Довгий О.Я.

Методичні рекомендації

до вивчення розділу

“ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ”

для студентів спеціальності

“Географія”

УДК 512.643+514
ББК 22.11
Д-12

Методичні рекомендації до вивчення розділу "Елементи лінійної алгебри" для студентів спеціальності "Географія" / Довгий О.Я. – Івано-Франківськ, 2013. – 85 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою Педагогічного інституту Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, протокол № 4 від 3.12.2013 р.

Автор, ураховуючи досвід навчально-методичної роботи зі студентами спеціальності "Географія", пропонує методичні рекомендації, щодо вивчення необхідного за обсягом матеріалу розділу "Лінійна алгебра" курсу вищої математики, яким студенти мають володіти, щоб мати фундамент для подальшого успішного освоєння інших розділів математики та математичної статистики.

Рецензенти:

Малицька Ганна Петрівна – доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Дем'янів Тереза Онуфріївна – доцент, завідувач кафедри фундаментальної і загальної підготовки приватного вищого навчального закладу " Галицька академія ".

Зміст

Вступ
Конспект лекційних занять з прикладами розв'язування завдань
1. Матриці.
2. Дії над матрицями.
3. Визначники. Обчислення визначників та їх властивості.
4. Ранг матриці.
5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
6. Метод Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
7. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Комплекс багатоваріантних практичних завдань.
- Завдання нульового варіанту та їх розв'язки.
- Завдання варіантів 1 – 100.
- Список рекомендованої літератури.

Метою вивчення розділу є познайомити студентів з основними поняттями та методами вищої лінійної алгебри, необхідними для глибшого засвоєння всього курсу математики та математичної статистики, а також підготовити студентів до самостійного вивчення тих розділів математики, які можуть бути потрібні додатково в практичній і дослідницькій роботі спеціалістів в області географії.

Завдання вивчення розділу полягає в розкритті змісту та значення основних понять даного розділу математики, а саме: правил виконання дій над матрицями, формул обчислення визначників другого, третього та вищих порядків, поняття рангу матриці та способів знаходження рангу матриці, поняття сумісної, несумісної, визначеної, невизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, методів Крамера та Гаусса знаходження розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Методичні рекомендації включають в себе:

– перелік того, що студент повинен знати та вміти в результаті вивчення даного розділу;
– детальний конспект лекційних занять з прикладами розв'язування завдань;
– завдання для виконання на практичному занятті та самостійної роботи студентів;
– комплекс багатоваріантних практичних завдань (домашніх контрольних робіт), які пропонуються студентам для самостійного розв'язування задля поточного контролю з дисципліни;
– список рекомендованої літератури.

Перелік того, що студент повинен знати і вміти в результаті вивчення даної теми

- **Студент повинен знати** основні теоретичні положення, а саме: правила виконання дій над матрицями, формули обчислення визначників другого, третього та вищих порядків, поняття рангу матриці та способи знаходження рангу матриці, поняття сумісної, несумісної, визначеної, невизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, методи Крамера та Гаусса знаходження розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

- **Студент повипеп уміти:** виконувати дії з матрицями, обчислювати визначники, знаходити ранг матриць, розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера та методом Гаусса, використовувати основні теоретичні положення при розв'язанні задач та користуватися літературою.

Конспект лекційних занять з прикладами розв'язування завдань

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. Матриці.
2. Дії над матрицями.
3. Визначники. Обчислення визначників та їх властивості.
4. Ранг матриці.
5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
6. Метод Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
7. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

1. Матриці

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел.

Наприклад, дві матриці: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Горизонтальні ряди чисел називаються ***рядками,*** вертикальні – **стовпцями.** Рядки нумеруються згори вниз, стовпці – зліва направо. Числа, що утворюють матрицю, називаються її **елементами.** Елементи матриці позначають малими латинськими буквами з подвійними індексами. Так, a_{ij} – елемент, який міститься в i-му рядку, j-му стовпці. Самі матриці позначають великими латинськими буквами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця має m рядків і n стовпців, то говорять, що вона має **розмір** m **на** n. Позначають $m \times n$.

Наприклад, нехай є три матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 9 \\ 5 & 7 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так, елемент $a_{11} = 3$, $a_{12} = 5$, $a_{23} = 7$, $b_{11} = 8$, $b_{23} = 0$, $c_{31} = -1$, $c_{43} = -4$, $c_{21} = 5$, $c_{22} = 7$.

Матриця A має розмір 2×3, $B - 3 \times 3$, $C - 4 \times 4$.

Матриця називається **нульовою,** якщо всі її елементи дорівнюють нулю.

Наприклад, матриця: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нульова.

Дві матриці називаються **рівними,** якщо вони мають однаковий розмір і в них рівні між собою однаково розміщені елементи.

Наприклад, матриця: $F = \begin{pmatrix} 2+1 & 16-11 & 9-10 \\ 10+1 & 3\cdot 3 & 140:20 \end{pmatrix}$ рівна матриці A.

Матриця називається **квадратною,** коли число її рядків дорівнює числу її стовпців. Якщо квадратна матриця має *n* стовпців, то говорять, що матриця має **порядок** *n*. Ряд чисел $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ називається **головною її діагоналлю.**

Наприклад, матриці B і C – квадратні з порядком відповідно 3 і 4.
Елементи 8, 5, 3 утворюють головну діагональ матриці B;
1, 7, 0, 2 – утворюють головну діагональ матриці C.

Квадратна матриця називається **діагональною,** якщо всі її елементи, розміщені поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Наприклад, матриці $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ і $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ – діагональні.

Діагональна матриця називається **одиничною,** якщо елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці.

Одинична матриця позначається так: $E = \begin{pmatrix} 1\,0\ldots0 \\ 0\,1\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\ldots1 \end{pmatrix}$.

Наприклад, деякі одиничні матриці $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Якщо для матриці $a_{ij} = a_{ji}$, то матрицю називають **симетричною**.

Наприклад, деякі симетричні матриці $N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, L, M, E_1, E_2.

Транспонуванням матриці називається заміна її рядків на стовпці зі збереженням порядку їх запису. Позначають A^T або A'.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = A' = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21}\ \ldots a_{m1} \\ a_{12}\ a_{22}\ \ldots a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\ a_{2n}\ \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, якщо $P = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & -6 \end{pmatrix}$, то $P^T = P' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 8 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Матриця A називається **симетричною**, якщо $A' = A$, і **кососиметричною**, якщо $A' = -A$.

Наприклад: $K=\begin{pmatrix}1 & 5 & 9\\ 5 & 6 & 4\\ 9 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -7\\ -3 & 7 & 0\end{pmatrix}$.

Матриця K є симетрична, матриця T – кососиметрична.

Розглянемо дві матриці: $A_1=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ Матриця A_1 називається *верхньою трикутною*, а матриця A_2 – *нижньою трикутною*.

2. Дії над матрицями

1. *Сумою* (*різницею*) *матриць одного порядку* $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ називається матриця $C=A+B$ ($C=A-B$), $C=(c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі (*різниці*) відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ($c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$).

Наприклад: $A=\begin{pmatrix}5 & 8 & 4 & 1\\ 12 & -8 & 1 & 0\\ 35 & 4 & -9 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ -4 & -2 & 0 & 5\\ 8 & -1 & 9 & 2\end{pmatrix}$.

Обидві матриці мають розмірність 3×4, тому можна за означенням утворити їх суму-матрицю:

$$C=A+B=\begin{pmatrix}5+1 & 8+2 & 4+3 & 1-1\\ 12-4 & -8-2 & 1+0 & 0+5\\ 35+8 & 4-1 & -9+9 & 7+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 10 & 7 & 0\\ 8 & -10 & 1 & 5\\ 43 & 3 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

2. *Добутком матриці* $A=(a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця C, кожен елемент якої c_{ij} одержується множенням відповідних елементів матриці A на α, $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$.

Наприклад: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -5\\ 3 & 4 & -2\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, то $C=\alpha A=\begin{pmatrix}-3 & 6 & -15\\ 9 & 12 & -6\end{pmatrix}$.

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності: 1°. $A+B=B+A$. 2°. $\alpha A=A\alpha$. 3°. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$. 4°. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$. 5°. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.

3. Для знаходження добутку $A\cdot B$ матриць A та B необхідно, щоб кількість стовпців матриці A (першого множника) дорівнювала кількості рядків матриці B (другого множника).

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ розмірності $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розмірності $p\times n$ називається така матриця $C=A\cdot B$ розмірністю $m\times n$, $C=(c_{ij})$, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-ого рядка матриці A на відповідні за порядком елементи j-ого стовпця матриці B, тобто кожен елемент матриці C знаходять за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} .$$

Наприклад: 1) знайдемо добуток матриць AB та BA, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

а) $AB = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) + (-8) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 - 2 - 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -66 \end{pmatrix}$ – ця матриця розміром 1×1.

$$BA = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-8) \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 2 & -1 \cdot (-8) \\ 6 \cdot 4 & 6 \cdot 2 & 6 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & -32 \\ -4 & -2 & 8 \\ 24 & 12 & -48 \end{pmatrix}.$$

б) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -12 \end{pmatrix}$.

$$BA = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 4 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 4 \cdot (-1) + 4 \cdot (-3) \\ -2 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 & -2 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 & -2 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-3) \\ 6 \cdot 0 + 6 \cdot 2 & 6 \cdot 5 + 6 \cdot 1 & 6 \cdot (-1) + 6 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 24 & -16 \\ -4 & -12 & 8 \\ 12 & 36 & -24 \end{pmatrix}.$$

2) Записати наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі

а) $\begin{cases} x + 5y = 23 \\ 6x + 4y = 18 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - z = 4 \\ x + y + 4z = 7 \\ -x + 6y = -5 \end{cases}$.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 18 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Приклад 1. Знайти матрицю $C_1 = A \cdot B$ і матрицю $C_2 = B \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32} подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 3$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = -1$, $a_{21} = 11$, $a_{22} = 9$, $a_{23} = 7$, $b_{11} = 4$, $b_{12} = 3$, $b_{21} = 9$, $b_{22} = 5$, $b_{31} = -2$, $b_{32} = 1$.

Отже: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Матриця A розміром 2×3, матриця B розміром 3×2. Отже можна знаходити добуток і $A \cdot B$, і $B \cdot A$.

Матриця $C_1 = A \cdot B$ буде розмірністю 2×2.

$$C_1 = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 5 \cdot 9 + (-1) \cdot (-2) & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 \\ 11 \cdot 4 + 9 \cdot 9 + 7 \cdot (-2) & 11 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 + 45 + 2 & 9 + 25 - 1 \\ 44 + 81 - 14 & 33 + 45 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 33 \\ 111 & 85 \end{pmatrix}.$$

Матриця $C_2 = B \cdot A$ буде розмірністю 3×3.

$$C_2 = B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 3 \cdot 11 & 4 \cdot 5 + 3 \cdot 9 & 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 \\ 9 \cdot 3 + 5 \cdot 11 & 9 \cdot 5 + 5 \cdot 9 & 9 \cdot (-1) + 5 \cdot 7 \\ (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 11 & (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 9 & (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 47 & 17 \\ 82 & 90 & 24 \\ 5 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C_1 = \begin{pmatrix} 59 & 33 \\ 111 & 85 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 45 & 47 & 17 \\ 82 & 90 & 24 \\ 5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний* (*непереставний*) $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Якщо $A \cdot B = B\ A$, то матриці A і B називають *переставними* (*комутативними*).

Наприклад, розглянемо матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Так добуток $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 & 4 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \\ 7 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 7 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 26 \\ 26 & 29 \end{pmatrix}$, а інший добуток

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 3\cdot 7 & 2\cdot 7 + 3\cdot 4 \\ 3\cdot 4 + 2\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 26 \\ 26 & 29 \end{pmatrix}$, отже $A{\cdot}B = B{\cdot}A$, то матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, і $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ є *переставними* (*комутативними*).

Якщо E – одинична матриця, то $A{\cdot}E = E{\cdot}A = A$.

3. Визначники. Обчислення визначників та їх властивості

Розглянемо квадратну матрицю: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається **детермінантом або визначником матриці.** Детермінант матриці позначається так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Детермінант так само, як і матриця, має порядок. Він дорівнює порядку відповідної матриці. Детермінанти можуть бути першого, другого і n-го порядків. Поняття детермінанта вводиться лише для квадратних матриць. Якщо розглянути деякий елемент квадратної матриці A, який позначимо a_{ij}, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця, і побудувати матрицю без цього рядка і стовпця, то дістанемо матрицю $(n - 1)$-го порядку. Цій матриці відповідає визначник $(n - 1)$-го порядку, який називається **мінором матриці** A, який відповідає елементу a_{ij}.

Мінором $(n - 1)$-го порядку **елемента** a_{ij} **матриці** n-го порядку називається визначник нової матриці, яка утворюється з даної матриці внаслідок викреслювання рядка і стовпця, які перетинаються на цьому елементі. Мінор матриці позначається так: M_{ij}.

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & -6 \end{pmatrix}$, то мінор, наприклад, елемента a_{12} такий: $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}$, елемента a_{23} такий: $M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$, а елемента a_{31} такий: $M_{31} = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Обчислення визначників. Визначник порядку n, де $n > 1$, можна знайти за формулою:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}.$$

Отже, визначник матриці порядку два буде таким:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Як бачимо, **визначник другого порядку** дорівнює різниці добутків елементів, які стоять на головній і побічній діагоналях.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Наприклад: $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}$, то

$$\det A = |\,A\,| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -11 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 7 \cdot (-11) = 12 + 77 = 89.$$

Якщо маємо визначник третього порядку, то

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Введемо поняття алгебраїчного доповнення елемента a_{ij}, позначивши його через A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Тоді визначник матриці A можна записати у вигляді

$\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}.$ і довести, що

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},\ i = 1,2,\ldots,n,$$

або $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},\ j = 1,2,\ldots,n.$

Ці формули називаються **розкладом детермінанта за елементами рядка або стовпця**.

Визначник дорівнює сумі добутків елементів a_{ij} деякого рядка (стовнця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Використовуючи ці формули, запишемо розклад визначника третього порядку за елементами, наприклад, першого рядка:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

де

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11},\ A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -M_{12},\ A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = M_{13}.$$

Отже: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$.

Наприклад, знайдемо визначник таких матриць. 1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

$$|\,A\,| = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 7\cdot\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + 8\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 51 + 7\cdot 34 - 8\cdot 34 = 153 - 34 = 119.$$

2) $B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & -6 \end{pmatrix}$, то $|\,B\,| = 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 9\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 95$.

Щоб розкрити визначник третього порядку, можна використати, крім розглянутого правила розкладання за елементами якого-небудь стовпця або рядка, ще й інші правила: правило трикутників, правило приписування стовпців, (ці правила є вихідними з вищенаведеного і меншзастосовними).

Визначник вищого порядку розкривають розкладанням за елементами якого-небудь стовпця або рядка.

П р и к л а д 2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 4$, $a_{24} = 8$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 1$, $a_{33} = 5$, $a_{34} = 19$, $a_{41} = 0$, $a_{42} = 0$, $a_{43} = 2$, $a_{44} = 18$.

Отже: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{vmatrix}$. Розкладемо визначник за елементами четвертого рядка, бо в четвертому ряді аж два нульових елементи, тобто, при розкладі визначників третього порядку буде тільки два (аналогічно буде і якщо розкладати за елементами першого стовпця):

$$\Delta = 0+0+(-1)^{4+3}\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & 19\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}\cdot 18\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot\left[1\cdot(2\cdot 19-1\cdot 8)-3\cdot(1\cdot 19-0\cdot 8)+1\cdot(1\cdot 1-0\cdot 2)\right]+$$

$$+18\cdot\left[1\cdot(2\cdot 5-1\cdot 4)-3\cdot(1\cdot 5-0\cdot 4)+1\cdot(1\cdot 1-0\cdot 2)\right]=$$

$$=-2\cdot\left[1\cdot 30-3\cdot 19+1\cdot 1\right]+18\cdot\left[1\cdot 6-3\cdot 5+1\cdot 1\right]=$$

$$=-2\cdot\left[-26\right]+18\cdot\left[-8\right]=52-144=-92.$$

Відповідь: -92.

Властивості визначників.

1°. *Значення визначника не змінюється, якщо усі його рядки замінити стовпцями, причому кожний рядок замінити стовпцем з тим самим номером.*

Наприклад: 1) $\begin{vmatrix}5 & 4\\ -3 & 2\end{vmatrix}=10-(-12)=22$. Замінивши стовпці рядками, зберігаючи порядок, отримаємо: $\begin{vmatrix}5 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=10-(-12)=22$.

2) $\begin{vmatrix}4 & 9 & -2\\ 3 & 5 & 1\\ 7 & 8 & -6\end{vmatrix}=95$ (цей результат взятий з попередніх прикладів).

Замінимо в даному визначнику стовпці рядками, зберігаючи порядок їх слідування, тобто транспонуємо його, після цього обчислимо транспонований визначник:

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 7\\ 9 & 5 & 8\\ -2 & 1 & -6\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}5 & 8\\ 1 & -6\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}9 & 8\\ -2 & -6\end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix}9 & 5\\ -2 & 1\end{vmatrix}=4\cdot(-38)-3\cdot 38+7\cdot 19=95.$$

Ця властивість означає *рівнозначність рядків і стовпців визначника.*

2°. *Якщо поміняти місцями два стовпці (рядки) визначника, то визначник поміняє знак на протилежний.*

Наприклад, помінявши місцями два рядки визначника з попереднього прикладу, обчислимо його: $\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-12-10=-22$.

Для доведення властивостей 1° і 2° достатньо розписати кожний визначник і порівняти результати.

3°. *Визначник, який має два однакові стовпці (рядки), дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай визначник Δ має два однакові стовпці. Тоді, помінявши місцями ці стовпці, дістанемо визначник, що дорівнює −Δ, тобто Δ = −Δ, звідси знаходимо 2Δ = 0 або Δ = 0.

Наприклад: 1) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -6-(-6)=0$.

2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 7\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7\cdot 0 - 1\cdot 0 = 0$.

4°. *Якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ma_{12} \\ a_{21} & ma_{22} \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Звідси як наслідок маємо, що коли помножити всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) на одне і те саме число, то і визначник помножиться на це число.

Наприклад: $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 2\cdot(-17) = -34$; з іншої сторони: $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -28-6=-34$.

5°. *Визначник, елементи двох стовпців (рядків) якого відповідно пропорціональні, дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай маємо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, в якому $a_{12} = ma_{11}$ і $a_{22} = ma_{21}$. Тоді, враховуючи властивості 3°, 4°, дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & ma_{11} \\ a_{21} & ma_{21} \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

Наприклад: $\begin{vmatrix} 41 & -7 \\ 82 & -14 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 41 & -7 \\ 41 & -7 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 = 0$.

6°. *Якщо кожний елемент якого-небудь стовпця (рядка) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких стовпцями (рядками) є відповідні доданки, а решта збігається із стовпцями (рядками) заданого визначника*:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Якщо позначити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \text{то } \Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

тобто властивість 6° виражає правило додавання визначників.

Наприклад: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (4+2)+(8-0)=14$. З іншої сторони: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12+2=14$.

7°. *Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь його стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка), помножені на одне і те ж число.*

Справді, нехай дано два визначники, наприклад, третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{і} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ma_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ma_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тоді з урахуванням властивостей 3°, 4° і 6° маємо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + m \cdot 0 = \Delta..$$

Наприклад: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 21 = -19$;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2 \cdot 3 & 3 \\ 7 + 2 \cdot 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 33 = -19 = \Delta.$$

8°. *Сума добутків елементів a_{ij} деякого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Наприклад: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$.

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} = 5 \cdot (-1)^{2+1}(-7) + (-7) \cdot (-1)^{2+2} \cdot 5 = 5 \cdot 7 - 7 \cdot 5 = 0.$$

4 Ранг матриці

Введемо поняття рангу матриці. Якщо матриця має відмінний від нуля мінор порядку r, а всі мінори вищого порядку (якщо вони є) дорівнюють нулю, то число r називається **рангом матриці.** Це записують так: r = rang A = Rg *A*. Ранг нуль-матриці за означенням вважають рівним нулю. Відмінний від нуля мінор найвищого порядку називається **базисним.**

Теорема 1 (про базисний мінор). *Базисні стовпці (рядки) лінійно незалежні. Будь-який рядок (стовпець) довільної матриці є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпців).*

Доведення цієї теореми не наводимо. Із теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок. *Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків, і це число дорівнює рангу матриці.*

Для визначення рангу матриці використовується метод обвідних (які містять у собі) мінорів, що ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 2. *Якщо матриця A містить мінор r-го порядку, який не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$-го порядку, що обводять цей мінор, дорівнюють нулю, то r є рангом матриці.*

При обчисленні рангу матриці треба переходити від мінорів менших порядків, відмінних від нуля, до мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено мінор r-*го* порядку M – відмінний від нуля, то треба обчислити лише мінори $(r+1)$-го порядку, що обводять мінор M. Якщо всі вони рівні нулю, то ранг матриці дорівнює r. Якщо серед них знайдеться такий, що відмінний від нуля, то далі для нього будуються обвідні мінори $(r+2)$-го порядку і т.д.

Наприклад, визначити ранг матриці методом обвідних мінорів:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

Мінор другого порядку, що стоїть у лівому верхньому куті матриці $\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=0$, але в матриці є і відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад: $\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. Далі утворимо мінор третього порядку, який обводить відмінний від нуля мінор другого порядку

$$\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Утворимо тепер обвідні мінори четвертого порядку для мінора третього порядку. Їх можна утворити лише два

$$\begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 4 & -7 & 4 & -4\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 4 & -7 & 4 & 5\end{vmatrix}=0$$

Обидва вони дорівнюють нулю – це означає, що ранг початкової матриці дорівнює трьом.

2) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$. Запишемо матриці третього порядку:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Мінор першого порядку, розміщений у верхньому куті матриці A_1, не дорівнює нулю $(1\neq 0)$. Обвідний її мінор другого порядку також не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0.$$

Обвідний мінор третього порядку матриці A_1: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

Інші матриці A_2, A_3, A_4 дадуть ті самі результати, що і матриця A_1. Відповідь: $r(A) = 2$.

Для обчислення рангу матриці A застосовується також **метод елементарних перетворень.**

Елементарними перетвореннями матриці є:

1) перестановка рядків (стовпців);

2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помноженого на деяке число.

Дійсна така теорема.

Теорема 3. *Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.*

Скориставшись цими перетвореннями, матрицю можна привести до вигляду, коли всі її елементи, крім $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}$, де $r \le \min(m, n)$, дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці дорівнює r.

У подальшому матриці, які мають рівні ранги, будемо називати *еквівалентними* матрицями. Еквівалентні матриці будемо об'єднувати знаком ~ (хвилька).

Приклад 3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ за допомогою елементарних перетворень. Числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 3$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = -5$, $a_{24} = -6$, $a_{31} = -3$, $a_{32} = 1$, $a_{33} = -4$, $a_{34} = -7$, $a_{41} = 1$, $a_{42} = 2$, $a_{43} = -1$, $a_{44} = 0$. Отже:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо спочатку елементарні перетворення матриці:

Поміняємо місцями перший і другий стовпчики

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Утворимо нулі в першому стовпчику помноживши елементи першого рядка спочатку на –4 і додавши до другого, потім на –1 і додавши до третього, і нарешті – на –2 і додамо до четвертого, одержимо матрицю, що записана після першої хвильки в (*). Помножимо тепер елементи першого стовпчика послідовно на –2 і додамо до другого стовпчика, на –1 і додамо до третього стовпчика, на –3 і додамо до четвертого стовпчика, одержимо вигляд матриці після другої хвильки.

Помножимо другий рядок одержаної матриці на $-1/9$, третій на $-1/5$, четвертий на $-1/3$, одержимо: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Віднімемо від четвертого і від третього рядка другий, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Віднімемо від четвертого і від третього стовпця другий помножений відповідно на 1 і на 2, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Отже, після виконання всіх цих елементарних перетворень з остаточного вигляду матриці випливає, що її ранг дорівнює 2, тому що єдиний мінор другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, всі інші, більш високого порядку, дорівнюють нулю.

Відповідь: $r = 2$.

Якщо в матриці, нижче головної діагоналі всі елементи є нулі, то її можна з допомогою елементарних перетворень звести до такої, в якій всі елементи поза головною діагоналлю будуть нульові, а головна діагональ міститиме стільки ненульових елементів, скільки елементів головної діагоналі, відмінних від нуля є у вихідній матриці. Отже, якщо в матриці нижче головної діагоналі всі елементи є нулі, тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Приклад 4. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ за допомогою елементарних перетворень. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34} подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 1$, $a_{12} = -2$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 3$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = -1$, $a_{24} = 1$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = 4$, $a_{33} = -1$, $a_{34} = 5$.

Отже: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Перший рядок додамо до другого і до третього, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Від третього рядка віднімемо другий помножений на два, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Від другого рядка віднімемо перший, отримаємо:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. У даній матриці нижче головної діагоналі всі елементи є нулі, тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля, тобто 2.

Відповідь: $r = 2$.

5. Снстемн лінійннх рівнянь

Систему лінійних рівнянь у загальному можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (*)$$

Ця система називається *системою т лінійних рівнянь з п невідомими,* де x_1, x_2, …, x_n — невідомі; a_{ij} — коефіцієнти системи рівнянь; b_i — вільні члени, або праві частини системи рівнянь. Система лінійних рівнянь називається *однорідною*, якщо всі $b_i=0$.

Розв'язком системи рівнянь (*) є така множина чисел k_1, k_1, ..., k_n, при підстановці яких в кожне з рівнянь системи замість відповідних невідомих x_1, x_2, …, x_n, рівняння перетворюються на вірні числові тотожності. Якщо система рівнянь не має жодного розв'язку, вона називається *несумісною,* якщо має хоча б один розв'язок – *сумісною.* Сумісна система рівнянь називається *визначеною,* якщо вона має єдиний розв'язок, якщо розв'язків більше, ніж один, – *невизначеною.* Системи лінійних рівнянь, які мають більше, ніж один розв’язок (тобто невизначені системи), мають безліч розв’язків.

Введемо матрицю коефіцієнтів системи: $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots\ a_{mn} \end{pmatrix}$,

матрицю-стовпець правої частини $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ і невідомих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Використовуючи означення добутку матриць, систему (*) можна записати у вигляді $AX=B$.

Ця форма запису системи (*) називається **матричною.**

Пропонуючи задачу про знаходження розв'язку системи (*), ми не задавали ніяких обмежень ні на число рівнянь, ні на число невідомих. Тому система (*) **може не мати розв'язку.**

Наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Система може мати **нескінченну множину розв'язків.**

Наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ Для цієї системи впорядкована трійка чисел $k_1 = 1 + a$, $k_2 = 1 - 2a$, $k_3 = a$ є розв'язком (a – будь-яке число).

Система може мати **єдиний розв'язок**.

Наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$. Розв'язком цієї системи є тільки одна впорядкована пара чисел (2, 1).

Матриця A коефіцієнтів при невідомих системи (*) називається **основною**. Якщо до матриці A приєднати стовпець вільних членів системи (*), то дістанемо так звану розширену матрицю A^* даної системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{l|l} a_{11} \;\; a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} \;\; a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} \; a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Наприклад, для системи $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$ розширена матриця буде такою: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array} \right)$.

Приклад 5. Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$ відомим зі школи методом підстановки. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, b_2, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, b_3, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, b_4 подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 4$, $a_{12} = -\ \ 3$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 5$, $b_1 = 7$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = -2$, $a_{24} = -3$, $b_2 = 3$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = 2$, $a_{34} = 0$, $b_3 = -1$, $a_{41} = 2$, $a_{42} = 3$, $a_{43} = 2$, $a_{44} = -8$, $b_4 = -7$. Отже: $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$.

З другого рівняння: $x_1 = 3 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4$. Підставимо отриманий вираз для x_1 замість x_1 в інші рівняння, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 4\cdot(3 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4) - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ 3\cdot(3 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4) - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2\cdot(3 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4) + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_2 + 9x_3 + 17x_4 = -5 \\ 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = -10 \\ 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -13 \end{cases}.$$

З першого рівняння: $x_2 = \dfrac{-5 - 9x_3 - 17x_4}{5}$. Підставимо отриманий вираз для x_2 замість x_2 в інші рівняння, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 5\cdot\left(\dfrac{-5 - 9x_3 - 17x_4}{5}\right) + 8x_3 + 9x_4 = -10 \\ 7\cdot\left(\dfrac{-5 - 9x_3 - 17x_4}{5}\right) + 6x_3 - 2x_4 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 - 8x_4 = -5 \\ -33x_3 - 129x_4 = -30 \end{cases}.$$

З першого рівняння: $x_3 = 5 - 8x_4$. Підставимо отриманий вираз для x_3 замість x_3 в інше рівняння, отримаємо: $-33\cdot(5 - 8x_4) - 129x_4 = -30 \Leftrightarrow x_4 = 1$.

$x_3 = 5 - 8 = -3$. $x_2 = \dfrac{-5 - 9(-3) - 17}{5} = 1$. $x_1 = 3 + 2 + 2(-3) + 3 = 2$.

Відповідь: $(2, 1, -3, 1)$.

Приклад 6. Використовуючи означення добутку матриць, розв'язати матричне рівняння: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 4$, $b_{11} = 3$, $b_{12} = 5$, $b_{21} = 5$, $b_{22} = 9$. Отже: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що матриця X розміром 2×2, отже, нехай $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, тоді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot x_{11} + 2\cdot x_{21} = 3 \\ 3\cdot x_{11} + 4\cdot x_{21} = 5 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 1\cdot x_{12} + 2\cdot x_{22} = 5 \\ 3\cdot x_{12} + 4\cdot x_{22} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_{11} = -1, x_{12} = -1, x_{21} = 2, x_{22} = 3$. Отже $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Теорема. Якщо **головний визначник** Δ, складений з коефіцієнтів нри невідомих, системи n-лінійних рівнянь з n-невідомими (*), відмінний від нуля, то така система рівнянь має **єдиний** розв'язок (**сумісна і визначена**), який знаходиться за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ — головний визначник системи, який складається з коефіцієнтів нри невідомих у лівій частині системи (*).

Δ_j — визначник, який одержується шляхом заміни j-го стовпчика в головному визначнику на стовпчик вільних членів.

Приклад 7. Методом Крамера розв’язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, b_2, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, b_3, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, b_4 подані в таблиці 1.

Розв’язування: Варіант 1: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -5$, $a_{14} = 1$, $b_1 = -11$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -3$, $a_{23} = 0$, $a_{24} = -6$, $b_2 = -4$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = -1$, $a_{34} = 2$, $b_3 = 0$, $a_{41} = 1$, $a_{42} = 4$, $a_{43} = -7$, $a_{44} = 6$, $b_4 = -11$. Отже: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -11 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -4 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -11. \end{cases}$.

Складемо і обчислимо спочатку головний визначник цієї системи: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27$. Головний визначник системи рівнянь відмінний від нуля, отже, дана система має єдиний розв’язок. Знайдемо його. Для цього утворимо й обчислимо ще чотири визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & 1 & -5 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -11 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -11 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -11 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -11 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -11 & 6 \end{vmatrix} = 54, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -11 \\ 1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

За правилом Крамера, маємо розв'язки

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-27}{27} = -1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2,\ x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{0}{27} = 0.$ Отже, $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0$ – єдиний розв'язок.

7. Метод Гаусса розв'язування системи лінійних рівнянь

Метод Гаусса (Жордана-Гаусса) розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в послідовному виключенні змінних і перетворенні системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n0} \end{cases}$$

до трикутного вигляду

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{10}; \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_{20}; \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad b_{nn}x_n = b_{n0}, \qquad b_{kk} \neq 0\ (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \qquad (**)$$

Над системою лінійних рівнянь виконують операції, які називаються **елементарними:**

а) множення будь-якого рівняння системи на дійсне число, відмінне від нуля;

б) додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число;

в) перестановка рівнянь у системі;

г) вилучення із системи тотожності $0 \equiv 0$.

Ці операції не порушують рівносильності (не змінюють множину розв'язків) системи рівнянь. За допомогою операції б) можна вилучити будь-яке невідоме з усіх рівнянь системи, окрім одного. При цьому невідоме, яке вилучають, називається **провідним невідомим;** коефіцієнти при провідному невідомому називаються провідними елементами, а рівняння, у якому зберігається провідне невідоме, називається **провідним рівнянням.**

Для вилучення з усіх рівнянь, крім одного рівняння системи (провідного) невідомого x_1, по-перше потрібно прийняти за провідне перше рівняння системи (для зручності можна і попередньо поміняти в системі рівняння місцями). Пізніше, зокрема для вилучення з k-ого рівняння системи невідомого x_1, потрібно помножимо це рівняння на λ_k, де $k = 2, 3, ..., n$, і почленно додати знайдене рівняння до провідного. У результаті цього маємо:

$$(a_{11} + \lambda_k a_{k1})x_1 + (a_{12} + \lambda_k a_{k2})x_2 + ... + (a_{1n} + \lambda_k a_{kn})x_n = a_{10} + \lambda_k a_{k0}.$$

Поклавши $a_{11} + \lambda_k a_{k1} = 0$, або $\lambda_k = -\dfrac{a_{11}}{a_{k1}}$, дістанемо рівняння, в якому відсутнє невідоме x_1. Аналогічно вилучимо з усіх рівнянь x_1, крім провідного (першого) рівняння. Потім, взявши за провідне друге рівняння знайденої системи, вилучимо x_2, з усіх наступних рівнянь і т. д. У результаті цього дістанемо так звану **ступінчасту систему** (**). Цю систему розв'язують, починаючи з останнього рівняння. Спочатку знаходять x_n і підставляють в передостаннє рівняння, з якого знаходять x_{n-1}, і т.д.

Якщо система з n невідомими має єдиний розв'зок, то ця система може бути перетворена до трикутного вигляду (**).

Приклад 8. Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, b_1, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_2, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_3 подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 5$, $a_{12} = -4$, $a_{13} = 3$, $b_1 = -2$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = 4$, $b_2 = 3$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = 5$, $b_3 = 2$. Отже: $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = -2 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$.

Розглядаючи три невідомі x, y, z, як відповідно x_1, x_2, x_3, згідно з методом Гаусса, спочатку поміняємо місцями перше та друге рівняння, щоб елемент a_{11} основної матриці дорівнював одиниці. Отримаємо: $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ 5x - 4y + 3z = -2 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$.

Тепер перше рівняння помножимо на (-5) і почленно додамо до другого (щоб отримати $a_{21} = 0$), а потім помножимо перше рівняння на (-3) і почленно додамо до третього (щоб отримати $a_{31} = 0$). В результаті отримаємо систему:

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 6y-17z=-17 \\ 5y-7z=-7 \end{cases}.$$

Ця система містить два рівняння, в яких відсутнє невідоме *x*. Тепер, взявши за провідне друге рівняння знайденої системи, помножимо його на $-\frac{5}{6}$ і почленно додамо до третього (щоб отримати $a_{32}=0$). В результаті отримаємо систему:

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 6y-17z=-17 \\ -17z\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)+(-7)z=-17\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)+(-7) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 6y-17z=-17 \\ \left(-17\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)+(-7)\right)z=-17\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)+(-7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad -2y \quad +4z \quad =3 \\ \quad -6y \quad -17z \quad =-17 \\ \qquad\qquad z \quad =1 \end{cases}.$$

Отже, у результаті дістали ступінчасту систему (**). Цю систему розв'яжемо, починаючи з останнього рівняння. Спочатку знайдемо $z=1$ і підставимо в передостаннє рівняння, з якого знайдемо $y=0$, і підставимо *y*, *z* в перше рівняння, знайдемо $x = -1$.

Зауважимо, що елементарні перетворення доцільно виконувати не з усією системою, а з її розширеною матрицею. В такий спосіб розв'язування цього прикладу виглядає так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -17 & -17 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -17 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Відповідь: (-1, 0, 1) – єдиний розв'язок.

Приклад 9. Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$. Числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, b_2, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, b_3, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, b_4$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 0$, $a_{14} = -4$, $b_1 = 3$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 8$, $a_{23} = -6$, $a_{24} = 2$, $b_2 = 6$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 1$, $a_{34} = -3$, $b_3 = 1$, $a_{41} = 3$, $a_{42} = 6$, $a_{43} = -3$, $a_{44} = -3$, $b_4 = 6$. Отже: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 3 \\ 8x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}$.

Виконаємо елементарні перетворення не з усією системою, а з її розширеною матрицею, тобто:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -3 & 6 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{c} \text{Від третього,} \\ \text{помноженого на 3,} \\ \text{віднімемо друге,} \\ \text{помножене на два.} \\ \text{Від четвертого} \\ \text{віднімемо перше.} \end{array}\right| \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left|\begin{array}{c} \text{друге поділимо} \\ \text{на два і додамо} \\ \text{до третього,} \\ \text{а також} \\ \text{віднімемо від} \\ \text{четвертого} \end{array}\right| \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останній вигляд розширеної матриці відповідає такій системі:

$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 3 \\ 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$. Нехай за основні невідомі (базисні) візьмемо невідомі x_1 та x_2. Тоді інші невідомі системи x_3 та x_4 – вільні. Розглянемо базисні змінні x_1 та x_2 як функції x_3 та x_4, тобто: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3 + 4x_4 \\ 4x_2 = 3 + 3x_3 - x_4 \end{cases}$. Щоб позбутися в першому рівнянні невідомого x_2, віднімемо від першого рівняння, помноженого на 2, друге рівняння, отримаємо систему: $\begin{cases} 3x_1 = 3 - 3x_3 + 9x_4 \\ 4x_2 = 3 + 3x_3 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 + 3x_4 \\ x_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$. Вільним невідомим x_3 та x_4 можна надавати будь-які значення: $x_3 = C_1$ та $x_4 = C_2$, де C_1 та C_2 – довільні сталі числа з множини дійсних чисел. Отже, отримуємо нескінченну множину розв'язків: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - C_1 + 3C_2 \\ \frac{3}{4} + \frac{3}{4}C_1 - \frac{1}{4}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $(1 - C_1 + 3C_2, \frac{3}{4} + \frac{3}{4}C_1 - \frac{1}{4}C_2, C_1, C_2)$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

П р и к л а д   1 0 . Знайти всі значення параметра *a*, при яких система $\begin{cases} A_1 x + (25a^2 - 2)y - 5a = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ не має розв'язків. Числа A_1, A_2, B_2, C_2 подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $A_1 = 1, A_2 = 1, B_2 = 2, C_2 = -2$. Отже: $\begin{cases} x + (25a^2 - 2)y = 5a \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$.

Ці рівняння системи при певному значенні параметра *a* є рівняннями прямих ліній в прямокутній системі координат *Oxy*, бо в кожному з них між змінними *x* та *y* є лінійна залежність (див. рівняння 1.13). З геометричної точки зору, щоб система не мала хоча б одного розв'язку, повинно не бути жодної точки перетину цих прямих ліній. Тобто, щоб задовольнялася умова задачі, прямі лінії 1) повинні бути паралельними (повинна виконуватися умова паралельності (1.16), тобто $k_2 = k_1$); 2) не збігатися (обидва рівняння системи не повинні бути рівносильними), інакше розв'яків безліч (координати кожної точки прямих що збіглися і будуть розв'язком системи). Умова рівності кутових коефіцієнтів з даних рівнянь є такою: $-\frac{1}{25a^2 - 2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $25a^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\frac{2}{5}$. Але при $a = \frac{2}{5}$ обидва рівняння системи є рівносильні (з допомогою елементарних операцій можна з одного рівняння отримати інше), тобто множини їх розв'язків, як і самі прямі, збігаються, тобто розв'яків безліч, що не задовольняє умові задачі. Отже, тільки при $a = -\frac{2}{5}$ вихідна система не має розв'язків.

Відповідь: $a = -\frac{2}{5}$.

Таблиця 1

№	1В	2В	3В	4В	5В	6В	7В	8В	9В
2.1	3;5;-1; 11;9;7; 4;3;9; 5;-2;1	1;3;1; 1;2;4; 0;1;5; 3;5;7	8;3;1; 2;1;-1; 3;2;3; 4;6;-5	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7; 8;3;1	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4; 4;6;-5	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9; 6;8;9	4;5;-4; 6;8;9; 4;-2;3; 11;9;7	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1;0; 2;4;-5	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 1;-2;4
2.2	1;3;1;1; 1;2;4;8; 0;1;5;19; 1;3;1;1	1;5;19;1; 3;1;1;-1; 2;4;8;0; 1;-3;1;1	3;1;1;5; 19;1;1;1; 2;4;8;0; 1;3;-1;1	-2;4;8;0; 3;1;-1;5; 1;19;1;1; 1;3;1;1	4;-2;8;0; 1;19;1;1; 3;1;-5;1; 1;3;1;1	1;3;1;1; 1;5;19;1; 2;4;-8;0; 1;3;-1;1	3;-1;1;5; 0;1;91;1; 2;-8;4;0; 1;-3;-1;1	2;-8;8;0; 3;-1;9;5; 1;14;7;1; 1;3;-1;-1	3;1;-5;1; 4;-2;8;0; 1;0;-1;1; -1;3;-1;1
2.3	2;1;1;3; -1;4;-5;-6 -3;1;-4;-7 1;2;-1;0	1;5;19;1; 3;1;1;-1; 2;4;8;0; 1;-3;1;1	3;1;1;5; 19;1;1;1; 2;4;8;0; 1;3;-1;1	-2;4;8;0; 3;1;-1;5; 1;19;1;1; 1;3;1;1	4;-2;8;0; 1;19;1;1; 3;1;-5;1; 1;3;1;1	1;3;1;1; 1;5;19;1; 2;4;-8;0; 1;3;-1;1	3;-1;1;5; 0;1;91;1; 2;-8;4;0; 1;-3;-1;1	2;-8;8;0; 3;-1;9;5; 1;14;7;1; 1;3;-1;-1	3;1;-5;1; 4;-2;8;0; 1;0;-1;1; -1;3;-1;1
2.4	1;-2;1;3; 1;3;-1;1; 3;4;-1;5	1;5;19;1; 3;1;1;-1; 2;4;8;0	3;1;1;5; 19;1;1;1; 2;4;8;0	-2;4;8;0; 3;1;-1;5; 1;19;1;1	4;-2;8;0; 1;19;1;1; 3;1;-5;1	1;3;1;1; 1;5;19;1; 2;4;-8;0	3;-1;1;5; 0;1;91;1; 2;-8;4;0	2;-8;8;0; 3;-1;9;5; 1;14;7;1	3;1;-5;1; 4;-2;8;0; 1;0;-1;1
2.5	4;-3;1;5; 7;1;-2;-2 -3;3;3;-1; 2;0;-1;2; 3;2;-8;-7	1;5;19;1; 3;1;1;-1; 2;4;8;0; 1;-3;1;1; 2;0;-1;2	3;1;1;5; 19;1;1;1; 2;4;8;0; 1;3;-1;1; 7;1;-2;-2	-2;4;8;0; 3;1;-1;5; 1;19;1;1; 1;3;1;1; 2;0;-1;2	4;-2;8;0; 1;19;1;1; 3;1;-5;1; 1;3;1;1;7; 1;-2;-2	1;3;1;1; 1;5;19;1; 2;4;-8;0; 1;3;-1;1; 1;-3;1;1	3;-1;1;5; 0;1;91;1; 2;-8;4;0; 1;-3;-1;1; 2;0;-1;2	2;-8;8;0; 3;-1;9;5; 1;14;7;1; 1;3;-1;-1; 1;-3;1;1	3;1;-5;1; 4;-2;8;0; 1;0;-1;1; -1;3;-1;1; 7;1;-2;-2
2.6	1;2;3;4; 3;5;5;9	1;5;19;1; 3;8;5;-7	3;1;1;5; 19;1;5;1	-2;4;8;0; 3;1;-1;5	4;-2;8;0; 1;19;1;1	1;3;1;7; 1;5;19;1	3;-1;1;5; 0;1;91;1	2;-8;8;0; 3;-1;9;5	3;1;-5;1; 4;-2;8;0
2.7	2;1;-5;1; -11;1;-3; 0;-6;-4; 0;2;-1;2; 0;1;4; -7;6;-11	2;1;3;4; 11;7;3;6; 8;24; 3;2;4;5; 14;1;1; 3;4;10	2;-5;3;1; 5;3;-7;3; -1;-1;5; -9;6;2; 7;4;-6; 3;1;8	3;-2;-5; 1;3;2;-3; 1;5;-3;1; 2;0;-4; -3;1;-1; -4;9;22	1;1;-6; -4;6;3; -1;-6;-4; 2;2;3;9; 2;6;3;2; 3;8;-7	1;2;3;-2; 10;2;-1; -2;-3;20; 3;2;-3;2; -50;2;-3; 2;1;110	2;-2;3;3; 8;5;-9;6; 2;7;4;-6; 3;1;8;2; -5;3;1;5	0;5;8;-1; 0;1;2;3; -2;10;0; 2;5;-4; 40;0;7;4; -5;-90	1;2;15;6; 0;3;-1; -6;-4;2; 2;3;9;2; 6;3;2; 3;8;-7
2.8	5;-4;3; -2;1;-2; 4;3;3; -1;5;2	1;1;1;6; 2;1;3;13; 3;1;1;8	1;1;-1;2; 2;-1;4;1; -1;6;1;5	1;2;-1;7; 2;-1;1;2; 3;-5;2;-7	2;3;-1;6; 1;-1;7;8; 3;-1;2;7	1;0;2;7; 2;1;3;13; 3;1;1;8	1;-2;5;-1; 2;-1;4;1; -1;6;1;5	1;-3;2;-5; 2;-1;1;2; 3;-5;2;-7	1;-4;3;1; 1;-1;7;8; 3;-1;2;7
2.9	3;2;0;-4; 3;0;8;-6; 2;6;2;0;1; -3;1;3;6; -3;-3;6	1;-2;0;-2; -6;3;-7;3; -1;-1;5; -9;6;2;7; 2;-5;3; 1;5;	1;1;-6;-4; 6;2;-3;1; 5;-3;1;2; 0;-4;-3; 3;-2;-5; 1;3	-1;1;6;-6; 13;1;1; -6;-4;6;3; -1;-6;-4; 2; 1;1;-6; -4;6	-1;3;5;1; -10;2;-1; -2;-3;20; 3;2;-3;2; -50;1;2; 3;-2;10	3;-7;3;-1; -1;5;-9; 6;2;7;4; -6;3;1;8; 2;-2;3;3; 8	1;-3;-5; -1;10;1; 2;3;-2; 10;0;2;5; -4;40;0; 5;8;-1;0	-2;3;21; 10;-2;3; -1;-6;-4; 2;2;3;9; 2;6;1;2;1 5;6;0	5;2;3;4;1 3;7;3;6;8; 24;3;2;4; 5;14;2; 1;3;4;11
2.10	1;1; 2;-2	1;-1; 2;1	0;-3; -16/3;6	-1;3; -2;2	0;2; 1/3;-3/2	11;-21; 13;-1	0;-3; -16/3;6	11;-21; 13;-1	0;2;1/3; -3/2

Комплекс багатоваріантних практичних завдань, так званих домашніх контрольних робіт (д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри)), які пропонуються студентам для самостійного розв'язування задля поточного контролю з дисципліни.

Завдання нульового варіанту та їх розв'язки

0 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
3, 7, -5, 4;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, 3, 7, -5, 4;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
1, 5, 1, 2, 3, -3, 1, 3, -3;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
1, 5, 1, 7, 2, 3, -3, -6, 0, 0, 0, -2, 1, 3, -3, 100;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні: 3, 5, -1, 11, 9, 7, 4, 3, 9, 5, -2, 1;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(2) x + (-281) y = 16193 і (-31) x + (-229) y = 19494;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(2) x + (-281) y = -839 і (-31) x + (-229) y = -749;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(2) x + (-281) y = -839 і (-200) x + (28100) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (2) x + (-281) y + (-839) z = -1678 і
(-31) x + (-229) y + (-749) z = -1498 і (37) x + (227) y + (6) z = 761;
10) розв'язок методом Гаусса: (2) x + (-281) y + (-839) z = -2786 і
(-31) x + (-229) y + (-749) z = -2662 і (37) x + (227) y + (6) z = 467.

Розв'язки:

1) визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів, які стоять на головній і побічній діагоналях, тобто $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, отже, $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 7 \cdot (-5) = 12 + 35 = 47$. Відповідь: 47.

2) оскільки $kA = Ak$ і добутком матриці $A = (a_{ij})$ на деяке число k називається така матриця kA, кожен елемент якої одержується множенням відповідних елементів матриці A на це число k, тобто $kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$. Отже, $9\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 63 \\ -45 & 36 \end{pmatrix}$. Визначник отриманої матриці: $\begin{vmatrix} 27 & 63 \\ -45 & 36 \end{vmatrix} = 27 \cdot 36 - 63 \cdot (-45) = 972 + 2835 = 3807$. Відповідь: 3807.

3) визначник третього порядку обчислимо розкладаючи за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Отже, $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 1\cdot\big(3\cdot(-3)-(-3)\cdot 3\big) - 5\cdot\big(2\cdot(-3)-(-3)\cdot 1\big) + 1\cdot\big(2\cdot 3 - 3\cdot 1\big) =$

$= 1\cdot\big(-9+9\big) - 5\cdot\big(-6+3\big) + 1\cdot\big(6-3\big) = 0 - 5\cdot(-3) + 3 = 15 + 3 = 18.$

4) запишемо числа у відповідні рядки та стовпці й отримаємо визначник, який потрібно обчислити: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 100 \end{vmatrix}$. Даний визначник найраціональніше розкривати за елементами III рядка, бо в цьому рядку найбільше нульових елементів.

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 100 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)\cdot 18 = 36$ (отриманий визначник третього порядку ми вже обчислювали в попередньому завданні). Відповідь: 36.

5) $a_{11} = 3$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = -1$, $a_{21} = 11$, $a_{22} = 9$, $a_{23} = 7$, $b_{11} = 4$, $b_{12} = 3$, $b_{21} = 9$, $b_{22} = 5$, $b_{31} = -2$, $b_{32} = 1$. Розглянувши індекси елементів матриць A та B робимо висновок, що матриця A має два рядки та три стовпці, тобто розмірністю (2×3), а матриця B має три рядки та два стовпці, тобто розмірністю (3×2). $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$. Отже: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

При $A\cdot B$ маємо (2×3) на (3×2), отже кількість стовпців матриці, яка є першим множником дорівнює кількості рядків матриці, яка є другим множником, тобто $3 = 3$. При $B\cdot A$ маємо (3×2) на (2×3), отже кількість стовпців матриці, яка є першим множником дорівнює кількості рядків матриці, яка є другим множником, тобто $2=2$. Отож, можна множити і $A\cdot B$ і $B\cdot A$.

Добутком матриць $A\cdot B$ буде матриця $C_1=A\cdot B$ розмірністю (2×2).

$$C_1=A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 11 & 9 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 9 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 4+5\cdot 9+(-1)\cdot(-2) & 3\cdot 3+5\cdot 5+(-1)\cdot 1\\ 11\cdot 4+9\cdot 9+7\cdot(-2) & 11\cdot 3+9\cdot 5+7\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12+45+2 & 9+25-1\\ 44+81-14 & 33+45+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}59 & 33\\ 111 & 85\end{pmatrix}.$$

Матриця $C_2=B\cdot A$ буде розмірністю (3×3). $C_2=B\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 9 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 11 & 9 & 7\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot 3+3\cdot 11 & 4\cdot 5+3\cdot 9 & 4\cdot(-1)+3\cdot 7\\ 9\cdot 3+5\cdot 11 & 9\cdot 5+5\cdot 9 & 9\cdot(-1)+5\cdot 7\\ (-2)\cdot 3+1\cdot 11 & (-2)\cdot 5+1\cdot 9 & (-2)\cdot(-1)+1\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 47 & 17\\ 82 & 90 & 24\\ 5 & -1 & 9\end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначники матриць-добутків $C_1=A\cdot B$ та $C_2=B\cdot A$.

$$|C_1|=\begin{vmatrix}59 & 33\\ 111 & 85\end{vmatrix}=1352,\ |C_2|=\begin{vmatrix}45 & 47 & 17\\ 82 & 90 & 24\\ 5 & -1 & 9\end{vmatrix}=-560.$$

Сума визначників матриць-добутків буде дорівнювати $|C_1|+|C_2|=1352+(-560)=792$. Відповідь: 792.

6) перепишемо систему у звичайному вигляді: $\begin{cases}2x-281y=16193\\ -31x-229y=19494\end{cases}$.

Обчислимо головний визначник цієї системи: $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -281\\ -31 & -229\end{vmatrix}=-9169\neq 0$, отже існує єдиний розв'язок системи та можна використовувати формули Крамера.

$\Delta_1=\begin{vmatrix}16193 & -281\\ 19494 & -229\end{vmatrix}=1769617$. $\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 16193\\ -31 & 19494\end{vmatrix}=540971$. Згідно формул Крамера: $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{1769617}{-9169}=-193$, $y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{540971}{-9169}=-59$. Відповідь. $(-193;-59)$.

7) перепишемо систему у звичайному вигляді:

$\begin{cases} 2x-281y=-839 \\ -31x-229y=-749 \end{cases}$. Домножимо друге рівняння на (-1). Отримаємо систему: $\begin{cases} 2x-281y=-839 \\ 31x+229y=749 \end{cases}$. Виключимо змінну x з другого рівняння, а для цього віднімемо від другого рівняння домноженого на 2 нерше рівняння домножене на 31. Отримаємо:

$$\begin{cases} 2x-281y=-839 \\ (31\cdot 2-2\cdot 31)x+(229\cdot 2-(-281)\cdot 31)y=749\cdot 2-(-839)\cdot 31 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-281y=-839 \\ (0)x+(9169)y=27507 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-281y=-839 \\ 9169y=27507 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-281y=-839 \\ y=27507/9169 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-281y=-839 \\ y=3 \end{cases}$. Щоб знайти змінну x, виключимо змінну y з першого рівняння, а для цього віднімемо від першого рівняння друге рівняння домножене на -281. Отримаємо:

$$\begin{cases} 2x-281y-(-281)y=-839-3\cdot(-281) \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-281y+281y=-839+843 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$. Відповідь: $(2;3)$.

8) перепишемо систему у звичайному вигляді:

$\begin{cases} 2x-281y=-839 \\ -200x+28100y=a \end{cases}$. Система матиме безліч розв'язків, якщо всі розв'язки обох рівнянь будуть спільні, тобто якщо рівняння будуть рівносильні (відповідні прямі будуть накладатися (матимуть безліч спільних точок)). Оскільки: $\frac{-200}{2}=\frac{28100}{-281}=-100$, то $a=-839\cdot(-100)=83900$. Відповідь: 83900.

9) перепишемо систему у звичайному вигляді:

$\begin{cases} 2x-281y-839z=-1678 \\ -31x-229y-749z=-1498 \\ 37x+227y+6z=761 \end{cases}$. Обчислимо головний визначник:

$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -281 & -839\\ -31 & -229 & -749\\ 37 & 227 & 6\end{vmatrix}=6867581\neq 0$, отже існує єдиний розв'язок системи та можна використовувати формули Крамера. $\Delta_1=\begin{vmatrix}-1678 & -281 & -839\\ -1498 & -229 & -749\\ 761 & 227 & 6\end{vmatrix}=13735162$.

$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -1678 & -839\\ -31 & -1498 & -749\\ 37 & 761 & 6\end{vmatrix}=20602743$. $\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -281 & -1678\\ -31 & -229 & -1498\\ 37 & 227 & 761\end{vmatrix}=6867581$.

Згідно формул Крамера: $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{13735162}{6867581}=2$, $y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{20602743}{6867581}=3$, $z=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{6867581}{6867581}=1$. Відповідь: $(2;3;1)$.

10) нерепишемо систему у звичайному вигляді:

$\begin{cases}2x-281y-839z=-2786\\ -31x-229y-749z=-2662\\ 37x+227y+6z=467\end{cases}$. При розв'язуванні системи методом Гаусса будемо використовувати розширену матрицю системи:

$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -281 & -839 & -2786\\ -31 & -229 & -749 & -2662\\ 37 & 227 & 6 & 467\end{array}\right)$. Вилучимо змінну x з II-ого та III-ього рівнянь, а для цього віднімемо від II-ого та III-ього рядків, помножених на число 2, перший рядок помножений на (-31) та 37 відповідно. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -281 & -839 & -2786\\ 0 & -229\cdot 2-(-281)\cdot(-31) & -749\cdot 2-(-839)\cdot(-31) & -2662\cdot 2-(-2786)\cdot(-31)\\ 0 & 227\cdot 2-(-281)\cdot 37 & 6\cdot 2-(-839)\cdot 37 & 467\cdot 2-(-2786)\cdot 37\end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -281 & -839 & -2786\\ 0 & -9169 & -27507 & -91690\\ 0 & 10851 & 31055 & 104016\end{array}\right)$. Вилучимо змінну y з III-ього рівняння, а для цього віднімемо від III-ього рядка, помноженого на число (-9169), II-ий рядок помножений на 10851. Отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -281 & -839 & \bigg| & -2786 \\ 0 & -9169 & -27507 & \bigg| & -91690 \\ 0 & 0 & 31055\cdot(-9169)-(-27507)\cdot 10851 & \bigg| & 104016\cdot(-9169)-(-91690)\cdot 10851 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -281 & -839 & -2786 \\ 0 & -9169 & -27507 & -91690 \\ 0 & 0 & 13735162 & 41205486 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -281 & -839 & -2786 \\ 0 & -9169 & -27507 & -91690 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Остання розширена матриця відповідає такій системі рівнянь:

$$\begin{cases} 2x & -281y & -839z & =-2786 \\ & -9169y & -27507z & =-91690. \\ & & \mathrm{z} & = 3 \end{cases}$$

Щоб знайти інші змінні, вилучимо змінну z з другого та першого рівнянь, а для цього додамо до другого та першого рядків останньої розширеної матриці третій рядок помножений на 27507 та 839. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2+0 & -281+0 & -839+1\cdot 839 & -2786+3\cdot 839 \\ 0+0 & -9169+0 & -27507+1\cdot 27507 & -91690+3\cdot 27507 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -281 & 0 & -269 \\ 0 & -9169 & 0 & -9169 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -281 & 0 & -269 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Щоб знайти змінну x, вилучимо змінну y з першого рівняння, а для цього додамо до першого рядка останньої розширеної матриці другий рядок помножений на 281.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2+0 & -281+1\cdot 281 & 0+0 & -269+1\cdot 281 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає такій системі рівнянь: $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$. Відповідь. $(6;1;3)$.

Завдання (100 варіантів)

Завдання (100 варіантів)

1 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:

1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:

2, 10, 64, -18;

2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:

-4, 2, 10, 64, -18;

3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:

-20, 4, -20, 4, 2, 10, -18, 64, -18;

4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:

-20, 4, -20, 8, 4, 2, 10, -7, 0, 0, 0, 3, -18, 64, -18, 101;

5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:

5, 25, 3, -5, 11, -47, 28, -47, 14, 4, 69, 25;

6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:

(3) x + (277) y = 16054 і (37) x + (227) y = 3450;

7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:

(3) x + (277) y = -563 і (37) x + (227) y = -565;

8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:

(3) x + (277) y = -563 і (303) x + (27977) y = a;

9) розв'язок методом Крамера: (3) x + (277) y + (-563) z = 1689 і
(37) x + (227) y + (-565) z = 1695 і (-41) x + (223) y + (-9) z = -287;

10) розв'язок методом Гаусса: (3) x + (277) y + (-563) z = -9 і
(37) x + (227) y + (-565) z = -111 і (-41) x + (223) y + (-9) z = -505.

2 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:

1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:

-5, 11, 28, -47;

2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:

5, -5, 11, 28, -47;

3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:

25, 4, 25, 4, -5, 11, -47, 28, -47;

4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:

25, 4, 25, 9, 4, -5, 11, -8, 0, 0, 0, -4, -47, 28, -47, 102;

5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:

-4, 23, -4, 49, -36, 79, -18, 79, -14, 7, -75, 23;

6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:

(5) x + (-271) y = 19542 і (-41) x + (223) y = -26298;

7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:

(5) x + (-271) y = -1335 і (-41) x + (223) y = 951;

8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:

(5) x + (-271) y = -1335 і (-510) x + (27642) y = a;

9) розв'язок методом Крамера: (5) x + (-271) y + (-1335) z = -5340 і
(-41) x + (223) y + (951) z = 3804 і (43) x + (-211) y + (12) z = -847;

10) розв'язок методом Гаусса: (5) x + (-271) y + (-1335) z = -7428 і
(-41) x + (223) y + (951) z = 4932 і (43) x + (-211) y + (12) z = -57.

3 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
49, -36, -18, 79;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, 49, -36, -18, 79;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
23, -4, 23, -4, 49, -36, 79, -18, 79;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
23, -4, 23, 6, -4, 49, -36, -5, 0, 0, 0, 5, 79, -18, 79, 103;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
4, 14, 4, 39, 11, 74, -20, 74, 20, 7, -57, 14;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(7) x + (269) y = 20996 і (43) x + (-211) y = -3328;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(7) x + (269) y = -1111 і (43) x + (-211) y = 629;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(7) x + (269) y = -1111 і (721) x + (27707) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (7) x + (269) y + (-1111) z = 5555 і
(43) x + (-211) y + (629) z = -3145 і (-47) x + (199) y + (-15) z = -471;
10) розв'язок методом Гаусса: (7) x + (269) y + (-1111) z = 2725 і
(43) x + (-211) y + (629) z = -1895 і (-47) x + (199) y + (-15) z = -429.

4 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
39, 11, -20, 74;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, 39, 11, -20, 74;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
14, 4, 14, 4, 39, 11, 74, -20, 74;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
14, 4, 14, 5, 4, 39, 11, -4, 0, 0, 0, -6, 74, -20, 74, 104;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
7, -14, 7, 2, 11, -34, 77, -34, 21, -7, 77, -14;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(11) x + (-263) y = -2433 і (-47) x + (199) y = 12245;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(11) x + (-263) y = -1775 і (-47) x + (199) y = 1111;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(11) x + (-263) y = -1775 і (-1144) x + (27352) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (11) x + (-263) y + (-1775) z = -10650 і
(-47) x + (199) y + (1111) z = 6666 і (53) x + (197) y + (18) z = 1787;
10) розв'язок методом Гаусса: (11) x + (-263) y + (-1775) z = -13542 і
(-47) x + (199) y + (1111) z = 7926 і (53) x + (197) y + (18) z = 2065.

5 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
2, 11, 77, -34;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, 2, 11, 77, -34;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-14, 7, -14, 7, 2, 11, -34, 77, -34;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-14, 7, -14, 7, 7, 2, 11, -6, 0, 0, 0, 7, -34, 77, -34, 105;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
9, 20, 7, -10, 11, -40, 27, -40, 17, 7, 57, 20;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-13) x + (257) y = 4190 і (53) x + (197) y = -13348;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-13) x + (257) y = -1451 і (53) x + (197) y = -1553;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-13) x + (257) y = -1451 і (-1365) x + (26985) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-13) x + (257) y + (-1451) z = 10157 і
(53) x + (197) y + (-1553) z = 10871 і (-59) x + (-193) y + (-21) z = 1739;
10) розв'язок методом Гаусса: (-13) x + (257) y + (-1451) z = 6923 і
(53) x + (197) y + (-1553) z = 6629 і (-59) x + (-193) y + (-21) z = 2909.

6 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-10, 11, 27, -40;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, -10, 11, 27, -40;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
20, 7, 20, 7, -10, 11, -40, 27, -40;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
20, 7, 20, 8, 7, -10, 11, -7, 0, 0, 0, -8, -40, 27, -40, 106;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-7, 21, -7, 47, -35, 69, -25, 69, -19, 8, -20, 21;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(17) x + (-251) y = 5624 і (-59) x + (-193) y = -14198;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(17) x + (-251) y = -2123 і (-59) x + (-193) y = -2209;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(17) x + (-251) y = -2123 і (-1802) x + (26606) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (17) x + (-251) y + (-2123) z = -16984 і
(-59) x + (-193) y + (-2209) z = -17672 і (61) x + (191) y + (24) z = 2375;
10) розв'язок методом Гаусса: (17) x + (-251) y + (-2123) z = -20456 і
(-59) x + (-193) y + (-2209) z = -22648 і (61) x + (191) y + (24) z = 3017.

7 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
47, -35, -25, 69;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, 47, -35, -25, 69;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
21, -7, 21, -7, 47, -35, 69, -25, 69;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
21, -7, 21, 9, -7, 47, -35, -8, 0, 0, 0, 9, 69, -25, 69, 107;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
7, 17, 7, 48, 11, 69, -25, 69, 6, 8, 74, 17;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(19) x + (241) y = 6456 і (61) x + (191) y = 16648;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(19) x + (241) y = -2099 і (61) x + (191) y = -2077;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(19) x + (241) y = -2099 і (2033) x + (25787) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (19) x + (241) y + (-2099) z = 18891 і
(61) x + (191) y + (-2077) z = 18693 і (-67) x + (181) y + (-27) z = -575;
10) розв'язок методом Гаусса: (19) x + (241) y + (-2099) z = 13869 і
(61) x + (191) y + (-2077) z = 13059 і (-67) x + (181) y + (-27) z = 215.

8 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
48, 11, -25, 69;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 48, 11, -25, 69;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
17, 7, 17, 7, 48, 11, 69, -25, 69;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
17, 7, 17, 6, 7, 48, 11, -5, 0, 0, 0, -2, 69, -25, 69, 108;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
8, -19, 8, -16, 11, -75, 85, -75, 18, -8, 40, -19;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(23) x + (-239) y = -2914 і (-67) x + (181) y = 14156;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(23) x + (-239) y = 193 і (-67) x + (181) y = -47;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(23) x + (-239) y = 193 і (-2484) x + (25812) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (23) x + (-239) y + (193) z = -386 і
(-67) x + (181) y + (-47) z = 94 і (71) x + (-179) y + (-6) z = 55;
10) розв'язок методом Гаусса: (23) x + (-239) y + (193) z = 386 і
(-67) x + (181) y + (-47) z = -94 і (71) x + (-179) y + (-6) z = 117.

9 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-116, 11, 85, -75;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, -116, 11, 85, -75;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-19, 8, -19, 8, -116, 11, -75, 85, -75;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-19, 8, -19, 5, 8, -116, 11, -4, 0, 0, 0, 3, -75, 85, -75, 109;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
11, 6, 8, -39, 11, -57, 77, -57, 6, 8, -65, 6;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(29) x + (233) y = -3902 і (71) x + (-179) y = -19296;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(29) x + (233) y = 1019 і (71) x + (-179) y = -503;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(29) x + (233) y = 1019 і (3161) x + (25397) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (29) x + (233) y + (1019) z = 3057 і
(71) x + (-179) y + (-503) z = -1509 і (-73) x + (173) y + (9) z = 491;
10) розв'язок методом Гаусса: (29) x + (233) y + (1019) z = 4803 і
(71) x + (-179) y + (-503) z = -1731 і (-73) x + (173) y + (9) z = -275.

10 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-39, 11, 77, -57;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, -39, 11, 77, -57;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
6, 8, 6, 8, -39, 11, -57, 77, -57;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
6, 8, 6, 7, 8, -39, 11, -6, 0, 0, 0, -4, -57, 77, -57, 110;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-8, 18, -8, 52, -42, 77, -27, 77, -9, 11, -9, 18;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-31) x + (-229) y = -3330 і (-73) x + (173) y = -19950;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-31) x + (-229) y = 811 і (-73) x + (173) y = -227;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-31) x + (-229) y = 811 і (3410) x + (25190) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-31) x + (-229) y + (811) z = -3244 і
(-73) x + (173) y + (-227) z = 908 і (79) x + (167) y + (-12) z = -757;
10) розв'язок методом Гаусса: (-31) x + (-229) y + (811) z = -916 і
(-73) x + (173) y + (-227) z = 692 і (79) x + (167) y + (-12) z = -1747.

11 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
52, -42, -27, 77;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, 52, -42, -27, 77;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
18, -8, 18, -8, 52, -42, 77, -27, 77;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
18, -8, 18, 8, -8, 52, -42, -7, 0, 0, 0, 5, 77, -27, 77, 111;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
8, 6, 8, 37, 11, 57, -9, 57, 11, -11, -35, 6;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(37) x + (227) y = 12786 і (79) x + (167) y = 21264;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(37) x + (227) y = 1547 і (79) x + (167) y = 1397;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(37) x + (227) y = 1547 і (4107) x + (25197) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (37) x + (227) y + (1547) z = 7735 і
(79) x + (167) y + (1397) z = 6985 і (-83) x + (-163) y + (15) z = -1333;
10) розв'язок методом Гаусса: (37) x + (227) y + (1547) z = 10745 і
(79) x + (167) y + (1397) z = 10235 і (-83) x + (-163) y + (15) z = -1807.

12 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
37, 11, -9, 57;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, 37, 11, -9, 57;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
6, 8, 6, 8, 37, 11, 57, -9, 57;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
6, 8, 6, 9, 8, 37, 11, -8, 0, 0, 0, -6, 57, -9, 57, 112;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
11, -9, 11, 1, 3, -20, 73, -20, 9, 11, 14, -9;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(41) x + (-223) y = -4178 і (-83) x + (-163) y = 22590;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(41) x + (-223) y = 869 і (-83) x + (-163) y = 1313;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(41) x + (-223) y = 869 і (-4592) x + (24976) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (41) x + (-223) y + (869) z = -5214 і
(-83) x + (-163) y + (1313) z = -7878 і (89) x + (157) y + (-18) z = -1193;
10) розв'язок методом Гаусса: (41) x + (-223) y + (869) z = -3522 і
(-83) x + (-163) y + (1313) z = -3930 і (89) x + (157) y + (-18) z = -2611.

13 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:

1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
1, 3, 73, -20;

2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, 1, 3, 73, -20;

3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-9, 11, -9, 11, 1, 3, -20, 73, -20;

4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-9, 11, -9, 6, 11, 1, 3, -5, 0, 0, 0, 7, -20, 73, -20, 113;

5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-11, 11, -11, 40, 17, 74, -10, 74, 9, 12, 64, 11;

6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(43) x + (211) y = -3470 і (89) x + (157) y = -15294;

7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(43) x + (211) y = 1989 і (89) x + (157) y = 1879;

8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(43) x + (211) y = 1989 і (4859) x + (23843) y = a;

9) розв'язок методом Крамера: (43) x + (211) y + (1989) z = 13923 і
(89) x + (157) y + (1879) z = 13153 і (-97) x + (151) y + (21) z = 655;

10) розв'язок методом Гаусса: (43) x + (211) y + (1989) z = 18081 і
(89) x + (157) y + (1879) z = 17843 і (-97) x + (151) y + (21) z = -963.

14 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:

1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
40, 17, -100, 74;

2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, 40, 17, -100, 74;

3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
11, -11, 11, -11, 40, 17, 74, -100, 74;

4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
11, -11, 11, 5, -11, 40, 17, -4, 0, 0, 0, -8, 74, -100, 74, 114;

5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
11, 9, 11, 31, 16, 40, -22, 40, -4, 20, -13, 9;

6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(47) x + (-199) y = 16086 і (-97) x + (151) y = -25148;

7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(47) x + (-199) y = 1017 і (-97) x + (151) y = -281;

8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(47) x + (-199) y = 1017 і (-5358) x + (22686) y = a;

9) розв'язок методом Крамера: (47) x + (-199) y + (1017) z = -8136 і
(-97) x + (151) y + (-281) z = 2248 і (101) x + (-149) y + (-24) z = 451;

10) розв'язок методом Гаусса: (47) x + (-199) y + (1017) z = -6456 і
(-97) x + (151) y + (-281) z = 2936 і (101) x + (-149) y + (-24) z = -915.

15 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
31, 16, -22, 40;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 31, 16, -22, 40;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 11, 9, 11, 31, 16, 40, -22, 40;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 11, 9, 7, 11, 31, 16, -6, 0, 0, 0, 9, 40, -22, 40, 115;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
12, 9, 12, -10, 18, -65, 52, -65, 15, 20, -4, 9;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-53) x + (197) y = -3258 і (101) x + (-149) y = 14586;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-53) x + (197) y = 1493 і (101) x + (-149) y = -581;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(-53) x + (197) y = 1493 і (-6095) x + (22655) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (-53) x + (197) y + (1493) z = 13437 і
(101) x + (-149) y + (-581) z = -5229 і (-103) x + (139) y + (27) z = 679;
10) розв’язок методом Гаусса: (-53) x + (197) y + (1493) z = 15075 і
(101) x + (-149) y + (-581) z = -4275 і (-103) x + (139) y + (27) z = -1399.

16 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-10, 18, 52, -65;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, -10, 18, 52, -65;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 12, 9, 12, -10, 18, -65, 52, -65;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 12, 9, 8, 12, -10, 18, -7, 0, 0, 0, -2, -65, 52, -65, 116;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
20, -4, 20, -26, 66, -9, 60, -9, 4, -20, 80, -4;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(59) x + (-193) y = -3710 і (-103) x + (139) y = 14592;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(59) x + (-193) y = -654 і (-103) x + (139) y = 350;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(59) x + (-193) y = -654 і (-6844) x + (22388) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (59) x + (-193) y + (-654) z = -654 і
(-103) x + (139) y + (350) z = 350 і (107) x + (137) y + (6) z = 762;
10) розв’язок методом Гаусса: (59) x + (-193) y + (-654) z = -2262 і
(-103) x + (139) y + (350) z = 782 і (107) x + (137) y + (6) z = 666.

17 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-26, 66, 60, -9;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, -26, 66, 60, -9;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-4, 20, -4, 20, -26, 66, -9, 60, -9;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-4, 20, -4, 9, 20, -26, 66, -8, 0, 0, 0, 3, -9, 60, -9, 117;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
20, 15, 20, 1, 15, -35, 11, -15, 4, 20, 70, 14;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(61) x + (191) y = -3560 і (107) x + (137) y = -14760;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(61) x + (191) y = -374 і (107) x + (137) y = -458;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(61) x + (191) y = -374 і (7137) x + (22347) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (61) x + (191) y + (-374) z = 1496 і
(107) x + (137) y + (-458) z = 1832 і (-109) x + (-131) y + (-9) z = 503;
10) розв'язок методом Гаусса: (61) x + (191) y + (-374) z = -1130 і
(107) x + (137) y + (-458) z = -1190 і (-109) x + (-131) y + (-9) z = 1645.

18 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
1, 15, 11, -15;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, 1, 15, 11, -15;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
14, 20, 15, 20, 1, 15, -35, 11, -15;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
14, 20, 15, 6, 20, 1, 15, -5, 0, 0, 0, -4, -35, 11, -15, 118;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-20, 4, -20, 82, -74, 14, -44, 12, -12, 5, 3, 4;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(67) x + (-181) y = 21304 і (-109) x + (-131) y = -14662;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(67) x + (-181) y = -818 і (-109) x + (-131) y = -1222;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(67) x + (-181) y = -818 і (-7906) x + (21358) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (67) x + (-181) y + (-818) z = -2454 і
(-109) x + (-131) y + (-1222) z = -3666 і (113) x + (127) y + (12) z = 1238;
10) розв'язок методом Гаусса: (67) x + (-181) y + (-818) z = -4466 і
(-109) x + (-131) y + (-1222) z = -8902 і (113) x + (127) y + (12) z = 1682.

19 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
82, -74, -44, 12;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, 82, -74, -44, 12;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
4, -20, 4, -20, 82, -74, 14, -44, 12;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
4, -20, 4, 5, -20, 82, -74, -4, 0, 0, 0, 5, 14, -44, 12, 119;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
20, 4, 20, 61, 14, 64, 20, 64, 19, 5, -19, 4;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(71) x + (179) y = 22338 і (113) x + (127) y = 27184;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(71) x + (179) y = -892 і (113) x + (127) y = -946;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(71) x + (179) y = -892 і (8449) x + (21301) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (71) x + (179) y + (-892) z = 5352 і
(113) x + (127) y + (-946) z = 5676 і (-2) x + (299) y + (-15) z = -782;
10) розв'язок методом Гаусса: (71) x + (179) y + (-892) z = 358 і
(113) x + (127) y + (-946) z = 254 і (-2) x + (299) y + (-15) z = -2018.

20 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
61, 14, 20, 64;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, 61, 14, 20, 64;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
4, 20, 4, 20, 61, 14, 64, 20, 64;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
4, 20, 4, 7, 20, 61, 14, -6, 0, 0, 0, -6, 64, 20, 64, 120;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
5, -12, 5, 5, 62, -13, 11, -13, 2, -5, 3, -12;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-73) x + (-173) y = 23274 і (-2) x + (299) y = -17283;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-73) x + (-173) y = -1822 і (-2) x + (299) y = 2380;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-73) x + (-173) y = -1822 і (8760) x + (20760) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-73) x + (-173) y + (-1822) z = -9110 і
(-2) x + (299) y + (2380) z = 11900 і (3) x + (-281) y + (18) z = -2158;
10) розв'язок методом Гаусса: (-73) x + (-173) y + (-1822) z = -16582 і
(-2) x + (299) y + (2380) z = 20200 і (3) x + (-281) y + (18) z = -926.

21 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
5, 62, 11, -13;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, 5, 62, 11, -13;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-12, 5, -12, 5, 5, 62, -13, 11, -13;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-12, 5, -12, 8, 5, 5, 62, -7, 0, 0, 0, 7, -13, 11, -13, 121;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
5, 19, 5, -23, 29, -4, 11, 1, 3, 5, 90, 19;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(79) x + (167) y = -3480 і (3) x + (-281) y = -17660;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(79) x + (167) y = -1388 і (3) x + (-281) y = 1384;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(79) x + (167) y = -1388 і (9559) x + (20207) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (79) x + (167) y + (-1388) z = 11104 і
(3) x + (-281) y + (1384) z = -11072 і (-5) x + (277) y + (-21) z = -1161;
10) розв'язок методом Гаусса: (79) x + (167) y + (-1388) z = 3778 і
(3) x + (-281) y + (1384) z = -4454 і (-5) x + (277) y + (-21) z = -2283.

22 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-23, 29, 11, 1;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, -23, 29, 11, 1;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
19, 5, 19, 5, -23, 29, -4, 11, 1;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
19, 5, 19, 9, 5, -23, 29, -8, 0, 0, 0, -8, -4, 11, 1, 122;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-5, 2, -5, 4, -20, 80, -15, 80, -4, 8, -9, 31;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(83) x + (-163) y = 24782 і (-5) x + (277) y = -19394;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(83) x + (-163) y = -966 і (-5) x + (277) y = 2730;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(83) x + (-163) y = -966 і (-10126) x + (19886) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (83) x + (-163) y + (-966) z = -6762 і
(-5) x + (277) y + (2730) z = 19110 і (7) x + (271) y + (24) z = 2910;
10) розв'язок методом Гаусса: (83) x + (-163) y + (-966) z = -8646 і
(-5) x + (277) y + (2730) z = 28842 і (7) x + (271) y + (24) z = 2034.

23 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
4, -20, -15, 80;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, 4, -20, -15, 80;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
31, -5, 2, -5, 4, -20, 80, -15, 80;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
31, -5, 2, 6, -5, 4, -20, -5, 0, 0, 0, 9, 80, -15, 80, 123;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
5, 3, 5, 56, 1, 70, 17, 70, 1, 8, -10, 3;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(89) x + (157) y = 25654 і (7) x + (271) y = 20382;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(89) x + (157) y = -1900 і (7) x + (271) y = -1960;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(89) x + (157) y = -1900 і (10947) x + (19311) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (89) x + (157) y + (-1900) z = 19000 і
(7) x + (271) y + (-1960) z = 19600 і (-11) x + (-269) y + (-27) z = 2279;
10) розв’язок методом Гаусса: (89) x + (157) y + (-1900) z = 9170 і
(7) x + (271) y + (-1960) z = 10550 і (-11) x + (-269) y + (-27) z = 3445.

24 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
56, 1, 17, 70;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, 56, 1, 17, 70;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
3, 5, 3, 5, 56, 1, 70, 17, 70;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
3, 5, 3, 5, 5, 56, 1, -4, 0, 0, 0, -2, 70, 17, 70, 124;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
7, -4, 8, -7, 65, 3, 12, 3, 1, -8, 10, -4;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(97) x + (-151) y = -4206 і (-11) x + (-269) y = 21364;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(97) x + (-151) y = -194 і (-11) x + (-269) y = 22;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(97) x + (-151) y = -194 і (-12028) x + (18724) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (97) x + (-151) y + (-194) z = 582 і
(-11) x + (-269) y + (22) z = -66 і (13) x + (263) y + (-6) z = -2;
10) розв’язок методом Гаусса: (97) x + (-151) y + (-194) z = 22 і
(-11) x + (-269) y + (22) z = 1142 і (13) x + (263) y + (-6) z = -1130.

25 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-7, 65, 12, 3;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, -7, 65, 12, 3;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-4, 8, -4, 8, -7, 65, 3, 12, 3;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-4, 8, -4, 7, 8, -7, 65, -6, 0, 0, 0, 3, 3, 12, 3, 125;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
8, 1, 8, 24, 28, -19, 4, -19, 4, 8, 69, 12;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-101) x + (149) y = 27022 і (13) x + (263) y = 18814;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-101) x + (149) y = 442 і (13) x + (263) y = 1354;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-101) x + (149) y = 442 і (-12625) x + (18625) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-101) x + (149) y + (442) z = 884 і
(13) x + (263) y + (1354) z = 2708 і (-17) x + (257) y + (9) z = 1243;
10) розв'язок методом Гаусса: (-101) x + (149) y + (442) z = 1450 і
(13) x + (263) y + (1354) z = 7150 і (-17) x + (257) y + (9) z = 149.

26 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
24, 28, 4, -19;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, 24, 28, 4, -19;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
12, 8, 1, 8, 24, 28, -19, 4, -19;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
12, 8, 1, 8, 8, 24, 28, -7, 0, 0, 0, -4, -19, 4, -19, 126;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-8, 1, -8, 7, -15, 3, 20, 8, 4, -20, 80, 17;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(103) x + (-139) y = 26884 і (-17) x + (257) y = -23864;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(103) x + (-139) y = -134 і (-17) x + (257) y = -446;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(103) x + (-139) y = -134 і (-12978) x + (17514) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (103) x + (-139) y + (-134) z = 670 і
(-17) x + (257) y + (-446) z = 2230 і (19) x + (-251) y + (-12) z = 498;
10) розв'язок методом Гаусса: (103) x + (-139) y + (-134) z = -134 і
(-17) x + (257) y + (-446) z = -446 і (19) x + (-251) y + (-12) z = 1302.

27 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:

1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
7, -15, 20, 8;

2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, 7, -15, 20, 8;

3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
17, -8, 1, -8, 7, -15, 3, 20, 8;

4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
17, -8, 1, 9, -8, 7, -15, -8, 0, 0, 0, 5, 3, 20, 8, 127;

5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
8, 4, 8, 74, -4, 90, 20, 90, 56, 1, 70, 4;

6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(107) x + (137) y = 27066 і (19) x + (-251) y = -19698;

7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(107) x + (137) y = 1494 і (19) x + (-251) y = -1662;

8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(107) x + (137) y = 1494 і (13589) x + (17399) y = a;

9) розв’язок методом Крамера: (107) x + (137) y + (1494) z = 5976 і
(19) x + (-251) y + (-1662) z = -6648 і (-23) x + (241) y + (15) z = 1617;

10) розв’язок методом Гаусса: (107) x + (137) y + (1494) z = 12474 і
(19) x + (-251) y + (-1662) z = -12102 і (-23) x + (241) y + (15) z = 483.

28 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:

1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
74, -4, 20, 90;

2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, 74, -4, 20, 90;

3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
4, 8, 4, 8, 74, -4, 90, 20, 90;

4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
4, 8, 4, 6, 8, 74, -4, -5, 0, 0, 0, -6, 90, 20, 90, 128;

5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
9, -7, 9, 9, 77, -9, 9, -9, -7, 65, 3, -7;

6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(109) x + (-131) y = -2226 і (-23) x + (241) y = -20226;

7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(109) x + (-131) y = -130 і (-23) x + (241) y = -826;

8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(109) x + (-131) y = -130 і (-13952) x + (16768) y = a;

9) розв’язок методом Крамера: (109) x + (-131) y + (-130) z = 910 і
(-23) x + (241) y + (-826) z = 5782 і (29) x + (239) y + (-18) z = -986;

10) розв’язок методом Гаусса: (109) x + (-131) y + (-130) z = -394 і
(-23) x + (241) y + (-826) z = 1790 і (29) x + (239) y + (-18) z = -2362.

29 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
9, 77, 9, -9;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 9, 77, 9, -9;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-7, 9, -7, 9, 9, 77, -9, 9, -9;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-7, 9, -7, 5, 9, 9, 77, -4, 0, 0, 0, 7, -9, 9, -9, 129;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
9, 21, 9, -19, 14, -10, 26, -10, 24, 28, -19, 21;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(113) x + (127) y = -1976 і (29) x + (239) y = 20340;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(113) x + (127) y = 1934 і (29) x + (239) y = 2354;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(113) x + (127) y = 1934 і (14577) x + (16383) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (113) x + (127) y + (1934) z = 11604 і
(29) x + (239) y + (2354) z = 14124 і (-31) x + (-233) y + (21) z = -2209;
10) розв'язок методом Гаусса: (113) x + (127) y + (1934) z = 20414 і
(29) x + (239) y + (2354) z = 22990 і (-31) x + (-233) y + (21) z = -1627.

30 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-19, 14, 26, -10;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, -19, 14, 26, -10;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
21, 9, 21, 9, -19, 14, -10, 26, -10;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
21, 9, 21, 7, 9, -19, 14, -6, 0, 0, 0, -8, -10, 26, -10, 130;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-9, 7, -9, 94, -9, 10, 5, 1, 7, -15, 3, 16;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-2) x + (-299) y = 30543 і (-31) x + (-233) y = 20062;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-2) x + (-299) y = 1810 і (-31) x + (-233) y = 1646;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-2) x + (-299) y = 1810 і (260) x + (38870) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-2) x + (-299) y + (1810) z = -16290 і
(-31) x + (-233) y + (1646) z = -14814 і (37) x + (229) y + (-24) z = -1430;
10) розв'язок методом Гаусса: (-2) x + (-299) y + (1810) z = -7822 і
(-31) x + (-233) y + (1646) z = -6802 і (37) x + (229) y + (-24) z = -3034.

31 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
94, -9, 5, 1;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, 94, -9, 5, 1;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
16, -9, 7, -9, 94, -9, 10, 5, 1;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
16, -9, 7, 8, -9, 94, -9, -7, 0, 0, 0, 9, 10, 5, 1, 131;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
9, 7, 9, 51, -5, 69, 7, 69, 74, -4, 90, 7;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(3) x + (281) y = 30964 і (37) x + (229) y = 35566;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(3) x + (281) y = 3118 і (37) x + (229) y = 2852;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(3) x + (281) y = 3118 і (393) x + (36811) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (3) x + (281) y + (3118) z = 24944 і
(37) x + (229) y + (2852) z = 22816 і (-41) x + (227) y + (27) z = 2317;
10) розв'язок методом Гаусса: (3) x + (281) y + (3118) z = 36346 і
(37) x + (229) y + (2852) z = 33974 і (-41) x + (227) y + (27) z = 779.

32 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
51, -5, 7, 69;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, 51, -5, 7, 69;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
7, 9, 7, 9, 51, -5, 69, 7, 69;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
7, 9, 7, 9, 9, 51, -5, -8, 0, 0, 0, -2, 69, 7, 69, 132;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
12, -10, 12, -70, 25, -52, 93, -52, 9, 77, -9, -10;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(5) x + (-277) y = 28788 і (-41) x + (227) y = -13222;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(5) x + (-277) y = -1375 і (-41) x + (227) y = 1053;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(5) x + (-277) y = -1375 і (-660) x + (36564) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (5) x + (-277) y + (-1375) z = 0 і
(-41) x + (227) y + (1053) z = 0 і (43) x + (-223) y + (6) z = -1035;
10) розв'язок методом Гаусса: (5) x + (-277) y + (-1375) z = -6568 і
(-41) x + (227) y + (1053) z = 4792 і (43) x + (-223) y + (6) z = 511.

33 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-70, 25, 93, -52;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, -70, 25, 93, -52;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-10, 12, -10, 12, -70, 25, -52, 93, -52;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-10, 12, -10, 6, 12, -70, 25, -5, 0, 0, 0, 3, -52, 93, -52, 133;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
16, 20, 12, -30, 7, -8, 41, -8, -19, 14, -10, 20;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(7) x + (271) y = 28684 і (43) x + (-223) y = -37110;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(7) x + (271) y = -21 і (43) x + (-223) y = -129;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(7) x + (271) y = -21 і (931) x + (36043) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (7) x + (271) y + (-21) z = 105 і
(43) x + (-223) y + (-129) z = 645 і (-47) x + (211) y + (-9) z = 195;
10) розв'язок методом Гаусса: (7) x + (271) y + (-21) z = -1689 і
(43) x + (-223) y + (-129) z = 951 і (-47) x + (211) y + (-9) z = -843.

34 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-30, 7, 41, -8;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, -30, 7, 41, -8;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
20, 12, 20, 12, -30, 7, -8, 41, -8;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
20, 12, 20, 5, 12, -30, 7, -4, 0, 0, 0, -4, -8, 41, -8, 134;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-12, 10, -12, 6, -20, 7, -41, 42, 94, -9, 10, 10;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(11) x + (-269) y = 3519 і (-47) x + (211) y = -13159;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(11) x + (-269) y = -1839 і (-47) x + (211) y = 1289;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(11) x + (-269) y = -1839 і (-1474) x + (36046) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (11) x + (-269) y + (-1839) z = -3678 і
(-47) x + (211) y + (1289) z = 2578 і (53) x + (199) y + (12) z = 1617;
10) розв'язок методом Гаусса: (11) x + (-269) y + (-1839) z = -13010 і
(-47) x + (211) y + (1289) z = 8670 і (53) x + (199) y + (12) z = 919.

35 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
6, -20, -41, 42;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, 6, -20, -41, 42;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
10, -12, 10, -12, 6, -20, 7, -41, 42;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
10, -12, 10, 7, -12, 6, -20, -6, 0, 0, 0, 5, 7, -41, 42, 135;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
12, 10, 12, 30, -38, 7, -18, 9, 51, -5, 69, 10;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-13) x + (263) y = -2708 і (53) x + (199) y = 14854;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-13) x + (263) y = -461 і (53) x + (199) y = -663;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-13) x + (263) y = -461 і (-1755) x + (35505) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-13) x + (263) y + (-461) z = 3227 і
(53) x + (199) y + (-663) z = 4641 і (-59) x + (-197) y + (-15) z = 809;
10) розв'язок методом Гаусса: (-13) x + (263) y + (-461) z = -987 і
(53) x + (199) y + (-663) z = -1061 і (-59) x + (-197) y + (-15) z = 2491.

36 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
390, -38, -18, 9;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 390, -38, -18, 9;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
10, 12, 10, 12, 390, -38, 7, -18, 9;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
10, 12, 10, 8, 12, 390, -38, -7, 0, 0, 0, -6, 7, -18, 9, 136;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
4, 4, 21, 5, 25, 18, 16, 18, -70, 25, -52, -5;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(17) x + (-257) y = -3186 і (-59) x + (-197) y = 16502;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(17) x + (-257) y = -2211 і (-59) x + (-197) y = -2127;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(17) x + (-257) y = -2211 і (-2312) x + (34952) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (17) x + (-257) y + (-2211) z = -8844 і
(-59) x + (-197) y + (-2127) z = -8508 і (61) x + (193) y + (18) z = 2157;
10) розв'язок методом Гаусса: (17) x + (-257) y + (-2211) z = -20364 і
(-59) x + (-197) y + (-2127) z = -20796 і (61) x + (193) y + (18) z = 1839.

37 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
5, 25, 16, 18;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, 5, 25, 16, 18;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-5, 4, 4, 21, 5, 25, 18, 16, 18;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-5, 4, 4, 9, 21, 5, 25, -8, 0, 0, 0, 7, 18, 16, 18, 137;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
21, 15, 21, -57, 25, -69, 4, -69, -30, 7, -8, 15;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(19) x + (251) y = -3126 і (61) x + (193) y = -14326;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(19) x + (251) y = -1137 і (61) x + (193) y = -1199;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(19) x + (251) y = -1137 і (2603) x + (34387) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (19) x + (251) y + (-1137) z = 10233 і
(61) x + (193) y + (-1199) z = 10791 і (-67) x + (191) y + (-21) z = -85;
10) розв'язок методом Гаусса: (19) x + (251) y + (-1137) z = 1639 і
(61) x + (193) y + (-1199) z = 1585 і (-67) x + (191) y + (-21) z = -419.

38 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-57, 25, 4, -69;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, -57, 25, 4, -69;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
15, 21, 15, 21, -57, 25, -69, 4, -69;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
15, 21, 15, 6, 21, -57, 25, -5, 0, 0, 0, -8, -69, 4, -69, 138;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-21, 5, -21, 84, -13, 17, 5, 92, 6, -20, 7, 5;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(23) x + (-241) y = 8424 і (-67) x + (191) y = -18918;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(23) x + (-241) y = -2467 і (-67) x + (191) y = 1565;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(23) x + (-241) y = -2467 і (-3174) x + (33258) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (23) x + (-241) y + (-2467) z = -14802 і
(-67) x + (191) y + (1565) z = 9390 і (71) x + (-181) y + (24) z = -1303;
10) розв'язок методом Гаусса: (23) x + (-241) y + (-2467) z = -27790 і
(-67) x + (191) y + (1565) z = 16562 і (71) x + (-181) y + (24) z = 1063.

39 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
84, -13, 5, 92;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, 84, -13, 5, 92;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
5, -21, 5, -21, 84, -13, 17, 5, 92;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
5, -21, 5, 5, -21, 84, -13, -4, 0, 0, 0, 9, 17, 5, 92, 139;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
21, 5, 21, 69, 29, 61, 13, 61, 39, -38, 7, 5;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(29) x + (239) y = 10096 і (71) x + (-181) y = 14758;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(29) x + (239) y = -1695 і (71) x + (-181) y = 447;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(29) x + (239) y = -1695 і (4031) x + (33221) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (29) x + (239) y + (-1695) z = 18645 і
(71) x + (-181) y + (447) z = -4917 і (-73) x + (179) y + (-27) z = -93;
10) розв'язок методом Гаусса: (29) x + (239) y + (-1695) z = 6519 і
(71) x + (-181) y + (447) z = -2427 і (-73) x + (179) y + (-27) z = -15.

40 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
69, 29, 13, 61;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, 69, 29, 13, 61;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
5, 21, 5, 21, 69, 29, 61, 13, 61;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
5, 21, 5, 7, 21, 69, 29, -6, 0, 0, 0, -2, 61, 13, 61, 140;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
4, -5, 7, -52, 35, -44, 38, -44, 5, 25, 18, -5;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-31) x + (-233) y = 11370 і (-73) x + (179) y = 14404;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-31) x + (-233) y = -171 і (-73) x + (179) y = 325;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-31) x + (-233) y = -171 і (4340) x + (32620) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-31) x + (-233) y + (-171) z = 684 і
(-73) x + (179) y + (325) z = -1300 і (79) x + (173) y + (-6) z = 45;
10) розв'язок методом Гаусса: (-31) x + (-233) y + (-171) z = 1180 і
(-73) x + (179) y + (325) z = -132 і (79) x + (173) y + (-6) z = -1345.

41 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-52, 35, 38, -44;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, -52, 35, 38, -44;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-5, 7, -5, 7, -52, 35, -44, 38, -44;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-5, 7, -5, 8, 7, -52, 35, -7, 0, 0, 0, 3, -44, 38, -44, 141;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
7, 5, 7, -19, 9, -64, 65, -64, -57, 25, -69, 17;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(37) x + (229) y = -4270 і (79) x + (173) y = -15120;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(37) x + (229) y = 1485 і (79) x + (173) y = 1275;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(37) x + (229) y = 1485 і (5217) x + (32289) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (37) x + (229) y + (1485) z = 1485 і
(79) x + (173) y + (1275) z = 1275 і (-83) x + (-167) y + (9) z = -1251;
10) розв'язок методом Гаусса: (37) x + (229) y + (1485) z = 9243 і
(79) x + (173) y + (1275) z = 8361 і (-83) x + (-167) y + (9) z = -693.

42 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-19, 9, 65, -64;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, -19, 9, 65, -64;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
17, 7, 5, 7, -19, 9, -64, 65, -64;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
17, 7, 5, 9, 7, -19, 9, -8, 0, 0, 0, -4, -64, 65, -64, 142;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-7, -12, -7, 48, 5, 24, -35, 24, 84, -13, 17, -12;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(41) x + (-227) y = 14610 і (-83) x + (-167) y = -15166;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(41) x + (-227) y = 63 і (-83) x + (-167) y = 499;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(41) x + (-227) y = 63 і (-5822) x + (32234) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (41) x + (-227) y + (63) z = -378 і
(-83) x + (-167) y + (499) z = -2994 і (89) x + (163) y + (-12) z = -435;
10) розв'язок методом Гаусса: (41) x + (-227) y + (63) z = 1034 і
(-83) x + (-167) y + (499) z = 1666 і (89) x + (163) y + (-12) z = -2197.

43 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
48, 5, -35, 24;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 48, 5, -35, 24;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-12, -7, -12, -7, 48, 5, 24, -35, 24;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-12, -7, -12, 6, -7, 48, 5, -5, 0, 0, 0, 5, 24, -35, 24, 143;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
7, 5, 7, 11, -11, 38, -29, 38, 69, 29, 61, 5;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(43) x + (223) y = 16228 і (89) x + (163) y = 24930;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(43) x + (223) y = 1999 і (89) x + (163) y = 1749;
8) значеня параметра а при якому система має безліч розв’язків:
(43) x + (223) y = 1999 і (6149) x + (31889) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (43) x + (223) y + (1999) z = 5997 і
(89) x + (163) y + (1749) z = 5247 і (-97) x + (157) y + (15) z = 801;
10) розв’язок методом Гаусса: (43) x + (223) y + (1999) z = 17083 і
(89) x + (163) y + (1749) z = 15653 і (-97) x + (157) y + (15) z = -1021.

44 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
101, -11, -29, 38;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, 101, -11, -29, 38;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
5, 7, 5, 7, 101, -11, 38, -29, 38;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
5, 7, 5, 5, 7, 101, -11, -4, 0, 0, 0, -6, 38, -29, 38, 144;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
10, -6, 10, -1, -77, -4, -5, -25, -52, 35, -44, -6;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(47) x + (-211) y = -3940 і (-97) x + (157) y = 16764;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(47) x + (-211) y = 351 і (-97) x + (157) y = 111;
8) значеня параметра а при якому система має безліч розв’язків:
(47) x + (-211) y = 351 і (-6768) x + (30384) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (47) x + (-211) y + (351) z = -2808 і
(-97) x + (157) y + (111) z = -888 і (101) x + (-151) y + (-18) z = 9;
10) розв’язок методом Гаусса: (47) x + (-211) y + (351) z = 0 і
(-97) x + (157) y + (111) z = 0 і (101) x + (-151) y + (-18) z = -405.

45 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-1, -77, -5, -25;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, -1, -77, -5, -25;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-6, 10, -6, 10, -1, -77, -4, -5, -25;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-6, 10, -6, 7, 10, -1, -77, -6, 0, 0, 0, 7, -4, -5, -25, 145;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
19, 21, 10, -51, 9, 2, 75, 1, -19, 9, -64, 21;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-53) x + (199) y = 18546 і (101) x + (-151) y = -26898;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-53) x + (199) y = 1619 і (101) x + (-151) y = -803;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-53) x + (199) y = 1619 і (-7685) x + (28855) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-53) x + (199) y + (1619) z = 8095 і
(101) x + (-151) y + (-803) z = -4015 і (-103) x + (149) y + (21) z = 853;
10) розв'язок методом Гаусса: (-53) x + (199) y + (1619) z = 15873 і
(101) x + (-151) y + (-803) z = -6513 і (-103) x + (149) y + (21) z = -1357.

46 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-51, 9, 75, 1;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, -51, 9, 75, 1;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
21, 10, 21, 10, -51, 9, 2, 75, 1;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
21, 10, 21, 8, 10, -51, 9, -7, 0, 0, 0, -8, 2, 75, 1, 146;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
2, 11, -10, 17, 18, 9, 11, 11, 48, 5, 24, 23;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(59) x + (-197) y = 19818 і (-103) x + (149) y = -26606;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(59) x + (-197) y = 513 і (-103) x + (149) y = 79;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(59) x + (-197) y = 513 і (-8614) x + (28762) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (59) x + (-197) y + (513) z = -5130 і
(-103) x + (149) y + (79) z = -790 і (107) x + (139) y + (-24) z = -1287;
10) розв'язок методом Гаусса: (59) x + (-197) y + (513) z = -1814 і
(-103) x + (149) y + (79) z = 438 і (107) x + (139) y + (-24) z = -3977.

47 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
17, 18, 11, 11;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, 17, 18, 11, 11;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
23, 2, 11, -10, 17, 18, 9, 11, 11;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
23, 2, 11, 9, -10, 17, 18, -8, 0, 0, 0, 9, 9, 11, 11, 147;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
10, 1, 10, 4, -9, 17, -38, 18, 101, -11, 38, 6;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(61) x + (193) y = 20316 і (107) x + (139) y = 27056;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(61) x + (193) y = 2865 і (107) x + (139) y = 2631;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(61) x + (193) y = 2865 і (8967) x + (28371) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (61) x + (193) y + (2865) z = 20055 і
(107) x + (139) y + (2631) z = 18417 і (-109) x + (-137) y + (27) z = -2463;
10) розв'язок методом Гаусса: (61) x + (193) y + (2865) z = 37185 і
(107) x + (139) y + (2631) z = 35295 і (-109) x + (-137) y + (27) z = -3441.

48 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
4, -9, -38, 18;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, 4, -9, -38, 18;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
6, 10, 1, 10, 4, -9, 17, -38, 18;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
6, 10, 1, 6, 10, 4, -9, -5, 0, 0, 0, -2, 17, -38, 18, 148;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
14, -9, 11, -21, 7, -13, 89, 11, -1, -77, -4, -9;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(67) x + (-191) y = -3954 і (-109) x + (-137) y = 27476;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(67) x + (-191) y = -1012 і (-109) x + (-137) y = -1040;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(67) x + (-191) y = -1012 і (-9916) x + (28268) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (67) x + (-191) y + (-1012) z = 1012 і
(-109) x + (-137) y + (-1040) z = 1040 і (113) x + (131) y + (6) z = 1000;
10) розв'язок методом Гаусса: (67) x + (-191) y + (-1012) z = -5288 і
(-109) x + (-137) y + (-1040) z = -6620 і (113) x + (131) y + (6) z = 452.

49 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-21, 7, 89, 11;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, -21, 7, 89, 11;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-9, 11, -9, 11, -21, 7, -13, 89, 11;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-9, 11, -9, 5, 11, -21, 7, -4, 0, 0, 0, 3, -13, 89, 11, 149;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
11, 24, 11, -48, 20, -62, -2, -62, -51, 9, 2, 24;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(71) x + (181) y = -3968 і (113) x + (131) y = -14640;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(71) x + (181) y = -32 і (113) x + (131) y = -208;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(71) x + (181) y = -32 і (10579) x + (26969) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (71) x + (181) y + (-32) z = 192 і
(113) x + (131) y + (-208) z = 1248 і (-2) x + (127) y + (-9) z = 196;
10) розв'язок методом Гаусса: (71) x + (181) y + (-32) z = -1938 і
(113) x + (131) y + (-208) z = -2142 і (-2) x + (127) y + (-9) z = -880.

50 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-48, 20, -2, -62;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, -48, 20, -2, -62;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
24, 11, 24, 11, -48, 20, -62, -2, -62;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
24, 11, 24, 7, 11, -48, 20, -6, 0, 0, 0, -4, -62, -2, -62, 150;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-11, 18, -11, 2, 11, 78, -16, 4, 17, 18, 9, 18;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-73) x + (-179) y = -2652 і (-2) x + (127) y = -7855;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-73) x + (-179) y = -1724 і (-2) x + (127) y = 1008;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-73) x + (-179) y = -1724 і (10950) x + (26850) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-73) x + (-179) y + (-1724) z = -1724 і
(-2) x + (127) y + (1008) z = 1008 і (3) x + (-301) y + (12) z = -2396;
10) розв'язок методом Гаусса: (-73) x + (-179) y + (-1724) z = -14668 і
(-2) x + (127) y + (1008) z = 8040 і (3) x + (-301) y + (12) z = 132.

51 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
2, 11, -16, 4;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, 2, 11, -16, 4;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
18, -11, 18, -11, 2, 11, 78, -16, 4;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
18, -11, 18, 7, -11, 2, 11, -6, 0, 0, 0, 5, 78, -16, 4, 151;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
11, 1, 11, 5, -10, 37, -18, 37, 77, -9, 9, 9;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(79) x + (173) y = 24694 і (3) x + (-301) y = -17824;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(79) x + (173) y = -568 і (3) x + (-301) y = 286;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(79) x + (173) y = -568 і (11929) x + (26123) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (79) x + (173) y + (-568) z = 4544 і
(3) x + (-301) y + (286) z = -2288 і (-5) x + (299) y + (-15) z = -139;
10) розв’язок методом Гаусса: (79) x + (173) y + (-568) z = -2174 і
(3) x + (-301) y + (286) z = 2378 і (-5) x + (299) y + (-15) z = -2601.

52 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
5, -10, -18, 37;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, 5, -10, -18, 37;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 11, 1, 11, 5, -10, 37, -18, 37;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 11, 1, 8, 11, 5, -10, -7, 0, 0, 0, -6, 37, -18, 37, 152;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
14, -12, 14, -46, 11, 9, 52, 9, 14, -10, 26, -12;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(83) x + (-167) y = -3170 і (-5) x + (299) y = -19168;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(83) x + (-167) y = -1172 і (-5) x + (299) y = 2960;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(83) x + (-167) y = -1172 і (-12616) x + (25384) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (83) x + (-167) y + (-1172) z = -3516 і
(-5) x + (299) y + (2960) z = 8880 і (7) x + (281) y + (18) z = 2888;
10) розв’язок методом Гаусса: (83) x + (-167) y + (-1172) z = -10560 і
(-5) x + (299) y + (2960) z = 30108 і (7) x + (281) y + (18) z = 868.

53 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-46, 11, 52, 9;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, -46, 11, 52, 9;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-12, 14, -12, 14, -46, 11, 9, 52, 9;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-12, 14, -12, 9, 14, -46, 11, -8, 0, 0, 0, 7, 9, 52, 9, 153;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
2, 1, 14, -18, -83, -31, -11, -31, -9, 10, 5, 12;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(89) x + (163) y = -3290 і (7) x + (281) y = 18782;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(89) x + (163) y = -1112 і (7) x + (281) y = -892;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(89) x + (163) y = -1112 і (13617) x + (24939) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (89) x + (163) y + (-1112) z = 11120 і
(7) x + (281) y + (-892) z = 8920 і (-11) x + (-277) y + (-21) z = 1139;
10) розв'язок методом Гаусса: (89) x + (163) y + (-1112) z = -326 і
(7) x + (281) y + (-892) z = -562 і (-11) x + (-277) y + (-21) z = 3341.

54 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-18, -83, -121, -331;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, -18, -83, -121, -331;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
12, 2, 1, 14, -18, -83, -331, -121, -331;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
12, 2, 1, 6, 14, -18, -83, -5, 0, 0, 0, -8, -331, -121, -331, 154;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-14, 12, -14, 3, -9, 9, -79, 8, -5, 69, 7, 12;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-97) x + (-157) y = -4350 і (-11) x + (-277) y = 18428;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-97) x + (-157) y = -2660 і (-11) x + (-277) y = -3412;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-97) x + (-157) y = -2660 і (14938) x + (24178) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-97) x + (-157) y + (-2660) z = -13300 і
(-11) x + (-277) y + (-3412) z = -17060 і (13) x + (271) y + (24) z = 3452;
10) розв'язок методом Гаусса: (-97) x + (-157) y + (-2660) z = -34876 і
(-11) x + (-277) y + (-3412) z = -42316 і (13) x + (271) y + (24) z = 1684.

55 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
3, -9, -79, 8;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, 3, -9, -79, 8;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
12, -14, 12, -14, 3, -9, 9, -79, 8;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
12, -14, 12, 5, -14, 3, -9, -4, 0, 0, 0, 9, 9, -79, 8, 155;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
4, 4, 4, 72, 7, 8, 17, 15, 25, -52, 93, 4;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(101) x + (151) y = 27786 і (13) x + (271) y = 23450;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(101) x + (151) y = -1664 і (13) x + (271) y = -1472;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(101) x + (151) y = -1664 і (15655) x + (23405) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (101) x + (151) y + (-1664) z = 19968 і
(13) x + (271) y + (-1472) z = 17664 і (-17) x + (269) y + (-27) z = -841;
10) розв'язок методом Гаусса: (101) x + (151) y + (-1664) z = 3630 і
(13) x + (271) y + (-1472) z = 3486 і (-17) x + (269) y + (-27) z = -2903.

56 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
72, 7, 17, 15;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, 72, 7, 17, 15;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
4, 4, 4, 4, 72, 7, 8, 17, 15;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
4, 4, 4, 7, 4, 72, 7, -6, 0, 0, 0, -2, 8, 17, 15, 156;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
23, -7, 23, 28, 19, 34, 131, 34, 7, -8, 41, -7;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(103) x + (-149) y = -3186 і (-17) x + (269) y = -19760;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(103) x + (-149) y = -504 і (-17) x + (269) y = 572;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(103) x + (-149) y = -504 і (-16068) x + (23244) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (103) x + (-149) y + (-504) z = 2520 і
(-17) x + (269) y + (572) z = -2860 і (19) x + (-263) y + (-6) z = -528;
10) розв'язок методом Гаусса: (103) x + (-149) y + (-504) z = -732 і
(-17) x + (269) y + (572) z = -368 і (19) x + (-263) y + (-6) z = 1452.

57 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
28, 19, 131, 34;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 28, 19, 131, 34;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-7, 23, -7, 23, 28, 19, 34, 131, 34;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-7, 23, -7, 8, 23, 28, 19, -7, 0, 0, 0, 3, 34, 131, 34, 157;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
23, 17, 23, -79, -4, -2, 14, -3, -20, 7, -41, 17;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(107) x + (139) y = -3572 і (19) x + (-263) y = -26238;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(107) x + (139) y = 1294 і (19) x + (-263) y = -1784;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(107) x + (139) y = 1294 і (16799) x + (21823) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (107) x + (139) y + (1294) z = 0 і
(19) x + (-263) y + (-1784) z = 0 і (-23) x + (257) y + (9) z = 1721;
10) розв’язок методом Гаусса: (107) x + (139) y + (1294) z = 9882 і
(19) x + (-263) y + (-1784) z = -12054 і (-23) x + (257) y + (9) z = -401.

58 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-79, -4, 14, -3;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, -79, -4, 14, -3;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
17, 23, 17, 23, -79, -4, -2, 14, -3;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
17, 23, 17, 9, 23, -79, -4, -8, 0, 0, 0, -4, -2, 14, -3, 158;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
4, 7, 5, 7, 7, 11, 15, 3, -38, 7, -18, 1;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(109) x + (-137) y = 28440 і (-23) x + (257) y = -28126;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(109) x + (-137) y = -436 і (-23) x + (257) y = 92;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(109) x + (-137) y = -436 і (-17222) x + (21646) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (109) x + (-137) y + (-436) z = 3052 і
(-23) x + (257) y + (92) z = -644 і (29) x + (251) y + (-12) z = -20;
10) розв’язок методом Гаусса: (109) x + (-137) y + (-436) z = -212 і
(-23) x + (257) y + (92) z = -1780 і (29) x + (251) y + (-12) z = -2356.

59 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
7, 7, 15, 3;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, 7, 7, 15, 3;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
1, 4, 7, 5, 7, 7, 116, 15, 3;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
1, 4, 7, 6, 5, 7, 7, -5, 0, 0, 0, 5, 116, 15, 3, 159;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
11, 1, 23, 8, 19, -9, 71, 7, 25, 18, 16, 2;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-113) x + (131) y = -2250 і (29) x + (251) y = 29324;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-113) x + (131) y = 614 і (29) x + (251) y = 2404;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-113) x + (131) y = 614 і (-17967) x + (20829) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-113) x + (131) y + (614) z = 1228 і
(29) x + (251) y + (2404) z = 4808 і (-31) x + (-241) y + (15) z = -2309;
10) розв'язок методом Гаусса: (-113) x + (131) y + (614) z = 3962 і
(29) x + (251) y + (2404) z = 22322 і (-31) x + (-241) y + (15) z = -571.

60 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
8, 19, 71, 7;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, 8, 19, 71, 7;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
2, 11, 1, 23, 8, 19, -9, 71, 7;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
2, 11, 1, 5, 23, 8, 19, -4, 0, 0, 0, -6, -9, 71, 7, 160;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
9, -7, 9, -32, 15, 18, 69, 18, 25, -69, 4, -7;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(2) x + (-127) y = 12819 і (-31) x + (-241) y = 28884;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(2) x + (-127) y = 242 і (-31) x + (-241) y = 668;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(2) x + (-127) y = 242 і (-320) x + (20320) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (2) x + (-127) y + (242) z = -2178 і
(-31) x + (-241) y + (668) z = -6012 і (37) x + (239) y + (-18) z = -520;
10) розв'язок методом Гаусса: (2) x + (-127) y + (242) z = 750 і
(-31) x + (-241) y + (668) z = 1632 і (37) x + (239) y + (-18) z = -3020.

61 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:

1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-32, 15, 69, 18;

2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, -32, 15, 69, 18;

3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-7, 9, -7, 9, -32, 15, 18, 69, 18;

4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-7, 9, -7, 7, 9, -32, 15, -6, 0, 0, 0, 7, 18, 69, 18, 161;

5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
4, 1, 9, -18, -5, -25, 43, -25, -13, 17, 5, 12;

6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(3) x + (301) y = 31826 і (37) x + (239) y = 20874;

7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(3) x + (301) y = 3332 і (37) x + (239) y = 2888;

8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(3) x + (301) y = 3332 і (483) x + (48461) y = a;

9) розв'язок методом Крамера: (3) x + (301) y + (3332) z = 13328 і
(37) x + (239) y + (2888) z = 11552 і (-41) x + (233) y + (21) z = 2339;

10) розв'язок методом Гаусса: (3) x + (301) y + (3332) z = 37618 і
(37) x + (239) y + (2888) z = 33262 і (-41) x + (233) y + (21) z = 69.

62 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:

1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-18, -5, 43, -25;

2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, -18, -5, 43, -25;

3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
12, 4, 1, 9, -18, -5, -25, 43, -25;

4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
12, 4, 1, 8, 9, -18, -5, -7, 0, 0, 0, -8, -25, 43, -25, 162;

5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-1, 2, -9, -15, 3, 16, 10, 18, 29, 61, 13, 1;

6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(5) x + (-299) y = 34096 і (-41) x + (233) y = -37738;

7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(5) x + (-299) y = 1156 і (-41) x + (233) y = -604;

8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(5) x + (-299) y = 1156 і (-810) x + (48438) y = a;

9) розв'язок методом Крамера: (5) x + (-299) y + (1156) z = -12716 і
(-41) x + (233) y + (-604) z = 6644 і (43) x + (-229) y + (-24) z = 860;

10) розв'язок методом Гаусса: (5) x + (-299) y + (1156) z = -1156 і
(-41) x + (233) y + (-604) z = 604 і (43) x + (-229) y + (-24) z = 1812.

63 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-15, 3, 100, 168;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, -15, 3, 100, 168;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
1, -1, 2, -9, -15, 3, 168, 100, 168;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
1, -1, 2, 9, -9, -15, 3, -8, 0, 0, 0, 9, 168, 100, 168, 163;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
9, 7, 9, 8, -39, 3, -10, 5, 35, -44, 38, 7;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(7) x + (281) y = 33846 і (43) x + (-229) y = -13020;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(7) x + (281) y = 3716 і (43) x + (-229) y = -2590;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(7) x + (281) y = 3716 і (1141) x + (45803) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (7) x + (281) y + (3716) z = 22296 і
(43) x + (-229) y + (-2590) z = -15540 і (-47) x + (227) y + (27) z = 2663;
10) розв'язок методом Гаусса: (7) x + (281) y + (3716) z = 49902 і
(43) x + (-229) y + (-2590) z = -33654 і (-47) x + (227) y + (27) z = 217.

64 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
8, -39, -10, 5;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 8, -39, -10, 5;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
7, 9, 7, 9, 8, -39, 3, -10, 5;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
7, 9, 7, 6, 9, 8, -39, -5, 0, 0, 0, -2, 3, -10, 5, 164;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
12, -8, 12, -80, 10, -69, 11, -69, 9, -64, 65, -8;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-11) x + (-277) y = 3645 і (-47) x + (227) y = 12753;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-11) x + (-277) y = -1961 і (-47) x + (227) y = 1495;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-11) x + (-277) y = -1961 і (1804) x + (45428) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-11) x + (-277) y + (-1961) z = 3922 і
(-47) x + (227) y + (1495) z = -2990 і (53) x + (223) y + (6) z = 1649;
10) розв'язок методом Гаусса: (-11) x + (-277) y + (-1961) z = -12962 і
(-47) x + (227) y + (1495) z = 9502 і (53) x + (223) y + (6) z = -309.

65 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-80, 105, 114, -69;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, -80, 105, 114, -69;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-8, 12, -8, 12, -80, 105, -69, 114, -69;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-8, 12, -8, 5, 12, -80, 105, -4, 0, 0, 0, 3, -69, 114, -69, 165;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-12, -7, -12, -83, -2, -71, 6, -71, 5, 24, -35, -7;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(13) x + (271) y = -2788 і (53) x + (223) y = -14012;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(13) x + (271) y = 503 і (53) x + (223) y = 287;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(13) x + (271) y = 503 і (2145) x + (44715) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (13) x + (271) y + (503) z = -3521 і
(53) x + (223) y + (287) z = -2009 і (-59) x + (-211) y + (-9) z = -173;
10) розв'язок методом Гаусса: (13) x + (271) y + (503) z = -1279 і
(53) x + (223) y + (287) z = -1687 і (-59) x + (-211) y + (-9) z = 2201.

66 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-83, -2, 6, -71;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, -83, -2, 6, -71;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-7, -12, -7, -12, -83, -2, -71, 6, -71;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-7, -12, -7, 7, -12, -83, -2, -6, 0, 0, 0, -4, -71, 6, -71, 166;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
2, 1, -12, 10, -15, 9, -76, -1, -11, 18, -11, 3;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(17) x + (-269) y = 5952 і (-59) x + (-211) y = -14934;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(17) x + (-269) y = -2353 і (-59) x + (-211) y = -2135;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(17) x + (-269) y = -2353 і (-2822) x + (44654) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (17) x + (-269) y + (-2353) z = 0 і
(-59) x + (-211) y + (-2135) z = 0 і (61) x + (199) y + (12) z = 2023;
10) розв'язок методом Гаусса: (17) x + (-269) y + (-2353) z = -20704 і
(-59) x + (-211) y + (-2135) z = -19712 і (61) x + (199) y + (12) z = 641.

67 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
10, -15, -76, -1;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, 10, -15, -76, -1;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
3, 2, 1, -12, 10, -15, 9, -76, -1;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
3, 2, 1, 8, -12, 10, -15, -7, 0, 0, 0, 5, 9, -76, -1, 167;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
12, 8, 12, 17, 22, 8, -18, 3, 11, 1, 11, 8;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(19) x + (263) y = 6952 і (61) x + (199) y = 17802;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(19) x + (263) y = -95 і (61) x + (199) y = -305;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(19) x + (263) y = -95 і (3173) x + (43921) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (19) x + (263) y + (-95) z = 855 і
(61) x + (199) y + (-305) z = 2745 і (-67) x + (197) y + (-15) z = 485;
10) розв'язок методом Гаусса: (19) x + (263) y + (-95) z = -2915 і
(61) x + (199) y + (-305) z = -2905 і (-67) x + (197) y + (-15) z = -965.

68 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
17, 22, -18, 3;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, 17, 22, -18, 3;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
8, 12, 8, 12, 17, 22, 8, -18, 3;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
8, 12, 8, 9, 12, 17, 22, -8, 0, 0, 0, -6, 8, -18, 3, 168;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
13, -11, 13, -63, 17, -13, 74, -13, 14, -12, 14, -11;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(23) x + (-257) y = -3222 і (-67) x + (197) y = 15454;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(23) x + (-257) y = -2689 і (-67) x + (197) y = 1765;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(23) x + (-257) y = -2689 і (-3864) x + (43176) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (23) x + (-257) y + (-2689) z = -5378 і
(-67) x + (197) y + (1765) z = 3530 і (71) x + (-193) y + (18) z = -1679;
10) розв'язок методом Гаусса: (23) x + (-257) y + (-2689) z = -29422 і
(-67) x + (197) y + (1765) z = 18406 і (71) x + (-193) y + (18) z = 1283.

69 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-63, 17, 74, -13;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, -63, 17, 74, -13;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-11, 13, -11, 13, -63, 17, -13, 74, -13;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-11, 13, -11, 6, 13, -63, 17, -5, 0, 0, 0, 7, -13, 74, -13, 169;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
13, 16, 13, 17, -21, -5, -13, -17, 2, 1, 14, 16;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-29) x + (251) y = 10716 і (71) x + (-193) y = -20756;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-29) x + (251) y = -299 і (71) x + (-193) y = -111;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-29) x + (251) y = -299 і (-4901) x + (42419) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-29) x + (251) y + (-299) z = 3289 і
(71) x + (-193) y + (-111) z = 1221 і (-2) x + (281) y + (-21) z = -296;
10) розв'язок методом Гаусса: (-29) x + (251) y + (-299) z = -1805 і
(71) x + (-193) y + (-111) z = 1047 і (-2) x + (281) y + (-21) z = -3288.

70 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
17, -21, -13, -17;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, 17, -21, -13, -17;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
16, 13, 16, 13, 17, -21, -5, -13, -17;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
16, 13, 16, 5, 13, 17, -21, -4, 0, 0, 0, -8, -5, -13, -17, 170;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
5, 1, -13, 1, 21, 18, -42, 18, -14, 12, -14, -9;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(31) x + (-241) y = 11878 і (-2) x + (281) y = -5279;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(31) x + (-241) y = -2885 і (-2) x + (281) y = 3637;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(31) x + (-241) y = -2885 і (-5270) x + (40970) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (31) x + (-241) y + (-2885) z = -11540 і
(-2) x + (281) y + (3637) z = 14548 і (3) x + (277) y + (24) z = 3697;
10) розв'язок методом Гаусса: (31) x + (-241) y + (-2885) z = -37484 і
(-2) x + (281) y + (3637) z = 48076 і (3) x + (277) y + (24) z = 1215.

71 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
1, 21, -42, 18;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 1, 21, -42, 18;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-9, 5, 1, -13, 1, 21, 18, -42, 18;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-9, 5, 1, 7, -13, 1, 21, -6, 0, 0, 0, 9, 18, -42, 18, 171;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
13, 1, 13, 22, 12, 13, 14, 123, 4, 4, 4, 11;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(37) x + (239) y = 13458 і (3) x + (277) y = 5986;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(37) x + (239) y = -1289 і (3) x + (277) y = -1135;
8) значеня параметра а при якому система має безліч розв'язків:
(37) x + (239) y = -1289 і (6327) x + (40869) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (37) x + (239) y + (-1289) z = 16757 і
(3) x + (277) y + (-1135) z = 14755 і (-5) x + (-271) y + (-27) z = 1507;
10) розв'язок методом Гаусса: (37) x + (239) y + (-1289) z = 811 і
(3) x + (277) y + (-1135) z = 581 і (-5) x + (-271) y + (-27) z = 4037.

72 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
22, 12, 104, 123;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, 22, 12, 104, 123;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
11, 13, 1, 13, 22, 12, 13, 104, 123;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
11, 13, 1, 8, 13, 22, 12, -7, 0, 0, 0, -2, 13, 104, 123, 172;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
16, -14, 16, -59, 3, -52, 5, -52, 23, -7, 23, -14;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(41) x + (-233) y = -4440 і (-5) x + (-271) y = 7428;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(41) x + (-233) y = -781 і (-5) x + (-271) y = -803;
8) значеня параметра а при якому система має безліч розв'язків:
(41) x + (-233) y = -781 і (-7052) x + (40076) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (41) x + (-233) y + (-781) z = 4686 і
(-5) x + (-271) y + (-803) z = 4818 і (7) x + (269) y + (-6) z = 835;
10) розв'язок методом Гаусса: (41) x + (-233) y + (-781) z = -958 і
(-5) x + (-271) y + (-803) z = -482 і (7) x + (269) y + (-6) z = -1943.

73 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-59, 3, 5, -52;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, -59, 3, 5, -52;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-14, 16, -14, 16, -59, 3, -52, 5, -52;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-14, 16, -14, 9, 16, -59, 3, -8, 0, 0, 0, 3, -52, 5, -52, 173;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
19, 16, 16, -61, 20, -51, 28, -51, 23, 17, 23, 16;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(43) x + (229) y = -3378 і (7) x + (269) y = 6170;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(43) x + (229) y = 1961 і (7) x + (269) y = 2173;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(43) x + (229) y = 1961 і (7439) x + (39617) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (43) x + (229) y + (1961) z = -1961 і
(7) x + (269) y + (2173) z = -2173 і (-11) x + (263) y + (9) z = 2053;
10) розв'язок методом Гаусса: (43) x + (229) y + (1961) z = 15617 і
(7) x + (269) y + (2173) z = 16909 і (-11) x + (263) y + (9) z = -553.

74 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-61, 20, 28, -51;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, -61, 20, 28, -51;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
16, 16, 16, 16, -61, 20, -51, 28, -51;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
16, 16, 16, 6, 16, -61, 20, -5, 0, 0, 0, -4, -51, 28, -51, 174;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-16, 2, -16, -7, 70, -45, 67, -45, 4, 7, 5, 14;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-47) x + (-227) y = -3726 і (-11) x + (263) y = -10672;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-47) x + (-227) y = -39 і (-11) x + (263) y = 307;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-47) x + (-227) y = -39 і (8178) x + (39498) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-47) x + (-227) y + (-39) z = 312 і
(-11) x + (263) y + (307) z = -2456 і (13) x + (-257) y + (-12) z = -201;
10) розв'язок методом Гаусса: (-47) x + (-227) y + (-39) z = 2568 і
(-11) x + (263) y + (307) z = -1928 і (13) x + (-257) y + (-12) z = 2145.

75 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-7, 70, 67, -45;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, -7, 70, 67, -45;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
14, -16, 2, -16, -7, 70, -45, 67, -45;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
14, -16, 2, 5, -16, -7, 70, -4, 0, 0, 0, 5, -45, 67, -45, 175;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
16, 1, 16, 12, 19, 12, 14, 11, 11, 1, 23, 14;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(53) x + (223) y = 20282 і (13) x + (-257) y = -6558;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(53) x + (223) y = 2495 і (13) x + (-257) y = -2505;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(53) x + (223) y = 2495 і (9275) x + (39025) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (53) x + (223) y + (2495) z = 2495 і
(13) x + (-257) y + (-2505) z = -2505 і (-17) x + (251) y + (15) z = 2425;
10) розв'язок методом Гаусса: (53) x + (223) y + (2495) z = 25745 і
(13) x + (-257) y + (-2505) z = -24855 і (-17) x + (251) y + (15) z = -105.

76 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
122, 19, 124, 11;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, 122, 19, 124, 11;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
14, 16, 1, 16, 122, 19, 120, 124, 11;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
14, 16, 1, 7, 16, 122, 19, -6, 0, 0, 0, -6, 120, 124, 11, 176;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
25, -9, 25, -3, 7, 10, 5, 10, 9, -7, 9, -9;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(59) x + (-211) y = -4506 і (-17) x + (251) y = -6500;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(59) x + (-211) y = -143 і (-17) x + (251) y = -149;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(59) x + (-211) y = -143 і (-10384) x + (37136) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (59) x + (-211) y + (-143) z = 1430 і
(-17) x + (251) y + (-149) z = 1490 і (19) x + (241) y + (-18) z = -157;
10) розв'язок методом Гаусса: (59) x + (-211) y + (-143) z = 1402 і
(-17) x + (251) y + (-149) z = -2306 і (19) x + (241) y + (-18) z = -2975.

77 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-3, 7, 5, 10;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, -3, 7, 5, 10;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-9, 25, -9, 25, -3, 7, 10, 5, 10;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-9, 25, -9, 8, 25, -3, 7, -7, 0, 0, 0, 7, 10, 5, 10, 177;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
5, 1, 7, -1, -11, -61, 24, -61, 4, 1, 9, 3;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(61) x + (199) y = -4314 і (19) x + (241) y = 6354;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(61) x + (199) y = 2815 і (19) x + (241) y = 3025;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(61) x + (199) y = 2815 і (10797) x + (35223) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (61) x + (199) y + (2815) z = 8445 і
(19) x + (241) y + (3025) z = 9075 і (-23) x + (-239) y + (21) z = -2987;
10) розв’язок методом Гаусса: (61) x + (199) y + (2815) z = 35459 і
(19) x + (241) y + (3025) z = 37181 і (-23) x + (-239) y + (21) z = -709.

78 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-1, -11, 24, -61;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, -1, -11, 24, -61;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
3, 5, 1, 7, -1, -11, -61, 24, -61;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
3, 5, 1, 9, 7, -1, -11, -8, 0, 0, 0, -8, -61, 24, -61, 178;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-3, 5, -25, 11, 14, 64, -23, -55, -1, 2, -9, 7;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(67) x + (-197) y = 22592 і (-23) x + (-239) y = 6656;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(67) x + (-197) y = 55 і (-23) x + (-239) y = 901;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(67) x + (-197) y = 55 і (-11926) x + (35066) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (67) x + (-197) y + (55) z = -660 і
(-23) x + (-239) y + (901) z = -10812 і (29) x + (233) y + (-24) z = -619;
10) розв’язок методом Гаусса: (67) x + (-197) y + (55) z = 788 і
(-23) x + (-239) y + (901) z = 956 і (29) x + (233) y + (-24) z = -3653.

79 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
11, 14, -23, -55;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, 11, 14, -23, -55;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
9, -3, 5, -25, 11, 14, 64, -23, -55;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
9, -3, 5, 6, -25, 11, 14, -5, 0, 0, 0, 9, 64, -23, -55, 179;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
5, 9, 5, 12, 16, 12, 70, 12, 9, 7, 9, 9;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-71) x + (193) y = -3758 і (29) x + (233) y = 18062;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-71) x + (193) y = 2063 і (29) x + (233) y = 3523;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(-71) x + (193) y = 2063 і (-12709) x + (34547) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (-71) x + (193) y + (2063) z = 10315 і
(29) x + (233) y + (3523) z = 17615 і (37) x + (227) y + (27) z = 3619;
10) розв’язок методом Гаусса: (-71) x + (193) y + (2063) z = 27737 і
(29) x + (233) y + (3523) z = 51037 і (37) x + (227) y + (27) z = 2285.

80 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
182, 146, 70, 122;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, 182, 146, 70, 122;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 5, 9, 5, 182, 146, 122, 70, 122;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 5, 9, 5, 5, 182, 146, -4, 0, 0, 0, -2, 122, 70, 122, 180;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
16 29, 61, 13 10, -15, 9, -76, 12, -8, 12, 15;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(3) x + (277) y = 16054 і (37) x + (227) y = 3450;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(3) x + (277) y = 2222 і (37) x + (227) y = 1890;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(3) x + (277) y = 2222 і (-540) x + (-49860) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (3) x + (277) y + (2222) z = -6666 і
(37) x + (227) y + (1890) z = -5670 і (-41) x + (223) y + (6) z = 1678;
10) розв’язок методом Гаусса: (3) x + (277) y + (2222) z = 16686 і
(37) x + (227) y + (1890) z = 14434 і (-41) x + (223) y + (6) z = -1090.

81 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
2, 10, 64, -18;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, 2, 10, 64, -18;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-20, 4, -20, 4, 2, 10, -18, 64, -18;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-20, 4, -20, 7, 4, 2, 10, -6, 0, 0, 0, 3, -18, 64, -18, 181;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
4, -20, 4, 2, 10, -18, 64, -18, 23, -4, 69, -20;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(5) x + (-271) y = 19542 і (-41) x + (223) y = -26298;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(5) x + (-271) y = -828 і (-41) x + (223) y = 792;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(5) x + (-271) y = -828 і (905) x + (-49051) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (5) x + (-271) y + (-828) z = 6624 і
(-41) x + (223) y + (792) z = -6336 і (43) x + (-211) y + (-9) z = -681;
10) розв'язок методом Гаусса: (5) x + (-271) y + (-828) z = -90 і
(-41) x + (223) y + (792) z = 738 і (43) x + (-211) y + (-9) z = 1485.

82 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-5, 11, 28, -47;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, -5, 11, 28, -47;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
25, 4, 25, 4, -5, 11, -47, 28, -47;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
25, 4, 25, 8, 4, -5, 11, -7, 0, 0, 0, -4, -47, 28, -47, 182;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
5, 25, 3, -5, 11, -47, 28, -47, 14, 4, 69, 25;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(7) x + (269) y = 20996 і (43) x + (-211) y = -3328;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(7) x + (269) y = 2718 і (43) x + (-211) y = -1938;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(7) x + (269) y = 2718 і (-1274) x + (-48958) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (7) x + (269) y + (2718) z = -2718 і
(43) x + (-211) y + (-1938) z = 1938 і (-47) x + (199) y + (12) z = 1778;
10) розв'язок методом Гаусса: (7) x + (269) y + (2718) z = 26726 і
(43) x + (-211) y + (-1938) z = -18442 і (-47) x + (199) y + (12) z = -842.

83 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
49, -36, -18, 79;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, 49, -36, -18, 79;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
23, -4, 23, -4, 49, -36, 79, -18, 79;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
23, -4, 23, 9, -4, 49, -36, -8, 0, 0, 0, 5, 79, -18, 79, 183;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-4, 23, -4, 49, -36, 79, -18, 79, -14, 7, -75, 23;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(11) x + (-263) y = -2433 і (-47) x + (199) y = 12245;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(11) x + (-263) y = -318 і (-47) x + (199) y = 434;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(11) x + (-263) y = -318 і (2013) x + (-48129) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (11) x + (-263) y + (-318) z = 3180 і
(-47) x + (199) y + (434) z = -4340 і (53) x + (197) y + (-15) z = 97;
10) розв’язок методом Гаусса: (11) x + (-263) y + (-318) z = 2410 і
(-47) x + (199) y + (434) z = -1050 і (53) x + (197) y + (-15) z = -2977.

84 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
39, 11, -20, 74;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, 39, 11, -20, 74;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
14, 4, 14, 4, 39, 11, 74, -20, 74;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
14, 4, 14, 6, 4, 39, 11, -5, 0, 0, 0, -6, 74, -20, 74, 184;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
4, 14, 4, 39, 11, 74, -20, 74, 20, 7, -57, 14;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-13) x + (257) y = 4190 і (53) x + (197) y = -13348;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-13) x + (257) y = 3006 і (53) x + (197) y = 2682;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(-13) x + (257) y = 3006 і (2392) x + (-47288) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (-13) x + (257) y + (3006) z = 3006 і
(53) x + (197) y + (2682) z = 2682 і (-59) x + (-193) y + (18) z = -2670;
10) розв’язок методом Гаусса: (-13) x + (257) y + (3006) z = 35838 і
(53) x + (197) y + (2682) z = 33138 і (-59) x + (-193) y + (18) z = -846.

85 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
2, 11, 77, -34;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 2, 11, 77, -34;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-14, 7, -14, 7, 2, 11, -34, 77, -34;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-14, 7, -14, 5, 7, 2, 11, -4, 0, 0, 0, 7, -34, 77, -34, 185;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
7, -14, 7, 2, 11, -34, 77, -34, 21, -7, 77, -14;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(17) x + (-251) y = 5624 і (-59) x + (-193) y = -14198;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(17) x + (-251) y = 132 і (-59) x + (-193) y = 606;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(17) x + (-251) y = 132 і (3145) x + (-46435) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (17) x + (-251) y + (132) z = -1584 і
(-59) x + (-193) y + (606) z = -7272 і (61) x + (191) y + (-21) z = -345;
10) розв'язок методом Гаусса: (17) x + (-251) y + (132) z = 2774 і
(-59) x + (-193) y + (606) z = 3142 і (61) x + (191) y + (-21) z = -3743.

86 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-10, 11, 27, -40;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, -10, 11, 27, -40;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
20, 7, 20, 7, -10, 11, -40, 27, -40;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
20, 7, 20, 7, 7, -10, 11, -6, 0, 0, 0, -8, -40, 27, -40, 186;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
9, 20, 7, -10, 11, -40, 27, -40, 17, 7, 57, 20;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(19) x + (241) y = 6456 і (61) x + (191) y = 16648;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(19) x + (241) y = 3526 і (61) x + (191) y = 3162;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(19) x + (241) y = 3526 і (-3534) x + (-44826) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (19) x + (241) y + (3526) z = 10578 і
(61) x + (191) y + (3162) z = 9486 і (-67) x + (181) y + (24) z = 2046;
10) розв'язок методом Гаусса: (19) x + (241) y + (3526) z = 50302 і
(61) x + (191) y + (3162) z = 46114 і (-67) x + (181) y + (24) z = -910.

87 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
47, -35, -25, 69;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, 47, -35, -25, 69;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
21, -7, 21, -7, 47, -35, 69, -25, 69;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
21, -7, 21, 8, -7, 47, -35, -7, 0, 0, 0, 9, 69, -25, 69, 187;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-7, 21, -7, 47, -35, 69, -25, 69, -19, 8, -20, 21;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(23) x + (-239) y = -2914 і (-67) x + (181) y = 14156;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(23) x + (-239) y = 510 і (-67) x + (181) y = 60;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(23) x + (-239) y = 510 і (4301) x + (-44693) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (23) x + (-239) y + (510) z = -7140 і
(-67) x + (181) y + (60) z = -840 і (71) x + (-179) y + (-27) z = 303;
10) розв'язок методом Гаусса: (23) x + (-239) y + (510) z = 1434 і
(-67) x + (181) y + (60) z = -1086 і (71) x + (-179) y + (-27) z = 849.

88 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
48, 11, -25, 69;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, 48, 11, -25, 69;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
17, 7, 17, 7, 48, 11, 69, -25, 69;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
17, 7, 17, 9, 7, 48, 11, -8, 0, 0, 0, -2, 69, -25, 69, 188;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
7, 17, 7, 48, 11, 69, -25, 69, 6, 8, 74, 17;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(29) x + (233) y = -3902 і (71) x + (-179) y = -19296;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(29) x + (233) y = 874 і (71) x + (-179) y = -858;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(29) x + (233) y = 874 і (-5452) x + (-43804) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (29) x + (233) y + (874) z = -6118 і
(71) x + (-179) y + (-858) z = 6006 і (-73) x + (173) y + (-6) z = 886;
10) розв'язок методом Гаусса: (29) x + (233) y + (874) z = 1458 і
(71) x + (-179) y + (-858) z = -2426 і (-73) x + (173) y + (-6) z = -970.

89 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-116, 11, 85, -75;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, -116, 11, 85, -75;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-19, 8, -19, 8, -116, 11, -75, 85, -75;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-19, 8, -19, 6, 8, -116, 11, -5, 0, 0, 0, 3, -75, 85, -75, 189;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
8, -19, 8, -16, 11, -75, 85, -75, 18, -8, 40, -19;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-31) x + (-229) y = -3330 і (-73) x + (173) y = -19950;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-31) x + (-229) y = -2154 і (-73) x + (173) y = 1338;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-31) x + (-229) y = -2154 і (-5859) x + (-43281) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-31) x + (-229) y + (-2154) z = 4308 і
(-73) x + (173) y + (1338) z = -2676 і (79) x + (167) y + (9) z = 1713;
10) розв'язок методом Гаусса: (-31) x + (-229) y + (-2154) z = -18978 і
(-73) x + (173) y + (1338) z = 10866 і (79) x + (167) y + (9) z = 291.

90 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-39, 11, 77, -57;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, -39, 11, 77, -57;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
6, 8, 6, 8, -39, 11, -57, 77, -57;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
6, 8, 6, 5, 8, -39, 11, -4, 0, 0, 0, -4, -57, 77, -57, 190;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
11, 6, 8, -39, 11, -57, 77, -57, 6, 8, -65, 6;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(37) x + (227) y = 12786 і (79) x + (167) y = 21264;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(37) x + (227) y = 306 і (79) x + (167) y = 18;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(37) x + (227) y = 306 і (-7030) x + (-43130) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (37) x + (227) y + (306) z = -2754 і
(79) x + (167) y + (18) z = -162 і (-83) x + (-163) y + (-12) z = 126;
10) розв'язок методом Гаусса: (37) x + (227) y + (306) z = -2102 і
(79) x + (167) y + (18) z = -2582 і (-83) x + (-163) y + (-12) z = 2602.

91 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
52, -42, -27, 77;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, 52, -42, -27, 77;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
18, -8, 18, -8, 52, -42, 77, -27, 77;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
18, -8, 18, 7, -8, 52, -42, -6, 0, 0, 0, 5, 77, -27, 77, 191;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-8, 18, -8, 52, -42, 77, -27, 77, -9, 11, -9, 18;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(41) x + (-223) y = -4178 і (-83) x + (-163) y = 22590;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(41) x + (-223) y = -2248 і (-83) x + (-163) y = -2208;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(41) x + (-223) y = -2248 і (7831) x + (-42593) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (41) x + (-223) y + (-2248) z = 0 і
(-83) x + (-163) y + (-2208) z = 0 і (89) x + (157) y + (15) z = 2157;
10) розв’язок методом Гаусса: (41) x + (-223) y + (-2248) z = -23890 і
(-83) x + (-163) y + (-2208) z = -25370 і (89) x + (157) y + (15) z = 1343.

92 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
37, 11, -9, 57;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 37, 11, -9, 57;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
6, 8, 6, 8, 37, 11, 57, -9, 57;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
6, 8, 6, 8, 8, 37, 11, -7, 0, 0, 0, -6, 57, -9, 57, 192;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
8, 6, 8, 37, 11, 57, -9, 57, 11, -11, -35, 6;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(43) x + (211) y = -3470 і (89) x + (157) y = -15294;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(43) x + (211) y = -258 і (89) x + (157) y = -534;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(43) x + (211) y = -258 і (-8256) x + (-40512) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (43) x + (211) y + (-258) z = 2838 і
(89) x + (157) y + (-534) z = 5874 і (-97) x + (151) y + (-18) z = 798;
10) розв’язок методом Гаусса: (43) x + (211) y + (-258) z = -3306 і
(89) x + (157) y + (-534) z = -3486 і (-97) x + (151) y + (-18) z = -66.

93 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
1, 3, 73, -20;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, 1, 3, 73, -20;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-9, 11, -9, 11, 1, 3, -20, 73, -20;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-9, 11, -9, 9, 11, 1, 3, -8, 0, 0, 0, 7, -20, 73, -20, 193;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
11, -9, 11, 1, 3, -20, 73, -20, 9, 11, 14, -9;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(47) x + (-199) y = 16086 і (-97) x + (151) y = -25148;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(47) x + (-199) y = -2258 і (-97) x + (151) y = 1284;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(47) x + (-199) y = -2258 і (9071) x + (-38407) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (47) x + (-199) y + (-2258) z = -4516 і
(-97) x + (151) y + (1284) z = 2568 і (101) x + (-149) y + (21) z = -1209;
10) розв'язок методом Гаусса: (47) x + (-199) y + (-2258) z = -28566 і
(-97) x + (151) y + (1284) z = 14806 і (101) x + (-149) y + (21) z = 2245.

94 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
40, 17, -100, 74;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-6, 40, 17, -100, 74;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
11, -11, 11, -11, 40, 17, 74, -100, 74;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
11, -11, 11, 6, -11, 40, 17, -5, 0, 0, 0, -8, 74, -100, 74, 194;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-11, 11, -11, 40, 17, 74, -10, 74, 9, 12, 64, 11;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-53) x + (197) y = -3258 і (101) x + (-149) y = 14586;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-53) x + (197) y = 30 і (101) x + (-149) y = -510;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-53) x + (197) y = 30 і (10282) x + (-38218) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-53) x + (197) y + (30) z = -390 і
(101) x + (-149) y + (-510) z = 6630 і (-103) x + (139) y + (-24) z = 882;
10) розв'язок методом Гаусса: (-53) x + (197) y + (30) z = -1546 і
(101) x + (-149) y + (-510) z = 682 і (-103) x + (139) y + (-24) z = 574.

95 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
31, 16, -22, 40;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
7, 31, 16, -22, 40;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 11, 9, 11, 31, 16, 40, -22, 40;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 11, 9, 5, 11, 31, 16, -4, 0, 0, 0, 9, 40, -22, 40, 195;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
11, 9, 11, 31, 16, 40, -22, 40, -4, 20, -13, 9;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(59) x + (-193) y = -3710 і (-103) x + (139) y = 14592;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(59) x + (-193) y = -2364 і (-103) x + (139) y = 1158;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(59) x + (-193) y = -2364 і (11505) x + (-37635) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (59) x + (-193) y + (-2364) z = -9456 і
(-103) x + (139) y + (1158) z = 4632 і (107) x + (137) y + (27) z = 3099;
10) розв'язок методом Гаусса: (59) x + (-193) y + (-2364) z = -34446 і
(-103) x + (139) y + (1158) z = 15006 і (107) x + (137) y + (27) z = 3705.

96 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-10, 18, 52, -65;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-8, -10, 18, 52, -65;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 12, 9, 12, -10, 18, -65, 52, -65;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
9, 12, 9, 7, 12, -10, 18, -6, 0, 0, 0, -2, -65, 52, -65, 196;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
12, 9, 12, -10, 18, -65, 52, -65, 15, 20, -4, 9;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(61) x + (191) y = -3560 і (107) x + (137) y = -14760;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(61) x + (191) y = 1841 і (107) x + (137) y = 1447;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(61) x + (191) y = 1841 і (-11956) x + (-37436) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (61) x + (191) y + (1841) z = -7364 і
(107) x + (137) y + (1447) z = -5788 і (-109) x + (-131) y + (6) z = -1427;
10) розв'язок методом Гаусса: (61) x + (191) y + (1841) z = 15980 і
(107) x + (137) y + (1447) z = 12980 і (-109) x + (-131) y + (6) z = 55.

97 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
-26, 66, 60, -9;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
9, -26, 66, 60, -9;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
-4, 20, -4, 20, -26, 66, -9, 60, -9;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
-4, 20, -4, 8, 20, -26, 66, -7, 0, 0, 0, 3, -9, 60, -9, 197;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
20, -4, 20, -26, 66, -9, 60, -9, 4, -20, 80, -4;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(67) x + (-181) y = 21304 і (-109) x + (-131) y = -14662;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(67) x + (-181) y = -925 і (-109) x + (-131) y = -197;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(67) x + (-181) y = -925 і (13199) x + (-35657) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (67) x + (-181) y + (-925) z = 8325 і
(-109) x + (-131) y + (-197) z = 1773 і (113) x + (127) y + (-9) z = 259;
10) розв’язок методом Гаусса: (67) x + (-181) y + (-925) z = -2493 і
(-109) x + (-131) y + (-197) z = 1503 і (113) x + (127) y + (-9) z = -2323.

98 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
1, 15, 11, -15;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
3, 1, 15, 11, -15;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
14, 20, 15, 20, 1, 15, -35, 11, -15;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
14, 20, 15, 9, 20, 1, 15, -8, 0, 0, 0, -4, -35, 11, -15, 198;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
20, 15, 20, 1, 15, -35, 11, -15, 4, 20, 70, 14;
6) розв’язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(71) x + (179) y = 22338 і (113) x + (127) y = 27184;
7) розв’язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(71) x + (179) y = 2253 і (113) x + (127) y = 1849;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв’язків:
(71) x + (179) y = 2253 і (-14058) x + (-35442) y = a;
9) розв’язок методом Крамера: (71) x + (179) y + (2253) z = -4506 і
(113) x + (127) y + (1849) z = -3698 і (-2) x + (299) y + (12) z = 3245;
10) розв’язок методом Гаусса: (71) x + (179) y + (2253) z = 25098 і
(113) x + (127) y + (1849) z = 21314 і (-2) x + (299) y + (12) z = -789.

99 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
82, -74, -44, 12;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
-4, 82, -74, -44, 12;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
4, -20, 4, -20, 82, -74, 14, -44, 12;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
4, -20, 4, 6, -20, 82, -74, -5, 0, 0, 0, 5, 14, -44, 12, 199;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
-20, 4, -20, 82, -74, 14, -44, 12, -12, 5, 3, 4;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(-73) x + (-173) y = 23274 і (-2) x + (299) y = -17283;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(-73) x + (-173) y = 19 і (-2) x + (299) y = 608;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(-73) x + (-173) y = 19 і (-14527) x + (-34427) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (-73) x + (-173) y + (19) z = -209 і
(-2) x + (299) y + (608) z = -6688 і (3) x + (-281) y + (-15) z = -397;
10) розв'язок методом Гаусса: (-73) x + (-173) y + (19) z = 3209 і
(-2) x + (299) y + (608) z = -2342 і (3) x + (-281) y + (-15) z = 3297.

100 варіант. Д.к.р. № 3 (елементи лінійної алгебри). Знайти:
1) визначник другого порядку елементи a11, a12, a21, a22 якого відповідно рівні:
61, 14, 20, 64;
2) визначник матриці kA якщо елементи k, a11, a12, a21, a22 якої відповідно рівні:
5, 61, 14, 20, 64;
3) визначник третього порядку елементи a11, a12, a13, a21, ... якого відповідно рівні:
4, 20, 4, 20, 61, 14, 64, 20, 64;
4) визначник 4-ого порядку елементи a11, a12, a13, a14, a21, ... якого відповідно рівні:
4, 20, 4, 5, 20, 61, 14, -4, 0, 0, 0, -6, 64, 20, 64, 200;
5) суму визначників матриць-добутків AB та BA, якщо числа a11, a12, a13, a21, a22, a23, b11, b12, b21, b22, b31, b32 відповідно рівні:
20, 4, 20, 61, 14, 64, 20, 64, 19, 5, -19, 4;
6) розв'язок системи двох рівнянь методом Крамера:
(79) x + (167) y = -3480 і (3) x + (-281) y = -17660;
7) розв'язок системи двох рівнянь методом Гаусса:
(79) x + (167) y = 2645 і (3) x + (-281) y = -3635;
8) значеня параметра a при якому система має безліч розв'язків:
(79) x + (167) y = 2645 і (-15800) x + (-33400) y = a;
9) розв'язок методом Крамера: (79) x + (167) y + (2645) z = 0 і
(3) x + (-281) y + (-3635) z = 0 і (-31) x + (-229) y + (18) z = -3181;
10) розв'язок методом Гаусса: (79) x + (167) y + (2645) z = 35640 і
(3) x + (-281) y + (-3635) z = -46920 і (-31) x + (-229) y + (18) z = -95.

Список рекомендованої літератури

1. Василишин Б.В., Гой Т.П., Копач М.І., Шарип С.В. Вища математика: навч. посіб.,Ч.1:Лінійна алгебра та аналітична геометрія .-Ів.-Франківськ:Плай,2007 .-172 с.
2. Герасимчук Віктор Семенович, Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика.Повний курс.Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ математ. аналізу. Прикладні задачі: навчальний посібник .-К.:Книги України ЛТД,2009 .-578 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб.: у трьох частинах.,Ч.1 .-Харків:Веста, 2008 .-200 с.
4. Вища математика :курс лекцій у трьох частинах. Навчальний посібник / Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С.Дронь, О.С.Кондур.,Частина 1:Лінійна алгебра,аналітична геометрія,математичний аналіз.-Рек. МОП України .-Чернівці:Рута,2007 .-440 с.
5. Вища математика: збірник задач: у 2 ч.:2-е вид., стереот./За ред. П.П. Овчинникова,Ч. 1.:Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення.-К.:Техніка,2004 .-279 с.
6. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: У 3 кн.: Кн. I. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
7. Вища математика: Навч.-метод. Посібник для самост. вивч. диск. / Валєєв К.Г., Джалладова І.А. та ін. – К.: КНЕУ, 1999. – 396 с.
8. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. – К.: Видавничий цент „Академія”, 2002. – 624 с.
9. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П.Дубовик, І.І. Юрик та ін. К.: А.С.К., 2001. – 480 с.