Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Педагогічний інститут
Кафедра математичних і природничих дисциплін початкової освіти

МАТЕМАТИКА

Частина 2
(Методичні рекомендації для студентів спеціальності
“Дошкільне виховання і початкове навчання”)

УДК 378.14:371.214.114
ББК 22.143
Р – 64

Романишин Р.Я. Математика. Частина 2. Методичні рекомендації для студентів спеціальності “Дошкільне виховання і початкове навчання”) / Івано-Франківськ. – 2013. – 36 с.

Рецензенти:

Кульчицька Н.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри статистики і вищої математики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»;

Чупахіна С.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри теорії і методики дошкільної освіти ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника».

Рекомендовано до друку Вченою Радою
Педагогічного інституту
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника

ЗМІСТ

1. Кількісна теорія N_0. Системи числення

2. Подільність чисел

1. Кількісна теорія N_0. Системи числення.

1.1. Поняття про натуральні, цілі невід'ємні числа і нуль

Відношенням еквівалентності всі скінченні непорожні множини розбиваються на підмножини, які називаються *класами еквівалентних множин*, причому будь-які дві множини одного класу є еквівалентними, а різних класів – не еквівалентними. Між множиною всіх класів множин і множиною всіх натуральних чисел встановлено взаємно однозначну відповідність.

Довільні множини A і B називаються *рівнопотужними*, якщо вони порожні, або існує бієктивне відображення множини A на множину B, яке позначається $A \sim B$ і читається "множина A рівнопотужна множині B" ("множини A і B рівнопотужні").

Натуральним числом називається клас рівнопотужних скінченних непорожніх множин.

Оскільки кожний клас еквівалентних множин визначається будь-якою множиною класу, то натуральне число визначається будь-якою множиною даного класу. Число, що визначає деяка множина M, називається *потужністю множини M* і позначається $n(M)$ або $|M|$.

Натуральному числу можна дати і таке означення: *натуральним числом* називається потужність скінченної непорожньої множини.

Доповнивши будь-яку скінченну множину M новим елементом, дістанемо нову множину, не еквівалентну даній множині. Продовживши цей процес далі, отримаємо нескінченну послідовність попарно не еквівалентних множин і відповідний їй ряд натуральних чисел 1, 2, 3, ... n, ...

Під натуральним числом будемо розуміти спільну властивість рівнопотужних скінченних непорожніх множин, яка не залежить ні від природи елементів цих множин, ні від порядку елементів у них. Ця властивість є чисельністю або кількістю елементів скінченної непорожньої множини.

Натуральні числа, які є потужностями скінченних непорожніх множин A, B, C, ... позначають відповідно малими буквами латинського алфавіту a, b, c, ... Це записують так $a = |A|$, $b = |B|$, $c = |C|$, ... і читають, наприклад, $a = |A|$: "число a є потужністю множини A".

Число "нуль" з теоретико-множинної точки зору відповідає порожній множині: $n(\varnothing) = 0$.

Число 0 можна визначити і через потужність множин. Потужність порожньої множини називається *нулем* ($0 = |\varnothing|$).

Якщо E – одинична множина, то її потужність називається *одиницею* і позначається 1, тобто $1 = |E|$.

Всі натуральні числа становлять множину натуральних чисел, яку в математиці позначають буквою N.

Множина, елементами якої є всі натуральні числа і число нуль (утворена приєднанням до множини N натуральних чисел числа “нуль”), називається *множиною цілих невід’ємних чисел* і позначається Nо, а її елементи – *цілими невід’ємними числами*. Таким чином,

$$N_0 = N \cup \{0\}.$$

Отже, *цілим невід’ємним числом* називається потужність скінченної множини.

Відносно будь-яких двох нерівних чисел множини цілих невід’ємних чисел вважають, що менше число передує більшому, а більше слідує за меншим. Оскільки порожня множина є підмножиною кожної множини, то число нуль, що їй відповідає, є число, яке менше від будь-якого натурального числа.

Множина цілих невід’ємних чисел утворює зростаючу послідовність 0, 1, 2, 3, ... , … обмежену зліва нулем, тобто вона має початок. У цій послідовності кожне наступне число більше за попереднє. Справа така множина є необмежена, тому вона є *нескінченною*.

У множині натуральних чисел не існує найбільшого числа, бо яке б не взяти натуральне число n, безпосередньо за ним йде наступне натуральне число виду $n' = n + 1$, яке є кількісною характеристикою множини M', утвореної з множини M приєднанням до неї ще одного елемента.

Множина N_0 цілих невід’ємних чисел має єдине найменше число, тобто 0. За кожним числом у множині N_0 безпосередньо йде єдине число і кожне ціле невід’ємне число, крім нуля, безпосередньо йде не більше, ніж за одним цілим невід’ємним числом. Для жодної пари чисел n і n' не можна вказати ніякого третього числа x такого, що $n < x < n'$. Цю властивість називають *дискретністю* послідовності цілих невід'ємних чисел.

Наочно цю властивість можна проілюструвати за допомогою числового променя, початку якого відповідає число нуль, і при вибраній одиниці масштабу кожному натуральному числу відповідає єдина точка променя.

Цілі невід'ємні числа a і b називаються рівними ($a = b$), якщо множини, для яких ці числа є потужностями, рівнопотужні, і нерівними ($a \neq b$), якщо відповідні їм множини нерівнопотужні.

Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням еквівалентності.

1.2. Виконання дій у множині цілих невід'ємних чисел

1.2.1. Додавання цілих невід'ємних чисел

Серед вивчених операцій над множинами (об'єднання, переріз, різниця) найпростішою є об'єднання скінчених множин, які не мають спільних елементів. Операція додавання цілих невід'ємних чисел пов'язана з об'єднанням множин.

Сумою цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a + b$), що є кількісною характеристикою множин A і B, називається число елементів об'єднання цих множин, якщо вони не мають спільних елементів.

$\forall\ a, b \in N_0 : a + b = n\,(A \cup B)$, де $A \cap B = \varnothing$, $n\,(A) = a$ і $n\,(B) = b$.

Операція на множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх сума $a + b$, називається *додаванням цілих невід'ємних чисел.* Компоненти додавання називаються *доданками*, а результат – *сумою.*

На основі властивостей операції об'єднання множин можна сформулювати наступні *властивості*.

► Сума довільних двох цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом. Така сума завжди існує і визначена однозначно.

► За властивостями скінчених множин об'єднання двох скінчених множин є скінченною множиною, а тому сума довільних двох цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом.

► Оскільки об'єднання множин завжди існує і визначається однозначно, то й сума двох довільних цілих невід'ємних чисел завжди існує і визначається однозначно.

► Сума довільного цілого невід'ємного і натурального чисел є натуральним числом.

► При додаванні виконується така властивість:

$$\forall a \in N_0 : a + 0 = 0 + a = a.$$

На основі означення додавання і властивостей операції об'єднання множин сформульовані *властивості додавання*.

Операція додавання цілих невід'ємних чисел:

► Комутативна: $\forall\ a, b \in N_0 : a + b = a + b$;

► Асоціативна: $\forall\ a, b, c \in N_0 : (a + b) + c = a + (b + c)$;

Ця властивість характеризує властивість додавання цілих невід'ємних чисел. Тобто: сума трьох цілих невід'ємних чисел не зміниться, якщо будь-які два доданки замінити на їх суму. Цю властивість можна застосувати не тільки до трьох доданків, але й до скінченої кількості доданків розташованих у будь-якому порядку.

► Монотонна відносно відношення рівності:

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$$

Якщо до обох частин рівності цілих невід'ємних чисел додати одне й те саме ціле невід'ємне число, то рівність не порушиться.

► Для множин, які не мають спільних елементів, справедлива *адитивна властивість* рівностей невід'ємних цілих чисел.

Для додавання цілих невід'ємних чисел мають місце *правила скорочення*:

► Якщо від обох частин рівності відняти одне і те ж число, то рівність не порушиться.

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : a + c = b + c \Leftrightarrow a = b.$$

► Якщо від обох частин нерівності відняти одне і те ж число, то нерівність не порушиться.

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : a + c < b + c \Leftrightarrow a < b.$$

Поняття суми двох цілих невід'ємних чисел можна розповсюдити на довільну скінченну сукупність чисел.

1.2.2. Віднімання цілих невід'ємних чисел

Різницею цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a - b$) називається число елементів у доповненні множини B до множини A, тобто $a - b = n\ (A \setminus B)$.

$$\forall\ a, b \in N_0 : a - b = n\ (A \setminus B), \text{ де } a = n\ (A),\ b = n\ (B),\ B \subset A.$$

Знаходження за даними двома числами a і b їхньої різниці $a - b$ називається *відніманням* і позначається $a - b = c$. Число a називається *зменшуваним*, b – *від'ємником.*

Існує ще одне означення різниці через суму.

Різницею цілих невід'ємних чисел a і b називається таке число c, сума якого з числом b дорівнює a:

$$b - c = a.$$

Обидва означення різниці цілих невід'ємних чисел рівносильні:

$$(a - b = c) \Leftrightarrow (a = b + c).$$

На основі даного значення встановлено, що дія віднімання є оберненою до дії додавання: дія, яка полягає в знаходженні невідомого доданка за відомою сумою і другим доданком:

$$(x + b = a) \Rightarrow (x = a - b).$$

Для дії віднімання існують такі *властивості*:

► Якщо від будь-якого цілого невід'ємного числа відняти нуль, то одержимо саме ціле невід'ємне число:

$$\forall\ a \in N_0:\ a - 0 = a.$$

► Якщо від будь-якого цілого невід'ємного числа відняти це ж ціле невід'ємне число, то одержимо нуль:

$$\forall\ a \in N_0:\ a - a = 0.$$

► Основна властивість різниці: якщо зменшуване і від'ємник одночасно збільшити або зменшити па одне й те саме число, то різниця не зміниться: $(a - b = c) \Leftrightarrow ((a + k) - (a + k) = c)$.

2.2.3. Множення цілих невід'ємних чисел

Дію знаходження суми рівних між собою доданків називають *множенням*, а результат множення – *добутком*. Операція множення у множині цілих невід'ємних чисел пов'язана зі знаходженням декартового добутку.

Означення. Суму n доданків ($n > 1$), кожний з яких є цілим невід'ємне число m, називають *добутком m* на натуральне число n і позначають mn.

Дію, за допомогою якої знаходять добуток двох чисел n і m називають *множенням*; числа, які перемножують – *множниками*, число m називають *множеним,* а число n – *множником*, вираз mn називають *добутком*, або результатом множення.

Означення добутку цілих невід'ємних вводиться через поняття декартового (прямого) добутку множин. Нехай задані дві множини A і B, і $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$, тоді декартів добуток

$$A \times B = \{ (a, x),\ (a, y), (a, z),\\ (b, x),\ (b, y), (b, z)\}.$$

Як бачимо, число елементів у декартовому добутку $A \times B$ дорівнює з одного боку, $2 + 2 + 2 = 6$. З іншого боку, якщо $n(A) = 2$, $n(B) = 3$, тоді $2 \cdot 3 = 6$. Отже, у випадку скінченних множин A і B маємо: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

Означення. Добутком цілих невід'ємних чисел m *і* n називається число елементів декартового добутку множини, що має m елементів, на множину, що має n елементів.

Для дії множення існують такі *властивості*:

► Якщо будь-яке ціле невід'ємне число помножити на нуль, то одержимо нуль:

$$\forall\ a \in N_0 : a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$$

► Якщо будь-яке ціле невід'ємне число помножити на одиницю, то одержимо саме ціле невід'ємне число:

$$\forall\ a \in N_0 : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

► Добуток двох довільних натуральних чисел є натуральним числом.

► Операція множення цілих невід'ємних чисел комутативна: $\forall\ a, b \in N_0 : a \cdot b = b \cdot a$;

► Операція множення цілих невід'ємних чисел асоціативна: $\forall\ a, b, c \in N_0 : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

► Операція множення цілих невід'ємних чисел дистрибутивна відносно додавання:

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

З комутативного й асоціативного законів множення випливають такі *властивості*:

► Щоб помножити добуток на число або навпаки число на добуток, досить помножити на це число один із множників і результат помножити на інший множник і т. д.

$$(abc)\, d = (a\, d)\, bc = (b\, d)\, ac = \ldots$$

► Якщо один з множників збільшити (зменшити) в кілька разів, то й добуток відповідно збільшиться (зменшиться) в стільки ж разів, тобто

$$(ab = c) \Leftrightarrow ((am)\, b = cm).$$

► Обидві частини рівності або нерівності цілих невід'ємних чисел можна помножити на одне й те саме натуральне число після чого знак рівності, або нерівності не зміниться.

За законом монотонності множення та властивостей відношень " = " і " < ", " > " випливають такі властивості:

► На множині цілих невід'ємних чисел рівності та нерівності однакового смислу можна почленно перемножати, тобто, якщо

а) $a = b$ і $c = d$, то $ac = bd$;

б) $a < b$ і $c < d$, то $ac < bd$.

► Обидві частини рівності або нерівності цілих невід'ємних чисел можна поділити на одне й те саме натуральне число після чого знак рівності, або нерівності не зміниться.

а) $\forall\ a, b, c \in N_0:\ a \cdot c = b \cdot c, \wedge\ c \neq 0\ \Rightarrow\ a = b.$

б) $\forall\ a, b, c \in N_0: a \cdot c < b \cdot c, \wedge\ c \neq 0\ \Rightarrow a < b.$

Поняття добутку двох цілих невід'ємних чисел можна розповсюдити на довільну скінченну сукупність чисел.

Означення. Добуток *n* множників, де *n* > 1, кожен з яких дорівнює *a*, називається *n*-м степенем числа *a* (позначається a^n).

Знаходженя *n*-го степеня числа *a* називається *піднесенням до степеня*: *a* називається основою, *n* – показником степеня.

Означення. Число *a* в першому степені дорівнює самому числу *a*.

З означення степеня та властивостей дії множення випливають такі *властивості степеня*:

► При множенні з однаковими основами степені додаються (адитивність показників степенів при однаковій основі)

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

► При піднесенні до степеня добутку до степеня підноситься кожен з множників (дистрибутивність піднесення до степеня відносно множення)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

► При піднесенні степеня до степеня степені перемножуються (мультиплікативність показників при піднесенні степеня до степеня) $(a^n)^k = a^{nk}$.

► Для випадку, коли основою є нуль за означенням степеня отримаємо: $0^n = 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0$. Отже, будь-яке натуральне число в нульовому степені дорівнює одиниці: $a^0 = 1$.

► Якщо один з множників дорівнює нулю, то і добуток дорівнює нулю.

► Якщо один з множників дорівнює одиниці, то добуток дорівнює іншому множнику.

2.2.4. Ділення цілих невід'ємних чисел

Означення. Розділити ціле невід'ємне число *a* на натуральне число *b* означає знайти таке число *c*, що $a = b \cdot c$. Число *a* називається *діленим*, *b* – *дільником*, *c* – *часткою* ($c = a : b$).

$$\forall\ a \in N_0\ \forall\ b \in N:\ a : b = c\ \Leftrightarrow\ b \cdot c = a.$$

З даного означення випливає, що ділене дорівнює частці, помноженій на дільник: $(a : b) \cdot b = a$. З означення частки та дії ділення випливає рівність $(a \cdot b) : b = a$.

Оскільки дія ділення зводиться до розв'язування рівняння виду

$$b \cdot x = a,$$

то необхідно запам'ятати, що на множині цілих невід'ємних чисел вираз

$0 : 0$ не має смислу. Тому ділити нуль на нуль не можна.

Операція ділення є оберненою до операції множення, при якій за добутком двох чисел і одним із множників визначається другий множник. З другого означення частки одержуємо такі *властивості.*

► Якщо нуль розділити на будь-яке натуральне число, то в результаті одержимо нуль:

$$\forall a \in N: \ 0 : a = 0.$$

► Якщо будь-яке натуральне число розділити на одиницю, то в результаті одержимо те саме натуральне число:

$$\forall a \in N_0: \ a : 1 = a.$$

► Якщо будь-яке натуральне число розділити на те саме натуральне число, то одержимо одиницю:

$$\forall a \in N: \ a : a = 1.$$

► Якщо обидві частини рівності поділити на натуральне число, то рівність не порушиться ($c > 0$, то $a\,c = b\,c \Rightarrow a = b$).

За означенням ділення $ac : c = a$ і $bc : c = b$ ($ac = bc$). Тому з теореми про єдиність частки випливає, що $a = b$.

► Якщо ділене і дільник помножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то частка не зміниться

$$(c > 0, \text{ то } a : b = a\,c : b\,c).$$

Нехай $a\,c : b\,c = x$, тоді $a\,c = b\,c\,x$. Звідси $a = b\,x \Rightarrow a : b = x$.

► Ділення на добуток можна виконати послідовним діленням на окремі множники $a : b\,d = (a : b) : d$.

$$12 : (6 \cdot 2) = 12 : 6 : 2.$$

► Розподільна властивість ділення відносно суми:

$(a + b) : c = a : c + b : c$, якщо ділення можливе.

► Розподільна властивість ділення відносно різниці:

$(a - b) : c = a : c - b : c$, якщо ділення можливе.

Приклад 1.А. На основі залежності між компонентами і результатами дій знайти невідоме x

$$24\,960:\left(3\,360\ -\ \frac{300\cdot(200-6x)}{115}\right)=8.$$

Розв'язання. Пронумеруємо порядок виконання дій у лівій частині рівняння:

$$\underbrace{24\,960}_{ДІЛЕНЕ}\ \overset{6}{:}\ \underbrace{3\,360\ \overset{5}{-}\ \frac{300\overset{3}{\cdot}(200\overset{2}{-}6\overset{1}{\cdot}x)}{115}{}^{4}}_{ДІЛЬНИК}\ =\ \underbrace{8}_{ЧАСТКА}.$$

Щоб знайти невідомий дільник треба ділене поділити на частку:

$$3\,360\ -\frac{300\ \cdot\ (200-6\cdot x)}{115}=24\,960:8=3120;$$

$$\underbrace{3\,360}_{ЗМЕНШУВАНЕ}\ \overset{5}{-}\ \underbrace{\frac{300\overset{3}{\cdot}(200\overset{2}{-}6\overset{1}{\cdot}x)}{115}{}^{4}}_{ВІД'ЄМНИК}=\underbrace{3120}_{РІЗНИЦЯ}.$$

Щоб знайти невідомий від'ємник треба від зменшуваного відняти різницю:

$$\frac{300\ \cdot\ (200-6\cdot x)}{115}=3\,360-3120=240;$$

$$\underbrace{300\ \overset{3}{\cdot}\ (200\overset{2}{-}6\ \overset{1}{\cdot}\ x)}_{ДІЛЕНЕ}\ \overset{4}{:}\ \underbrace{115}_{ДІЛЬНИК}\ =\ \underbrace{240}_{ЧАСТКА}.$$

Щоб знайти невідоме ділене треба частку помножити на дільник:

$$300\ \cdot\ (200\ -\ 6\ \cdot\ x)=240\ \cdot\ 115=27\,600;$$

$$\underbrace{300}_{МНОЖНИК}\ \overset{3}{\cdot}\ \underbrace{(200\overset{2}{-}6\overset{1}{\cdot}x)}_{\substack{НЕВІДОМИЙ\\МНОЖНИК}}\ =\ \underbrace{27\,600}_{ДОБУТОК}.$$

Щоб знайти невідомий множник треба добуток поділити на відомий множник:

$$(200\ -\ 6\ \cdot\ x)=27\,600\ :\ 300=92;$$

$$\underbrace{200}_{ЗМЕНШУВАНЕ}\ \overset{2}{-}\ \underbrace{6\overset{1}{\cdot}x}_{ВІД'ЄМНИК}\ =\ \underbrace{92}_{РІЗНИЦЯ}.$$

Щоб знайти невідомий від'ємник треба від зменшуваного відняти різницю:

$$6\cdot x=200-92=108;$$

$$\underbrace{6}_{МНОЖНИК}\ \overset{1}{\cdot}\ \underbrace{x}_{\substack{НЕВІДОМИЙ\\МНОЖНИК}}\ =\ \underbrace{108}_{ДОБУТОК}.$$

Щоб знайти невідомий множник треба добуток поділити на відомий множник:

$$x=108\ :\ 6=18.$$

Відповідь: $x=18$.

На основі залежності між компонентами і результатами дій знайти невідоме (**1.1 – 1.15.**):

1.1. $(7x+222\,171:(100\,000-97\,843)):33=64.$

1.2. $(4\,300-650\cdot 144:x)\cdot\ 84:165-105=595.$

1.3. $564-(48\cdot(1\,683-(197+7x)):1\,516)=540.$

1.4. $\left(742-\frac{(180-5y)\cdot 320}{128}\right):14\cdot 107=2\,996.$

1.5. $(((138x-5\,859):39+28\,604):403)\cdot 29-1\,059=1000.$

1.6. $\left(\frac{7\,008-52\cdot 14}{314\cdot x}\cdot 425\cdot 60-305\,000\right):4\,100=50.$

1.7. $2\,020-\left(28\,836:\left(3\,060-\frac{780}{x}\cdot 208\right)\right)+5\,319:135=1\,980.$

1.8. $(((1\,500+2x:28)\cdot 48-85\,776)\cdot 24+608)\cdot 202=6\,173\,120.$

1.9. $\left(\left(223\,440:\left(\frac{72\cdot x}{252}+239\right)+8\,268\right):108-59\right)\cdot 403=10\,478.$

1.10. $(111\,111\,000:(3\,150+9\,000\,000:x)+10\,912):407=76.$

1.11. $(9\,564-(8\,352-(848-21)+(8x-41)))-211=1813.$

1.12. $(((750+x:28)\cdot 24-21144)\cdot 12+38)\cdot 101=192910.$

1.13. $282-(72\cdot(1548-(x\cdot 13+62)):4548)=270.$

1.14. $(14\,972\,580:(250\,000-52\cdot(4\,881-x))\cdot 1\,024-590\,000):376=1\,003.$

1.15. $(((134\cdot x-3\,179)+856)\cdot 81):333=315.$

1.3. Системи числення

1.3.1. Поняття про системи числення та їх види

Діяльність людини сприяла появі нових чисел, які потрібно було не тільки називати і записувати, але й виконувати над ними різні операції. За тривалий період розвитку у різних народів були створені різні системи найменування і позначення чисел.

Системою числення називається сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід'ємне число.

Перед кожною системою числення *ставляться такі три вимоги*:

1) будь-яке ціле невід'ємне число однозначно записується у даній системі числення;

2) числа легко порівнювати на основі їх запису;

3) алгоритми виконання арифметичних операцій над числами, записаними у даній системі числення, порівняно прості.

Для деяких цілих невід'ємних чисел є індивідуальні спеціальні знаки для їх позначення і запису. Ці знаки називаються *цифрами,* а самі числа, що позначаються цими знаками, називаються *вузловими,* усі інші числа записуються за допомогою арифметичних операцій над вузловими числами і називаються *алгоритмічними.*

Системи числення поділяються на *позиційні* і *непозиційні.* У непозиційних системах числення значення цифри не залежить від того, яке місце (позицію) вона займає у запису числа. З непозиційних систем числення на даний час найбільш відомою є римська, якою іноді користуються і нині. Основні її цифри – I, V, X, L, C, D, M, якими зображаються відповідно вузлові числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Інші числа можна одержати у результаті додавання і віднімання вузлових чисел за певними правилами. Одним із недоліків непозиційних систем числення є те, що у них для запису великих чисел потрібно вводити все нові і нові вузлові числа, а, отже, нові цифри.

У позиційних системах числення, на відміну від непозиційних, числове значення кожної цифри змінюється зі зміною її положення (позиції) у запису числа, що значно полегшує його запис, а також порівняння чисел і виконання арифметичних операцій над ними. Тому позиційні системи числення набули широкого вжитку. У них використовується розрядний принцип запису чисел: число g одиниць одного розряду становить одну одиницю наступного вищого розряду. Інакше кажучи число g, яке називається *основою системи числення*, вказує на те, що при зміні положення цифри у запису числа на одну одиницю вліво (вправо) числове значення її збільшується (зменшується) у g разів. За основу системи числення може бути вибране довільне натуральне число $g > 1$. Для запису чисел у позиційній системі числення з основою g потрібно g цифр, кожна з яких позначає одне з цілих невід'ємних чисел від 0 до $g - 1$, які називаються *одноцифровими числами.* Зокрема, при $g = 10$ одержуємо позиційну систему числення, яка називається *десятковою*.

1.3.2. Десяткова система числення

Зокрема, десяткова система числення є одним із видів позиційних систем числення. Широке впровадження її у практику обумовлено наявністю у людини найпростішого лічильного пристрою – 10 пальців рук. Вивчення десяткової системи числення – одне з основних завдань курсу математики сучасної школи.

У десятковій системі числення для запису перших десяти цілих невід'ємних чисел використовуються десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Десятковим записом натурального числа a називається подання його у вигляді

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0, \qquad (1)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – цифри десяткової системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ коротко записується $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$.

Числа $1 = 10^0, 10^1, 10^2, \ldots, 10^n$, тобто 1, 10, 100, ..., $1\underbrace{00\ldots0}_{n\ \text{нулів}}$ (у числі n нулів) називаються розрядними одиницями відповідно першого, другого, ..., (n + 1) – розрядів, причому 10 одиниць одного розряду становлять одну одиницю наступного вищого розряду.

У запису (1) доданки a_0, $a_1\ 10^1$, $a_2\ 10^2, \ldots$, $a_{n-1}\ 10^{n-1}$, $a_n\ 10^n$ називають *розрядними доданками*.

Десятковий запис числа показує, скільки одиниць найнижчого розряду є у числі і як вони розподілені як одиниці вищих розрядів.

► Десятковий запис натурального числа завжди існує і єдиний.

Десятковим записом називають суму його розрядних доданків, тобто, коли у запису

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0$$

операції множення і піднесення до степеня замінити їх результатами.

Наприклад.

$43075 = 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 5 = 40000 + 3000 + 70+5.$

1.3.3. Позиційні системи числення з довільною основою та запис чисел у них

У практичній діяльності люди користувалися різними системами числення, особливо позиційними, бо, як уже зазначалося, вони дають можливість досить просто записувати, порівнювати і виконувати над числами арифметичні операції. Поділ року на 12 місяців, години на 60 хв. підтверджують існування позиційних систем числення з різними основами. З часом найбільш вживаною серед них виявилася десяткова система.

Записом натурального числа у позиційній системі числення з основою $g \geq 2$ називається подання його у вигляді

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + ... + a_1 \cdot g + a_0,$$

де $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ – цифри системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + ... + a_1 \cdot g + a_0$ коротко записується $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}_g$.

Числа $1 = g^0, g^1, g^2, ..., g^{n-1}, g^n$ називаються *розрядними одиницями*, а доданки

$$a_1 \cdot g^1, a_2 \cdot g^2, \ldots, a_{n-1} \cdot g^{n-1}, a_n \cdot g^n$$ – *розрядними доданками.*

При читанні числа, записаного у позиційній системі числення з основою g, послідовно називають цифри числа, починаючи з найвищого розряду, і основу системи числення. Наприклад, число 25064_8 читається: “два п’ять нуль шість чотири у системі числення з основою вісім”.

Запис числа у позиційній системі числення з основою g показує, скільки одиниць найнижчого розряду містить дане число і як вони розподілені у числі як одиниці вищих розрядів.

1.3.4. Перехід від запису чисел в одній позиційній системі числення до запису в іншій

Одне й те ж число може бути записане у різних позиційних системах числення. Часто потрібно, знаючи запис числа у системі числення з основою g, записати його у системі числення з основою h. Способи переходу від однієї системи числення до іншої ґрунтуються на тому, що у кожному числі всіх одиниць найнижчого розряду у будь-якій системі числення – однакова кількість, тільки як одиниці вищих розрядів у них вони розподілені по-різному. Найбільш вживані два способи переходу – ділення і множення. Розглянемо їх.

Нехай натуральне число $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}_g$ записано у системі числення з основою g і потрібно записати його у системі числення з основою h.

Метод ділення виконується за такою схемою.

1. Якщо дане число менше від основи h нової системи числення, то воно запишеться у ній як одноцифрове число.

2. Якщо число не менше від основи h нової системи числення, то воно у цій системі містить і одиниці вищих розрядів. Щоб знайти їх кількість, потрібно поділити дане число на h. Частка від ділення вказує, скільки одиниць другого розряду є у числі, а остача – скільки одиниць першого розряду. Якщо одержана частка не менша від h, то дане число містить одиниці ще вищого третього розряду. Щоб знайти їх кількість, слід одержану частку поділити на h. Цей процес продовжується, поки не одержимо частку, яка менша від h. Вона буде вказувати кількість одиниць найвищого розряду, а всі остачі вказуватимуть кількість одиниць наступних нижчих розрядів у запису даного числа у позиційній системі числення з основою h.

3. Усі операції виконуються у старій системі числення з основою g, а тому цим способом зручно користуватися, коли $g > h$, бо тоді h записується як одноцифрове число у системі числення з основою g, і остачі від ділення будуть менші від h, отже, вони будуть одноцифровими числами у новій системі числення.

Методом ділення зручно користуватися також, коли $g = 10$, бо тоді добре відомі алгоритми виконання операцій.

Суть *методу множення можна* представити так:

1. Якщо дане число менше h, то воно запишеться у системі числення з цією основою як одноцифрове.

2. Якщо дане число у системі числення з основою g має вищі розрядні одиниці, то множимо його кількість одиниць найвищого розряду на g і до одержаного добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Одержану суму множимо на g і до добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Ці операції проводимо доти, поки не додамо кількість одиниць найнижчого розряду даного числа, і на цьому процес закінчено.

3. Обчислення проводяться у новій системі числення. А тому методом множення користуються тоді, коли $g < h$, бо тоді всі цифри і основа старої системи числення є цифрами нової системи числення, або ж коли переходять від будь-якої системи числення до десяткової.

Приклад 2.А. Число 3586_7 записати у десятковій системі числення.

Розв'язання.

Перейдемо до десяткової системи числення і скористаємося методом множення. Обчислення проводяться у десятковій системі числення.

$$3 \cdot 7 + 5 = 26$$

$$\underline{\times\ 7}$$

$$182 + 8 = 190$$

$$\underline{\times\ 7}$$

$$1330 + 6 = 1336.$$

Відповідь. 1336.

Приклад 2.Б. Число 55288 записати в вісімковій системі числення.

Розв'язання. Скористаємося способом ділення (“кутом”), де дільником буде виступати задана нова система числення, тобто число 8. Будемо шукати остачу від ділення, а одержану частку знову ділити на 8 доки одержана частка буде меншою за дільник (число 8). Одержані остачі прочитаємо у зворотньому порядку.

```
_55288 | 8
  48      _6911 | 8
 _72        64     _863 | 8
  72       _51       8      _107 | 8
   _8        48     _63        8     _13 | 8
    8       _31      56      _27       8    1
    _8        24      7        24      5
     8         7                3
     0
```

Отже, $55288 = 153770_{8}$

Відповідь. $55288 = 153770_{8}$.

Приклад 2.Г. Число 42757 записати в сімнадцятковій системі числення.

Розв'язання. Використаємо ділення “кутом”, де дільником буде число 17. Як бачимо отримані остачі є числа 2, 16, 11, 8. У записі сімнадцяткової системи запишемо всі отримані остачі від ділення з кінця на перед, як показано на схемі. Двозначні остачі записують в дужках.

```
_42757  | 17
 34      _2515  | 17
 _87      17     _147  | 17
  85      _81     136    8
   _25     68     11
    17     _135
    _87     119
     85      16
      2
```

Отже, $42757 = 8(11)(16)2_{17}$

Відповідь. $42757 = 8(11)(16)2_{17}$

2.1. Число 548 записати в п’ятірковій системі числення

2.2. Число 545 записати в двійковій системі числення

2.3. Число 17283 записати в четвірковій системі числення

2.4. Число 1398 записати в трійковій системі числення

2.5. Число 95713 записати в сімковій системі числення

2.6. Число 544736 записати в двійковій системі числення

2.7. Число 25312 записати в п’ятірковій системі числення

2.8. Число 24517 записати в вісімковій системі числення

2.9. Число 24517 записати в шістковій системі числення

2.10. Число 105591 записати в дев’ятковій системі числення

2.11. Число 2745 записати в шістковій системі числення

2.12. Число 13499 записати в сімковій системі числення

2.13. Число 29154 записати в шістковій системі числення

2.14. Число 29123 записати в п’ятнадцятковій системі числення

Приклад 3.А. Число 50213_6 записати в десятковій системі числення.

Розв’язання.

$$\overset{4}{5}\overset{3}{0}\overset{2}{2}\overset{1}{1}\overset{0}{3}$$

$$5 \cdot 6^4 + 0 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 =$$

$$= 5 \cdot 1296 + 0 + 2 \cdot 36 + 1 \cdot 6 + 3 =$$

$$= 6480 + 0 + 72 + 6 + 3 = 6561$$

Отже, $50213_6 = 6561$.

Відповідь. $50213_6 = 6561$.

Приклад 3.Б. Число 12243_5 записати в одинадцятковій системі числення.

Розв'язання.

$$\overset{4\,3\,2\,1\,0}{12243_5}$$

Представимо у вигляді суми розрядних доданків

$$1 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 625 + 250 + 50 + 20 + 3 = 948.$$

$$\begin{array}{llll} \_948 & |\underline{11} & & \\ \ \underline{88} & \_\ 86 & |\underline{11} & \\ \_\ 68 & \ \underline{77} & \ \ \mathbf{7} & \\ \ \ \underline{66} & \ \ \mathbf{9} & & \\ \ \ \ \mathbf{2} & & & \end{array}$$

Отже, $12243_5 = 792_{11}$

Відповідь. $12243_5 = 792_{11}$

3.1. Число 21514_6 записати в десятковій системі числення
3.2. Число 75144_8 записати в десятковій системі числення
3.3. Число 1512_7 записати в десятковій системі числення
3.4. Число 3401_5 записати в шістковій системі числення
3.5. Число 26554_7 записати в п'ятірковій системі числення
3.6. Число 71732_8 записати в одинадцятковій системі числення
3.7. Число 2455_7 записати в дванадцятковій системі числення
3.8. Число 44512_9 записати в тринадцятковій системі числення
3.9. Число 71125_8 записати в дев'ятковій системі числення
3.10. Число 43301_5 записати в сімковій системі числення
3.11. Число 24133_5 записати в дев'ятковій системі числення
3.12. Число 35711_8 записати в п'ятірковій системі числення
3.13. Число 43312_5 записати в четвірковій системі числення
3.14. Число 22211_5 записати в трійковій системі числення
3.15. Число 25125_6 записати в сімковій системі числення

Приклад 4.А. У яких системах числення справджуються рівність

$$456_x - 165_x = 261_x$$

Розв'язання. Представимо у вигляді суми розрядних доданків.

$$\overset{2\,1\,0}{456_x} - \overset{2\,1\,0}{165_x} = \overset{2\,1\,0}{261_x}$$

$$4x^2 + 5x + 6 - (1 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 5) = 2x^2 + 6x + 1.$$

Зведемо подібні доданки:

$$4x^2 + 5x + 6 - x^2 - 6x - 5 - 2x^2 - 6x - 1 = 0,$$

$$x^2 - 7x = 0,$$
$$x\,(x - 7) = 0,$$
$$x = 0 \text{ або } x = 7.$$

Значення $x = 0$ не задовольняє умову задачі. Тому, дана рівність справджується у сімковій системі числення.

Відповідь. $x = 7$.

Приклад 4.Б. Розв'язати рівняння $x_5 \cdot 24_5 - 114_5 = 2310_5$

Розв'язання. Визначимо порядок виконання дій у рівнянні.

$$x_5 \overset{1}{\cdot} 24_5 \overset{2}{-} 114_5 = 2310_5$$
$$x_5 \cdot 24_5 = 2310_5 + 114_5.$$

$$\begin{array}{r} 2310_5 \\ +\ \underline{114_5} \\ 2424_5 \end{array}$$

$$x_5 \cdot 24_5 = 2424_5,$$
$$x_5 = 2424_5 : 24_5,$$
$$x_5 = 101_5.$$

Відповідь. $x_5 = 101_5$.

Приклад 4.В. Обчислити значення виразу, який складений з чисел, що записані у системі числення з основою 5:

$$(2342_5 + 342_5 - 442_5) \cdot 32_5$$

Розв'зання:

1) $\begin{array}{r} 2342_5 \\ +\ \underline{342_5} \\ 3234_5 \end{array}$ При додаванні користуємося таким алгоритмом:

• $2 + 2 = 4$, а 4 у п'ятірковій системі числення буде 4

• в числі 8 міститься одна "п'ятірка" і 3 одиниці

$8 = 1 \cdot 5 + 3$

• $3 + 3 = 6$ і ще одна "п'ятірка", $6 + 1 = 7$

$7 = 1 \cdot 5 + 2$

• тому до 2 додаємо ще 1

$2 + 1 = 3$

2) $\begin{array}{r} -\ 3234_5 \\ \underline{442_5} \\ 2242_5 \end{array}$ Будемо міркувати так:

• у п'ятірковій системі числення $4 - 2 = 2$

• у п'ятірковій системі числення від 3 відняти 4 неможна, тому з вищого розряду позичаємо одну "п'ятірку" і отримуємо: $3 + 5 = 8$, а

$8 - 4 = 4$

• від залишеної одиниці не можемо відняти 4, тому знову з вищого розряду позичаємо "п'ятірку" і отримуємо:

$1 + 5 = 6$, а $6 - 4 = 2$

3) $$\begin{array}{r} 2242_5 \\ \times\ \underline{\quad 32_5} \\ 10034 \\ +\ \underline{12331\ } \\ 133344_5 \end{array}$$

• у цьому розряді після позичання залишається 2.
Продовжимо міркування:
- $2 \cdot 2 = 4$
- $2 \cdot 4 = 8,\ 8 = 1\cdot 5 + 3$
- $2 \cdot 2 = 4$, з нижчого розряду додамо 1, $4 + 1 = 5,\ 5 = 1 \cdot 5 + 0$
- $2 \cdot 2 = 4,\ 4 + 1 = 5,\ 5 = 1 \cdot 5 + 0$
- аналогічно:
  - $3 \cdot 2 = 6,\ 6 = 1 \cdot 5 + 1$;
  - $3 \cdot 4 = 12,\ 12 + 1 = 13,\ 13 = 2 \cdot 5 + 3$;
  - $3 \cdot 2 = 6,\ 6 + 2 = 8,\ 8 = 1 \cdot 5 + 3$;
  - $3 \cdot 2 = 6,\ 6 + 1 = 7,\ 7 = 1\cdot 5 + 2$

• Виконавши додавання в п’ятірковій системі числення одержимо: 133344_5.

Відповідь. 133344_5.

4.1. Обчислити: $10013_5 – 4234_5 + 40432_5$;
4.2. Обчислити: $425_6 \cdot 54_6 + 43_6$;
4.3. У яких системах числення справджуються рівності:
$$306_x + 124_x = 220;$$
4.4. Обчислити: $1201_3 – 201_3 + 22001_3$;
4.5. Обчислити: $(42_8 + 135_8) \cdot 44_8 – 124_8$;
4.6. Обчислити: $(1155_6 – 24_6) \cdot 12_6 + 135_6$;
4.7. Розв’язати рівняння: $x_8 : 621_8 + 431_8 = 1252_8$;
4.8. Обчислити: $(76_8 \cdot 64_8 – 57_8 \cdot 38_8) \cdot 44_8$;
4.9. У яких системах числення справджуються рівності:
$$342_x + 44_x = 441_x;$$
4.10. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення: $3245_6 \cdot 201_6 – 542_6 \cdot 201_6$;
4.11. У яких системах числення справджується рівність: $30_x : 2_x = 12_x$;
4.12. Обчислити: $(523_7 – 21_7 \cdot 11_7) + 3411_7$;

2. Подільність чисел

2.1. Відношення подільності на множині цілих невід’ємних чисел

На множині цілих невід’ємних чисел дії додавання і віднімання виконуються завжди, тобто завжди в результаті виконання цих дій отримуємо ціле невід’ємне число. Проте дії віднімання і ділення є частковими операціями на цій множині. Якщо для виконання дії віднімання ($a - b$) слід застосувати просту ознаку ($a \geq b$), то для дії ділення такої очевидної ознаки не існує.

Пошуки таких ознак почалися ще в древні часи до нашої ери. Важливе місце у розкритті властивостей чисел належить Піфагору та його послідовникам. Дослідження у цій галузі привели не тільки до відкриття ряду ознак, а й до встановлення важливих властивостей чисел, пов'язаних з розглядом спеціального відношення, яке називається *відношенням подільності.*

Про довільні цілі невід'ємні числа a і b кажуть, що a знаходиться у відношенні подільності з b або що *a ділиться на b* (позначається $a \vdots b$), якщо існує ціле невід'ємне число x таке, що
$a = b \cdot x$:

$$\forall a, b \in N_0 : a \vdots b \Leftrightarrow \exists\, x \in N_0 : a = b \cdot x.$$

З означення відношення подільності випливають наступні **властивості**.

1. Нуль ділиться на будь-яке ціле невід'ємне число:

$$\forall a, b \in N_0 : 0 \vdots a.$$

2. Будь-яке ціле невід'ємне число ділиться на одиницю:

$$\forall a, b \in N_0 : a \vdots 1.$$

Теорема. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел:

1) рефлексивне: $\forall a \in N_0 : a \vdots a$;

2) антисиметричне: $\forall a, b \in N_0 : (a \vdots b) \wedge (b \vdots a) \Rightarrow (a = b)$;

3) транзитивне: $\forall a, b, c \in N_0 : (a \vdots b) \wedge (b \vdots c) \Rightarrow (a \vdots c)$;

4) незв'язне.

Зауваження. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел слід відрізняти від операції ділення у цій множині: пару чисел, яка належить цьому відношенню, не можна ототожнювати з результатом операції ділення, що ставиться їй у відповідність.

2.2. Подільність суми, різниці і добутку

Відношення подільності цілих невід'ємних чисел розглядається з операціями додавання віднімання і множення. Про це свідчать наступні теореми.

Теорема (подільність суми).

Якщо кожен із доданків ділиться на задане число, то й сума ділиться на це число.

Доведення. Доведення теореми проведемо для випадку двох доданків.

Нехай a_1, a_2 і b – довільні цілі невід'ємні числа такі, що $a_1 \vdots b$ і $a_2 \vdots b$. Звідси за означенням подільності

$$a_1 = b \cdot x_1,\ a_2 = b \cdot x_2, \qquad x_1, x_2 \in N_0.$$

Додамо одержані рівності почленно:

$$a_1 + a_2 = b \cdot x_1 + b \cdot x_2.$$

На основі дистрибутивності множення відносно додавання

$$a_1 + a_2 = b \cdot (x_1 + x_2).$$

Число $x = x_1 + x_2$ є цілим невід'ємним числом як сума цілих невід'ємних чисел. Отже, $a_1 + a_2 = b \cdot x$, $x \in N_0$. Тому за означенням подільності $(a_1 + a_2) \vdots b$.■

Аналогічно доводиться така теорема.

Теорема (подільність різниці).

Якщо зменшуване і від'ємник діляться на дане число, то й різниця ділиться на це число.

Вираз, у якому є тільки операції додавання і віднімання, називається *алгебраїчною сумою*, а його компоненти – *доданками.*

Із розглянутих теорем одержуємо **наслідок**.

Теорема (подільність добутку).

Якщо у добутку кількох чисел хоч один із множників ділиться на задане число, то й добуток ділиться на це число.

Доведення.

Доведення проведемо для випадку двох множників. Нехай a_1, a_2 і b – довільні цілі невід'ємні числа такі, що, наприклад, $a_1 \vdots b$. З того, що $a_1 \vdots b$, за означенням подільності випливає

$$a_1 = b \cdot x_1,\ x_1 \in N_0.$$

Тоді $a_1 \cdot a_2 = (b \cdot x_1) \cdot a_2 = b \cdot (x_1 \cdot a_2)$.

Але $x = x_1 \cdot a_2$ є цілим невід'ємним числом як добуток цілих невід'ємних чисел. Тому $a_1 \cdot a_2 = b \cdot x$, $x \in N_0$.

Отже, за означенням подільності $a_1 \cdot a_2 \vdots b$.■

2.3. Ознаки подільності

У багатьох випадках процес ділення одного числа на інше досить трудомісткий. З'ясування істинності висловлення “ $a \vdots b$” при діленні чисел a і b не завжди просте. У зв'язку з цим виникає задача пошуку одержання відповіді без виконання безпосереднього ділення.

Ознакою подільності одного натурального числа на інше називається необхідна і достатня умова, при виконанні якої одне число ділиться на інше, причому перевірка умови виконується легше, ніж безпосереднє ділення.

Ряд ознак подільності натуральних чисел одержують із загальної ознаки подільності Паскаля.

Теорема (загальна ознака подільності Паскаля).

Для того щоб натуральне число $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_g$, записане у позиційній системі числення з основою g, ділилося на натуральне число b, необхідно і достатньо, щоб на b ділилася сума

$$r = a_0 + a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 + \ldots + a_n \cdot r_n,$$

де $r_1, r_2, \ldots r_n$ – остачі від ділення $g, g^2, \ldots, g^n$ на число b.

Користуючись теоремою, можна встановлювати ознаку подільності на довільне задане натуральне число у позиційній системі числення з будь-якою основою. Найбільш вживаними є ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 11 і 25 у десятковій системі числення, деякі з них відомі ще з середньої школи.

• Для того щоб число **ділилося на 2**, необхідно і достатньо, щоб остання цифра у його записі ділилося на 2.

• Для того щоб число **ділилося на 5**, необхідно і достатньо, щоб остання цифра у його записі була 0 або 5.

• Для того щоб число **ділилося на 3, або 9**, необхідно і достатньо, щоб на 3, або 9 ділилася сума цифр даного числа ($a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$).

• Для того щоб число **ділилося на 4**, необхідно і достатньо, щоб число $a_0 + 2\,a_1$ ділилося на 4.

• Для того щоб число **ділилося на 11**, необхідно і достатньо, щоб на 11 ділилася різниця

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots).$$

• Для того щоб число **ділилося на 25**, необхідно і достатньо, щоб на 25 ділилися дві останні цифри числа.

На основі теореми Паскаля можна сформулювати і деякі ознаки подільності.

Загальна ознаки подільності чисел на 7, 11, 13.

Якщо різниця, одержана від віднімання числа вираженого трьома його останніми цифрами і всіма іншими (або навпаки) ділиться на 7, або на 11, або 13, то і саме число ділиться на 7, 11, 13.

• Для того щоб число **ділилося на 50**, необхідно і достатньо, щоб дві останні цифри у записі числа були 00, або 50.

• Для того щоб число **ділилося на 100**, необхідно і достатньо, щоб дві останні цифри у записі числа були 00.

• Для того щоб число **ділилося на 8, 125, 250**, необхідно і достатньо, щоб на ці числа воно ділилося число, записане трьома останніми цифрами цього числа.

• Для того щоб число **ділилося на 6**, необхідно і достатньо щоб це число ділилось на 2 і на 3 одночасно.

• Для того щоб число **ділилося на 12**, необхідно і достатньо щоб це число ділилось на 3 і на 4 одночасно.

• Для того щоб число **ділилося на 15**, необхідно і достатньо щоб це число ділилось на 3 і на 5 одночасно.

2.4. Прості і складені числа. Решето Ератосфена

Для довільного цілого невід'ємного числа a і натурального числа b, якщо a ділиться на b, то число b називається дільником числа a.

Натуральне число, яке більше за одиницю називається *простим*, якщо воно має своїми дільниками тільки одиницю і саме себе.

Натуральне число, яке більше за одиницю називається *складеним*, якщо воно має не менше трьох дільників.

Отже, числа 2, 3, 5, 7 – прості числа першого десятка, 11, 13, 17, 19 – прості числа другого десятка а числа 4, 6, 8, 9, 10, 12 складені.

Натуральні числа a_1, a_2, ..., a_n називаються *взаємно простими*, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює одиниці. Якщо кожна пара цих чисел взаємно проста, то числа a_1, a_2, ..., a_n називають *попарно взаємно простими.*

Прості числа мають такі **властивості.**

• Якщо просте число ділиться на натуральне число більше одиниці, то ці числа рівні.

• Добуток кількох натуральних множників ділиться на просте число тоді і тільки тоді, коли хоча б один них ділиться на просте число.

• Кожне натуральне число, яке більше за одиницю, має хоча б один простий дільник.

• Найменший, відмінний від одиниці, дільник натурального числа є числом простим.

• Множина простих чисел нескінченна. **(Теорема Евкліда).**

• Якщо натуральне число a, більше одиниці, не ділиться на жодне з простих чисел, квадрати яких не перевищують a, то число a просте.

• Найменший простий дільник натурального числа не перевищує кореня квадратного з даного числа.

Для вивчення розподілу простих чисел у натуральному ряді та інших задач теорії чисел потрібно знати всі прості числа, які не перевищують заданого натурального числа. Для розв’язання цієї задачі є спеціальний метод, який називається *решетом Ератосфена.*

Суть методу *решета Ератосфена* полягає у тому, що:

1. Виписують всі натуральні числа від 2 до n:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., n. \qquad (1)$$

2. Число 2 ділиться тільки на 1 і саме на себе, отже, воно є простим. Викреслюють у ряді (1) усі числа, кратні двом, крім самого числа 2.

3. Перше, наступне за 2, невикреслене число буде 3. Воно не ділиться на 2 (інакше його б викреслили). Отже, 3 ділиться тільки на 1 і саме на себе, а тому також буде простим. Викреслюють усі числа, кратні 3, крім самого числа 3.

4. Перше, наступне за 3, невикреслене число буде 5. Воно не ділиться ні на 2, ні на 3. Отже, 5 ділиться тільки на 1 і саме на себе, тому воно також буде простим. Викреслюють усі числа, кратні 5, крім самого числа 5 і т. д.

Процес буде закінчено, коли одержимо просте число p таке, що $p^2 \le n$, але для першого, наступного за p, невикресленого простого числа $p_1 p_1^2 > n$. Усі невикреслені числа від 2 до n будуть простими.

Наприклад, щоб скласти таблицю простих чисел, які не перевищують 1000, викреслювання потрібно закінчити при $p = 31$, бо $31^2 = 961 < 1000$. Для наступного за 31 числа, тобто для числа 32, маємо $32^2 = 1024 > 1000$, а тому й поготів для наступного за 31 простого числа будемо мати таку ж нерівність.

2.5. Спільне кратне, найменше спільне кратне кількох натуральних чисел

Нехай a_1, a_2, a_3, ..., a_n – довільні натуральні числа. Натуральне число, яке ділиться на кожне із заданих чисел, називається їх *спільним кратним*, а найменше із спільних кратних – їх *найменшим спільним кратним* і позначається НСК (a_1, a_2, a_3, ..., a_n).

Множина спільних кратних для натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ нескінченна. Це випливає з того, що за теоремою про подільність добутку число $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n$ є спільним кратним заданих чисел, а тому і кожне число виду

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \cdot k, \text{ де } k \in N,$$

також буде їх спільним кратним. За принципом найменшого числа у множині спільних кратних існує найменше число – це і є найменше спільне кратне заданих чисел. Отже, для довільних натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ їх найменше спільне кратне існує і причому єдине.

Найменше спільне кратне має такі **властивості**:

1. Для довільних натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ існує єдине НСК.

2. Найменше спільне кратне чисел a і b не менше за більше з даних чисел (якщо $a > b$, то НСК $(a, b) \geq a$).

3. Кожне спільне кратне даних чисел ділиться на найменше спільне кратне цих чисел.

4. Якщо $a \vdots b$, то НСК $(a, b) = a$.

2.6. Спільний дільник, найбільший спільний дільник кількох натуральних чисел

Нехай $a_1, a_2, ..., a_n$ – довільні натуральні числа. Натуральне число, на яке ділиться кожне із заданих чисел, називається їх *спільним дільником,* а найбільший із спільних дільників – їх *найбільшим спільним дільником* і позначається НСД $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Множина спільних дільників декількох натуральних чисел є непорожньою і скінченною. Це випливає з того, що число 1 є спільним дільником довільних натуральних чисел, а дільник числа не перевищує саме число. Тоді за принципом найбільшого числа у множині спільних дільників заданих чисел існує найбільше число, яке і буде найбільшим спільним дільником заданих чисел. Отже, для довільних натуральних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ їх найбільший спільний дільник завжди існує і причому єдиний.

Найбільший спільний дільник має такі **властивості:**

1. Для довільних натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ існує єдине НСД.

2. Найбільший спільний дільник чисел a і b не перевищує меншого за більше з даних чисел (якщо $a > b$, то НСД $(a, b) \leq a$).

3. Найбільший спільний дільник даних чисел ділиться на будь-який спільний дільник.

4. Якщо $a \vdots b$, то НСД $(a, b) = b$.

2.7. Властивості найменшого спільного кратного і найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел. Основна теорема арифметики і канонічний розклад натурального числа

Між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох натуральних чисел існує зв'язок, який виражається такою теоремою.

Теорема. Для довільних натуральних чисел a і b їх найменше спільне кратне дорівнює добутку даних чисел, поділеному на їх найбільший спільний дільник:

$$\forall a, b \in N: \ НСК\,(a, b) = \frac{ab}{НСД\,(a, b)}.$$

З простих чисел будується кожне натуральне число, яке більше за одиницю. Це випливає з теореми, яку в математиці називають *основною теоремою арифметики.*

Основною теоремою арифметики. Кожне натуральне число, більше одиниці, є або простим, або розкладається у добуток простих множників, причому цей розклад єдиний з точністю до порядку слідування множників.

Якщо для складеного натурального числа знайдено його зображення у вигляді добутку простих множників, і у ньому рівні прості множники записано у вигляді степенів простих множників, а самі прості множники розміщені у порядку зростання, то такий запис складеного числа у вигляді добутку простих множників називається *канонічним розкладом натурального числа*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – різні прості дільники числа a і $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$.

Якщо натуральне число a є простим, то сам його запис і є канонічним розкладом числа a.

На основі поняття канонічного розкладу з основної теореми арифметики одержуємо **наслідок**.

► Канонічний розклад складеного числа єдиний.

Щоб знайти канонічний розклад складеного числа, з'ясовують його подільність на прості числа у порядку зростання. При цьому користуються відомими ознаками подільності на прості числа.

4.8. Знаходження НСД і НСК кількох чисел за їх канонічними розкладами. Алгоритм Евкліда

При розгляді кількох натуральних чисел можна вважати, що їх канонічні розклади містять степені одних і тих же простих множників, при цьому показники степенів у деяких з них можуть бути рівні нулю, бо за означенням нульового показника степеня $\boldsymbol{x^0 = 1}$ для довільного числа $x \neq 0$.

► Якщо число a можна представити у канонічному записі $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, то число дільників числа a визначиться за формулою: $\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$.

► Канонічний розклад найбільшого спільного дільника кількох натуральних чисел містить ті ж прості множники, що й канонічні розклади цих чисел, але взяті з найменшими показниками степенів.

► Канонічний розклад найменшого спільного кратного кількох натуральних чисел містить ті ж прості множники, що й канонічні розклади даних чисел, але взяті з найбільшими показниками степенів.

Знаходження НСД і НСК двох чисел не завжди дають можливість їх обчислювати, оскільки є дуже трудомісткими. Для розв'язання цієї задачі є метод, який називається *послідовним діленням*, або *алгоритмом Евкліда*, описаний Евклідом у VII книзі "Начала". Теоретичною основою його є теорема про ділення з остачею і така теорема.

► Якщо довільні натуральні числа a, b, g і r, пов'язані співвідношенням $a = b \cdot g + r$, то множина спільних дільників чисел a і b дорівнює множині спільних дільників чисел b і r, тобто

$$\text{НСД}\,(a, b) = \text{НСД}\,(g, r).$$

Алгоритм Евкліда полягає у тому, що:

1. Число a ділиться на число b з остачею r_1

$$a = b \cdot g_1 + r_1, \quad r_1 < b\,.$$

Якщо $r_1 = 0$, то $b = \text{НСД}\,(a, b)$.

2. Якщо $r_1 > 0$, то число b ділять на число r з остачею:

$$b = r_1 \cdot g_2 + r_2, \quad r_2 < r_1.$$

Якщо $r_2 = 0$, то $r_1 = \text{НСД}\,(b, r_1) = \text{НСД}\,(a, b)$.

3. Якщо $r_2 > 0$, то число r_1 ділять на число r_2 з остачею:

$$r_1 \Rightarrow r_2 \cdot g_3 + r_3, \quad r_3 < r_2$$

Якщо $r_3 = 0$, то

$$r_2 = \text{НСД}\,(r_1, r_2) = \text{НСД}\,(b, r_1) = \text{НСД}\,(a, b).$$

4. Якщо $r_3 > 0$, то повторюють ділення аналогічно пункту 3, поки не отримають остачу, рівну нулю.

5. Остання, відмінна від нуля, остача буде найбільшим спільним дільником чисел a і b. Процес ділення в алгоритмі Евкліда скінченний, бо остачі, які є цілими невід'ємними числами, на кожному кроці зменшуються, залишаючись меншими від b, а таких чисел не більше як b.

Приклад 5.А. Знайти розкладом на прості множники НСД і НСК чисел 6160 і 1560.

Розв'язання. Розкладемо на прості множники

$$\begin{array}{r|l} 6160 & 2 \\ 3080 & 2 \\ 1540 & 2 \\ 770 & 2 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1560 & 2 \\ 780 & 2 \\ 390 & 2 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$6160 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ $\qquad$ $1560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

Отже, НСД (6160, 1560) = $2^3 \cdot 5 = 40$,
НСК (6160, 1560) = $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 240240$.

***Відповідь*:** НСД (6160, 1560) = 40, НСК (6160, 1560) = 240240.

Приклад 5.Б. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД і НСК чисел 2911 і 1763.

Розв'язання. Знайдемо НСД (2911, 1763). Для цього більше з даних чисел, тобто 2911 ділимо на менше – 1763. Якщо залишиться остача, то менше число ділимо на остачу, потім першу остачу ділимо на другу і т. д., доки не одержимо остачу 0. Остання не рівна нулю остача і буде шуканим найбільшим спільним дільником даних чисел.

$$\begin{array}{r|l} -\,2911 & \underline{1763} \\ \underline{1763} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,1763 & \underline{1148} \\ \underline{1148} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,1148 & \underline{615} \\ \underline{615} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,615 & \underline{533} \\ \underline{533} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,533 & \underline{82} \\ \underline{492} & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,82 & \underline{\mathbf{41}} \\ \underline{82} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Отже, НСД (2911, 1763) = 41.

На основі формули, яка виражає залежність між НСД, НСК і добутком двох чисел НСК (a, b) = $\dfrac{a \cdot b}{НСД\ (a, b)}$,

НСК (2911, 1763) = $\dfrac{2911 \cdot 1763}{41} = 125173$.

***Відповідь*:** НСД (2911, 1763) = 41, НСК (2911, 1763) = 125173.

5.1. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 3960 і 3024.

5.2. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 132300 і 11760.

5.3. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 6160 і 1560.

5.4. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 80, 64 і 96.

5.5. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 12870 і 7650.

5.6. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 2550 і 1320.

5.7. Знайти розкладом на прості множники НСК чисел 2970 і 660.

5.8. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 2911 і 1763.

5.9. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 1980, 702 і 936.

5.10. Знайти розкладом на прості множники НСК чисел 132300 і 11760.

5.11. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 7800 і 193050.

5.12. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 609840 і 4200.

5.13. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 8820 і 29400.

5.14. Знайти за алгоритмом Евкліда НСК чисел 4200 і 11088.

5.15. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 363000 і 21780.
5.16. Знайти за алгоритмом Евкліда НСК чисел 87750 і 51480.

Приклад 6.А. Встановити чи числа 153623 і 150623 ділиться на 11.

Розв'язання. Число 153623 не ділиться на 11, бо (3 + 6 + 5) – – (2 + 3 + 1) = 8, а 8 не ділиться на 11.

Число 150623 ділиться на 11, бо (3 + 6 + 5) – (2 + 0 + 1) = 11, і 11 ділиться на 11.

***Відповідь*.** 153623 не ділитися на 11, 150623 ⋮ 11.

Приклад 6.Б. Визначити чи число 378 456 ділиться на 7, 11, 13.

Розв'язання. Число, записане трьома останніми цифрами

$$Q = 456.$$

Тоді число, виражене цифрами, що залишилися

$$P = 378.$$

Вказана різниця запишеться:

$$Q - P = 456 - 378 = 78.$$

***Відповідь*.** Оскільки 78 ділиться на 13, то і 378 456 ділиться на 13 і не ділиться на 7 і 11.

Приклад 6.В. Встановити ознаку подільності на 110.

Роз'язання. Число 110 = 2 · 55, де числа 2 і 55 взаємно прості. На основі наслідку

$$a \vdots 110 \Leftrightarrow a \vdots 2 \wedge a \vdots 55 .$$

Число 55 = 5 · 11, де числа 5 і 11 взаємно прості. На основі наслідку

$$a \vdots 55 \Leftrightarrow a \vdots 5 \wedge a \vdots 11.$$

На основі попередніх узагальнень одержимо

$$a \vdots 110 \Leftrightarrow a \vdots 2 \wedge a \vdots 5 \wedge a \vdots 11.$$

Отже, число ділиться на 110 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на числа 2, 5 і 11.

За цією ознакою число 2640 ділиться на 110, бо остання цифра цього число ділиться як на 2, так і на 5 і виконується наступна умова

$(6 + 0) - (4 + 2) = 0 \vdots 11.$

Приклад 6.Г. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК $(a, b) = 180$, НСД $(a, b) = 6$.

Розв'язаня. Розкладемо НСК і НСД на множники.

НСК (a, b) = 180 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ і НСД (a, b) = 6 = 2 · 3. Відповідно у записі чисел a і b буде присутній НСД цих чисел, тобто – 6. Отже,

$\begin{cases} a = 6 \cdot 2 \cdot 5 = 60, \\ b = 6 \cdot 3 = 18. \end{cases}$, або $\begin{cases} a = 6 \cdot 2 = 12, \\ b = 6 \cdot 3 \cdot 5 = 90. \end{cases}$

Відповідь. 60 і 18, або 12 і 90.

Приклад 6.Д. Знайти число дільників числа 504.

Розв'язання. Оскільки канонічним розкладом числа $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, то число всіх дільників цього числа дорівнює τ (504) = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 · 3 · 2 = 24.

Відповідь. 24 дільники.

Приклад 6.Е. Скоротити дріб $\frac{21120}{30720}$.

Розв'язаня. Представимо чисельник і знаменник дробу у вигляді їх канонічного розкладу.

Розв'язання. Розкладемо на прості множники

21120	2
10560	2
5280	2
2640	2
1320	2
660	2
330	2
165	3
55	5
11	11
1	

$21120 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$

30720	2
15360	2
7680	2
3840	2
1920	2
960	2
480	2
240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$30720 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 5.$

Тепер даний дріб можна записати у вигляді $\frac{21120}{30720} = \frac{2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2^{11} \cdot 3 \cdot 5}$.

Здійснивши скорочення у чисельнику і знаменнику дробу отримаємо: $\frac{21120}{30720} = \frac{11}{2^4} = \frac{11}{16}$.

Відповідь. $\frac{11}{16}$.

6.1. Знайти канонічний розклад таких чисел:

а) 714285; б) 131952.

6.2. Не виконуючи додавання встановити, чи діляться наступні суми на 3:

а) 126 + 285; б) 741 + 231; в) 162 + 112.

6.3. Не виконуючи ділення встановити чи різниця чисел 23544 – 17028 кратна числам 4, 8, 9.

6.4. Не виконуючи ділення встановити чи ділиться число 1980 на 165.

6.5. Не виконуючи ділення встановити чи ділиться число 6732 на 66.

6.6. Не виконуючи ділення встановити чи ділиться число 2912 на 26.

6.7. Не виконуючи ділення встановити чи ділиться 1265 на 45.

6.8. Скільки дільників має число 720.

6.9. Скільки дільників має число 192.

6.10. НСК двох чисел 420, а одне з чисел дорівнює 60. Знайти друге число, якщо НСД дорівнює 10.

6.11. Одне з чисел 576, НСД цих чисел дорівнює 192, а НСК – 2880. Знайти друге число.

6.12. Відношення двох чисел дорівнює НСД чисел 210 і 77, а їх сума дорівнює НСК чисел 168 і 224. Знайти ці числа.

6.13. Відношення двох чисел дорівнює НСД чисел 913 і 781, а різниця цих чисел дорівнює НСК чисел 175 і 126. Знайти ці числа.

6.14. Скоротити дріб $\frac{15120}{340200}$.

6.15. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 5$, НСК $(a, b) = 105$.

6.16. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 7$, $a \cdot b = 294$.

6.17. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК $(a, b) = 75$, $a \cdot b = 375$.

6.18. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК $(a, b) = 915$, НСД $(a, b) = 3$.

ВІДПОВІДІ

1.3. $\frac{1}{2}$; 13. **1.6.** $\varnothing$. **1.7.** 3. **1.9.** $\frac{1}{13}$.

1.12. $-\frac{1}{11}$. **1.14.** 4. **1.16.** $-\frac{1}{5}$; 2. **1.18.** –1; 6.

2.2. $(-4;3)$. **2.5.** $(2;3)$. **2.7.** $(2;2);(-2;-2)$. **2.10.** -5.

2.13. $(0;3)$. **2.16.** $(3;-2)$. **2.19.** $(1;1,5)$. **2.22.** $(17;3)$.

2.25. $(-1;-1)$.

3.2. 7 см, 8 см. **3.24.** 12дн.,18дн. **3.4.** 4 см, 6 см. **3.8.** 32.

3.11. 7. **3.14.** 48 дет. **3.16.** 12. **3.18.** 2 км/год.

4.2. $(-\infty;-9)\cup(9;+\infty)$. **4.6.** $(-\infty;+\infty)$. **4.8.** $[6;+\infty)$. **4.10.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

4.13. $\left(-\infty;-\frac{5}{19}\right)$. **4.15.** $\left(-\infty;-\frac{2}{23}\right)$.

5.2. $(0,5;+\infty)$. **5.5.** $(1,6;2)$. **5.7.** $(-2;11)$. **5.12.** $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

6.1. $(-\infty;-3)$. **6.4.** $[0;+\infty)$. **6.5.** $(-\infty;-3)$. **6.10.** $(-\infty;3]$.

6.12. $(-\infty;6)$. **6.14.** $(-\infty;-9]\cup[6;+\infty)$. **6.18.** $(-8;5)$.

7.2. 32. **7.4.** 8. **7.6.** 1. **7.8.** 4382.

7.10. 3750. **7.11.** 7. **7.13.** 56. **7.15.** 27.

8.1. 4143_5. **8.4.** 1220210_3. **8.5.** 546022_7. **8.7.** 1302222_5.

8.9. 305301_6. **8.11.** 300331_5. **8.12.** 54233_7. **8.14.** 8968_{15}.

9.1. 2998. **9.4.** 2112_6. **9.7.** $64(10)_{12}$. **9.10.** 11414_7.

9.13. 232031_4. **9.14.** 2010122_3. **9.15.** 13601_7.

10.1. 41211_5. **10.2.** 41245_6. **10.3.** 7. **10.5.** 10610_8.

10.7. 472041_8. **10.9.** 5. **10.10.** 1101045_6.

11.1. 70. **11.3.** 360. **11.5.** 90. **11.8.** 41.

11.11. 1950. **11.14.** 277200. **11.16.** 3861000.

12.8. 30. **12.9.** 14. **12.10.** 70. **12.11.** 960.

12.12. 81 і 108. **12.17.** 15 і 25.