Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Педагогічний інститут
Кафедра математичних і природничих дисциплін початкової освіти

МАТЕМАТИКА

Частина 1
(Методичні рекомендації для студентів спеціальності
"Дошкільне виховання і початкове навчання")

УДК 378.14:371.214.114
ББК 22.143
Р – 64

Романишин Р.Я. Математика. Частина 1. Методичні рекомендації для студентів спеціальності "Дошкільне виховання і початкове навчання") / Івано-Франківськ. – 2013. – 46 с.

Рецензенти:

Кульчицька Н.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри статистики і вищої математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Корчевська О.П. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничих і математичних дисциплін початкового навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

Рекомендовано до друку Вченою Радою
Педагогічного інституту
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника

ЗМІСТ

Змістовий модуль 1. Теорія множин. Елементи математичної логіки

Змістовий модуль 2. Рівняння, нерівності. Рівняння лінії. Функції. Рівняння лінії. Функції

1.1. Поняття про множину і її елементи. Способи задання множин. Відношення між множинами. Універсальна множина. Діаграми Ейлера-Венна

Множина відноситься до неозначуваних понять математики. Воно береться безпосередньо з досвіду і не зводиться до простіших понять.

Множина складається з об’єктів, об’єднаних за деякими характерними ознаками (потік, група, клас тощо). Кожна множина об’єднує певні об’єкти за якоюсь спільною ознакою. Ці об’єкти, які входять до множини, називають її елементами.

Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи – малими буквами латинського алфавіту.

Наприклад: $a \in M$ (означає, що елемент a належить множині M);

$a \notin M$ (означає, що елемент a не належить множині M).

Множини, які складаються з чисел, називаються ***числовими множинами.*** З шкільного курсу математики відомі основні числові множини, які мають загальноприйняті позначення і назви:

$\boldsymbol{N}$ – множина натуральних чисел ($\boldsymbol{N_o}$ – множина цілих невід’ємних чисел);

$\boldsymbol{Z}$ – множина цілих чисел;

$\boldsymbol{Q}$ – множина раціональних чисел;

$\boldsymbol{R}$ – множина дійсних чисел.

Розрізняють *одноелементні*, *двоелементні* множини, множини, що містять багато елементів, безліч їх.

Множина, що складається із обмеженого числа елементів, називається ***скінченною.*** Наприклад: множина студентів групи, множина вершин квадрата. Множина, яка містить необмежену кількість елементів, називається ***нескінченною*** (числові множини $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Z}$...).

Множина, яка не містить жодного елемента, називається ***порожньою*** і позначається символом $\varnothing$.

Множину можна задати двома способами:

1. ***Переліком елементів.*** Наприклад, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Причому порядок елементів у запису множини значення не має. Вважається, що всі елементи множини різні.

Наприклад: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. ***За допомогою характеристичних властивостей***, які мають всі елементи даної множини. Наприклад, цю ж множину A можна записати так: $A = \{x \mid x$ – парні числа першого десятка$\}$, або $A = \{\, x \mid x \in N, x \le 10, x \vdots 2 \,\}$.

Наприклад: $A = \{\, x \mid x \in N, x \le 5 \,\}$.

З елементів будь-якої непорожньої множини можна утворити нові множини, які є частинами початкової множини або, її ***підмножинами*** (розглядаючи множину учнів школи, можна виділяти такі її частини: множина окремих класів, множина відмінників, множина учасників художньої самодіяльності тощо).

Множина B називається ***підмножиною*** множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Наприклад: нехай множина $M = \{a, b, c\}$. Запишемо всі підмножини цієї множини:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Число всіх підмножин множини, яка містить *n* елементів, дорівнює 2^n. Множину всіх підмножин *M* позначають через *P*(*M*) і називають *булеаном* множини *M* (на честь англійського математика Д. Буля). Таким чином, якщо *M* = {*a*, *b*, *c*}, то

P(*M*) = {Ø, {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*a*, *b*}, {*a*, *c*}, {*b*, *c*}, {*a*, *b*, *c* }}.

Якщо множина *A* є підмножиною множини *B*, то говорять, що множина *A* включається в множину *B*, або позначають на письмі $A \subset B$ (*A* включається в *B*, *B* містить *A*).

Підмножина *B* множини *A* називається ***власною підмножиною*** або ***правильною частиною*** множини *A*, якщо *B* є непорожня множина і в *A* знайдеться хоча б один елемент, якого немає в *B*.

Власними підмножинами множини *M* є всі її підмножини, крім Ø і самої множини *M*, які називають ***невласними*** ще одне з важливих понять.

Дві множини *A* і *B* називаються ***рівними***, тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини *A* є елементом множини *B* і навпаки, тобто якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Рівність множин *A* і *B* записують так: *A* = *B*. Тоді означення рівності двох множин можна записати так:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ і } B \subset A,$$

де символ $\Leftrightarrow$ означає “тоді і тільки тоді”.

Якщо множини *A* і *B* не рівні, то пишуть $A \neq B$.

Будь-які дві множини можуть перебувають між собою в одному з таких ***відношень***:

1. ***Виключення*** – обидві множини не порожні і не містять спільних елементів.

Наприклад: *A* = {1, 2, 5, *n*} і *B* = {*a*, *в*, *r* 7, 9}.

2. ***Перерізу*** – обидві множини не порожні, містять хоча б один спільний елемент, а також кожна з множин містить хоча б один елемент, якого немає в іншій з двох розглядуваних.

Наприклад: *A*= {1, 2, 5, *r*, *z*, *c*} *B*={1, 5, *c*, 9, 15}.

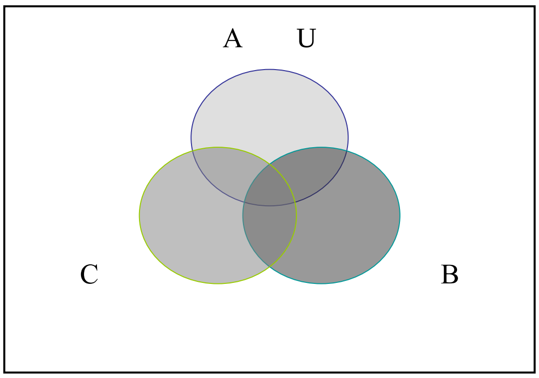
3. ***Включення*** – коли одна з них є власною підмножиною іншої. Наприклад: *A* = {*a*, *d*, *c*, 7, 19} і *B* = {7, 19, *a*}.

4. ***Рівності*** – коли в кожній з них немає такого елемента, якого немає в іншій, тобто, коли кожен елемент однієї множини є елементом іншої. Наприклад: *A* = {*a*, *d*, *c*, 7, 9} і *B* = {7, 9, *d*, *c*, *a*}.

Універсальною множиною називається множина, яка є постачальником елементів для тієї сукупності множин, які в даний час розглядаються. ***Універсальну множину*** позначають U. Це поняття має відносний характер і є стабільним тільки для певної ситуації в певний час. Одна й та сама множина *M* в одних випадках може бути підмножиною однієї універсальної множини, а в інших – універсальною множиною.

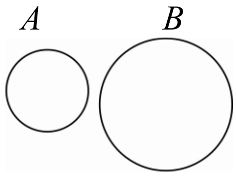
Для унаочнення деяких міркувань про множини користуються геометричними схемами, які називаються ***діаграмами Ейлера-Венна.***

Множину на діаграмі Ейлера-Венна позначатимемо кругом. Універсальну множину U на діаграмі Ейлера-Венна позначатимемо прямокутником. Підмножини універсальної множини U зображуватимемо кругами, розміщеними всередині прямокутника.

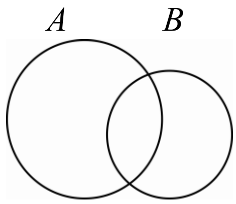


За допомогою кругів Ейлера-Венна представимо випадки відношень двох множин.

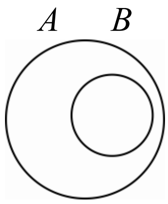
Виключення



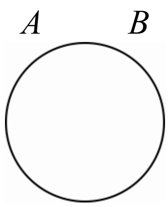
Переріз



Включення



Рівність



1.2. Операції над множинами. Основні властивості операцій над множинами. Поняття кортежу. Декартовий добуток множин

Об'єднанням (додаванням) множин A і B називається множина, яка містить усі ті і тільки ті елементи, які належать хоча б одній із множин A або B. Позначається $A \cup B$.

За означенням: $A \cup B = \{x \mid x \in A$, або $x \in B\}$.

Об'єднанням скінченої кількості множин (більше двох) називається результат послідовного об'єднання: другої множини з першою, третьої з об'єднанням перших двох і т.д.

Перерізом множин A і B називається множина, що містить усі ті і тільки ті елементи, які належать кожній із цих множин одночасно. Позначається: $A \cap B$. Отже, за означенням запишемо:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Поняття "переріз множин" можна поширити на будь-яку кількість множин. Перерізом скінченої кількості множин (більше двох) називається результат послідовного перерізу: другої множини з першою, третьої з перерізом перших двох і т.д.

Різницею множин A і B називається множина, яка складається з елементів множини A, які не належать B. Позначаємо $A \setminus B$. За означенням $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ і $x \notin B\}$. Результат знаходження різниці двох множин називають *відніманням* множин. Різниця універсальної множини U і її будь-якої підмножини називається *доповненням* підмножини A до універсальної множини і позначається $U \setminus A$ або $\overline{A}$.

Якщо $B \subset A$, то різниця множин A і B називається доповненням підмножини B до множини A і позначають $\overline{B_A}$, тобто $A \setminus B = \overline{B_A}$.

Над множинами можна проводити операції об'єднання, перерізу і різниці. Якщо у виразі відсутні дужки, то спочатку виконують операції перерізу, а потім об'єднання і різницю.

Властивості операцій над множинами:

1. $A \cup B = B \cup A$ – переставна (комутативна) властивість операції об'єднання;
2. $A \cap B = B \cap A$ – переставна (комутативна) властивість операції перерізу;
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – сполучна (асоціативна) властивість операції об'єднання;
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – сполучна (асоціативна) властивість операції перерізу;
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – розподільна (дистрибутивна) властивість операції перерізу відносно об єднання;
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – розподільна (дистрибутивна) властивість операції об'єднання відносно перерізу;
7. $A \cup \overline{A} = U$;
8. $A \cup \varnothing = A$;
9. $A \cup A = A$;
10. $A \cap \varnothing = A$;
11. $A \cap A = A$.

Всі властивості і закони можна довести за допомогою кругів Ейлера-Венна.

Два елементи a і b, розміщені в певному порядку, називають ***впорядкованою парою*** (a, b). Елементи упорядкованої пари називаються її ***компонентами,*** або ***координатами.*** Елемент *а називають першою компонентою*, а елемент b – *другою компонентою.*

Пари (a_1, b_1) і (a_2, b_2) називаються рівними тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Упорядковану пару називають ***кортежем довжини* 2** і позначають (a, b).

Існує поняття упорядкованої трійки (a, b, c), упорядкованої *n-ки* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$. Упорядкована n-ка елементів множини A називається кортежем довжини n, складеним з елементів даної множини A.

Приклади кортежів: слово – кортеж, складений із букв; запис числа – кортеж із цифр; речення – кортеж зі слів; ще може бути кортеж машин і т. д.

Якщо компоненти кортежу $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ є елементи множини M. то його називають *кортежем над множиною М*. Кортеж довжиною 0 називають *порожнім кортежем*.

Утворення впорядкованих пар відбувається з допомогою операції, яку називають знаходженням ***декартового добутку***.

Декартів добуток називають прямим добутком.

Декартовим добутком двох множин A і B називається множина всіх впорядкованих пар (a, b), де перша компонента належить множині A, а друга – множині B ($a \in A$ і $b \in B$).

Позначається $A \times B$.

Множину декартового добутку скорочено записують так:

$$A \times B = \{(a, b) | \ a \in A, b \in B\}.$$

Якщо $A = B$, то *декартовий* добуток $A \times A$ позначають через A^2 і називають декартовим або прямим квадратом множини A.

Якщо хоча б одна з множин A або B нескінченна, то $A \times B$ є також нескінченною множиною.

За аналогією з декартовим добутком двох множин можна розглядати декартові добутки довільного скінченого числа m множин.

Декартовим добутком трьох множин A, B і C називається множина всіх кортежів (a, b, c), де $a \in A$, $b \in B$ і $c \in C$. Позначається декартовий добуток трьох множин A, B і C так $A \times B \times C$, тобто:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Якщо $A = B = C$, то декартовий добуток $A \times A \times A$ позначають через A^3 і називають декартовим або прямим кубом множини A.

Число елементів $n(A \times B)$ декартового добутку двох множин A і B дорівнює добутку чисел елементів першої і другої множини, тобто:

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B).$$

Аналогічно, число елементів $n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_m)$ декартового добутку будь-якої скінченої кількості множин $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_m$ дорівнює добутку чисел елементів всіх цих множин, тобто:

$$n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_m) = n(A_1) \times n(A_2) \times n(A_3) \times \ldots \times n(A_m).$$

Декартів добуток не комутативний:

$$A \times B \neq B \times A, \text{ якщо } A \neq B.$$

Декартів добуток має такі властивості:

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
3. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
5. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
6. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Всі ці властивості доводяться на основі означення рівності множин і відповідних операцій над множинами.

При зображенні результатів декартового добутку двох множин доцільно користуватися такою **пам'яткою**;

1. $$\left.\begin{array}{l} A = \{x \mid x \in R, \ldots\} \\ B = \{y \mid y \in R, \ldots\} \end{array}\right\} - \textit{площини, напівплощини.}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} A = \{x \mid x \in Z, \ldots\} \\ B = \{y \mid y \in R, \ldots\} \\ A = \{x \mid x \in N, \ldots\} \\ B = \{y \mid y \in R, \ldots\} \\ A = \{x \mid x \in R, \ldots\} \\ B = \{y \mid y \in Z, \ldots\} \\ A = \{x \mid x \in R, \ldots\} \\ B = \{y \mid y \in N, \ldots\} \end{array}\right\} - \textit{відрізки.}$$

3. $$\left.\begin{array}{l} A = \{x \mid x \in N, \ldots\} \\ B = \{y \mid y \in Z, \ldots\} \\ A = \{x \mid x \in Z, \ldots\} \\ B = \{y \mid y \in N, \ldots\} \\ A = \{x \mid x \in N, \ldots\} \\ B = \{y \mid y \in N, \ldots\} \\ A = \{x \mid x \in Z, \ldots\} \\ B = \{y \mid y \in Z, \ldots\} \end{array}\right\} - \textit{точки.}$$

1.3. Відповідності між елементами двох множин. Відношення на множині. Властивості і типи відношень. Відношення еквівалентності. Відношення порядку.

Слово "бінарний" від латинського слова "bis" означає "двічі". Будемо розглядати дві множини A і B.

Бінарною відповідністю, визначеною у множинах A і B, називається кожна підмножина декартового добутку $A \times B$.

Якщо відповідність позначить через α, то множина A називається *множиною відправлення*, а B – *множиною прибуття відповідності* α. Множини A і B називають базовими множинами відповідності α. Дану відповідність позначають так: $A \xrightarrow{\alpha} B$ ($\alpha \subset A \times B$).

Якщо між елементами a, b існує відповідність α, то позначають це так: $(a, b) \in \alpha$, або $a\ \alpha\ b$, або $\alpha(a) = b$.

Множину всіх перших компонентів пар відповідності α називають ***областю визначення*** відповідності α. Множину всіх других компонентів пар відповідності α називають ***областю значень*** відповідності α.

Якщо дві множини A і B співпадають, тобто $A = B$, то між двома елементами однієї множини A встановлюється ***відношення на множині.***

Відповідність можна задати трьома способами:

1) у вигляді множини пар, які можна зобразити на графіку;
2) за допомогою матриць (таблиць);
3) за допомогою графів.

Приклад. Нехай дані множини A і B, $A = \{2, 3, 4, 7\}$ і $B = \{1, 2, 4, 8, 21\}$, де $a \in A$ і $b \in B$ встановлена відповідність $a \vdots b$.

Розв'язання. Знайдемо результат декартового добутку $A \times B$.

$A \times B = \{\underline{(2, 1)}, \underline{(2, 2)}, (2, 4), (2, 8), (2, 21),$
$\underline{(3, 1)}, (3, 2), (3, 4), (3, 8), (3, 21),$
$\underline{(4, 1)}, \underline{(4, 2)}, \underline{(4, 4)}, (4, 8), (4, 21),$
$\underline{(7, 1)}, (7, 2), (7, 4), (7, 8), (7, 21)\}.$

Отже, $\alpha \subset A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (7, 1)\}$.

Випишемо по вертикалі всі елементи множини A, а по горизонталі – множини B.

B / A	1	2	4	8	21
2	1	1	0	0	0
3	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0
7	1	0	0	0	0

Якщо пара, де $(a, b) \in \alpha$, де $a \in A$ $b \in B$, то на перетині відповідного рядка і стовпця записуємо 1, у протилежному разі записуємо 0. Одиниця і нуль тут визначають істинність висловлень про належність пар даній відповідності. Таку прямокутну таблицю з нулів і одиниць називають ***матрицею даної відповідності.***

Графом називають систему точок (вершин графа) і стрілок (орієнтовних ребер графа), які сполучають деякі з цих точок. Як подання відповідностей за допомогою графів розглянемо попередній приклад. Випишемо елементи множини A, а під ними елементи множини B. Якщо $(a, b) \in \alpha$, то проводимо стрілку від a до b. Виконавши таку побудову для всіх пар з a, дістанемо граф відповідності α.

Граф відповідності будують ще й так. Зображують елементи множин A і B на площині не в лінійній послідовності, а, наприклад, точками на колі, і сполучають стрілками елементи, які перебувають у даній відповідності α. При цьому спільні елементи (якщо такі є) множин A і B виписують один раз. Парі виду (a, a) відповідатиме стрілка від a до a (петля графа).

Серед різних відповідностей розрізняють такі **типи**.

1. ***Порожня відповідність*** ($\alpha = \varnothing$). Матриця цієї відповідності складається тільки з нулів, а граф – з одних точок (жодної стрілки немає).

2. ***Повна відповідність*** ($\alpha = A \times B$), її матриця немає жодного нуля, у графі від кожного елемента множини A йдуть стрілки до кожного елемента множини B.

3. ***Відповідність всюди визначена у множині відправлення.*** Це відповідність $\alpha \subset A \times B$, причому усі елементи множини A є першими компонентами пар відповідності α. Область визначення такої відповідності співпадає з її множиною відправлення.

4. ***Сюр'єктивна відповідність.*** Це відповідність на всю множину прибуття $\alpha \subset A \times B$, причому усі елементи множини B є другими компонентами пар відповідності α.

5. ***Ін'єктивна відповідність.*** Це така відповідність, що елементи з множини прибуття містять не більше одного елемента з множини А.

6. ***Функціональна відповідність* або *функція.*** Це така відповідність, коли кожному елементу з множини відправлення відповідає не більше як один елемент.

7. ***Відображення.*** Це всюди визначена функціональна відповідність.

8. ***Бієктивна відповідність.*** Це сюр'єктивне відображення, яке є ще ін'єктивним. Тобто це одночасно всюди визначена і сюр'єктивна, і ін'єктивна, і функціональна відповідність.

9. ***Оберненою відповідністю*** до відповідності $\alpha \subset A \times B$, називають таку відповідність, яка є підмножиною декартового добутку $B \times A$ і складається з тих і тільки тих пар (b, a), для яких $(a, b) \in \alpha$.

Відповідність, обернену до α, позначають через α^{-1}. Таким чином,

$$(b, a) \in \alpha^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in \alpha .$$

Оберненим відображенням до відображення $A \xrightarrow{f} B$, називають таке відображення f^{-1}, що коли для кожного $x \in A$ і кожного $y \in B$ виконується

$$f(x) = y \text{, то } f^{-1}(y) = x \text{, тобто } f^{-1}(f(x)) = x .$$

Ті відображення, які мають обернені відображення називають *оборотними відображеннями.* Кожне бієктивне відображення є оборотним і навпаки.

Відповідність, в якій множини відправлення і прибуття збігаються називають ***відношеннями***, і при цьому говорять про відношення у множині.

Аналогічно, як і при відповідності, множину перших компонентів пар даного відношення називають областю визначення даного відношення, а множину других компонентів пар – областю його значень.

Бінарним відношенням, визначеним у множині M, називають кожну підмножину декартового добутку $M \times M$, або декартового квадрата M^2.

Відношення можна задати одним з трьох способів:

1. На скінченій множині – ***переліком пар,*** які задає дана відповідність. Цей спосіб задання відповідності називають матрицею, графіком або таблицею.

2. Вказавши на ***характеристичну властивість*** усіх пар, які задає дана відповідність. (Наприклад, “ $x < y$” на множині чисел.)

3. На числових множинах – ***графіком*** на координатній площині.

Коли графіком є не ізольовані точки і не лінія, а частина площини, її заштриховують.

Відношення α, визначене у деякій множині M, називають:

рефлексивним, якщо для кожного $a \in M$ виконується $(a, a) \in \alpha$ (a знаходиться у відношенні α само до себе).

антирефлексивним, якщо для кожного $a \in M$ не виконується твердження $(a, a) \in \alpha$ (a не знаходиться у відношенні α само до себе).

арефлексивним (нерефлексивним), якщо деякі елементи $a \in M$ не знаходиться у відношенні $(a, a) \in \alpha$, а деякі елементи $a \in M$ знаходиться у відношенні $(a, a) \in \alpha$.

симетричним, якщо для будь-яких $a, b \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha \Rightarrow (b, a) \in \alpha$ (якщо a перебуває у відношенні α до b, то b також перебуває у відношенні α до a).

антисиметричним, якщо для кожних $a, b \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha$ і $a \neq b \Rightarrow (b, a) \notin \alpha$ (якщо a перебуває у відношенні α до b і $a \neq b$, то b не перебуває у відношенні α до a).

асиметричним, якщо для кожних $a, b \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha \Rightarrow (b, a) \notin \alpha$ (якщо a перебуває у відношенні α до b, то b не перебуває у відношенні α до a).

транзитивним, якщо для будь-яких $a, b, c \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha$ і $(b, c) \in \alpha \Rightarrow (a, c) \in \alpha$ (якщо a знаходиться у відношенні α до b, а b – у відношенні α до с, то a перебуває у відношенні α до c).

антитранзитивним, якщо для будь-яких $a, b, c \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha$ і $(b, c) \in \alpha \Rightarrow (a, c) \notin \alpha$ (якщо a знаходиться у відношенні α до b, а b – у відношенні α до c, то a не перебуває у відношенні α до c).

транзитивним, якщо для будь-яких $a, b, c \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha$ і $(b, c) \in \alpha \Rightarrow (a, c) \in \alpha$ (якщо a знаходиться у відношенні α до b, а b – у відношенні α до с, то a перебуває у відношенні α до c).

атранзитивним, якщо відношення не є ні транзитивним ні антитранзитивним.

зв'язним, якщо для будь-яких $a, b \in M$ виконується властивість $a \neq b \Rightarrow (a, b) \in \alpha$, або $(b, a) \in \alpha$ (якщо $a \neq b$, то a перебуває у відношенні α до b, або навпаки).

Отже, різні за змістом відношення можуть мати спільні властивості. Це дає змогу класифікувати певні відношення за тими або іншими властивостями.

Розрізняти найважливіші групи відношень: відношення еквівалентності, відношення порядку, функціональне відношення (функція).

Відношення α, визначене у множині M, називають *відношенням* ***еквівалентності*** або ***еквівалентністю*** в множині M, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Для того щоб відношення α було відношенням еквівалентності, повинні визначеним: елементами декартового добутку $A \times B$ є такі пари елементів, у яких перший компонент обов'язково належить множині A, а другий – B. Тобто, в будь-якій такій парі елемент множини A передує елементу множини B.

Якщо між елементами множини M встановлено відношення "передує", тобто елементи множини розміщено так, що для будь-якої пари елементів x і y можна вказати, який із них передує іншому, то на множині установлене ***відношення строгого порядку.***

Замість "x передує" коротко пишуть $x < y$ і тоді "y слідує за x",

$y > x$, тобто відношення строгого порядку антисиметричне. Оскільки в множині елементи різні (не повторюються), то цілком зрозуміло, що ніякий елемент не передує сам собі. Отже, це відношення антирефлексивне. Якщо ж один елемент передує другому, а другий – третьому, то тим більше перший з цих елементів передує третьому, тобто відношення транзитивне.

Таким чином, ***відношення строгого порядку*** на множині A визначається трьома умовами:

1) антирефлексивність: для будь-якого $x \in A$ не має місця нерівність виду $x < x$;

2) антисиметричність: для будь-яких $x \in A$ і $y \in A$, таких, що $x < y$ і $x \neq y$, не має місця $y < x$;

3) транзитивність: для будь-яких $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$ таких, що $x < y$, а $y < z$, має місце $x < z$.

Відношення α, визначене у множині M, називають відношенням ***строгого порядку,*** якщо воно транзитивне і асиметричне, і відношенням ***нестрогого порядку,*** якщо воно транзитивне і антисиметричне.

З означення випливає, що відношення строгого порядку – антирефлексивне, а нестрогого – рефлексивне.

Відношення подільності у множині N натуральних чисел є також відношенням нестрогого порядку.

1.4. Поняття висловлення. Логічні операції над висловленнями. Таблиці істинності. Тотожності. Рівносильні формули, їх доведення. Логічне слідування

Поняття – форма наукового пізнання. Поняття відображає істотні ознаки у виучуваних об'єктах.

Існують означувані і не означувані математичні поняття.

В математиці до початкових, тобто неозначуваних понять належать поняття "точка", "пряма", "площина", "множина" та інші. Решта понять означаються.

Люди, висловлюючись, передають свої судження і фіксують їх за допомогою речень. Висловлення – основний об'єкт вивчення математичної логіки. ***Висловленням*** називається твердження, про яке можна сказати істинне (правильне) воно чи хибне (неправильне).

Висловлення поділяються на **елементарні** і **складені**.

Елементарними (простими) називають короткі неподільні висловлення.

Прості висловлення позначають великими буквами латинського алфавіту.

З простих висловлень за допомогою сполучників "і", "або", "якщо..., то..." можна утворити ***складені*** висловлення.

При утворенні складених висловлень найчастіше вживають сполучники "і", "або", "якщо ..., то ...", "тоді і тільки тоді, якщо ..." і частку "не". Розглянемо ***логічні операції***, які дають змогу з одних висловлень утворювати інші, більш складні висловлення. Оскільки нас цікавить тільки значення істинності висловлень, то означення логічних операцій дає метод встановлення значення істинності складеного висловлення за значенням істинності його складових частин (компонентів).

Заперечення. Цю операцію позначають знаком "$\overline{}$". У звичайній мові цій операції відповідає частка "не'. Запис $\overline{A}$ читається: "не A", "неправильно, що A".

Запереченням висловлення A називається висловлення "не A", яке істинне тоді і тільки тоді, коли A хибне. Таблиця істинності заперечення висловлення має вигляд:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Диз'юнкція. Ця операція позначається знаком $\vee$. У звичайній і мові їй відповідає сполучник "або". Запис $A \vee B$ читається як "A диз'юнкція B", або "A або В". ***Диз'юнкцією*** двох висловлень A і B називається таке висловлювання ("A або B"), яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення хибні. Таблиця істинності диз'юнкції, двох висловлень має такий вигляд:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операцію диз'юнкції іноді називають ***логічним додаванням.***

Множиною істинності диз'юнкції "$\vee$" висловлень є об'єднання "$\cup$" множин істинності даних висловлень. Знак диз'юнкції "$\vee$" схожий із знаком об'єднання множин "$\cup$".

Кон'юнкція. Цю операцію позначають знаком $\wedge$. У звичайній мові їй відповідає сполучник "і". Запис $A \wedge B$ читається як "А кон'юнкція В" або як "A і B". ***Кон'юнкцією*** двох висловлень A і B називається висловлення $A \wedge B$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення A і B істинні.

Таблиця істинності кон'юнкції двох висловлень має вигляд:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Операцію кон'юнкції іноді називають ***логічним добутком***.

Множиною істинності кон'юнкції "$\wedge$" висловлень є переріз множин істинності даних висловлень "$\cap$". Знак кон'юнкції "$\wedge$" схожий із знаком перерізу множин "$\cap$".

Імплікація. Операція імплікації позначається знаком $\Rightarrow$. Запис $A \Rightarrow B$ читається: "A імплікує В". Часто для читання цієї операції застосовують словосполучення: "Якщо A, то B", "з A слідує B". ***Імплікацією*** двох висловлень A і B називають висловлення $A \Rightarrow B$ ("Якщо A, то B"), яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли A істинне, а B – хибне. Таблиця істинності імплікації двох висловлень має вигляд:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Еквіеаленція. Цю операцію позначають символом $\Leftrightarrow$. Запис А$\Leftrightarrow$ В читається: "А еквівалентне В". У звичайній мові цій операції відповідають словосполучення "A тоді і тільки тоді, коли B".

Еквіваленцією двох висловлень A і B називається таке висловлення $A \Leftrightarrow B$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти A і B істинні, або одночасно хибні.

Таблиця істинності еквіваленції двох висловлень має вигляд:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0

1	0	0
1	1	1

Аналогічно тому, як з чисел і букв (під якими також розуміють числа) за допомогою арифметичних операцій додавання, віднімання, множення і ділення складають певні вирази, перетворюють їх, спрощують, знаходять їхнє числове значення, у математичній логіці з одних висловлень за допомогою скінченого числа застосувань логічних операцій утворюють нові, складніші висловлення.

Кожне складене висловлення зображується певним логічним виразом тобто – ***формулою.*** При цьому треба вказати правила однозначного порядку читання таких формул, тобто ***правила однозначного порядку виконання*** *відповідних логічних операцій,* які застосовано в даній формулі:

1. Порядок виконання логічних операцій визначають дужками, які називають ***технічними символами***.

2. Якщо у формулі відсутні дужки, то *порядок виконання логічних операцій такий*: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

3. Вираз, що міститься під знаком операції заперечення, в дужки не беруть, але вважають його таким, який знаходиться в дужках, і обчислення його виконують окремо.

Кожне з елементарних висловлень є **формулою**. Кожній формулі алгебри висловлень можна поставити у відповідність її таблицю істинності.

Дві формули називають ***рівносильними,*** якщо вони набувають однакових значень істинності при однакових значеннях компонентів.

Якщо формули F і H рівносильні, то пишуть $F = H$.

Випишемо ряд рівносильностей, справедливість яких можна довести за допомогою таблиць істинності, або які просто випливають із відповідних означень. Ці рівносильності характеризують основні властивості операцій $\overline{}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Інші рівносильності можна дістати з них методом алгебраїчних перетворень.

1. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення.
2. $A \vee B = B \vee A$ – переставна (комутативна) властивість.
3. $A \wedge B = B \wedge A$ – переставна (комутативна) властивість.
4. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ – сполучна (асоціативна) властивість.
5. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ – сполучна (асоціативна) властивість.
6. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
7. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Дані властивості можна довести з допомогою таблиць істинності.

Сукупність усіх висловлень разом з визначеними на ній логічними операціями $\overline{}$, $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ і основними властивостями цих операцій називають ***алгеброю висловлень.***

Формули, які набувають тільки значення 1 (істина) при будь яких значеннях істинності A, B, C називаються ***тотожно істинними*** або ***тавтологіями.*** Вони мають особливе значення для логіки. Кожна така формула є логічним законом, яким користуються при утворенні правильних, логічно грамотних умовиводів.

Розглянемо тотожно істинні формули, які визначають логічні закони:

$A \vee A$ – *закон виключеного третього*: кожне висловлення або істинне, або хибне і третього бути не може.

$A \Rightarrow A$ – *закон тотожності*: кожне висловлення є логічним висновком із самого себе.

$\overline{A \wedge \overline{A}}$ – *закон протиріччя*: кожне висловлення не може бути одночасно і істинним, і хибним.

$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ – *правило висновку*.

$\overline{B} \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \overline{A}$ – *правило заперечення умови*.

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ – *закон силогізму*: якщо з A виходить B, з B виходить C, то з A виходить C.

Формула називається ***тотожно хибною*** або ***суперечністю,*** якщо вона при всіх можливих наборах значень компонентів набуває значення 0 (хибність).

Формула B називається *логічним наслідком* з формули A (або B логічно виходить з формули A), якщо B набуває значення 1 на всіх тих наборах значень логічних змінних, на яких формула A набуває значення 1.

1.5. Поняття одномісного, двомісного і n-місного предикату. Квантори. Використання кванторів

Розглянемо речення: “x – парне число” і позначимо його $h\ (x)$. Це речення не буде висловленням, бо про нього не можна сказати істинне воно чи хибне. Якщо замість значення x підставляти конкретні натуральні числа, то одержимо висловлення.

Наприклад: “4 – парне число” – істинне висловлення (1);

“7 – парне число” – хибне висловлення (0).

Речення, які містять змінні аргументи і які після підстановки замість змінних аргументів імен конкретних об’єктів з певної множини M перетворюються у висловлення, називають ***висловлювальними формами***. У розглядуваному випадку $h\ (x)$ – висловлювальна форма від однієї змінної, або одномісна висловлювальна форма.

Висловлювальна форма $h\ (x)$ визначає одномісне відображення, визначене на множині N натуральних чисел, з множиною значень у двоелементній множині $\{0; 1\}$, де 0 і 1 є, відповідно, позначеннями хибності та істини.

Такі відображення визначають певні властивості об’єктів, їх називають одномісними предикатами.

Одномісним предикатом називається відображення p, визначене на деякій предметній множині M, яке набуває значення лише у двоелементній множині $\{0; 1\}$, тобто відображення $M \mapsto \{0; 1\}$.

Вираз $p\ (x)$ називають ***висловлювальною формою предиката p***. Для зручносі предикати позначають разом зі змінними аргументами, тобто записують їх так, як і відповідні висловлювальні форми. Наприклад, говоритимемо “предикат $h\ (x)$”.

Розглядаючи, предикат $h\ (x)$ “x – парне число” на множині N, бачимо, що для одних натуральних чисел він набуває значення 1, а для інших – 0. Отже, множина N поділяється на дві підмножини, на одній з яких предикат $h\ (x)$ набуває лише значення 1, а на іншій – лише значення 0. Першу з цих підмножин називають *характеристичною множиною предиката* $h\ (x)$ або його *областю істиності.*

Аналогічно, розглядаючи висловлювальні форми від двох предметних змінних, приходимо до поняття двомісних предикатів, які позначатимо схожн до позначення одномісних предикатів.

Двомісним предикатом називається відображення f, іизначене на деякій предметній множині М, яке набуває значення лише в двоелементній множині $\{0; 1\}$, тобто відображення виду

$$M^2 \overset{f}{\mapsto} \{0;1\},\ M^2 = M \times M\ .$$

Двомісні предикати визначають відношення між об’єктами.

Важливими прикладами одномісних і двомісних предикатів є рівняння (та їх системи) і нерівності (та їх системи).

Розглянемо операції, які перетворюють предикати у висловлення.

Однією з таких операцій є операція підстановки замість предметного змінного x імен конкретних елементів з області визначення.

Наприклад, якщо замість змінної x предиката $p\ (x)$ "x – просте число", підставляти натуральні числа 1, 2, 3, 4, ..., то одержимо висловлення, істинні чи хибні.

В результаті підстановки матимемо висловлення, які стосуються окремих елементів області визначення і не характеризують властивостей цієї множини в цілому, тобто не можна одержати певних загальних висловлень про область визначення. Такі висловлення можна дістати за допомогою нових операцій, які називають *кванторами.*

У математиці велику роль відіграють слова "кожний", або "для всіх", та "існує", відображаючи категорії цілого і частини в навколишній дійсності.

Операції, про які йдеться, відображають зміст слів "для всіх", та "існує" і називаються *операціями квантифікації* або *операціями зв’язування квантором змінних.*

У математиці кванторів є два: квантор існування та квантор загальності. Квантор існування позначають символом $\exists$. У звичайній мові йому відповідає слово "існує".

Так, символічний вираз $(\exists\, x)\ p\ (x)$ означає "Існує таке x, що $p\ (x)$" "Існує таке x, що має властивість p". Оскільки через $p\ (x)$ позначено предикат "x – просте число", то $(\exists\, x)\ p\ (x)$ читається як "Існує просте число". Це речення є істинним висловленням.

Квантор загальності позначають символом $\forall$. У звичайній мові йому відповідає вираз "для кожного" або "для всіх», "для всякого".

Так, застосувавши до того самого предиката $p\ (x)$ квантор загальності, дістанемо символічний вираз $(\forall\, x)\ p\ (x)$, який читається так: "Для кожного x виконується $p\ (x)$", або "для кожного x виконується властивість p".

Операцію взяття квантора називають *операцією зв’язування квантором предметної змінної.* Змінна, яка міститься під знаком квантора, називається зв’язаною змінною, а змінна, яка не міститься під знаком квантора – вільною змінною.

Застосовуючи один раз квантор $\exists$ або $\forall$ до одномісних предикатів, матимемо висловлення, які виражають більш загальні твердження про множини в цілому, а не про окремі її елементи.

Квантором існування називається така операція $\exists$, яка кожному одномісному предикату $p\ (x)$, визначеному на множині M, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення $(\exists\, x)\ p\ (x)$ (читається: "Існує таке x, що виконується $p\ (x)$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одне $a \in M$ таке, що $p\ (a) = 1$.

Квантором загальності називається така операція $\forall$, яка кожному одномісному предикату $p\ (x)$, визначеному на множині M, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення $(\forall\, x)\ p\ (x)$ (читається: "Для кожного x виконується $p\ (x)$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли для кожного $a \in M$ виконується $p\ (a) = 1$.

ВПРАВИ

1. Множини. Операції над множинами.

Приклад 1.А. Множина задана переліком елементів. Записати за допомогою характеристичної властивості $A = \{\, 1, 2, 3, 4, 5\,\}$.

Розв'язання. $A = \{ x \mid x \in N,\ x \le 5 \}$.

Приклад 1.Б. Множина задана характеристичною властивістю. Перерахувати елементи множини $A = \{ x \mid x \in N_0,\ x \le 8 \}$.

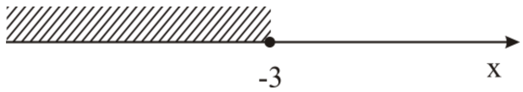
Розв'язання. $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$.

Приклад 1.В. Зобразити на числовій прямій множину $A = \{ x \mid x \in R,\ x > 5 \}$.

Розв'язання.

Приклад 1.Г. Зобразити на числовій прямій множину $A = \{ x \mid x \in R,\ x \le -3 \}$.

Розв'язання.



Приклад 1.Д. Знайти об'єднання, переріз і різницю множин $A = \{ x \mid x \in R,\ x \ge 2 \}$ і $B = \{ x \mid x \in R,\ x \le 5 \}$.

Розв'язання. Зобразимо обидві множини на спільній числовій прямій.

$A \bigcup B = \left\{ x \mid x \in R \right\}$,

$A \bigcap B = \left\{ x \mid x \in R, 2 \le x \le 5 \right\}$,

$A \setminus B = \left\{ x \mid x \in R, x \ge 5 \right\}$,

$B \setminus A = \left\{ x \mid x \in R, x \le 2 \right\}$.

Приклад 1.Е. Знайти об'єднання, переріз і різницю множин $A = \{ x \mid x \in R,\ x \le 1 \}$ і $B = \{ x \mid x \in R,\ x \ge 4 \}$.

Розв'язання. Зобразимо обидві множини на спільній числовій прямій.

$A \bigcup B = \left\{ x \mid x \in R,\ \ x \le 1 \ \bigcup \ x \ge 4 \right\}$,

$A \bigcap B = \varnothing$,

$A \setminus B = \{ x \mid x \in R, x \le 1 \}$,

$B \setminus A = \{ x \mid x \in R, x \ge 4 \}$.

Множини задані переліком елементів. Записати за допомогою характеристичної властивості:

1.1. $A = \{ -1, 0, 1, 2, 3 \}$.

1.2. $B = \{ 3, 4, 5, \ldots\ldots \}$.

1.3. $C = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \}$.

1.4. $A = \{ 2, 4, 6 \ldots\ldots \}$.

1.5. $D = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2 \}$.

1.6. $P = \{ -4, -3, -2, -1 \ldots \}$.

Множини задані характеристичною властивістю. Перерахувати елементи множини:

1.7. $A = \{ x \mid x \in N_0, x < 7 \}$.

1.8. $C = \{ x \mid x \in N, x \le 10 \}$.

1.9. $A = \{ x \mid x \in N, 4 \le x < 18 \}$.

1.10. $F = \{ x \mid x \in N, x \le 37, x - \textit{просте число} \}$.

1.11. $A = \{ x \mid x \in N, x < 1 \}$.

1.12. $D = \{ x \mid x \in Z, -2 < x \le 8 \}$.

1.13. $A = \{ x \mid x \in N, x = 2k + 1 \}$.

1.14. $W = \{ x \mid x \in N, x = 3k + 2 \}$.

1.15. $A = \{ x \mid x \in N, x = 3^{n-1} \}$.

Зобразити на числовій прямій множини:

1.16. $A = \left\{ x \mid x \in Z, -6 \le x < 2 \right\}$.

1.17. $A = \left\{ x \mid x \in N, x < 12 \right\}$.

1.18. $C = \left\{ x \mid x \in R, -3 \le x < 5 \right\}$.

1.19. $F = \left\{ x \mid x \in N_0, x \le 10 \right\}$.

1.20. $F = \left\{ x \mid x \in N_0, x \ge -3 \right\}$.

1.21. $M = \left\{ x \mid x \in R, x \le -2 \right\}$.

1.22. $D = \left\{ x \mid x \in R, 2 < x \le 10 \right\}$.

1.23. $B = \left\{ x \mid x \in Z, -4 < x \le 8 \right\}$.

Знайти об'єднання, переріз і різницю множин:

1. 24. $A = \left\{ x \mid x \in R, -7 \le x < 2 \right\}$,
$B = \left\{ x \mid x \in R, -3 < x \le 5 \right\}$.

1. 25. $A = \left\{ x \mid x \in R, -5 < x \le 4 \right\}$,
$B = \left\{ x \mid x \in R, -8 \le x < 6 \right\}$.

1. 26. $A = \left\{ x \mid x \in R, 1 < x < 6 \right\}$,
$B = \left\{ x \mid x \in R, -3 < x < 7 \right\}$.

1. 27. $A = \left\{ x \mid x \in R, -5 < x \le 4{,}4 \right\}$,
$B = \left\{ x \mid x \in R, -8{,}1 \le x < 6 \right\}$.

1. 28. $A = \left\{ x \mid x \in R, -1 \le x < 2{,}4 \right\}$,
$B = \left\{ x \mid x \in R, -4 < x \le 5 \right\}$.

1. 29. $A = \left\{ x \mid x \in R, 3 < x \le 5 \right\}$,
$B = \left\{ x \mid x \in R, -1 < x \le 4 \right\}$.

1. 30. $A = \left\{ x \mid x \in R, x > -4{,}5 \right\}$,
$B = \left\{ x \mid x \in R, x < 0{,}5 \right\}$.

1. 31. Дано множини: $A = \left\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \right\}$; $B = \left\{ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \right\}$; $C = \left\{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \right\}$; $Д = \left\{ 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$. Знайти елементи, що входять до множин $(A \cap B) \cup (C \cap Д)$; $(A \cup B) \cap (C \cup Д)$.

1. 32. Знайти об'єднання, переріз і різницю множин:

$P = \{ x \mid x \in N,\, x < 16 \}$,

$R = \{ x \mid x \in N,\, x < 16,\, x - \textit{парне} \}$.

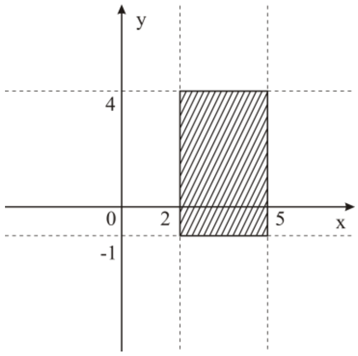
1. 33. Дано множини: $A = \{ x \mid x \in R, -3 < x < 16 \}$, $B = \{ x \mid x \in R, -2 \le x < 8 \}$, $C = \{ x \mid x \in R, -6 < x \le 2 \}$. Знайти і зобразити на координатній прямій такі множини: $(A \setminus B) \cap C$.

1. 34. Дано множини: $A = \{x \mid x \in R, -3 < x < 16\}$, $B = \{x \mid x \in R, -2 \le x < 8\}$, $C = \{x \mid x \in R, -6 < x \le 2 \}$. Знайти і зобразити на координатній прямій такі множини: $A \cap B \cap C$.

2. Декартів добуток.

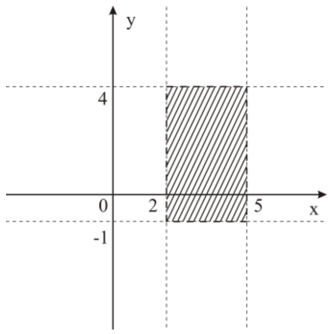
Приклад 2.А. Знайти декартів добуток множин A і B: $A = \{ x \mid x \in R,\ 2 \le x \le 5 \}$, $B = \{ y \mid y \in R,\ -1 \le y \le 4 \}$.

Розв'язання.



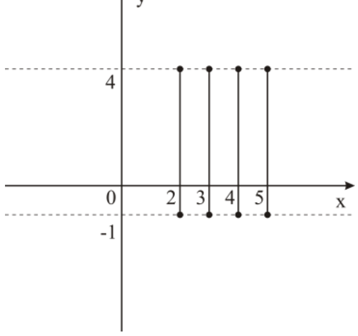
Приклад 2.Б. Знайти декартів добуток множин A і B: $A = \{ x \mid x \in R,\ 2 < x < 5 \}$, $B = \{ y \mid y \in R,\ -1 < y < 4 \}$.

Розв'язання.



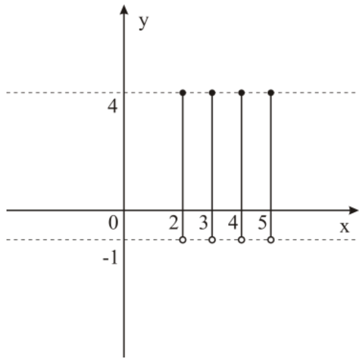
Приклад 2.В. Знайти декартів добуток множин A і B: $A = \{ x \mid x \in N,\ 2 \le x \le 5 \}$, $B = \{ y \mid y \in R,\ -1 \le y \le 4 \}$.

Розв'язання.



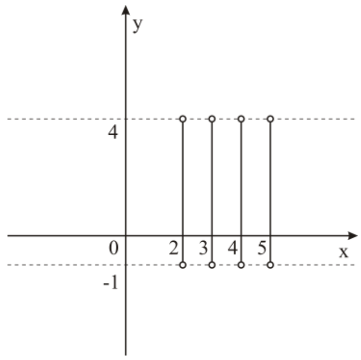
Приклад 2.Д. Знайти декартів добуток множин A і B: $A=\{\, x \mid x \in N,\ \ 2 \le x \le 5 \,\}$, $B=\{\, y \mid y \in R,\ -1 < y \le 4 \,\}$.

Розв'язання.



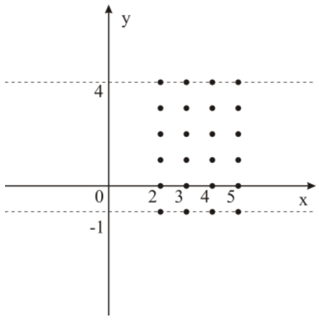
Приклад 2.Е. Знайти декартів добуток множин A і B: $A=\{\, x \mid x \in N,\ \ 2 \le x \le 5 \,\}$, $B=\{\, y \mid y \in R,\ -1 < y < 4 \,\}$.

Розв'язання.



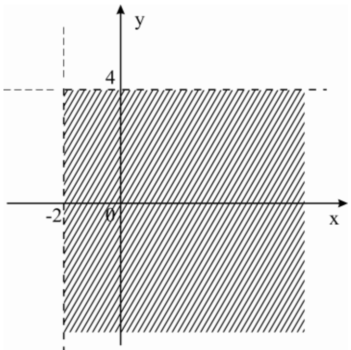
Приклад 2.Ж. Знайти декартів добуток множин A і B: $A=\{\, x \mid x \in N,\ \ 2 \le x \le 5 \,\}$, $B=\{\, y \mid y \in Z,\ -1 \le y \le 4 \,\}$.

Розв'язання.



Приклад 2.З. Знайти декартів добуток множин A і B: $A=\{\, x \mid x \in R,\ \ x > -2 \,\}$, $B=\{\, y \mid y \in R,\ \ y < 4 \,\}$.

Розв'язання.



Знайти декартів добуток множин A і B:

2.1. $A = \{3, 4, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

2.2. $A = \{0, 1\}$, $B = \{s, l, k, i , \Delta\}$.

2.3. Записати всі двохзначні числа, цифри десятків яких належать множині $A = \{2, 3, 5\}$, а цифри одиниць множині $B = \{1, 2, 4\}$.

2.4. Знайти декартові добутки множин і зобразити їхні елементи на координатній площині:

$$P = \left\{ x \mid x \in R, x > 4\frac{1}{2} \right\},$$
$$Q = \left\{ y \mid y \in R, y < 3\frac{2}{3} \right\}.$$

2.5.
$$P = \{ x \mid x \in R, -2 < x < 3 \},$$
$$Q = \{ y \mid y \in R, y \geq 5 \}.$$

2.6.
$$P = \{ x \mid x \in N, 1 < x \leq 5 \},$$
$$Q = \{ y \mid y \in Z, -2 < y < 3 \}.$$

2.7.
$$P = \{ x \mid x \in Z, -3 < x < 3 \},$$
$$Q = \{ y \mid y \in R, -1 \leq y \leq 2 \}.$$

2.8.
$$P = \{ x \mid x \in R, -1 \leq x \leq 3 \},$$
$$Q = \{ y \mid y \in Z, -2 \leq y \leq 2 \}.$$

2.9.
$$P = \{ x \mid x \in N, 3 \leq x \leq 7 \},$$
$$Q = \{ y \mid y \in N, 4 < y < 9 \}.$$

2.10.
$$A = \{ x \mid x \in R, -3 \leq x \leq 5 \},$$
$$B = \{ y \mid y \in R, 2 \leq y \leq 4 \}.$$

2.11.
$$P = \{ x \mid x \in R, x > 4 \},$$
$$Q = \{ y \mid y \in R, y < 3 \}.$$

2.12.
$$P = \{ x \mid x \in Z, -1 < x < 4 \},$$
$$Q = \{ y \mid y \in R, y \geq 5 \}.$$

2.13.
$$P = \{ x \mid x \in N, 2 < x \leq 5 \},$$
$$Q = \{ y \mid y \in Z, -3 < y < 4 \}.$$

2.14.
$$P = \{ x \mid x \in R, x \leq 5 \},$$
$$Q = \{ y \mid y \in R, y < -2 \}.$$

2.15.

$P = \{ x \mid x \in Z, -3 < x < 3 \}$,

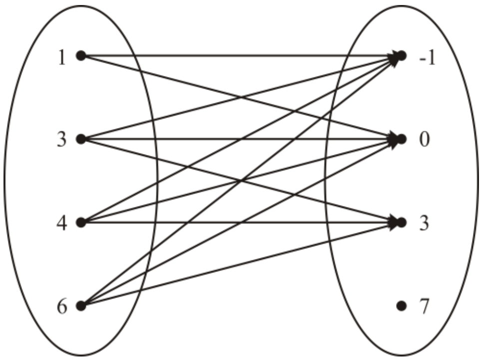
$Q = \{ y \mid y \in R, -1 \le y \le 2 \}$.

2.16. Зобразіть в прямокутній системі координат множину X^2, якщо $X = \{ x \mid x \in R, -2 \le x < 7 \}$.

3. Бінарна відповідність. Бінарне відношення.

Приклад 3.А. Дано множини A = {1, 3, 4, 6} і B = {–1, 0, 3, 7} встановлена відповідність $x \ge y$, де $x \in A$ і $y \in B$. Побудувати граф, графік і матрицю цієї відповідності.

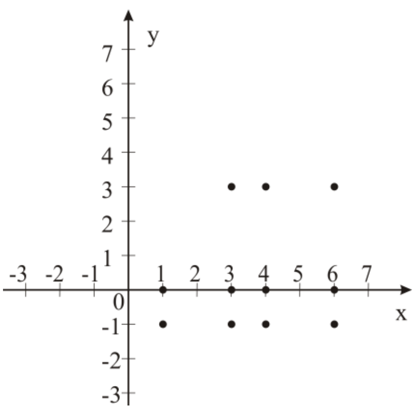
Розв'язання. Зобразимо обидві множини і їх елементи у вигляді точок. Сполучимо стрілками (за умовою задачі).



Складемо результот декартового добутку множин A і B.

$A \times B$={ (1, –1), (1, 0), (1, 3), (1, 7),
(3, –1), (3, 0), (3, 3), (3, 7),
(4, –1), (4, 0), (4, 3), (4, 7),
(6, –1), (6, 0), (6, 3), (6, 7)}.

Отже, $\alpha \subset A \times B$ = { (1, –1), (1, 0), (3, –1), (3, 0), (3, 3), (4, –1), (4, 0), (4, 3), (6, –1), (6, 0), (6, 3) }.



Побудуємо матрицю даної відповідностію.

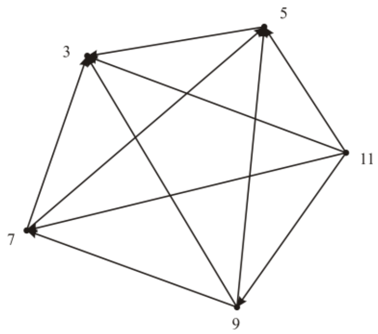
A \ B	–1	0	3	7
1	1	1	0	0
3	1	1	1	0

4	1	1	1	0
6	1	1	1	0

Приклад 3.Б.

На множині $\grave{A} = \{3, 5, 11, 9, 7\}$ задане відношення $x > y$. Побудувати граф і графік цього відношення.

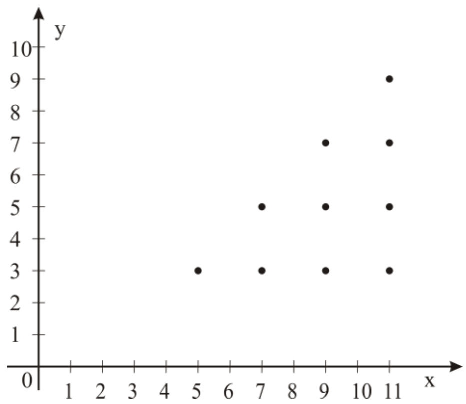
Розв'язання. Зобразимо елементи множини у вигляді точок і сполучимо їх стрілками.



Складемо результат декартового добутку (декартового квадрата) і зобразимо потрібні точки на графіку.

$A^2 =$ { (3, 3), (3, 5), (3, 11), (3, 9), (3, 7),
$\underline{(5, 3)}$, (5, 5), (5, 11), (5, 9), (5, 7),
$\underline{(11, 3)}$, $\underline{(11, 5)}$, (11, 11), $\underline{(11, 9)}$, $\underline{(11, 7)}$,
$\underline{(9, 3)}$, $\underline{(9, 5)}$, (9, 11), (9, 9), $\underline{(9, 7)}$,
$\underline{(7, 3)}$, $\underline{(7, 5)}$, (7, 11), (7, 9), (7, 7)}.

Отже, α = { $\underline{(5, 3)}$, $\underline{(11, 3)}$, $\underline{(11, 5)}$, $\underline{(11, 9)}$, $\underline{(11, 7)}$,
$\underline{(9, 3)}$, $\underline{(9, 5)}$, $\underline{(9, 7)}$, $\underline{(7, 3)}$, $\underline{(7, 5)}$, }.



3.1. Дано множини X = {–1, 0, 1, 3, 5} і $У$ = {1, 2, 3, 5, 6, 8} встановлена відповідність $x \leq y$, де $x \in X$ і $y \in У$. Побудувати граф, графік і матрицю цієї відповідності.

3.2. Дано множини X = {2, 4, 5, 6, 7} і $У$ = {0, 1, 2, 3, 4} встановлена відповідність $x = y + 3$, де $x \in X$ і $y \in У$. Побудувати граф, графік і матрицю цієї відповідності.

3.3. Дано множини A = {1, 2, 3, 4} і B = {–1, 0, 1, 2} встановлена відповідність $x = y + 3$, де $x \in A$ і $y \in B$. Побудувати граф, графік і матрицю цієї відповідності.

3.4. Дано множини C = {0, 2, 4, 5, 6, 7} і P = {–8, –7, –6, –5, –4, 0} встановлена відповідність $x = -y$, де $x \in C$ і $y \in P$. Побудувати граф, графік і матрицю цієї відповідності.

3.5. Дано множини X = {4, 5, 6, 8, 12, 14} і $У$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} встановлена відповідність $y = x : 2$, де $x \in X$ і $y \in У$. Побудувати граф, графік і матрицю цієї відповідності.

3.6. Дано множини M = {–9, –7, –5, –1, 0} і H = {–1, 1, 5, 6, 7, 9} встановлена відповідність $y = -x$, де $x \in M$ і $y \in H$. Побудувати граф, графік і матрицю цієї відповідності.

3.7. На множні A = {–3, –1, 1, 2, 3, 4} задане відношення $x = y + 2$. Побудувати граф і графік цього відношення.

3.8. На множні A = {2, 4, 5, 6, 8, 9} задане відношення $y = x + 1$. Побудувати граф і графік цього відношення.

3.9. На множні X = {–3, –2, –1, 0, 1, 2} задане відношення $x \geq y$. Побудувати граф і графік цього відношення.

3.10. На множні X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} задане відношення $y = x \times 2$. Побудувати граф і графік цього відношення.

3.11. На множні X = {–5, –3, –1, 5, 6 ,7} задане відношення $x \geq y$. Побудувати граф і графік цього відношення.

3.12. На множні X = {–2, –1, 0, 1, 5} задане відношення $x \leq y$. Побудувати граф і графік цього відношення.

4. Логіка висловлень.

Приклад 4.А. Скласти таблицю істинності $A \vee B \Rightarrow \overline{C}$.

Розв'язання.

A	B	C		$A \vee$	$A \vee B \Rightarrow$
1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Приклад 4.Б. Довести, що вираз тотожно істинний $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$.

Розв'язання.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \overline{A} \vee$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Скласти таблицю істинності:

4.1. $A \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow C) \vee \overline{A}$.

4.2. $\left(A \wedge \overline{A}\right) \Rightarrow \left(C \vee B\right)$.

4.3. $\overline{(\overline{B} \vee \overline{C})} \wedge \left(A \vee C\right)$.

4.4. $(B \Rightarrow A) \vee \left(\overline{A} \Leftrightarrow \overline{C}\right)$.

4.5. $\overline{A \wedge B} \Rightarrow \overline{C} \vee A$.

4.6. $\left(A \vee \overline{B}\right) \Rightarrow C \wedge \left(\overline{A} \Leftrightarrow B\right)$.

4.7. $A \Rightarrow \left(A \vee \overline{C}\right)$.

4.8. $\overline{A \wedge \left(\overline{A} \wedge B\right)}$.

4.9. $A \Rightarrow \left(\overline{A} \wedge B\right)$.

4.10. $\overline{A \vee B} \Rightarrow C$.

Довести, що вираз тотожно істинний:

4.11. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

4.12. $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.

4.13. $\overline{A} \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

4.14. $\left(\left(A \Rightarrow B\right) \Rightarrow A\right) \Leftrightarrow A$.

4.15. $\left(A \Leftrightarrow B\right) \Leftrightarrow \left(B \Leftrightarrow A\right)$.

4.16. $\left(A \Rightarrow B\right) \vee \left(B \Rightarrow A\right)$.

4.17. $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$.

4.18. $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$.

4.19. $\left(A \Rightarrow B\right) \Leftrightarrow \left(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right)$.

4.20. $\left(A \Rightarrow B\right) \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$.

2.1. Поняття числового виразу, числової рівності та нерівності. Властивості істинних числових рівностей та нерівностей

Розглянемо задачу з курсу математики початкової школи

Наприклад**:** (Математика 3 кл. № 446)

У швейній майстерні було 30 м шовку. Коли пошили кілька суконь, витративши на кожну по 3 м, то в майстерні залишилося 9 м шовку. Скільки пошили суконь?

Розв'язання**:** Складемо вираз: (30 – 9) : 3 = 7.

Дамо означення числовому виразу. Кожне дійсне число є ***числовим виразом***. Такі вирази (дійсні числа) називаються ***елементарними***.

Якщо A і B – два числові вирази, то вирази виду:

1) $(A) + (B)$;

2) $(A) – (B)$;

3) $(A) \bullet (B)$ і

4) $(A) : (B)$ – також є числовими виразами.

Інших числових виразів, окрім зазначених, не існує.

Якщо в числовому виразі A виконати, всі зазначені операції, то одержимо число, яке називають значенням виразу позначають через $\sigma\,(A)$.

Для спрощення записів числових виразів користуються такими **правилами**:

***а*)** елементарні вирази в дужки не беруть;

***б*)** дужки не застосовують, якщо кілька елементарних виразів додаються або віднімаються, ці операції виконуються в порядку зліва направо;

***в*)** дужки не застосовують, якщо кілька елементарних виразів множаться або діляться, причому ці операції виконуються в порядку зліва направо;

***г*)** при відсутності дужок спочатку виконуються операції множення і ділення, а потім додавання і віднімання.

Відповідно до пунктів ***а*) – *г*)** ***порядок операцій*** при обчисленні значень числових виразів такий:

1. Якщо числовий вираз не містить дужок, то треба поділити його на частини, відокремлені одна від однієї знаками додавання й віднімання, та обчислити значення кожної такої частини, виконуючи множення й ділення в порядку зліва направо; після цього, замінивши кожну частину її значенням, знайти значення виразу, викопуючи операції додавання й віднімання в порядку зліва направо.

2. Якщо числовий вираз містить дужки, то треба взяти частини виразу, що містяться між лівою й правою дужками і не містять інших дужок, знайти їх значення за правилом 1 замінити кожну таку частину її значенням, опустивши дужки, які її охоплюють.

Якщо після цього дістанемо вираз без дужок, то обчислити його значення за правилом 1. У іншому разі знову застосувати правило 2.

Два числові вирази *A* і *B*, сполучені знаком “=” (“дорівнює”), називають ***числовою рівністю*** і позначають через $A = B$.

Розглянемо **властивості числових рівностей**.

Відношення “дорівнює” на множині *R* має такі властивості:

– ***рефлективності*:** $(\forall\, a)(a = a), \quad a \in R$;

– ***симетричності*:** $(\forall\, a)(\forall\, b)(a = b \Rightarrow b = a)$, $a, b \in R$;

– ***транзитивності*:** $(\forall\, a)(\forall\, b)(\forall\, c)\ (a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c)$, $a, b, c \in R$.

Відношення “дорівнює” на множині *R* є *відношенням еквівалентності*.

Відношення “дорівнює” на множині *R* має такі властивості:

– ***монотонність додавання*:** $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a = b \Rightarrow a + c = b + c)$, $a, b, c \in R$;

– ***правило скорочення для додавання*:**

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a + c = b + c \Rightarrow a = b), \quad a, b, c \in R;$$

– ***монотонність множення*:** $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a = b \Rightarrow ac = bc)$, $a, b, c \in R$;

– ***правило скорочення для множення*:** $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(ac = bc \Rightarrow a = b)$, $a, b, c \in R$.

Два числові вирази *A* і *B*, сполучені знаком < (“менше”) або > (“більше”), називають ***числовою нерівністю*** і позначають, відповідно, через $A < B$, $A > B$.

Числові нерівності є ***висловленнями***. Кожне в цих висловлень може бути як істинним, так і хибним.

Числова нерівність $A < B$ $(A > B)$ є *істинною* тоді і тільки тоді, коли:

– вирази *A* і *B* мають числові значення $\sigma(A)$ і $\sigma(B)$;

– $\sigma(A) < \sigma(B)$ $(\sigma(A) > \sigma(B))$.

Розглянемо деякі **властивості числових нерівностей**.

– ***монотонність додавання*:** $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\ (a < b \Rightarrow a + c < b + c)$, $a, b, c \in R$.

– ***правило скорочення для додавання*:** $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\ (a + c < b + c \Rightarrow a < b)$, $a, b, c \in R$.

– ***монотонність множення*:**

а) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\ (a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc)$, $a, b, c \in R$;

б) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\ (a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc)$, $a, b, c \in R$.

– ***правило скорочення для множення***

а) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\ (ac < bc \wedge c > 0 \Rightarrow a < b)$, $a, b, c \in R$,

б) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\ (ac < bc \wedge c < 0 \Rightarrow a > b)$, $a, b, c \in R$.

Числові вирази й числові рівності та нерівності – це різні математичні об’єкти. Значеннями числових виразів є числа (якщо такі значення існують), а значеннями числових рівностей і нерівностей є істинні значення.

2.2. Вирази із змінною. Тотожні перетворення виразів. Область визначення виразів із змінною. Рівняння з однією змінною. Корені рівняння. Рівносильні рівняння. Теореми про рівносильність рівнянь. Способи розв’язування рівнянь з однією змінною

Деякі дані в умовах задач можуть бути позначені не числами, а буквами. Наприклад, якщо в задачі, весь шовк в майстерні позначити через x відповідь набирає вигляду:

$$(x-9):3.$$

Так отримали вираз від змінної. Надаючи букві x різних значень, одержимо різні задачі. Щоб одержати розв'язки кожної з цих задач, треба підставити відповідні значення букви x у вираз.

Щоб означити загальне поняття виразу від змінної, з'ясуємо спочатку, що таке ***змінна.***

Зміст терміну "змінна" реалізується в задачах шкільного курсу математики початкового навчання через запитання; яке число треба записати в кружечку 12 + О = 46, щоб дістати правильну рівність? У цій задачі кружечок виступає в ролі форми із змінним змістом. В інших задачах кружок може бути заповнений іншими математичними об'єктами.

Замість кружечка застосовують букву, замість якої можна щось записати. Кожну таку букву і називають *змінною.* Іншими словами, під ***змінною*** розуміють таку букву, замість якої при певних умовах можна підставляти назви конкретних елементів з певної множини M. Ці елементи називають *значеннями змінної,* а множину M – *областю її значень.*

Якщо областю значень змінної є множина R, то щозмінну називають ***числовою*** або ***дійсною***. При цьому говорять, що змінна позначає дійсне число.

У математиці змінна може набувати значень найрізноманітніших множин елементів: векторів, висловлень, геометричних фігур, чисел тощо. Змінна падає математичним твердженням чіткого й зрозумілого вигляду.

Означення:

1. Кожне дійсне число або одна довільна буква латинського алфавіту (наприклад, x), що позначає дійсне число, є вираз від змінної. Такі вирази називають ***елементарними.***

2. Якщо A і B – два вирази від змінної, то $(A)+(B)$, $(A)-(B)$, $(A)\bullet(B)$ і $(A):(B)$ також вирази від змінної.

3. Інших виразів від змінної, крім даних не існує. Вираз від змінної, який не є числовим виразом, тобто, який містить числову змінну, називають ***числовою формою від відповідної змінної.***

Вирази від змінної позначають великими буквами латинського алфавіту, біля яких в дужках записується змінна: $A(x)$, $B(y)$ і читають "A від x", "B від x".

Якщо числовий вираз має значення, то це значення називають *значенням виразу* $A(x)$ при $x=a$.

Множину X дійсних чисел a, при яких вираз $A(x)$ має значення, називають *областю визначення* цього виразу.

Два вирази $A(x)$ і $B(x)$ з непорожніми областями визначення називають *тотожно рівними,* якщо їхні області визначення збігаються і для будь-якого числа a, що належить спільній області визначення цих виразів, значення останніх при $x=a$ рівні між собою.

Два вирази $A(x)$ і $B(x)$, сполучені знаком = ("дорівнює"), називають *рівністю* і пишуть $A(x)=B(x)$.

Якщо вирази $A(x)$ і $B(x)$ тотожно рівні, то це записують як рівність $A(x)=B(x)$, яку називають *тотожністю.*

Два вирази A (x) і B (x) з непорожніми областями визначення називають *тотожно рівними* на множині M якщо множина M є непорожньою підмножиною областей визначення цих виразів і для будь-якого $a \in M$ значення розглядуваних виразів при $x = a$ однакові.

Якщо вирази A (x) і B (x) тотожно рівні на множині M, то записують: $A(x) = B(x)$ при $x \in M$, цю рівність називають *тотожністю на множині.*

Розглянемо задачу: В одній коробці цукерок було на 5 більше, ніж у другій. Скільки цукерок було в кожній коробці, коли в обох коробках було 29 цукерок?

Найпростіший спосіб розв'язання цієї задачі — алгебраїчний. Суть його полягає в складанні рівняння.

Позначимо місткість однієї коробки через x. Тоді у другій – $x + 5$. Складемо рівняння: $x + (x + 5) = 29$,

$2x + 5 = 29$, $2x = 24$, $x = 12$.

Відповідь. 12, 27.

При розв'язуванні рівняння було зроблено деякі його перетворення.

Після кожного з виконуваних перетворень утворювалися нові рівняння, але всі той самий розв'язок – число 12.

Розглянемо поняття рівняння з однією змінною у загальному вигляді, і деякі елементи з теорії цих рівнянь.

Якщо існують два вирази від змінної x виду $F_1(x)$ і $F_2(x)$ областями визначення яких є непорожні множини X_1 і X_2, причому хоча б один з цих виразів є числовою формою від змінної x і $X = X_1 \cap X_2$, тоді висловлю вальна форма виду $F_1(x) = F_2(x), x \in X$, називається *рівнянням з однією змінною*, а множина X – областю визначення.

Вирази $F_1(x)$ і $F_2(x)$ називають *лівою* і *правою* частинами рівняння з однією змінною.

Значення змінної з області визначення рівняння, при підстановці якого в рівняння дістають істину числову рівність, називають *розв'язком рівняння*, або його *коренем*.

Розв'язати рівняння означає знайти множину цілих розв'язків цього рівняння.

Два рівняння називають *рівносильними* (кажуть, що одне з них рівносильне іншому), якщо області визначення збігаються і множини розв'язків їх рівні між собою.

Розглянемо основні теореми про рівносильність рівнянь.

Теорема 1. Нехай маємо рівняння

$$F_1(x) = F_2(x), \quad x \in X, \ (1)$$

і нехай $H(x)$ – вираз змінної x, область визначення якого містить множину X. Тоді рівняння (1) і рівняння виду

$$F_1(x) + H(x) = F_2(x) + H(x), \quad x \in X, \ (2)$$

рівносильні.

Доведення. I

Нехай x_0 - довільний розв'язок рівняння (1). Підставивши x_0 в рівняння (1), одержимо істинну числову рівність

$$F_1(x_0) = F_2(x_0)$$

До обох частин цієї істинної числової рівності додамо числовий вираз $H(x_0)$ і одержимо істинну числову рівність виду:

$F_1(x_0) + H(x_0) = F_2(x_0) + H(x_0)$, яка означає, що x_0 є розв'язком рівняння (2).

Отже, довільний розв'язок рівняння (1) є розв'язком рівняння (2), тобто рівняння (2) є логічним наслідком рівняння (1).
Нехай, x_0 – довільний розв'язок рівняння (2), тоді

$$F_1(x_0) + H(x_0) = F_2(x_0) + H(x_0)$$

є істинною числовою рівністю. Віднявши від обох частин цієї рівності числовий вираз $H(x_0)$ одержимо істинну числову рівність.

$$F_1(x_0) = F_2(x_0)$$

яка означає, що x_0 є розв'язком рівняння (1).

Отже, довільний розв'язок рівняння (2) є розв'язком рівняння (1), тобто рівняння (1) є логічним наслідком рівняння (2).
Таким чином, кожне з рівнянь є логічним наслідком другого.

Доведення. II Згідно з означенням рівносильності рівнянь, досить показати, що $T_1 = T_2$, де T_1 і T_2 – множини розв'язків відповідно рівнянь (1) і (2).
Теорема очевидна у випадку, коли $T_1 = \varnothing$ ($T_2 = \varnothing$), оскільки тоді й $T_2 = \varnothing$ ($T_1 = \varnothing$).

Покажемо, що $T_1 = \varnothing \Rightarrow T_2 = \varnothing$. Справді, припустимо супротивне: існує $x_0 \in X$, таке що $F_1(x_0) + H(x_0) = F_2(x_0) + H(x_0)$ є істинна числова рівність.

У цій рівності $F_1(x_0)$ – числовий вираз, що збігається з виразом $F_1(x)$, якщо $F_1(x)$ є числовим виразом, або утворюється з виразу $F_1(x)$, заміною в останньому x па число x_0, якщо $F_1(x)$ є числовою формою від змінної x. Те саме справедливе й для виразів $F_2(x)$ і $H(x)$. Аналогічними позначеннями користуватимемося й надалі.

Тоді за властивостями істинних числових різностей числова рівність $F_1(x_0) = F_2(x_0)$ також є істинною. Тому $x_0 \in T_1$, а це неможливо, оскільки $T_1 = \varnothing$. Зайшли у суперечність. Отже, $T_1 = \varnothing \Rightarrow T_2 = \varnothing$. Твердження $T_2 = \varnothing \Rightarrow T_1 = \varnothing$ доводиться аналогічно.

Нехай маємо $T_1 \neq \varnothing$ і нехай a – довільний елемент множини T_1. Тоді $a \in X$, $F_1(a) = F_2(a)$ – істинна числова рівність, $H(a)$ – числовий вираз, що має значення. За властивостями істинних числових рівностей числова рівність $F_1(a) + H(a) = F_2(a) + H(a)$ також є істинною. Тому $a \in T_2$. Виходячи з довільності вибору a, $a \in T_1$, робимо висновок: $T_1 \subset T_2$.

Нехай тепер b – довільний елемент множини $T_2 \neq \varnothing$. Тоді $b \in X$, $F_1(b) + H(b) = F_2(b) + H(b)$ – істинна числова рівність. Згідно з властивостями істинних числових різностей, числова рівність $F_1(b) = F_2(b)$ також є істинною. Отже, $b \in T_1$.
Залишилось скористатися означенням

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 \subset T_2 \wedge T_2 \subset T_1.$$

Теорему доведемо.

Наслідки

- Якщо до обох частин рівняння додати одне й те саме число, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.
- Якщо в рівнянні перенести доданок (числовий вираз, або числову форму) з однієї частини в іншу, змінивши знак на протилежний, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.
- При потребі всі члени рівняння з однією змінною можна перенести в одну з частин рівняння, а друга буде рівна нулю, і при цьому утвориться рівняння рівносильне даному.

Теорема 2. Нехай маємо рівняння

$$F_1(x) = F_2(x), \quad x \in X, (3)$$

і нехай і нехай $H(x)$ – вираз змінної x, область визначення якого містить множину X і який не набуває нульових значень на множині X. Тоді задане рівняння і рівняння виду $F_1(x)\ H(x) = F_2(x)\ H(x), \quad x \in X$, (4) рівносильні.

Наслідок.

• Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме число, відмінне від нуля, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Теорема 3. Нехай маємо рівняння

$$F(x) = 0, \quad x \in X. (5)$$

$$F(x) = F_1(x)\ F_2(x)\ \ldots\ F_n(x)$$

Якщо вираз $F(x)$ можна подати у вигляді добутку виразів $F_1(x)$, $F_2(x)$, … $F_n(x)$, область визначення кожного з яких збігається з множиною X, то множина розв'язків рівняння об'єднанням множин розв'язків рівнянь

$$\begin{aligned} &F_1(x) = 0, \quad x \in X; \\ &F_2(x) = 0, \quad x \in X; \qquad (6) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(x) = 0, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Доведення.

Нехай T – множина розв'язків рівняння (5), а T_i, $i = 1, 2, \ldots .n$, множина розв'язків i-го рівняння з рівнянь (6).

Теорема очевидна у випадку, коли $T = \varnothing$, оскільки тоді й усі $T_i = \varnothing$ $i = 1, 2, \ldots .n$. Справедливість цього твердження пропонуємо довести самостійно.

Нехай маємо $T \neq \varnothing$ і нехай a – довільний елемент множини T. Тоді $a \in X$, рівність $F(a) = 0$, а отже, й рівність

$$F_1(a)\ F_2(a)\ \ldots\ F_n(a) = 0 \qquad (7)$$

є істинними. Тому існує принаймні одне натуральне число i_0, $1 \le i_0 \le n$, таке, що $F\ i_0\ (a) = 0$ є істинна числова рівність.

Довести це пропонуємо самостійно, застосувавши метод від супротивного.

Нехай серед різностей $F_1(a) = 0$, $F_2(a) = 0$, … ,$F_n(a) = 0$ немає істинних. Оскільки $a \in X$, то останнє означає, що всі числові вирази $Fi(a)$, $i = 1, 2, \ldots .n$, мають значення, відмінні від нуля. Тому за властивостями істинних числових рівностей з істиності числової рівності (7) випливає істинність рівності

$$F_2\ (a)\ F_3(a)\ \ldots\ F_n(a) = 0,$$

а з істинності останньої рівності випливає істинність рівності

$$F_3\ (a)\ F_4(a)\ \ldots\ F_n(a) = 0$$

і т. д.; зрештою дістанемо, що рівність $F_n(a) = 0$ є істинною, а це суперечить припущенню: значення виразу $F_n(a)$ відмінне від нуля.

Отже, існування i_0 встановлено, а тому $a \in Ti_0$, і виходячи з довільності вибору a, $a \in T$, можемо зробити висновок: $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n \subset T$.

Ще простіше доводиться справедливість включення: $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n \supset T$.

Пропонуємо довести це самостійно.

З двох останніх включень дістаємо: $T = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$.

Теорему доведено.

Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де a,b,c – дійсні числа, причому $a \neq 0$, називається ***квадратним рівнянням.*** Якщо $a = 1$, то квадратне рівняння називається ***зведеним.***

Числа a,b,c мають свої назви. Так, a – перший коефіцієнт, b – другий коефіцієнт, c – вільний член.

Корені рівняння $ax^2+bx+c=0$ знаходять за допомогою формули

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Вираз $D=b^2-4ac$ називається ***дискримінантом*** квадратного рівняння. Якщо $D<0$, то дане квадратне рівняння не моє жодного дійсного кореня. Якщо $D=0$, то рівняння має один дійсний корінь. Якщо $D>0$. То рівняння має два дійсні корені.

Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$ називається ***біквадратним***, причому $a\neq 0$. Біквадратне рівняння розв'язується методом введення нової змінної: $x^2=y$, після чого отримуємо квадратне рівняння $ay^2+by+c=0$.

Приклад 2.А. Розв'язати рівняння

$$(7x-3)(x+5)x=0.$$

Розв'язання. Добуток множників дорівнює нулю тоді, коли б хоча один із множників дорівнює нулю. Запишемо у вигляді диз'юнкції розв'язків:

$$7x-3=0\vee x+5=0\vee x=0.$$

Отримаємо розв'язки рівняння

$$x=\frac{3}{7}\vee x=-5\vee x=0.$$

Відповідь. $-5;0;\frac{3}{7}.$

Приклад 2. Б. Розв'язати рівняння

$$6x^2-7x-3=0.$$

Розв'язання. Для розв'язку даного квадратного рівняння скористаємося формулою: $D=b^2-4ac$, де $a=6,b=-7,c=-3.$

$$D=(-7)^2-4\times 6\times(-3),$$
$$D=121.$$

Оскільки $D>0, D=121,$ то квадратне рівняння має два корені, значення яких обчислюється за формулами:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Знайдемо розв'язки даного квадратного рівняння:

$$x_1=\frac{7+11}{12}=\frac{18}{12}=1\frac{1}{2};$$
$$x_2=\frac{7-11}{12}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{3};1\frac{1}{2}.$

Приклад 2.В. Розв'язати рівняння $\frac{3x-11}{4}-\frac{3-5x}{8}=\frac{x+6}{2}.$

Розв'язання. Перенесемо доданки в одну частину рівняння:

$$\frac{3x-11}{4}-\frac{3-5x}{8}-\frac{x+6}{2}=0.$$

Зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{2(3x-11)-(3-5x)-4(x+6)}{8}=0.$$

Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\frac{6x-22-3+5x-4x-24}{8}=0;$$

$$\frac{7x-49}{8}=0.$$

Дріб тоді дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник нулю не дорівнює. Отже,

$$7x-49=0,$$
$$7x=49,$$
$$x=7.$$

Відповідь. 7.

Приклад 2.Г. Знайти область визначення і множину розв’язків рівняння

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}=1.$$

Розв’язання. Перенесемо доданки в одну частину рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}-1=0.$$

Зведемо до спільного знаменника, який у даному випадку дорівнює $x(x+2)$:

$$\frac{x+2+2x-x(x+2)}{x(x+2)}=0;$$

$$\frac{x+2+2x-x^2-2x}{x(x+2)}=0.$$

Зведемо подібні доданки у чисельнику дробу і домножимо на (-1):

$$\frac{x^2-x-2}{x(x+2)}=0.$$

Дріб тоді дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник нулю не дорівнює. Отже,

$$x^2-x-2=0 \wedge x(x+2)\neq 0;$$

$$x_1=-1, x_2=2 \wedge x\neq 0, x\neq -2.$$

Відповідь. $-1;2,\ x\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;+\infty)$.

2.3. Рівняння з двома змінними, його розв’язки. Поняття про систему рівнянь та його розв’язки. Способи розв’язування системи рівнянь.

Системою рівнянь виду $F_1(x,y)=0$ і $F_2(x,y)=0$ називають кон’юнкцію цих рівнянь $F_1(x,y)=0 \ \wedge \ F_2(x,y)=0$,

$$\text{або } \begin{cases} F_1(x,y)=0; \\ F_2(x,y)=0. \end{cases} \quad (1)$$

Будь-яке рівняння з двома змінними x і y ***рівносильне*** деякому рівнянню виду $F(x,y)=0$

Розв’язком системи рівнянь (1) називають кортеж (a,b), що складається з дійсних чисел, якщо при заміні x на a і y на b отримаємо істині числові рівності:

$$F_1(x,y)=0 \text{ і } F_2(x,y)=0.$$

Розв'язати систему рівнянь означає знайти множину розв'язків цієї системи. ***Множиною розв'язків системи рівнянь*** (1) є переріз характеристичних множин рівняння $F_1(x,y)=0$ і рівняння $F_2(x,y)=0$.

Приклад 3.А. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x+3y=8, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язати систему лінійних рівнянь можна ***способом підстановки***, який полягає у тому, що з будь-якого рівняння системи виражають одне невідоме через інше, а потім підставляють значення цього невідомого у інше рівняння.

З першого рівняння виражаємо: $x=\frac{8-3y}{2}$. Підставимо це значення у друге рівняння і отримаємо систему рівнянь: $\begin{cases} x=\frac{8-3y}{2}, \\ 3\cdot\frac{8-3y}{2}+2y=7. \end{cases}$

Розв'яжемо друге рівняння системи і отримаємо:

$$\begin{cases} x=\frac{8-3y}{2}, \\ \frac{3(8-3y)+2\cdot 2y-2\cdot 7}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8-3y}{2}, \\ \frac{24-9y+4y-14}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8-3y}{2}, \\ \frac{10-5y}{2}=0. \end{cases}$$

З другого рівняння системи отримаємо $y=2$. Підставимо це значення у перше рівняння системи : $x=\frac{8-3\cdot 2}{2}=1$.

Відповідь. (1;2).

Приклад 3.Б. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x+5y=15, \\ x-2y=3. \end{cases}$

Розв'язання. Розв'язати систему лінійних рівнянь можна ***способом алгебраїчного додавання***, який полягає у тому, що одне з рівнянь системи домножують на таке число, щоб коефіцієнти при відповідних змінних були рівні і при додаванні, або віднімання двох рівнянь результат дорівнював нулю.

Домножимо друге рівняння системи на 2:

$$\begin{cases} 2x+5y=15, \\ x-2y=3/\cdot 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=15, \\ 2x-4y=6. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге і отримаємо:

$$-\begin{cases} 2x+5y=15, \\ 2x-4y=6 \end{cases} \Leftrightarrow 2x-2x+5y-(-4y)=15-6 \Leftrightarrow 9y=9 \Leftrightarrow y=1.$$

Підставимо це значення у перше рівняння і розв'яжемо його відносно змінної x:

$$2x+5\cdot 1=15,$$
$$2x=10,$$
$$x=5.$$

Відповідь. (5;1).

2.4. Поняття нерівності з однією змінною як предиката. Розв'язки нерівності. Строгі та нестрогі нерівності. Розв'язування нерівностей першого степеня з однією змінною. Системи нерівностей. Розв'язки системи нерівностей з однією змінною

Якщо існують два вирази виду $F_1(x)$ і $F_2(x)$ від змінної x областями визначення яких є не порожні множини X_1 і X_2, причому хоча б один з даних виразів є числовою формою від змінної x і для X_1 і X_2 виконується рівність $X = X_1 \cap X_2$, тоді висловлю вальна форма виду $F_1(x) > F_2(x),\ x \in X$,

або $F_1(x) < F_2(x),\ x \in X$.

Називається ***нерівністю з однією змінною***, а множина X – ***областю визначення нерівності***.

Вирази $F_1(x)$ і $F_2(x)$ називаються лівою і правою частиною нерівності.

Значення змінної з області визначення даної нерівності, при підстановці якого в нерівність утворюється істинна числова нерівність називається ***розв'язком даної нерівності***.

Розв'язати нерівність – означає знайти множина розв'язків даної нерівності.

Дві нерівності виду $F_1(x)$ і $F_2(x)$ називаються ***рівносильними***, якщо їхні області визначення X_1 і X_2 збігаються і множини розв'язків даних нерівностей рівні між собою.

Властивості нерівностей

1. Якщо до обох частин нерівності додати, або відняти одне і те ж саме число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

2. Якщо в нерівності перенести доданок, або числовий вираз з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то дістанемо нерівність рівносильну даній.

3. Якщо обидві частини нерівності помножити, або поділити на одне і те ж додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

4. Якщо обидві частини нерівності помножити, або поділити на одне і те ж від'ємне число і при цьому змінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Нерівності другої степені. Будемо розглядати нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, або $ax^2 + bx + c < 0$, де $a \neq 0$. Дані нерівності можна розв'язувати ***графічним способом***. Графіком квадратичної функції (параболи) $y = ax^2 + bx + c$, якщо $a > 0$ є парабола, направлена вітками вгору. Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо $a < 0$ є парабола, направлена вітками вниз.

Якщо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два корені ($D > 0$), то парабола $y = ax^2 + bx + c$ двічі перетинає вісь x. Якщо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один корінь ($D = 0$), то парабола $y = ax^2 + bx + c$ перетинає x один раз (її вершина розташована на осі x). Якщо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має жодного кореня ($D < 0$), то парабола $y = ax^2 + bx + c$ не перетинає вісь x.

Приклад 4.А. Розв'язати нерівність

$$-(2 - 3x) + 4(6 + x) \geq 1.$$

Розв'язання. Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$-2 + 3x + 24 + 4x \geq 1.$$

Отримаємо нерівність, рівносильну даній.

$$3x + 4x \geq 1 + 2 - 24,$$

$$7x \geq -21,$$

$$x \geq -3.$$

Відповідь. $x \in [-3;+\infty)$.

Приклад 4. Б. Розв'язати нерівність $x - \frac{x+1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$.

Розв'язання. Перенесемо всі доданки в ліву частину нерівності і отримаємо нерівність, рівносильну даній: $x - \frac{x+1}{2} - \frac{x-3}{4} + \frac{x-2}{3} > 0$.

Зведемо до спільного знаменника: $\frac{12x - 6x - 6 - 3x + 9 + 4x - 8}{12} > 0$.

Зведемо подібні доданки в чисельнику: $\frac{7x-5}{12} > 0$,

$$7x - 5 > 0,$$

$$7x > 5,$$

$$x > \frac{5}{7},\ x \in \left(\frac{5}{7};+\infty\right).$$

Відповідь. $x \in \left(\frac{5}{7};+\infty\right)$.

Приклад 4. В. Розв'язати нерівність $x^2 + 2x - 3 > 0$.

Розв'язання. Даній нерівності відповідає квадратична функція виду

$$y = x^2 + 2x - 3.$$

Будемо шукати ті значення x для яких $y > 0$.

Розв'яжемо рівняння виду: $x^2 + 2x - 3 = 0$,

$$x_1 = -3,\ x_2 = 1.$$

Таким чином парабола $y = x^2 + 2x - 3$ має вигляд: (рис. 1)

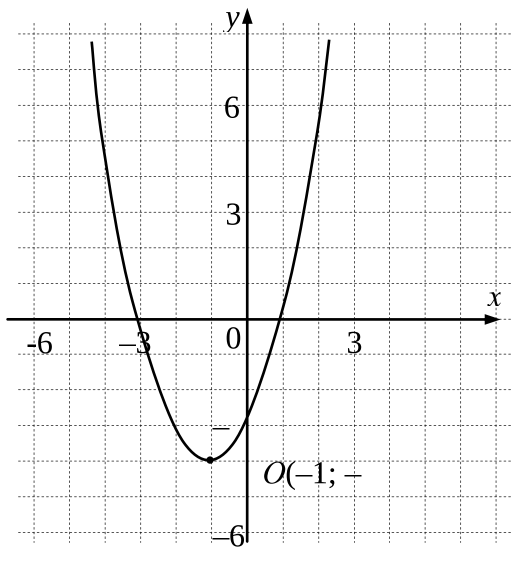


Рис. 1

Як бачимо нерівність $y > 0$ виконується при $x \in (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$.

Відповідь. $x \in (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$

Системою нерівностей називають кон'юнкцію даних нерівностей. Дійсне число ***a*** називають **розв'язком** даної системи нерівностей, якщо при заміні змінної в усіх нерівностях цієї системи на ***a*** отримують лише істині числові нерівності.

Розв'язати систему нерівностей – означає знайти множину розв'язків цієї системи.

Множиною розв'язків системи нерівностей є переріз множин розв'язків усіх нерівностей, які входять у неї.

Приклад 5.А. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 5x+2>3x-1, \\ 3x+1>7x-4. \end{cases}$

Розв'язання. Перетворимо дану систему нерівностей:

$$\begin{cases} 5x-3x>-1-2, \\ 3x-7x>-4-1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>-3, \\ -4x>-5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{3}{2}, \\ x<\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Зобразимо розв'язки обох нерівностей на числовій прямій (рис. 2)

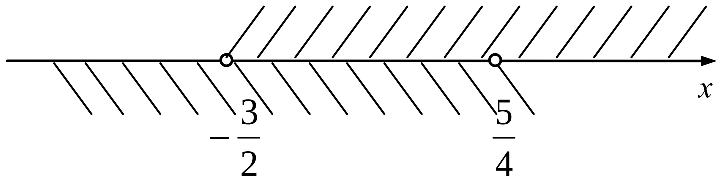


Рис. 2

Як бачимо розв'язком даної системи нерівностей є інтервал $\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{4}\right)$.

Відповідь. $x \in \left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{4}\right)$.

Приклад 5.Б. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} -(x-2)-3(x-1)<2x, \\ 6x+4\geq 12-(x-3). \end{cases}$

Розв'язання. Перетворимо дану систему нерівностей розкривши дужки:

$$\begin{cases} -x+2-3x+3<2x, \\ 6x+4\geq 12-x+3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-3x-2x<-5, \\ 6x+x\geq 12+3-4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x<-5, \\ 7x\geq 11. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{5}{6}, \\ x\geq 1\dfrac{4}{7}. \end{cases}$$

Зобразимо розв'язки обох нерівностей на числовій прямій (рис. 3)

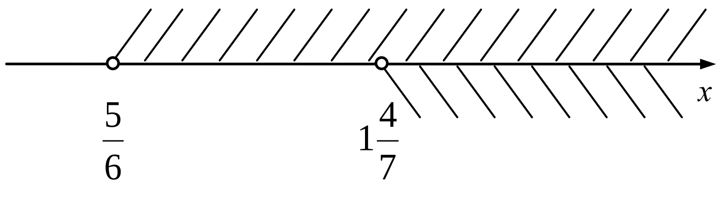


Рис. 3

Розв'язком даної системи нерівностей є проміжок $x \in \left[1\dfrac{4}{7};+\infty\right)$.

Відповідь. $x \in \left[1\dfrac{4}{7};+\infty\right)$.

2.5. Поняття про рівняння лінії. Рівняння прямої та його види. Рівняння кола. Числові функції, їх властивості. Обернена функція. Лінійна функція. Пряма пропорційність, її властивість. Обернена пропорційність, її властивість

Рівнянням деякої лінії на площині є рівняння $F(x, y) = 0$, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) всіх точок, що лежать на цій лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, яка не лежить на цій лінії.

Нехай задано деяку пряму (рис. 1), знайдемо її рівняння.

Точка M (x, y) лежить на прямій тоді і тільки тоді, коли виконується умова: $\frac{NM}{BN} = \text{tg}\alpha$. Позначимо $\text{tg}\,\alpha = k$ і назвемо цю величину *кутовим коефіцієнтом* прямої лінії. Тоді враховуючи, що $NM = y - b$, $BN = x$, маємо: $\frac{y-b}{x} = k$. А звідси: $y=kx+b$

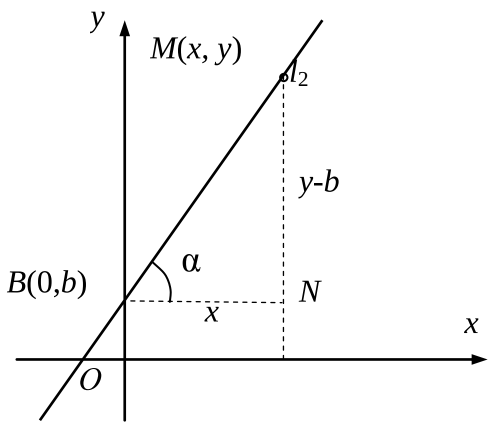


Рис. 4

– *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Нехай деяка точка $M_1(x_1, y_1)$ належить заданій прямій, тоді повинна виконуватись рівність: $y_1 = kx_1 + b$. Знайшовши з цього рівняння величину b $(b = y_1 - kx_1)$ і підставивши в рівняння прямої, отримаємо: $y = kx + y_1 - kx_1$. Звідси:

$y - y_1 = k\,(x - x_1)$ – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* k, *що проходить через задану точку* $M_1(x_1, y_1)$.

Нехай точка $M_2(x_2, y_2)$ теж належить заданій прямій. Тоді маємо: $y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$. Отже: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{tg}\alpha$.

Знайдене значення k з останнього співвідношення підставимо в рівняння прямої і отримаємо: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Отримане співвідношення називають *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*.

Рівняння прямої, записаної в будь-якому вигляді в прямокутній системі координат Oxy, задається рівнянням першого степеня відносно x і y і його можна записати в загальному вигляді:

$Ax + By + C = 0$ – *загальне рівняння прямої лінії*.

Множина всіх точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від заданої точки, називається ***колом***. А саму цю точку називають центром кола. Нехай $M\,(x, y)$ – поточна точка кола, $O\,(a, b)$ – центр кола. З означення $OM = R$, або, використовуючи формулу: $OM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$

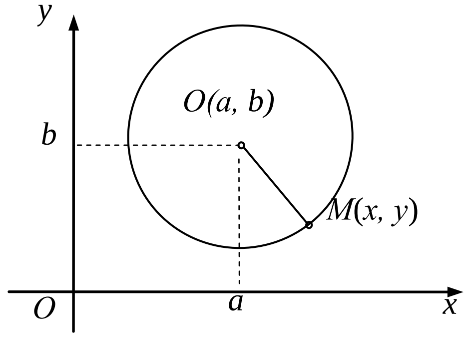


Рис. 5

Піднісши обидві частини рівняння до квадрату, отримаємо:

$(x - a)^2+(y - b)^2 = R^2$ – *канонічне рівняння кола*.

Тут (a, b) – к-ти центра кола, R –радіус.

Якщо, $a = 0$ і $b = 0$, то рівняння кола набуде вигляду:

$x^2 + y^2 = R^2$

Розглянемо таку задачу:

Задача. Автомобіль рухається по шосе зі сталою швидкістю 50 км/год. Який шлях він проїде за 2 год? 3 год? 6 год?

Проаналізуємо цю задачу. В задачі йдеться про такі величини, як швидкість руху автомобіля (стала величина), час руху автомобіля і шлях, який автомобіль проїде за відповідний час (змінні величини). Якщо позначити через x (год) – час руху автомобіля, а через y (км) – шлях який проїде автомобіль за цей час, то залежність між ними виразиться формулою $y = 50x$. Згідно з цією формулою, для кожного значення змінної x можна знайти відповідне йому єдине значення змінної y. Встановлену залежність змінної величини y від змінної величини x називають *функцією.*

Числовою функцією називають таку залежність при якій кожному елементу x числової множини X відповідає єдине число y.

$$y = f(x).$$

При цьому x називають *аргументом*, а y − *значенням функції.* Множину X називають *областю визначення функції*, а множину значень, які функція набуває, − її *множиною значень*.

Для області визначення і множини значень функції застосовують також відповідно позначення $D(x)$ і $E(x)$.

Функцію називають *зростаючою* (*спадною*) *на множині* R, або якщо вона *зростає* (*спадає*) на множині R, якщо для будь-яких більшого значення аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію $f(x)$ можна вважати заданою, якщо задано її область визначення X.

Функції можна задати трьома способами:

- *аналітичним*,
- *табличним*,
- *графічним*.

Аналітичний спосіб означає завдання функції формулою, що показує кількість і послідовність операцій над аргументом x, які необхідні для того, щоб дістати значення $y = f(x)$ цієї функції. Якщо при цьому не зазначається область визначення функції, то під останньою розуміють множину допустимих значень аргументу, тобто множину тих значень аргументу, для яких за формулою можна знайти відповідні значення функції.

Найчастіше графіком функції є деяка лінія координатної площини. Проте не кожна лінія є графіком функції. Справа в тому, то при заданому значенні аргументу x існує лише одне відповідне йому значення функції y. Тому на кожній прямій, паралельній осі ординат, може лежати не більше однієї точки графіка функції.

Лінійною функцією називають функцію виду

$$y = kx + b,$$

де k і b деякі числа.

Якщо, $k = 0$, то одержують функцію $y = b$, яку називають *сталою.*

Областю визначення лінійної функції є множина R (функція має зміст при будь-якому дійсному значенні змінної, тобто $\forall x \in R$).

Лінійна функція має такі **властивості**:

1. Лінійна функція є ні парна ні непарна, бо $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$.

2. Графіком лінійної функції є пряма з кутовим коефіцієнтом k і ординатою b для аргумента рівного нулю.

3. Функція f називається зростаючою (спадною) на деякій області визначення, якщо для будь-яких x_1, x_2 з цієї області визначення, таких, що $x_2 > x_1$, виконується $(f(x_2) > f(x_1))(f(x_2) < f(x_1))$.

4. Якщо $k > 0$, то лінійна функція зростаюча, а якщо $k < 0$, то лінійна функція спадна.

Лінійну функцію в початкових класах спеціально не розглядають. Проте, до поняття лінійної функції можна прийти при розв'язуванні в початкових класах алгебраїчним способом такого типу задач:

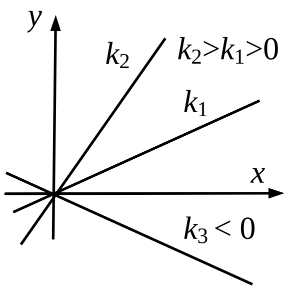
Задача. Мотоцикліст, який виїхав з пункту A, знаходиться в 20 км від цього пункту. На якій відстані S (км) від пункту A він буде знаходитись через t годин, якщо його швидкість 50 км/год?

При розв'язуванні задачі одержуємо залежність $S = 50t + 20$, де $t > 0$ – час руху, а шукана відстань S – лінійна функція від t. Назви функцій, залежностей між величинами вчителі не вводять, лише готують школярів до їх подальшого вивчення.

Прямою пропорційністю називають функцію виду

$$y = k\,x\ .$$

де k – деяке число, що не дорівнює нулю.



Число k у формулі називають *коефіцієнтом пропорційності*.

Графіком прямої пропорційності є пряма з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює коефіцієнту пропорційності k і ординатою, що дорівнює нулю для аргумента рівного нулю; пряма пропорційність є непарною функцією, бо $f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x)$.

Пряма пропорційність – це окремий випадок лінійної функції і вона такі властивості.

1. Областю визначення прямої пропорційності є множина R.

2. Пряма пропорційність з додатним (від'ємним) коефіцієнтом пропорційності є зростаючою (спадною) функцією на всій області визначення (при $k > 0$, – зростаюча, а при $k < 0$ – спадна).

3. Графіком прямої пропорційності є пряма з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює коефіцієнту пропорційності, і початковою ординатою, що дорівнює нулю.

4. Для прямої пропорційності відношення двох довільних значень аргументу, що існує, дорівнює відношенню відповідних значень функції.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{kx_1}{kx_2} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Наслідком твердження 4 є таке твердження: для прямої пропорційності в додатним коефіцієнтом із збільшенням (зменшенням) значення аргументу в кілька разів відбувається збільшення (зменшення) значення функції у стільки ж разів.

Отже дві величини, які залежать одна від одної так, що при збільшенні (зменшенні) однієї з них в кілька разів інша збільшується (зменшується) в стільки ж разів, називаються **прямопропорційними**.

Оберненою пропорційністю називається функція виду $y = \frac{k}{x}$.

де k – деяке число, що не дорівнює нулю.

Число k у формулі називають *коефіцієнтом* оберненої пропорційності.

Обернена пропорційність має такі властивості.

1. Областю визначення, оберненої пропорційності є множина дійсних чисел крім 0.

2. Обернена пропорційність з додатним (від'ємним) коефіцієнтом оберненої пропорційності є спадною (зростаючою) функцією на кожному з інтервалів $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, але не на їх об'єднанні.

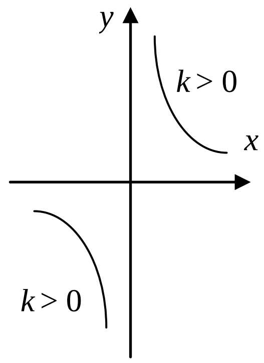
3. Для оберненої пропорційності відношення двох довільних значень аргументу дорівнює оберненому, відношенню відповідних значень функції.

Розглянемо дві функції: $y_1 = \frac{k}{x_1}$ і $y_2 = \frac{k}{x_2}$.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{k}{x_1}}{\frac{k}{x_2}} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

4. Для оберненої пропорційності з додатним коефіцієнтом збільшенню (зменшенню) аргументу в кілька разів відповідає зменшення (збільшення) значення функції у стільки ж разів.

Дві величини, які залежать одна від одної так, що при збільшенні (зменшенні) однієї з них в кілька разів інша зменшується (збільшується) в стільки ж разів, називаються **оберненопропорційними**.



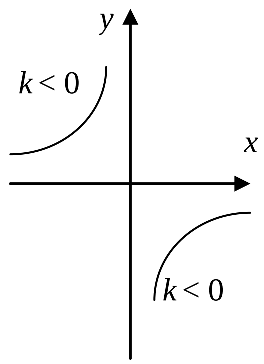


Рис.

З оберненою пропорційністю учні в початкових класах лише зустрічаються при розв'язуванні завдань і текстових задач. Однією з таких задач є задача наступного типу.

Турист-спортсмен повинен пройти 24 км за декілька годин безперервного ходу. Скільки кілометрів проходитиме турист за 1 год, якщо на весь шлях він витратить 3 год? 4 год? 6 год? 8 год?

Квадратичною функцією називається функція виду $y = ax^2 + bx + c$, де a, b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$. Вираз $ax^2 + bx + c$ називають *квадратним тричленом.*

Квадратична функція має такі властивості:

1. Областю визначення квадратичної функції в множина R.

2. Квадратична функція є ні парна, ні непарна, бо $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$.

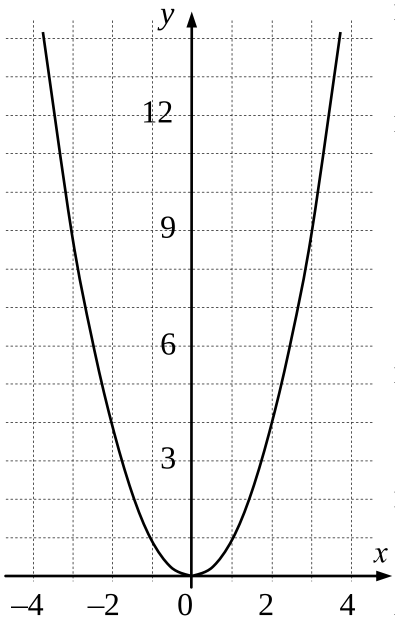


Рис.

3. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ має найменше чи найбільше значення при $x = -\frac{b}{2a}$.

4. Якщо $a > 0$ $(a < 0)$, то вітки параболи напрямлені вгору (вниз), а сама квадратична функція має в точці $x = -\frac{b}{2a}$ найменше (найбільше) значення.

5. Квадратична функція при $a > 0$ $(a < 0)$ спадна (зростаюча) на проміжку $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right)$ і зростаюча (спадна) на проміжку $\left(-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$.

6. Графік квадратичної функції називають параболою з вершиною в точці $x = -\frac{b}{2a}$.

При $b = c = 0,\ a = 1$ квадратична функція набирає вигляду $y = x^2$, яка має такі властивості.

1. Областю визначення функції $y = x^2$ є вся числова пряма.

2. $y = x^2$ – парна функція, бо $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

3. Функція $y = x^2$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$ – спадає, а на проміжку $(0;\ \infty)$ – зростає.

4. Графіком є парабола з вершиною в точці $(0, 0)$.

ВПРАВИ

Розв’язати рівняння (**1.1. – 1.18.**)

1.1. $9x^2 + 6(x+1) = 5.$

1.2. $x^2(2+x) = 0.$

1.3. $2x^2 - 27x + 13 = 0.$

1.4. $6 - \frac{x-1}{2} = \frac{3-x}{2} + \frac{x-2}{3}.$

1.5. $\frac{3x-1}{7} + \frac{4x+7}{3} = 11.$

1.6. $\frac{x-3}{6} + x = \frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2}.$

1.7. $\frac{3x+1}{5} = 2 - \frac{4(x-3\ )}{15}.$

1.8. $\frac{6x - x^2 - 6}{x-1} - \frac{2x-3}{x-1} = 1.$

1.9. $\frac{2x+1}{6} + \frac{7x-1}{3} = \frac{x}{2}.$

1.10. $\frac{3x+2}{4} - \frac{7x+4}{2} - 4 = 0.$

1.11. $\frac{1+2x}{7} + \frac{3x+1}{2} = 6.$

1.12. $\frac{3x-3}{-3} - \frac{7x+1}{2} + 10x = 0.$

1.13. $\frac{1+2x}{3} + \frac{6x}{2} = \frac{11}{3}.$

1.14. $\frac{x-1}{3} + \frac{3x-2}{5} - \frac{4x-1}{5} = 0.$

1.15. $1 - \frac{x-3}{2} = x - \frac{3(5-2x)}{7}.$

1.16. $x^2 - \frac{9x+2}{5} = 0.$

1.17. $x^2 - \frac{11x+2}{6} = 0.$

1.18. $\frac{x^2 - 5x}{2} - 3 = 0.$

Розв’язати систему рівнянь (**2.1. – 2.20.**)

2.1. $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 3x+4y=0, \\ 2x+3y=1. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 7x-y=5, \\ xy=18. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x-2y=6, \\ x^2+6y=10. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x+2y=8, \\ x^2-3y=-5. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 2x+11y=15, \\ 10x-11y=9. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ x=y. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} y+5=x^2, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 5x+4y=1. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 2x-y=11, \\ 3x-2y=-8. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 4x-y=19, \\ x+2y=7. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 2x+\dfrac{3y}{4}=7, \\ x-2y=-4. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 2x+y=3, \\ x-2y=-6. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x(y+1)=-4, \\ x-y=6. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x+y=4, \\ x+y=1. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x-2y=6, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-y=8. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 4+2y=1, \\ x-2y=4. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 3x-y=16. \end{cases}$

Задачі на складання рівнянь та систем рівнянь

Приклад 3. А. У двох коробках разом 48 цукерок. У другій коробці було у 3 рази більше цукерок, ніж у першій. Скільки цукерок було у другій коробці?

Розв'язання. Нехай у першій коробці було – x цукерок. Тоді у другій коробці було – $3x$ цукерок. Разом у двох коробках – $(x+3x)$ цукерок. За умовою задачі складаємо рівняння $x+3x=48$,

$$4x=48,$$

$$x=12.$$

Отже, у першій коробці – 12 цукерок, тоді у другій – $3\cdot 12=36(ц.)$

Відповідь. 36 цукерок.

Приклад 3. Б. У першій бригаді було в 4 рази більше робітників, ніж у другій. Після того, як з першої бригади пішло 10 робітників, а в другу прийшло 8 робітників, то робітників у першій бригаді стало в 2 рази більше, ніж у другій. Скільки робітників було в першій бригаді?

Розв'язання. Нехай у другій бригаді було – x робітників. Тоді у першій бригаді було – $4x$ робітників. Після того, як з першої бригади пішло 10 робітників у ній стало – $4x-10$ робітників. Коли у другу прийшло 8 робітників, у ній стало – $x+8$ робітників. За умовою задачі складаємо рівняння $4x-10=(x+8)\cdot 2$.Поділимо обидві частини рівняння на 2.

$$2x-5=x+8,$$
$$2x-x=8+5,$$
$$x=13.$$

Отже, у другій бригаді було 13 робітників, тоді у першій бригаді було $4\cdot 13=52\ (р.)$

Відповідь. 52 робітників.

Приклад 3. В. Периметр прямокутника дорівнює 24 см. Знайти його сторони, якщо відомо, що площа прямокутника дорівнює 35 см².

Розв'язання. Нехай довжина прямокутника – x см. Тоді ширина прямокутника – y см. Периметр прямокутника становить – $(x+y)\cdot 2$, а площа – $x\cdot y$. За умовою задачі складаємо систему рівнянь $\begin{cases}(x+y)\cdot 2=24,\\ x\cdot y=35.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=12,\\ x\cdot y=35.\end{cases}$

З першого рівняння отриманої системи виражаємо: $x=12-y$ і підставимо це значення у друге рівняння: $(12-y)\cdot y=35,$

$$12y-y^2=35,$$
$$-y^2+12y-35=0\,/\cdot(-1),$$
$$y^2-12y+35=0.$$

На основі наслідку з **теореми Вієта** сума коренів отриманого квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, тобто – 12, а добуток – вільному члену, тобто – 35. Коренями квадратного рівняння будуть числа 5 і 7.

Відповідь. 5 см, 7 см.

Приклад 3.Г. Сума двох чисел 26, а різниця більшого і меншого становить 4. Знайти менше число.

Розв'язання. Нехай більше число – x, тоді менше число – y. Сума двох чисел – $x+y$, а різниця більшого і меншого – $x-y$. За умовою задачі складаємо систему рівнянь $\begin{cases}x+y=26,\\ x-y=4.\end{cases}$ Скористаємося ***способом алгебраїчного додавання*** і до першого рівняння додамо друге $+\begin{cases}x+y=26,\\ x-y=4.\end{cases} \Leftrightarrow 2x=30 \Leftrightarrow x=15.$

Виразимо з першого рівняння значення $y: y=26-x.$ Підставимо значення x в отримане рівняння: $y=26-15 \Rightarrow y=11.$ Отже, менше число дорівнює 11.

Відповідь. 11.

Приклад 3.Д. На виготовлення костюму було затрачено 2,8 $м^2$ тканини. Площі витраченої тканини на піджак, штани і жилетку відносяться як 7 : 5 : 2. Скільки тканини було витрачено на штани?

Розв'язання. Нехай коефіцієнт пропорційності k. Тоді на піджак затрачено $7k$ тканини, на штани – $5k$, а на жилетку – $2k$. За умовою задачі складаємо рівняння: $7k+5k+2k=2{,}8,$

$$14k=2{,}8,$$
$$k=0{,}2.$$

На штани витрачено $5\cdot 0{,}2=1\,(м^2)$

Відповідь. $1\ м^2$.

Приклад 3.Е. Моторний човен пройшов 28 км проти течії річки і 16 км за течією річки, затративши на весь шлях 3 год. Яка власна швидкість моторного човна, якщо швидкість течії річки 1 км/год?

Розв'язання. Нехай власна швидкість моторного човна – x. Тоді швидкість моторного човна за течією річки – $x+1$, а проти течії річки – $x-1$. На шлях проти течії річки було витрачено – $\dfrac{28}{x-1}$ год., а за течією річки – $\dfrac{16}{x+1}$ год. За умовою задачі складаємо рівняння $\dfrac{28}{x-1}+\dfrac{16}{x+1}=3,$

$$\frac{28(x+1)+16(x-1)}{(x-1)(x+1)}=3,$$

$$28x+28+16x-16=3(x^2-1),$$

$$3x^2-3-28x-28-16x+16=0,$$

$$3x^2-44x-15=0,$$

$$D=(-44)^2-4\cdot 3\cdot(-15)=1936+180=2116=46^2.$$

$$x_1=\frac{44+46}{6}=\frac{90}{6}=15,$$

$$x_2=\frac{44-46}{6}=-\frac{1}{3}.$$

Значення $x_2=-\dfrac{1}{3}$ – не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість не може бути від'ємною.

Відповідь. 15 км/год.

3.1. Сума двох чисел дорівнює 48. Перше число в 3 рази більше за друге. Знайти друге число.

3.2. Периметр прямокутника дорівнює 30 см. Знайти його сторони, якщо відомо, що площа прямокутника дорівнює 56 см^2.

3.3. Два комбайни зібрали врожай з поля за 4 дні. За скільки днів зміг би зібрати врожай кожний комбайн, якщо одному з них для виконання всієї роботи потрібно на 6 днів менше, ніж іншому?

3.4. Периметр прямокутника дорівнює 20 см. Знайти його сторони, якщо відомо, що площа прямокутника дорівнює 24 см^2.

3.5. Добуток двох послідовних натуральних чисел дорівнює 1056. Знайти ці числа.

3.6. За два місяці витратили 24 т палива, причому за перший місяць витратили на 6 т більше, ніж за другий. Скільки тонн палива витратили за перший місяць?

3.7. Сума двох чисел дорівнює 70, а їх різниця дорівнює 28. Знайти більше з чисел.

3.8. У двох пачках разом було 120 зошитів. Коли з другої пачки переклали до першої 10 зошитів, то в другій пачці стало в 4 рази менше, ніж у першій. Скільки зошитів було в другій пачці спочатку?

3.9. Пасажирський поїзд проходить за 3 год на 10 км більше, ніж товарний за 4 год. Швидкість товарного поїзда на 20 км/год менша за швидкість пасажирського. Знайти швидкість пасажирського поїзда.

3.10. Двоє робітників виготовили разом 74 деталі. Перший виготовляв за день на 2 деталі більше, ніж другий і працював 7 днів, а другий – 8 днів. Скільки деталей у день виготовляв другий робітник?

3.11. Середнє арифметичне двох чисел дорівнює 5, а різниця цих чисел дорівнює 4. Знайти більше число.

3.12. Теплохід, власна швидкість якого 18 км/год, пройшов 50 км за течією річки і 8 км проти течії річки, затративши на весь шлях 3 год. Яка швидкість течії річки?

3.13. У трьох кошиках було 140 грибів. У другому кошику їх було в 2 рази більше, ніж у першому, а в третьому – на 12 більше, ніж у першому. Скільки грибів було у третьому кошику?

3.14. Дві бригади робітників повинні виготовити по 240 деталей. Перша бригада виготовляла в день на 8 деталей більше, ніж друга, тому виконала завдання на 1 день раніше за другу. Скільки деталей виготовила перша бригада?

3.15. Дві бригади школярів, працюючи разом, закінчили садити дерева на навчально-дослідній ділянці за 4 дні. Скільки днів витратила б на виконання цієї роботи кожна бригада, якби одна з них могла закінчити садіння дерев на 6 днів швидше, ніж друга?

3.16. У трьох коробках 52 цукерки. Їх кількість співвідноситься як 3:4:6. скільки цукерок у першій коробці?

3.17. Бригада повинна виконати завдання з виготовлення деталей за 5 днів, а виконала за 4 дні тому що виготовляла за день на 12 деталей більше, ніж намічалося планом. Скільки деталей виготовила бригада?

3.18. Знайти найменше з двох чисел, сума яких дорівнює 17,а сума їх квадратів дорівнює 185.

3.19. За течією річки катер пройшов за 7 год стільки ж кілометрів, скільки проходить за 8 год проти течії річки. Власна швидкість катера 30 км/год. Знайти швидкість течії річки.

3.20. Одне число в 3 рази більше за інше. Якщо друге число збільшити в 5 разів, то воно стане більше за перше на 7. Знайти суму цих чисел.

Розв’язати нерівність (**4.1. – 4.18.**)

4.1. $5x^2-17x-12>0.$

4.2. $x(x-7)-18>7(9-x).$

4.3. $4(2x-1)-3(3x+2)>1.$

4.4. $9(x-2)-3(2x+1)>5x.$

4.5. $4(2x-1)-3(x+2)>5.$

4.6. $\frac{x-1}{2}+x<1{,}5x+3{,}5.$

4.7. $\frac{5x-2}{3}-\frac{3-x}{2}>1.$

4.8. $x-4(3-x)\geq 2x+6.$

4.9. $3+\frac{2-3x}{4}\leq 2x.$

4.10. $\frac{x-1}{4}-x<0.$

4.11. $\frac{2x}{3}-\frac{x-1}{6}+\frac{x+2}{2}\geq 0.$

4.12. $x-\frac{x-3}{4}+\frac{x+1}{8}>2.$

4.13. $\frac{x-1}{3}-2x>\frac{3x+1}{2}.$

4.14. $6(y-1{,}5)-3{,}4\geq 4y-2{,}4.$

4.15. $\frac{2x-1}{5}-3x>\frac{10x+1}{5}.$

4.16. $1{,}7-2(3x-1)>0{,}3-4x.$

4.17. $2x^2+7x-4>0.$

4.18. $\frac{3x+2}{4}-\frac{x-3}{2}<3.$

Розв’язати систему нерівностей (**5.1. – 5.15.**)

5.1 . $\begin{cases}2x+9>0,\\9x-1<0.\end{cases}$

5.2. $\begin{cases}4-6x\leq 1,\\3{,}6+x>3{,}8.\end{cases}$

5.3. $\begin{cases}3(x-1)-2(1+x)<1,\\3x-4>0.\end{cases}$

5.4. $\begin{cases}5(2x-1)-3(3x+6)<2,\\2x-17>0.\end{cases}$

5.5. $\begin{cases} 2(3x-1)-(x+8)<0, \\ 3-5x<11. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}+\dfrac{x}{3}<7, \\ 3x-1<5. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} \dfrac{3x+6}{8}>0, \\ \dfrac{x}{11}<1. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x-\dfrac{x}{4}\ge 2, \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-2}{3}>1. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{6}+\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x-8}{2}>x-1, \\ 2-2x>0{,}5+0{,}5x. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} 6-2x<3(x-1), \\ 6-\dfrac{x}{2}\ge x. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 3+4x\le 1, \\ 2-7x>3. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} 2-4x\ge 1, \\ 3x+2<1. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} 10-4x\ge 3(1-x), \\ 3{,}5+\dfrac{x}{4}<2x. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} 3(x+1)+2(x-2)\le 4x-5, \\ 4(x-2)-3(x+1)\le 2x-2. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} 2x+10<1{,}5x+20, \\ 3x+4<2x+16. \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра і теорія чисел / [С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Г. І. Хацет]. – Ч. 1. – К. : Вища шк. Головне вид-во, 1974. – 464 с.

2. Андронов И. К. Арифметика: развитие понятия числа и действий над числами : пособ. для фак-тов нач. школы педагог. ин-тов и педагог. училищ / И. К. Андронов. – Изд. 2-е испр. и доп. – М. : Учпедгиз, 1962. – 374 с.

3. Бородін О. І. Теорія чисел / О. І. Бородін. – Вид. 3-тє. – К. : Вища шк., 1970. – 275с.

4. Гребенча М. К. Арифметика : пособ. для учительських ин-тов / М. К. Гребенча, С. Е. Ляпин. – М. : Учпедгиз, 1952. – 280 с.

5. Задачник-практикум по математике / [Н. Я. Виленкин, Н. Н. Ларова и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 205 с.

6. Збірник задач з арифметики для педагогічних училищ / [В. А. Ігнатьев, М. І. Ігнатьєв, О. Я. Шор]. – Вид. 3-тє. – К. : Рад. шк., 1964. – 263 с.

7. Курс математики : навчальний посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк та ін. – К. : Вища шк. – 1995. – 392 с.

8. Кухар В. М. Теоретичні основи початкового курсу математики : навч. посіб. для педагог. училищ / В. М. Кухар, Б. М. Білий. – Вид. 2-ге, – К. : Вища шк., Головне вид-во. – 1987. – 319 с.

9. Лаврова Н. Н. Задачник-практикум по математике : учеб. пособие для студентов-заочн. I-III курсов фак-тов педагогики и методики начальн. обуч. педагог. ин-тов / Н. Н. Лаврова, Л. П. Стойлова. – М. : Просвещение, 1985. – 183 с.

10. Математика : навч. посібник / [Н. І. Затула, А. М. Зуб, Г. І. Коберник, А. Ф. Нещадим]. – К. : Кондор, 2006. – 560 с.

11. Математика : посібник для пединститутів / [В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, В. Н. Костарчук та ін.]. – К. : Вища шк., Головне вид-во, 1980. – 400 с.