Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Педагогічний інститут
Кафедра математичних і природничих дисциплін початкової освіти

Елементи геометрії. Величини.

(Методичні рекомендації для студентів спеціальності “Початкове навчання”)

Івано-Франківськ – 2011

УДК 378.14:510.8
ББК 22.128
Р – 64

Романишин Р.Я. Елементи геометрії. Величини. (Методичні рекомендації для студентів спеціальності “Початкове навчання”) / Івано-Франківськ: Видавець Кушнір Г.М. – 2011. – 36 с.

***Рецензенти*:**
Кульчицька Н.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри статистики і вищої математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;
Бігун М.І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри менеджменту та освітніх інновацій Івано-Франківського обласного ІППО.

Рекомендовано до друку Вченою Радою
Педагогічного інституту
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Шановний третьокурснику. Ці методичні рекомендації адресовані саме тобі. У цьому семестрі завершується вивчення навчальної дисципліни «Математика» і він буде присвячений найцікавішому, найоригінальнішому в плані роздумів і міркувань розділу – геометрії.

Впродовж тисячоліть ряд вчених, мудреців, філософів, жерців храмів накопичували знання, які у зібраному і обґрунтованому варіанті представлені у цьому виданні.

Виділені і наочно проілюстровані у методичних рекомендаціях аксіоми, теореми, означення, властивості фігур, задачі сприяють кращому візуальному їх сприйняттю і допоможуть виділити найголовніше у запропонованій темі.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується наведенням прикладів та розв’язком задач, які ілюструють типові підходи до вирішення і правильного їх оформлення.

Запропоновані відповіді до певних завдань сприятимуть самоконтролю, а також допоможуть при виконанні домашніх завдань. Тож все у ваших руках.

Сподіваюся, що в процесі вивчення математики ніхто не залишався до цього предмету байдужим: хтось навчився правильно записувати формули і вивчив декілька означень, хтось навчився розв’язувати приклади і задачі, а хтось полюбив її всім серцем. Саме такого не байдужого ставлення до себе заслуговує, за визначенням древніх мудреців, цариця всіх наук – математика.

Бажаю успіхів у її вивченні.

1. АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ГЕОМЕТРІЇ. СИСТЕМА ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОНЯТЬ, ЩО ВИВЧАЮТЬСЯ В ШКОЛІ

Геометрія – це наука про властивості геометричних фігур.

Планіметрія – це розділ геометрії, у якому вивчаються фігури на площині.

Точка і *пряма* є основними поняттями планіметрії. Це означає, що цим поняттям не можна дати точне означення, їх можна тільки уявити, спираючись на досвід та перелічивши їхні властивості.

Твердження, справедливість яких приймається без доведення, називаються **аксіомами**. Вони містять формулювання основних властивостей найпростіших фігур.

Твердження, які доводять, називаються **теоремами**.

Означення – це пояснення якогось поняття, яке спирається або на основні поняття, або на поняття, що визначені раніше.

Позначення: точки позначаються великими латинськими буквами; прямі – малими латинськими буквами або двома великими латинськими буквами (якщо на прямій позначені дві точки).

Поняття про аксіоматичний метод побудови теорії було розглянуто на прикладі аксіоматичної побудови множини цілих невід’ємних чисел.

Розглянемо суть аксіоматичного методу в геометрії.

Геометричні поняття вводяться, як відомо, за допомогою означень, в яких використовуються інші, вже відомі поняття. Наприклад, хорду кола означають як відрізок, кінці якого належать колу. У цьому означенні використано поняття “відрізок”, “коло”, які означені раніше. Відрізком AB називають множину точок прямої, яка, крім точок A і B, містить усі точки, що лежать між ними. Колом називають множину всіх точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від даної точки цієї площини.

Як бачимо, в означення відрізка, кола входять поняття “множина”, “точка”, “між”, “відстань”. Тому ці поняття повинні бути означені через інші, вже відомі поняття і т. д. Проте дати означення всім поняттям не можна, бо при цьому ланцюг посилань на відомі вже поняття був би нескінченним. Отже, деякі поняття необхідно прийняти без означення.

Геометричні поняття, які приймаються без означення, називаються основними або вихідними.

До основних понять належать основні об'єкти й основні відношення між ними. Основними об'єктами в геометрії є *точка, пряма, площина, відрізок, вектор.*

Залежно від вибору основних об'єктів вибираються основні відношення між ними, зокрема, належність; між; міра; відстань; відкладання відрізка, кута, трикутника, вектора; рівність; рух; сума векторів та ін.

Висловлення, які приймаються в геометрії без доведення як вихідні, називають **аксіомами** геометрії. Істинність усіх інших висловлень доводять послідовними міркуваннями без використання інтуїції або дослідних даних.

Всю геометрію можна побудувати логічно, спираючись на невелику кількість основних понять і аксіом.

Логічна побудова геометрії полягає в тому, що:

– перелічуються без означення основні (вихідні) геометричні поняття (об'єкти і відношення між ними);

– за допомогою основних понять означаються всі інші геометричні поняття;

– формулюються аксіоми;

– на основі аксіом і означень доводяться наступні геометричні твердження.

Метод побудови геометрії за такою схемою називається *аксіоматичним* або *дедуктивним,* оскільки в ньому істотну роль для умовиводів відіграють сформульовані аксіоми.

Аксіоми, які розкривають зміст певного поняття, об'єднують в одну групу. Таким чином, аксіоми геометрії утворюють кілька груп. Так, це "аксіоми належності",
"аксіоми порядку",
"аксіоми міри".

Зазначимо, що для логічної побудови однієї й тієї самої геометрії можна скласти різні сукупності аксіом як за кількістю, так і за змістом, залежно від вибору основних об'єктів геометрії. При цьому необхідно й достатньо, щоб сукупність аксіом утворювала систему аксіом.

Системою аксіом називають таку сукупність аксіом, яка задовольняє умови: несуперечності, незалежності, повноти.

Умова несуперечності полягає в тому, щоб:

1) серед аксіом даної сукупності не було тверджень, суперечливих одне одному;
2) серед тверджень, доведених на основі вибраних аксіом, не було суперечливих як між собою, так і суперечливих якій-небудь аксіомі;
3) була впевненість, що й при дальшому розвитку геометрії на основі даної сукупності аксіом не будуть виведені твердження, суперечливі якій-небудь аксіомі або якому-небудь твердженню, доведеному раніше.

Аксіома називається **незалежною** від усіх інших аксіом даної системи, якщо вона не є логічним наслідком інших аксіом цієї системи. Умова незалежності вимагає, щоб кожна аксіома системи була незалежною від решти її аксіом. Якщо ставиться питання про незалежність деякої системи аксіом, то мають на увазі, що вона несуперечлива.

Умова повноти системи аксіом вимагає, щоб аксіом у вибраній сукупності було достатньо для логічного обґрунтування всіх тверджень геометрії.

АКСІОМИ ГЕОМЕТРІЇ

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ (АКСІОМИ) НАЛЕЖНОСТІ ТОЧОК І ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

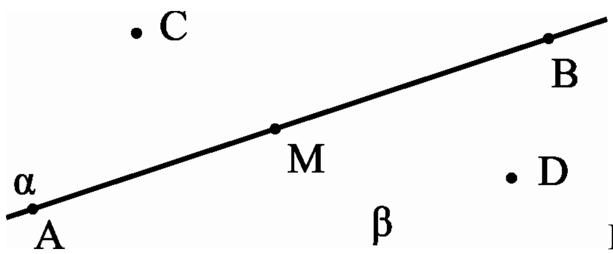


Рис.1

A_1. Яка б не була пряма, існують точки, які належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

<u>*Пояснення*</u>: точки M, B – належать прямій α, точки C, D – не належать прямій α.

A_2. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну.

<u>*Пояснення*</u>: через точки M і B проходить пряма α.

A_3. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

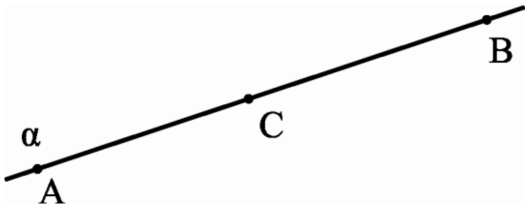


Рис.2

Пояснення: з поміж точок А, В і С точка С лежить між точками А і В.

Відрізком називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома даними її точками. Ці точки називаються кінцями відрізка.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ (АКСІОМИ) ВИМІРЮВАННЯ ВІДРІЗКІВ

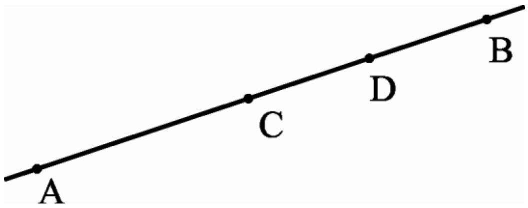


Рис.3

A_1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.

A_2. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

Пояснення: довжина відрізка АВ = АС + CD + DB.

ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК ВІДНОСНО ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Пряма розбиває площину на дві півплощини.

Півпрямою, або **променем**, називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної на ній точки. Ця точка називається початковою точкою променя. Різні півпрямі однієї прямої зі спільною початковою точкою називаються доповняльними.

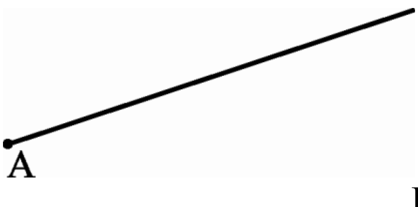


Рис.4

Кут – це фігура, яка складається з точки – вершини кута і двох різних півпрямих, що виходять із цієї точки, – сторін кута.

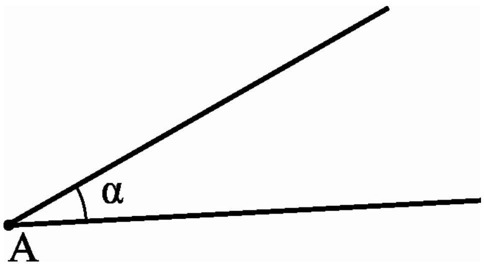


Рис.5

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ

1. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°.

2. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

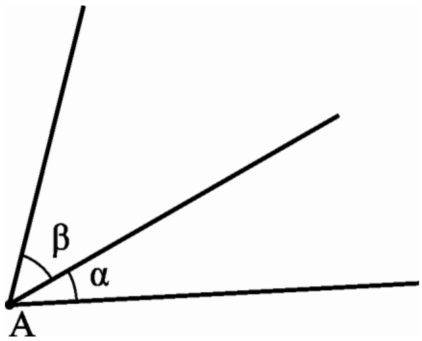


Рис.6

Пояснення: $\angle A = \angle\alpha + \angle\beta$.

2. ОЗНАЧЕННЯ ТРИКУТНИКА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються вершинами трикутника, а відрізки – його сторонами.

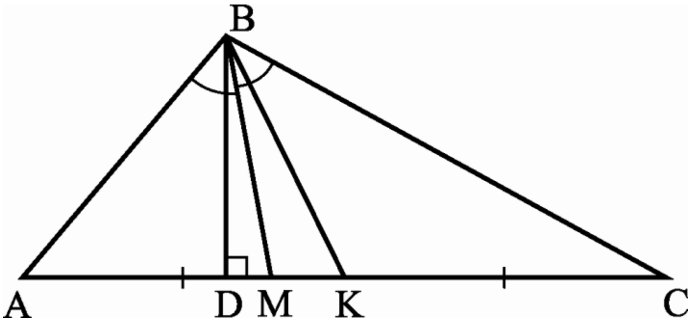


Рис.7

Трикутники називаються **рівними**, якщо у них відповідні сторони рівні й відповідні кути рівні. При цьому відповідні кути мають лежати проти відповідних сторін.

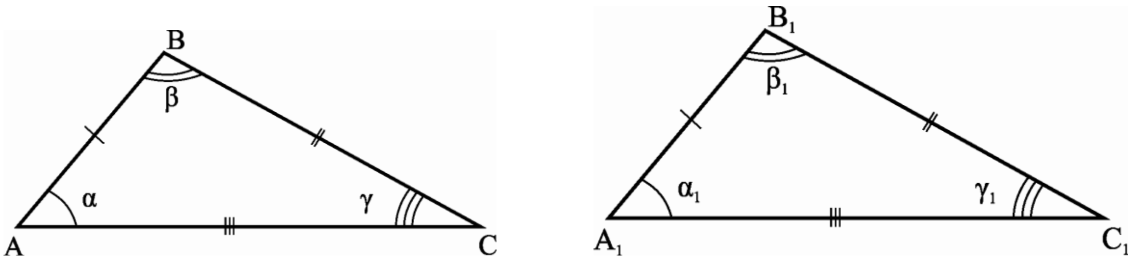


Рис.8

Пояснення: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, бо $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle\alpha = \angle\alpha_1$, $\angle\beta = \angle\beta_1$, $\angle\gamma = \angle\gamma_1$.

Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає його вершину з серединою протилежної сторони.

Пояснення: ВК – медіана, бо АК = КС.

Висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений з його вершини до прямої, яка містить протилежну сторону трикутника.

Пояснення: BD – висота, бо $\angle BDC = \angle 90°$.

Бісектрисою кута називається промінь, який виходить із вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут пополам.

Бісектрисою трикутника, проведеного з даної вершини, називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає цю вершину з точкою на протилежній стороні.

Пояснення: ВМ – бісектриса, бо $\angle ABM = \angle MBC$.

Трикутник називається **рівнобедреним**, якщо дві його сторони рівні. Ці сторони називаються **бічними**.

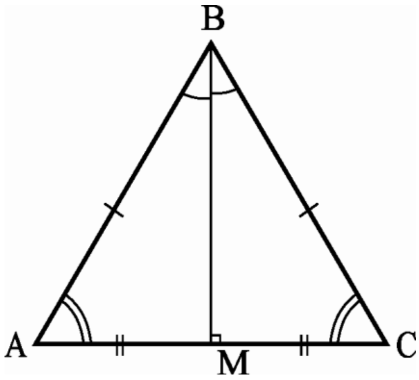


Рис.9

1. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

2. У рівнобедреному трикутнику медіана, висота і бісектриса, проведені до основи, збігаються.

Пояснення: BM – висота, бісектриса, медіана.

3. У рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін (а також і висоти), рівні.

Якщо всі сторони трикутника рівні, він називається **рівностороннім трикутником**.

Теорема. У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.

Теорема. У рівносторонньому трикутнику висота, медіана, бісектриса, проведені з однієї вершини, збігаються.

Теорема. У рівносторонньому трикутнику всі медіани (висоти, бісектриси) рівні між собою.

ОЗНАКИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

Теорема. Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

Теорема. Трикутник рівнобедрений, якщо:

одна з його висот є медіаною;

одна з його медіан є бісектрисою;

одна з його висот є бісектрисою.

Теорема. Трикутник рівнобедрений, якщо:

дві його висоти рівні;

дві його медіани рівні;

дві його бісектриси рівні.

Аналогічно можна сформулювати ознаки рівностороннього трикутника.

СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

Теорема. Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

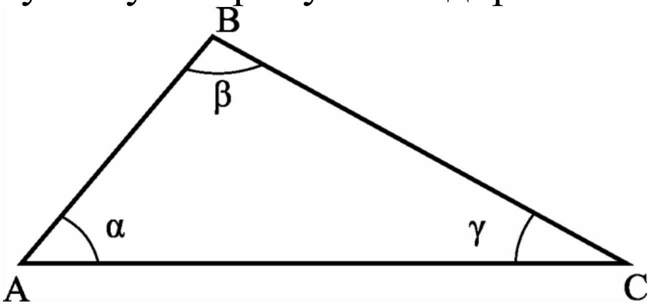


Рис.10

Пояснення: $\angle\alpha = \angle\beta = \angle\gamma = 180°$.

Із цієї теореми випливають наслідки:

1. У будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі (тобто в трикутнику не може бути більше одного прямого або тупого кута).

2. Кути рівностороннього трикутника дорівнюють 60°.

Трикутник називається **прямокутним**, якщо він має прямий кут.

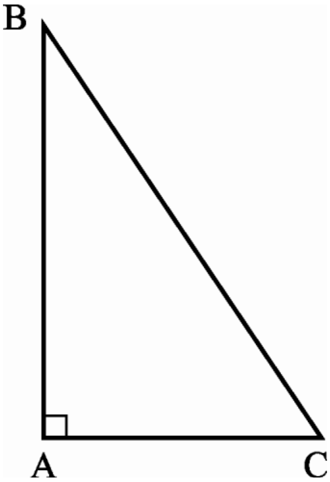


Рис.11

Пояснення: $\angle BAC = 90°$.

Сторона, яка лежить проти прямого кута, називається **гіпотенузою.**

Пояснення: BC – гіпотенуза.

Сторони, що утворюють прямий кут, називаються **катетами**.

Пояснення: AB і AC – катети.

Теорема. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Теорема. Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Теорема. Якщо два катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють двом катетам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Теорема. Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Теорема. Якщо катет і прилеглий (протилежний) гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому (протилежному) гострому куту другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Теорема. У прямокутному трикутнику з кутом 30° катет, протилежний цьому куту, дорівнює половині гіпотенузи.

Теорема. Якщо в прямокутному трикутнику катет дорівнює половині гіпотенузи протилежний цьому катету кут дорівнює 30°.

Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.

Теорема має місце не тільки для сторін кута, а й для довільних прямих.

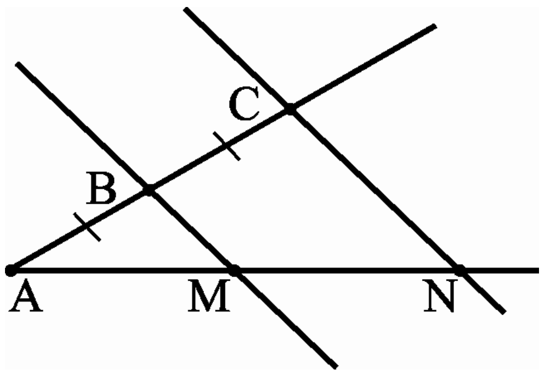


Рис.12

Пояснення: якщо BM // CN і AB = BC, то AM = MN.

Теорема про пропорційні відрізки. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки.

Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

Теорема. Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні й дорівнює її половині.

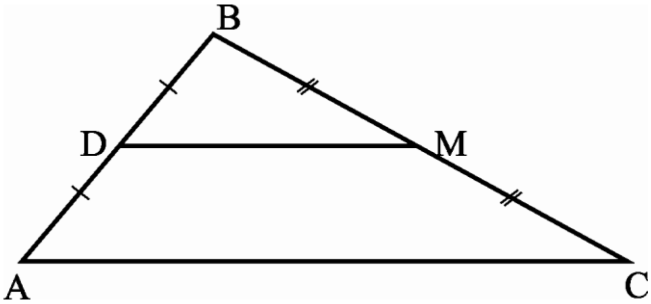


Рис.13

Пояснення: AD = DB, BM = MC, DM – середня лінія ΔABC, $DM = \frac{1}{2}AC$, DM // AC.

Теорема Піфагора. У прямокутному три кутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Правильною є і теорема, обернена до теореми Піфагора.

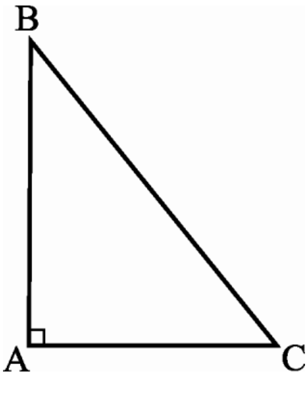


Рис.14

Пояснення: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Теорема. У прямокутному трикутник будь-який із катетів менший за гіпотенузу.

3. ЧОТИРИКУТНИКИ. ОЗНАЧЕННЯ ПАРАЛЕЛОГРАМА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Чотирикутником називається фігура, яка складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що послідовно їх сполучають. При цьому жодні три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають, не повинні перетинатися. Дані точки називаються вершинами чотирикутника, а відрізки, що їх сполучають – сторонами чотирикутника.

Вершини чотирикутника називаються сусідніми, якщо вони є кінцями однієї з його сторін. Несусідні вершини називаються **протилежними**. Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються **діагоналями**.

Сторони чотирикутника, що виходять з однієї вершини, називаються **сусідніми сторонами**. Сторони, які не мають спільного кінця, називаються **протилежними сторонами**.

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

Периметр чотирикутника – сума довжин усіх його сторін.

Чотирикутник називається опуклим, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону.

Паралелограм це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.

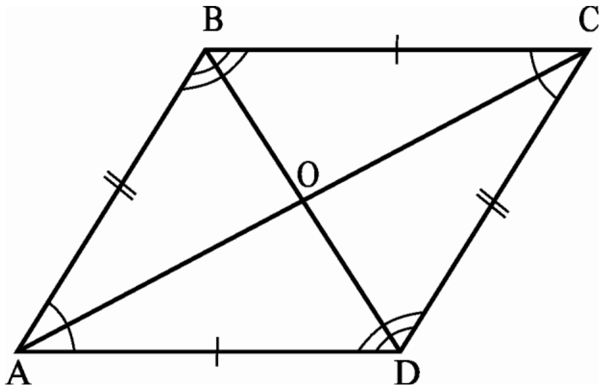


Рис.15

Паралелограм має такі **властивості:**

• У паралелограма протилежні сторони рівні.

Пояснення: AD = BC, AB = DC.

• У паралелограма протилежні кути рівні.

Пояснення: $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$.

• У паралелограмі кути, прилеглі до однієї сторони, в сумі дорівнюють 180°.

Пояснення: $\angle BAD + \angle ABC = 180°$.

• Діагоналі паралелограма перетинаються й у точці перетину діляться навпіл.

Пояснення: AO = OC, BO = OD.

• Діагональ паралелограма поділяє його на два рівні трикутники.

Пояснення: діагональ AC розбиває на два рівні трикутники $\Delta ABC = \Delta ADC$; діагональ BD розбиває на два рівні трикутники $\Delta BAD = \Delta BCC$.

• Діагоналі паралелограма розбивають його на дві пари рівних трикутників.

Пояснення: діагоналі AC і BD розбивають на рівні трикутники $\Delta AOD = \Delta COD = \Delta BOC = \Delta BOA$;

ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛОГРАМА

• Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються й у точці перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник – паралелограм.

• Якщо в чотирикутнику сторони паралельні й рівні, то цей чотирикутник – паралелограм.

• Якщо в чотирикутнику протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник паралелограм.

• Якщо в чотирикутнику протилежні кути рівні, то цей чотирикутник паралелограм.

• Якщо в чотирикутнику кути, що є прилеглими до кожної із сторін, у сумі дорівнюють 180°, то цей чотирикутник паралелограм.

• Якщо кожна діагональ поділяє чотирикутник на два рівні трикутники, чотирикутник – паралелограм.

Висота паралелограма – це відрізок перпендикулярний до протилежних сторін паралелограма з кінцями на цих сторонах.

ВЛАСТИВОСТІ БІСЕКТРИС КУТІВ ПАРАЛЕЛОГРАМА

Бісектриси сусідніх кутів паралелограма перпендикулярні.

1. Бісектриси протилежних кутів паралелограма паралельні або збігаються (якщо паралелограм – ромб).

2. Бісектриса кута паралелограма відокремлює від нього рівнобедрений трикутник.

4. ОЗНАЧЕННЯ РОМБА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні.

Оскільки ромб є паралелограмом, він має всі властивості паралелограма і деякі інші.

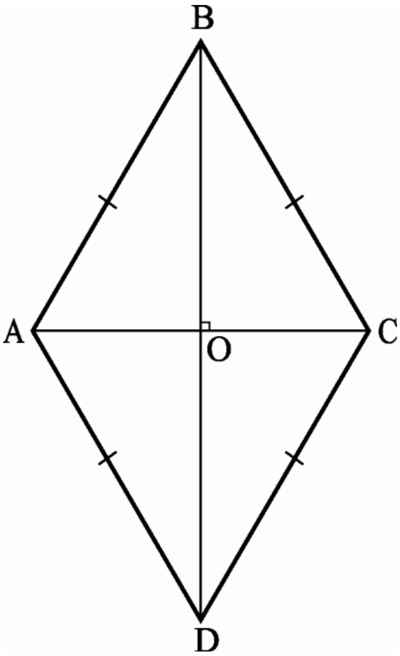


Рис.16

Теорема. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

Пояснення: $BD \perp AC$; $\angle ABO = \angle CBO$, $\angle DAO = \angle BAO$.

Теорема. Діагоналі ромба розбивають його на чотири рівні прямокутні трикутники.

Теорема. Висоти ромба рівні:

ОЗНАКИ РОМБА

Теорема. Якщо в чотирикутнику всі сторони рівні, то він є ромбом.

Теорема. Якщо в паралелограмі сусідні сторони рівні, то він є ромбом

Теорема. Якщо в паралелограмі діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом.

Теорема. Якщо в паралелограмі діагональ є бісектрисою кута, то паралелограм є ромбом.

5. ОЗНАЧЕННЯ ПРЯМОКУТНИКА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі.

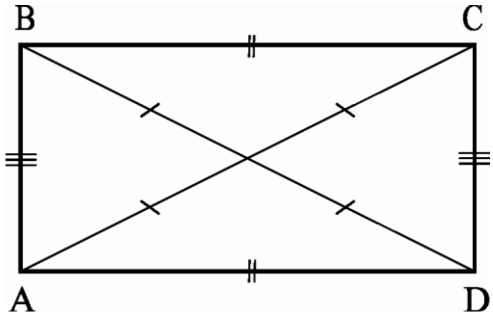


Рис.17

Теорема. Якщо в чотирикутнику всі кути рівні, то він є прямокутником.

Теорема. Якщо в чотирикутнику є три прямі кути, то він є прямокутником.

Теорема. Якщо в паралелограмі є прямий кут, то паралелограм є прямокутником.

Теорема. Якщо з паралелограмі діагоналі рівні, то він є прямокутником.

6. ОЗНАЧЕННЯ КВАДРАТА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ КВАДРАТ

Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні.

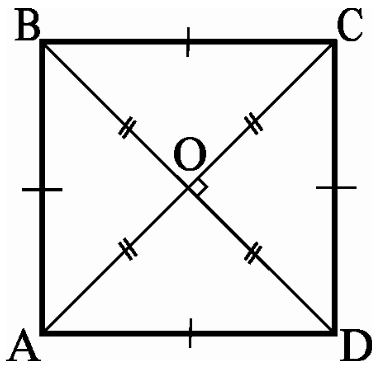


Рис.18

ВЛАСТИВОСТІ КВАДРАТА

Оскільки квадрат є паралелограмом, прямокутником і ромбом водночас, маємо:

1) у квадрата всі сторони рівні;
2) у квадрата всі кути рівні;
3) діагоналі квадрата рівні, перетинаються під прямим кутом, діляться в точці перетину навпіл, є бісектрисами його кутів;
4) діагоналі квадрата ділять його на чотири рівні рівнобедрені

прямокутні трикутники.

ОЗНАКИ КВАДРАТА

Теорема. Якщо в чотирикутника всі сторони і всі кути рівні, то він є квадратом.

Теорема. Якщо діагоналі прямокутника перетинаються під прямим кутом, то він є квадратом.

Теорема. Якщо діагоналі ромба рівні, то він є квадратом.

7. ОЗНАЧЕННЯ ТРАПЕЦІЇ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Трапецією називається чотирикутник, у якого тільки дві протилежні сторони паралельні. Ці сторони називаються основами трапеції, а дві інші – бічними сторонами.

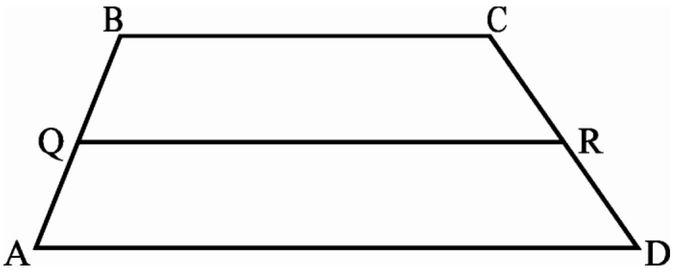


Рис.19

Пояснення: AD // BC, AD і BC – основи трапеції, AB і CD – бічні сторони.

Трапеція, у якої бічні сторони рівні, називається рівнобічною. Якщо одна з бічних сторін трапеції перпендикулярна до основ, трапеція називаєте прямокутною.

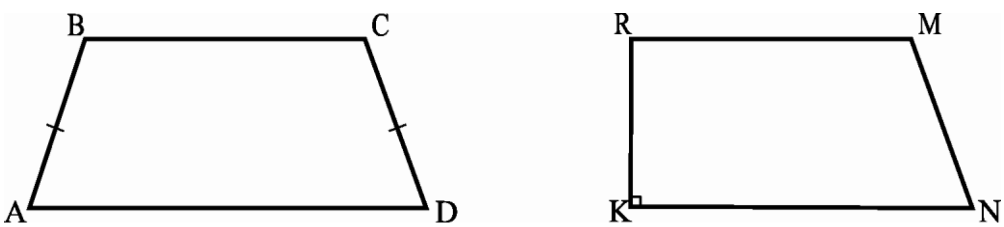


Рис.20

Пояснення: AB = CD, трапеція ABCD – рівнобічна; $RK \perp KN$, трапеція RKNM – прямокутна.

Теорема. Кути трапеції, які прилеглі до однієї бічної сторони, у сумі дорівнюють 180°.

Відрізок, що сполучає середини сторін трапеції, називається **середньою лінією** трапеції.

Пояснення: QR – середня лінія трапеції ABCD (**Рис.19**).

Теорема. Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

Пояснення: QR // AD, QR // BC, $QR = \dfrac{AD + BC}{2}$ (**Рис.19**).

Бісектриса кута трапеції, якщо вона перетинає основу трапеції, відтинає від неї рівнобедрений трикутник.

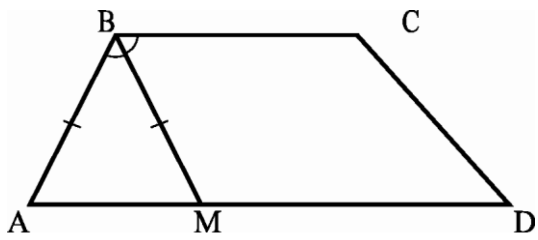


Рис.21

Пояснення: BM – бісектриса $\angle ABC$, $\angle ABM = \angle MBC$, то ΔABM – рівнобедрений, AB = BM.

ВЛАСТИВОСТІ РІВНОБІЧНОЇ ТРАПЕЦІЇ

1. У рівнобічній трапеції кути при основах рівні.

2. У рівнобічній трапеції діагоналі рівні.

3. У рівнобічній трапеції діагоналі створюють з основою рівні кути.

4. У рівнобічній трапеції діагоналі, перетинаючись, утворюють два рівнобедрені трикутники, основами яких є основи трапеції.

8. ОЗНАЧЕННЯ КОЛА

Колом називається фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Ця точка називається **центром** кола.

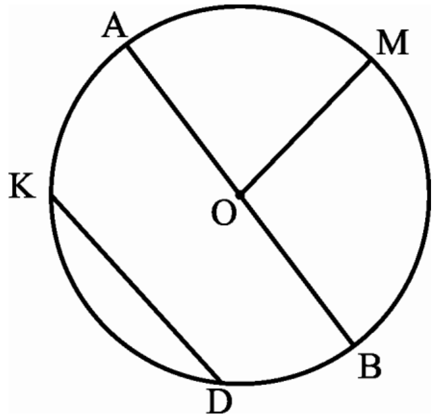


Рис.22

Відстань від точок кола до його центра називається **радіусом** кола.

Пояснення: OM – радіус, OM = R.

Радіусом називається будь-який відрізок, що сполучає точку кола з його центром.

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називається **хордою**.

Пояснення: KD – хорда.

Хорда, що проходить через центр кола, називається **діаметром**.

Пояснення: AB – діаметр.

Теорема. Діаметр, перпендикулярний хорді, ділить її навпіл.

Теорема. Діаметр, який проходить через середину хорди, перпендикулярний до неї.

9. ПОНЯТТЯ ВЕЛИЧИНИ. ВИМІРЮВАННЯ ВЕЛИЧИНИ. АДИТИВНО-СКАЛЯРНІ ВЕЛИЧИНИ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ДОВЖИНА ВІДРІЗКА. ОДИНИЦІ ДОВЖИНИ

Величини відображають властивості предметів. Результат вимірювання виражається числовим значенням величини при певній одиниці вимірювання, яка називається *мірою величини.* Залежність між величинами виражається *формулами*.

Поняття величини дійсним числом. Величинами є довжина, площа, об’єм, маса, робота, вартість.

В елементарій математиці й фізиці розглядають *скалярні* і *векторні* величини.

Скалярними величинами називають такі величини, які характеризуються числовим значенням (числом). Це, наприклад, довжина, площа, об’єм, маса, густина та ін.

Векторними величинами називають такі величини, для характеристики яких, крім числового значення, необхідно вказувати ще й напрямок дії. Такими є фізичні величини: швидкість, прискорення, сила та ін.

Однорідними величинами називають величини, які характеризують ту саму якість об'єктів. Однорідними величинами є всі довжини відрізків, усі площі фігур, усі маси тіл і т. д.

Для будь-якої системи однорідних величин повинно бути встановлено поняття рівності ($a = b$) і нерівності ($a < b$ або $b > a$). Довжини відрізків, наприклад, можна порівнювати за допомогою накладання.

Якщо в системі однорідних скалярних величин визначена операція додавання однорідних величин, яка дає змогу замінити дві однорідні величини a і b їхньою сумою $a + b$, то така система величин називається системою *адитивно-скалярних величин.* Суму n однакових доданків $a + a + a +... + a$ позначатимемо через na.

Системою М однорідних адитивно-скалярних величин називається система величин, яка характеризується такими аксіомами.

A_1. Для довільних $a, b \in M$ виконується один і тільки один з трьох випадків: $a = b, a < b, b < a$.

A_2. $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ (a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c;\ a, b, c \in M$ (транзитивність нерівності).

A_3. $(\forall a)\ (\forall b)\ (\exists c)\ (c = a + b);\ a, b, c \in M$ (існування і єдиність суми).

A_4. $(\forall a)\ (\forall b)\ (a + b = b + a);\ a, b, c \in M$ (комутативність додавання).

A_5. $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ ((a + b) + c = a + (b + c));\ a, b, c \in M$ (асоціативність додавання).

A_6. Існує нульова величина (величина, що дорівнює нулю), яку позначають 0. Вона має такі властивості:

$(\forall a)\ (a \neq 0 \Rightarrow a > 0);$

$(\forall a)\ (a + 0 = a);$

$(\forall a)\ (0 \cdot a = 0);\ a \in M.$

Одним з важливих завдань при вивченні величин є завдання вимірювання величин.

Виміряти величину означає встановити її розміри, масу, площу і т. д. Вимірювання різних величин може виконуватись різноманітними інструментами і різними способами. Можна вимірювати відстані між точками, довжини прямолінійних відрізків, довжини дуг кривої, площі фігур, проміжки часу, температуру, густину тіла тощо. Спільним при вимірюванні будь-яких величин є те, що вимірювання завжди є порівняння величини даного роду з певною величиною цього ж роду, взятою за одиницю вимірювання, і вираження результату порівняння числом. Наприклад, довжини відрізків, відстані між точками вимірюються в сантиметрах, кілометрах; площі фігур – у квадратних сантиметрах, квадратних метрах, арах, гектарах; величини кутів виражаються в секундах, градусах, радіанах; тривалість часу – у годинах, хвилинах, днях, роках; температура – в градусах і т. д.

Нехай маємо величину Φ певного роду. Візьмемо яку-небудь величину $\boldsymbol{e}$ цього ж роду за одиницю вимірювання. Якщо величину Φ можна розбити на n рівних частин, кожна з яких дорівнює $\boldsymbol{e}$, то кажуть, що величина Φ кратна величині $\boldsymbol{e}$, або що величина $\boldsymbol{e}$ вкладається n раз в величині Φ. Це записують так:

$$m_e(\Phi) = n \text{ або } \Phi = n\boldsymbol{e},$$

де n – натуральне число.

Число n називається *мірою* або *числовим значенням* величини Φ, виміряної за допомогою одиниці вимірювання $\boldsymbol{e}$. Воно показує відношення величини Φ до одиниці вимірювання $\boldsymbol{e}$, тобто на яке число слід помножити одиницю вимірювання $\boldsymbol{e}$, щоб дістати величину Φ.

Довжиною відрізка називається додатна величина, визначена для кожного відрізка так, що:

1) рівні відрізки мають рівні довжини;

2) якщо відрізок складається із скінченного числа відрізків, то його довжина дорівнює сумі довжин цих відрізків;

3) існує відрізок, довжина якого дорівнює одиниці.

Наведені умови, яким повинна задовольняти довжина відрізка, називаються *властивостями* або *аксіомами* довжини. Довжина відрізка задовольняє властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності.

Два відрізки, які мають спільну міру, називаються *сумірними*. У іншому разі вони називаються *несумірними*.

Теорема. Довжина відрізка не залежить від вибору спільної міри даного відрізка і даного одиничного відрізка.

10. ПЛОЩА ПЛОСКОЇ ФІГУРИ. ВЛАСТИВОСТІ ПЛОЩІ. РІВНОВЕЛИКІСТЬ І РІВНОСКЛАДЕНІСТЬ МНОГОКУТНИКІВ

Візьмемо на площині прямокутну систему координат xOy і на її осі накладемо десяткові шкали, вибравши одиничний відрізок ***e***. Через штрихи десяткових шкал проведено прямі, паралельні координатним осям x і y. При цьому вся площина розіб'ється на рівні квадрати, сторона яких дорівнює одиничному відрізку ***e***. Площа кожного такого квадрата дорівнює одиниці.

Фігура F називається *квадровною,* якщо вона повністю покривається ступінчастою фігурою, утвореною з квадратів сітки, і якщо існує хоч би один як завгодно малий квадрат з покриття, який повністю складається з внутрішніх точок фігури F.

Якщо ці умови не виконуються для якоїсь фігури, то площа такої фігури дорівнює нулю.

Для площі замкненої плоскої фігури випливають такі ***властивості***:

1°. Існує квадрат, площа якого дорівнює одиниці; це квадрат, сторона якого є одиниця довжини.

2°. Рівні фігури мають рівні площі.

3°. Якщо фігура розрізана лінією на дві частини, то площа всієї фігури дорівнює сумі площ обох частин.

4°. Міри площ рівних фігур рівні.

Отже, завжди можна виміряти площу замкненої криволінійної плоскої фігури наближено за допомогою палетки – прозорої пластинки з нанесеною на ній сіткою квадратів.

Два многокутники, які мають рівні площі, називаються *рівновеликими.*

Геометричним еквівалентом поняття рівновеликості, який дає змогу перетворювати многокутники так, щоб встановити їх рівновеликість, є поняття рівноскладеності многокутників.

Два многокутники називаються *рівноскладеними,* якщо їх можна розкласти на одне й те саме число попарно рівних многокутників.

Іншими словами, два многокутники називаються рівноскладеними, якщо, розрізавши певним способом один з них на скінченне число частин, можна, розміщуючи ці частини інакше, скласти другий многокутник.

З означення маємо такі ***властивості рівноскладеності*** многокутників.

1°. Кожний многокутник рівноскладений сам собі (властивість рефлексивності).

2°. Якщо многокутник P рівноскладений з многокутником P_1 то й многокутник P_1 рівноскладений з многокутником P (властивість симетричності).

3°. Два многокутники, рівноскладені з одним і тим самим третім многокутником, рівноскладені між собою (властивість транзитивності).

Твердження про рівновеликість і рівноскладеність многокутників пов’язані між собою.

Теорема. Будь-які два рівноскладені многокутники рівновеликі.

11. ПЛОЩА ТРИКУТНИКА, ПАРАЛЕЛОГРАМА, РОМБА, ПРЯМОКУТНИКА, КВАДРАТА, ТРАПЕЦІЇ, КРУГА

Знаходження площі плоскої фігури безпосереднім рахуванням числа квадратів досить громіздке, незручне й неточне. Тому при обчисленні площ фігур користуються іншими методами. Зокрема, щоб знайти площу многокутника, круга, сектора і деяких інших фігур, досить виміряти довжини певних відрізків цих фігур, величини їхніх кутів і виконати обчислювальні операції над знайденими числами за відомими *формулами*.

Наведемо деякі формули для обчислення площ плоских фігур.

Площа трикутника

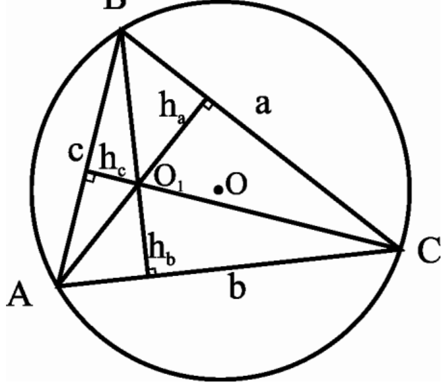


Рис.23

• Площа трикутника дорівнює половині добутку сторони на висоту, проведену до неї

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

• Формула Герона

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

• Площа трикутника дорівнює половині добутку сторін на синус кута між ними

$$S = \frac{1}{2}\,ab\,\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\,\sin\beta = \frac{1}{2}\,bc\,\sin\alpha$$

• $S = \dfrac{abc}{4R}$

• $S = pr$

Тут a, b, c – сторони трикутника, h_a , h_b, h_c – висоти, де p – півпериметр трикутника, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, R – радіус кола, описаного навколо трикутника, r – радіус кола, вписаного в трикутник.

Площа паралелограма

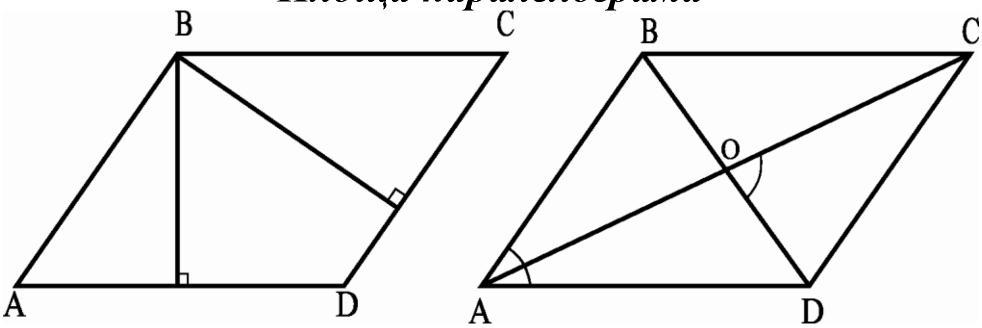


Рис.24

• Площа паралелограма дорівнює добутку сторони на висоту, проведену до неї

$$S = ah_a$$

• Площа паралелограма дорівнює добутку сторін на синус кута між ними

$$S = ab\sin\alpha$$

• Площа паралелограма дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними

$$S = \frac{d_1\, d_2 \sin\beta}{2} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\beta$$

Де *a*, *b* – сторони паралелограма, h_a – висота, α – кут між сторонами *a* і *b*, d_1 і d_2 – діагоналі.

Площа ромба

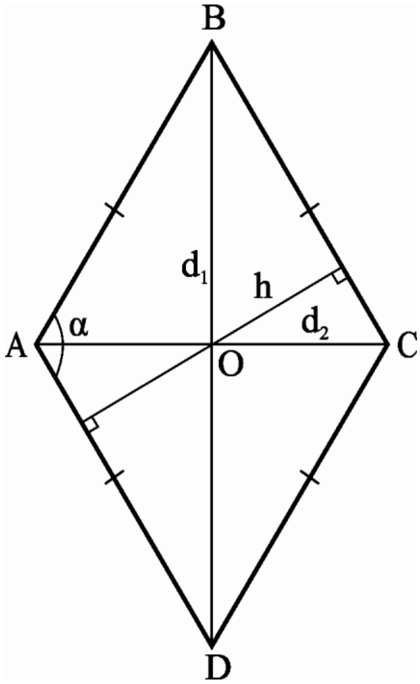


Рис.25

- Площа ромба дорівнює половині добутку діагоналей

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

- Площа ромба дорівнює добутку висоти на сторону, проведену до неї

$$S = ah$$

- Площа паралелограма дорівнює добутку квадрата сторони на синус кута між ними

$$S = a^2 \sin\alpha$$

d_1 і d_2 – діагоналі ромба.

Площа прямокутника

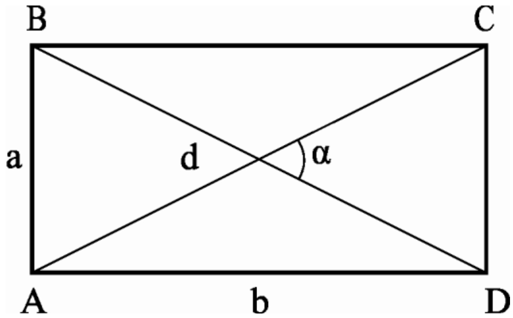


Рис.26

• Площа прямокутника дорівнює добутку сторін

$$S = ab$$

• Площа прямокутника дорівнює половині квадрата діагоналей на синус кута між ними

$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha$$

Площа квадрата

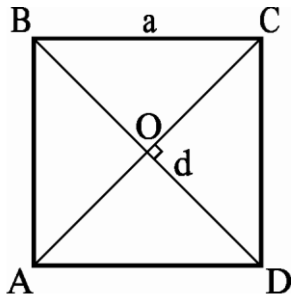


Рис.27

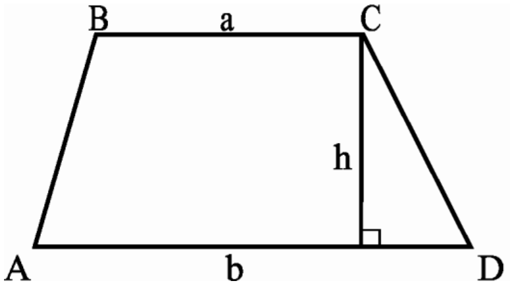
• Площа квадрата дорівнює квадрату його сторони

$$S = a^2$$

• Площа квадрата дорівнює половині квадрата діагоналей

$$S = \frac{1}{2} d^2$$

Площа трапеції



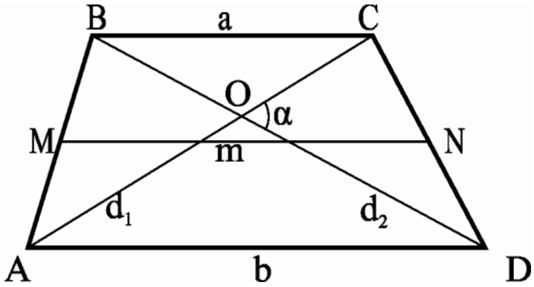


Рис.28

• Площа трапеції добутку висоти на півсуму основ (середню лінію)

$$S = h\,\frac{a+b}{2}$$

• Площа трапеції дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними

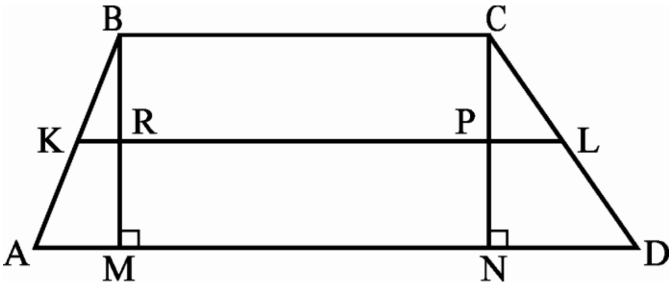
$$S = \frac{d_1\,d_2\,\sin\beta}{2} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\beta$$

Площа круга

• $S = \pi\,R^2$, $\pi \approx 3{,}14$

ВПРАВИ

Задача 1.А. У трапеції з основами 4 та 6 висота на 2 більша від середньої лінії. Обчислити площу трапеції.



***Дано*:** ABCD – трапеція, BC = 4, AD = 6, $BM \perp AD$, BM – висота, KL – середня лінія трапеції, BM = KL + 2.

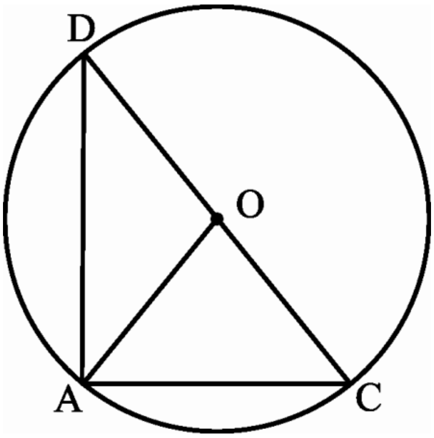
***Знайти*:** S_{ABCD} – ?

Розв'язання

Площа трапеції ABCD дорівнює добутку середньої лінії на висоту. Тобто $S_{ABCD} = KL \cdot BM$. Середня лінія KL паралельна основам BC і AD і дорівнює їх півсумі. $KL = \frac{BC + AD}{2}$, $KL = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Відомо, що висота на 2 більша, тому BM = 5 + 2 = 7. Отже, S_{ABCD} = 5 · 7 = 35.

Відповідь: S_{ABCD} = 35.

Задача 1.Б. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть радіус описаного навколо цього трикутника кола.



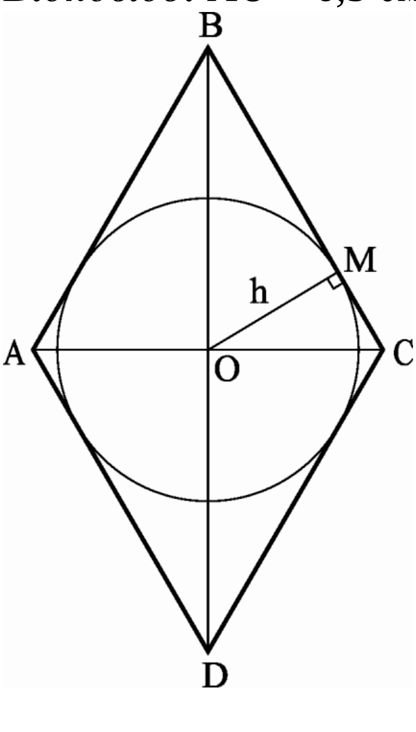
Дано: ΔADC – прямокутний, $\angle DAC = 90°$, DA і AC – катети ΔADC. DA = 12 см, AC = 5 см. Навколо ΔADC описане коло з центром O. OA – радіус цього кола, OA = DO = OC.

Знайти: OA – ?

Розв'язання

За властивістю кутів, вписаних в коло, якщо ΔADC прямокутний, то центр описаного кола лежить на середині гіпотенузи. Тобто OD = OC = AO. За теоремою Піфагора $DC^2 = DA^2 + AC^2$, $DC^2 = 12^2 + 5^2$, $DC^2 = 144 + 25 = 169$, $DC = \sqrt{169}$ $DC = 13$. Тоді $AO = \frac{DC}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5\ см$.

Відповідь: AO = 6,5 см.



Задача 1.В. Діагоналі ромба дорівнюють 6 і 8 см. Знайти довжину вписаного кола.

Дано: ABCD – ромб, BD і AC – діагоналі, BD = 8 см, AC = 6 см. OM – радіус вписаного в ромб коло.

Знайти: l – ?

Розв'язання

Довжина, вписаного в ромб кола $l = 2\pi R$. За властивістю діагоналей ромба $BD \perp AC$, $BO = OD = \frac{1}{2}BD = 4\ см$,

$AO = OC = \frac{1}{2}AC = 3\ см$. За теоремою Піфагора з ΔBOC ($\angle BOC = 90°$), $BC^2 = BO^2 + OC^2$, $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9}$, $BC = \sqrt{25} = 5$см. **Площу однієї фігури можна виражати через різні дані.**

Тому, площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів: $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}BO \cdot OC$, $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}4 \cdot 3 = 6\ см^2$.

З іншого боку площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку сторони на висоту, проведену до неї.

$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot OM$, $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot OM$. Очевидно, що площі однієї фігури рівні, тому, $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot OM = 6$. Розв'язавши рівняння відносно OM одержимо: $5 \cdot OM = 12$,

$OM = \frac{12}{5}$, до OM – радіус вписаного кола.

Отже, $l = 2\pi R$, тобто, $l = 2\pi \frac{12}{5} = \frac{24}{5}\pi$.

Відповідь: $l = \frac{24}{5}\pi$.

1. Периметр рівнобедреного трикутника рівний 20, а основа рівна 8. Знайти бічну сторону.

2. Обчислити периметр рівнобедреного трикутника з основою 10, якщо бічна сторона на 2 більша від основи.

3. У прямокутному трикутнику гіпотенуза рівна 16. Обчислити довжину катета, який лежить проти гострого кута, величина якою 30°.

4. Один з кутів трикутника рівний 30°. Обчислити суму двох інших кутів.

5. Один з кутів прямокутного трикутника рівний 20°. Обчислити величину іншого кута, який не є прямим.

6. Знайти один із гострих кутів рівнобедреного прямокутного трикутника.

7. Обчислити довжину середньої лінії рівнобедреного трикутника, яка паралельна до основи, якщо бічна сторона трикутника рівна 8, а основа 10.

8. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть радіус описаного навколо цього трикутника кола.

9. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $16\sqrt{3}$ см². Знайти висоту цього трикутника.

10. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, якщо сторона трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

11. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 5 см. Знайдіть катет цього трикутника, якщо другий його катет дорівнює 6 см.

12. Обчислити площу прямокутного трикутника із катетом 8 і гіпотенузою 10.

13. Обчислити периметр рівнобедреного трикутника з основою 8 та висотою, проведеною до основи і рівною 3.

14. У прямокутному трикутнику з катетами 6 і 8 обчислити довжину висоти, проведеної до гіпотенузи.

15. Кути трикутника відносяться як 2 : 4 : 6. Знайти величину найбільшого кута.

16. Обчислити площу рівностороннього трикутника, якщо його медіана рівна $6\sqrt{3}$.

17. У прямокутному трикутнику з катетами 6 і 8 обчислити довжину висоти, опущеної на гіпотенузу.

18. У прямокутному трикутнику з катетом 3 і гіпотенузою 5 обчислити довжину висоти, опущеної на гіпотенузу.

19. У прямокутному трикутнику визначити величину більшого гострого кута, якщо гострі кути відносяться, як 4 : 1.

20. Обчислити площу круга, описаного навколо прямокутного трикутника з катетами 6 і 8.

21. Один з катетів прямокутного трикутника рівний 12. Знайти другий катет, якщо довжина кола, описаного навколо трикутника, рійна 13π.

22. Сторона паралелограма дорівнює 1 см, а його діагоналі – 3 і 5 см. Знайдіть сторону паралелограма, що є суміжною з даною.

23. Діагоналі ромба дорівнюють 4 і $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут, який утворений більшою діагоналлю і стороною ромба.

24. Обчислити периметр ромба із стороною 8.

25. Площа ромба рівна 63, а його сторона рівна 9. Знайти висоту
ромба.

26. Площа ромба рівна 12, а його висота, рівна 6. Обчислити сторону ромба.

27. Обчислити площу ромба із стороною 9 і висотою 7.

28. Знайти периметр ромба із діагоналями 6 і 8.

29. Знайти довжину кола, вписаного в ромб із стороною 10 і площею 40.

30. Знайти радіус кола, вписаного в ромб із діагоналями 6 і 8.

31. Обчислити площу прямокутника, одна із сторін якого 7, а інша на 2 більша.

32. Обчислити площу прямокутника із стороною 6 та діагоналями 10.

33. Обчислити периметр прямокутника із діагоналлю 26 та стороною 10.

34. Обчислити площу прямокутника, якщо сума його двох суміжних сторін рівна 7, а довжина діагоналі 5.

35. Обчислити периметр прямокутника, якщо одна із його сторін рівна 8, а площа дорівнює 56.

36. Площа прямокутника рівна 48. Знайти його більшу сторону, яка на 2 більша від меншої.

37. Площа прямокутника 48. Знайти його висоту, якщо основа 8.

38. Периметр квадрата рівний 20. Обчислити його площу.

39. Площа квадрата 36. Обчислити його периметр.

40. Знайти площу квадрата, якщо радіус вписаного в квадрат кола рівний 4.

41. Площа квадрата рівна 36. Знайти діаметр кола, вписаного в квадрат.

42. Обчислити довжину кола, описаного навколо квадрата із стороною $4\sqrt{2}$.

43. Обчислити площу квадрата, вписаного в коло, довжина якого 8π.

44. У скільки разів площа круга, описаного навколо квадрата, більша від площі круга, вписаного в цей квадрат?

45. Знайти відношення довжини кола, описаного навколо квадрата до периметра цього квадрата.

46. Знайти площу круга, описаного навколо квадрата, із стороною $\sqrt{8}$.

47. Площа рівнобічної трапеції, діагональ якої 2 см, дорівнює $\sqrt{3}$ см². Знайдіть градусну міру кута між діагоналями трапеції.

48. Навколо кола описана рівнобічна трапеція з кутом 30° при основі. Середня лінія трапеції дорівнює 1. Визначте радіус кола.

49. Обчислити площу трапеції з основами 4 і 6 та висотою 5.

50. Основа й середня лінія трапеції дорівнюють 5 і 7 см відповідно. Знайдіть другу основу трапеції.

51. Знайти діагональ і бічну сторону рівнобедреної трапеції з основами 20 і 12 см, якщо відомо, що центр описаного кола лежить на більшій основі трапеції.

52. Знайти радіус кола, описаного навколо рівнобедреної трапеції з основами, рівними 21 і 9 см, і висотою 8 см.

53. Навколо кола з діаметром 15 см описана рівнобедрена трапеція з бічною стороною, що дорівнює 17 см. Знайти основу трапеції.

54. Обчислити довжину кола з радіусом 5.

55. Довжина кола рівна 12π. Знайти радіус кола.

56. Обчислити площу круга з радіусом 6.

57. Діаметр кола, вписаного в квадрат, рівний 8. Обчислити периметр квадрата.

58. Периметр квадрата рівний 24. Знайти діаметр кола, вписаного в квадрат.

59. Знайти довжину найбільшої хорди у колі, довжина якого 12π.

60. Знайти довжину кола, найбільша хорда в якому рівна 4.

61. Знайти радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника з гіпотенузою 10.

62. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, рівний 10. Знайти довжину гіпотенузи.

63. Обчислити довжину дуги кола радіуса 6, якщо її видно з центра кола під кутом 120°.

64. Обчислити радіус кола, якщо хорду довжиною 5 видно з його центра під кутом 90°.

65. Обчислити довжину хорди кола радіусом 5, якщо з центра кола її видно під кутом 120°.

ВІДПОВІДІ

1. 6	**2.** 34	**3.** 8	**4.** 150°	**5.** 70°
6. 45°	**7.** 5	**12.** 24	**13.** 18	**15.** 90°
16. $36\sqrt{3}$	**17.** 4,8	**18.** 2,4	**19.** 72°	**21.** 5
24. 32	**25.** 7	**28.** 20	**29.** 4π	**30.** 2,4
31. 63	**32.** 48	**33.** 68	**34.** 12	**35.** 30
36. 8	**37.** 6	**38.** 25	**39.** 24	**40.** 64
42. 8π	**43.** (32)	**44.** 2	**45.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$	**46.** 4π
49. 25	**51.** $8\sqrt{5}, 4\sqrt{5}$	**52.** $\frac{85}{8}$	**53.** 9	**54.** 10π
55. 6	**56.** 36π	**57.** 32	**58.** 6	**59.** 6
60. 4π	**61.** 5	**62.** 20	**65.** $5\sqrt{3}$	

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : навч. посібник / В. Г. Бевз. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2004. – 312 с.

2. Белл Э. Т. Творцы математики: предшественники современной математики : пособ. для учителей / Э. Т. Белл. – М. : Просвещение, 1979. – 254 с.

3. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до сер. XIX ст. / Г. Вилейтнер. – М. : Наука, 1966. – 506 с.

4. Задачник-практикум по математике / [Н. Я. Виленкин, Н. Н. Ларова и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 205 с.

5. Конфорович А. Г. Визначні математичні задачі / А. Г. Конфорович. – К. : Рад. школа, 1981. – 189 с.

6. Конфорович А. Г. Колумби математики / А. Г. Конфорович. – К. : Рад. школа, 1982. – 223 с.

7. Курс математики : навчальний посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк та ін. – К. : Вища шк. – 1995. – 392 с.

8. Математика : навч. посібник / [Н. І. Затула, А. М. Зуб, Г. І. Коберник, А. Ф. Нещадим]. – К. : Кондор, 2006. – 560 с.

9. Про математику і математиків / [упоряд. А. С. Зоря, С. М. Кіро]. – К. : Рад. школа, 1981. – 254 с.