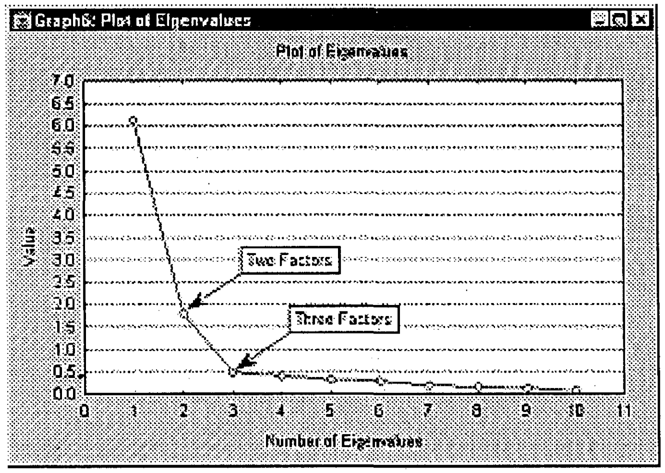


Рис. 8.3: Собственные числа λ_i в пакете STATISTICA.

8.4. Статистические гипотезы компонентного анализа

8.4.1. Проверка статистической гипотезы значимости корреляционной матрицы

Корреляционная матрица дает информацию о наличии зависимости между переменными-признаками $x_1, ..., x_n$. При рассмотрении

предполагалось известной корреляционная матрица

$$R_x = \left\| \frac{k_{ij}}{\sqrt{\mathbf{D}x_i}\sqrt{\mathbf{D}x_j}} \right\|, \quad k_{ij} = \mathbf{M}(x_i x_j).$$

На практике же главные компоненты оцениваются по выборочной ковариационной или корреляционной матрице.

Естественно поэтому проверить статистическую гипотезу о значимости корреляционной матрицы R_x. Проверка делается с помощью критерия Бартлетта:

$$\chi^2 = -[p - \frac{1}{6}(2n+5)] \ln |R_x|, \tag{8.5}$$

$$|R_x| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

который распределен по χ^2 с $\nu = n(n-1)/2$ степенями свободы.

Нулевая гипотеза H_0 о том, что корреляционная матрица является незначимой отвергается, и принимается альтернативная гипотеза H_1, говорящая о значимости корреляционной матрицы, если $\chi^2 > (\chi^2)^{\text{табл.}}_{(\nu,\alpha)}$, где $100\alpha\%$ – уровень значимости.

Если при проверке гипотезы отвергается значимость всей корреляционной матрицы, то нахождение главных компонент не имеет смысла.

8.4.2. Проверка статистической гипотезы значимости различия оставшихся главных компонент

Если корреляционная матрица значима, то можно найти главные компоненты.

После выделения m главных компонент возникает вопрос, значимо ли различие между оставшимися главными компонентами. Проверка гипотезы осуществляется по критерию, предложенному Бартлеттом

$$\chi^2 = -\left(p - \frac{1}{6}(2n+5) - \frac{2}{3}\right) \ln R_{n-m}. \tag{8.6}$$

Эта случайная величина имеет приближенное χ^2-распределение с $\nu = (n-m)(n-m-1)/2$ степенями свободы. Причем

$$R_{n-m} = |R_x| \prod_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \left(\frac{n - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i}{n-m} \right)^{-(n-m)}.$$

Нулевая гипотеза H_0 о том, что различие между оставшимися главными компонентами является незначимым, отвергается и альтернативная гипотеза H_1, говорящая о значимости различия, принимается, если $\chi^2 > (\chi^2)^{\text{табл.}}_{(\nu,\alpha)}$, где α – уровень значимости ($100\alpha\%$).

8.5. Пример компонентного анализа в пакете SPSS

Рассмотрим пример проведения компонентного анализа в SPSS для полученных данных опроса россиян, касающихся их отношения к иностранцам. Результаты опроса содержат оценки отношения (по семибалльной шкале: от полного неприятия до очень дружеского расположения) по пятнадцати признакам $x1$ – $x15$. После проведения анализа с помощью SPSS получены следующие результаты, представленные в табл.8.1.

Рассмотрим результаты анализа. Был выбран метод вращения факторов (компонент) Varimax с нормализацией Кайзера. Табл.8.1 содержит сведения об информативности главных компонент. Первая компонента (component) объясняет 34,308% общей дисперсии, вторая компонента – 12,97% ($\lambda_2 = 1,945$), третья – 9,433% ($\lambda_3 = 1,415$), четвертая – 6,601% 0,99 ($\lambda_4 = 0,99$) и т.д. Первые три компоненты объясняют 56,711% дисперсии, первые четыре – 63,312%. Поскольку для четвертой компоненты $\lambda_4 = 0,99$, то в силу критерия Кайзера (см. § 8.3) для анализа отобрано только три компоненты. В качестве вспомогательного средства для определения числа учитываемых компонент может быть полезна специальная точечная диаграмма (рис. 8.4). Из графика видно: значимыми следует считать только первые три компоненты (метод каменистой осыпи – см. § 8.3).

Таблица 8.1: Объясненная суммарная дисперсия. Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	5,146	34,308	34,308	3,466	23,105	23,105
2	1,945	12,970	47,278	2,536	16,907	40,013
3	1,415	9,433	56,711	2,505	16,698	56,711
4	,990	6,601	63,312			
5	,936	6,238	69,550			
6	,760	5,068	74,617			
7	,693	4,622	79,240			
8	,612	4,083	83,323			
9	,529	3,529	86,852			
10	,473	3,151	90,004			
11	,433	2,889	92,893			
12	,339	2,262	95,155			
13	,301	2,007	97,161			
14	,245	1,635	98,797			
15	,181	1,203	100,000			

Extraction Method: Principal Component Analysis.

В табл.8.2 представлена матрица факторных нагрузок после вращения. Попытаемся объяснить отобранные компоненты. Так, признак $x1$ сильнее всего коррелирует с компонентой 2, величина корреляции составляет 0,628, признак $x2$ также сильнее всего коррелирует с компонентой 2 (0,657), признак $x3$ коррелирует сильнее всего с компонентой 3 (0,711) и т.д. Из-за равных по величине нагрузок как для компоненты 3, так и для компоненты 1 признак $x7$ можно включить в обе компоненты. Таким образом, при интерпретации компонент следует учесть; что компонента 1 связана с признаками $x4$, $x7$, $x12$, $x13$, $x14$, $x15$, компонента 2 – с признаками $x1$, $x2$, $x5$, $x8$, $x9$, $x11$, наконец, компонента 3 – с признаками $x3$, $x6$, $x7$, $x10$.

При помощи диаграммы компонент можно отследить действие вращения, осуществленного с помощью метода Varimax. Для наглядности взято две учитываемых компоненты. На диаг. 8.5 в графическом виде представлены факторные нагрузки обеих компонент до вращения. На диаг. 8.6 стало заметно смещение факторных нагрузок в сторону главных осей.

Таблица 8.2: Повернутая матрица факторных нагрузок.
Rotated Component Matrix[a]

	Component		
	1	2	3
x1	-,466	,628	-,191
x2	-,141	,657	,215
x3	,327	-,153	,711
x4	,533	-,106	,394
x5	-,362	,783	4,515E-02
x6	-1,216E-02	-3,782E-02	,763
x7	,525	3,577E-02	,543
x8	-,117	,719	-,267
x9	2,564E-02	,551	-8,847E-02
x10	,252	-9,515E-02	,685
x11	,125	,392	-,292
x12	,802	-,199	,108
x13	,685	-,110	,465
x14	,837	-,144	-2,504E-02
x15	,725	-4,822E-02	,144

Extraction Method: Principal Component Analysis.

Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.

a. R

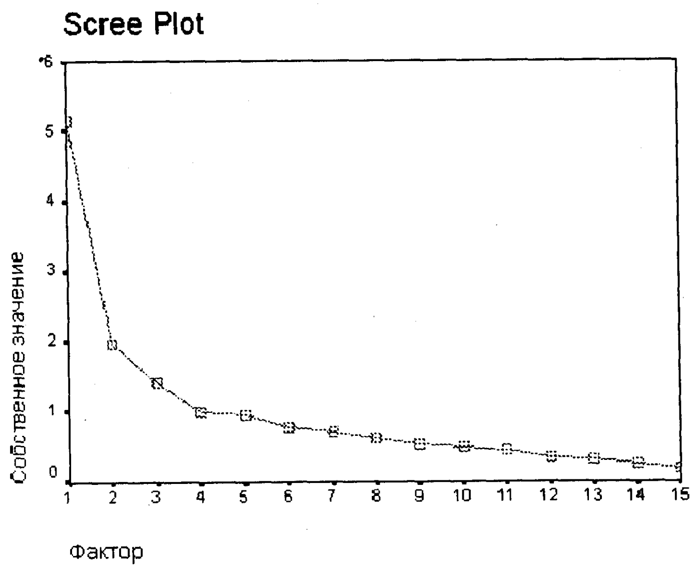


Рис. 8.4: Точечная диаграмма.

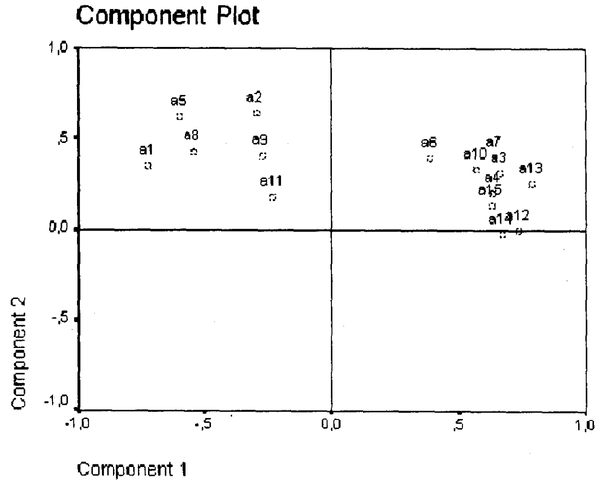


Рис. 8.5: Диаграмма компонент.

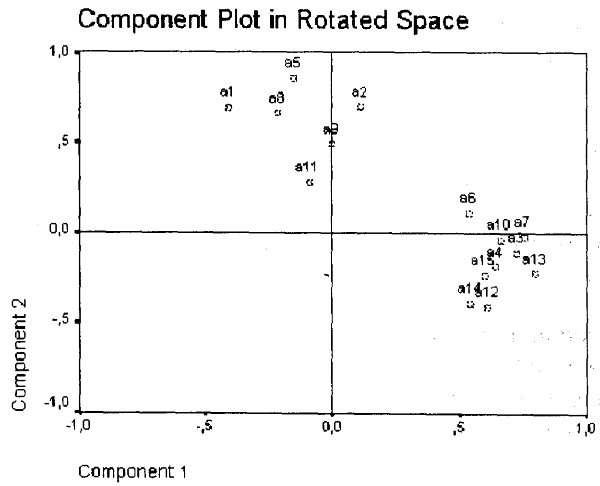


Рис. 8.6: Диаграмма компонент после вращения.

Глава 9

Факторный анализ

Пусть дано n наблюдаемых случайных величин $x_1, ..., x_n$, описывающих исследуемое явление. В предположении, что, стараясь изначально достаточно полно описать явление, мы переборщили с набором наблюдаемых величин и в действительности все они сводятся к **меньшему** числу величин $f_1, ..., f_m$, $m \ll n$, поставим перед собой задачу выявить величины f_i по величинам $x_1, ..., x_n$. Эта задача и есть задача *факторного анализа*. Величины $f_1, ..., f_m$ при этом носят название *факторов*.

В отличие от величин x_i, которые непосредственно измеряются при изучении интересующего нас общественного явления, факторы чаще всего не поддаются непосредственному измерению, и их выделение означает выявление скрытых (латентных) ёмких внутренних характеристик изучаемого явления.

Выделение факторов нацелено на максимально полное выявление корреляций между величинами $x_1, ..., x_n$. Факторы выделяются так и в таком количестве, чтобы наилучшим образом объяснить корреляционную матрицу для $x_1, ..., x_n$.

Как видим, факторный анализ *ориентирован на исследование корреляций.*

9.1. Основная модель факторного анализа

Факторы $f_1, ..., f_m$ ищутся исходя из уравнения

$$x_i = \sum_{k=1}^{m} l_{ik} f_k + e_i, \quad (i = 1, ..., n). \tag{9.1}$$

Величины x_i называются *переменными*, l_{ik} – *нагрузками* k-го фактора в i-й переменной (или i-й переменной на k-й фактор), e_i – *остатками*, представляющими источники отклонений, действующих только на x_i.

Предполагаем, что случайные величины x_i, e_i, f_k центрированны, т.е.

$$\mathbf{M}x_i = 0, \ \mathbf{M}e_i = 0 \ (i = 1, ..., n), \ \mathbf{M}f_k = 0 \ \ (k = 1, ..., m),$$

и для ковариационных матриц выполняются условия:

$$\mathbf{M}[(f_i - \mathbf{M}f_i)((f_j - \mathbf{M}f_j)] = \mathbf{M}[f_i f_j] = \delta_{ij},$$

$$\mathbf{M}[(e_i - \mathbf{M}e_i)((e_j - \mathbf{M}e_j)] = \mathbf{M}[e_i e_j] = v_i \delta_{ij},$$

$$\mathbf{M}[(f_i - \mathbf{M}f_i)((e_j - \mathbf{M}e_j)] = \mathbf{M}[f_i e_j] = 0,$$

где $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ – символы Кронеккера. Иначе говоря, факторы и остатки считаются некоррелированными.

Из уравнения (9.1) следует, что, во-первых,

$$l_{ij} = \mathbf{M}[x_i f_j],$$

т.е. нагрузки – это корреляции между переменными и факторами, и, во-вторых,

$$\begin{aligned} k_{ii} &= \sum_{k=1}^{m} l_{ik}^2 + v_i, \\ k_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} l_{ik} l_{jk}, \quad (i \neq j), \end{aligned} \tag{9.2}$$

где

$$k_{ij} = \mathbf{M}[(x_i - \mathbf{M}x_i)(x_j - \mathbf{M}x_j)] = \mathbf{M}[x_i x_j].$$

Величины l_{ik}^2 называются *i-ми общностями*, а v_i – *специфичностями*. Общность представляет собой часть дисперсии k_{ii} переменных, объясненную факторами, специфичность – часть не объясненной факторами дисперсии.

В матричной записи эти уравнения выглядят так:

$$K_x = LL' + V. \tag{9.3}$$

Уравнение (9.3) является *основной моделью* факторного анализа.

Поскольку ковариационная матрица K_x связана с корреляционной матрицей

$$R_x = \left\| \frac{k_{ij}}{\sqrt{\mathbf{D}x_i}\sqrt{\mathbf{D}x_j}} \right\|, \quad K_x = \|k_{ij}\|, \tag{9.4}$$

то уравнения (9.3)-(9.4) дают представление корреляционной матрицы через матрицу нагрузок $L = \|l_{ik}\|$ и диагональную матрицу $V = \|v_i\delta_{ij}\|$ с положительными собственными элементами v_i.

Отметим, что матрица $LL' = LIL'$, где I единичная. Иначе говоря, матрица LL' – это результат преобразования матрицы I к новому базису. Поэтому ее собственные числа положительны.

9.2. Решение уравнений основной модели

Нахождение факторов сводится к нахождению нагрузок l_{ik} и ошибок e_i по заданным $x_1, ..., x_n$. В факторном анализе решают не уравнение (9.1), а уравнение (9.3). В левой части этого уравнения $n(n+1)/2$ известных величин – элементов ковариационной матрицы. Справа $nm + n = n(m+1)$ неизвестных l_{ik}, v_i. Поэтому при $m+1 > (n+1)/2$, где, напомним, n – число наблюдаемых случайных величин, а m – число искомых факторов, нельзя найти единственное решение.

Если $m+1 < (n+1)/2$, то число неизвестных меньше числа уравнений и задача вообще становится неразрешимой. Следовательно, число факторов не может быть небольшим. Но их не должно быть слишком много, иначе теряется исходный смысл задачи по отысканию факторов.

Факторное решение не единственно. В самом деле, запишем уравнение (9.1) в матричном виде

$$X = LF + E.$$

Пусть U – ортогональная матрица. Для нее $UU' = I$. Поскольку

$$X = LUU'F + E = (LU)(U'F) = \widetilde{L}\widetilde{F} + E, \tag{9.5}$$

где $\widetilde{F} = U'F$ – новые факторы, а $\widetilde{L} = LU$ – новые нагрузки. При этом основная модель (9.3) инвариантна относительно преобразования (9.5)

$$K_x = LL' + V = LUU'L' + V = (LU)(LU)' + V = \widetilde{L}\widetilde{L}' + V.$$

Таким образом, факторы определяются с точностью до вращения $F \to U'F$ в m-мерном факторном пространстве.

Вращение осей используется в факторном анализе для того, чтобы наиболее ярко выявить те факторы, которые наилучшим образом объясняют изучаемые пременные x_i. Вращение производится таким образом, чтобы после вращения фактор, объясняющий переменную x_i, имел в ней нагрузку существенно отличную от нуля, а необъясняющий – близкую к нулю (рис.9.1).

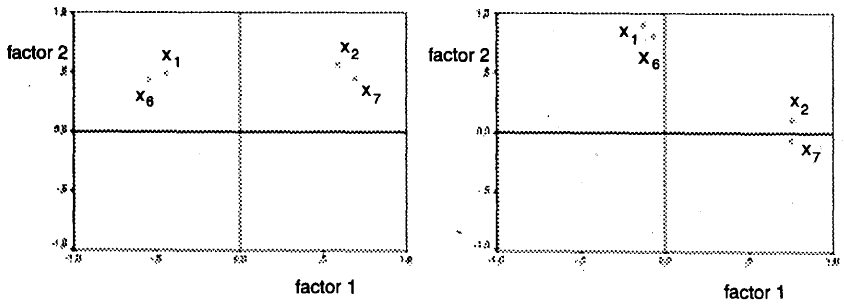


Рис. 9.1: Диаграмма факторов до (слева) и после (справа) вращения. Координаты точек-переменных определяются их нагрузками на фактор.

Повернутое решение имеет преимущество перед предыдущим решением: для объяснения переменной требуется минимальное число скрытых причин-факторов (точки переменных находятся вблизи соответствующих осей).

Существуют различные методы вращения. В пакете SPSS даются методы ортогонального вращения: варимакс, эквамакс, квартимакс и один метод косоугольного вращения – облимин.

9.2.1. Метод максимального правдоподобия

Для решения уравнения (9.3) используются различные методы. Один из них – *метод максимального правдоподобия.*

Функция максимального правдоподобия берется в виде [48, с.20]

$$F = -\frac{1}{2}\ln\ |K_x| - \frac{1}{2}(p-1)\ Sp(A_x K_x^{-1}), \tag{9.6}$$

$$K_x = LL' + V,$$

где $A_x = ||a_{ij}||$ – выборочная ковариационная матрица. Объем выборки по каждой переменной x_i равен p.

Для оценки неизвестных параметров l_{ij}, v_i предполагается, что они максимизируют функцию $F(l_{ij}, v_i)$. Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial l_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial v_i} = 0, \tag{9.7}$$

$$(i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m).$$

Матрица L ищется так, чтобы $(n \times m)$ матрица

$$J = L'V^{-1}L$$

была диагональной. Считаем также, что диагональные элементы матрицы J расположены в порядке убывания (по величине).

Решение системы (9.7) имеет вид

$$v_i = a_{ii} - \sum_{j=1}^{m} l_{ij}^2. \tag{9.8}$$

$$L' = J^{-1}L'V^{-1}(A_x - V). \tag{9.9}$$

Из уравнения (9.9) следует, что матрица

$$H = L'V^{-1}(A_x - V)V^{-1}L$$

равна J^2 и поэтому диагональна.

Уравнения (9.8)-(9.9) решаем методом итераций. Для этого задаются начальные матрицы $L_{(1)}, V_{(1)}$, а последующие их приближения можно находить с помощью итерационной схемы

$$\begin{cases} L'_{(N+1)} = J^{-1}(L'_{(N)}V_{(N)}^{-1}A_x - L'_{(N)}), \\ v_{(N+1)} = a_{ii} - \sum\limits_{j=1}^{m} l_{ij(N)}^2, \end{cases} \tag{9.10}$$

$$N = 1, 2, ...$$

В действительности итерации делаются по более сложной схеме, чем приведено в первом уравнении схемы (9.10). Усложнение связано с тем, что для вычисления $(N+1)$-го приближения второй строки матрицы L', связанной со вторым фактором, которому соответствует второе по величине собственное значение матрицы J (или H), используется уже найденное $(N+1)$-е приближение для первой строки, связанной с первым фактором. Такое же уточнение делается для третьей строки (третий фактор), т.е. используются найденные N_1 приближений для первой и вторых строк и т.д.

Покажем, как реализуются вычисления следующих приближений при заданном числе факторов m.

Обозначим через l_i, l'_i i-е строки матриц L, L' соответственно. Вычислим

$$w'_1 = l'_{1(1)}V_{(1)}^{-1},$$

$$u'_1 = w'_1 A_x - l'_{1(1)}$$

и положительное число

$$h_1 = u'_1 w_1$$

– 1-й элемент матрицы H.

Тогда в соответствии со схемой (9.10) 1-я строка следующего приближения $L'_{(2)}$ матрицы L' равна

$$l'_{1(2)} = \frac{1}{\sqrt{h_1}}u'_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{h_1}}(l'_{1(1)}V_{(1)}^{-1}A_x - l'_{1(1)}).$$

Если имеется второй фактор, т.е. $m \geq 2$, то вторая итерация находится с помощью формулы

$$l'_{2(2)} = \frac{1}{\sqrt{h_2}}u'_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{h_2}}(l'_{2(1)}V_{(1)}^{-1}A_x - l'_{2(1)} - j_{21}l'_{1(2)}),$$

где

$$j_{21} = w'_2 l_{1(2)},\quad w'_2 = l'_{2(1)}V_{(1)}^{-1},\quad h_2 = u'_2 w_2,$$

$$u'_2 = w'_2 A_x - l'_{2(1)} - j_{21} l'_{1(2)}.$$

Для третьего фактора имеем

$$l'_{3(2)} = \frac{1}{\sqrt{h_3}} u'_3 \equiv \frac{1}{\sqrt{h_3}} (l'_{3(1)} V^{-1}_{(1)} A_x - l'_{3(1)} - j_{31} l'_{1(2)} - j_{32} l'_{2(2)}),$$

где

$$j_{31} = w'_3 l_{1(2)}, \quad j_{32} = w'_3 l_{2(2)},$$

$$w'_3 = l'_{3(1)} V^{-1}_{(1)}, \quad h_3 = u'_3 w_3,$$

$$u'_3 = w'_3 A_x - l'_{3(1)} - j_{31} l'_{1(2)} - j_{32} l'_{2(2)}.$$

Данная схема продолжается для значений числа m. Полученные матрицы $L_{(2)}, V_{(2)}$ используются для нахождения следующего 3-его приближения. В итоге на каком-то шаге происходит остановка итераций и фиксируются найденные оценки $\widehat{L}, \widehat{V}$ матриц L, V и, естественно, оценка $\widehat{K}_x$ ковариационной матрицы K_x. Последняя оценка позволяет оценить корреляционную матрицу R_x. Иначе говоря, происходит *объяснение корреляций посредством выделенных k факторов.*

На практике итерационный процесс, как правило, сходится, хотя отсутствует соответствующее доказательство [48, с.25]. Существуют и другие методы решения уравнений основной факторной модели.

9.2.2. Оценка числа факторов

Сколько факторов нужно брать? Предлагается следующий статистический метод. Будем проверять нулевую гипотезу H_0 : {требуется m факторов}.

Предлагается приближенный χ^2-критерий [48, с.32-35]:

$$\chi^2 \simeq [(p-1) - \frac{1}{6}(2n+5) - \frac{2}{3}m] \sum_{i<j} \frac{(a_{ij} - \widehat{c}_{ij})^2}{\widehat{v}_i \widehat{v}_j}. \qquad (9.11)$$

Здесь величины $\widehat{c}_{ij}, \widehat{v}$ – результат оценки ковариационной матрицы, матрицы нагрузок L и матрицы V, т.е. результат, например, решения основной факторной модели.

Зададим уровень значимости $100\alpha\%$ и вычисляем по формуле (9.11) значение $\chi^2_{\text{выч.}}$. Сравниваем его с табличным $\chi^2_{\text{табл.}}$ с числом степеней свободы, равным $[(n-m)^2 - (n+m)]/2$. Если $\chi^2_{\text{выч.}} <$

$\chi^2_{\text{табл.}}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отвергается и в факторной модели требуется по крайнем мере $m+1$ факторов.

9.3. Интерпретация факторов

Для интерпретации необходимо приписать фактору термин. Этот термин появляется на основе анализа корреляций фактора с исходными переменными.

9.4. Практическое применение факторного анализа

Пусть исследуются p объектов и относительно каждого из них замеряются значения x_{ik} $(k = 1, 2, ..., p)$ признака x_i $(i = 1, ..., n)$. В результате имеем матрицу наблюдений «объекты-признаки»:

		Признаки			
Номер объекта k	Объекты	x_1	x_2	...	x_n
1	Ob_1	x_{11}	x_{21}	...	x_{n1}
2	Ob_2	x_{12}	x_{22}	...	x_{n2}
...	...	...	...	...	...
p	Ob_p	x_{1p}	x_{2p}	...	x_{np}

Объясним связь с терминологией предыдущих параграфов. Признак x_i – это случайная величина. Ее значения x_{ik} измеряются при исследовании объектов. С точки зрения статистики, последовательность $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ip}$ не что иное, как выборка, соответствующая наблюдениям случайной величины (=признака) x_i.

Число n – размерность признакового пространства. Факторный анализ, как и компонентный анализ, позволяет сократить размерность признакового пространства. Оба метода являются эффективными способами исследования взаимосвязей между переменными x_i. Основное различие между этими методами заключается в том, что главные компоненты являются линейными функциями от наблюдаемых переменных, в то время как факторы не выражаются через комбинацию исходных признаков. Главные компоненты не объясняют корреляции между переменными, а факторы как раз для этого и отыскиваются.

Пример 9.1. Имея данные наблюдений [48], приведенные в табл.9.1, вычисляют выборочную ковариационную матрицу $A_x = ||a_{ij}||$. Затем выбирается модель факторного анализа, к примеру основная модель (9.3), и с помощью того или иного метода находится решение факторных уравнений.

Таблица 9.1.

Матрица корреляций

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	0,52	0,39	0,47	0,34	0,42	0,57	0,43	0,63
0,52	1,00	0,47	0,50	0,41	0,46	0,54	0,28	0,64
0,39	0,47	1,00	0,35	0,27	0,25	0,45	0,21	0,50
0,47	0,50	0,35	1,00	0,69	0,79	0,44	0,28	0,50
0,35	0,41	0,27	0,69	1,00	0,67	0,38	0,14	0,40
0,43	0,46	0,25	0,79	0,67	1,00	0,37	0,31	0,47
0,57	0,54	0,45	0,44	0,38	0,37	1,00	0,38	0,68
0,43	0,28	0,21	0,28	0,14	0,31	0,38	1,00	0,47
0,63	0,64	0,50	0,50	0,40	0,47	0,68	0,47	1,00

Оценки максимального правдоподобия нагрузок при трех факторах даны в следующей табл.9.2:

Таблица 9.2.

Нагрузки

	Признаки								
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
f_1	0.66	0.68	0.49	0.83	0.70	0.82	0.66	0.46	0.77
f_2	0.33	0.25	0.30	-0.29	-0.31	-0.38	0.39	0.29	0.43
f_3	-0.07	0.19	0.22	0.04	0.16	-0.10	0.08	-0.49	0.01

Суммарная дисперсия в данном примере равна 9, и процент, выделяемый каждым из факторов, можно получить, вычисляя

$$\left(\frac{100}{9}\right)\sum_i l_{ik}^2$$

для $k = 1, 2, 3$. Эти значения равны соответственно 47,3%, 10,7% и 4,2%. Три фактора объясняют 62,2% суммарной дисперсии. Из табл.9.2 видим, что третий фактор связан только с восьмым признаком. Фактор 1 коррелирует больше всего с признаками x_4, x_5, x_6, x_9, а 2-й – с x_7 и x_9. Это необходимо учитывать при интерпретации факторов.

Глава 10

Семантический дифференциал

Метод семантического дифференциала предложен американским психологом Осгудом в 1952 г. и применяется в исследованиях, связанных с восприятием и поведением человека, с анализом социальных установок и личностных смыслов, в психологии и социологии, в теории массовых коммуникаций и рекламе, а также в эстетике.

Семантический дифференциал – это методика исследования эмоционального отношения людей к тем или иным понятиям для определения их смысла. Респонденту предлагается выразить отношение к некоторому объекту (понятию, изображению) по совокупности биполярных шкал, в основном семибалльных. Примером может служить следующая шкала, приведенная в табл. 10.1.

Испытуемому предлагается оценить набор объектов (понятий, изображений) по заданной шкале. С помощью многомерного анализа, в частности с помощью факторного анализа, строятся модели индивидуальных и групповых представлений в виде так называемых «семантических пространств».

Крайние позиции на шкалах описаны вербальными антонимами[1].

[1] *Антонимы* – слова, имеющие противоположные значения, напр.: твердый – мягкий, дорого – дешево, болезнь – здоровье.

Таблица 10.1.

	+ 3	+ 2	+ 1	0	- 1	- 2	- 3	
веселая								грустная
хорошая								плохая
добрая								злая
светлая								темная
долгая								короткая
сильная								слабая
сложная								простая
прошедшая								настоящая
теплая								холодная
быстрая								медленная
активная								пассивная
женская								мужская
вода								земля
безопасная								опасная
нежная								грубая
мягкая								твердая

Совокупность шкал образует исходное пространство шкал. Число градаций на шкале может быть и меньше семи. Крайние позиции могут носить и невербальный характер. Например, Осгуд использовал знаки «черный круг - белый круг», «стрелка вверх - стрелка вниз» и т. д. при изучении представителей различных языковых культур (индейцев, мексиканцев, японцев и американцев) по их отношению к разным понятиям.

Семантический дифференциал является разновидностью проективных методик. Особенность таких процедур заключается в том, «что стимулируемая ситуация приобретает смысл не в силу ее объективного содержания, но по причинам, связанным с субъективными наклонностями и влечениями испытуемого, т.е. вследствие субъективированного, личностного значения, придаваемого ситуации испытуемым. Испытуемый как бы проецирует свои свойства в ситуацию» [105, с.300].

Цель метода – выявление категориальных структур сознания («несущих структур»), т.е. структур осознания субъектом окружающего мира. Категориальные структуры могут не осознаваться как таковые. Знания субъекта, его система значений, конструктов в психосемантическом эксперименте задействованы в режиме употребления (а не интроспекции) [61, с.176]. Респонденты выносят суждения о сходстве и различии объектов, шкалируют, оценивают. Далее строится матрица данных, к которой применяются методы

математической статистики (факторный анализ). Математический аппарат позволяет построить *семантические пространства* и выделить факторы. Если в ассоциативном исследовании участнику опроса предоставляются максимальные возможности выражения, то при использовании семантического дифференциала он ограничен жесткой процедурой измерения в границах семибальной шкалы.

10.1. Пример применения метода семантического дифференциала

Ниже мы рассмотрим метод семантического дифференциала на примере исследования, в основе которого использовалась шкала, данная в табл.10.1.

Цель исследования: построение семантических пространств, описывающих восприятие понятия *стабильности*; выявление факторов, влияющих на восприятие.

Задачи исследования:

1. Анализ сходства и различия семантики понятий «стабильность» и «хаос».

2. Проверка семантической близости понятий «стабильность» и «уверенность».

3. Выявление сходства и различия семантики понятий «стабильность» и «развитие», а также «страх» и «катастрофа».

Гипотеза исследования:

> В структуре семантического пространства существуют значимые факторы, объединяющие и различающие анализируемые понятия.

Были использованы следующие факторы:

– фактор «оценка» (признаки: веселый - грустный, хороший - плохой, светлый - темный, добрый - злой. Дополнительные признаки: вода - земля, женский - мужской);

– фактор «сила» (признаки: долгий - короткий, сильный - слабый, сложный - простой);

– фактор «активность» (признаки: прошедший - настоящий, теплый - холодный, быстрый - медленный, активный - пассивный);

– фактор «комфортность» (признаки: безопасный - опасный, мягкий - твердый, нежный - грубый).

При обработке данных первоначально был произведен анализ значений по всем шкалам (табл.10.1). Дальнейшая обработка данных проводилась с использованием компонентного анализа с последующим вращением varimax.

10.1.1. Опрос респондентов

Респондентам предлагался вопрос: *отметьте знаком + те позиции в табл.10.1, которые соответствуют вашим представлениям о стабильности. Какой вы видите и оцениваете стабильность?*

Затем результаты суммировались по каждой позиции. Получали таблицу вида:

0	0	0	14	5	8	7
0	2	1	3	4	10	15
0	0	1	6	9	8	12
0	0	0	6	6	6	17
1	7	7	9	7	3	1
10	8	5	6	3	2	1
7	6	6	9	4	2	0
0	2	4	13	4	8	3
0	0	0	3	5	11	16
3	8	2	9	5	5	3
7	7	6	6	3	4	2
6	2	4	14	2	5	2
4	6	7	8	3	3	4
0	0	1	5	5	6	18
0	0	0	10	4	14	7
1	1	2	12	8	3	8

Рис. 10.1: Суммарные данные опроса по понятию «стабильность».

Аналогичный вопрос задавался относительно восприятия понятий «хаос», «катастрофа», «уверенность», «развитие», «страх».

Затем семь столбцов $s_1, \dots, s_7$ таблицы складываем по формуле[2]

$$s = (+3) \cdot s_1 + (+2) \cdot s_2 + (+1) \cdot s_3 + 0 \cdot s_4 + \\ +(-1) \cdot s_5 + (-2) \cdot s_6 + (-3) \cdot s_7. \tag{10.1}$$

Полученный столбец транспонируем в строку и считаем *данными* опроса по *объекту* Ob_1=*стабильность* по шестнадцати признакам (строкам табл.9.1) x_1=*веселая*, x_2=*хорошая*,... x_{16}=*мягкая*.

В результате получаем следующие итоговые данные опроса:

Таблица 10.2.

		Признаки			
Номер объекта k	**Объекты**	x_1	x_2	...	x_{16}
1	Стабильность	x_{11}	x_{21}	...	$x_{16,1}$
2	Хаос	x_{12}	x_{22}	...	$x_{16,2}$
3	Катастрофа	x_{12}	x_{22}	...	$x_{16,2}$
4	Уверенность	x_{12}	x_{22}	...	$x_{16,2}$
5	Развитие	x_{12}	x_{22}	...	$x_{16,2}$
6	Страх	x_{16}	x_{26}	...	$x_{16,6}$

10.2. Использование компонентного анализа

К данным из табл.10.2 применялся компонентный анализ. В пакете «Класс-Мастер» были получены следующие цифры.

```
Класс-Мастер                                  17.07.02 21:30
----------------------------------------------------------------
ГЛАВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ

ВЫБОРКА ОБЪЕКТОВ:              Все объекты (6 об.)
ГРУППА ПЕРЕМЕННЫХ:             Все переменные (16 пер.)
ДАННЫЕ НОРМАЛИЗОВАНЫ
ПЕРЕМЕННЫЕ НЕ ВЗВЕШЕНЫ
МАКС. ЧИСЛО ГК:                5
```

[2]Коэффициенты можно брать и другими в зависимости от отношения к весу пунктов семибалльной шкалы.

МАКС. ОБЩАЯ ДИСПЕРСИЯ: 80.00 %
МИН. ДИСПЕРСИЯ: 5.00 %
ПРОПУСКИ НЕ РАЗРЕШЕНЫ
СОХРАНЕНЫ КАК ПЕРЕМЕННЫЕ: "$ГК_{nn}$"

– – – – – – – – – – – РЕЗУЛЬТАТЫ – – – – – – – – – – – –
Число ГК = 2
Объясненная дисперсия = 92.84 % (14.85 / 16.00)

ОБЪЯСНЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ:

ГК	Дисперсия	%	Накопл.
$ГК_1$	10.26	64.15	64.15
$ГК_2$	4.59	28.68	92.84

НАГРУЗКИ:

Переменная	$ГК_1$	$ГК_2$
Var1	0.30	0.11
Var2	0.31	0.09
Var3	0.31	0.06
Var4	0.31	0.06
Var5	0.24	0.28
Var6	-0.03	0.46
Var7	-0.03	0.44
Var8	0.09	-0.37
Var9	0.31	0.05
Var10	-0.30	0.01
Var11	-0.27	0.16
Var12	0.18	-0.33
Var13	-0.29	-0.15
Var14	0.31	0.02
Var15	0.30	-0.12
Var16	0.06	-0.41

КОРРЕЛЯЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ И ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ:

Переменная	$ГК_1$	$ГК_2$
Var1	0.95	0.23
Var2	0.98	0.19
Var3	0.99	0.12
Var4	0.99	0.12
Var5	0.76	0.59
Var6	-0.09	0.99
Var7	-0.10	0.95
Var8	0.28	-0.79
Var9	0.98	0.11
Var10	-0.96	0.01
Var11	-0.88	0.34
Var12	0.57	-0.72
Var13	-0.91	-0.32
Var14	1.00	0.05
Var15	0.96	-0.26
Var16	0.19	-0.88

10.2.1. Факторно-аналитическая обработка данных

Факторно-аналитическая обработка данных с целью построения семантического пространства проводилась с поворотом факторных осей методом varimax. Использовалась методика В.Ф.Петренко (см. [61]), правда на основе не специального пакета для факторного анализа, о котором говорится в [61], а пакета «Stadia».

Было выделено 3 фактора, объясняющих соответственно 64,11%; 28,67% и 5,54% общей дисперсии.

Собственные значения и процент объясняемой дисперсии факторов

Фактор:	1	2	3
Собств.зн	10,26	4,587	0,8867
Дисперс %	64,11	28,67	5,541
Накоплен %	64,11	92,77	98,31

Вращение: варимакс, число факторов=3

Переменная	Общность	Специфичность
x_1	0,9923	0,008102
x_2	0,9981	0,002462
x_3	0,995	0,005625
x_4	0,9969	0,003342
x_5	0,9947	0,00583
x_6	0,9984	0,00186
x_7	0,9131	0,08735
x_8	0,9932	0,007189
x_9	0,978	0,02218
x_{10}	0,971	0,02958
x_{11}	0,9865	0,01384
x_{12}	0,9352	0,06494
x_{13}	0,9918	0,008503
x_14	0,9986	0,001667
x_15	0,9937	0,006418
x_16	0,9968	0,003711

Корреляции факторов

Фактор:	1	2	3
2	-0,00562	1	
3	-0,0217	-0,3594	1

Критическое значение=0,4906

Число значимых коэффициентов=0 (0%)

Факторные нагрузки после вращения

Фактор:	1	2	3
x_1	0,9836	0,02146	0,156
x_2	0,9985	-0,008663	-0,03203
x_3	0,9925	0,09135	0,03975
x_4	0,9955	0,07404	-0,0204
x_5	0,863	-0,3167	0,3868
x_6	0,1025	-0,947	0,3018
x_7	0,09012	-0,8923	0,3297
x_8	0,1071	0,5862	-0,7987
x_9	0,9837	0,0979	0,02668
x_{10}	-0,9361	-0,1029	0,2899
x_{11}	-0,7886	-0,3499	0,4921
x_{12}	0,4304	0,8659	-0,01675
x_{13}	-0,9549	0,2188	0,1789
x_{14}	0,9834	0,1016	-0,1454
x_{15}	0,8898	0,4407	-0,08781
x_{16}	0,02739	0,9956	0,06928

Ниже приводятся переменные-суждения анкеты, сгруппированные по факторам с указанием факторных нагрузок после вращения, отражающих величину проекции вектора-суждения

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16})$$

на ось фактора. Факторные нагрузки отражают степень выраженности в данном факторе смысла переменных-суждений и характеризуют сами переменные-суждения, а не ответы по ним. Иначе говоря, смысл фактора мы определяем исходя из тех переменных, с которым он имеет нагрузки, близкие к 1.

Первый фактор (64,11%) получил название *«оценка-активность»*. На одном полюсе (*оценка*) он включает такие переменные:

x1	Веселая	0,9836
x2	Хорошая	0,9985
x3	Добрая	0,9925
x4	Светлая	0,9955
x5	Долгая	0,863
x9	Теплая	0,9837
x14	Безопасная	0,9834
x15	Нежная	0,8898

Противоположный полюс (*активность*) первого фактора образуют переменные:

x10	Быстрая	-0,9361
x11	Активная	-0,7886
x13	Вода	-0,9549

Второй фактор (28,67%) (*конфортность – сила*) включает на одном полюсе такие переменные:

x8	Прошедшая	0,5862
x12	Женская	0,8659
x16	Мягкая	0,9956

Противоположный полюс (*сила*) второго фактора образуют переменные:

x6	Слабая	-0,947
x7	Простая	-0,8923

Третий фактор включает на одном полюсе такие переменные:

x11	Активная	0,4921

Противоположный полюс **третьего фактора** (5,54%) образуют переменные:

x8	Настоящая	-0,7987

Интерпретация третьего фактора не давалась. Читатель может сделать это сам.

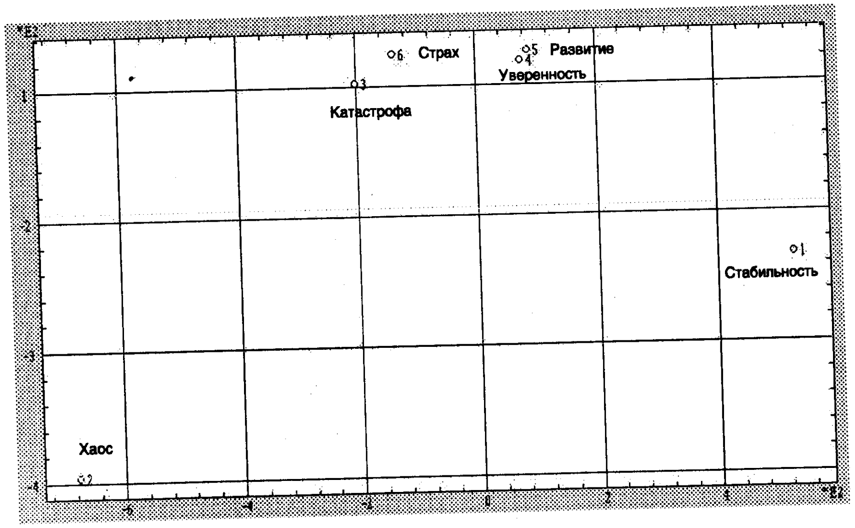


Рис. 10.2: Расположение объектов в осях «фактор 1 – фактор 2» (после вращения).

Глава 11

Дисперсионный анализ

Пусть наблюдаются n случайных величин $x_1, ..., x_n$. Каждая из них имеет математическое ожидание $\mathrm{M}x_i$, которые нам неизвестны. Для выяснения значимости различия между математическими ожиданиями (средними) служит *дисперсионный анализ*. Название связано с основной идеей сравнения средних – сравниваются выборочные дисперсии! Концепция дисперсионного анализа предложена английским статистиком Р.Фишером в 1920 году.

11.1. Иллюстрация основной идеи

Пусть наблюдаются две величины x_1, x_2. Для них численно фиксируются данные по *одной* конкретной характеристике (фактору). Выделение двух величин x_1, x_2 при наблюдении проявлений *одного* конкретного фактора говорит о том, что фактор проявляет себя в том, что наблюдаемые (измеряемые) данные объективно разбиваются на две отличные группы данных. Первая группа данных – это наблюдение величины x_1, а вторая – величины x_2. Например, вирус гриппа как фактор и его эпидемия приводит к появлению как минимум двух групп людей: тяжело больных и относительно здоровых, чей организм успешно противостоит заболеванию.

Результаты трех наблюдений по каждой величине – это три различные числа x_{ki}, $k = 1, 2, 3$ для каждой величины x_i, $i = 1, 2$. Они представлены в таблице 11.1 [25].

Таблица 11.1.

	x_1	x_2
Наблюдение 1	2	6
Наблюдение 2	3	7
Наблюдение 3	1	5
Среднее $\overline{x}_i$	2	6
Сумма квадратов SS_i	2	2
Общее среднее $\overline{x}$	4	
Общая сумма квадратов SS	28	

Средние двух величин (групп наблюдений) существенно различны (2 и 6 соответственно). Сумма квадратов отклонений для каждой величины (группы)

$$SS_1 = \sum_{k=1}^{3}(x_{k1} - \overline{x}_1)^2 \quad \text{и} \quad SS_2 = \sum_{k=1}^{3}(x_{k2} - \overline{x}_2)^2$$

равна 2. Складывая их, получаем 4. Это суммарное рассеяние (суммарная дисперсия) внутригрупповой изменчивости $SS_{\text{ост.}}$ Если теперь повторить эти вычисления без учета принадлежности к величинам (группам), т.е., если вычислить

$$SS = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}(\overline{x}_{ki} - \overline{x})^2$$

исходя из общего среднего этих двух выборок, то получим величину 28. Иными словами, дисперсия (сумма квадратов), основанная на внутригрупповой изменчивости, приводит к гораздо меньшим значениям, чем при вычислении на основе общей изменчивости (относительно общего среднего). Причина этого, очевидно, заключается в существенной разнице между средними значениями $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$, и это различие между средними и объясняет существующее различие между суммами квадратов SS_i и SS.

Действительно, число

$$SS_{\text{факт.}} = SS - SS_{\text{ост.}} = 24,$$

где

$$SS_{\text{ост.}} = SS_1 + SS_2 = \sum_{k=1}^{3}(x_{k1} - \overline{x}_1)^2 + \sum_{k=1}^{3}(x_{k2} - \overline{x}_2)^2 = 4,$$

получается за счет вычитания суммарного рассеяния «внутри групп» и, следовательно, характеризует рассеяние данных между величинами (группами), вызванное действием фактора, приведшего к появлению самих этих двух групп. Различие групп состоит в том, что значимо различны средние $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$. Поэтому не случайно, что эти средние появляются в выражении для вычисления

$$SS_{\text{факт.}} = 3\sum_{i=1}^{2}(\overline{x}_i - \overline{x})^2 = 24.$$

Таким образом, если различие между дисперсиями $SS_{\text{факт.}}$ и $SS_{\text{ост.}}$ значимо, то эффект действия фактора приводит к значимому различию средних $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$. В сравнении средних через сравнение дисперсий суть дисперсионного анализа.

В общем случае, когда действие фактора приводит к появлению p групп, т.е. наблюдаются p величин $x_1, ..., x_p$, численно фиксируются данные по *одной* конкретной характеристике (фактору). Результаты m наблюдений и, следовательно, m различных чисел x_{ki}, $k = 1, ..., m$ для каждой величины x_i, $i = 1, ..., p$ представляются в виде табл. 11.2, где

Таблица 11.2.

	x_1	x_2	...	x_p
Наблюдение 1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1p}
Наблюдение 2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2p}
...	...	...	...	...
Наблюдение m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mp}
Среднее $\overline{x}_i$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	...	$\overline{x}_p$
Сумма квадратов SS_i	SS_1	SS_2	...	SS_p
Общее среднее	$\overline{x}$			
Общая сумма квадратов	SS			

$$SS_i = \sum_{k=1}^{m}(x_{ki} - \overline{x}_i)^2$$

– сумма квадратов для x_i (SS – от английского Sum of Squares);

$$SS_{\text{факт.}} = m\sum_{i=1}^{p}(\overline{x}_i - \overline{x})^2,$$

$$SS_{\text{ост.}} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}(x_{ki} - \overline{x}_i)^2,$$

$$\overline{x} = \frac{1}{mp}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} x_{ki}$$

– общее выборочное среднее,

$$\overline{x}_i = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{ki}$$

– выборочное среднее в группе наблюдений.

11.2. Проверка статистической значимости различия средних

Пусть

$$s^2 \doteq \frac{SS}{pm-1}, \quad s^2_{\text{факт.}} = \frac{SS_{\text{факт.}}}{p-1}, \quad s^2_{\text{ост.}} = \frac{SS_{\text{ост.}}}{p(m-1)}.$$

Для проверки значимости используется критерий Фишера-Снедекора

$$F = \frac{s^2_{\text{факт.}}}{s^2_{\text{ост.}}}.$$

Нулевая гипотеза $H_0 : \{\mathbf{M}x_1 = \mathbf{M}x_2 = ... = \mathbf{M}x_p\}$. Если $F^{\text{набл.}} > F^{\text{табл.}}_{(\alpha;p-1,p(m-1))}$, то гипотезу H_0 отбрасываем и, следовательно, групповые средние различаются значимо. Если $F^{\text{набл.}} \leq F^{\text{табл.}}_{(\alpha;p-1,p(m-1))}$, то гипотеза H_0 верна и различие между групповыми средними статистически незначимо.

Так, например, для данных из табл.11.1

$$F^{\text{набл.}} = 24 > F^{\text{табл.}}_{(0,05;1,4)} = 7,71.$$

Значит, различие между средними значимо.

11.3. Дисперсионный анализ в пакете SPSS

Рассмотрим процесс проведения однофакторного дисперсионного анализа в SPSS на примере данных, полученных при исследовании рынка недвижимости. Проверим, существует ли значимое различие цены (тыс. долларов) между четырьмя разными группами (по типу квартир). Результаты анализа сведены в таблицы. В табл.11.3 приведены следующие данные: число квартир (N), среднее значение стоимости квартиры (Mean), стандартное отклонение (Std.Deviation), стандартные ошибки средних (Std.Error). В табл. 11.4 даны результаты теста Левена[1] на равенство (гомогенность) дисперсий.

Таблица 11.3: Описательная статистика. Descriptives

Цена (тыс. долларов)

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error
Однокомнатная	19	13,316	2,925	,671
Двухкомнатная	68	16,190	2,009	,244
Трехкомнантная	101	18,950	3,520	,350
Четырехкомнатная	22	27,536	12,642	2,695
Total	210	18,446	6,074	,419

Анализ результатов (табл. 11.3) позволяет сделать следующие выводы: самую высокую среднюю цену (27,536 долларов) имеют

[1]Для проверки равенства дисперсий часто используется статистика Левена (Levene Statistics), имеющая распределение Фишера. При выборе теста Левена в SPSS вычисляются две величины:
1) F-критерий, проверяющий, действительно ли отношение дисперсий значимо больше 1. Если это различие значимо, т.е. $F > 1$, то нулевая гипотеза H_0 : {дисперсии равны} отвергается и принимается альтернативная гипотеза о существовании различия между средними.
2) α – наблюдаемый уровень статистической значимости. Если $\alpha \leq 0.05$, то нулевая гипотеза о равенстве дисперсий отвергается.
Отметим, что тест Левена для проверки гипотезы о равенстве дисперсий не зависит от предположения о нормальности тестируемого распределения.

Таблица 11.4: Тест равенства дисперсий.
Test of Homogeneity of Variances

Цена (тыс. долларов)

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
42,917	3	206	,000

Таблица 11.5: Дисперсионный анализ.
ANOVA

Цена (тыс. долларов)

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	2689,680	3	896,560	36,791	,000
Within Groups	5019,959	206	24,369		
Total	7709,639	209			

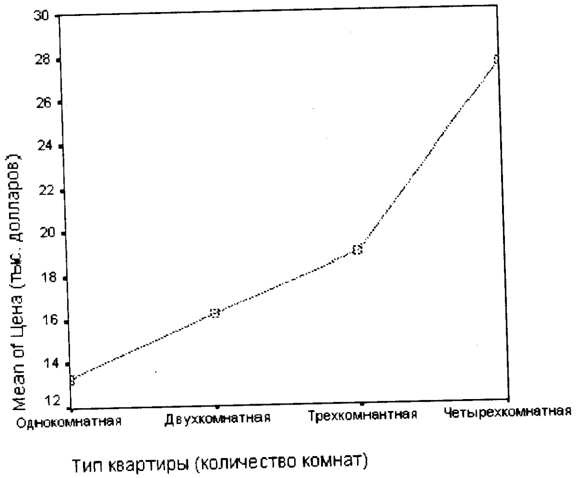


Рис. 11.1: График средних значений.

четырехкомнатные квартиры, при этом она значительно превосходит общую среднюю цену всех квартир (18,446 доллара). Гипотеза о равенстве дисперсий не принимается, так как тест Левена дает значение α менее 0,05 (см. Sig. в табл. 11.4).

Значения величин межгруппового квадратичного разброса зависимой переменной (Between Groups) и внутригруппового разброса (Within Groups) даны в табл. 11.5. Величина 2689,680 характеризует, насколько сильно отклонились от общего среднего между

группами, а 5019,959 — отклонения от центров групп. Статистика

$$F = \frac{2689,680/3}{5019,959/206} = \frac{896,560}{24,369} = 36,791$$

имеет распределение Фишера и служит для проверки значимости различия. Чем больше F, тем существеннее зависимость. Наблюдаемый уровень значимости $\alpha < 0,001$ свидетельствует о том, что различие цены между четырьмя группами квартир значимо.

На рис.11.1 мы видим график, на котором наглядно проявляется различие между группами.

обычным образом: чем больше стандартизованный коэффициент, тем больше вклад соответствующей переменной в дискриминацию групп.

Таким образом, коэффициенты дискриминантной функции позволяют оценить способность конкретных независимых переменных определять различия в группах объектов. Независимые переменные, существенно влияющие на различия в группах, имеют большие значения коэффициентов, а переменным, которые имеют незначительное влияние, отвечают маленькие значения коэффициентов. В результате анализа необходимо выбрать те переменные, которые в большей мере определяют вероятность попадания какого-либо объекта в конкретную группу.

Однако эти коэффициенты не дают информации о том, между какими группами дискриминируют соответствующие функции. Вы можете определить характер дискриминации для каждой дискриминантной функции, взглянув на средние значения функций для всех групп. Можно также посмотреть, как две функции дискриминируют между группами, вычислив значения, которые принимают обе дискриминантные функции (см., например, рис.12.1).

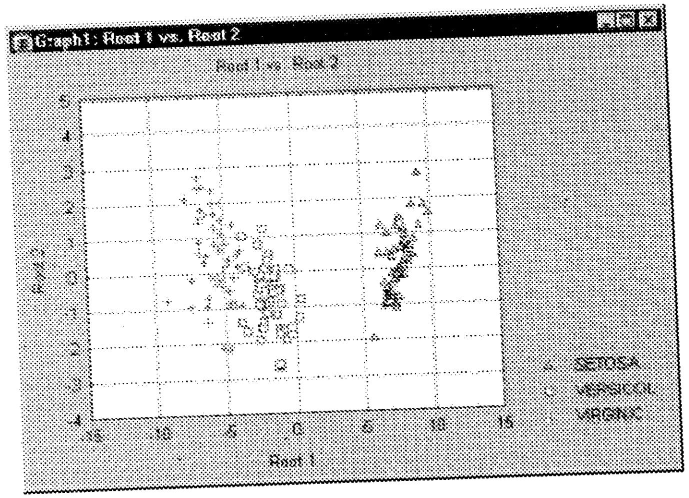


Рис. 12.1: Две дискриминантные функции Root1 и Root2 для трех групп.

В этом примере, данном на рис.12.1, функция Root1, похоже,

в основном дискриминирует между группой Setosa и объединением групп Virginic и Versicol. По вертикальной оси (Root2) заметно небольшое смещение точек группы Versicol вниз относительно центральной линии (0).

12.1.2. Коэффициенты дискриминантной функции

Для получения коэффициентов канонической дискриминантной функции нужен статистический критерий различения групп.

Очевидно, что классификация переменных будет осуществляться тем лучше, чем меньше рассеяние точек относительно центроида внутри группы и чем больше расстояние между центроидами групп. Разумеется, что большая внутригрупповая вариация нежелательна.

Один из методов поиска наилучшей дискриминации групп заключается в нахождении такой дискриминантной функции d, которая бы максимизировала отношение межгрупповой вариации к внутригрупповой

$$\lambda = \frac{B(d)}{W(d)}, \qquad (12.3)$$

где $B(d)$ – межгрупповая и $W(d)$ – внутригрупповая матрицы рассеяния наблюдаемых переменных от средних. Выражение (12.3) носит символический характер, которому ниже будет придан точный смысл.

Имеем

$$b_{is} = \sum_{g=1}^{n} n_g(\overline{x}_{ig} - \overline{x}_i)(\overline{x}_{sg} - \overline{x}_s), \quad i, s = 1, ...p, \qquad (12.4)$$

$$w_{is} = \sum_{g=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_g} (x_{igj} - \overline{x}_{ig})(x_{sgj} - \overline{x}_{sg}), \quad i, s = 1, ...p, \qquad (12.5)$$

где

$$\overline{x}_{ig} = \frac{1}{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} x_{igj}, \quad i = 1, ..., p; \; g = 1, ..., n,$$

$$\overline{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^{n} \overline{x}_{ig}, \quad i = 1, ..., p,$$

$$N = \sum_{g=1}^{n} n_g.$$

Выражение (12.3) следует понимать как пару уравнений:

$$[B(d) - \lambda_i W(d)]v_i = 0,$$

$$v_i' W(d) v_s = \delta_{is}.$$

Пусть собственные числа упорядочены по величине: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p$. Каждое собственное значение λ_i и собственный вектор $\vec{v_i}$ сопоставляется одной дискриминантной функции d_i. Компоненты собственного вектора можно использовать в качестве *нестандартизованных* коэффициентов дискриминантной функции:

$$\vec{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_p) = \vec{v_i}\sqrt{N-n}, \quad \beta_0 = -\sum_{i=1}^{p} \beta_i \overline{x}_i.$$

Стандартизованные коэффициенты находят по формуле:

$$c_i = \beta_i \sqrt{\frac{w_{ii}}{N-n}}.$$

12.1.3. Число дискриминантных функций

Общее число дискриминантных функций не превышает числа дискриминантных переменных и по крайней мере на единицу меньше числа групп. Наибольшей разделительной способностью обладает первая дискриминантная функция, соответствующая наибольшему собственному числу, вторая обеспечивает максимальное различение после первой и т. д. Различительную способность i-й функции оценивают по относительной величине в процентах собственного числа λ_i от суммы всех $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i$.

Так как дискриминантные функции находятся по выборочным данным, они нуждаются в проверке статистической значимости.

Рассматривается Λ-статистика Уилкса

$$\Lambda_k = \prod_{i=k+1}^{n} \frac{1}{1+\lambda_i},$$

где k число вычисленных дискриминантных функций.

Величина

$$\chi^2 = -[N - \frac{p+n}{2} - 1] \ln \Lambda_k, \quad k = 0, ..., n-1,$$

имеет χ^2-распределение с $(p-k)(n-k-1)$ степенями свободы.

Если $\chi^2|_{k=0} > (\chi^2)^{\text{табл.}}_{(p(n-1),\alpha)}$, где $100\alpha\%$ – уровень значимости, то первая дискриминантная функция значима и имеет смысл ее вычислять. Определяем первую дискриминантную функцию и проверяем значимость критерия при $k = 1$. Если критерий значим, то вычисляем вторую дискриминантную функцию и продолжаем процесс до тех пор, пока не будет исчерпана вся значимая информация.

12.2. Пример анализа в пакете SPSS

Рассмотрим пример дискриминантного анализа в пакете SPSS. Для этого воспользуемся данными социологического исследования Рональда Инглехарта, приведенными в статье «Культурный прорыв. Изменение ценностей в западном мире» (см.[14]). Группирующей (дискриминантной) переменной берется так называемый индекс Инглехарта, с помощью которого множество участвовавших в опросе респондентов разбивается на две группы: материалисты и постматериалисты. С помощью переменных: социально-экономический статус отца, уровень образования опрашиваемых, их возраст и профессиональное образование – выясняется принадлежность респондентов к одной из выделенных групп.

Таблица 12.1: Тест равенства средних значений групп.
Tests of Equality of Group Means

	Wilks' Lambda	F	df1	df2	Sig.
Статус отца	,919	83,784	1	946	,000
Уровень образования	,777	271,370	1	946	,000
Возраст	,800	236,114	1	946	,000
Профессиональное образование	,967	32,354	1	946	,000

Результаты анализа представляются в виде таблиц и графиков. Приведем некоторые из них (табл.12.1-12.5, рис. 12.2, 12.3).

Прежде всего рассмотрим табл.12.1, представляющую результаты тестирования на значимость различия между переменными, относящимися к обеим группам. Иначе говоря, выясняется, присутствуют ли в них «дискриминирующие способности (особенности)», позволяющие судить о принадлежности респондента к одной из двух исследуемых групп (материалист-постматериалист). Значение величины лямбда Уилкса характеризует степень влияния соответствующей переменной при разделении прогнозируемых групп. Как видим, наибольшей «дискриминативной способностью» обладает признак «профессиональное образование» (0,967). Вторым по значимости является признак «статус отца» (0,919).

Каждая переменная порождает группы, которые значимо различаются (Sig.<0,001); все они используются для формирования дискриминантных функций.

Таблица 12.2: Лямбда Уилкса.

Wilks' Lambda

Test of Function(s)	Wilks' Lambda	Chi-square	df	Sig.
1	,681	362,842	4	,000

Табл.12.2 содержит информацию, говорящую о наличии значимого различия между группами до построения соответствующей дискриминантной функции. Очевидно, что при отсутствии различий нет необходимости искать дискриминантную функцию. Однако критерий Уилкса показал очень значимый результат (Sig.<0,001).

Таблица 12.3: Собственные значения.

Eigenvalues

Function	Eigenvalue	% of Variance	Cumulative %	Canonical Correlation
1	,469[a]	100,0	100,0	,565

a. First 1 canonical discriminant functions were used in the analysis.

Данные, содержащиеся в табл.12.3, характеризуют построенные дискриминантные функции. В рассматриваемом примере вычислена только одна дискриминантная функция. Столбец % of Variance (% дисперсии) показывает, какую долю межгрупповых различий удалось объяснить с помощью данной функции.

В табл.12.4 приводятся стандартизированные коэффициенты дискриминантной функции, которые вычисляются по стандартизированным значениям переменных, получаемых с помощью z-преобразования[2].

Таблица 12.4: Стандартизированные канонические коэффициенты дискриминантной функции.

Standardized Canonical Discriminant Function Coefficients

	Function
	1
Статус отца	,264
Уровень образования	,536
Возраст	-,612
Профессиональное образование	,070

В табл.12.5 даны коэффициенты для дискриминантной функции. Для того чтобы определить, в какую группу попадает респондент, надо для него вычислить выражение:

$$d = 0,237 \cdot \text{Статус отца} + 0,707 \cdot \text{Уровень образования} -$$

$$-0,56 \cdot \text{Возраст} + 0,059 \cdot \text{Профессиональное образование} - 1,369.$$

Полученные значения дискриминантной функции позволяют отнести респондента (опрашиваемого) к одной из групп.

[2] z-преобразование переменной x осуществляется по формуле: новое (стандартизованное) значение переменной x, т.е. $z = (x - \overline{x})/\sigma$, где $\overline{x}$ – среднее значение, σ – стандартное отклонение.

Таблица 12.5: Канонические коэффициенты дискриминантной функции.

Canonical Discriminant Function Coefficients

	Function
	1
Статус отца	,237
Уровень образования	,707
Возраст	-,560
Профессиональное образование	,059
(Constant)	-1,369

Unstandardized coefficients

Таблица 12.6: Функции для групповых центроидов.
Functions at Group Centroids

индекс Инглехарта	Function 1
Постматериалисты	,623
Материалисты	-,751

Unstandardized canonical discriminant functions evaluated at group means

Таблица 12.7: Классификационные результаты.
Classification Results [a]

		индекс Инглехарта	Predicted Group Membership: Постматериалисты	Predicted Group Membership: Материалисты	Total
Original	Count	Постматериалисты	409	109	518
		Материалисты	133	297	430
	%	Постматериалисты	79,0	21,0	100,0
		Материалисты	30,9	69,1	100,0

a. 74,5% of original grouped cases correctly classified.

Далее вычисляются средние значения дискриминантных функций для обеих групп (табл.12.6). Как видим, представители первой группы (постматериалисты) характеризуются положительным средним значением дискриминантной функции (0,623).

Наконец, последний фрагмент из совокупости результатов проведенного дискриминантного анализа, выполненного в пакете SPSS, – это таблица качества классификации (табл.12.7). В ней сравниваются реальная принадлежность к группам и предсказанная на основании значений дискриминантных функций. Анализируя процент правильно классифицируемых наблюдений как в целом по выборке, так и по отдельным группам, можно сделать вывод о том, насколько хорошо построенная модель соответствует данным. К группе постматериалистов относится 518 респондентов. При этом 409 (79%) были спрогнозированы правильно, а 109 (21%) ошибочно отнесены к группе материалистов. В группе чистых материалистов насчитывается 430 респондентов. Из них 297 (69,1%) были определены верно, а 133 (30,9%) по ошибке были отнесены к группе постматериалистов. В итоге: правильная идентификация респондентов произведена в 74,5% случаев. Это показатель того, сколько случаев, первоначально разнесенных по группам, были классифицированы верно.

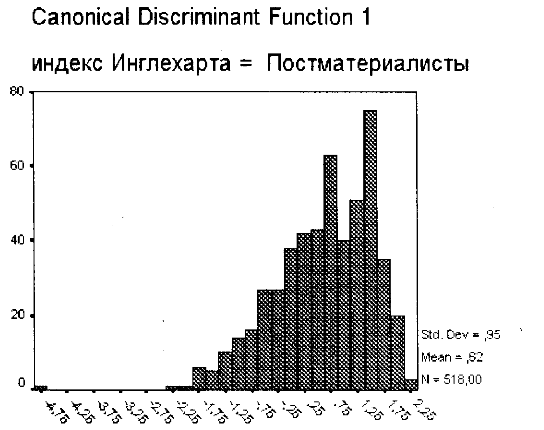


Рис. 12.2: Распределение значений дискриминантной функции для группы «постматериалисты».

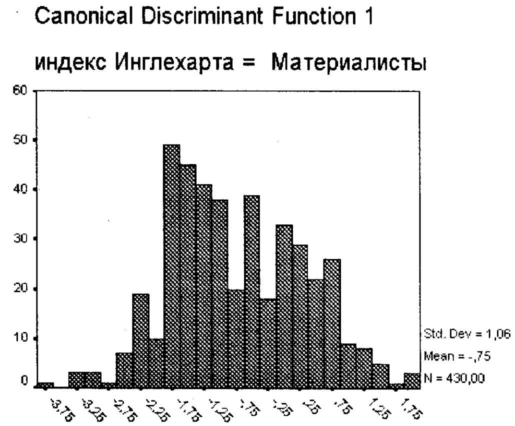


Рис. 12.3: Распределение значений дискриминантной функции для группы «материалисты».

На двух отдельных гистограммах (рис. 12.2, 12.3) даны распределения значений дискриминантной функции отдельно по каждой группе. Можно заметить, что значения дискриминантной функции для первой группы (постматериалисты) сильно смещены в положительную область, а значения второй группы (материалисты) – в отрицательную.

Глава 13

Классификация

Классификация – это разделение изучаемой совокупности объектов на однородные группы либо отнесение каждого объекта к одной из заранее заданных групп (классов).

Каждый изучаемый объект O_j характеризуется набором из p признаков $x_{j1}, ..., x_{jp}$. Другими словами, можно сказать, что речь идет о классификации многомерных наблюдений

$$\vec{x}_1, ..., \vec{x}_N,$$

где $\vec{x}_i = (x_{i1}, ..., x_{ip})$ касающихся объектов $O_1, ..., O_N$ соответственно.

13.1. Классификация с помощью дискриминантного анализа

Другой главной целью применения дискриминантного анализа является проведение классификации объектов. До сих пор решалась задача *описания* с помощью функций, называемых дискриминантными, уже *заданных* групп объектов. Дополнительно уточнялись наиболее существенные переменные, которые *определяли* принадлежность объекта к той или иной группе. Дискриминантные функции пригодны также для того, чтобы давать объяснения различий между группами.

Однако наибольший интерес представляет задача предсказания группы, к которой следует отнести некоторый случайно выбранный объект. Эту задачу *классификации* можно решить, используя информацию, содержащуюся в дискриминантных переменных. Существуют различные способы классификации объектов.

Как только получены дискриминирующие функции, возникает вопрос о том, как хорошо они могут предсказывать, к какой группе принадлежит конкретный объект? Дискриминантная функция – это статистика, служащая для построения правила классификации объектов по группам.

13.1.1. Априорная и апостериорная классификация

«Прежде чем приступить к изучению деталей различных процедур оценивания, важно уяснить, что эта разница ясна. Обычно, если вы оцениваете на основании некоторого множества данных дискриминирующую функцию, наилучшим образом разделяющую совокупности, и затем используете те же самые данные для оценивания того, какова точность вашей процедуры, то вы во многом полагаетесь на волю случая. В общем случае получают, конечно, худшую классификацию для объектов, не использованных для оценки дискриминантной функции. Другими словами, классификация действует лучшим образом для выборки, по которой была проведена оценка дискриминирующей функции (апостериорная классификация), чем для свежей выборки (априорная классификация). (Трудности с (априорной) классификацией будущих объектов заключаются в том, что никто не знает, что может случиться. Намного легче классифицировать уже имеющиеся объекты.) Поэтому оценивание качества процедуры классификации никогда не производят по той же самой выборке, по которой была оценена дискриминирующая функция» [1].

[1] См. http://statbooks.narod.ru/Modules/stdiscan.html♯discriminant

13.2. Правило Байеса. Классифицирующие функции

Наблюдение $\vec{x}_i$ следует отнести к группе G_g, если

$$m_g f_g(\vec{x}_i) = \max_{1 \le r \le n} m_r f_r(\vec{x}_i),$$

где m_r – удельный вес группы G_r (или априорная вероятность принадлежности случайно взятого объекта (наблюдения) группе G_r), $f_r(\vec{x}_i)$ – функция распределения объектов в группе G_r [3, 173].

Пусть дан новый (случайно выбранный) объект $\vec{x} = (x_1, ..., x_p)$. К какой группе его отнести?

Предположим, что плотность распределения $\vec{x}$ в G_g равна $f_g(\vec{x})$ и q_g – априорная вероятность того, что вектор $\vec{x}$ принадлежит к группе G_g. Предполагается, что сумма априорных вероятностей равна 1 [35].

Введем *априорную* условную вероятность $P(\vec{x}|G_g)$ получения координат вектора-объекта $\vec{x}$, если известно, что объект принадлежит к группе G_g. Через $P(G_g|\vec{x})$ обозначим апостериорную условную вероятность принадлежности объекта к группе при заданных его координатах $\vec{x}$. Априорная вероятность равна вероятности принадлежности объекта к данной группе до получения вектора наблюдений $\vec{x}$. Апостериорная вероятность определяет вероятность принадлежности объекта к группе G_g только после анализа вектора наблюдений $\vec{x}$ этого объекта.

Из теоремы Байеса получаем

$$P(G_g|\vec{x}) = \frac{q_g P(\vec{x}|G_g)}{\sum\limits_{r=1}^{n} q_r P(\vec{x}|G_r)}. \tag{13.1}$$

В случае нормального p-мерного закона распределения $N(,)$ для $\vec{x}$ формула (13.1) примет вид

$$P(G_g|\vec{x}) = \frac{q_g f_g(\vec{x})}{\sum\limits_{r=1}^{n} q_r f_r(\vec{x})}. \tag{13.2}$$

Байесовская процедура классификации состоит в том, что вектор наблюдений $\vec{x}$ относится к группе G_g, если $P(G_g|\vec{x})$ имеет наибольшее значение.

Можно показать, что байесовская процедура эквивалентна отнесению вектора $\vec{x}$ к группе G_g, если «оценочная» функция

$$\delta_g(\vec{x}) = q_g f_g(\vec{x}) \tag{13.3}$$

является максимальной. Подставим в (13.3) формулу нормального закона распределения

$$\delta_g \vec{x} = q_g (2\pi)^{-2p} |K_{\vec{x}}|^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu}_g)(K_{\vec{x}})^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}_g)']. \tag{13.4}$$

Удаляя общую константу $(2\pi)^{-2p}|K_{\vec{x}}|^{-1/2}$ и логарифмируя, получим

$$d_g = -\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu}_g)(K_{\vec{x}})^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}_g)' + \ln q_g. \tag{13.5}$$

Преобразуем выражение (13.5), удаляя постоянное слагаемое и вводя оценки вместо величин

$$\vec{\mu_g} \to \overline{\vec{x}}_g = (\overline{x}_{g1}, ..., \overline{x}_{gp}), \quad K_{\vec{x}} \to A_{\vec{x}}.$$

Получим

$$d_g = \overline{\vec{x}}_g A_{\vec{x}}^{-1} \vec{x}\,' - \frac{1}{2} \overline{\vec{x}}_g A_{\vec{x}}^{-1} \overline{\vec{x}}_g\,' + \ln q_g. \tag{13.6}$$

Пусть

$$\vec{b}_g = \overline{\vec{x}}_g A^{-1} \vec{x}\,', \quad b_{g0} = \frac{1}{2} \overline{\vec{x}}_g A_{\vec{x}}^{-1} \overline{\vec{x}}_g\,'.$$

Тогда (13.6) примет вид

$$d_{gj} = b_{g0} + b_{g1} x_{j1} + ... + b_{g1} x_{jp} + \ln q_g, \ g = 1, ..., n. \tag{13.7}$$

Выражение (13.7) – это g-я *простая классифицирующая функция*.

Объект $\vec{x}_j = (x_{j1}, ..., x_{jp})$ относится к группе G_g, у которого значение $d_{gj}(\vec{x}_j)$ оказывается наибольшим.

Функции классификации не следует путать с дискриминантными функциями. Функции классификации предназначены для определения того, к какой группе наиболее вероятно может быть отнесен каждый объект. Имеется столько функций классификации, сколько групп. Каждая функция позволяет для каждого объекта и для каждой группы вычислить веса классификации по формуле:

$$d_g = c_g + w_{g1} x_1 + w_{g2} x_2 + ... + w_{gp} x_p.$$

В этой формуле индекс g обозначает соответствующую группу G_g, а индексы $1, 2, ..., p$ обозначают p переменных; c_g являются константами для g-й группы, w_{gi} – веса для i-й переменной при вычислении показателя классификации для g-й группы; x_i – наблюдаемое значение для соответствующего объекта i-й переменной. Величина d_g является результатом показателя классификации.

Поэтому можно использовать функции классификации для прямого вычисления показателя классификации для некоторых новых значений.

13.3. Классификации и расстояние Махаланобиса

Пусть дан новый (случайно выбранный) объект $\vec{x} = (x_1, ..., x_p)$. К какой группе его отнести? Объект относят к той группе G_g, для которой расстояние Махаланобиса

$$d(\vec{x}, G_g) = (N - n)(\vec{x} - \vec{x}_g)A_x^{-1}(\vec{x} - \vec{x}_g)', \; g = 1, ..., n,$$

где

$$\vec{x}_g = \left(\frac{1}{n_g}\sum_{j=1}^{n_g} x_{1gj}, ..., \frac{1}{n_g}\sum_{j=1}^{n_g} x_{pgj}\right),$$

где A – выборочная ковариационная матрица, наименьшее.

13.4. V-статистика Рао

Обобщенное расстояние Махаланобиса известно под названием V-статистика Рао и имеет вид

$$V = \sum_{g=1}^{n} n_g(\vec{x} - \vec{x}_g)A^{-1}(\vec{x} - \vec{x}_g)',$$

где A – выборочная (оценка) ковариационная матрица.

Она измеряет расстояния от каждого центроида группы до главного центроида с весами, пропорциональными объему выборки соответствующей группы. Она применима при любом количестве групп и может быть использована для проверки гипотезы $H_0 : \{\mu_1 = ... = \mu_g\}$, говорящей о совпадении центроидов. Иначе говоря, гипотеза H_0 – это гипотеза о существовании только одной группы.

Известно, что

$$\lim_{n_g \to \infty} V = \chi^2$$

с $p(n-1)$ степенями свободы.

Гипотеза $H_0 : \mu_1 = ... = \mu_g$ одинакового математического ожидания для «места» наблюдения-объекта $\vec{x}$ в p-мерном пространстве и, следовательно, для принадлежности его «единой» группе $G_1 = ... = G_g$ отвергается, если $\chi^2 > (\chi^2)^{\text{табл.}}_{(\alpha, p(n-1))}$, где $100\alpha\%$ – уровень доверия. В этом случае принимается альтернативная гипотеза H_1, говорящая о том, что существует несколько различных групп объектов.

13.5. Пример классификации в пакете SPSS

Продемонстрируем, как проводится классификация множества птиц с помощью дискриминантного анализа в пакете в SPSS. Основой служат данные, полученные при обследовании 245 птиц и касающиеся их половой принадлежности, длине крыла, длине клюва, размере головы, длине лап и весе определенного вида [14].

В качестве группирующей переменной был взят пол (мужской пол отвечает коду =1, а женский – коду =2). Иначе говоря, множество птиц разбито на две группы по половому признаку. В данных обследования пол был указан только для 51-й особи; для остальных птиц он не находился.

Как проводится в этом случае классификация? Сначала на основании данных для особей, принадлежность которых к той или иной группе уже известна, строится дискриминантная функция. Затем она используется для того, чтобы оценить принадлежность к конкретной группе тех птиц, для которых пол неизвестен.

Из множества результатов, получаемых с помощью SPSS, рассмотрим только статистики по 20 особям (cases = случаи), представленные в табл.13.1 и 13.2 (в SPSS эти две таблицы выводятся на экран как единая большая таблица) и соответстующие им классификационные результаты (табл.13.3).

По данным была построена следующая дискриминатная функция с нестандартизированными коэффициентами:

$$d = \; 0,039 \cdot \text{Длина крыла} + 0,18 \cdot \text{Длина клюва} +$$

Таблица 13.1: Статистики для групп. Первая часть.
Casewise Statistics

Case Number	Actual Group	Highest Group: Predicted Group	P(D>d | G=g): p	P(D>d | G=g): df	P(G=g| D=d)	Squared Mahalanobis Distance to Centroid
1	ungrouped	1	,052	1	,998	3,787
2	ungrouped	1	,390	1	,984	,738
3	ungrouped	1	,675	1	,960	,176
4	1	1	,283	1	,990	1,150
5	ungrouped	1	,195	1	,994	1,677
6	ungrouped	1	,827	1	,940	,048
7	2	1**	,497	1	,696	,460
8	ungrouped	1	,496	1	,695	,464
9	ungrouped	1	,722	1	,954	,127
10	ungrouped	1	,978	1	,912	,001
11	ungrouped	1	,421	1	,982	,647
12	ungrouped	1	,126	1	,996	2,335
13	ungrouped	1	,107	1	,997	2,592
14	ungrouped	1	,701	1	,957	,148
15	ungrouped	2	,748	1	,951	,104
16	1	1	,983	1	,911	,000
17	ungrouped	1	,836	1	,862	,043
18	ungrouped	1	,770	1	,948	,086
19	ungrouped	1	,568	1	,971	,327
20	2	2	,620	1	,772	,245

** Misclassified case

$$+0,159 \cdot \text{Размер головы} + 0,032 \cdot \text{Длина лап} + 0,007 \cdot \text{Вес} - 35,929.$$

В табл.13.1 для каждой птицы дана информация о значении дискриминантной функции и определена ее принадлежность к одной из двух групп. Мы ограничились фрагментом, содержащим данные по двадцати птицам (случаям).

Информация, содержащаяся в столбцах этой таблицы, имеет следующее значение: Case Number – это номер особи, Actual Group – группа, к которой особь действительно принадлежит (случаи с нераспознанным полом приводятся как «ungrouped», т.е. негруппированные), Highest Group – группа, к которой особь принадлежит с наибольшей вероятностью, Second Highest Group – вторая по вероятности группа, Discriminant Scores – значение дискриминантной функции.

Внимательный анализ данных таблицы помогает выявить случаи ошибочной классификации (прогноза). Если прогнозируемая

Таблица 13.2: Статистики для групп. Вторая часть.
Casewise Statistics

Case Number	Second Highest Group: Group	P(G=g|D=d)	Squared Mahalanobis Distance to Centroid	Discriminant Scores: Function 1
1	2	,002	16,649	-2,950
2	2	,016	8,963	-1,864
3	2	,040	6,524	-1,424
4	2	,010	10,285	-2,077
5	2	,006	11,761	-2,299
6	2	,060	5,540	-1,224
7	2	,304	2,120	-,326
8	2	,305	2,113	-,324
9	2	,046	6,202	-1,360
10	2	,088	4,672	-1,031
11	2	,018	8,637	-1,809
12	2	,004	13,415	-2,533
13	2	,003	14,020	-2,614
14	2	,043	6,343	-1,389
15	1	,049	6,034	1,452
16	2	,089	4,645	-1,025
17	2	,138	3,714	-,797
18	2	,052	5,892	-1,297
19	2	,029	7,323	-1,576
20	1	,228	2,687	,635

Таблица 13.3: Классификационные результаты.
Classification Results [a]

		Пол	Predicted Group Membership: мужской	Predicted Group Membership: женский	Total
Original	Count	мужской	24	3	27
		женский	5	19	24
		Ungrouped cases	93	101	194
	%	мужской	88,9	11,1	100,0
		женский	20,8	79,2	100,0
		Ungrouped cases	47,9	52,1	100,0

a. 84,3% of original grouped cases correctly classified.

принадлежность к группе не соответствует фактической, то в колонке Predicted Group (прогнозируемая группа) ставятся две звездочки (** – неправильно классифицированный случай). В нашем примере для случая 4 пол был известен – мужской и в результате прогноза также был указан мужской пол. Однако в случае 7 вместо исходного женского пола был спрогнозирован ошибочно мужской пол.

Рассмотрим случай 5, для которого пол был неизвестным, а прогноз говорит о мужском поле. Значение вероятности прогнозирования, равное 0,994, указывается в колонке $P(G = g|D = d)$ под заголовком «Highest Group». Эта вероятность рассчитывается с помощью значения дискриминантной функции для набора переменных, соответствующих данному случаю.

Менее достоверным является прогноз пола для случая 8; здесь вероятность прогнозирования равна 0,695. Вероятность того, что данный случай принадлежит к второй группе, приводится в колонке «Second Highest Group» и равна она 0,305. В столбце, обозначенном как $P(D > d|G = g)$, дается условная вероятность – вероятность того, что особь, принадлежащая к прогнозируемой группе, в действительности имеет значения признаков, для которых дискриминантная функции дает значение, отличное от того, что отвечало бы ее значениям для особей, отнесенных к данной группе.

В колонке «Squared Mahalanobis Distance to Centroid» выводится квадрат расстояния Махаланобиса до центроида (среднего значения группы значений дискриминантной функции).

Из табл.13.3 видно, что для 51-й особи (случая) с заранее известным полом 43 раза, т.е. в 84,3% случаев, пол был спрогнозирован верно.

Глава 14

Анализ таблиц сопряженности

В социологии в ходе различных исследований данные подчас представляют в виде, например, следующей таблицы:

Итоговая таблица частот (прививка_1.sta)

ОСНОВНЫЕ СТАТИСТ.	Частоты выделенных ячеек> 10 (Итоговые маргинальные не отмечены)		
ПРИВИВКА	ЗАБОЛЕЛ нет	ЗАБОЛЕЛ да	Всего по стр.
нет	1	3	4
да	4	2	6
Всего	5	5	10

Рис. 14.1: Статистика заболеваемости привитых пациентов.

Такие таблицы называют таблицами сопряженности (сопрягаются, пересекаются несколько переменных, каждая из которых градуирована, т.е. имеет несколько «координат»), или таблицами с многими входами. Последнее название широко распространено у социологов.

Вид этой таблицы, абстрагированной от конкретного содержания, имеет вид:

Таблица 14.1

Переменная A	**Переменная** B		Всего
	B_1	B_2	
A_1	f_{11}	f_{12}	f_{10}
A_2	f_{21}	f_{22}	f_{20}
Всего	f_{01}	f_{02}	f_{00}

где

$$f_{0j} = \sum_i f_{ij}, \; f_{i0} = \sum_j f_{ij}, \; f_{00} = \sum_i \sum_j f_{ij}. \tag{14.1}$$

Как видим, переменные A и B градуированы, т.е. каждая имеет по две «координаты». Одним из вопросов, который может быть задан при анализе собранных в таблице данных, является вопрос о *независимости* (градуированных) переменных A и B.

«Таблицы сопряженности для пары переменных A и B содержат частоты f_{ij}, с которыми встретилось сочетание i-го значения A и j-го значения B . Кроме того, в таблице обязательно присутствуют *маргинальные* частоты f_{0j} – равные сумме чисел f_{ij} по строке; f_{i0} – сумме по столбцу (частоты i-го значения A и j-го значения B, подсчитанные независимо) и f_{00} – общее число объектов. Таблица, заполненная одними частотами f_{ij}, обычно не имеет смысла, так как не проясняет должным образом взаимосвязи между переменными. Для исследования взаимосвязи необходимы статистики взаимосвязи переменных и статистики связи значений» [4].

Поскольку, с точки зрения математики, $A = (A_1, A_2)$ и $B = (B_1, B_2)$ – векторы, то об их независимости можно говорить в рамках корреляционного анализа. Но возможен иной подход – *анализ таблиц сопряженности* или другое название – *кросстабуляция*.

14.1. Методика сравнения переменных

Для табл. 14.1 методика проверки независимости переменных A и B исходит из следующего предположения.

Если переменные A и B *независимы*, то

$$\begin{aligned} \frac{f_{11}}{f_{01}} &= \frac{f_{12}}{f_{02}} = \frac{f_{10}}{f_{00}} \\ \frac{f_{21}}{f_{01}} &= \frac{f_{22}}{f_{02}} = \frac{f_{20}}{f_{00}}. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Откуда появляется такое правило? Считается, что если переменные A и B независимы, то *доля вклада* A_1 в B_1, B_2 и в итоговую построчную сумму (число f_{10}) должна быть одинаковой. Аналогично для A_2, B_1 и B_2. Иначе говоря, переменная A никак не может рассматриваться как причина дифференциации переменной B, т.е. причиной введения двух «координат» B_1, B_2 (переменная A не участвует в формировании «структуры», градации переменной B).

14.1.1. Обоснования анализа таблиц сопряженности

Дадим теоретико-вероятностное обоснование правила (14.2) [5, c18]. Допустим, что число f_{ij} – это вероятность p_{ij} попадания в ячейку (i, j) рассматриваемой таблицы [1].

Тогда (14.1) надо переписать в виде

$$p_{0j} = \sum_i p_{ij}, \; p_{i0} = \sum_j p_{ij}, \; p_{00} = \sum_i \sum_j p_{ij} = 1. \tag{14.3}$$

Поэтому условия (14.2) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{p_{11}}{p_{01}} &= \frac{p_{12}}{p_{02}} = \frac{p_{10}}{p_{00}} = p_{10}, \\ \frac{p_{21}}{p_{01}} &= \frac{p_{22}}{p_{02}} = \frac{p_{20}}{p_{00}} = p_{20}. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Из этих соотношений получаем

$$p_{ij} = p_{i0} p_{0j}. \tag{14.5}$$

Иначе говоря, вероятность попадания в ячейку (i, j) равна произведению вероятностей попадания в «итоговую» ячейку $(i, 0)$ – значение переменной A_i или *событие* A_i и в ячейку $(0, j)$ – значение переменной B_j или событие B_j.

[1] При статистическом подходе к понятию вероятности p_{ij} – частота попадания в ячейку (i, j).

Попасть в ячейку (i,j) – событие A_iB_j, являющееся произведением событий A_i и B_j. Если последние события независимы, то, как известно из теории вероятностей, справедлива формула для вероятностей рассматриваемых трех событий A_iB_j, A_i и B_j:

$$P(A_iB_j) = P(A_i)P(B_j).$$

Полагая

$$p_{ij} = P(A_iB_j), \quad p_{i0} = P(A_i), \quad p_{0j} = P(B_j),$$

получаем соотношение (14.5). Другими словами, принимаемое в анализе таблиц сопряженности правило независимости (14.2) в некотором роде опирается на принципы теории вероятностей.

14.2. Проверка статистической значимости независимости переменных

Правило (14.2) уязвимо относительно вмешательства случайных вариаций данных. Необходимо иметь методику проверки статистической гипотезы $H_0 : \{A \text{ и } B \text{ независимы}\}$.

Вычисляется величина

$$X^2 = \frac{f_{00}(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})^2}{f_{10}f_{20}f_{01}f_{02}}$$

и сравнивается с χ^2-распределение с одной степенью свободы [5, с.19-20]

$$\mathbf{P}(X^2 > (\chi^2)^{\text{табл.}}_{(\alpha,1)}) = \alpha = 0,05.$$

Если $X^2 < (\chi^2)^{\text{табл.}}_{(\alpha,1)}$, то гипотеза H_0 верна.

Пример 14.1.

Рассмотрим таблицу.

Таблица 14.2

Переменная A (предпочтение)	Переменная B		Всего
	B_1 (муж.)	B_2 (жен.)	
A_1 (духи)	10	20	30
A_2 (автомобили)	5	25	30
Всего	15	45	60

Имеем $X^2 = 2,22$ и $\chi^{2\,\text{табл.}}_{(0,1;1)} = 2,41$. Значит, $X^2 < \chi^{2\,\text{табл.}}_{(0,1;1)}$ и гипотеза H_0 верна. Предпочтение к духам или автомобилям никак не связано с полом людей :-).

Вспомним об обосновании правила (14.2). Если допустить линейную связь между данными ячеек, то ее можно записать, к примеру, в виде

$$\begin{cases} f_{11}\alpha + f_{12}\beta = f_{10} \\ f_{21}\alpha + f_{22}\beta = f_{20}. \end{cases} \tag{14.6}$$

Если числа α, β, удовлетворяющие (14.6), существуют, то связь есть, т.е. переменные зависимы. Как известно из линейной алгебры, условие отсутствия решения системы (14.6) имеет вид

$$det\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = 0. \tag{14.7}$$

Как видим, это означает $X^2 = 0$, т.е. гипотезу о независимости переменных A и B отбросить нельзя.

14.3. Общие плоские таблицы

В случае более сложной градации переменных A и B мы будем иметь следующую таблицу данных:

Таблица 14.3

Переменная A	Переменная B				Всего
	B_1	B_2	...	B_p	
A_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1p}	f_{10}
A_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2p}	f_{20}
.	.	.	...	.	.
A_m	f_{m1}	f_{m2}	...	f_{mp}	f_{m0}
Всего	f_{01}	f_{02}	...	f_{0p}	f_{00}

Для таких таблиц условие независимости переменных A и B имеет вид

$$\frac{f_{ij}}{f_{0j}} = \frac{f_{i0}}{f_{00}} \quad (i = 1, ..., m; j = 1, ..., p).$$

Для проверки гипотезы H_0: $\{A$ *и* B *независимы*$\}$ используется X^2-критерий

$$X^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}},$$

$$e_{ij} = \frac{f_{i0}f_{0j}}{f_{00}}.$$

Критерий проверки статистической гипотезы имеет вид

$$\mathbf{P}(X^2 > (\chi^2)^{\text{табл.}}_{(\alpha,(m-1)(p-1))}) = \alpha.$$

Если $X^2 < (\chi^2)^{\text{табл.}}_{(\alpha,(m-1)(p-1))}$, то гипотеза H_0 верна.

Пример 14.2. Рассмотрим таблицу сопряженности.

Таблица 14.4

Переменная A	Переменная B				Всего
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	13	13	12	22	60
A_2	4	24	28	34	90
A_3	3	8	15	24	50
Всего	20	45	55	80	200

Имеем $X^2 = 16,25$ и $(\chi^2)^{\text{табл.}}_{(0,1;6)} = 12,59$. Значит, $X^2 > (\chi^2)^{\text{табл.}}_{(0,1;1)}$ и гипотеза H_0 должна быть отклонена. Это означает, что переменные A и B *не независимы.*

14.4. Меры связи между переменными

Пусть переменные A и B не являются независимыми. В таком случае полезно иметь способ, измеряющий степень их зависимости, связи. Иными словами, необходимо определить *меру связи* для A и B.

14.4.1. Мера Крамера

Мера Крамера равна

$$V = \sqrt{\frac{X^2}{f_{00}\min(m-1,p-1)}},$$

$$0 \le V \le 1.$$

Зависимость теснее, если $V \to 1$.

14.4.2. Коэффициент Фишера φ

Коэффициент Фишера –

$$\varphi = \frac{X^2}{f_{00}},$$

$$0 \le \varphi \le \sqrt{\min(m-1,p-1)}$$

– представляет собой меру связи между двумя переменными в таблице $m \times p$. Его значения изменяются от 0 (нет зависимости между переменными; $\chi^2 = 0.0$) до 1 (абсолютная зависимость между двумя переменными в таблице).

Статистика φ имеет асимптотическое распределение χ^2 (в условиях гипотезы независимости).

14.4.3. Коэффициент контингенции

Коэффициент контингенции – это

$$C = \sqrt{\frac{X^2}{X^2+f_{00}}},$$

$$0 \le C < 1.$$

14.4.4. Мера Чупрова

Мера Чупрова определяется как

$$T = \sqrt{\frac{X^2}{f_{00}\sqrt{(m-1)(p-1)}}}.$$

14.4.5. Меры Гудмана-Краскала

Меры Гудмана-Краскала имеют вид:

$$\lambda_a = \frac{\sum_{j=1}^{p} f_{\mu j} - f_{\mu 0}}{f_{00} - f_{\mu 0}},$$

где

$$f_{\mu j} = \max_{1\le i\le m} f_{ij}, \quad f_{\mu 0} = \max_{1\le i\le m} f_{i0};$$

$$\lambda_b = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_{iM} - f_{0M}}{f_{00} - f_{0M}},$$

где

$$f_{iM} = \max_{1\le j\le p} f_{ij}, \quad f_{0M} = \max_{1\le j\le p} f_{0j}$$

и, наконец,

$$\lambda = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} f_{iM} - f_{0M}\right) + \left(\sum_{j=1}^{p} f_{\mu j} - f_{\mu 0}\right)}{2f_{00} - f_{\mu 0} - f_{0M}}.$$

14.4.6. Меры связи для ранговых переменных

Ранговыми переменными называются переменные, в которых можно установить порядок между значениями, например ответы на вопрос, требующий ответа «плохо», «хорошо», или «больше» – «меньше». Количественные переменные, такие как возраст, доход, также можно использовать в качестве ранговых.

Для ранговых переменных используются γ мера Гудмана-Краскала, мера τ Кендэла и мера τ Стюарта и d мера Сомерса [5, с.37-40], [4].

14.5. Примеры

14.5.1. Кросстабуляция в пакете STADIA

Если взять табл.14.2 и использовать для ее анализа пакет STADIA, то после ввода данных f_{ij} $(i,j = 1,2)$ и при нажатии «Кросстабуляция» в меню «Статистические методы» получаем следующие результаты:

КРОССТАБУЛЯЦИЯ. Файл: Табл 14.2.

Наблюдаемые частоты признаков

10	20|	30
5	25|	30

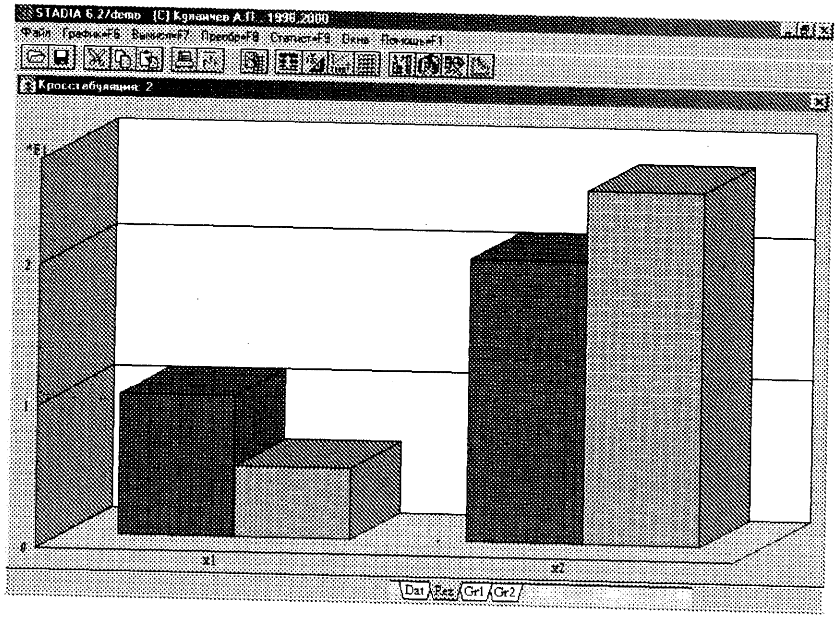


Рис. 14.2: Кросстабуляция (по горизонтальной оси – B_1 и B_2).

15	45|	60

Процентная встречаемость признаков по рядам:

33,33	66,67
16,67	83,33

Процентная встречаемость признаков по столбцам:

66,67	44,44
33,33	55,56

Общая процентная встречаемость признаков:

16,67	33,33|	50%
8,333	41,67|	50%
25%	75%	

Ожидаемые частоты признаков:

7,5	22,5
7,5	22,5

Остаточные частоты признаков (набл.-ожид.):

2,5	-2,5
-2,5	2,5

Хи-квадрат =2,222, Значимость=0,136, степ.своб = 1
Гипотеза 0: <Нет связи между признаками>

Коэфф. Фи =0,1925
Коэфф.сопряж. Пирсона = 0,189
V-коэфф. Граммера = 0,1925
Ламбда Гудмана и Крускала: симметр, ряд, столб = 0,1111, 0,5, -0,6667
Тау-b Кендала = 0,1925
Тау-c Кендала =0,1667
Гамма Гудмана и Кендала =0,4286
$d(x, y)$ Соммера=0,1667, 0,2222

Кроме этих результатов программа STADIA строит рис.14.2.

14.5.2. Кросстабуляция в пакете SPSS

С помощью таблиц сопряженности и мер связи был проведен анализ зависимости между участием в партийной работе и родом трудовой деятельности для некоторой группы граждан, проживающих в городе N.

Анализ опирался на данные проведенного социологами опроса. Результаты выполненной кросстабуляции с помощью пакета SPSS представлены в табл. 14.5-14.8.

Таблица 14.5: Таблица сопряженности. Партийная работа * Род деятельности Crosstabulation

Партийная работа		Род деятельности			
		Наемный работник	Государственный служащий	Предприниматель	Total
да	Count	13	16	7	36
	Expected Count	12,4	10,1	13,5	36,0
	% within Род деятельности	59,1%	88,9%	29,2%	56,3%
	Std. Residual	,2	1,8	-1,8	
нет	Count	9	2	17	28
	Expected Count	9,6	7,9	10,5	28,0
	% within Род деятельности	40,9%	11,1%	70,8%	43,8%
	Std. Residual	-,2	-2,1	2,0	
Total	Count	22	18	24	64
	Expected Count	22,0	18,0	24,0	64,0
	% within Род деятельности	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Табл.14.5 содержит наблюдаемые и ожидаемые частоты, стандартизированные остатки и количество (в процентах, по столбцам)

людей, относящихся к конкретному роду деятельности и занимающихся партийной работой.

Чтобы сделать более наглядными данные, содержащиеся в таблицах сопряженности, их представляют в виде диаграммы, данной на рис. 14.3.

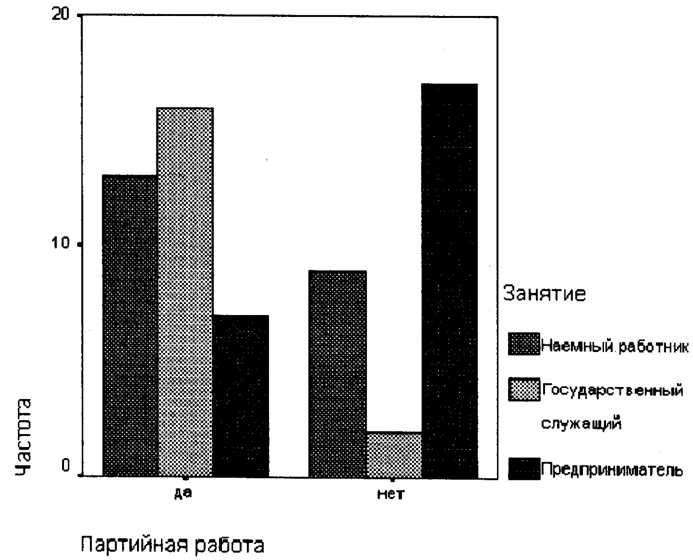


Рис. 14.3: Диаграмма частот.

Собранные данные показали, что участие в партийной работе характерно для государственных служащих (88,9%), для предпринимателей — совсем не характерно (29,2%), а наемные работники занимают промежуточное положение – 59,1%. Видно, что процентное распределение значительно различается, следовательно, мы не можем на основании этих цифр сделать заключение о существовании (статистической) зависимости между участием в партийной работе и родом трудовой деятельности.

Поэтому необходима кросстабуляция. В табл.14.6 приведены данные проверки гипотезы H_0 по критерию хи-квадрат и логарифма отношения правдоподобия. В нашем примере значимость по критерию хи-квадрат составляет около 0,1% (см. Asymp. Sig. (2-sided)), значимость по критерию хи-квадрат с поправкой на правдоподобие составляет менее 0,1%. Следовательно, гипотеза H_0 о независимо-

Таблица 14.6: Тест хи-квадрат.
Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	15,017[a]	2	,001
Likelihood Ratio	16,421	2	,000
Linear-by-Linear Association	4,420	1	,036
N of Valid Cases	64		

a. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 7,88.

Таблица 14.7: Направленные меры.
Directional Measures

Nominal by Nominal		Value	Asymp. Std. Error[a]	Appr. T[b]	Appr. Sig.
Lambda	Symmetric	,279	,104	2,554	,011
	Партийная работа Dependent	,357	,140	2,111	,035
	Занятие Dependent	,225	,106	1,930	,054
Goodman and Kruskal tau	Партийная работа Dependent	,235	,093		,001[c]
	Занятие Dependent	,116	,051		,001[c]
Uncertainty Coefficient	Symmetric	,144	,063	2,269	,000[d]
	Партийная работа Dependent	,187	,082	2,269	,000[d]
	Занятие Dependent	,118	,052	2,269	,000[d]

a. Not assuming the null hypothesis.
b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.
c. Based on chi-square approximation
d. Likelihood ratio chi-square probability.

сти признаков отклоняется и принимается гипотеза о зависимости. Текст под табл. 14.6 «*a*. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 7,88» свидетельствует о том, что все ожидаемые частоты больше 5 и их минимум равен 7,88. Это говорит о корректности использования критерия хи-квадрат.

В табл. 14.7 даны значения для различных несимметричных мер связи переменных. Мы можем определить *направление зависимости*, т.е. установить, какую из двух переменных следует считать зависимой. В случае нашего примера мы видим, что партийной работа сильнее зависит от рода трудовой деятельности, чем род деятельности от участия в партийной работе (0,235 > 0,116 для меры Гудмана-Краскала). Другими словами, «партийная работа» является зависимой переменной.

Таблица 14.8: Симметричные меры.
Symmetric Measures

		Value	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Phi	,484	,001
	Cramer's V	,484	,001
	Contingency Coefficient	,436	,001
N of Valid Cases		64	

a. Not assuming the null hypothesis.
b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.

В табл. 14.8 представлены различные симметричные меры связи, такие как мера связи V Крамера, сопряженности (контингенции), значения которых используются для оценки степени связи переменных. В нашем примере с уровнем значимости 0,1% значения мер связи находятся в промежутке между 0,4 и 0,5, т.е. имеется средняя степень зависимости.

Литература

[1] Абрамова Н. *Кибернетическая модель и построение теории: эксперимент, модель, теория.* Москва-Берлин, 1980.

[2] Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. *Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности.* М.: Финансы и статистика, 1989. 607 с.

[3] Айвазян С.А., Мхитарян В.В. *Прикладная статистика в задачах и упражнениях.* М.: Юнити, 2001.

[4] *Анализ социологических данных с применением статистического пакета SPSS.* – http://www.ieie.nsc.ru/ meta-nsk/docs/Rostovtsev /book_datan/Content.htm

[5] Аптон Г. *Анализ таблиц сопряженности.* М.: Финансы и статистика, 1982.

[6] Аршинов В.И. *Когнитивные стратегии синергетики* / Онтология и эпистемология синергетики. М., 1997.

[7] Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н. *Неравновесная термодинамика и физическая кинетика.* М.: МГУ, 1989.

[8] Бартоломью Д. *Стохастические модели социальных процессов.* М.: Финансы и статистика, 1985.

[9] Белоусов Б.П. *Периодически действующая реакция и ее механизм* / В Сб. рефератов по радиационной медицине за 1958 год. М. Медгиз, 1959. С. 145-147.

[10] Белоусов Б.П. *Периодически действующая реакция и ее механизм* / Автоволновые процессы в системах с диффузией. Сб. науч. тр. Под ред. М.Т.Греховой. Горьк. гос. ун-т. Горький, 1981. С.176-186.

[11] Бестужев-Лада И.В., Варыгин В.Н., Малахов В.А. *Моделирование в социологических исследованиях.* М., 1978.

[12] Благуш П. *Факторный анализ с обобщениями.* М.: Финансы и статистика, 1989.

[13] Брёкер Т., Ландер Л. *Дифференцируемые ростки и катастрофы.* М.: Мир, 1977.

[14] Бююль А., Цефель П. *SPSS: искусство обработки информации. Анализ статистических данных и восстановление скрытых закономерностей.* СПб.: ООО «ДиаСофтЮП», 2001.

[15] Веселкова Н.В. *Существует ли социология времени* // Социологический журнал. 2000. N.1-2.

[16] *Введение в макроэкономику* / Под ред. М.Е.Дорошенко. М.:Юнити, 2001.

[17] Гумилев Л.Н. *Этногенез и биосфера Земли.* М.: Танаис ДИ-ДИК, 1994.

[18] Гуц А.К., Гуц Л.А. *Реформы как фактор стабилизации социальных процессов* // Динамика систем, механизмов и машин: Тезисы докладов международной научно-технической конференции. – Омск, ОмТГУ, 1995. С.86-87.

[19] Гуц А.К. *Глобальная этносоциология.* Омск: ОмГУ, 1997.

[20] Гуц А.К., Коробицын В.В., Лаптев А.А., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. *Математическое моделирование социальных систем.* Омск: ОмГУ, 2000.

[21] Гуц А.К., Коробицын В.В., Лаптев А.А., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. *Социальные системы. Формализация и компьютерное моделирование.* Омск: ОмГУ, 2000.

[22] Гуц А.К., Коробицын В.В., Лаптев А.А., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. *Компьютерное моделирование. Инструменты для исследования социальных систем.*Омск: ОмГУ, 2001.

[23] Данилов Н.Н. *Курс математической экономики.* – http://lanserv2.kemsu.ru/departs/mathciber/book/matekon/ Chapter1/par1_2.html

[24] *Дискриминантный анализ.* – http://www.kgtu.runnet.ru/WD/ TUTOR/textbook/modules/stdiscan.html

[25] *Дисперсионный анализ.* – http://www.kgtu.runnet.ru/WD/TUTOR/ textbook/modules/stanman.html#basic

[26] Добренко М.А., Гуц А.К. *Первичные структуры отношений Кулакова в микроэкономике* // Математические структуры и моделирование. 2003. Вып.11. С.88-96.

[27] Добренко М.А., Гуц А.К. *Макроэкономические первичные структуры отношений Кулакова* // Математические структуры и моделирование. 2003. Вып.12. (в печати).

[28] Дудина В.И. *Социологический метод: от классической к постнеклассической точке зрения* // Журнал социологии и социальной антропологии. 1999. Т. II, Вып.3.

[29] Дугин А. *Консервативная революция.* М., 1994.

[30] Иберла К. *Факторный анализ.* М.: Статистика, 1980.

[31] *Интерпретация и анализ данных в социологических исследованиях.* М.: Наука, 1987.

[32] Йост Ж., Джозеф Д. *Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.* М.: Мир, 1983.

[33] Здравомыслова Е.А., Темкина А.А. *Социальное конструирование гендера.* – http://win.www.nir.ru/socio/scipubl/sj/34-zdrav.htm

[34] Каракозова Э. *Моделирование в общественных науках.* М., 1986.

[35] Каримов Р.Н. *Дискриминантный анализ.* Методические указания. Саратов: СГУ, 2001.
– http://www.alexbar.narod.ru/diskrim/index.htm

[36] Касти Дж. *Большие системы. Связность, сложность и катастрофы.* М.: Мир, 1982.

[37] Капица С.П. *Общая теория роста человечества: сколько людей жило, живет и будет жить на Земле.* М., Наука, 1999.

[38] Князева Е.Н., Курдюмов С.П. *Синергетика как новое мировидение: диалог с И. Пригожиным* // Вопросы философии, 1992. N.12. C.13.

[39] Козлова Н.Н., Смирнова Н.М. *Кризис классических методологий и современная познавательная ситуация* // Социологические исследования. 1995. N.11.

[40] *Компьютерное моделирование социально-политических процессов* / Под общ. ред. О.Ф.Шаброва. М., 1994.

[41] Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. *Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику.* М.: Архимед, 1992.

[42] Кузин Б., Юрьев В., Шахдинаров Г. *Методы и модели управления фирмой.* СПб.: Питер, 2001.

[43] Курбатов В.И., Угольницкий Г.А. *Математические методы социальных технологий.* М.: Вузов. кн., 1998.

[44] Курдюмов С., Г. Малинецкий Г. *Синергетика – теория самоорганизации* – http://www.humans.ru/humans/55935

[45] Левин К. *Теория поля в социальных науках.* СПб.: Речь, 2000.

[46] Лиотар Ж. *Состояние постмодерна.* СПБ, 2000.

[47] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Физическая кинетика.* М.:Наука, 1979.

[48] Лоули Д., Максвелл А. *Факторный анализ как статистический метод.* М.:Мир, 1967.

[49] Максименко В.С., Паниотто В.И. *Зачем социологу нужна математика.* Киев: Радянська школа, 1988.

[50] Мандель И.Д. *Кластерный анализ.* М.: Финансы и статистика, 1988.

[51] *Математические методы в социологии* М., 1983

[52] *Математические методы в социальных науках* / Сб. статей под ред. Пауля Лазарсфельда и Нейла У. Генри. М.: Прогресс, 1973.

[53] Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения.* М.:Мир, 1980.

[54] *Метод главных компонент*: Методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу «Обработка экспериментальной информации» для студентов специальности 220200. Саратов: СГУ, 2001. – http://www.alexbar.narod.ru/mgk/index.htm

[55] Морозов Е.И. *Методология и методы анализа социальных систем.* М.: Изд-во МГУ, 1995.

[56] Николис Г., Пригожин И.Р. *Самоорганизация в неравновесных системах.* М.: Мир, 1979.

[57] Осипов Г. В., Андреев Э.П. *Методы измерения в социологии.* М.: Наука, 1977.

[58] Паниотто В.И., Максименко В.С. *Количественные методы в социологических исследованиях.* Киев.: Наукова думка, 1982.

[59] Паниотто В.И *Опыт моделирования социальных процессов.* Киев, 1989.

[60] Паповян С.С. *Математические методы в социальной психологии.* М., 1983.

[61] Петренко В.Ф., Митина О.В. *Анализ динамики общественного сознания.* Смоленск, 1997.

[62] Пименов Р.И. *Дифференциальные уравнения – насколько они оправданы?* – http://re-tech.narod.ru/inf/sinergy/rv.htm

[63] Плотинский Ю.М. *Математические модели динамики социальных процессов.* М.: Изд-во МГУ, 1992.

[64] Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения.* М.: Мир, 1980.

[65] *Применение факторного и классификационного анализа для типологизации социальных явлении.* Новосибирск: ИЭиОПП СО АН СССР, 1976.

[66] Пригожин И.Р., Стенгерс И. *Порядок из хаоса.* М.: URSS, 2005.

[67] Пу Т. *Нелинейная экономическая динамика.* Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000.

[68] Пфанцагль И. *Теория измерений.* М.: Мир, 1976.

[69] *Рабочая книга социолога.* М.: Наука, 1983. Изд.4. М.: URSS, 2006.

[70] Робертс Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам.* М., 1986.

[71] Родионова Н.В. *емантический дифференциал (обзор литературы)* // Социология: 4М. 1996. N.7. С.175-200.

[72] Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. *Термодинамика, статистическая физика и кинетика.* М.: Наука, 1972.

[73] Савчук Г. *Концепция цивилизации Н. Элиаса: «процессуальная перспектива» изучения общества* // Социологический журнал. 1999. N.1.

[74] Свирский Я.И. *Синергетика смысла, или смысл синергетики* / Онтология и эпистемология синергетики. М., 1997.

[75] Себер Дж.А.Ф. *Линейный регрессионный анализ.* М.: Мир, 1980.

[76] Сидоренко Е.В. *Методы математической обработки в психологии.* СПб.: Речь, 2000

[77] Татарова Г.Г. *От постулатов эмпирической социологии к методологии анализа данных.*
– http://kirnik.km.ru/seminar/library/tatarova/analiz.html

[78] Татарова Г.Г. *Методология анализа данных (введение).* Учебник для вузов. М.: NOTA BENE, 1999.

[79] Тихомиров Н.П., Райцин В.Я., Гавршец Ю.Н., Спиридонов Ю.Д. *Моделирование социальных процессов.* М., 1993.

[80] Толстова Ю.Н. *Логика математического анализа социологических данных.* М., 1991.

[81] Толстова Ю.Н. *Логика и методология математического анализа социологических данных.* Дис. д.социол.н. М., 1993.

[82] Толстова Ю.Н. *Измерение в социологии.* М.: ИНФРА-М, 1998.

[83] Толстова Ю.Н. *Модели и методы анализа данных социологических исследований: дескриптивная статитика, изучение связей между номинальными признаками.* М.: ГУУ, 1999.

[84] Томпсон Д.М.Т. *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике.* М.:Мир, 1985.

[85] Харман П. *Современный факторный анализ.* М.: Статистика, 1975.

[86] *Хрестоматия по курсу гендерных исследований.* М.: Изд-во «Московского центра гендерных исследований», 2000.

[87] Черникова И.В. *Философия и история науки.*
http://ou.tsu.ru/hischool/4ernikova/r3gl13.htm

[88] Шеннон Р. *Имитационное моделирование систем искусство и наука.* М., 1978.

[89] Шеффе Г. *Дисперсионный анализ.* М.: Наука, 1980.

[90] *Факторный, дискриминантный и кластерный анализ.* М., Финансы и статистика, 1989.

[91] Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения.* М.: Мир, 1980.

[92] Ривес Н.Я. *Способ построения социологических моделей на ЭВМ и его применение в задачах управления* // Математические методы и компьютеры в социологических исследованиях. М., 1988.

[93] *SPSS (учебник).*
– http://www.bas-net.by/ScienceSoft/Manuals/ManSpss/Spss.htm

[94] Форрестер Дж. *Мировая динамика.* М., Наука, 1978.

[95] Хайтун С.Д. *Мои идеи.* М.: Агар, 1998.

[96] Хакен Г. *Синергетика.* М.: Мир, 1980.

[97] Хакен Г. *Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах..* М.: Мир, 1985.

[98] Хакен Г. *Информация и самоорганизация.* М.: КомКнига/URSS, 2006.

[99] Харман Г. *Современным факторный анализ.* М.: Статистика, 1972.

[100] Хованов И.В. *Магматические основы теории шкал измерения качества.* Л., 1982.

[101] Цыба В.Т. *Математико-статистичсские основы социологических исследований.* М.: Финансы и статистика, 1981.

[102] Чумаков Б.И. *Моделирование ответственности средствами модальных логик*// Математическое моделирование и применение вычислительной техники в социологических исследованиях. М.: ИСИ АН СССР, 1980. С.128-133.

[103] Шарыпов О.В. *Детерминированный хаос и случайность.* – http://www.philosophy.nsc.ru/journals/philscience/10_01/05_sharyp.htm

[104] Эльсгольц А.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука, 1965.

[105] Ядов В.А. *Стратегия социологического исследования. Описание, объяснение, понимание социальной реальности.* М., 1998.

[106] Epstein J.M., Axtell R. *Growing Artificial Societies.* Washington, Brookings Institution Press, 1996.

[107] Helbing D. *Quantitative Sociodynamics.* Dordrecht: Kluwer Academic, 1995.

[108] Weidlich W., Haag G. *Concepts and Models of Quantitative Sociology.* Berlin: Springer, 1983.

[109] Weidlich W. *Physics and Social Science. The Approach of Synergetics* // Physics Reports. 1991. V.204. P.1-163.

Оглавление