Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

О. В. Махней

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Методичні рекомендації
для самостійної роботи студентів
напряму підготовки «прикладна математика»
вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2014

УДК 004.94:519.872
ББК 22.18
М36

Рекомендовано Вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів напряму підготовки «прикладна математика» (протокол № 6 від 27 лютого 2014 р.).

Рецензенти:

Мазуренко В. В., кандидат фізико-математичних наук (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника),

Власій О. О., кандидат технічних наук (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

М36 Махней О. В. Математичне моделювання : методичні рекомендації / О. В. Махней. — Івано-Франківськ : Голіней, 2014. — 36 с.

Для самостійної роботи студентів напряму підготовки «прикладна математика». Може бути корисним для студентів фізико-математичних, природничих і технічних напрямів підготовки, аспірантів, науково-технічних працівників.

УДК 004.94:519.872
ББК 22.18

Зміст

Передмова 4
Автомати 5
Поняття про скінченні і клітинні автомати 5
Вправи 7
Аналітичне моделювання систем масового обслуговування 9
Аналіз часової діаграми для системи масового обслуговування 9
Багатоканальні системи масового обслуговування з відмовами 13
Багатоканальні системи масового обслуговування з чергою довільної довжини 15
Основи операційного аналізу мереж систем масового обслуговування 16
Вправи 20
Мережі Петрі 26
Поняття класичної мережі Петрі 26
Програма HPSim для імітаційного моделювання мереж Петрі 31
Вправи 32
Список рекомендованої літератури 35

Передмова

Моделювання — це найбільш потужний універсальний метод дослідження й оцінювання ефективності різноманітних систем. Під математичним моделюванням розуміють процес створення для заданого реального об'єкта деякої математичної моделі. Нею може бути як система рівнянь, так і комп'ютерна програма. Кожна математична модель описує реальний об'єкт з деякою мірою наближення. Дослідження моделі дає можливість встановити характеристики реального об'єкта. Математичне моделювання є одним з основних способів моделювання систем.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів напряму підготовки «прикладна математика» з навчальної дисципліни «Математичне моделювання». На вивчення навчальної дисципліни відводиться 18 годин лекцій і 16 годин практичних занять. У курсі «Математичне моделювання» вивчаються основи скінченних і клітинних автоматів, аналітичного моделювання систем масового обслуговування і мереж Петрі. Поряд з навчальною дисципліною «Математичне моделювання» студенти напряму підготовки «прикладна математика» вивчають дисципліни «Прикладні задачі, що приводять до звичайних диференціальних рівнянь», «Теорія систем і математичне моделюванння», «Імітаційне моделювання», в яких розглядаються інші методи математичного моделювання.

Методичні рекомендації містять мінімально необхідний теоретичний матеріал для розв'язування задач, приклади розв'язування типових вправ та завдання для самостійного розв'язування. Останні можуть також використовуватись для проведення практичних занять.

Автомати

Поняття про скінченні і клітинні автомати

Теорія автоматів — це розділ математичної кібернетики, в якому вивчаються математичні моделі — автомати.

Автомат Мілі для кожного символу x з вхідного алфавіту X і кожного стану q з множини допустимих станів Q ставить у відповідність деякий символ y з вихідного алфавіту Y і деякий стан q' з множини станів Q. У випадку скінченних множин X, Q і Y автомат Мілі називають скінченним.

Приклад 1. Побудувати скінченний автомат Мілі для керування ліфтом у двоповерховому будинку.

Розв'язання. Вхідний алфавіт автомата складається з кнопок виклику відповідного поверху: $X = \{C1, C2\}$; вихідний алфавіт складається зі зміщень на один поверх вверх або вниз, а також зупинки ліфта: $Y = \{U1, D1, S\}$; стан відповідає поверху, на якому знаходиться ліфт: $Q = \{q_1, q_2\}$. Функція переходів цього автомата зручно подається діаграмою станів (рис. 1). Лінії зі стрілками визначають переходи зі стану в стан, кожен з написів біля цих ліній містить кнопку виклику відповідного поверху з вхідного алфавіту і вихідний сигнал для зміщення чи зупинки ліфта, відокремлені вертикальною рискою. ■

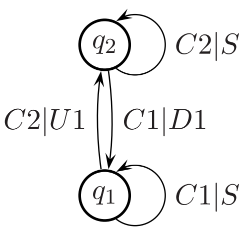


Рис. 1

Автомат Мура для кожного символу x з вхідного алфавіту X і кожного стану s з множини допустимих станів S ставить у відповідність деякий стан s' з множини станів S, який однозначно визначає символ y вихідного алфавіту Y. У випадку скінченних множин X, S і Y автомат Мура називають скінченним.

Приклад 2. Скласти автомат Мура для керування автоматом для продажу кави. Вартість кави — 5 грн. Автомат приймає банкноти номіналом в одну, дві і п'ять гривень, всі інші папірці ігноруються. Банкноти приймаються по черзі. Після накопичення достатньої суми автомат видає каву. Автомат здачу не дає.

Розв'язання. Вхідний алфавіт автомата Мура складається з чисел 1, 2 і 5 — номіналів банкнот, а вихідний — з чисел 0 (сума недостатня) і 1 (сума достатня). Можливими станами є s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, які відповідають накопиченій сумі. Якщо накопичена сума перевищує 5, наприклад, $2+2+2$, то можна вважати, що досягнутий стан s_5. Діаграму станів зображено на рис. 2. Функція виходу для станів s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 набуває значення 0, а для стану s_5 вона дорівнює 1. ■

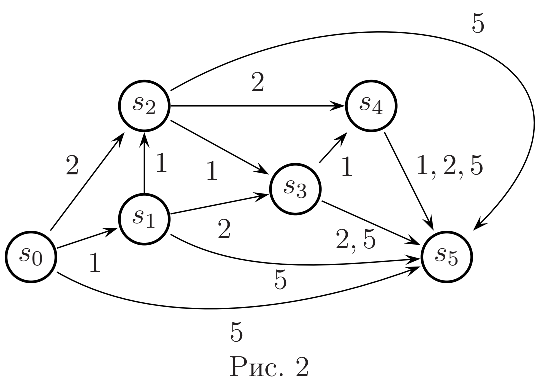


Рис. 2

Перетворимо автомат Мілі з прикладу 1 в автомат Мура. Для цього розширимо множину внутрішніх станів до чотирьох. Діаграма станів наведена на рис. 3, причому для кожного стану s_j автомата Мура під рискою вказується відповідний стан q_k автомата Мілі і вихідний сигнал.

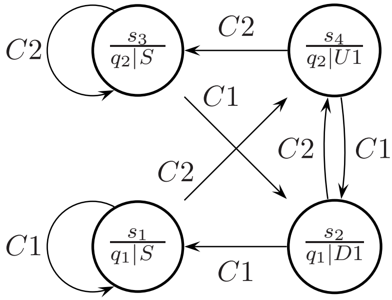


Рис. 3

Клітинні автомати є окремим випадком скінченних автоматів. Їх використовують для моделювання динамічної поведінки однорідних двовимірних і тривимірних середовищ у дискретному просторі і часі. При створенні клітинних автоматів весь простір розбивається регулярною ґраткою на таблицю комірок, які називають *клітинками*. Кожна з клітинок може знаходитись в одному зі скінченної кількості станів. Кожній клітинці ставиться у відповідність *клітинний автомат*. Глибше з клітинними автоматами можна ознайомитись в [1].

Вправи

1. Створіть автомат Мілі для керування ліфтом у триповерховому будинку. Перетворіть його в автомат Мура.

2. Перетворіть автомат Мура для продажу кави з прикладу на стор. 6 в автомат Мілі.

3. Складіть програму для реалізації клітинного автомата «Життя», поведінка якого відповідає наступним правилам:

– клітинка може перебувати у двох станах — активному і пасивному;

– в якості околу розглядається вісім сусідніх клітинок;

– якщо в околі пасивної клітинки є рівно три активних клітинки, то клітинка стає активною («народжується»);

– якщо в околі активної клітинки є дві чи три активних клітинки, то клітинка залишається активною («виживає»);

– якщо в околі активної клітинки є менше двох чи більше трьох активних клітинок, то вона стає пасивною («помирає» від самотності чи перенаселення).

Стан клітинного простору потрібно відображати графічно. Дослідіть еволюцію клітинного автомата для кількох початкових розташувань активних клітин.

4. Розробіть програму для реалізації клітинного автомата «Дюни», поведінка якого відповідає наступним правилам:

– квадратна клітинка може перебувати в активному або пасивному («схованому») стані;

– якщо клітинка була активною і з восьми сусідніх клітинок є N або більше активних клітинок, то вона «ховається»;

– час перебування в «схованому» стані складає W тактів;

– якщо час «ховання» закінчився і в околі не більше, ніж M активних клітинок, то клітинка знову стає активною.

Здійсніть моделювання для поля 250×250 клітинок з крайовими умовами циклічного типу, чисел $N = 3$, $W = 5$, $M = 3$ і деякого початкового розподілу активних клітинок. Дослідіть еволюцію клітинного автомата.

5. Розробіть програму для реалізації клітинного автомата «Робот», поведінка якого відповідає наступним правилам:

– квадратна клітинка може перебувати в активному або пасивному стані;

– в початковий момент часу всі клітинки пасивні, в центральній клітинці перебуває «Робот», напрямлений направо;

– «Робот» переходить у сусідню клітинку, якщо вона активна, він робить її пасивною і повертає наліво на 90°, якщо клітинка пасивна, він робить її активною і повертає направо на 90°.

Аналітичне моделювання систем масового обслуговування

Аналіз часової діаграми для системи масового обслуговування

Розглянемо приклад роботи багатоканальної системи масового обслуговування з двома пристроями (Пр1 і Пр2) з трьома позиціями для чекання в черзі (Поз1, Поз2 і Поз3). Її часову діаграму наведено на рис. 4. Час надходження вимоги до системи і час, коли вона залишила систему, наведено поряд з номером вимоги відповідно в нижній і верхній частинах рис. 4. Час вимірюється у хвилинах і для зручності заокруглений до цілого числа хвилин.

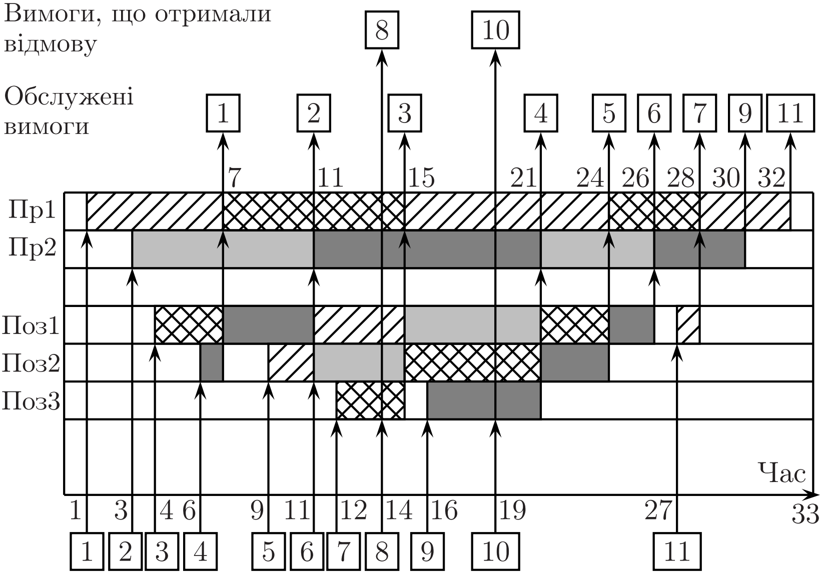


Рис. 4.

На основі цієї діаграми знайдемо основні характеристики роботи заданої системи масового обслуговування. З діаграми видно, що час спостереження за роботою системи становить $T_{\text{сп}} = 33$ хв.

1. Імовірність обслуговування вимоги:

$$P_{\text{об}} = \frac{N_{\text{об}}}{N} = \frac{9}{11} \approx 0{,}818,$$

де $N_{\text{об}}$ і N — відповідно кількість обслужених вимог і загальна кількість вимог.

2. Інтенсивність вхідного потоку:

$$\lambda = \frac{N}{T_{\text{сп}}} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \text{ вимоги/хв.}$$

3. Пропускна здатність системи:

$$X = \frac{N_{\text{об}}}{T_{\text{сп}}} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11} \approx 0{,}273 \text{ вимоги/хв.}$$

4. Імовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{\text{від}} = \frac{N_{\text{від}}}{N} = \frac{2}{11} \approx 0{,}182,$$

де $N_{\text{від}}$ — кількість вимог, яким відмовлено в обслуговуванні.

5. Імовірність того, що вимога застане обидва пристрої вільними:

$$P_0 = \frac{T_{\text{вілн}}}{T_{\text{сп}}} = \frac{2}{33} \approx 0{,}061,$$

де $T_{\text{вілн}}$ — час, протягом якого обидва пристрої були вільними.

6. Імовірність того, що обслуговуванням зайнятий тільки один пристрій з двох:

$$P_1 = \frac{T_{\text{з}1} + T_{\text{з}2}}{T_{\text{сп}}} = \frac{2+2}{33} \approx 0{,}121,$$

де $T_{\text{з}1}$ і $T_{\text{з}2}$ — час, протягом якого був зайнятим відповідно лише перший і лише другий пристрої.

7. Імовірність того, що обслуговуванням зайняті обидва пристрої, а в черзі відсутні вимоги:

$$P_2 = \frac{T_{\text{з}1,2}}{T_{\text{сп}}} = \frac{(4-3)+(27-26)+(30-28)}{33} = \frac{4}{33} \approx 0,121,$$

де $T_{\text{з}1,2}$ — час, протягом якого були зайнятими обидва пристрої, а в черзі не було вимог.

8. Імовірність того, що в черзі є лише одна вимога:

$$P_3 = \frac{T_{\text{чер},1}}{T_{\text{сп}}} = \frac{(6-4)+(9-7)+(26-24)+(28-27)}{33} = \\ = \frac{7}{33} \approx 0{,}212,$$

де $T_{\text{чер},1}$ — час, протягом якого в черзі перебувала лише одна вимога.

9. Імовірність того, що в черзі знаходилось дві вимоги:

$$P_4 = \frac{T_{\text{чер},2}}{T_{\text{сп}}} = \frac{(7-6)+(12-9)+(16-15)+(24-21)}{33} = \\ = \frac{8}{33} \approx 0{,}242,$$

де $T_{\text{чер},2}$ — час, протягом якого в черзі перебувало дві вимоги.

10. Імовірність того, що в черзі знаходилось три вимоги:

$$P_5 = \frac{T_{\text{чер},3}}{T_{\text{сп}}} = \frac{(15-12)+(21-16)}{33} = \frac{8}{33} \approx 0{,}242,$$

де $T_{\text{чер},3}$ — час, протягом якого в черзі було три вимоги.

11. Середня кількість пристроїв, зайнятих обслуговуванням:

$$N_{\text{пр}} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot (P_2 + P_3 + P_4 + P_5) = \\ = 1 \cdot \frac{4}{33} + 2 \cdot \left(\frac{4}{33} + \frac{7}{33} + \frac{8}{33} + \frac{8}{33}\right) = \frac{58}{33} \approx 1{,}76.$$

12. Середня кількість вимог у черзі:

$$N_{\text{чер}} = 1 \cdot P_3 + 2 \cdot P_4 + 3 \cdot P_5 =$$
$$= 1 \cdot \frac{7}{33} + 2 \cdot \frac{8}{33} + 3 \cdot \frac{8}{33} = \frac{47}{33} \approx 1{,}42.$$

13. Середній час перебування вимог у черзі:

$$t_{\text{чер}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} t_{\text{чер},i}}{N_{\text{об}}} =$$
$$= \frac{0+0+3+5+6+10+12+0+10+0+1}{9} = \frac{47}{9} \approx 5{,}22 \text{ хв},$$

де $t_{\text{чер},i}$ — час перебування i-ї вимоги в черзі ($i = 1, 2, \ldots, N$).

14. Середній час перебування вимог у черзі без врахування вимог, які не чекали:

$$t_{\text{чер}}^{-} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} t_{\text{чер},i}}{N_{\text{об(-0)}}} = \frac{3+5+6+10+12+10+1}{7} = \frac{47}{7} \approx 6{,}71 \text{ хв},$$

де $N_{\text{об(-0)}}$ — кількість вимог, які чекали в черзі.

15. Середній час обслуговування вимоги пристроями:

$$t_{\text{об}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} t_{\text{об},i}}{N_{\text{об}}} = \frac{6+8+8+10+9+5+4+4+4}{9} = \frac{58}{9} \approx$$
$$\approx 6{,}44 \text{ хв},$$

де $t_{\text{об},i}$ — час обслуговування i-ї вимоги пристроєм ($i = 1, 2, \ldots, N$).

16. Загальний середній час перебування вимоги в системі масового обслуговування:

$$T = t_{\text{чер}} + t_{\text{об}} = \frac{47}{9} + \frac{58}{9} = \frac{35}{3} \approx 11{,}67 \text{ хв}.$$

17. Середня кількість вимог у системі масового обслуговування:

$$\bar{N} = N_{\text{чер}} + N_{\text{пр}} = \frac{47}{33} + \frac{58}{33} = \frac{35}{11} \approx 3{,}18.$$

Багатоканальні системи масового обслуговування з відмовами

Нехай задана n-канальна система масового обслуговування з відмовами. Вхідний потік вимог у систему утворює стаціонарний пуассонівський (найпростіший) потік з інтенсивністю λ. Час обслуговування вимоги в каналі є випадковим і утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю μ. У цьому випадку знаходять зведену інтенсивність α і ймовірності p_0, p_1, ..., p_n за формулами:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}, \quad p_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\right)^{-1}, \tag{1}$$

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Імовірність відмови системи

$$P_{\text{відм}} = p_n = \frac{\alpha^n}{n!} p_0. \tag{3}$$

Імовірність обслуговування вимоги

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_0. \tag{4}$$

Пропускна здатність A — це середня кількість вимог, обслужених системою за одиницю часу:

$$A = \lambda P_{\text{обсл}}. \tag{5}$$

Середня кількість зайнятих каналів

$$N_{\text{з}} = p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n. \tag{6}$$

Коефіцієнт завантаження одного каналу

$$K_З = \frac{N_З}{n}. \tag{7}$$

Зокрема, для $n = 1$

$$P_{\text{відм}} = N_З = K_З = \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Обґрунтування наведених вище формул можна знайти в [1].

Приклад. У перукарні є три перукарі. Час обслуговування клієнта кожним з них є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 10 хвилин. Клієнти часом своєї появи утворюють стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda = 1/5$. Якщо всі перукарі зайняті, то клієнт іде в іншу перукарню, яка знаходиться поруч. Знайти ймовірність того, що клієнт піде в іншу перукарню, пропускну здатність системи, середню кількість зайнятих перукарів, коефіцієнт завантаження перукаря.

Розв'язання. Проміжки між подіями у стаціонарному пуассонівському потоці мають експоненціальний закон розподілу. З курсу теорії ймовірностей відомо, що інтенсивність потоку подій λ для експоненціального закону розподілу проміжків між подіями є оберненою величиною до середнього значення. Тому в цій задачі $\lambda = 1/5$, $\mu = 1/10$, $n = 3$. Отже, зведена інтенсивність $\alpha = 2$, а за формулами (1)–(7) маємо:

$$p_0 = \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right)^{-1} = \frac{3}{19},$$

$$p_1 = \frac{6}{19}, \quad p_2 = \frac{6}{19}, \quad p_3 = \frac{4}{19} \quad \Rightarrow$$

$$P_{\text{відм}} = \frac{4}{19} \approx 0{,}21, \quad A = \frac{3}{19} \approx 0{,}16,$$

$$N_З = \frac{6}{19} + 2\cdot\frac{6}{19} + 3\cdot\frac{4}{19} = \frac{30}{19} \approx 1{,}58, \quad K_З = \frac{10}{19} \approx 0{,}53. \ \blacksquare$$

Багатоканальні системи масового обслуговування з чергою довільної довжини

Нехай задана n-канальна система масового обслуговування з безліччю позицій для очікування в черзі. Вхідний потік вимог у систему утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю λ. Час обслуговування вимоги в каналі є випадковим і утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю μ. Тоді зведена інтенсивність $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ і, якщо виконується нерівність

$$\frac{\alpha}{n} < 1,$$

то обчислюють імовірність

$$p_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha^n}{(n-1)!\,(n-\alpha)}\right)^{-1}, \quad (8)$$

знаходять *середню кількість зайнятих каналів*

$$N_з = \alpha, \quad (9)$$

коефіцієнт завантаження одного каналу

$$K_з = \frac{\alpha}{n}, \quad (10)$$

середню кількість вимог у черзі

$$L_ч = \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!\,(n-\alpha)^2} p_0 \quad (11)$$

і *середній час очікування в черзі*

$$W_ч = \frac{L_ч}{\lambda}. \quad (12)$$

Зокрема, для $n = 1$ при виконанні умови $\alpha < 1$ маємо:

$$N_з = K_з = \alpha, \quad L_ч = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}.$$

Якщо $\frac{\alpha}{n} \geqslant 1$, то довжина черги і середній час очікування в черзі при $t \to \infty$ прямують до нескінченності, коефіцієнт завантаження одного каналу прямує до одиниці, а середня кількість зайнятих каналів — до n.

Приклад. У перукарні є три перукарі. Час обслуговування клієнта кожним з них є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 10 хвилин. Клієнти часом своєї появи утворюють стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda = 1/5$. Знайти середню кількість зайнятих перукарів, коефіцієнт завантаження перукаря, середню довжину черги і середній час очікування в черзі.

Розв'язання. У цій задачі $\lambda = 1/5$, $\mu = 1/10$, $n = 3$. Отже, зведена інтенсивність $\alpha = 2$, а оскільки $\frac{\alpha}{n} = \frac{2}{3} < 1$, то черга є скінченною і за формулами (8)–(12) маємо:

$$p_0 = \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{2!\,(3-2)}\right)^{-1} = \frac{1}{9},$$

$$N_з = 2, \quad K_з = \frac{2}{3} \approx 0{,}667,$$

$$L_ч = \frac{2^4}{2!\,(3-2)^2}\frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889, \quad W_ч = 5L_ч = \frac{40}{9} \approx 4{,}44. \ \blacksquare$$

Основи операційного аналізу мереж систем масового обслуговування

Введемо основні операційні змінні:

– q_{0j} — імовірність надходження вимог з зовнішнього середовища до j-го вузла мережі, $j = 1, 2, \ldots, n$, де n — загальна кількість вузлів;

– q_{kj} — імовірність надходження вимог від k-го до j-го вузла мережі, $k, j = 1, 2, \ldots, n$;

– q_{k0} — імовірність того, що після закінчення обслуговування у k-му вузлі вимоги залишать мережу, $k = 1, 2, \ldots, n$;

– A_k — кількість вимог, які надійшли до k-го вузла за час спостереження за системою, $k = 1, 2, \ldots, n$;

– A_{0j} — кількість вимог, які надійшли з зовнішнього середовища до j-го вузла за час спостереження за системою, $j = 1, 2, \ldots, n$;

– C_{kj} — кількість вимог, які залишили k-й вузол і перейшли до j-го вузла мережі за час спостереження за системою, $k, j = 1, 2, \ldots, n$;

– C_{k0} — кількість вимог, які залишили k-й вузол і перейшли до зовнішнього середовища за час спостереження за системою, $k = 1, 2, \ldots, n$;

– T — загальний час спостереження за системою;

– B_k — загальний час обслуговування вимог у k-му вузлі, $k = 1, 2, \ldots, n$ (вузол вважається зайнятим, якщо в ньому перебуває хоч одна вимога).

Введемо додаткові операційні змінні:

$$C_k = \sum_{j=0}^{n} C_{kj}, \quad A_0 = \sum_{j=1}^{n} A_{0j}, \quad C_0 = \sum_{k=1}^{n} C_{k0},$$

де C_k — кількість вимог, які залишили k-й вузол, A_0 — кількість вимог, які надійшли до вузлів мережі із зовнішнього середовища, C_0 — кількість вимог, які залишили мережу.

Крім того, розглядають наступні додаткові операційні змінні:

– інтенсивність надходження вимог до k-го вузла

$$\lambda_k = \frac{A_k}{T};$$

– коефіцієнт використання k-го вузла

$$U_k = \frac{B_k}{T};$$

– середній час обслуговування у k-му вузлі

$$S_k = \frac{B_k}{C_k};$$

– інтенсивність вихідного потоку вимог з k-го вузла

$$X_k = \frac{C_k}{T}.$$

Основні співвідношення операційного аналізу формулюються у вигляді операційних залежностей. Розглянемо деякі з них.

Закон коефіцієнта використання вузла:

$$U_k = X_k S_k. \tag{13}$$

Рівність $A_0 = C_0$ є ознакою балансу вхідного і вихідного потоків вимог для мережі. Рівності $A_j = C_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, є ознаками балансів вхідних і вихідних потоків вимог для вузлів мережі. Вони виконуються, якщо мережа систем масового обслуговування працює з перевантаженням.

У припущенні, що $A_j = C_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, має місце *система балансу потоків вимог*

$$X_j = \sum_{k=0}^{n} X_k q_{kj}, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Детальніше з операційним аналізом мереж систем масового обслуговування можна ознайомитись в [5].

Приклад. На рис. 5 подано мережу систем масового обслуговування, яка працює з перевантаженням. Вузли мережі позначено квадратиками з їх номерами, для позначення черг перед вузлами використовуються символи $\sqsupset\!|\!|$. Середній час обслуговування вимог у вузлах мережі є наступним: $S_1 = 0{,}05$ с, $S_2 = 0{,}03$ с, $S_3 = 0{,}09$ с, $S_4 = 0{,}01$ с. Проаналізувати вузькі місця мережі і визначити найбільшу кількість вимог, яку мережа зможе опрацювати за одиницю часу, тобто максимальну інтенсивність вхідного потоку. Обчислити коефіцієнти використання всіх вузлів мережі і вихідні потоки з усіх вузлів для знайденого вхідного потоку.

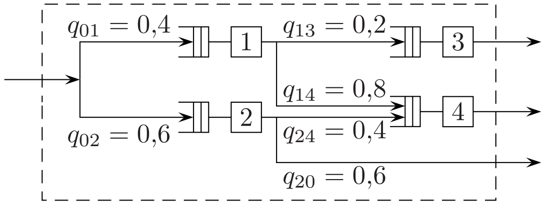


Рис. 5.

Розв'язання. Складемо систему балансу (14) для мережі з рис. 5:

$$\begin{cases} X_0 = X_3 + X_4 + 0{,}6X_2, \\ X_1 = 0{,}4X_0, \\ X_2 = 0{,}6X_0, \\ X_3 = 0{,}2X_1, \\ X_4 = 0{,}8X_1 + 0{,}4X_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} X_1 = 0{,}4X_0, \\ X_2 = 0{,}6X_0, \\ X_3 = 0{,}08X_0, \\ X_4 = 0{,}56X_0. \end{cases}$$

За формулами (13) визначаємо коефіцієнти використання вузлів через інтенсивність вхідного потоку X_0:

$$U_1 = 0{,}02X_0, \quad U_2 = 0{,}018X_0, \quad U_3 = 0{,}0072X_0, \quad U_4 = 0{,}0056X_0.$$

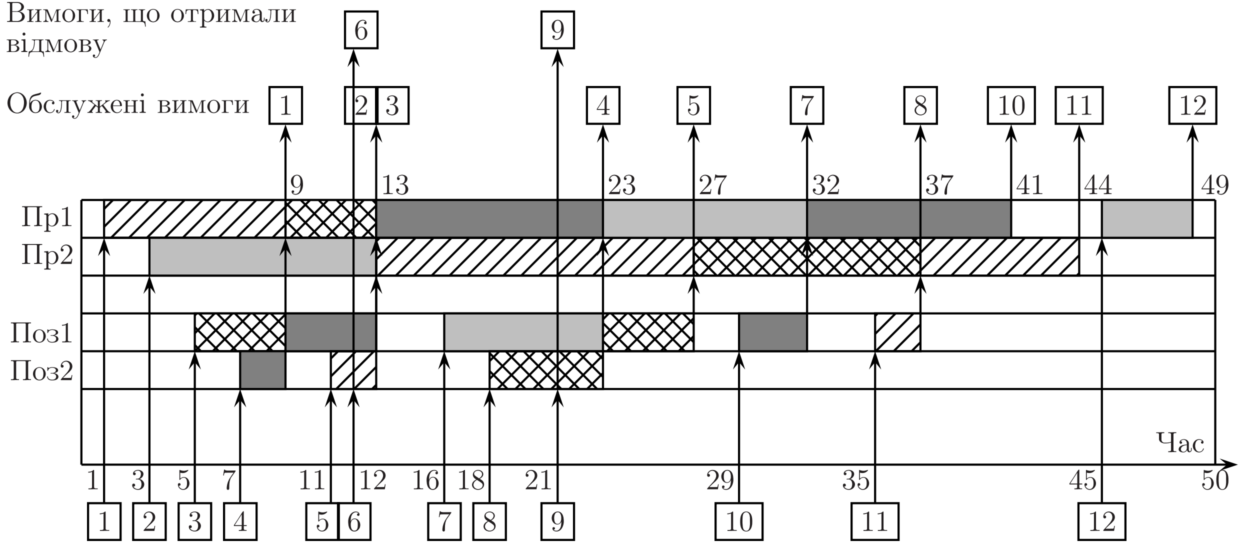
Найбільшим є коефіцієнт використання першого вузла, тому саме перший вузол є вузьким місцем даної мережі. Оскільки коефіцієнт використання вузла не може бути більшим 1, то з рівності $0{,}02X_0 = 1$ отримуємо $X_0 = 50$ — максимальна інтенсивність вхідного потоку. Тепер легко обчислити відповідні інтенсивності вихідних потоків і коефіцієнти використання всіх вузлів:

$$X_1 = 20, \quad X_2 = 30, \quad X_3 = 4, \quad X_4 = 28,$$
$$U_1 = 1, \quad U_2 = 0{,}9, \quad U_3 = 0{,}36, \quad U_4 = 0{,}28. \ \blacksquare$$

Вправи

1. Задана двоканальна система масового обслуговування з двома пристроями (Пр1 і Пр2) з двома позиціями для чекання в черзі (Поз1 і Поз2). Її часову діаграму наведено на рис. 6. Час надходження вимоги до системи і час, коли вона залишила систему, наведено поряд з номером вимоги відповідно в нижній і верхній частинах рис. 6. Час вимірюється у хвилинах і для зручності заокруглений до цілого числа хвилин.

Знайдіть імовірність обслуговування вимоги, інтенсивність вхідного потоку, пропускну здатність системи, імовірність відмови в обслуговуванні, імовірність того, що вимога застане обидва пристрої вільними, імовірність того, що обслуговуванням зайнятий тільки один пристрій з двох, імовірність того, що обслуговуванням зайняті обидва пристрої, але в черзі відсутні вимоги, імовірність того, що в черзі є лише одна вимога, імовірність того, що в черзі знаходиться дві вимоги, середню кількість пристроїв, зайнятих обслуговуванням, середню кількість вимог у черзі, середній час перебування вимог у черзі, середній час перебування вимог у черзі без врахування вимог, які не чекали, середній час обслуговування вимоги пристроями, загальний середній час перебування вимоги в системі масового обслуговування, середню кількість вимог у системі масового обслуговування.


Вимоги, що отримали відмову
Обслужені вимоги
Пр1
Пр2
Поз1
Поз2
Час
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
9
13
23
27
32
37
41
44
49
50
1
3
5
7
11
12
16
18
21
29
35
45
Рис. 6.

2. Система має чотири стани S_1, S_2, S_3, S_4. Імовірності перебування у цих станах дорівнюють $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$ відповідно. Розмічений граф станів зображено на рис. 7. Перехід системи зі стану i в стан j утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю λ_{ij}. Початковим є стан S_1. Складіть систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$ і запишіть початкові умови. Побудуйте також систему для фінальних імовірностей.

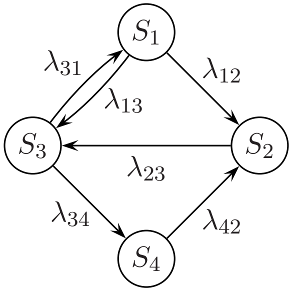


Рис. 7.

3. Розмічений граф станів зображено на рис. 8. Перехід системи зі стану i в стан j утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю λ_{ij}. Початковим є стан S_1. Складіть систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей перебування у станах $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$, $p_5(t)$ і запишіть початкові умови. Побудуйте також систему для фінальних імовірностей.

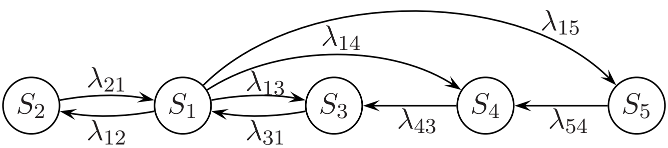


Рис. 8.

4. Розмічений граф станів зображено на рис. 9. Перехід системи зі стану i в стан j утворює стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю λ_{ij}. Початковим є стан S_1. Складіть систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей пе-

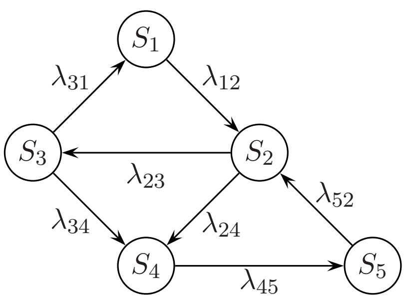


Рис. 9.

ребування у станах $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$, $p_5(t)$ і запишіть початкові умови. Побудуйте також систему для фінальних імовірностей.

5. Автоматизована телефонна станція має 5 ліній зв'язку. Вхідний потік викликів є стаціонарним пуассонівським з інтенсивністю 2 виклики за хв. Тривалості телефонних розмов утворюють стаціонарний пуассонівський потік. Середня тривалість телефонної розмови становить 1 хв. Потрібно визначити ймовірність відмови, середню кількість зайнятих ліній зв'язку і коефіцієнт завантаження однієї лінії.

6. Автостоянка має 10 місць. Тривалість перебування автомашини на стоянці є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 3 год. Інтенсивність вхідного стаціонарного пуассонівського потоку складає 3 машини за год. Якщо вільних місць на стоянці немає, то автомобілі їдуть шукати іншу стоянку. Потрібно визначити ймовірність відмови, середню кількість зайнятих місць і коефіцієнт завантаження одного місця.

7. Визначте мінімальну потрібну кількість ліжок у стаціонарі лікарні, якщо час перебування в лікарні хворого є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з середнім значенням 14 днів. Нові хворі не приймаються, якщо всі ліжка в стаціонарі зайняті. Потік надходження хворих є близьким до стаціонарного пуассонівського з інтенсивністю 3 людини за день. Імовірність відмови має не перевищувати 5%.

8. По конвеєру надходять деталі двох видів: A і B. Інтенсивність надходження деталей однакова і складає $\lambda_A = \lambda_B = 0{,}45$ деталей за хв., а їх потік є близьким до стаціонарного пуассонівського. Для обробки деталей використовуються два верстати, які можуть обробляти як деталі виду A, так і деталі виду B. Середній час обробки деталей (як одного виду, так і іншого) складає 2 хв., причому час обробки утворює стаціонарний пуассонівський потік. Потрібно визначити коефіцієнт завантаження верстатів, середню довжину черги і середній

час очікування в черзі.

9. Припустимо, що один раціоналізатор запропонував спеціалізувати кожен верстат з попередньої задачі тільки на один вид деталей. У результаті час обробки деталей на кожному з верстатів зменшився. На верстаті, який обробляє деталі типу A, він зменшився в середньому до 1,9 хв., а на верстаті, який обробляє деталі типу B, — до 1,95 хв. Потрібно визначити коефіцієнти завантаження верстатів, середні довжини черг, середній час очікування в чергах, а також загальну довжину черги. Чи вдалою є така раціоналізаторська пропозиція?

10. У магазині є одна каса. Середній час обслуговування одного покупця в касі складає 0,3 хв., причому час обслуговування утворює стаціонарний пуассонівський потік. Потік покупців є близьким до пуассонівського з інтенсивністю 3 покупці за хв. Визначте коефіцієнт завантаження каси, середню довжину черги і середній час очікування в черзі.

11. Визначте, скільки в магазині з попередньої задачі необхідно встановити кас, якщо інтенсивність потоку покупців зросте втричі. Середня довжина спільної черги до всіх кас не повинна перевищувати 10 осіб.

12. На рис. 10 подано мережу систем масового обслуговування, яка працює з перевантаженням. Середній час обслуговування вимог у вузлах мережі є наступним: $S_1 = 0{,}05$ с, $S_2 = 0{,}08$ с, $S_3 = 0{,}04$ с. Проаналізувати вузькі місця мережі і визначити найбільшу кількість вимог, яку мережа зможе опрацювати за одиницю часу, тобто максимальну інтенсивність вхідного потоку. Обчислити коефіцієнти використання всіх вузлів мережі і вихідні потоки з усіх вузлів для знайденого вхідного потоку.

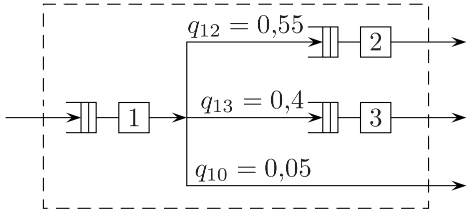


Рис. 10.

13. На рис. 11 подано мережу систем масового обслуговування, яка працює з перевантаженням. Середній час обслуговування вимог у вузлах мережі є наступним: $S_1 = 0{,}03$ с, $S_2 = 0{,}01$ с, $S_3 = 0{,}09$ с, $S_4 = 0{,}07$ с. Проаналізувати вузькі місця мережі і визначити найбільшу кількість вимог, яку мережа зможе опрацювати за одиницю часу, тобто максимальну інтенсивність вхідного потоку. Обчислити коефіцієнти використання всіх вузлів мережі і вихідні потоки з усіх вузлів для знайденого вхідного потоку.

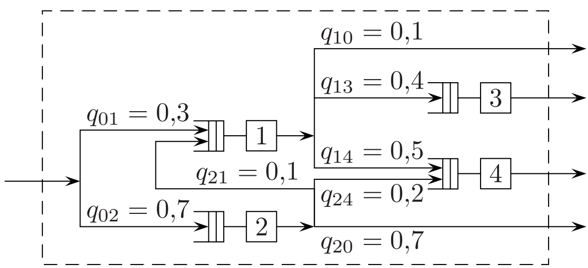


Рис. 11.

14. На рис. 12 подано мережу систем масового обслуговування, яка працює з перевантаженням. Середній час обслуговування вимог у вузлах мережі є наступним: $S_1 = 0{,}02$ с, $S_2 = 0{,}01$ с, $S_3 = 0{,}04$ с, $S_4 = 0{,}02$ с, $S_5 = 0{,}03$ с. Проаналізувати вузькі місця мережі і визначити найбільшу кількість вимог, яку мережа зможе опрацювати за одиницю часу, тобто максимальну інтенсивність вхідного потоку. Обчислити коефіцієнти використання всіх вузлів мережі і вихідні потоки з усіх вузлів для знайденого вхідного потоку.

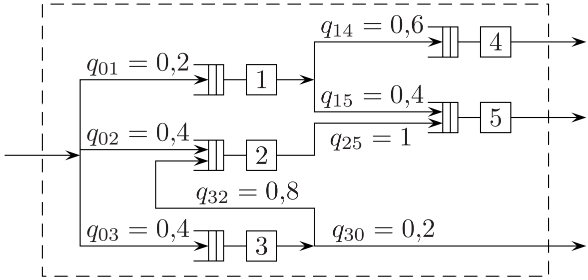


Рис. 12.

Мережі Петрі

Поняття класичної мережі Петрі

Мережа Петрі є орієнтованим дводольним графом, який має чотири базові елементи: вузли (позиції), переходи, дуги (ребра) і маркери (фішки). Дводольним називається граф, який має дві множини вершин і не має ребер, які з'єднують вершини однієї множини. Вузли визначають стан, в якому може знаходитись мережа чи її частина. Переходи — це активні елементи мережі, які визначають дії, що будуть виконуватись при спрацьовуванні переходів. Дуги з'єднують елементи протилежних типів: вузол з переходом і перехід з вузлом. Дуги не можуть з'єднувати безпосередньо вузли чи переходи. Вузли позначають кружками, переходи — рисками чи прямокутниками, дуги — лініями зі стрілками на кінцях, маркери — крапками. Маркери знаходяться всередині вузлів і переміщуються в мережі в результаті спрацьовування переходів. При великій кількості маркерів у вузлі відображають не крапки, а число відповідних маркерів.

Перехід називається *дозволеним* (*збудженим*), якщо всі його вхідні вузли містять маркери:

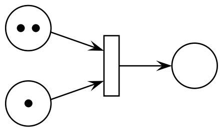


Рис. 13. Дозволений перехід

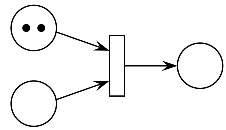


Рис. 14. Недозволений перехід

Дозволений перехід може спрацювати. При *спрацюванні* (*запуску*) *переходу* вилучаються маркери з усіх його вхідних вузлів і розміщуються у всіх його вихідних вузлах (рис. 15).

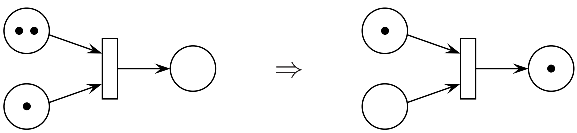


Рис. 15. Графічне зображення спрацювання переходу

Розглянемо теоретико-множинне подання мереж Петрі. Нехай $P = \{p_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — непорожня скінченна множина вузлів, $T = \{t_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — непорожня скінченна множина переходів, F — функція інцидентності, що задає зв'язок між елементами множин P і T, тобто $F : P \times T \cup T \times P \to N_0$, де $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Значення функції F визначають наявність і кратність дуг.

Розміткою (*маркуванням*) мережі будемо називати відображення $M : P \to N_0$, яке задає розміщення маркерів по вузлам. Тоді *мережа Петрі* — це $N = (P, T, F, M_0)$, де M_0 — початкова розмітка.

Поряд з графічним і теоретико-множинним визначенням мереж Петрі широко використовується матричне подання мереж. Функцію інцидентності F подамо матрицями B і D:

$$B = (b_{ij}),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},\ \ b_{ij} = F(p_i, t_j),$$
$$D = (d_{ij}),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},\ \ d_{ij} = F(t_j, p_i).$$

Матрицю B називають *матрицею входів*, а матрицю D — *матрицею виходів*. Для мереж без петель замість матриць B і

D можна використовувати одну матрицю $C = D - B$. Її називають *матрицею змінювань*.

Розмітку мережі подають вектором

$$\overline{M} = (\,M(p_1) \quad M(p_2) \quad \ldots \quad M(p_m)\,)^T.$$

Інваріантом вузлів мережі або *p-інваріантом* будемо називати ненульовий вектор-рядок $\overline{x} = (\,x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_m\,)$, який складається з невід'ємних цілих чисел і є розв'язком рівняння

$$\overline{x}C = 0. \tag{15}$$

Інваріантом переходів мережі або *t-інваріантом* будемо називати ненульовий вектор-стовпець $\overline{y} = (\,y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n\,)^T$, який складається з невід'ємних цілих чисел і є розв'язком рівняння

$$C\overline{y} = 0. \tag{16}$$

Інваріанти вузлів і переходів визначаються неоднозначно. Якщо існує інваріант вузлів, який складається лише з натуральних чисел, то мережу Петрі називають *p-інваріантною*.

Мережа Петрі є консервативною тоді і тільки тоді, коли вона є p-інваріантною. Кожна консервативна мережа Петрі є обмеженою. Отже, кожна p-інваріантна мережа Петрі є обмеженою, а необмежена мережа Петрі не є консервативною. Якщо існує інваріант вузлів, який складається лише з одиниць, то мережа Петрі є строго консервативною.

Мережа Петрі має стаціонарно повторювану послідовність тоді і тільки тоді, коли вона має інваріант переходів.

Детальніше з мережами Петрі можна ознайомитись в [3, 4].

Приклад. Проаналізувати мережу Петрі з рис. 16. Записати мережу Петрі у теоретико-множинному і матричному виглядах. Знайти інваріанти мережі і зробити висновки.

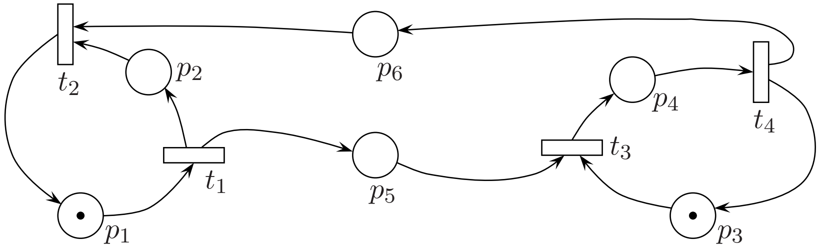


Рис. 16. Мережа N_1

Розв'язання. У цій мережі перехід t_1 моделює відправлення повідомлення, перехід t_3 — прийом повідомлення, перехід t_4 — відправлення підтвердження, перехід t_2 — отримання підтвердження. Переходи спрацьовують саме у цій послідовності, утворюючи цикл $t_1 t_3 t_4 t_2$.

Мережу Петрі N_1 можна формально записати так:

$$N_1 = (P, T, F, M_0),$$
$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}, \quad T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\},$$
$$F(p_1, t_1) = 1,\ F(p_2, t_2) = 1,\ F(p_3, t_3) = 1,\ F(p_4, t_4) = 1,$$
$$F(p_5, t_3) = 1,\ F(p_6, t_2) = 1,\ F(t_1, p_2) = 1,\ F(t_1, p_5) = 1,$$
$$F(t_2, p_1) = 1,\ F(t_3, p_4) = 1,\ F(t_4, p_3) = 1,\ F(t_4, p_6) = 1,$$
$$M_0(p_1) = 1,\ M_0(p_3) = 1.$$

Для скорочення запису вказані лише ненульові значення функцій F і M_0.

Побудуємо матричне подання мережі Петрі N_1:

$$N_1 = (B, D, \overline{M}_0),$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки мережа не має петель, то можливе подання $N_1 = (C, \overline{M}_0)$, де

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Інваріант вузлів знаходимо за формулою (15):

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_3 - x_4 + x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 + x_5, \\ x_4 = x_3 + x_5, \\ x_6 = x_5. \end{cases}$$

Надамо вільним невідомим x_2, x_3 і x_5 натуральних значень, наприклад, $x_2 = x_3 = x_5 = 1$. Тоді $x_1 = 2$, $x_4 = 2$, $x_6 = 1$ і існує інваріант вузлів $\overline{x} = (2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 1)$, який складається з натуральних чисел. Отже, мережа Петрі N_1 є консервативною й обмеженою, проте не є строго консервативною, бо ваговий вектор $\overline{x}$ не є одиничним.

Інваріант переходів знаходимо за формулою (16):

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 = 0, \\ y_1 - y_2 = 0, \\ -y_3 + y_4 = 0, \\ y_3 - y_4 = 0, \\ y_1 - y_3 = 0, \\ -y_2 + y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y_1 = y_2 = y_3 = y_4.$$

Інваріант переходів є, наприклад, таким: $\overline{y} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$. Тому мережа Петрі N_1 має стаціонарно повторювану послідовність переходів. ■

Програма HPSim для імітаційного моделювання мереж Петрі

Для імітаційного моделювання мереж Петрі створено багато програм. Коротко розглянемо одну з них. Програма HPSim дозволяє моделювати класичні мережі Петрі, а також деякі їх розширення. На рис. 17 наведено загальний вигляд вільної версії програми HPSim зі створеною у ній мережею N_1. Числа біля вузлів визначають їх ємність, біля переходів — величину затримки, а біля дуг — їх кратність.

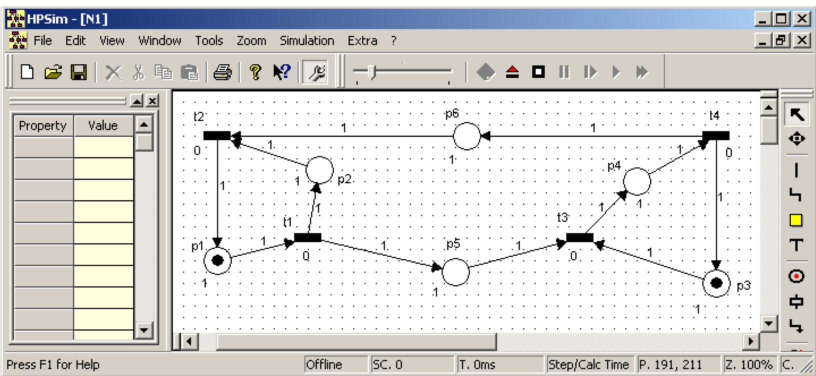


Рис. 17

Мережу Петрі у програмі HPSim будують за допомогою миші і кнопок панелі інструментів. Для створення вузлів, переходів і дуг використовують інструменти ,  і  відповідно. Для виділення створених об'єктів вибирають інструмент . Виділений об'єкт відображається червоним кольором, а зліва на спеціальній панелі наводяться його властивості. Виділений об'єкт можна переміщувати мишею і змінювати його властивості.

Вузол має наступні властивості: Name (ім'я), Size (розмір), Show Name (показувати ім'я), Show Capacity (показувати ємність), Initial Tokens (початкова кількість маркерів), Current Tokens (поточна кількість маркерів), Capacity (ємність, тобто максимальна допустима кількість маркерів у вузлі) і Tokens Count (кількість маркерів, які пройшли через вузол). Зазвичай змінюють властивості Name, Initial Tokens і Capacity. Для того щоб у вузлі могло перебувати більше одного маркера, потрібно властивості Capacity надати більшого від одиниці значення. Поточна кількість маркерів у вузлах відображається графічно у процесі моделювання. Властивість Tokens Count можна переглядати також під час моделювання. Для переходів і дуг теж можна задати ряд властивостей.

До мережі Петрі можна додатково додавати текстові написи, лінії і многокутники. Ці об'єкти не впливають на функціонування мережі і використовуються лише з метою її оформлення.

Кнопка  дозволяє перейти з режиму редагування мережі Петрі до режиму її моделювання і навпаки. Для запуску імітаційного моделювання мережі Петрі використовують кнопку , для покрокового виконання — , для зупинки — , для повернення до початкового стану — .

Процес моделювання графічно відображається у вікні з мережею Петрі. Крім того, у спеціальному вікні виводяться текстові повідомлення під час процесу моделювання. За замовчуванням моделювання триває протягом 1000 кроків або до досягнення термінальної (тупикової) розмітки чи обмеження на кількість маркерів у вузлі. Для збільшення тривалості моделювання вносять відповідні зміни на вкладці Simulation вікна, що відкривається командою меню Extra▶Properties.

Вільну версію програми HPSim можна знайти на сайті www.winpesim.de.

Вправи

1. Проаналізуйте мережу Петрі з рис. 18. Запишіть мережу Петрі у теоретико-множинному і матричному виглядах. Знайдіть інваріанти мережі і зробіть висновки.

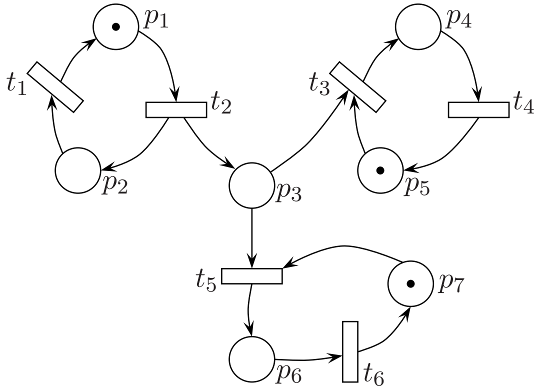


Рис. 18. Мережа N_2

2. Запишіть мережу Петрі з рис. 19 у матричному вигляді. Знайдіть інваріанти мережі і зробіть висновки.

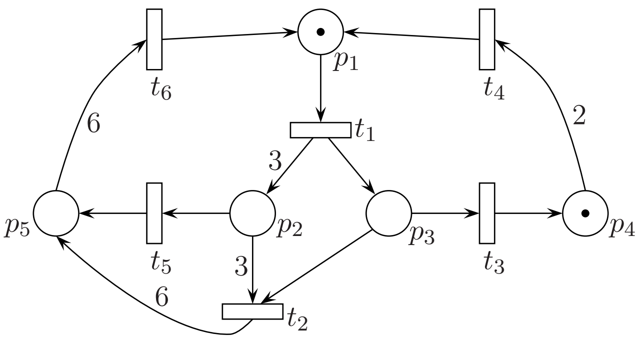


Рис. 19. Мережа N_3

3. Проаналізуйте мережу Петрі з рис. 20. Позбувшись петлі, запишіть мережу Петрі у теоретико-множинному і матричному виглядах. Знайдіть інваріанти мережі і зробіть висновки.

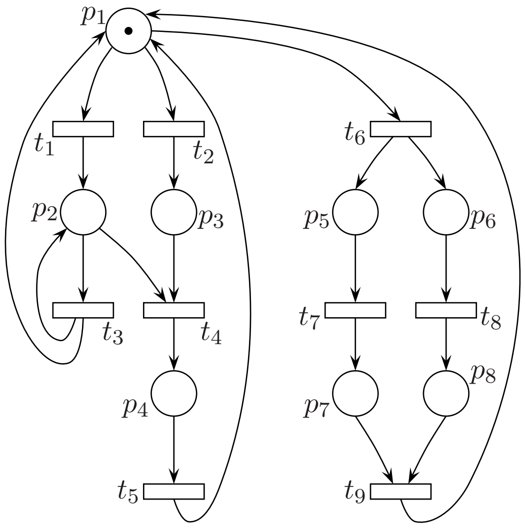


Рис. 20. Мережа N_4

4. За допомогою програми HPSim виконайте імітаційне моделювання мережі з рис. 18.

5. За допомогою програми HPSim виконайте імітаційне моделювання мережі з рис. 19.

6. За допомогою програми HPSim виконайте імітаційне моделювання мережі з рис. 20.

Список рекомендованої літератури

1. Введение в математическое моделирование / Под ред. П. В. Трусова. — М. : Логос, 2005. — 440 с.
2. Жерновий Ю. В. Марковські моделі масового обслуговування : Тексти лекцій / Ю. В. Жерновий. — Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. — 154 с.
3. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем : пер. с англ. / Дж. Питерсон. — М. : Мир, 1984. — 264 с.
4. Стеценко І. В. Моделювання систем / І. В. Стеценко. — Черкаси : ЧДТУ, 2009. — 399 с.
5. Томашевський В. М. Моделювання систем / В. М. Томашевський. — К. : Видавнича група BHV, 2005. — 352 с.

Підписано до друку 03.03.2014. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Друк цифровий.
Гарнітура Computer Modern Roman. Умовн. друк. арк. 2,09.
Тираж 100. Зам. № 52 від 03.03.2014.

Віддруковано: Приватний підприємець Голіней О. М.
76000, м. Івано-Франківськ,
вул. Галицька, 128,
тел.: (0342) 58-04-32.