

Довгий О.Я.

Методичні рекомендації

до вивчення розділу

“ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ”

для студентів спеціальності

“Географія”



УДК 512.643+514
ББК 22.11
Д-12

Методичні рекомендації до вивчення розділу “Елементи векторної алгебри” для студентів спеціальності “Географія” / Довгий О.Я. – Івано-Франківськ, 2013. – 80 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою Педагогічного інституту Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, протокол № 4 від 3.12.2013 р.

Автор, урахувавши досвід навчально-методичної роботи зі студентами спеціальності “Географія”, пропонує методичні рекомендації, щодо вивчення необхідного за обсягом матеріалу розділу “Елементи векторної алгебри” курсу вищої математики, яким студенти мають володіти, щоб мати фундамент для подальшого успішного освоєння інших розділів математики та математичної статистики, а також інших навчальних предметів, зокрема, фізики.

Рецензенти:

Малицька Ганна Петрівна – доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Дем'янів Тереза Онуфріївна – доцент, завідувач кафедри фундаментальної і загальної підготовки приватного вищого навчального закладу “Галицька академія”.

Зміст

Вступ	4
Конспект лекційних занять з прикладами розв'язування завдань	5
1. Вектори. Проекції вектора на осі. Координати вектора.....	5
2. Дії над векторами.	7
3. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами.....	10
4. Векторний добуток векторів.	16
5. Мішаний добуток векторів.	20
Комплекс багатоваріантних практичних завдань.	25
Завдання нульового варіанту та їх розв'язки.	25
Завдання варіантів 1 – 100.	29
Список рекомендованої літератури.	79

ВСТУП

Метою вивчення розділу є познайомити студентів з основними поняттями і методами вищої векторної алгебри, необхідними для глибшого засвоєння всього курсу математики та математичної статистики, а також підготувати студентів до самостійного вивчення тих розділів математики, які можуть бути потрібні додатково в практичній і дослідницькій роботі спеціалістів в області географії.

Завдання вивчення розділу полягає в розкритті змісту та значення основних понять даного розділу математики, а саме: правил виконання дій над векторами, формул обчислення дій над векторами через їх координати, геометричного змісту дій над векторами.

Методичні рекомендації включають в себе:

- перелік того, що студент повинен знати та вміти в результаті вивчення даного розділу;
- детальний конспект лекційних занять з прикладами розв'язування завдань;
- завдання для виконання на практичному занятті та самостійної роботи студентів;
- комплекс багатоваріантних практичних завдань (домашніх контрольних робіт), які пропонуються студентам для самостійного розв'язування задля поточного контролю з дисципліни;
- список рекомендованої літератури.

Перелік того, що студент повинен знати і вміти в результаті вивчення даної теми

- **Студент повинен знати** основні теоретичні положення, а саме: визначення й умови колінеарності та компланарності векторів, визначення дій над векторами, формули дій над векторами, геометричний зміст дій над векторами.
- **Студент повинен вміти:** виконувати дії над векторами як наочно, так і через їх координати, обчислювати скалярний, векторний та змішаний добуток векторів, знаходити кут між векторами, обчислювати площу паралелограма та об'єм паралелепіпеда за допомогою дій над векторами, використовувати основні теоретичні положення при розв'язанні задач та користуватися літературою.

Конспект лекційних занять з прикладами розв'язування завдань

1. Вектори. Проекції вектора на осі. Координати вектора

Відомо такі два типи величин: 1) величини, для визначення яких досить задати число. Ці величини називаються **скалярними** (наприклад, довжина, густина, температура); 2) величини, для визначення яких недостатньо знати тільки число. Ці величини називаються **векторними** або просто **векторами**. **Векторною величиною, або вектором** (у широкому розумінні), називається будь-яка величина, що має напрям (наприклад, сила, що діє на матеріальну точку, швидкість, прискорення).

Розрізняють вектори зв'язані, ковзні та вільні. Зв'язаний вектор – це величина, яка задається числом, точкою прикладання, лінією дії та напрямом (наприклад, сила).

Якщо величина визначається числом, лінією дії та напрямом, то така величина називається **ковзним вектором** (наприклад, швидкість при обертвовому русі).

Вільним вектором називається величина, яка визначається числом і напрямом, а лінія дії і точка прикладання можуть бути довільними. В аналітичній геометрії розглядають лише вільні вектори і називають їх просто **векторами**.

У геометрії **вектором** (у вузькому розумінні) називається напрямлений відрізок. Напрямок відрізка вказується стрілкою. Розрізняють початок і кінець вектора. Якщо припустимо A – початок вектора, а B – кінець, то даний вектор на

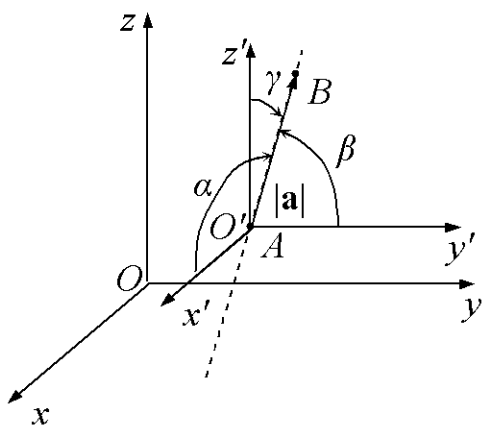


Рис. 2

письмі позначають \overline{AB} , \mathbf{a} , або \vec{a} чи \overrightarrow{AB} .

Два вектори називаються

рівними між собою, якщо

кожний із них можна дістати паралельним перенесенням іншого (рис. 1).

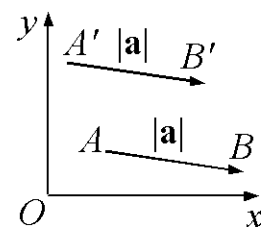


Рис. 1

Рівні вектори є паралельними (колінеарними), мають

один і той самий напрям і однакову довжину (рис. 1). Довжина вектора \mathbf{a} (\overline{AB})

називається також **абсолютною величиною**,

або **модулем** вектора і позначається $|\mathbf{a}|$ (AB , $|\overline{AB}|$).

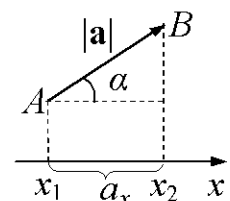


Рис. 3

Вектор називається **нульовим** (нуль-вектором), якщо він має нульову довжину, тобто його кінець збігається з початком.

Число визначає довжину вектора, а напрям

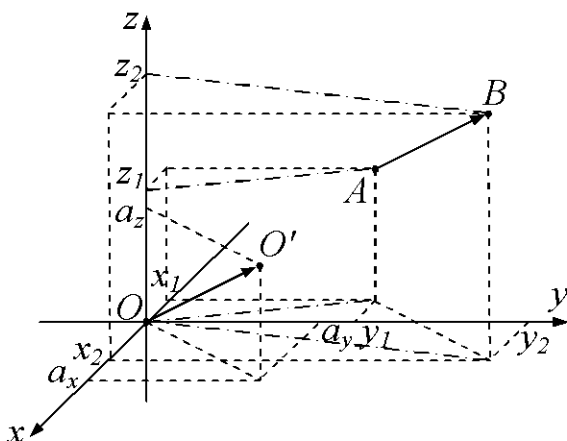


Рис. 4

визначає одну з тих прямих, на якій може бути розміщено вектор внаслідок його паралельного перенесення. Косинуси кутів, які складає ця пряма з осями координат, називаються **напрямними косинусами** і задовольняють умову $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Якщо із довільної точки O' прямої, на якій розміщено вектор, побудувати осі $O'x', O'y', O'z'$, паралельні Ox, Oy, Oz (рис. 2), то кути, які утворюватиме ця пряма з цими осями, будуть відповідно кутами α, β, γ .

Для побудови вектора на вказаній прямій обирається точка A , яка приймається за початок вектора, а число, яке виражає довжину вектора, дає змогу знайти його кінець. Для цього із точки A у заданому напрямі відкладаємо відрізок AB , довжина якого дорівнює довжині вектора. Кінець цього відрізка і є кінцем вектора **AB**.

Якщо вектор \mathbf{a} утворює кут α з віссю x (рис. 3), то проекцією вектора \mathbf{a} на вісь x називається величина:

$$np_x \mathbf{a} \equiv a_x = |\mathbf{a}| \cos \alpha = x_2 - x_1 \quad (1)$$

Тут x_1 – координата проекції початку вектора, а x_2 – координата проекції кінця вектора на вісь x .

За аналогією можна визначити проекцію вектора \mathbf{a} на будь-яку вісь.

Нехай вектор \mathbf{a} має початок і кінець в точках $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ відповідно (рис. 4).

Різниці координат проекцій кінця і початку вектора на осі Ox, Oy, Oz називають **компонентами (координатами або проекціями на координатні осі)**.

Вектор \mathbf{a} однозначно визначається упорядкованою трійкою чисел:

$$a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1, \quad (2)$$

які називаються його координатами (рис. 4). Позначають так: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Нехай вектори **AB** і **OO'** утворені один з одного паралельним перенесенням на вектор **AO** (рис. 4), отже, вони рівні, тому рівні і їх відповідні координати. Координати вектора **OO'** $= (a_x, a_y, a_z)$, а вектора **AB** $= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Оскільки при паралельному переносі вектора його довжина та кути не змінюються, то два рівних між собою вектори завжди мають одні й ті самі координати (компоненти). Як видно (рис. 4) відповідні координати цих векторів є рівними, тобто задовольняються рівності (2).

Два вектори рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їхні відповідні компоненти.

Один зі способів виведення формули довжини вектора через його координати полягає в побудові на векторі, як на діагоналі, прямокутного паралелепіпеда (рис. 5) зі сторонами: $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$. Як видно з теореми Піфагора, для прямокутних трикутників AB_1A_1 та AB_1B , довжина вектора **AB**, тобто $|\mathbf{a}|$, визначається за формулою:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (3)$$

Якщо початок вектора збігається з початком координат, то вектор **OB** називається **радіусом-вектором точки B** і його компоненти збігаються з координатами його кінця – точки B .

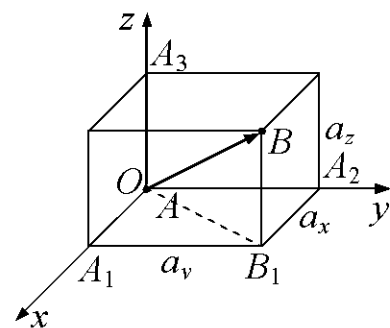


Рис. 5

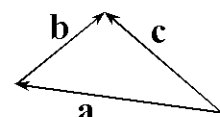


Рис. 6

2. Дії над векторами

Будь-яку кількість будь-яких векторів завжди можна перенести паралельним перенесенням в спільний початок, при цьому отримаємо ті ж вектори, але зі спільним початком.

1). Додавання векторів. Наочно **сумою двох векторів a і b** називається третій вектор c , спрямований із початку першого вектора в кінець другого (початок другого вектора повинен збігатися з кінцем першого). Це правило додавання векторів називається **правилом трикутника** (рис.6).

Використовується також **правило паралелограма** додавання векторів. **Сумою векторів a і b** називається третій вектор c , який виходить із спільного початку даних векторів і збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах a і b як на сторонах (рис.7).

Сумою будь-якого скіпченного числа векторів називається вектор, який утворюється внаслідок послідовного застосування правила трикутника (рис. 8).

Сумою двох векторів a і b , які належать одному простору і задані своїми координатами, називається третій вектор c , координати якого дорівнюють сумі відповідних координатів даних векторів: $a + b = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$. (4)

Всіх три визначення суми векторів є еквівалентні.

Наприклад, нехай вектор a має початок в точці з координатами $(1, 2)$ і кінець в точці $(2, 7)$, (рис. зліва) отже його компоненти: $a = (2 - 1, 7 - 2) = (1, 5)$, а вектор b має початок в точці $(8, 8)$ і кінець в точці $(2, 9)$, отже його компоненти $b = (2 - 8, 9 - 8) = (-6, 1)$. Тоді сумою векторів a і b заданих своїми компонентами за формулою (4) буде вектор $c = a + b = (1 + (-6), 5 + 1) = (-5, 6)$. З іншого боку, при застосованні для суми даних двох векторів a і b правил трикутника чи паралелограма, після відповідних паралельних перенесень даних векторів, результатом суми отримаємо вектор c , який має початок в точці з координатами $(7, 1)$ і кінець в точці $(2, 7)$, отже, його компоненти $c = (2 - 7, 7 - 1) = (-5, 6)$.

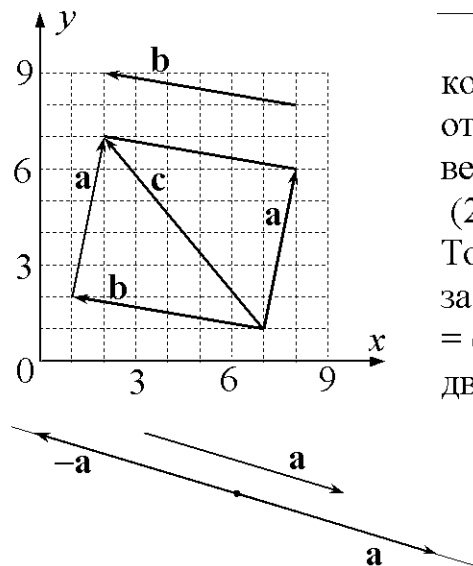
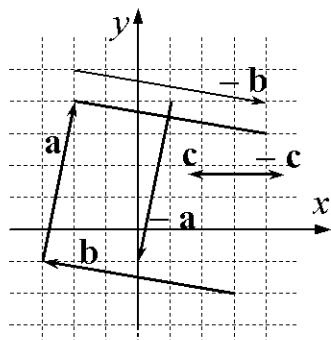


Рис. 9



2). Віднімання векторів. Для визначення різниці векторів в наочному просторі спочатку введемо визначення вектора протилежного даному. Два рівних між собою за довжиною, протилежних за напрямом і паралельних, вектори a і $-a$ називаються **протилежними векторами** (сума їх дорівнює нуль-вектору) (рис 9). Компоненти протилежних векторів рівні за модулем і протилежні за знаком.

Наприклад, вектори a і $-a$ (рис. зліва) є протилежними векторами. Аналогічно протилежні вектори b і $-b$, а також c і $-c$. Їх компоненти рівні по модулю і протилежні за знаком. Так вектор $c = (-3, 0)$, а

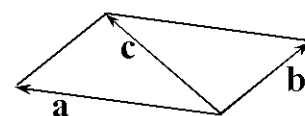


Рис. 7

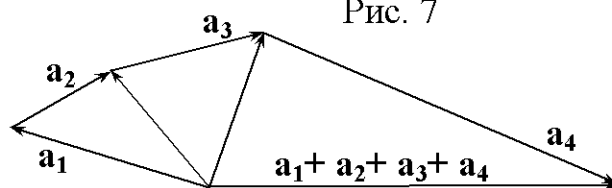


Рис. 8

вектор $-\mathbf{c} = (3, 0)$, вектор $\mathbf{b} = (-6, 1)$, а вектор $-\mathbf{b} = (6, -1)$. І яке визначення ми би не брали до уваги, сума протилежних векторів дорівнює нуль-вектору.

Віднімання векторів визначається як дія, обернена до додавання: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

Таким чином, щоб від вектора \mathbf{a} відняти вектор \mathbf{b} , треба до вектора \mathbf{a} додати вектор, протилежний до вектора \mathbf{b} (рис. 10).

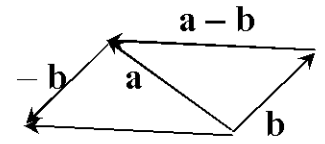
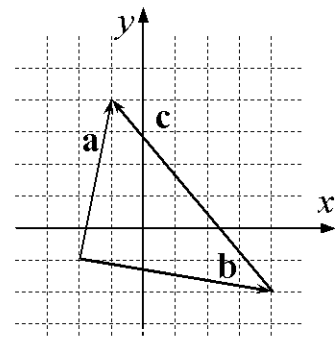


Рис. 10

Наочно, різниця векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} являє собою вектор $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, початок якого збігається з кінцем вектора \mathbf{b} , а кінець – із кінцем вектора \mathbf{a} , при цьому початки векторів повинні збігатися (рис. 10).

Різницею двох векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} назвемо третій вектор \mathbf{c} , компоненти якого дорівнюють різниці відповідних компонентів векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} : $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$. Дане правило в

двовимірному просторі (на площині) підтверджується правилами паралелограма і трикутника (рис. 10).



Наприклад, нехай на площині дано вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} : $\mathbf{a} = (1, 5)$ і $\mathbf{b} = (6, -1)$. (рис. зліва). Різницею двох векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} є вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} =$

$= (1 - 6, 5 - (-1)) = (-5, 6)$. Як бачимо з рисунка, координати вектора \mathbf{c} дійсно такі (тобто, щоб перейти від

початку вектора до його кінця потрібно переміститися на (-5) одиниць вздовж осі абсцис (5 одиниць вліво), та на 6 одиниць вздовж осі ординат (6 одиниць вгору)).

3). Множення вектора на число. Наочно добутком вектора \mathbf{a} на дійсне число λ є вектор $\lambda\mathbf{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda\mathbf{a}|$. Якщо $\lambda > 0$ і $|\mathbf{a}| \neq 0$, то вектори $\lambda\mathbf{a}$ і \mathbf{a} спрямовані однаково (співнапрямлені); якщо $\lambda < 0$ і $|\mathbf{a}| \neq 0$, то вектори $\lambda\mathbf{a}$ і \mathbf{a} протилежно (рис. 11). Якщо $\lambda = 0$ або $|\mathbf{a}| = 0$, то $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

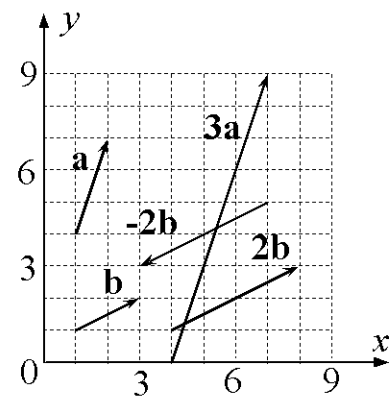


Рис. 11

Добутком вектора \mathbf{a} на дійсне число λ називається вектор, компоненти якого дорівнюють добуткам на це число компонент вектора \mathbf{a} : $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$. (5)

Наприклад, нехай на площині дано вектор \mathbf{a} : $\mathbf{a} = \mathbf{OB} = (2, 3)$ (рис. зліва). Знайдемо вектор \mathbf{c} , який є добутком вектора \mathbf{a} на дійсне число $-1,5$, $\mathbf{c} = -1,5\mathbf{a}$. Довжина вектора \mathbf{c} , $|\mathbf{c}| = |-1,5||\mathbf{a}| = 1,5|\mathbf{a}|$, а спрямований вектор \mathbf{c} в протилежний бік, бо $-1,5 < 0$. Нарисуємо вектор \mathbf{c} . Отже, $\mathbf{c} = \mathbf{OB}'$.

Згідно з формулою (5) координати вектора $\mathbf{c} = \mathbf{OB}' = -1,5\mathbf{a} = (-1,5 \cdot 2, -1,5 \cdot 3) = (-3, -4,5)$. Як бачимо з рисунка, координати вектора \mathbf{c} дійсно такі.

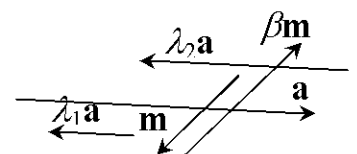
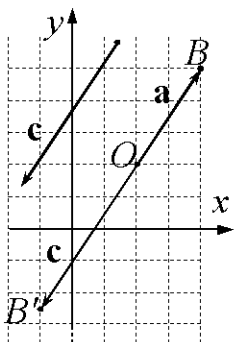


Рис. 12

Якщо два вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} пов'язані співвідношенням $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, то вони називаються **колінеарними** (в наочних просторах їх називають паралельними) (рис. 12).

Згідно з означенням колінеарності векторів (рис. 12), рівності векторів і формули (5) отримуємо, що $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) = \lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$. Отже:

$$a_x / b_x = a_y / b_y = a_z / b_z \quad (5a)$$

– необхідна і достатня умова колінеарності векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} .

Декілька векторів називаються **колінеарними** між собою, якщо всі вони, будучи прикладеними до однієї і тієї самої точки, лежатимуть на одній прямій. Такі вектори ще називають колінеарними цій прямій.

Декілька векторів називаються **компланарними** між собою, якщо всі вони, будучи прикладеними до однієї і тієї самої точки, лежатимуть в одній площині. Такі вектори ще називають компланарними цій площині.

Будь-які два вектори є компланарними, бо через їх спільний початок та два кінці (всього три точки) можна провести площину.

Приклад 1. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$. Знайти координати вектора $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$, а також довжину вектора \mathbf{d} . Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2, a_y = 1, a_z = 1, b_x = 2, b_y = 4, b_z = -1, c_x = 1, c_y = 1, c_z = -1$. Отже: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, тобто вектори мають такі координати: $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 4, -1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, -1)$. Згідно формул (5) і (4) \mathbf{d} дорівнює: $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c} = (3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 7 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 7 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 7 \cdot (-1)) = (3, 4, 8)$. Отже $\mathbf{d} = (3, 4, 8)$. Згідно з формулою (3): $|\mathbf{d}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 16 + 64} = \sqrt{89} \approx 9,434(\text{од.})$.
Відповідь: $(3, 4, 8)$; 9,434.

Лінійні операції над будь-якими векторами \mathbf{a} , \mathbf{b} і \mathbf{c} мають такі **властивості**:

- 1°. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
- 2°. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
- 3°. $\lambda(\beta\mathbf{a}) = (\lambda\beta)\mathbf{a}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ і } \forall \beta \in \mathbb{R}$.
- 4°. $(\lambda + \beta)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ і } \forall \beta \in \mathbb{R}$.
- 5°. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (рис. 13).

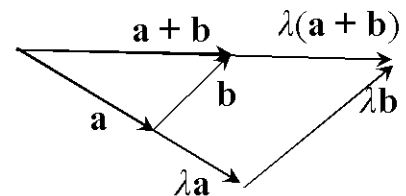
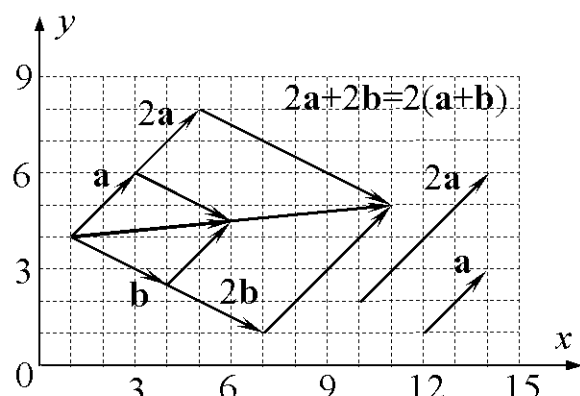
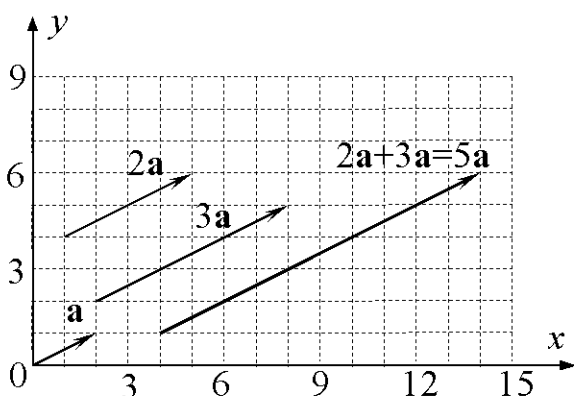


Рис. 13

Наприклад нехай на площині дано вектор \mathbf{a} : $\mathbf{a} = (2, 1)$ (рис. зліва). Знайдемо вектор $2\mathbf{a} + 3\mathbf{a}$, який є сумою вектора $2\mathbf{a}$ та вектора $3\mathbf{a}$. Нарисуємо вектори $2\mathbf{a}$ і $3\mathbf{a}$. Довжина вектора $2\mathbf{a}$: $|2\mathbf{a}| = 2|\mathbf{a}|$, аналогічно довжина вектора $3\mathbf{a}$: $|3\mathbf{a}| = 3|\mathbf{a}|$. Спрямовані вектори $2\mathbf{a}$ і $3\mathbf{a}$ в ту саму сторону, що і вектор \mathbf{a} , бо всі вони колінеарні (паралельні). Координати вектора $2\mathbf{a} + 3\mathbf{a}$ за формулами (5) і (4) такі: $2\mathbf{a} + 3\mathbf{a} = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 2, 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = (10, 5)$. Як бачимо з рисунка, координати вектора $2\mathbf{a} + 3\mathbf{a}$ дійсно такі.



Наприклад, пехай на площині дано вектор $\mathbf{a} = (2; 2)$ та $\mathbf{b} = (3; -1,5)$ (рис. справа). Порівняємо координати вектора $2\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ та вектора $2(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Якщо побудувати вектори $2\mathbf{a}$ і $2\mathbf{b}$, та взяти за правилом паралелограма їх суму, а також побудувати вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, та взяти вектор $2(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, то бачимо з рисунка (рис. справа), що вектори $2\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ та $2(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ співпадають. Беручи до уваги формулу (2), зрозуміло, що координати вектора $2\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ та вектора $2(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ однакові.

Нехай вектори $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ такі, що за напрямом співпадають з осями Ox, Oy, Oz відповідно і $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$ (одичні вектори) (рис. 14). Тоді:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \quad (6)$$

Вектори $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ називають *ортами системи координат* (рис. 14).

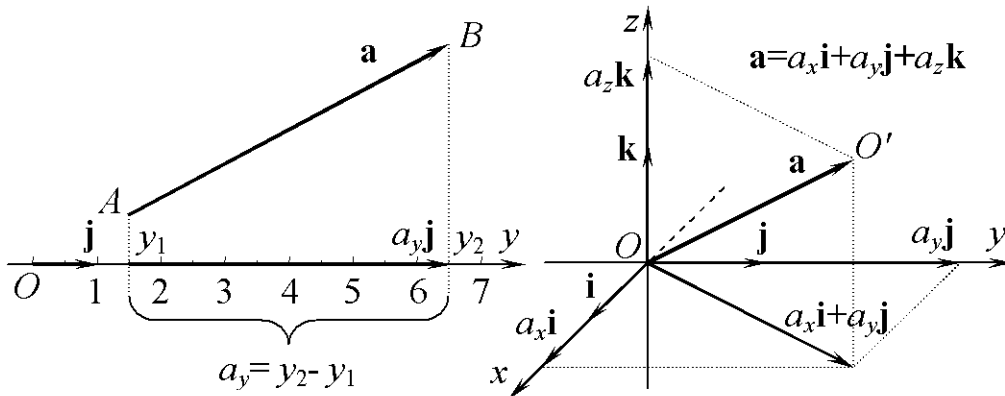


Рис. 14

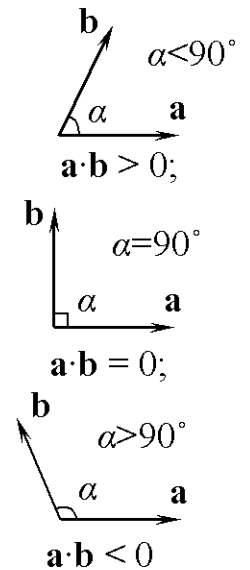


Рис. 15

3. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами

Розглядають скалярний та векторний добутки, де результатом множення двох векторів може бути як число, так і вектор. З самої назви зрозуміло, що скалярним добутком є скаляр, тобто число.

Скалярним добутком двох ненульових векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} є число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Отже:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha. \quad (7)$$

Наприклад, знайти скалярний добуток двох векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} , довжини яких відповідно рівні 6 і 18 умовних одиниць, а кут між ними 120° .

Згідно з формулою (7), $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6 \cdot 18 \cdot \cos 120^\circ = 6 \cdot 18 \cdot (-1/2) = -54$.

Якщо кут α між векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} гострий, то $\cos \alpha > 0$, тобто $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$; якщо кут α тупий, то $\cos \alpha < 0$, тобто $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$; а якщо прямий, то $\cos \alpha = 0$, тобто $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ (рис. 15). Якщо хоча б один з векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений, але зважаючи на те, що довжина нульового вектора дорівнює 0, то, згідно з означенням, скалярний добуток дорівнює 0.

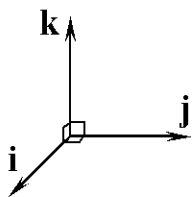


Рис. 16

Використовуючи формулу проєкції вектора (1), можна також записати:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| n_{\mathbf{p}_a \mathbf{b}} = |\mathbf{b}| n_{\mathbf{p}_b \mathbf{a}}. \quad (8)$$

Властивості скалярного добутку випливають з його визначення:

1°. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$; 2°. $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b})$; 3°. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = |\mathbf{a}|^2$, бо $\cos 0 = 1$;
4°. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.

Нехай вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} задано за допомогою виразів: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, (їх координати відповідно: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$), тоді використовуючи властивості скалярного добутку, а також таблицю скалярного

множення ортів системи координат: $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1, \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0, \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0, \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0, \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1, \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0, \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0, \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0, \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$ (рис. 16), отримаємо:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Отже:
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \quad (9)$$

– формула скалярного добутку векторів через їх координати.

Якщо кут між векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} прямий, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ і, використавши формулу (9), отримаємо:

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0 \quad (10)$$

– необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} .

Приклад 2. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$. Знайти скалярний добуток $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, а також суму скалярних добутків $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ і $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2, a_y = 4, a_z = 1, b_x = 3, b_y = 4, b_z = -1, c_x = 7, c_y = 1, c_z = -1$. Отже, вектори мають такі координати: $\mathbf{a} = (2, 4, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 4, -1)$, $\mathbf{c} = (7, 1, -1)$. Знайдемо вектор $\mathbf{b} + \mathbf{c}$: $\mathbf{b} + \mathbf{c} = (10, 5, -2)$. Використавши формулу (9), знайдемо скалярні добутки: $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = 2\cdot 10 + 4\cdot 5 + 1\cdot(-2) = 38$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2\cdot 3 + 4\cdot 4 + 1\cdot(-1) = 21$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 2\cdot 7 + 4\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 17$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 21 + 17 = 38$. Отже, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 38$, що й висвітлено у властивостях скалярного добутку. Відповідь: 38.

Приклад 3. Дано два вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} : $\mathbf{a} = (a_x, a_y, c)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Знайти значення параметра c , при якому вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} перпендикулярні. Числа a_x, a_y, b_x, b_y, b_z подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2, a_y = 1, b_x = 2, b_y = 4, b_z = -1$. Отже: $\mathbf{a} = (2, 1, c)$, $\mathbf{b} = (2, 4, -1)$. Використаємо умову перпендикулярності (10): $2\cdot 2 + 1\cdot 4 + c\cdot(-1) = 0$. Звідси отримаємо: $c = 8$. Відповідь: 8.

Для знаходження виразу для кута між двома векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} прирівняємо запис скалярного добутку за визначенням (7) та через координати векторів (9) і отримаємо вираз: $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$. Звідси:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad (11)$$

– формула для кута між векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} .

Взявши до уваги вираз для довжини вектора через його координати (3), отримаємо:

$$\cos\alpha = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (11a)$$

– формула для кута між векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} через їх координати.

Приклад 4. Дано два вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} : $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$. Знайти одиничний вектор, що лежить на бісектрисі кута, утвореного векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} . Числа a_x, a_y, b_x, b_y подані в таблиці 1. Розв'язати двома способами.

Розв'язування: В-нт 1: $a_x = 2, a_y = 1, b_x = -1, b_y = 2$. Отже: $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 2)$.

Вектори $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ і $\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ – одиничні і однаково спрямовані з векторами відповідно \mathbf{a} і \mathbf{b} . Отже, паралелограм, побудований на векторах \mathbf{e}_1 і \mathbf{e}_2 , – ромб. Діагональ цього ромба лежить на бісектрисі кута між векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} . Отже, вектор $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ лежить на бісектрисі між векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} .

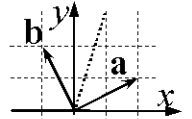
Знайдемо цей вектор: $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \left(\frac{2+(-1)}{\sqrt{5}}, \frac{1+2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

Одиничним вектором, що лежить на бісектрисі кута, утвореного векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} , буде вектор:

$$\frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

2 спосіб: Використавши формулу (11), знайдемо кут α між векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} :
 $\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{0}{5} = 0$. Отже $\alpha = 90^\circ$. Вектори $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ і $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ – одиничні і однаково спрямовані з векторами відповідно \mathbf{a} і \mathbf{b} .

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad \mathbf{e}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$



Шуканий вектор лежить на бісектрисі кута між векторами \mathbf{e}_1 і \mathbf{e}_2 , тобто складає з векторами \mathbf{e}_1 і \mathbf{e}_2 кути відповідно 45° і -45° (рис. справа).

Отже:

$$\begin{cases} \cos 45^\circ = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot y}{1 \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot y \\ \cos -45^\circ = \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot y}{1 \cdot 1} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5y}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{50}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{50} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \sqrt{10}x = 6 - \sqrt{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}.$$

Відповідь: $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ – координати шуканого вектора.

Приклад 5. Знайти площу паралелограма побудованого на векторах \mathbf{AB} і \mathbf{AC} , якщо $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 1, y_1 = 3, x_2 = -1, y_2 = -2, x_3 = -3, y_3 = 1$. Отже $A(1, 3), B(-1, -2), C(-3, 1)$.

Знаходимо, використавши формулу (2), вектори: $\mathbf{AB} = (-2, -5), \mathbf{AC} = (-4, -2)$.

Згідно з формулою (9), отримаємо: $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC} = -2 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-2) = 8 + 10 = 18$.

Згідно з формулою (11a), отримаємо: $\cos A = \frac{-2 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-2)}{\sqrt{4 + 25} \cdot \sqrt{16 + 4}} = \frac{18}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{20}}$.

Використавши основну тригонометричну тотожність, отримаємо:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{18^2}{29 \cdot 20}} = \sqrt{1 - \frac{324}{580}} = \sqrt{\frac{256}{580}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 64}{4 \cdot 145}} = \frac{8}{\sqrt{145}}.$$

З шкільного курсу геометрії відомо, що площа паралелограма:
 $S = AB \cdot AC \cdot \sin A = \sqrt{29} \cdot \sqrt{20} \cdot 8 / \sqrt{145} = 2 \cdot 8 = 16$. Відповідь: 16.

Приклад 6. Знайти $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, якщо відомо, що $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$, $\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \varphi$ (φ – кут між векторами \mathbf{a} і \mathbf{b}). Числа a , b , φ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 3$, $b = 5$, $\varphi = 30^\circ$. Отже $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} = 30^\circ$.
 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi + |\mathbf{b}|^2} =$
 $= \sqrt{3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5^2} = \sqrt{9 + 15 \cdot \sqrt{3} + 25} = \sqrt{34 + 15 \cdot \sqrt{3}} \approx 7,7447$. Відповідь: 7,7447.

Приклад 7. Дано вектор $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$. Знайти вектор \mathbf{x} , який колінеарний вектору \mathbf{a} і задовольняє умову $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = h$. Числа a_x , a_y , a_z , h подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = 1$, $a_z = -1$, $h = 3$. Отже $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 3$. З умови колінеарності $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}$, оскільки $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$, то $\mathbf{x} = (2\lambda, \lambda, -\lambda)$. А за умовою $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 3$, отже $2\lambda \cdot 2 + \lambda \cdot 1 - \lambda \cdot (-1) = 3$. Звідси $\lambda = 1/2$. Отже $\mathbf{x} = (1, 1/2, -1/2)$.

Відповідь: $\mathbf{x} = (1, 1/2, -1/2)$.

Приклад 8. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$. Знайти вектор \mathbf{x} , який перпендикулярний до векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} , і задовольняє умову $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = h$. Числа a_x , a_y , a_z , b_x , b_y , b_z , c_x , c_y , c_z , h подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = 1$, $a_z = -3$, $b_x = 2$, $b_y = -1$, $b_z = -1$, $c_x = 2$, $c_y = 1$, $c_z = -1$, $h = 2$. Отже $\mathbf{a} = (2, 1, -3)$, $\mathbf{b} = (2, -1, -1)$, $\mathbf{c} = (2, 1, -1)$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 2$. Нехай вектор \mathbf{x} має такі компоненти: $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Згідно умови перпендикулярності векторів \mathbf{x} і \mathbf{a} , а також \mathbf{x} і \mathbf{b} , отримаємо: $2x + y - 3z = 0$ і $2x - y - z = 0$. Згідно умови $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 2$ отримаємо: $2x + y - z = 2$. Із системи трьох останніх рівнянь з трьома невідомими отримаємо: $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Відповідь: $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$.

Приклад 9. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$. Вектор \mathbf{x} , перпендикулярний до векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} , і утворює з віссю Oz гострий кут. Знайти координати вектора \mathbf{x} , якщо $|\mathbf{x}| = \sqrt{h}$. Числа a_x , a_y , a_z , b_x , b_y , b_z , h подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 4$, $a_y = 3$, $a_z = 1$, $b_x = 1$, $b_y = 1$, $b_z = 1$, $h = 14$. Отже $\mathbf{a} = (4, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{14}$. Нехай вектор \mathbf{x} має такі компоненти: $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Згідно умови перпендикулярності векторів \mathbf{x} і \mathbf{a} , а також \mathbf{x} і \mathbf{b} , отримаємо: $4x + 3y + z = 0$ і $x + y + z = 0$. Згідно умови $|\mathbf{x}| = \sqrt{14}$, отримаємо: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{14}$.

Отримаємо систему трьох останніх рівнянь з трьома невідомими:
$$\begin{cases} 4x + 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$$

Розв'яжемо методом підстановки і отримаємо:
$$\begin{cases} x = -y - z \\ 4(-y - z) + 3y + z = 0 \\ (-y - z)^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = -3z \\ ((-3z) - z)^2 + (-3z)^2 + z^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = -3z \\ 4z^2 + 9z^2 + z^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = -3z \\ z_{1,2} = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 2 \\ y_{1,2} = \mp 3 \\ z_{1,2} = \pm 1 \end{cases}. \text{ Отже, ми отримали два вектори: } \mathbf{x}_1 = (2, -3, 1) \text{ і } \mathbf{x}_2 = (-2, 3, -1). \text{ Знайдемо,}$$

який з них утворює з віссю Oz гострий кут. Для цього візьмемо орт вісі Oz : $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ і знайдемо скалярний добуток кожного з знайдених векторів з ортом \mathbf{k} .

$$\mathbf{x}_1 \mathbf{k} = 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1, \quad \mathbf{x}_2 \mathbf{k} = -2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1.$$

Отже, $\mathbf{x}_1 \mathbf{k} = 1 > 0$, то кут між векторами \mathbf{x}_1 і \mathbf{k} – гострий, $\mathbf{x}_2 \mathbf{k} = -1 < 0$, то кут між векторами \mathbf{x}_2 і \mathbf{k} – тупий. Отже, вектор \mathbf{x}_1 , перпендикулярний до векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} , і утворює з віссю Oz гострий кут. Відповідь: $\mathbf{x} = (2, -3, 1)$.

Приклад 10. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$. Вектор \mathbf{x} , перпендикулярний до осі Oy і задовольняє умову $\mathbf{x}\mathbf{a} = h_1$ і $\mathbf{x}\mathbf{b} = h_2$. Знайти координати вектора \mathbf{x} . Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, h_1, h_2$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2, a_y = 3, a_z = -5, b_x = 1, b_y = 7, b_z = 4, h_1 = -5, h_2 = 5$. Отже $\mathbf{a} = (2, 3, -5)$, $\mathbf{b} = (1, 7, 4)$, $\mathbf{x}\mathbf{a} = -5$, $\mathbf{x}\mathbf{b} = 5$. Нехай вектор \mathbf{x} має такі компоненти: $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Вектор \mathbf{x} , перпендикулярний до осі Oy , тобто він компланарний площині xOz , отже, його компонента $y = 0$, тобто $\mathbf{x} = (x, 0, z)$. Згідно з умовою $\mathbf{x}\mathbf{a} = -5$, $\mathbf{x}\mathbf{b} = 5$ отримаємо систему: $2x - 5z = -5$ і $x + 4z = 5$. Розв'яжемо

$$\text{методом підстановки. Отримаємо: } \begin{cases} 2x - 5z = -5 \\ x + 4z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 4z \\ 2(5 - 4z) - 5z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/13 \\ z = 15/13 \end{cases}.$$

Отже, ми отримали вектор: $\mathbf{x} = (5/13, 0, 15/13)$. Відповідь: $\mathbf{x} = (5/13, 0, 15/13)$.

Приклад 11. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$. Знайти проекцію вектора \mathbf{a} на вісь вектора \mathbf{b} . Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = -2, a_y = 3, a_z = -4, b_x = -1, b_y = 7, b_z = -4$. Отже, $\mathbf{a} = (-2, 3, -4)$, $\mathbf{b} = (-1, 7, -4)$. Згідно з формулою (8), отримаємо: $\text{пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / |\mathbf{b}|$.
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 + (-4) \cdot (-4) = 2 + 21 + 16 = 39$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + (-4)^2} = \sqrt{66}$.
 $\text{пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = 39 / \sqrt{66} \approx 4,8$.

Приклад 12. Знайти проекцію вектора $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ на вісь, що утворює з координатними осями Ox і Oz кути α і γ відповідно, а з віссю Oy – гострий кут. Числа $a_x, a_y, a_z, \alpha, \gamma$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = \sqrt{2}, a_y = -3, a_z = -3, \alpha = 45^\circ, \gamma = 60^\circ$. Отже $\mathbf{a} = (\sqrt{2}, -3, -3)$. Нехай вісь, про яку йдеться в умові задачі, має компоненти (x, y, z) , позначимо її через \mathbf{x} . Згідно з умовою задачі дана вісь з ортами координатних осей Ox і Oz , тобто з ортами відповідно $(1, 0, 0)$ і $(0, 0, 1)$, утворює кути відповідно 45° і 60° . Використавши формулу (11), отримаємо:

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{i}|} = \frac{x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0}{|\mathbf{x}| \cdot 1} = \frac{x}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} |\mathbf{x}|,$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{k}|} = \frac{x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1}{|\mathbf{x}|} = \frac{z}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow z = \frac{1}{2} |\mathbf{x}|.$$

Використавши залежність між напрямними косинусами вектора $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, отримаємо: $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma = 1 - 1/2 - 1/4 = 1/4$. Отже $\cos\beta = \pm 1/4$. Зважаючи на те, що вісь x утворює з віссю Oy – гострий кут, $\cos\beta = 1/4$. Отже:

$$\cos\beta = \frac{1}{4} = \frac{x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 0}{|\mathbf{x}|} = \frac{y}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow y = \frac{1}{4}|\mathbf{x}|. \text{ Отже:}$$

$$\text{пр}_{\mathbf{x}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}|\mathbf{x}| + (-3) \cdot \frac{1}{4}|\mathbf{x}| + (-3) \cdot \frac{1}{2}|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -1\frac{1}{4}. \text{ Відповідь: } -1\frac{1}{4}.$$

Приклад 13. Знайти проекцію вектора $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ на вісь, що утворює з координатними осями рівні гострі кути. Числа a_x, a_y, a_z подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2, a_y = -3, a_z = 4$. Отже, $\mathbf{a} = (2, -3, 4)$. Нехай вісь, про яку йдеться в умові задачі, позначимо через x . Вона утворює з координатними осями рівні гострі кути, тобто $\alpha = \beta = \gamma$ і $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma > 0$. Використавши залежність між напрямними косинусами вісі $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, отримаємо:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm 1/\sqrt{3}. \text{ Оскільки, } \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma > 0, \text{ то } \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Використавши формулу (11), для косинуса кута між віссю x і ортами координатних осей $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ і $(0, 0, 1)$, отримаємо:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{x}||\mathbf{i}|} = \frac{x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0}{|\mathbf{x}| \cdot 1} = \frac{x}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|, \quad \text{аналогічно:}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}| \quad \text{і} \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{z}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|.$$

$$\text{Отже: } \text{пр}_{\mathbf{x}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}| + (-3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}| + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = \frac{2 - 3 + 4}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \text{ Відповідь: } \sqrt{3}.$$

Приклад 14. Знайти проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь, що утворює з координатними осями рівні тупі кути, якщо $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$. Числа $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 1, y_1 = 4, z_1 = -6, x_2 = -2, y_2 = -3, z_2 = 8$. Отже, $A(1, 4, -6), B(-2, -3, 8)$. Згідно з формулою (2): $\mathbf{AB} = (-3, -7, 14)$. Нехай вісь, про яку йдеться в умові задачі, позначимо через x . Вона утворює з координатними осями рівні тупі кути, тобто $\alpha = \beta = \gamma$ і $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma < 0$. Використавши залежність між напрямними косинусами вісі $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, отримаємо:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Але беручи до уваги те, що } \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma < 0, \text{ то}$$

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Використавши формулу (11), для косинуса кута між віссю}$$

x і ортами координатних осей $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ і $(0, 0, 1)$, отримаємо:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{x}||\mathbf{i}|} = \frac{x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0}{|\mathbf{x}| \cdot 1} = \frac{x}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|, \quad \text{аналогічно:} \quad \cos\beta =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{|x|} \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}|x| \quad \text{i} \quad \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{z}{|x|} \Rightarrow z = -\frac{1}{\sqrt{3}}|x|. \quad \text{Отже:}$$

$$\text{пр}_x \mathbf{AB} = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{(-3) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}})|x| + (-7) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}})|x| + 14 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}})|x|}{|x|} = \frac{3+7-14}{\sqrt{3}} = \frac{-4}{\sqrt{3}}. \quad \text{В-дь: } \frac{-4}{\sqrt{3}}.$$

4. Векторний добуток

Векторним добутком вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} називається вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, який задовольняє таким умовам:

1) вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ колінеарний прямій l перпендикулярній до площини α , до якої вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} є компланарними (рис. 17) (вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ перпендикулярний до кожного з векторів \mathbf{a} і \mathbf{b}).

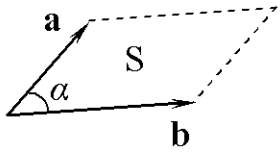


Рис. 18

2) довжина $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах \mathbf{a} та \mathbf{b} (рис. 18), тобто

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha = S_{\text{паралелограма}} \quad (12)$$

де α – кут між двома векторами.

3) вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ спрямований так, що якщо дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} , то поворот вектора \mathbf{a} до вектора \mathbf{b} відбувається на найменший кут проти бігу годинникової стрілки (рис. 17).

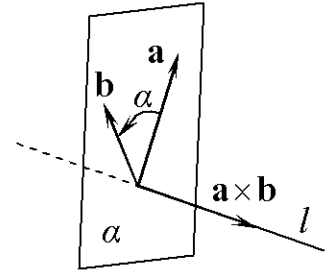


Рис. 17

Наприклад, знайти модуль векторного добутку векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} , якщо $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=3$, $\hat{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \pi/6$. Розв'язок. Згідно з формулою (12) маємо: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 2 \cdot 3 \sin \pi/6 = 2 \cdot 3 \cdot (1/2) = 3$.

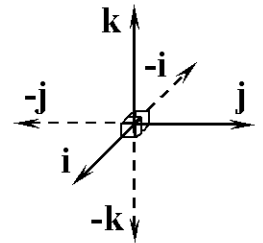


Рис. 19

Властивості векторного добутку:

1°. Якщо $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$ то \mathbf{a} і \mathbf{b} колінеарні тільки тоді, коли $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$, тобто коли $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ – нуль-вектор.

2°. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. 3°. $(\lambda \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

4°. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Всі ці властивості легко виводяться з його визначення.

Беручи до уваги те, що одиничні вектори співпадають з напрямом осей прямокутної системи координат (рис. 19), векторні добутки ортів \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , дорівнюють:

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Знайдемо координати вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$ або:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (13)$$

– формула векторного добутку векторів через їх координати.

Приклад 15. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$. Знайти координати векторів $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{c}$, а також їх довжину. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2, a_y = 1, a_z = 1, b_x = 2, b_y = 4, b_z = -1, c_x = 1, c_y = 1, c_z = -1$. Отже: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, тобто вектори мають такі координати: $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 4, -1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, -1)$. Згідно з формулою (13) невідомі вектори матимуть координати: $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ – нуль-вектор, згідно з 1-ою властивістю векторного добутку, $|\mathbf{a} \times \mathbf{a}| = 0$;

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot (-1-4) - \mathbf{j} \cdot (-2-2) + \mathbf{k} \cdot (8-2) = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \text{ згідно з формулою (3):}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{25+16+36} = \sqrt{77} \approx 8,775(\text{од.});$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot (-1-1) - \mathbf{j} \cdot (-2-1) + \mathbf{k} \cdot (2-1) = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \text{ згідно з формулою (3):}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \approx 3,742(\text{од.});$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot (4+1) - \mathbf{j} \cdot (2+2) + \mathbf{k} \cdot (2-8) = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \text{ згідно з формулою (3):}$$

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{a}| = \sqrt{25+16+36} = \sqrt{77} \approx 8,775(\text{од.});$$

$|\mathbf{b} \times \mathbf{b}|$ – нуль-вектор, згідно з 1-ою властивістю векторного добутку, $|\mathbf{b} \times \mathbf{b}| = 0$;

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot (-4+1) - \mathbf{j} \cdot (-2+1) + \mathbf{k} \cdot (2-4) = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \text{ згідно з формулою (3):}$$

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14} \approx 3,742(\text{од.}); \quad \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|$$

$$= \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \approx 3,742(\text{од.}); \quad \mathbf{c} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad |\mathbf{c} \times \mathbf{b}| = \sqrt{14} \approx 3,742(\text{од.});$$

$|\mathbf{c} \times \mathbf{c}|$ – нуль-вектор, згідно з 1-ою властивістю векторного добутку $|\mathbf{c} \times \mathbf{c}| = 0$.

Приклад 16. Дано $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$ і $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = h$. Обчислити $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Числа a, b, h подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 2, b = 10, h = 12$. Отже: $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 10$ і $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$. Згідно з формулою (11), маємо: $\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{12}{2 \cdot 10} = \frac{3}{5}$. Згідно з основним

тригонометричним співвідношенням: $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \frac{4}{5}$.

Згідно з формулою (12) маємо: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha = 2 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 16$. Відповідь: 16.

Приклад 17. Дано $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$ і $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = h$. Обчислити $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Числа a, b, h подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 4, b = 12, h = 22$. Отже: $|\mathbf{a}| = 4, |\mathbf{b}| = 12$ і $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 22$. Згідно з формулою (12) маємо: $\sin \alpha = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{22}{4 \cdot 12} = \frac{11}{24}$. Згідно з основним

тригонометричним співвідношенням: $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{11}{24}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{455}{576}}$.

Згідно з формулою (7), маємо: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha = 4 \cdot 12 \cdot \left(\pm \sqrt{\frac{455}{576}}\right) = \pm 2\sqrt{455}$.

Приклад 18. Площа трикутника ABC дорівнює S . Дві його вершини лежать у точках $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайти координати вершини C , якщо вона лежить на осі Oz . Числа $S, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $S=14, x_1=1, y_1=4, z_1=-6, x_2=-2, y_2=-3, z_2=8$. Отже $S = \sqrt{30,75}, A(1, 4, -6), B(-2, -3, 8)$. З (2): $\mathbf{AB} = (-3, -7, 14)$. Згідно з умовою задачі вершина C лежить на осі Oz , тобто її абсциса і ордината рівні нулю. Нехай апліката вершини C рівна z . Тобто $C(0, 0, z)$. Тоді $\mathbf{AC} = (-1, -4, z+6)$. Згідно з формулою (13):

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} &= \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -7 & 14 \\ -1 & -4 & z+6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}((-7) \cdot (z+6) - (-4) \cdot 14) - \mathbf{j}((-3) \cdot (z+6) - (-1) \cdot 14) + \mathbf{k}((-3) \cdot (-4) - (-1) \cdot (-7)) = \\ &= \mathbf{i}(-7z - 42 + 56) - \mathbf{j}(-3z - 18 + 14) + \mathbf{k}(12 - 7) = (-7z + 14)\mathbf{i} + (3z + 4)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Згідно з формулою (12) маємо: $|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$ дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах \mathbf{AB} і \mathbf{AC} . Трикутник ABC – це трикутник побудований на векторах \mathbf{AB} і \mathbf{AC} , і його площа дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах \mathbf{AB} і \mathbf{AC} . Отже, $\frac{1}{2} |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{30,75} \Rightarrow$

$|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = 2\sqrt{30,75}$. З другої сторони, згідно з формулою (3), маємо: $|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{(-7z+14)^2 + (3z+4)^2 + 5^2}$. Отже, прирівнявши два вирази з $|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$, отримаємо:

$$\begin{aligned} (-7z+14)^2 + (3z+4)^2 + 5^2 &= (2 \cdot \sqrt{30,75})^2 \Rightarrow \\ (49z^2 - 196z + 196) + (9z^2 + 24z + 16) + 25 &= 123 \Rightarrow 58z^2 - 172z + 114 = 0 \Rightarrow z_1 = 1\frac{28}{29}, z_2 = 1. \end{aligned}$$

Отже $C(0, 0, 1\frac{28}{29})$ або $C(0, 0, 1)$. Відповідь: $C(0, 0, 1\frac{28}{29})$ або $C(0, 0, 1)$.

Приклад 19. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$. Знайти орт вектора перпендикулярного до векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} . Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ подані в табл.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x=4, a_y=4, a_z=2, b_x=4, b_y=5, b_z=3$. Отже: $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, тобто вектори мають такі координати: $\mathbf{a} = (4, 4, 2)$, $\mathbf{b} = (4, 5, 3)$. Згідно з означенням векторного добутку вектори $\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, тобто вектор $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ і вектор $-(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, перпендикулярні до векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} . Згідно з формулою (13):

$$\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \pm(\mathbf{i} \cdot (12 - 10) - \mathbf{j} \cdot (12 - 8) + \mathbf{k} \cdot (20 - 16)) = \pm(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}), \quad \text{Згідно з}$$

формулою (3): $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6(\text{од.})$. Ортами векторів $\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (колінеарними одиничними векторами з тими самими

напрямами, як і самі вектори $\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, є

вектори

$$\frac{\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} =$$

$$= \frac{\pm(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k})}{6} = \pm \frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

Приклад 20. Вершини трикутника ABC лежать у точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ і $C(x_3, y_3, z_3)$. Знайти висоту $h = |DB|$. Числа $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: В.1: $x_1 = 4, y_1 = 4, z_1 = 2, x_2 = 4, y_2 = 7, z_2 = 6, x_3 = 7, y_3 = 8, z_3 = 2$. Отже, $A(4, 4, 2)$, $B(4, 7, 6)$ і $C(7, 8, 2)$.

1 спосіб. Зі шкільного курсу геометрії відомо, що площа трикутника $S = \frac{1}{2}ha$, де h – висота, а a – основа трикутника, або за формулою Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – півпериметр, а a, b, c – сторони трикутника.

Прирівнявши, отримаємо: $h = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$, тобто

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-AC)(p-AB)(p-BC)}}{AC}, \quad p = \frac{AC + AB + BC}{2}.$$

Згідно з формулою (2): $\mathbf{AB} = (0, 3, 4)$, $\mathbf{AC} = (3, 4, 0)$ і $\mathbf{BC} = (3, 1, -4)$.

Згідно з формулою (3): $AB = |\mathbf{AB}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$,
 $AC = |\mathbf{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$ і $BC = |\mathbf{BC}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$.

$$\begin{aligned} \text{Отже:} \quad h &= \frac{2\sqrt{\frac{5+5+\sqrt{26}}{2}(\frac{5+5+\sqrt{26}}{2}-5)(\frac{5+5+\sqrt{26}}{2}-5)(\frac{5+5+\sqrt{26}}{2}-\sqrt{26})}}{5} = \\ &= \frac{2\sqrt{\frac{10+\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{10-\sqrt{26}}{2}}}{5} = \frac{2\sqrt{\frac{26}{4} \cdot \frac{100-26}{4}}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{26 \cdot 74} = \frac{\sqrt{481}}{5}. \end{aligned}$$

2 спосіб. Замість формули Герона для відшукування площі трикутника використаємо: згідно з означенням векторного добутку $|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$ дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах \mathbf{AB} і \mathbf{AC} . Трикутник ABC – це трикутник, побудований на векторах \mathbf{AB} і \mathbf{AC} , і його площа, як відомо з середньої школи, дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах \mathbf{AB} і \mathbf{AC} .

Отже, $S = \frac{1}{2}|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$. Згідно з формулою (13):

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-16) - \mathbf{j}(0-12) + \mathbf{k}(0-9) = -16\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 9\mathbf{k}. \quad \text{Згідно з формулою (3):}$$

$|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{16^2 + 12^2 + 9^2} = \sqrt{481}$. Отже $S = \sqrt{481}/2$. З іншої сторони, згідно з формулою $S = ha/2$ отримаємо: $h = 2S/a = 2S/AC = \sqrt{481}/5$.

Приклад 21. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$. Вектор \mathbf{x} перпендикулярний до векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} , утворює з віссю Oy тупий кут. Знаючи, що $|\mathbf{x}| = l$, знайти його координати. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, l$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 4, a_y = -2, a_z = -3, b_x = 0, b_y = 1, b_z = 3, l = 8$. Отже: $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, тобто вектори мають такі координати: $\mathbf{a} = (4, -2, -3)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 3)$, а $|\mathbf{x}| = 8$. Згідно з означенням векторного добутку і добутку вектора на скаляр, вектори $\pm \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, тобто вектор $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ і вектор $-\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (λ – невне дійсне додатне число, тобто додатний скаляр), перпендикулярні до векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} .

Згідно з формулою (13): $\pm \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \pm \lambda \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \pm \lambda \cdot (\mathbf{i} \cdot (-6+3) - \mathbf{j} \cdot (12-0) + \mathbf{k} \cdot (4-0)) = \pm \lambda \cdot (-3\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \pm(-3\lambda\mathbf{i} - 12\lambda\mathbf{j} + 4\lambda\mathbf{k})$.

У зв'язку з тим, що вектор \mathbf{x} утворює з віссю Oy тупий кут, то $\mathbf{x} \cdot \mathbf{j} < 0$. Оскільки $\pm(-3\lambda\mathbf{i} - 12\lambda\mathbf{j} + 4\lambda\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = \pm(-12\lambda) \leq 0$. Отже, $\mathbf{x} = -3\lambda\mathbf{i} - 12\lambda\mathbf{j} + 4\lambda\mathbf{k}$. Згідно з формулою (3): $|\mathbf{x}| = \sqrt{(-3\lambda)^2 + (-12\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = \lambda\sqrt{9+144+16} = \lambda\sqrt{169} = 13\lambda$, а за умовою $|\mathbf{x}| = 8$, то $13\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{13}$. Отже, $\mathbf{x} = -3 \cdot \frac{8}{13}\mathbf{i} - 12 \cdot \frac{8}{13}\mathbf{j} + 4 \cdot \frac{8}{13}\mathbf{k} = -\frac{24}{13}\mathbf{i} - \frac{96}{13}\mathbf{j} + \frac{32}{13}\mathbf{k} = -1\frac{11}{13}\mathbf{i} - 7\frac{5}{13}\mathbf{j} + 2\frac{6}{13}\mathbf{k}$. Відповідь: $\left(-1\frac{11}{13}, -7\frac{5}{13}, 2\frac{6}{13}\right)$.

Приклад 2.2. Вектор \mathbf{b} перпендикулярний до осі Ox і до вектора $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, утворює з віссю Oz гострий кут. Знаючи, що $|\mathbf{b}| = l$, знайти його координати. Числа a_x, a_y, a_z, l подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 3, a_y = 4, a_z = -1, l = 5$. Отже: $\mathbf{a} = (3, 4, -1)$, а $|\mathbf{b}| = 5$. Згідно з тими самими міркуваннями, що в попередній задачі, матимемо:

$\mathbf{b}_{1,2} = \pm \lambda(\mathbf{i} \times \mathbf{a}) = \pm \lambda \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \pm \lambda \cdot (\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \pm(\lambda\mathbf{j} + 4\lambda\mathbf{k})$. У зв'язку з тим, що вектор \mathbf{b}

утворює з віссю Oz гострий кут, то $\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} > 0$. Беручи до уваги, що: $(0, \pm \lambda\mathbf{j}, \pm 4\lambda\mathbf{k}) \cdot (0, 0, 1) = \pm 4\lambda \geq 0$. Отже, $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{j} + 4\lambda\mathbf{k}$. Згідно з формулою (3):

$|\mathbf{b}| = \sqrt{0^2 + \lambda^2 + (4\lambda)^2} = \lambda\sqrt{17}$, а за умовою $|\mathbf{b}| = 5$, то $\sqrt{17}\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{\sqrt{17}}$. Отже

$\mathbf{b} = \frac{5}{\sqrt{17}}\mathbf{j} + \frac{20}{\sqrt{17}}\mathbf{k}$. Відповідь: $\left(0, \frac{5}{\sqrt{17}}, \frac{20}{\sqrt{17}}\right)$.

5. Змішаний добуток векторів

Змішаним (мішаним) добутком упорядкованої трійки векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора \mathbf{a} на векторний добуток векторів \mathbf{b} і \mathbf{c} , тобто $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Геометричний зміст змішаного добутку полягає в тому, що якщо вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ не лежать в одній площині, то на них можна побудувати паралелепіпед, об'єм якого і дорівнює модулю змішаного добутку. Для доведення цього знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Площа його основи дорівнює модулю векторного добутку $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \varphi$ векторів \mathbf{b} і \mathbf{c} . Висота дорівнює $|\mathbf{a}| \cos \alpha$. Отже, остаточно маємо:

$V = \|\mathbf{a}\| \cos \alpha \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| \sin \varphi = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \cos \alpha = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$. Тобто:

$$|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = V_{\text{паралелепіпеда}} \quad (14)$$

Отже, якщо $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, то об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} дорівнює нулю, а це буде тоді і тільки тоді, коли вектори \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} лежать в одній площині (компланарні одній площині). Отже:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0 \quad (15)$$

– необхідна і достатня умова компланарності або лінійної залежності трьох векторів \mathbf{a} , \mathbf{b} і \mathbf{c} .

Через проєкції (компоненти, координати) векторів, змішаний добуток, урахувавши формулу-визначник (14) знаходження векторного добутку для векторів \mathbf{b} і \mathbf{c} , запишеться:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})((b_y c_z - b_z c_y) \mathbf{i} + (b_z c_x - b_x c_z) \mathbf{j} + (b_x c_y - b_y c_x) \mathbf{k}).$$

А використовуючи скалярний добуток ортів і подавши вираз у вигляді визначника, отримуємо:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (16)$$

– змішаний добуток трьох векторів \mathbf{a} , \mathbf{b} і \mathbf{c} через їх компоненти.

Якщо $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) > 0$, то упорядкована трійка векторів \mathbf{a} , \mathbf{b} і \mathbf{c} права (рис. 21а), а якщо $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) < 0$, то ліва (рис. 21б).

Властивості змішаного добутку:

1°. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$.

2°. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$.

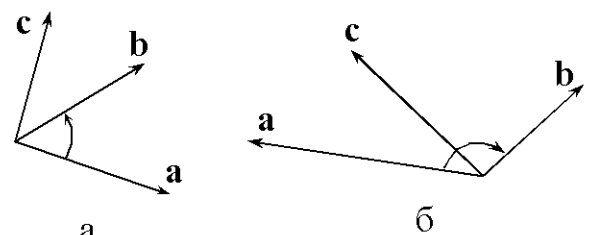


Рис. 21

Приклад 23. Дано вектори:

$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$. Обчислити змішаний добуток $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ заданих векторів. Визначити, якою трійкою (правою чи лівою) є трійка \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ в Т.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = -2$, $a_y = 3$, $a_z = -1$, $b_x = 2$, $b_y = -5$, $b_z = 7$, $c_x = 1$, $c_y = -1$, $c_z = 0$. Отже: $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Згідно (16), отримуємо:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 > 0, \text{ отже, упорядкована трійка – права.}$$

Приклад 24. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: \mathbf{a} , \mathbf{b} і \mathbf{c} . Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = -6$, $a_z = 2$, $b_x = 2$, $b_y = 1$, $b_z = -3$, $c_x = 1$, $c_y = 2$, $c_z = 1$. Отже: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю змішаного добутку векторів (14) на яких він побудований як на ребрах (рис.20). Використовуючи формулу змішаного добутку (16), отримуємо:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1+6) - (-6) \cdot (2+3) + 2 \cdot (4-1) = 14 + 30 + 6 = 50 \text{ (од}^3\text{)}. \text{ В-дь: } 50 \text{ од}^3.$$

Приклад 25. Який об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\frac{1}{2}\mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - 2\mathbf{c} - \mathbf{a}$, якщо $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2, a_y = -6, a_z = 2, b_x = 2, b_y = 1, b_z = -3, c_x = 1, c_y = 2, c_z = 1$. Отже: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Звідси $\frac{1}{2}\mathbf{a} = \left(\frac{2}{2}, \frac{-6}{2}, \frac{2}{2}\right) = (1, -3, 1)$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2+2, -6+1, 2+(-3)) = (4, -5, -1)$, $\mathbf{b} - 2\mathbf{c} - \mathbf{a} = (2-2\cdot 1-2, 1-2\cdot 2-(-6), -3-2\cdot 1-2) = (-2, 3, -7)$. Тепер за аналогією до попереднього прикладу. $V_{\text{паралелепіпеда}} = \left| \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 3 & -7 \end{vmatrix} \right| = |-50| = 50 \text{ (од}^3\text{)}$. Відповідь: 50 од³.

Приклад 26. Який об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ і $D(x_4, y_4, z_4)$. Числа $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 2, y_1 = 3, z_1 = 2, x_2 = 1, y_2 = 1, z_2 = 1, x_3 = 3, y_3 = 0, z_3 = 2, x_4 = 1, y_4 = 3, z_4 = 5$. Отже $A(2, 3, 2), B(1, 1, 1), C(3, 0, 2)$ і $D(1, 3, 5)$.

Зі шкільного курсу геометрії, відомо, що об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює $1/6$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах \mathbf{AB}, \mathbf{AC} і \mathbf{AD} . Знайшовши з допомогою формули (2): $\mathbf{AB} = (-1, -2, -1), \mathbf{AC} = (1, -3, 0), \mathbf{AD} = (-1, 0, 3)$, отримаємо:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \cdot |(\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AC} \times \mathbf{AD}))| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = 3 \text{ (од}^3\text{)}$$
. Відповідь: 3 од³.

Приклад 27. Дано вектори: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$. З'ясувати лінійну залежність векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (чи вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ є компланарні). Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ подані в таблиці 1.

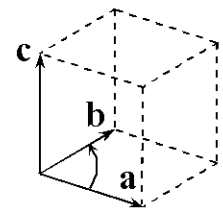
Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 3, a_y = 2, a_z = 2, b_x = 1, b_y = -1, b_z = 3, c_x = 1, c_y = 9, c_z = -11$. Отже: $\mathbf{a} = (3, 2, 2), \mathbf{b} = (1, -1, 3), \mathbf{c} = (1, 9, -11)$. Використовуючи необхідну і достатню умову компланарності або лінійної залежності трьох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, тобто умову (15), отримаємо:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-16) - 2 \cdot (-14) + 2 \cdot 10 = -48 + 28 + 20 = 0, \text{ отже, вектори } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$$

лінійно залежні (компланарні). В-дь: вектори лінійно залежні (компланарні).

Приклад 28. Обчислити мішаний добуток взаємно перпендикулярних векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, якщо вони утворюють праву трійку і $|\mathbf{a}| = a, |\mathbf{b}| = b, |\mathbf{c}| = c$. Числа a, b, c подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 4, b = 2, c = 3$. Отже: $|\mathbf{a}| = 4, |\mathbf{b}| = 2, |\mathbf{c}| = 3$.



Модуль змішаного добутку векторів згідно з формулою (14) дорівнює об'єму паралелепіпеда, на яких він побудований, як на ребрах. Оскільки вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ взаємно перпендикулярні і утворюють праву трійку (рис. Справа), то такий паралелепіпед є прямокутним, а його об'єм $V = a \cdot b \cdot c$, тобто $V = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$. Отже $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = V = 24$. Тобто $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \pm 24$. Так, як вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ утворюють праву трійку, тобто повинна виконуватися умова $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) > 0$, то $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 24$.

Приклад 29. Які координати четвертої вершини піраміди $ABCD$, якщо ця вершина лежить на осі Oy , а три перші вершини лежать в точках: $A(x_1, y_1, z_1)$,

$B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ і об'єм піраміди $V = v$. Числа $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, v$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1=2, y_1=1, z_1=-1, x_2=3, y_2=0, z_2=1, x_3=2, y_3=-1, z_3=3, v=5$. Отже $A(2, 1, -1), B(3, 0, 1), C(2, -1, 3)$ і $V=5$. Вершина D лежить за умовою на осі Oy , отже, нехай вона має координати $D(0, y, 0)$.

Зі шкільного курсу геометрії відомо, що об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює $1/6$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах \mathbf{AB}, \mathbf{AC} і \mathbf{AD} . Знайшовши з допомогою формули (2): $\mathbf{AB}=(1, -1, 2)$, $\mathbf{AC}=(0, -2, 4)$, $\mathbf{AD}=(-2, y-1, 1)$ і застосувавши формулу (14), отримаємо: $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{паралелепіпеда}} = \frac{1}{6} \cdot |(\mathbf{AD} \cdot (\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}))|$. Звідси

$\mathbf{AD} \cdot (\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) = \pm 6 \cdot V_{\text{піраміди}} = \pm 6 \cdot 5 = \pm 30$. Зрозуміло, що \pm відповідає відповідно правій або лівій трійці векторів $\mathbf{AD}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}$. З другої сторони, застосувавши формулу (16),

отримаємо: $\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AC} \times \mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & y-1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4y+2$. Отже, $-4y+2 = \pm 30 \Rightarrow y_1 = -7, y_2 = 8$.

Отже $D(0, -7, 0)$, або $D(0, 8, 0)$. Відповідь: $D(0, -7, 0)$, або $D(0, 8, 0)$.

Приклад 30. Числа x, y такі, що $Ax^2 + By^2 = C$. Використовуючи скалярний добуток векторів, знайти найбільше та найменше значення виразу $A_1x + B_1y$. Числа A, B, C, A_1, B_1 подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $A=4, B=9, C=7, A_1=5, B_1=6$. Отже $4x^2 + 9y^2 = 7, 5x+6y$.

Розглянемо вектор $\mathbf{a} = (2x, 3y)$, довжина якого згідно з умовою задачі дорівнює $|\mathbf{a}| = \sqrt{4x^2 + 9y^2} = \sqrt{7}$. Розглянемо вектор $\mathbf{b} = (\frac{5}{2}, 2)$, скалярний добуток якого з вектором \mathbf{a} , згідно (9) дорівнює $5x+6y$. Згідно визначення скалярного добутку,

формули (7) отримаємо: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, тобто $|5x+6y| \leq \sqrt{4x^2 + 9y^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4} =$

$= \sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{25+16}{4}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 41}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{287}$. Отже, згідно з означенням модуля отримаємо

$5x+6y \leq \frac{1}{2} \sqrt{287}$ і $5x+6y \geq -\frac{1}{2} \sqrt{287}$.

Ще по-іншому задачу можна розв'язати так. Скалярний добуток векторів набуває найбільшого і найменшого значень, коли вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} колінеарні. Тобто, врахувавши умову (5а) і те, що за умовою задачі $4x^2 + 9y^2 = 7$, отримаємо:

$\begin{cases} \frac{2x}{5/2} = \frac{3y}{2} \\ 4x^2 + 9y^2 = 7 \end{cases}$. Розв'язавши систему, отримаємо: $\min(5x+6y) = -\frac{1}{2} \sqrt{287}$ і

$\max(5x+6y) = \frac{1}{2} \sqrt{287}$.

Відповідь: $\min(5x+6y) = -\frac{1}{2} \sqrt{287}$ і $\max(5x+6y) = \frac{1}{2} \sqrt{287}$.

Таблица 1

№	1В	2В	3В	4В	5В	6В	7В	8В	9В
1.	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	2;-1;1;2;4; -5;3;-7;4	4;7;0;1; 5;1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3	1;-2;4;-3; 7;9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	6;-1;1;0;2; -4;1;-1;8	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7
2.	2;4;1;3;4; -1;7;1;-1	1;-2;4;-3; 7;9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	6;-1;1;0;2; -4;1;-1;8	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7	2;-1;1;2;4; -5;3;-7;4	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3
3.	2;1;2;4;-1	-3;0;5;-4;3	6;-1;1;0;2	3;4;-7;1;9	2;1;1;2;4	3;-4;2;3;5	2;1;3;4;6;5	1;2;4;-3;7	4;5;4;6;8;2
4.	2;1;-1;2	3;4;1;2	4;-3;2;1	1;2;3;-4	2;3;4;5	4;5;6;-1	1;0;2;1	3;4;5;-2	1;0;-7;1
5.	1;3;-1; -2;-3;1	6;-1;1; 0;2;5	5;-2;1; 0;1;4	2;1;1; 2;4;2	3;-4;2; 3;5;4	2;1;3; 4;6;6	1;2;4; -3;7;1	4;5;4; 6;8;0	3;4;-7; 1;9;-1
6.	3;5;30	3;-4;60	6;-1;45	3;4;90	5;-2;60	1;-2;45	2;1;-60	-2;1;30	4;5;-45
7.	2;1;-1;3	1;0;2;1	3;4;5;-2	1;-2;3;4	3;4;1;2	4;-3;2;1	1;2;3;-4	2;3;4;5	4;5;6;-1
8.	2;1;-3;2;-1; -1;2;1;-1;2	-1;3;7;7;4; 0;1;-4;7;7	2;1;3;4;6; 5;2;-1;1;3	2;-1;1;2;4; 5;3;-1;1;2	4;7;0;1;5; 1;6;1;1;2	4;5;-4;6;8; 9;4;-3;-4;6	1;-2;4;3;7; 9;8;-1;4;3	3;-4;2;3;5; -9;5;7;-4;2	3;4;-7;1;9; 7;1;8;-7;1
9.	4;3;1;1; 1;1;14	2;1;3;7; 4;-1;233	-2;1;3;4; 6;-5;958	7;4;-1;2; 1;3;699	4;6;-5;-2; 1;3;479	1;1;1;4; 3;1;56	1;2;3;4; 7;-1;233	1;-2;3;6; 4;-5;958	4;7;-1;1; 2;3;699
10.	2;3;-5;1; 7;4;-5;5	4;7;0;1; 5;1;6;1	4;5;-4;6; 8;9;4;-3	1;-2;4;3; 7;9;8;-1	3;-4;2;3; 5;-9;5;7	3;4;-7;1; 9;7;1;8	6;-1;1;0; 2;-4;1;-1	-2;1;3;4; 6;-5;2;-1	2;-1;1;2; 4;-5;3;-1
11.	-2;3;-4; -1;7;-4	-2;1;3; 4;6;-5	2;-1;1; 2;4;-5	6;-1;1; 0;2;-4	5;-2;1; 0;1;5	4;7;0; 1;5;1	3;4;-7; 1;9;7	1;-2;4; -3;7;9	3;-4;2; 3;5;-9
12.	$\sqrt{2}$;-3; -3;45;60	$\sqrt{2}$;-4; 1;45;60	$\sqrt{2}$;5; 2;45;-60	$\sqrt{2}$;1; 1;45;60	$\sqrt{2}$;4; 5;45;90	$\sqrt{2}$;7; 1;45;-60	$\sqrt{2}$;6; 1;-45;90	$\sqrt{2}$;1; 1;45;270	$\sqrt{2}$;3; 3;-45;0
13.	2;-3;4	3;5;3	3;-4;6	6;-1;4	3;4;9	5;-2;6	1;-2;4	2;1;-6	-2;1;3
14.	1;4;-6; -2;-3;8	4;7;0; 1;5;1	3;4;-7; 1;9;7	6;-1;1; 0;2;-4	-2;1;3; 4;6;-5	5;-2;1; 0;1;5	1;-2;4; -3;7;9	4;5;-4; 6;8;-2	2;-1;1; 2;4;-5
15.	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7	2;-1;1;2;4; -5;3;-7;4	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3	1;-2;4;-3;7; 9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11
16.	2;10;12	6;-1;4	3;4;9	5;-2;6	1;-2;4	2;1;-6	-2;1;3	3;5;3	3;-4;6
17.	4;12;22	2;10;12	6;-1;4	3;4;9	5;-2;6	1;-2;4	2;1;-6	-2;1;3	3;5;3
18.	14;1;4;-6; -2;-3;8	20;11;3;4; -6;-5;5	50;-2;11;0; -1;5;7	100;-2;4; -3;7;9;2	40;5;-4;6; 8;-2;7	20;-10;1; 2;4;-5;0	40;7;10;1; 5;-10;1	30;4;-7; 14;9;7;3	60;-10;1; 10;2;-4;4
19.	4;4;2; 4;5;3	-2;1;3; 4;6;-5	2;-1;1; 2;4;-5	4;7;0; 1;5;1	4;5;-4; 6;8;9	1;-2;4; -3;7;9	3;-4;2; 3;5;-9	3;4;-7; 1;9;7	6;-1;1; 0;2;-4
20.	4;4;2;4;7; 6;7;8;2	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3	1;-2;4;-3;7; 9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7
21.	4;-2;-3; 0;1;3;8	4;5;-4; 6;8;-2;7	2;-10;1; 2;4;-5;0	4;7;1; 1;5;-1;1	3;4;-7; 14;9;7;3	6;-1;1; 10;2;-4;4	4;1;4;-6; -2;-3;8	2;1;3;4; -6;-5;5	5;-2;1;0; -1;5;7
22.	3;4;-1;5	3;2;-1;1	4;3;-2;1	-3;4;1;2	2;3;-1;1	5;-3;2;1	3;5;-1;2	5;4;2;1	4;-2;2;1
23.	-2;3;-1;2;- 5;7;1;-1;0	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6; 8;9;4;-2;3	1;-2;4;-3;7; 9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7
24.	2;-6;2;2;1; 3;1;2;1	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3	1;-2;4;-3;7; 9;8;-1;0
25.	2;-6;2;2;1; -3;1;2;1	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3	1;-2;4;-3;7; 9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0
26.	2;3;2;1; 1;1;3;0; 2;1;3;5	2;1;1;2; 4;5;7;-2; 1;1;1;-1	8;3;1;5; 2;1;-1;4; 3;2;3;-1	-2;1;3;7; 4;6;-5;4; 2;-1;7;2	4;7;0;4; 1;5;1;0; 6;1;9;-1	4;5;-4;1; 6;8;9;2; 4;-2;3;7	1;-2;4;4; 3;7;9;5; 8;-1;0;5	3;-4;2;1; 3;5;-9;2; 5;-7;0;1	3;4;-7;0; 1;9;7;4; 1;8;11;1
27.	3;2;2;1;-1; 3;1;9;-11	2;-6;2;2;1; -3;1;2;1	2;-2;6;1;9; -11;9;6;6;	1;-2;4;-3;7; 9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	8;-4;6;6;8; 9;4;-2;3
28.	4;2;3	3;8;2	4;1;1	5;1;5	3;1;10	2;6;4	4;8;5	4;6;2	5;3;1
29.	2;1;-1;3;0; 1;2;-1;3;5	-2;1;3;7;4; 6;-5;4;2;8	4;7;0;4;1; 5;1;0;6;10	4;5;-4;1;6; 8;9;2;4;20	1;-2;4;4;3; 7;9;5;8;11	3;-4;2;1;3; 5;-9;2;5;7	3;4;-7;0;1; 9;7;4;1;8	2;1;1;2;4; 5;7;-2;1;9	8;3;1;5;2; 1;-1;4;3;9
30.	4;9;7;5;6	-2;1;3;4;6	2;-1;1;2;4	4;7;0;1;5	4;5;-4;6;8	1;-2;4;-3;7	3;-4;2;3;5	3;4;-7;1;9	6;-1;1;3;2

Комплекс багатоваріантних практичних завдань, так званих домашніх контрольних робіт (д.к.р. № 4 (елементи векторної алгебри)), які пропонуються студентам для самостійного розв'язування задля поточного контролю.

Завдання нульового варіанту та їх розв'язки

0 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(1; 2; -3)$; $B(4; -6; 8)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2; 1; 1)$; $\mathbf{b} = (2; 4; -1)$; $\mathbf{c} = (1; 1; -1)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-25; 12; -13)$ і $\mathbf{b} = (-11; -12; 20)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-175; 2; -5)$ і $\mathbf{b} = (3; 10; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-175; 2; 170)$ і $\mathbf{b} = (-350; 4; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-35; 2; 3)$ і точка $A(-1; -2; 30)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дроби координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано вектори $\mathbf{a} = (-35; 2; 3)$ і $\mathbf{b} = (-1; -2; 30)$. Знайти їх векторний добуток.
12. Дано точки: $A(1; 2; -3)$, $B(4; -6; 8)$, $C(-5; -6; -8)$, $D(7; -8; 9)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

Розв'язування завдань варіанту 0.

1. Дано точки: $A(1; 2; -3)$; $B(4; -6; 8)$. Знайти координати вектора **AB**.

Розв'язування.

Координати вектора **AB** це різниці відповідних координат його кінця та початку, тобто $\mathbf{AB} = (a_x, a_y, a_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Отже, $\mathbf{AB} = (4 - 1; -6 - 2; 8 - (-3)) = (3; -8; 11)$.

Відповідь. $\mathbf{AB} = (3; -8; 11)$.

2. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$. Знайти довжину вектора **AB**.

Розв'язування.

I спосіб.

Оскільки довжина вектора це $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, то спочатку знайдемо координати вектора **AB**. $\mathbf{AB} = (a_x, a_y, a_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Отже, $\mathbf{AB} = (-1 - (-1); 5 - 2; 7 - 3) = (0; 3; 4)$.

Тоді, $|\mathbf{AB}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{0 + 9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ (од.).

II спосіб. Оскільки довжина вектора це віддаль від його початку до його кінця, то

$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (5 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{0 + 9 + 16} = 5$ (од.).

Відповідь. $|\mathbf{AB}| = 5$ (од.).

3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2; 1; 1)$; $\mathbf{b} = (2; 4; -1)$; $\mathbf{c} = (1; 1; -1)$. Знайти вектор $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.

Розв'язування.

$$\text{Отже, } \mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c} = \left(\underbrace{3 \cdot a_x + 2 \cdot b_x - 7 \cdot c_x}_{d_x}, \underbrace{3 \cdot a_y + 2 \cdot b_y - 7 \cdot c_y}_{d_y}, \underbrace{3 \cdot a_z + 2 \cdot b_z - 7 \cdot c_z}_{d_z} \right) =$$

$$= (3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 7 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 7 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 7 \cdot (-1)) = (3, 4, 8).$$

Відповідь: $\mathbf{d} = (3, 4, 8)$.

4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-25; 12; -13)$ і $\mathbf{b} = (-11; -12; 20)$. Знайти їх скалярний добуток.

Розв'язування.

Формула скалярного добутку векторів через координати векторів

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$\text{Отже, } \mathbf{ab} = (-25) \cdot (-11) + 12 \cdot (-12) + (-13) \cdot 20 = 275 + (-144) - 260 = -129.$$

Відповідь. $\mathbf{ab} = -129$.

5. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .

Розв'язування.

Формула для кута між векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} через їх координати:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отож, спочатку знайдемо координати векторів \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .

$$\mathbf{AB} = (-1 - 1; 5 - 2; 7 - 3) = (0; 3; 4).$$

$$\mathbf{CD} = (3 - (-2); 3 - 3; 16 - 4) = (5; 0; 12).$$

Підставимо у формулу для кута:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD}}{|\mathbf{AB}| |\mathbf{CD}|} = \frac{0 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 12}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = \frac{48}{5 \cdot 13} = \frac{48}{65}.$$

Відповідь. $\cos \alpha = 48/65$.

6. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .

Розв'язування.

Оскільки $\text{пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$. Отож, спочатку знайдемо координати векторів \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .

$$\mathbf{AB} = (46 - 35; 36 - 36; 97 - 37) = (11; 0; 60).$$

$$\mathbf{CD} = (-1 - (-1); 5 - 2; 7 - 3) = (0; 3; 4).$$

$$\text{пр}_{\mathbf{CD}} \mathbf{AB} = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD}}{|\mathbf{CD}|} = \frac{11 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 60 \cdot 4}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{240}{\sqrt{25}} = \frac{240}{5} = 48.$$

Відповідь. $\text{пр}_{\mathbf{CD}} \mathbf{AB} = 48$.

7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-175 ; 2 ; -5)$ і $\mathbf{b} = (3 ; 10 ; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.

Розв'язування.

Необхідною та достатньою умовою перпендикулярності векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} є співвідношення: $\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Отже, $\mathbf{ab} = (-175) \cdot 3 + 2 \cdot 10 + (-5) \cdot a = 0$. Отже,

$$-525 + 20 = 5a \Rightarrow a = \frac{-505}{5} = -101.$$

Відповідь. -101 .

8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-175 ; 2 ; 170)$ і $\mathbf{b} = (-350 ; 4 ; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.

Розв'язування.

Необхідною та достатньою умовою колінеарності векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} є співвідношення:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \text{ Отже, } \frac{-175}{-350} = \frac{2}{4} = \frac{170}{a}. \text{ Звідси } \frac{170}{a} = \frac{1}{2}. \text{ А отже, } a = 170 \cdot 2 = 340.$$

Відповідь. 340.

9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-35 ; 2 ; 3)$ і точка $A(-1 ; -2 ; 30)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .

Розв'язування.

Оскільки $\mathbf{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ і $\mathbf{AB} = (-35 ; 2 ; 3)$, $A(-1 ; -2 ; 30)$, то

$$\mathbf{AB} = (x_2 - (-1); y_2 - (-2); z_2 - 30) = (-35; 2; 3).$$

Звідси $x_2 - (-1) = -35$, $y_2 - (-2) = 2$, $z_2 - 30 = 3$.

А отже, $x_2 = -35 - 1 = -36$, $y_2 = 2 - 2 = 0$, $z_2 = 3 + 30 = 33$.

Тобто $B(-36; 0; 33)$.

Перевірка. $A(-1 ; -2 ; 30)$, $B(-36; 0; 33)$, то

$$\mathbf{AB} = (-36 - (-1); 0 - (-2); 33 - 30) = (-35; 2; 3).$$

Відповідь. $B(-36; 0; 33)$.

10. Дано точки: $A(-1 ; 2 ; 3)$; $B(-1 ; 5 ; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .

Розв'язування.

Колінеарні вектори – це вектори в яких пропорційні відповідні координати.

Одиничний вектор – це вектор довжиною в одиницю.

Поділивши координати вектора \mathbf{AB} на довжину вектора \mathbf{AB} , отримаємо одиничний вектор колінеарний вектору \mathbf{AB} .

Проробимо це. $\mathbf{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-1 - (-1); 5 - 2; 7 - 3) = (0; 3; 4)$.

Знайдемо довжину вектора $|\mathbf{AB}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{0 + 9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ (од.).

Отже, шуканий одиничний вектор дорівнює: $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|} = \left(0; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Відповідь. $(0; 3/5; 4/5)$.

11. Дано вектори $\mathbf{a} = (-35; 2; 3)$ і $\mathbf{b} = (-1; -2; 30)$. Знайти їх векторний добуток.

Розв'язування.

Формула векторного добутку векторів через їх координати:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -35 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 30 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 30 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} -35 & 3 \\ -1 & 30 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} -35 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \cdot (2 \cdot 30 - 3 \cdot (-2)) - \mathbf{j} \cdot (-35 \cdot 30 - 3 \cdot (-1)) + \mathbf{k} \cdot (-35 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1)) =$$

$$= \mathbf{i} \cdot 66 - \mathbf{j} \cdot (-1047) + \mathbf{k} \cdot 72 = 66\mathbf{i} + 1047\mathbf{j} + 72\mathbf{k}. \text{ Отже, } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (66; 1047; 72).$$

Відповідь. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (66; 1047; 72)$.

12. Дано точки: $A(1; 2; -3)$, $B(4; -6; 8)$, $C(-5; -6; -8)$, $D(7; -8; 9)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

Розв'язування.

Об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю змішаного добутку. Змішаний добуток

трьох векторів \mathbf{a} , \mathbf{b} і \mathbf{c} через їх координати дорівнює: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Знайдемо

координати

векторів.

$$\mathbf{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (4 - 1; -6 - 2; 8 - (-3)) = (3; -8; 11),$$

$$\mathbf{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) = (-5 - 1; -6 - 2; -8 - (-3)) = (-6; -8; -5),$$

$$\mathbf{AD} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1) = (7 - 1; -8 - 2; 9 - (-3)) = (6; -10; 12).$$

$$\text{Обчислимо змішаний добуток: } \mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AC} \times \mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -8 & 11 \\ -6 & -8 & -5 \\ 6 & -10 & 12 \end{vmatrix} = 414.$$

$$\text{Отже, } V_{\text{паралелепіпеда}} = |\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AC} \times \mathbf{AD})| = |414| = 414.$$

Відповідь. 414.

Будуємо таблицю відповідей.

Варіант 0																						
№ завдання	1			2			3			4												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12										
Відповідь	3	-8	11	5	3	4	8	-129	48/65	48	-101	340	-36	0	33	0	3/5	4/5	66	1047	72	414

Завдання (100 варіантів)

1 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(5; -7; 9)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (5; -7; 9)$; $\mathbf{b} = (-4; -5; -7)$; $\mathbf{c} = (8; 9; 10)$. Знайти $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (24; -13; -14)$ і $\mathbf{b} = (-12; -13; 19)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(3; 4; 5)$; $D(10; 28; 5)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(3; 4; 5)$; $D(10; 28; 5)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (204; -3; -6)$ і $\mathbf{b} = (4; 18; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (204; -3; 169)$ і $\mathbf{b} = (-612; 9; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(34; -3; 4)$ і точка $A(-2; -3; 29)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (34; -3; 4)$ і $\mathbf{b} = (-2; -3; 29)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$, $B(5; -7; 9)$, $C(-4; -5; -7)$, $D(8; 9; 10)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

2 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(3; 4; 5)$; $B(6; -8; -10)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(3; 4; 5)$; $B(10; 28; 5)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (6; -8; -10)$; $\mathbf{b} = (-3; -4; -6)$; $\mathbf{c} = (9; -10; 11)$. Знайти $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-23; 14; 15)$ і $\mathbf{b} = (-13; -14; 18)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(-4; 5; -6)$; $D(-4; 14; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-231; 4; -7)$ і $\mathbf{b} = (-5; 28; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-231; 4; 168)$ і $\mathbf{b} = (-924; 16; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-33; 4; -5)$ і точка $A(-3; -4; 28)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-33; 4; -5)$ і $\mathbf{b} = (-3; -4; 28)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(3; 4; 5)$, $B(6; -8; -10)$, $C(-3; -4; -6)$, $D(9; -10; 11)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

3 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-4; 5; -6)$; $B(7; -9; 11)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-4; 5; -6)$; $B(-4; 14; 34)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (7; -9; 11)$; $\mathbf{b} = (-2; -3; -5)$; $\mathbf{c} = (10; 11; 12)$. Знайти $\mathbf{d} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 10\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (22; -15; 16)$ і $\mathbf{b} = (-14; -15; 17)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(3; 4; 5)$; $D(10; 28; 5)$.
Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 44; 4)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$.
Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (256; -5; -8)$ і $\mathbf{b} = (-6; 40; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (256; -5; 167)$ і $\mathbf{b} = (-1280; 25; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(32; -5; -6)$ і точка $A(-4; -5; 27)$.
Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (32; -5; -6)$ і $\mathbf{b} = (-4; -5; 27)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-4; 5; -6)$, $B(7; -9; 11)$, $C(-2; -3; -5)$, $D(10; 11; 12)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

4 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(5; 6; 7)$; $B(8; -10; 12)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(5; 6; 7)$; $B(16; 6; 67)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (8; -10; 12)$; $\mathbf{b} = (-1; -2; -4)$; $\mathbf{c} = (11; -12; 13)$. Знайти $\mathbf{d} = 7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-21; 16; -17)$ і $\mathbf{b} = (-15; -16; 16)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(-4; 5; -6)$; $D(-4; 14; 34)$.
Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$.
Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-279; 6; -9)$ і $\mathbf{b} = (7; 54; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-279; 6; 166)$ і $\mathbf{b} = (-1674; 36; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-31; 6; 7)$ і точка $A(-5; -6; 26)$.
Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-31; 6; 7)$ і $\mathbf{b} = (-5; -6; 26)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(5; 6; 7)$, $B(8; -10; 12)$, $C(-1; -2; -4)$, $D(11; -12; 13)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

5 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-6; 7; 8)$; $B(9; -11; -13)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-6; 7; 8)$; $B(7; 91; 8)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (9; -11; -13)$; $\mathbf{b} = (0; -1; -3)$; $\mathbf{c} = (12; 13; 14)$. Знайти $\mathbf{d} = 8\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 12\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (20; -17; -18)$ і $\mathbf{b} = (-16; -17; 15)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 44; 4)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(-4; 5; -6)$; $D(-4; 14; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (300; -7; -10)$ і $\mathbf{b} = (8; 70; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (300; -7; 165)$ і $\mathbf{b} = (-2100; 49; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (30; -7; 8)$ і точка $A(-6; -7; 25)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 44; 4)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (30; -7; 8)$ і $\mathbf{b} = (-6; -7; 25)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-6; 7; 8)$, $B(9; -11; -13)$, $C(0; -1; -3)$, $D(12; 13; 14)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

6 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(7; 8; -9)$; $B(10; -12; 14)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(7; 8; -9)$; $B(7; 23; 103)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (10; -12; 14)$; $\mathbf{b} = (1; 0; -2)$; $\mathbf{c} = (13; -14; 15)$. Знайти $\mathbf{d} = 9\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 13\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-19; 18; 19)$ і $\mathbf{b} = (-17; -18; 14)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(5; 6; 7)$; $D(16; 6; 67)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-319; 8; -11)$ і $\mathbf{b} = (-9; 88; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-319; 8; 164)$ і $\mathbf{b} = (-2552; 64; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-29; 8; -9)$ і точка $A(-7; -8; 24)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-29; 8; -9)$ і $\mathbf{b} = (-7; -8; 24)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(7; 8; -9)$, $B(10; -12; 14)$, $C(1; 0; -2)$, $D(13; -14; 15)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

7 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-8; 9; 10)$; $B(11; -13; 15)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-8; 9; 10)$; $B(9; 9; 154)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (11; -13; 15)$; $\mathbf{b} = (2; 1; -1)$; $\mathbf{c} = (14; 15; 16)$. Знайти $\mathbf{d} = 10\mathbf{a} + 9\mathbf{b} - 14\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (18; -19; 20)$ і $\mathbf{b} = (-18; -19; 13)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(-4; 5; -6)$; $D(-4; 14; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$; $C(17; 18; 19)$; $D(28; 18; 79)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (336; -9; -12)$ і $\mathbf{b} = (-10; 108; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (336; -9; 163)$ і $\mathbf{b} = (-3024; 81; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(28; -9; -10)$ і точка $A(-8; -9; 23)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (28; -9; -10)$ і $\mathbf{b} = (-8; -9; 23)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-8; 9; 10)$, $B(11; -13; 15)$, $C(2; 1; -1)$, $D(14; 15; 16)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

8 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(9; 10; 11)$; $B(12; -14; -16)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(9; 10; 11)$; $B(28; 190; 11)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (12; -14; -16)$; $\mathbf{b} = (3; 2; 0)$; $\mathbf{c} = (15; -16; 17)$. Знайти $\mathbf{d} = 11\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 15\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-17; 20; -21)$ і $\mathbf{b} = (-19; -20; 12)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(5; 6; 7)$; $D(16; 6; 67)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$; $C(-18; 19; 20)$; $D(-5; 103; 20)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-351; 10; -13)$ і $\mathbf{b} = (11; 130; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-351; 10; 162)$ і $\mathbf{b} = (-3510; 100; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-27; 10; 11)$ і точка $A(-9; -10; 22)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-27; 10; 11)$ і $\mathbf{b} = (-9; -10; 22)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(9; 10; 11)$, $B(12; -14; -16)$, $C(3; 2; 0)$, $D(15; -16; 17)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

9 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-10; 11; -12)$; $B(13; -15; 17)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-10; 11; -12)$; $B(-10; 32; 208)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (13; -15; 17)$; $\mathbf{b} = (4; 3; 1)$; $\mathbf{c} = (16; 17; 18)$. Знайти $\mathbf{d} = 12\mathbf{a} + 11\mathbf{b} - 16\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (16; -21; -22)$ і $\mathbf{b} = (-20; -21; 11)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$; $C(17; 18; 19)$; $D(28; 18; 79)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(15; 16; 17)$; $B(22; 40; 17)$; $C(19; 20; -21)$; $D(19; 35; 91)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (364; -11; -14)$ і $\mathbf{b} = (12; 154; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (364; -11; 161)$ і $\mathbf{b} = (-4004; 121; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(26; -11; 12)$ і точка $A(-10; -11; 21)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дроби координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (26; -11; 12)$ і $\mathbf{b} = (-10; -11; 21)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-10; 11; -12)$, $B(13; -15; 17)$, $C(4; 3; 1)$, $D(16; 17; 18)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

10 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(11; 12; 13)$; $B(14; -16; 18)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(11; 12; 13)$; $B(34; 12; 277)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (14; -16; 18)$; $\mathbf{b} = (5; 4; 2)$; $\mathbf{c} = (17; -18; 19)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-15; 22; 23)$ і $\mathbf{b} = (-21; -22; 10)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$; $C(-18; 19; 20)$; $D(-5; 103; 20)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$; $C(-14; 15; 16)$; $D(-9; 15; 28)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-375; 12; -15)$ і $\mathbf{b} = (-13; 180; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-375; 12; 160)$ і $\mathbf{b} = (-4500; 144; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-25; 12; -13)$ і точка $A(-11; -12; 20)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дроби координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-25; 12; -13)$ і $\mathbf{b} = (-11; -12; 20)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(11; 12; 13)$, $B(14; -16; 18)$, $C(5; 4; 2)$, $D(17; -18; 19)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

11 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-12; 13; 14)$; $B(15; -17; -19)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-12; 13; 14)$; $B(13; 325; 14)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (15; -17; -19)$; $\mathbf{b} = (6; 5; 3)$; $\mathbf{c} = (18; 19; 20)$. Знайти $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (14; -23; 24)$ і $\mathbf{b} = (-22; -23; 9)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(15; 16; 17)$; $B(22; 40; 17)$; $C(19; 20; -21)$; $D(19; 35; 91)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$; $C(15; 16; 17)$; $D(22; 40; 17)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (384; -13; -16)$ і $\mathbf{b} = (-14; 208; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (384; -13; 159)$ і $\mathbf{b} = (-4992; 169; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (24; -13; -14)$ і точка $A(-12; -13; 19)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(15; 16; 17)$; $B(22; 40; 17)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (24; -13; -14)$ і $\mathbf{b} = (-12; -13; 19)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-12; 13; 14)$, $B(15; -17; -19)$, $C(6; 5; 3)$, $D(18; 19; 20)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

12 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(16; -18; 20)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (16; -18; 20)$; $\mathbf{b} = (7; 6; 4)$; $\mathbf{c} = (19; -20; 21)$. Знайти $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-13; 24; -25)$ і $\mathbf{b} = (-23; -24; 8)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$; $C(-14; 15; 16)$; $D(-9; 15; 28)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$; $C(15; 16; 17)$; $D(22; 40; 17)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-391; 14; -17)$ і $\mathbf{b} = (15; 238; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-391; 14; 158)$ і $\mathbf{b} = (-5474; 196; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-23; 14; 15)$ і точка $A(-13; -14; 18)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-23; 14; 15)$ і $\mathbf{b} = (-13; -14; 18)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(13; 14; -15)$, $B(16; -18; 20)$, $C(7; 6; 4)$, $D(19; -20; 21)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

13 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(17; -19; 21)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (17; -19; 21)$; $\mathbf{b} = (8; 7; 5)$; $\mathbf{c} = (20; 21; 22)$. Знайти $\mathbf{d} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 10\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (12; -25; -26)$ і $\mathbf{b} = (-24; -25; 7)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$; $C(15; 16; 17)$; $D(22; 40; 17)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$; $C(-16; 17; -18)$; $D(-16; 26; 22)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (396; -15; -18)$ і $\mathbf{b} = (16; 270; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (396; -15; 157)$ і $\mathbf{b} = (-5940; 225; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(22; -15; 16)$ і точка $A(-14; -15; 17)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (22; -15; 16)$ і $\mathbf{b} = (-14; -15; 17)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$, $B(17; -19; 21)$, $C(8; 7; 5)$, $D(20; 21; 22)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

14 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(15; 16; 17)$; $B(18; -20; -22)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(15; 16; 17)$; $B(22; 40; 17)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (18; -20; -22)$; $\mathbf{b} = (9; 8; 6)$; $\mathbf{c} = (21; -22; 23)$. Знайти $\mathbf{d} = 7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-11; 26; 27)$ і $\mathbf{b} = (-25; -26; 6)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$; $C(15; 16; 17)$; $D(22; 40; 17)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$; $C(-16; 17; -18)$; $D(-16; 26; 22)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-399; 16; -19)$ і $\mathbf{b} = (-17; 304; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-399; 16; 156)$ і $\mathbf{b} = (-6384; 256; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-21; 16; -17)$ і точка $A(-15; -16; 16)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-21; 16; -17)$ і $\mathbf{b} = (-15; -16; 16)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(15; 16; 17)$, $B(18; -20; -22)$, $C(9; 8; 6)$, $D(21; -22; 23)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

15 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-16; 17; -18)$; $B(19; -21; 23)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-16; 17; -18)$; $B(-16; 26; 22)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (19; -21; 23)$; $\mathbf{b} = (10; 9; 7)$; $\mathbf{c} = (22; 23; 24)$. Знайти $\mathbf{d} = 8\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 12\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (10; -27; 28)$ і $\mathbf{b} = (-26; -27; 5)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$; $C(-16; 17; -18)$; $D(-16; 26; 22)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$; $C(17; 18; 19)$; $D(28; 18; 79)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (400; -17; -20)$ і $\mathbf{b} = (-18; 340; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (400; -17; 155)$ і $\mathbf{b} = (-6800; 289; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (20; -17; -18)$ і точка $A(-16; -17; 15)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (20; -17; -18)$ і $\mathbf{b} = (-16; -17; 15)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-16; 17; -18)$, $B(19; -21; 23)$, $C(10; 9; 7)$, $D(22; 23; 24)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

16 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(17; 18; 19)$; $B(20; -22; 24)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(17; 18; 19)$; $B(28; 18; 79)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (20; -22; 24)$; $\mathbf{b} = (11; 10; 8)$; $\mathbf{c} = (23; -24; 25)$. Знайти $\mathbf{d} = 9\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 13\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-9; 28; -29)$ і $\mathbf{b} = (-27; -28; 4)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$; $C(-16; 17; -18)$; $D(-16; 26; 22)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$; $C(-34; 35; -36)$; $D(-34; 44; 4)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-399; 18; -21)$ і $\mathbf{b} = (19; 378; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-399; 18; 154)$ і $\mathbf{b} = (-7182; 324; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-19; 18; 19)$ і точка $A(-17; -18; 14)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(13; 14; -15)$; $B(13; 17; -11)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-19; 18; 19)$ і $\mathbf{b} = (-17; -18; 14)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(17; 18; 19)$, $B(20; -22; 24)$, $C(11; 10; 8)$, $D(23; -24; 25)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

17 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-18; 19; 20)$; $B(21; -23; -25)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-18; 19; 20)$; $B(-5; 103; 20)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (21; -23; -25)$; $\mathbf{b} = (12; 11; 9)$; $\mathbf{c} = (24; 25; 26)$. Знайти $\mathbf{d} = 10\mathbf{a} + 9\mathbf{b} - 14\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (8; -29; -30)$ і $\mathbf{b} = (-28; -29; 3)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$; $C(17; 18; 19)$; $D(28; 18; 79)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$; $C(35; 36; 37)$; $D(46; 36; 97)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (396; -19; -22)$ і $\mathbf{b} = (20; 418; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (396; -19; 153)$ і $\mathbf{b} = (-7524; 361; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(18; -19; 20)$ і точка $A(-18; -19; 13)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-14; 15; 16)$; $B(-9; 15; 28)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (18; -19; 20)$ і $\mathbf{b} = (-18; -19; 13)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-18; 19; 20)$, $B(21; -23; -25)$, $C(12; 11; 9)$, $D(24; 25; 26)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

18 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(22; -24; 26)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 35; 91)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (22; -24; 26)$; $\mathbf{b} = (13; 12; 10)$; $\mathbf{c} = (25; -26; 27)$. Знайти $\mathbf{d} = 11\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 15\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-7; 30; 31)$ і $\mathbf{b} = (-29; -30; 2)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$; $C(-34; 35; -36)$; $D(-34; 44; 4)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(40; 58; 35)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-391; 20; -23)$ і $\mathbf{b} = (-21; 460; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-391; 20; 152)$ і $\mathbf{b} = (-7820; 400; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-17; 20; -21)$ і точка $A(-19; -20; 12)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-17; 20; -21)$ і $\mathbf{b} = (-19; -20; 12)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(19; 20; -21)$, $B(22; -24; 26)$, $C(13; 12; 10)$, $D(25; -26; 27)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

19 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(23; -25; 27)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-3; 21; 166)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (23; -25; 27)$; $\mathbf{b} = (14; 13; 11)$; $\mathbf{c} = (26; 27; 28)$. Знайти $\mathbf{d} = 12\mathbf{a} + 11\mathbf{b} - 16\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (6; -31; 32)$ і $\mathbf{b} = (-30; -31; 1)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$; $C(35; 36; 37)$; $D(46; 36; 97)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 44; 4)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (384; -21; -24)$ і $\mathbf{b} = (-22; 504; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (384; -21; 151)$ і $\mathbf{b} = (-8064; 441; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(16; -21; -22)$ і точка $A(-20; -21; 11)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (16; -21; -22)$ і $\mathbf{b} = (-20; -21; 11)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$, $B(23; -25; 27)$, $C(14; 13; 11)$, $D(26; 27; 28)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

20 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(21; 22; 23)$; $B(24; -26; -28)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(21; 22; 23)$; $B(40; 202; 23)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (24; -26; -28)$; $\mathbf{b} = (15; 14; 12)$; $\mathbf{c} = (27; -28; 29)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-5; 32; -33)$ і $\mathbf{b} = (-31; -32; 0)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(40; 58; 35)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(9; 10; 11)$; $B(28; 190; 11)$; $C(13; 14; -15)$; $D(13; 17; -11)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-375; 22; -25)$ і $\mathbf{b} = (23; 550; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-375; 22; 150)$ і $\mathbf{b} = (-8250; 484; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-15; 22; 23)$ і точка $A(-21; -22; 10)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(40; 58; 35)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-15; 22; 23)$ і $\mathbf{b} = (-21; -22; 10)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(21; 22; 23)$, $B(24; -26; -28)$, $C(15; 14; 12)$, $D(27; -28; 29)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

21 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-22; 23; -24)$; $B(25; -27; 29)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-22; 23; -24)$; $B(-22; 44; 196)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (25; -27; 29)$; $\mathbf{b} = (16; 15; 13)$; $\mathbf{c} = (28; 29; 30)$. Знайти $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (4; -33; -34)$ і $\mathbf{b} = (-32; -33; -1)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 44; 4)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(21; 22; 23)$; $B(40; 202; 23)$; $C(25; 26; -27)$; $D(25; 29; -23)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (364; -23; -26)$ і $\mathbf{b} = (24; 598; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (364; -23; 149)$ і $\mathbf{b} = (-8372; 529; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(14; -23; 24)$ і точка $A(-22; -23; 9)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 44; 4)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (14; -23; 24)$ і $\mathbf{b} = (-22; -23; 9)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-22; 23; -24)$, $B(25; -27; 29)$, $C(16; 15; 13)$, $D(28; 29; 30)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

22 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(23; 24; 25)$; $B(26; -28; 30)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(23; 24; 25)$; $B(46; 24; 289)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (26; -28; 30)$; $\mathbf{b} = (17; 16; 14)$; $\mathbf{c} = (29; -30; 31)$. Знайти $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-3; 34; 35)$ і $\mathbf{b} = (-33; -34; -2)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(9; 10; 11)$; $B(28; 190; 11)$; $C(13; 14; -15)$; $D(13; 17; -11)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$; $C(-26; 27; 28)$; $D(-21; 27; 40)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-351; 24; -27)$ і $\mathbf{b} = (-25; 648; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-351; 24; 148)$ і $\mathbf{b} = (-8424; 576; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-13; 24; -25)$ і точка $A(-23; -24; 8)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(9; 10; 11)$; $B(28; 190; 11)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-13; 24; -25)$ і $\mathbf{b} = (-23; -24; 8)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(23; 24; 25)$, $B(26; -28; 30)$, $C(17; 16; 14)$, $D(29; -30; 31)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

23 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-24; 25; 26)$; $B(27; -29; -31)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-24; 25; 26)$; $B(1; 337; 26)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (27; -29; -31)$; $\mathbf{b} = (18; 17; 15)$; $\mathbf{c} = (30; 31; 32)$. Знайти $\mathbf{d} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 10\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2; -35; 36)$ і $\mathbf{b} = (-34; -35; -3)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(21; 22; 23)$; $B(40; 202; 23)$; $C(25; 26; -27)$; $D(25; 29; -23)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$; $C(27; 28; 29)$; $D(34; 52; 29)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (336; -25; -28)$ і $\mathbf{b} = (-26; 700; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (336; -25; 147)$ і $\mathbf{b} = (-8400; 625; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (12; -25; -26)$ і точка $A(-24; -25; 7)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(21; 22; 23)$; $B(40; 202; 23)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (12; -25; -26)$ і $\mathbf{b} = (-24; -25; 7)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-24; 25; 26)$, $B(27; -29; -31)$, $C(18; 17; 15)$, $D(30; 31; 32)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

24 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(28; -30; 32)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (28; -30; 32)$; $\mathbf{b} = (19; 18; 16)$; $\mathbf{c} = (31; -32; 33)$. Знайти $\mathbf{d} = 7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1; 36; -37)$ і $\mathbf{b} = (-35; -36; -4)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$; $C(-26; 27; 28)$; $D(-21; 27; 40)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$; $C(27; 28; 29)$; $D(34; 52; 29)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-319; 26; -29)$ і $\mathbf{b} = (27; 754; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-319; 26; 146)$ і $\mathbf{b} = (-8294; 676; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-11; 26; 27)$ і точка $A(-25; -26; 6)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-11; 26; 27)$ і $\mathbf{b} = (-25; -26; 6)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(25; 26; -27)$, $B(28; -30; 32)$, $C(19; 18; 16)$, $D(31; -32; 33)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

25 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(29; -31; 33)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (29; -31; 33)$; $\mathbf{b} = (20; 19; 17)$; $\mathbf{c} = (32; 33; 34)$. Знайти $\mathbf{d} = 8\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 12\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (0; -37; -38)$ і $\mathbf{b} = (-36; -37; -5)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$; $C(27; 28; 29)$; $D(34; 52; 29)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$; $C(-28; 29; -30)$; $D(-28; 38; 10)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (300; -27; -30)$ і $\mathbf{b} = (28; 810; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (300; -27; 145)$ і $\mathbf{b} = (-8100; 729; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (10; -27; 28)$ і точка $A(-26; -27; 5)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дроби координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (10; -27; 28)$ і $\mathbf{b} = (-26; -27; 5)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$, $B(29; -31; 33)$, $C(20; 19; 17)$, $D(32; 33; 34)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

26 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(27; 28; 29)$; $B(30; -32; -34)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(27; 28; 29)$; $B(34; 52; 29)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (30; -32; -34)$; $\mathbf{b} = (21; 20; 18)$; $\mathbf{c} = (33; -34; 35)$. Знайти $\mathbf{d} = 9\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 13\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1; 38; 39)$ і $\mathbf{b} = (-37; -38; -6)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$; $C(27; 28; 29)$; $D(34; 52; 29)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$; $C(-28; 29; -30)$; $D(-28; 38; 10)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-279; 28; -31)$ і $\mathbf{b} = (-29; 868; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-279; 28; 144)$ і $\mathbf{b} = (-7812; 784; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-9; 28; -29)$ і точка $A(-27; -28; 4)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дроби координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-9; 28; -29)$ і $\mathbf{b} = (-27; -28; 4)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(27; 28; 29)$, $B(30; -32; -34)$, $C(21; 20; 18)$, $D(33; -34; 35)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

27 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-28; 29; -30)$; $B(31; -33; 35)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-28; 29; -30)$; $B(-28; 38; 10)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (31; -33; 35)$; $\mathbf{b} = (22; 21; 19)$; $\mathbf{c} = (34; 35; 36)$. Знайти $\mathbf{d} = 10\mathbf{a} + 9\mathbf{b} - 14\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2; -39; 40)$ і $\mathbf{b} = (-38; -39; -7)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$; $C(-28; 29; -30)$; $D(-28; 38; 10)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$; $C(29; 30; 31)$; $D(40; 30; 91)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (256; -29; -32)$ і $\mathbf{b} = (-30; 928; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (256; -29; 143)$ і $\mathbf{b} = (-7424; 841; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (8; -29; -30)$ і точка $A(-28; -29; 3)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (8; -29; -30)$ і $\mathbf{b} = (-28; -29; 3)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-28; 29; -30)$, $B(31; -33; 35)$, $C(22; 21; 19)$, $D(34; 35; 36)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

28 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(29; 30; 31)$; $B(32; -34; 36)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(29; 30; 31)$; $B(40; 30; 91)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (32; -34; 36)$; $\mathbf{b} = (23; 22; 20)$; $\mathbf{c} = (35; -36; 37)$. Знайти $\mathbf{d} = 11\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 15\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-3; 40; -41)$ і $\mathbf{b} = (-39; -40; -8)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$; $C(-28; 29; -30)$; $D(-28; 38; 10)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(5; 6; 7)$; $D(16; 6; 67)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-231; 30; -33)$ і $\mathbf{b} = (31; 990; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-231; 30; 142)$ і $\mathbf{b} = (-6930; 900; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-7; 30; 31)$ і точка $A(-29; -30; 2)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-7; 30; 31)$ і $\mathbf{b} = (-29; -30; 2)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(29; 30; 31)$, $B(32; -34; 36)$, $C(23; 22; 20)$, $D(35; -36; 37)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

29 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-30; 31; 32)$; $B(33; -35; -37)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-30; 31; 32)$; $B(-17; 115; 32)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (33; -35; -37)$; $\mathbf{b} = (24; 23; 21)$; $\mathbf{c} = (36; 37; 38)$. Знайти $\mathbf{d} = 12\mathbf{a} + 11\mathbf{b} - 16\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (4; -41; -42)$ і $\mathbf{b} = (-40; -41; -9)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$; $C(29; 30; 31)$; $D(40; 30; 91)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(-6; 7; 8)$; $D(7; 91; 8)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (204; -31; -34)$ і $\mathbf{b} = (32; 1054; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (204; -31; 141)$ і $\mathbf{b} = (-6324; 961; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (6; -31; 32)$ і точка $A(-30; -31; 1)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (6; -31; 32)$ і $\mathbf{b} = (-30; -31; 1)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-30; 31; 32)$, $B(33; -35; -37)$, $C(24; 23; 21)$, $D(36; 37; 38)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

30 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(34; -36; 38)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 47; 79)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (34; -36; 38)$; $\mathbf{b} = (25; 24; 22)$; $\mathbf{c} = (37; -38; 39)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-5; 42; 43)$ і $\mathbf{b} = (-41; -42; -10)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(5; 6; 7)$; $D(16; 6; 67)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(3; 4; 5)$; $B(10; 28; 5)$; $C(7; 8; -9)$; $D(7; 23; 103)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-175; 32; -35)$ і $\mathbf{b} = (-33; 1120; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-175; 32; 140)$ і $\mathbf{b} = (-5600; 1024; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-5; 32; -33)$ і точка $A(-31; -32; 0)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-5; 32; -33)$ і $\mathbf{b} = (-31; -32; 0)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(31; 32; -33)$, $B(34; -36; 38)$, $C(25; 24; 22)$, $D(37; -38; 39)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

31 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(35; -37; 39)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-15; 33; 178)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (35; -37; 39)$; $\mathbf{b} = (26; 25; 23)$; $\mathbf{c} = (38; 39; 40)$. Знайти $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (6; -43; 44)$ і $\mathbf{b} = (-42; -43; -11)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(-6; 7; 8)$; $D(7; 91; 8)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$; $C(29; 30; 31)$; $D(40; 30; 91)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (144; -33; -36)$ і $\mathbf{b} = (-34; 1188; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (144; -33; 139)$ і $\mathbf{b} = (-4752; 1089; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (4; -33; -34)$ і точка $A(-32; -33; -1)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (4; -33; -34)$ і $\mathbf{b} = (-32; -33; -1)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$, $B(35; -37; 39)$, $C(26; 25; 23)$, $D(38; 39; 40)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

32 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(36; -38; -40)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(52; 214; 35)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (36; -38; -40)$; $\mathbf{b} = (27; 26; 24)$; $\mathbf{c} = (39; -40; 41)$. Знайти $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-7; 44; -45)$ і $\mathbf{b} = (-43; -44; -12)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(3; 4; 5)$; $B(10; 28; 5)$; $C(7; 8; -9)$; $D(7; 23; 103)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$; $C(-30; 31; 32)$; $D(-17; 115; 32)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-111; 34; -37)$ і $\mathbf{b} = (35; 1258; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-111; 34; 138)$ і $\mathbf{b} = (-3774; 1156; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-3; 34; 35)$ і точка $A(-33; -34; -2)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(3; 4; 5)$; $B(10; 28; 5)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-3; 34; 35)$ і $\mathbf{b} = (-33; -34; -2)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(33; 34; 35)$, $B(36; -38; -40)$, $C(27; 26; 24)$, $D(39; -40; 41)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

33 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(37; -39; 41)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 56; 184)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (37; -39; 41)$; $\mathbf{b} = (28; 27; 25)$; $\mathbf{c} = (40; 41; 42)$. Знайти $\mathbf{d} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 10\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (8; -45; -46)$ і $\mathbf{b} = (-44; -45; -13)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$; $C(29; 30; 31)$; $D(40; 30; 91)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(27; 28; 29)$; $B(34; 52; 29)$; $C(31; 32; -33)$; $D(31; 47; 79)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (76; -35; -38)$ і $\mathbf{b} = (36; 1330; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (76; -35; 137)$ і $\mathbf{b} = (-2660; 1225; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(2; -35; 36)$ і точка $A(-34; -35; -3)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 29; -23)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (2; -35; 36)$ і $\mathbf{b} = (-34; -35; -3)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$, $B(37; -39; 41)$, $C(28; 27; 25)$, $D(40; 41; 42)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

34 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(38; -40; 42)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(58; 36; 301)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (38; -40; 42)$; $\mathbf{b} = (29; 28; 26)$; $\mathbf{c} = (41; -42; 43)$. Знайти $\mathbf{d} = 7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-9; 46; 47)$ і $\mathbf{b} = (-45; -46; -14)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$; $C(-30; 31; 32)$; $D(-17; 115; 32)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$; $C(-38; 39; 40)$; $D(-33; 39; 52)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-39; 36; -39)$ і $\mathbf{b} = (-37; 1404; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-39; 36; 136)$ і $\mathbf{b} = (-1404; 1296; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-1; 36; -37)$ і точка $A(-35; -36; -4)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-21; 27; 40)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-1; 36; -37)$ і $\mathbf{b} = (-35; -36; -4)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(35; 36; 37)$, $B(38; -40; 42)$, $C(29; 28; 26)$, $D(41; -42; 43)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

35 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-36; 37; 38)$; $B(39; -41; -43)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-36; 37; 38)$; $B(-11; 349; 38)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (39; -41; -43)$; $\mathbf{b} = (30; 29; 27)$; $\mathbf{c} = (42; 43; 44)$. Знайти $\mathbf{d} = 8\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 12\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (10; -47; 48)$ і $\mathbf{b} = (-46; -47; -15)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(27; 28; 29)$; $B(34; 52; 29)$; $C(31; 32; -33)$; $D(31; 47; 79)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$; $C(39; 40; 41)$; $D(46; 64; 41)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (0; -37; -40)$ і $\mathbf{b} = (-38; 1480; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (0; -37; 135)$ і $\mathbf{b} = (0; 1369; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (0; -37; -38)$ і точка $A(-36; -37; -5)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(27; 28; 29)$; $B(34; 52; 29)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (0; -37; -38)$ і $\mathbf{b} = (-36; -37; -5)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-36; 37; 38)$, $B(39; -41; -43)$, $C(30; 29; 27)$, $D(42; 43; 44)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

36 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(40; -42; 44)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (40; -42; 44)$; $\mathbf{b} = (31; 30; 28)$; $\mathbf{c} = (43; -44; 45)$. Знайти $\mathbf{d} = 9\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 13\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-11; 48; -49)$ і $\mathbf{b} = (-47; -48; -16)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$; $C(-38; 39; 40)$; $D(-33; 39; 52)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$; $C(39; 40; 41)$; $D(46; 64; 41)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-41; 38; -41)$ і $\mathbf{b} = (39; 1558; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-41; 38; 134)$ і $\mathbf{b} = (-1558; 1444; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-1; 38; 39)$ і точка $A(-37; -38; -6)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-1; 38; 39)$ і $\mathbf{b} = (-37; -38; -6)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(37; 38; -39)$, $B(40; -42; 44)$, $C(31; 30; 28)$, $D(43; -44; 45)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

37 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(41; -43; 45)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (41; -43; 45)$; $\mathbf{b} = (32; 31; 29)$; $\mathbf{c} = (44; 45; 46)$. Знайти $\mathbf{d} = 10\mathbf{a} + 9\mathbf{b} - 14\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (12; -49; -50)$ і $\mathbf{b} = (-48; -49; -17)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$; $C(39; 40; 41)$; $D(46; 64; 41)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$; $C(-40; 41; -42)$; $D(-40; 50; -2)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (84; -39; -42)$ і $\mathbf{b} = (40; 1638; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (84; -39; 133)$ і $\mathbf{b} = (-3276; 1521; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(2; -39; 40)$ і точка $A(-38; -39; -7)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (2; -39; 40)$ і $\mathbf{b} = (-38; -39; -7)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$, $B(41; -43; 45)$, $C(32; 31; 29)$, $D(44; 45; 46)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

38 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(39; 40; 41)$; $B(42; -44; -46)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(39; 40; 41)$; $B(46; 64; 41)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (42; -44; -46)$; $\mathbf{b} = (33; 32; 30)$; $\mathbf{c} = (45; -46; 47)$. Знайти $\mathbf{d} = 11\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 15\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-13; 50; 51)$ і $\mathbf{b} = (-49; -50; -18)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$; $C(39; 40; 41)$; $D(46; 64; 41)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$; $C(-40; 41; -42)$; $D(-40; 50; -2)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-129; 40; -43)$ і $\mathbf{b} = (-41; 1720; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-129; 40; 132)$ і $\mathbf{b} = (-5160; 1600; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-3; 40; -41)$ і точка $A(-39; -40; -8)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-3; 40; -41)$ і $\mathbf{b} = (-39; -40; -8)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(39; 40; 41)$, $B(42; -44; -46)$, $C(33; 32; 30)$, $D(45; -46; 47)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

39 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-40; 41; -42)$; $B(43; -45; 47)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-40; 41; -42)$; $B(-40; 50; -2)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (43; -45; 47)$; $\mathbf{b} = (34; 33; 31)$; $\mathbf{c} = (46; 47; 48)$. Знайти $\mathbf{d} = 12\mathbf{a} + 11\mathbf{b} - 16\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (14; -51; 52)$ і $\mathbf{b} = (-50; -51; -19)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$; $C(-40; 41; -42)$; $D(-40; 50; -2)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$; $C(41; 42; 43)$; $D(52; 42; 103)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (176; -41; -44)$ і $\mathbf{b} = (-42; 1804; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (176; -41; 131)$ і $\mathbf{b} = (-7216; 1681; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(4; -41; -42)$ і точка $A(-40; -41; -9)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a}=(4; -41; -42)$ і $\mathbf{b} (-40; -41; -9)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-40; 41; -42)$, $B(43; -45; 47)$, $C(34; 33; 31)$, $D(46; 47; 48)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

40 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(41; 42; 43)$; $B(44; -46; 48)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(41; 42; 43)$; $B(52; 42; 103)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (44; -46; 48)$; $\mathbf{b} = (35; 34; 32)$; $\mathbf{c} = (47; -48; 49)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-15; 52; -53)$ і $\mathbf{b} = (-51; -52; -20)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$; $C(-40; 41; -42)$; $D(-40; 50; -2)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(52; 214; 35)$; $C(37; 38; -39)$; $D(37; 41; -35)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-225; 42; -45)$ і $\mathbf{b} = (43; 1890; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-225; 42; 130)$ і $\mathbf{b} = (-9450; 1764; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-5; 42; 43)$ і точка $A(-41; -42; -10)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a}=(-5; 42; 43)$ і $\mathbf{b} (-41; -42; -10)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(41; 42; 43)$, $B(44; -46; 48)$, $C(35; 34; 32)$, $D(47; -48; 49)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

41 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-42; 43; 44)$; $B(45; -47; -49)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-42; 43; 44)$; $B(-29; 127; 44)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (45; -47; -49)$; $\mathbf{b} = (36; 35; 33)$; $\mathbf{c} = (48; 49; 50)$. Знайти $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (16; -53; -54)$ і $\mathbf{b} = (-52; -53; -21)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$; $C(41; 42; 43)$; $D(52; 42; 103)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$; $C(41; 42; 43)$; $D(52; 42; 103)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (276; -43; -46)$ і $\mathbf{b} = (44; 1978; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (276; -43; 129)$ і $\mathbf{b} = (-11868; 1849; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(6; -43; 44)$ і точка $A(-42; -43; -11)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (6; -43; 44)$ і $\mathbf{b} = (-42; -43; -11)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-42; 43; 44)$, $B(45; -47; -49)$, $C(36; 35; 33)$, $D(48; 49; 50)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

42 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(43; 44; -45)$; $B(46; -48; 50)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(43; 44; -45)$; $B(43; 59; 67)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (46; -48; 50)$; $\mathbf{b} = (37; 36; 34)$; $\mathbf{c} = (49; -50; 51)$. Знайти $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-17; 54; 55)$ і $\mathbf{b} = (-53; -54; -22)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(52; 214; 35)$; $C(37; 38; -39)$; $D(37; 41; -35)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$; $C(-42; 43; 44)$; $D(-29; 127; 44)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-329; 44; -47)$ і $\mathbf{b} = (-45; 2068; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-329; 44; 128)$ і $\mathbf{b} = (-14476; 1936; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-7; 44; -45)$ і точка $A(-43; -44; -12)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(52; 214; 35)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-7; 44; -45)$ і $\mathbf{b} = (-43; -44; -12)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(43; 44; -45)$, $B(46; -48; 50)$, $C(37; 36; 34)$, $D(49; -50; 51)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

43 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-44; 45; 46)$; $B(47; -49; 51)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-44; 45; 46)$; $B(-27; 45; 190)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (47; -49; 51)$; $\mathbf{b} = (38; 37; 35)$; $\mathbf{c} = (50; 51; 52)$. Знайти $\mathbf{d} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 10\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (18; -55; 56)$ і $\mathbf{b} = (-54; -55; -23)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$; $C(41; 42; 43)$; $D(52; 42; 103)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(39; 40; 41)$; $B(46; 64; 41)$; $C(43; 44; -45)$; $D(43; 59; 67)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (384; -45; -48)$ і $\mathbf{b} = (-46; 2160; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (384; -45; 127)$ і $\mathbf{b} = (-17280; 2025; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(8; -45; -46)$ і точка $A(-44; -45; -13)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(37; 38; -39)$; $B(37; 41; -35)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (8; -45; -46)$ і $\mathbf{b} = (-44; -45; -13)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-44; 45; 46)$, $B(47; -49; 51)$, $C(38; 37; 35)$, $D(50; 51; 52)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

44 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(45; 46; 47)$; $B(48; -50; -52)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(45; 46; 47)$; $B(64; 226; 47)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (48; -50; -52)$; $\mathbf{b} = (39; 38; 36)$; $\mathbf{c} = (51; -52; 53)$. Знайти $\mathbf{d} = 7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-19; 56; -57)$ і $\mathbf{b} = (-55; -56; -24)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$; $C(-42; 43; 44)$; $D(-29; 127; 44)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$; $C(-50; 51; 52)$; $D(-45; 51; 64)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-441; 46; -49)$ і $\mathbf{b} = (47; 2254; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-441; 46; 126)$ і $\mathbf{b} = (-20286; 2116; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-9; 46; 47)$ і точка $A(-45; -46; -14)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-38; 39; 40)$; $B(-33; 39; 52)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-9; 46; 47)$ і $\mathbf{b} = (-45; -46; -14)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(45; 46; 47)$, $B(48; -50; -52)$, $C(39; 38; 36)$, $D(51; -52; 53)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

45 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-46; 47; -48)$; $B(49; -51; 53)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-46; 47; -48)$; $B(-46; 68; 172)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (49; -51; 53)$; $\mathbf{b} = (40; 39; 37)$; $\mathbf{c} = (52; 53; 54)$. Знайти $\mathbf{d} = 8\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 12\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (20; -57; -58)$ і $\mathbf{b} = (-56; -57; -25)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(39; 40; 41)$; $B(46; 64; 41)$; $C(43; 44; -45)$; $D(43; 59; 67)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$; $C(51; 52; 53)$; $D(58; 76; 53)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (500; -47; -50)$ і $\mathbf{b} = (48; 2350; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (500; -47; 125)$ і $\mathbf{b} = (-23500; 2209; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(10; -47; 48)$ і точка $A(-46; -47; -15)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(39; 40; 41)$; $B(46; 64; 41)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (10; -47; 48)$ і $\mathbf{b} = (-46; -47; -15)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-46; 47; -48)$, $B(49; -51; 53)$, $C(40; 39; 37)$, $D(52; 53; 54)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

46 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(47; 48; 49)$; $B(50; -52; 54)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(47; 48; 49)$; $B(70; 48; 313)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (50; -52; 54)$; $\mathbf{b} = (41; 40; 38)$; $\mathbf{c} = (53; -54; 55)$. Знайти $\mathbf{d} = 9\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 13\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-21; 58; 59)$ і $\mathbf{b} = (-57; -58; -26)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$; $C(-50; 51; 52)$; $D(-45; 51; 64)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$; $C(51; 52; 53)$; $D(58; 76; 53)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-561; 48; -51)$ і $\mathbf{b} = (-49; 2448; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-561; 48; 124)$ і $\mathbf{b} = (-26928; 2304; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-11; 48; -49)$ і точка $A(-47; -48; -16)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-11; 48; -49)$ і $\mathbf{b} = (-47; -48; -16)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(47; 48; 49)$, $B(50; -52; 54)$, $C(41; 40; 38)$, $D(53; -54; 55)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

47 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-48; 49; 50)$; $B(51; -53; -55)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-48; 49; 50)$; $B(-23; 361; 50)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (51; -53; -55)$; $\mathbf{b} = (42; 41; 39)$; $\mathbf{c} = (54; 55; 56)$. Знайти $\mathbf{d} = 10\mathbf{a} + 9\mathbf{b} - 14\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (22; -59; 60)$ і $\mathbf{b} = (-58; -59; -27)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$; $C(51; 52; 53)$; $D(58; 76; 53)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$; $C(-52; 53; -54)$; $D(-52; 62; -14)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (624; -49; -52)$ і $\mathbf{b} = (-50; 2548; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (624; -49; 123)$ і $\mathbf{b} = (-30576; 2401; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(12; -49; -50)$ і точка $A(-48; -49; -17)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (12; -49; -50)$ і $\mathbf{b} = (-48; -49; -17)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-48; 49; 50)$, $B(51; -53; -55)$, $C(42; 41; 39)$, $D(54; 55; 56)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

48 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(52; -54; 56)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (52; -54; 56)$; $\mathbf{b} = (43; 42; 40)$; $\mathbf{c} = (55; -56; 57)$. Знайти $\mathbf{d} = 11\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 15\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-23; 60; -61)$ і $\mathbf{b} = (-59; -60; -28)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$; $C(51; 52; 53)$; $D(58; 76; 53)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$; $C(-52; 53; -54)$; $D(-52; 62; -14)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-689; 50; -53)$ і $\mathbf{b} = (51; 2650; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-689; 50; 122)$ і $\mathbf{b} = (-34450; 2500; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-13; 50; 51)$ і точка $A(-49; -50; -18)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-13; 50; 51)$ і $\mathbf{b} = (-49; -50; -18)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(49; 50; -51)$, $B(52; -54; 56)$, $C(43; 42; 40)$, $D(55; -56; 57)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

49 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(53; -55; 57)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (53; -55; 57)$; $\mathbf{b} = (44; 43; 41)$; $\mathbf{c} = (56; 57; 58)$. Знайти $\mathbf{d} = 12\mathbf{a} + 11\mathbf{b} - 16\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (24; -61; -62)$ і $\mathbf{b} = (-60; -61; -29)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$; $C(-52; 53; -54)$; $D(-52; 62; -14)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$; $C(53; 54; 55)$; $D(64; 54; 115)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (756; -51; -54)$ і $\mathbf{b} = (52; 2754; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (756; -51; 121)$ і $\mathbf{b} = (-38556; 2601; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(14; -51; 52)$ і точка $A(-50; -51; -19)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a}=(14; -51; 52)$ і $\mathbf{b} (-50; -51; -19)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$, $B(53; -55; 57)$, $C(44; 43; 41)$, $D(56; 57; 58)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

50 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(51; 52; 53)$; $B(54; -56; -58)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(51; 52; 53)$; $B(58; 76; 53)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (54; -56; -58)$; $\mathbf{b} = (45; 44; 42)$; $\mathbf{c} = (57; -58; 59)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-25; 62; 63)$ і $\mathbf{b} = (-61; -62; -30)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$; $C(-52; 53; -54)$; $D(-52; 62; -14)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(45; 46; 47)$; $B(64; 226; 47)$; $C(49; 50; -51)$; $D(49; 53; -47)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-825; 52; -55)$ і $\mathbf{b} = (-53; 2860; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-825; 52; 120)$ і $\mathbf{b} = (-42900; 2704; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-15; 52; -53)$ і точка $A(-51; -52; -20)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a}=(-15; 52; -53)$ і $\mathbf{b} (-51; -52; -20)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(51; 52; 53)$, $B(54; -56; -58)$, $C(45; 44; 42)$, $D(57; -58; 59)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

51 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-52; 53; -54)$; $B(55; -57; 59)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-52; 53; -54)$; $B(-52; 62; -14)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (55; -57; 59)$; $\mathbf{b} = (46; 45; 43)$; $\mathbf{c} = (58; 59; 60)$. Знайти $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (26; -63; 64)$ і $\mathbf{b} = (-62; -63; -31)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$; $C(53; 54; 55)$; $D(64; 54; 115)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$; $C(53; 54; 55)$; $D(64; 54; 115)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (896; -53; -56)$ і $\mathbf{b} = (-54; 2968; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (896; -53; 119)$ і $\mathbf{b} = (-47488; 2809; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (16; -53; -54)$ і точка $A(-52; -53; -21)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (16; -53; -54)$ і $\mathbf{b} = (-52; -53; -21)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-52; 53; -54)$, $B(55; -57; 59)$, $C(46; 45; 43)$, $D(58; 59; 60)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

52 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(53; 54; 55)$; $B(56; -58; 60)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(53; 54; 55)$; $B(64; 54; 115)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (56; -58; 60)$; $\mathbf{b} = (47; 46; 44)$; $\mathbf{c} = (59; -60; 61)$. Знайти $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-27; 64; -65)$ і $\mathbf{b} = (-63; -64; -32)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(45; 46; 47)$; $B(64; 226; 47)$; $C(49; 50; -51)$; $D(49; 53; -47)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$; $C(-54; 55; 56)$; $D(-41; 139; 56)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-969; 54; -57)$ і $\mathbf{b} = (55; 3078; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-969; 54; 118)$ і $\mathbf{b} = (-52326; 2916; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-17; 54; 55)$ і точка $A(-53; -54; -22)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(45; 46; 47)$; $B(64; 226; 47)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-17; 54; 55)$ і $\mathbf{b} = (-53; -54; -22)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(53; 54; 55)$, $B(56; -58; 60)$, $C(47; 46; 44)$, $D(59; -60; 61)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

53 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-54; 55; 56)$; $B(57; -59; -61)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-54; 55; 56)$; $B(-41; 139; 56)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (57; -59; -61)$; $\mathbf{b} = (48; 47; 45)$; $\mathbf{c} = (60; 61; 62)$. Знайти $\mathbf{d} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 10\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (28; -65; -66)$ і $\mathbf{b} = (-64; -65; -33)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$; $C(53; 54; 55)$; $D(64; 54; 115)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(51; 52; 53)$; $B(58; 76; 53)$; $C(55; 56; -57)$; $D(55; 71; 55)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1044; -55; -58)$ і $\mathbf{b} = (56; 3190; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1044; -55; 117)$ і $\mathbf{b} = (-57420; 3025; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(18; -55; 56)$ і точка $A(-54; -55; -23)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(49; 50; -51)$; $B(49; 53; -47)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (18; -55; 56)$ і $\mathbf{b} = (-54; -55; -23)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-54; 55; 56)$, $B(57; -59; -61)$, $C(48; 47; 45)$, $D(60; 61; 62)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

54 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(55; 56; -57)$; $B(58; -60; 62)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(55; 56; -57)$; $B(55; 71; 55)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (58; -60; 62)$; $\mathbf{b} = (49; 48; 46)$; $\mathbf{c} = (61; -62; 63)$. Знайти $\mathbf{d} = 7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-29; 66; 67)$ і $\mathbf{b} = (-65; -66; -34)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$; $C(-54; 55; 56)$; $D(-41; 139; 56)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$; $C(-62; 63; 64)$; $D(-57; 63; 76)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1121; 56; -59)$ і $\mathbf{b} = (-57; 3304; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1121; 56; 116)$ і $\mathbf{b} = (-62776; 3136; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-19; 56; -57)$ і точка $A(-55; -56; -24)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-50; 51; 52)$; $B(-45; 51; 64)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-19; 56; -57)$ і $\mathbf{b} = (-55; -56; -24)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(55; 56; -57)$, $B(58; -60; 62)$, $C(49; 48; 46)$, $D(61; -62; 63)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

55 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-56; 57; 58)$; $B(59; -61; 63)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-56; 57; 58)$; $B(-39; 57; 202)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (59; -61; 63)$; $\mathbf{b} = (50; 49; 47)$; $\mathbf{c} = (62; 63; 64)$. Знайти $\mathbf{d} = 8\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 12\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (30; -67; 68)$ і $\mathbf{b} = (-66; -67; -35)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(51; 52; 53)$; $B(58; 76; 53)$; $C(55; 56; -57)$; $D(55; 71; 55)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$; $C(63; 64; 65)$; $D(70; 88; 65)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1200; -57; -60)$ і $\mathbf{b} = (-58; 3420; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1200; -57; 115)$ і $\mathbf{b} = (-68400; 3249; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (20; -57; -58)$ і точка $A(-56; -57; -25)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(51; 52; 53)$; $B(58; 76; 53)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (20; -57; -58)$ і $\mathbf{b} = (-56; -57; -25)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-56; 57; 58)$, $B(59; -61; 63)$, $C(50; 49; 47)$, $D(62; 63; 64)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

56 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(57; 58; 59)$; $B(60; -62; -64)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(57; 58; 59)$; $B(76; 238; 59)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (60; -62; -64)$; $\mathbf{b} = (51; 50; 48)$; $\mathbf{c} = (63; -64; 65)$. Знайти $\mathbf{d} = 9\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 13\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-31; 68; -69)$ і $\mathbf{b} = (-67; -68; -36)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$; $C(-62; 63; 64)$; $D(-57; 63; 76)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$; $C(63; 64; 65)$; $D(70; 88; 65)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1281; 58; -61)$ і $\mathbf{b} = (59; 3538; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1281; 58; 114)$ і $\mathbf{b} = (-74298; 3364; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-21; 58; 59)$ і точка $A(-57; -58; -26)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-21; 58; 59)$ і $\mathbf{b} = (-57; -58; -26)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(57; 58; 59)$, $B(60; -62; -64)$, $C(51; 50; 48)$, $D(63; -64; 65)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

57 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-58; 59; -60)$; $B(61; -63; 65)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-58; 59; -60)$; $B(-58; 80; 160)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (61; -63; 65)$; $\mathbf{b} = (52; 51; 49)$; $\mathbf{c} = (64; 65; 66)$. Знайти $\mathbf{d} = 10\mathbf{a} + 9\mathbf{b} - 14\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (32; -69; -70)$ і $\mathbf{b} = (-68; -69; -37)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$; $C(63; 64; 65)$; $D(70; 88; 65)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$; $C(-64; 65; -66)$; $D(-64; 74; -26)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1364; -59; -62)$ і $\mathbf{b} = (60; 3658; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1364; -59; 113)$ і $\mathbf{b} = (-80476; 3481; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(22; -59; 60)$ і точка $A(-58; -59; -27)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (22; -59; 60)$ і $\mathbf{b} = (-58; -59; -27)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-58; 59; -60)$, $B(61; -63; 65)$, $C(52; 51; 49)$, $D(64; 65; 66)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

58 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(59; 60; 61)$; $B(62; -64; 66)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(59; 60; 61)$; $B(82; 60; 325)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (62; -64; 66)$; $\mathbf{b} = (53; 52; 50)$; $\mathbf{c} = (65; -66; 67)$. Знайти $\mathbf{d} = 11\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 15\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-33; 70; 71)$ і $\mathbf{b} = (-69; -70; -38)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$; $C(63; 64; 65)$; $D(70; 88; 65)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$; $C(-64; 65; -66)$; $D(-64; 74; -26)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1449; 60; -63)$ і $\mathbf{b} = (-61; 3780; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1449; 60; 112)$ і $\mathbf{b} = (-86940; 3600; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-23; 60; -61)$ і точка $A(-59; -60; -28)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-23; 60; -61)$ і $\mathbf{b} = (-59; -60; -28)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(59; 60; 61)$, $B(62; -64; 66)$, $C(53; 52; 50)$, $D(65; -66; 67)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

59 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-60; 61; 62)$; $B(63; -65; -67)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-60; 61; 62)$; $B(-35; 373; 62)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (63; -65; -67)$; $\mathbf{b} = (54; 53; 51)$; $\mathbf{c} = (66; 67; 68)$. Знайти $\mathbf{d} = 12\mathbf{a} + 11\mathbf{b} - 16\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (34; -71; 72)$ і $\mathbf{b} = (-70; -71; -39)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$; $C(-64; 65; -66)$; $D(-64; 74; -26)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$; $C(65; 66; 67)$; $D(76; 66; 127)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1536; -61; -64)$ і $\mathbf{b} = (-62; 3904; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1536; -61; 111)$ і $\mathbf{b} = (-93696; 3721; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (24; -61; -62)$ і точка $A(-60; -61; -29)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (24; -61; -62)$ і $\mathbf{b} = (-60; -61; -29)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-60; 61; 62)$, $B(63; -65; -67)$, $C(54; 53; 51)$, $D(66; 67; 68)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

60 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(64; -66; 68)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (64; -66; 68)$; $\mathbf{b} = (55; 54; 52)$; $\mathbf{c} = (67; -68; 69)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-35; 72; -73)$ і $\mathbf{b} = (-71; -72; -40)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$; $C(-64; 65; -66)$; $D(-64; 74; -26)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(57; 58; 59)$; $B(76; 238; 59)$; $C(61; 62; -63)$; $D(61; 65; -59)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1625; 62; -65)$ і $\mathbf{b} = (63; 4030; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1625; 62; 110)$ і $\mathbf{b} = (-100750; 3844; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-25; 62; 63)$ і точка $A(-61; -62; -30)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-25; 62; 63)$ і $\mathbf{b} = (-61; -62; -30)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(61; 62; -63)$, $B(64; -66; 68)$, $C(55; 54; 52)$, $D(67; -68; 69)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

61 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(65; -67; 69)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (65; -67; 69)$; $\mathbf{b} = (56; 55; 53)$; $\mathbf{c} = (68; 69; 70)$. Знайти $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (36; -73; -74)$ і $\mathbf{b} = (-72; -73; -41)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$; $C(65; 66; 67)$; $D(76; 66; 127)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$; $C(65; 66; 67)$; $D(76; 66; 127)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1716; -63; -66)$ і $\mathbf{b} = (64; 4158; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1716; -63; 109)$ і $\mathbf{b} = (-108108; 3969; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(26; -63; 64)$ і точка $A(-62; -63; -31)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (26; -63; 64)$ і $\mathbf{b} = (-62; -63; -31)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$, $B(65; -67; 69)$, $C(56; 55; 53)$, $D(68; 69; 70)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

62 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(63; 64; 65)$; $B(66; -68; -70)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(63; 64; 65)$; $B(70; 88; 65)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (66; -68; -70)$; $\mathbf{b} = (57; 56; 54)$; $\mathbf{c} = (69; -70; 71)$. Знайти $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-37; 74; 75)$ і $\mathbf{b} = (-73; -74; -42)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(57; 58; 59)$; $B(76; 238; 59)$; $C(61; 62; -63)$; $D(61; 65; -59)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$; $C(-66; 67; 68)$; $D(-53; 151; 68)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1809; 64; -67)$ і $\mathbf{b} = (-65; 4288; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1809; 64; 108)$ і $\mathbf{b} = (-115776; 4096; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-27; 64; -65)$ і точка $A(-63; -64; -32)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(57; 58; 59)$; $B(76; 238; 59)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-27; 64; -65)$ і $\mathbf{b} = (-63; -64; -32)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(63; 64; 65)$, $B(66; -68; -70)$, $C(57; 56; 54)$, $D(69; -70; 71)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

63 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-64; 65; -66)$; $B(67; -69; 71)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-64; 65; -66)$; $B(-64; 74; -26)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (67; -69; 71)$; $\mathbf{b} = (58; 57; 55)$; $\mathbf{c} = (70; 71; 72)$. Знайти $\mathbf{d} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 10\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (38; -75; 76)$ і $\mathbf{b} = (-74; -75; -43)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$; $C(65; 66; 67)$; $D(76; 66; 127)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(63; 64; 65)$; $B(70; 88; 65)$; $C(67; 68; -69)$; $D(67; 83; 43)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1904; -65; -68)$ і $\mathbf{b} = (-66; 4420; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1904; -65; 107)$ і $\mathbf{b} = (-123760; 4225; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(28; -65; -66)$ і точка $A(-64; -65; -33)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(61; 62; -63)$; $B(61; 65; -59)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (28; -65; -66)$ і $\mathbf{b} = (-64; -65; -33)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-64; 65; -66)$, $B(67; -69; 71)$, $C(58; 57; 55)$, $D(70; 71; 72)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

64 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(65; 66; 67)$; $B(68; -70; 72)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(65; 66; 67)$; $B(76; 66; 127)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (68; -70; 72)$; $\mathbf{b} = (59; 58; 56)$; $\mathbf{c} = (71; -72; 73)$. Знайти $\mathbf{d} = 7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-39; 76; -77)$ і $\mathbf{b} = (-75; -76; -44)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$; $C(-66; 67; 68)$; $D(-53; 151; 68)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$; $C(-74; 75; 76)$; $D(-69; 75; 88)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2001; 66; -69)$ і $\mathbf{b} = (67; 4554; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2001; 66; 106)$ і $\mathbf{b} = (-132066; 4356; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-29; 66; 67)$ і точка $A(-65; -66; -34)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-62; 63; 64)$; $B(-57; 63; 76)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-29; 66; 67)$ і $\mathbf{b} = (-65; -66; -34)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(65; 66; 67)$, $B(68; -70; 72)$, $C(59; 58; 56)$, $D(71; -72; 73)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

65 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-66; 67; 68)$; $B(69; -71; -73)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-66; 67; 68)$; $B(-53; 151; 68)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (69; -71; -73)$; $\mathbf{b} = (60; 59; 57)$; $\mathbf{c} = (72; 73; 74)$. Знайти $\mathbf{d} = 8\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 12\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (40; -77; -78)$ і $\mathbf{b} = (-76; -77; -45)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(63; 64; 65)$; $B(70; 88; 65)$; $C(67; 68; -69)$; $D(67; 83; 43)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$; $C(75; 76; 77)$; $D(82; 100; 77)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2100; -67; -70)$ і $\mathbf{b} = (68; 4690; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2100; -67; 105)$ і $\mathbf{b} = (-140700; 4489; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(30; -67; 68)$ і точка $A(-66; -67; -35)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(63; 64; 65)$; $B(70; 88; 65)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (30; -67; 68)$ і $\mathbf{b} = (-66; -67; -35)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-66; 67; 68)$, $B(69; -71; -73)$, $C(60; 59; 57)$, $D(72; 73; 74)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

66 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(67; 68; -69)$; $B(70; -72; 74)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(67; 68; -69)$; $B(67; 83; 43)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (70; -72; 74)$; $\mathbf{b} = (61; 60; 58)$; $\mathbf{c} = (73; -74; 75)$. Знайти $\mathbf{d} = 9\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 13\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-41; 78; 79)$ і $\mathbf{b} = (-77; -78; -46)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$; $C(-74; 75; 76)$; $D(-69; 75; 88)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$; $C(75; 76; 77)$; $D(82; 100; 77)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2201; 68; -71)$ і $\mathbf{b} = (-69; 4828; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2201; 68; 104)$ і $\mathbf{b} = (-149668; 4624; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-31; 68; -69)$ і точка $A(-67; -68; -36)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-31; 68; -69)$ і $\mathbf{b} = (-67; -68; -36)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(67; 68; -69)$, $B(70; -72; 74)$, $C(61; 60; 58)$, $D(73; -74; 75)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

67 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-68; 69; 70)$; $B(71; -73; 75)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-68; 69; 70)$; $B(-51; 69; 214)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (71; -73; 75)$; $\mathbf{b} = (62; 61; 59)$; $\mathbf{c} = (74; 75; 76)$. Знайти $\mathbf{d} = 10\mathbf{a} + 9\mathbf{b} - 14\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (42; -79; 80)$ і $\mathbf{b} = (-78; -79; -47)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$; $C(75; 76; 77)$; $D(82; 100; 77)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$; $C(-76; 77; -78)$; $D(-76; 86; -38)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2304; -69; -72)$ і $\mathbf{b} = (-70; 4968; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2304; -69; 103)$ і $\mathbf{b} = (-158976; 4761; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (32; -69; -70)$ і точка $A(-68; -69; -37)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (32; -69; -70)$ і $\mathbf{b} = (-68; -69; -37)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-68; 69; 70)$, $B(71; -73; 75)$, $C(62; 61; 59)$, $D(74; 75; 76)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

68 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(69; 70; 71)$; $B(72; -74; -76)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(69; 70; 71)$; $B(88; 250; 71)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (72; -74; -76)$; $\mathbf{b} = (63; 62; 60)$; $\mathbf{c} = (75; -76; 77)$. Знайти $\mathbf{d} = 11\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 15\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-43; 80; -81)$ і $\mathbf{b} = (-79; -80; -48)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$; $C(75; 76; 77)$; $D(82; 100; 77)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$; $C(-76; 77; -78)$; $D(-76; 86; -38)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2409; 70; -73)$ і $\mathbf{b} = (71; 5110; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2409; 70; 102)$ і $\mathbf{b} = (-168630; 4900; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-33; 70; 71)$ і точка $A(-69; -70; -38)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-33; 70; 71)$ і $\mathbf{b} = (-69; -70; -38)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(69; 70; 71)$, $B(72; -74; -76)$, $C(63; 62; 60)$, $D(75; -76; 77)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

69 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-70; 71; -72)$; $B(73; -75; 77)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-70; 71; -72)$; $B(-70; 92; 148)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (73; -75; 77)$; $\mathbf{b} = (64; 63; 61)$; $\mathbf{c} = (76; 77; 78)$. Знайти $\mathbf{d} = 12\mathbf{a} + 11\mathbf{b} - 16\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (44; -81; -82)$ і $\mathbf{b} = (-80; -81; -49)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$; $C(-76; 77; -78)$; $D(-76; 86; -38)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$; $C(77; 78; 79)$; $D(88; 78; 139)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2516; -71; -74)$ і $\mathbf{b} = (72; 5254; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2516; -71; 101)$ і $\mathbf{b} = (-178636; 5041; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(34; -71; 72)$ і точка $A(-70; -71; -39)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (34; -71; 72)$ і $\mathbf{b} = (-70; -71; -39)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-70; 71; -72)$, $B(73; -75; 77)$, $C(64; 63; 61)$, $D(76; 77; 78)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

70 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(71; 72; 73)$; $B(74; -76; 78)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(71; 72; 73)$; $B(94; 72; 337)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (74; -76; 78)$; $\mathbf{b} = (65; 64; 62)$; $\mathbf{c} = (77; -78; 79)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-35; 2; 3)$ і $\mathbf{b} = (-1; -2; 30)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$; $C(-76; 77; -78)$; $D(-76; 86; -38)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(69; 70; 71)$; $B(88; 250; 71)$; $C(73; 74; -75)$; $D(73; 77; -71)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2625; 72; -75)$ і $\mathbf{b} = (-73; 5400; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2625; 72; 100)$ і $\mathbf{b} = (-189000; 5184; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-35; 72; -73)$ і точка $A(-71; -72; -40)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-35; 72; -73)$ і $\mathbf{b} = (-71; -72; -40)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(71; 72; 73)$, $B(74; -76; 78)$, $C(65; 64; 62)$, $D(77; -78; 79)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

71 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-72; 73; 74)$; $B(75; -77; -79)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-72; 73; 74)$; $B(-47; 385; 74)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (75; -77; -79)$; $\mathbf{b} = (66; 65; 63)$; $\mathbf{c} = (78; 79; 80)$. Знайти $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (34; -3; 4)$ і $\mathbf{b} = (-2; -3; 29)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$; $C(77; 78; 79)$; $D(88; 78; 139)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$; $C(77; 78; 79)$; $D(88; 78; 139)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2736; -73; -76)$ і $\mathbf{b} = (-74; 5548; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2736; -73; 99)$ і $\mathbf{b} = (-199728; 5329; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(36; -73; -74)$ і точка $A(-72; -73; -41)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (36; -73; -74)$ і $\mathbf{b} = (-72; -73; -41)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-72; 73; 74)$, $B(75; -77; -79)$, $C(66; 65; 63)$, $D(78; 79; 80)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

72 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(76; -78; 80)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (76; -78; 80)$; $\mathbf{b} = (67; 66; 64)$; $\mathbf{c} = (79; -80; 81)$. Знайти $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-33; 4; -5)$ і $\mathbf{b} = (-3; -4; 28)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(69; 70; 71)$; $B(88; 250; 71)$; $C(73; 74; -75)$; $D(73; 77; -71)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$; $C(-78; 79; 80)$; $D(-65; 163; 80)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2849; 74; -77)$ і $\mathbf{b} = (75; 5698; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2849; 74; 98)$ і $\mathbf{b} = (-210826; 5476; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-37; 74; 75)$ і точка $A(-73; -74; -42)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(69; 70; 71)$; $B(88; 250; 71)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-37; 74; 75)$ і $\mathbf{b} = (-73; -74; -42)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(73; 74; -75)$, $B(76; -78; 80)$, $C(67; 66; 64)$, $D(79; -80; 81)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

73 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(77; -79; 81)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (77; -79; 81)$; $\mathbf{b} = (68; 67; 65)$; $\mathbf{c} = (80; 81; 82)$. Знайти $\mathbf{d} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 10\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (32; -5; -6)$ і $\mathbf{b} = (-4; -5; 27)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$; $C(77; 78; 79)$; $D(88; 78; 139)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(75; 76; 77)$; $B(82; 100; 77)$; $C(79; 80; -81)$; $D(79; 95; 31)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2964; -75; -78)$ і $\mathbf{b} = (76; 5850; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2964; -75; 97)$ і $\mathbf{b} = (-222300; 5625; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(38; -75; 76)$ і точка $A(-74; -75; -43)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(73; 74; -75)$; $B(73; 77; -71)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дроби координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a}=(38; -75; 76)$ і $\mathbf{b} (-74; -75; -43)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$, $B(77; -79; 81)$, $C(68; 67; 65)$, $D(80; 81; 82)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

74 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(75; 76; 77)$; $B(78; -80; -82)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(75; 76; 77)$; $B(82; 100; 77)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (78; -80; -82)$; $\mathbf{b} = (69; 68; 66)$; $\mathbf{c} = (81; -82; 83)$. Знайти $\mathbf{d} = 7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-31; 6; 7)$ і $\mathbf{b} = (-5; -6; 26)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$; $C(-78; 79; 80)$; $D(-65; 163; 80)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$; $C(-20; 21; 22)$; $D(-15; 21; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-3081; 76; -79)$ і $\mathbf{b} = (-77; 6004; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-3081; 76; 96)$ і $\mathbf{b} = (-234156; 5776; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-39; 76; -77)$ і точка $A(-75; -76; -44)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-74; 75; 76)$; $B(-69; 75; 88)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дроби координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a}=(-39; 76; -77)$ і $\mathbf{b} (-75; -76; -44)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(75; 76; 77)$, $B(78; -80; -82)$, $C(69; 68; 66)$, $D(81; -82; 83)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

75 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-76; 77; -78)$; $B(79; -81; 83)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-76; 77; -78)$; $B(-76; 86; -38)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (79; -81; 83)$; $\mathbf{b} = (70; 69; 67)$; $\mathbf{c} = (82; 83; 84)$. Знайти $\mathbf{d} = 8\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 12\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (30; -7; 8)$ і $\mathbf{b} = (-6; -7; 25)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(75; 76; 77)$; $B(82; 100; 77)$; $C(79; 80; -81)$; $D(79; 95; 31)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$; $C(21; 22; 23)$; $D(28; 46; 23)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (3200; -77; -80)$ і $\mathbf{b} = (-78; 6160; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (3200; -77; 95)$ і $\mathbf{b} = (-246400; 5929; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (40; -77; -78)$ і точка $A(-76; -77; -45)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(75; 76; 77)$; $B(82; 100; 77)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (40; -77; -78)$ і $\mathbf{b} = (-76; -77; -45)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-76; 77; -78)$, $B(79; -81; 83)$, $C(70; 69; 67)$, $D(82; 83; 84)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

76 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(77; 78; 79)$; $B(80; -82; 84)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(77; 78; 79)$; $B(88; 78; 139)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (80; -82; 84)$; $\mathbf{b} = (71; 70; 68)$; $\mathbf{c} = (83; -84; 85)$. Знайти $\mathbf{d} = 9\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 13\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-29; 8; -9)$ і $\mathbf{b} = (-7; -8; 24)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$; $C(-20; 21; 22)$; $D(-15; 21; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$; $C(21; 22; 23)$; $D(28; 46; 23)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-3321; 78; -81)$ і $\mathbf{b} = (79; 6318; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-3321; 78; 94)$ і $\mathbf{b} = (-259038; 6084; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-41; 78; 79)$ і точка $A(-77; -78; -46)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-41; 78; 79)$ і $\mathbf{b} = (-77; -78; -46)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(77; 78; 79)$, $B(80; -82; 84)$, $C(71; 70; 68)$, $D(83; -84; 85)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

77 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-78; 79; 80)$; $B(81; -83; -85)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-78; 79; 80)$; $B(-65; 163; 80)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (81; -83; -85)$; $\mathbf{b} = (72; 71; 69)$; $\mathbf{c} = (84; 85; 86)$. Знайти $\mathbf{d} = 10\mathbf{a} + 9\mathbf{b} - 14\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (28; -9; -10)$ і $\mathbf{b} = (-8; -9; 23)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$; $C(21; 22; 23)$; $D(28; 46; 23)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$; $C(-22; 23; -24)$; $D(-22; 32; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (3444; -79; -82)$ і $\mathbf{b} = (80; 6478; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (3444; -79; 93)$ і $\mathbf{b} = (-272076; 6241; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(42; -79; 80)$ і точка $A(-78; -79; -47)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (42; -79; 80)$ і $\mathbf{b} = (-78; -79; -47)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-78; 79; 80)$, $B(81; -83; -85)$, $C(72; 71; 69)$, $D(84; 85; 86)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

78 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(79; 80; -81)$; $B(82; -84; 86)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(79; 80; -81)$; $B(79; 95; 31)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (82; -84; 86)$; $\mathbf{b} = (73; 72; 70)$; $\mathbf{c} = (85; -86; 87)$. Знайти $\mathbf{d} = 11\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 15\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-27; 10; 11)$ і $\mathbf{b} = (-9; -10; 22)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$; $C(21; 22; 23)$; $D(28; 46; 23)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$; $C(-22; 23; -24)$; $D(-22; 32; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-3569; 80; -83)$ і $\mathbf{b} = (-81; 6640; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-3569; 80; 92)$ і $\mathbf{b} = (-285520; 6400; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-43; 80; -81)$ і точка $A(-79; -80; -48)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-43; 80; -81)$ і $\mathbf{b} = (-79; -80; -48)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(79; 80; -81)$, $B(82; -84; 86)$, $C(73; 72; 70)$, $D(85; -86; 87)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

79 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-80; 81; 82)$; $B(83; -85; 87)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-80; 81; 82)$; $B(-63; 81; 226)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (83; -85; 87)$; $\mathbf{b} = (74; 73; 71)$; $\mathbf{c} = (86; 87; 88)$. Знайти $\mathbf{d} = 12\mathbf{a} + 11\mathbf{b} - 16\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (26; -11; 12)$ і $\mathbf{b} = (-10; -11; 21)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$; $C(-22; 23; -24)$; $D(-22; 32; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$; $C(23; 24; 25)$; $D(34; 24; 85)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (3696; -81; -84)$ і $\mathbf{b} = (-82; 6804; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (3696; -81; 91)$ і $\mathbf{b} = (-299376; 6561; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(44; -81; -82)$ і точка $A(-80; -81; -49)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (44; -81; -82)$ і $\mathbf{b} = (-80; -81; -49)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-80; 81; 82)$, $B(83; -85; 87)$, $C(74; 73; 71)$, $D(86; 87; 88)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

80 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(15; 16; 17)$; $B(18; -20; -22)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(15; 16; 17)$; $B(34; 196; 17)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (18; -20; -22)$; $\mathbf{b} = (9; 8; 6)$; $\mathbf{c} = (21; -22; 23)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-25; 12; -13)$ і $\mathbf{b} = (-11; -12; 20)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$; $C(-22; 23; -24)$; $D(-22; 32; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(15; 16; 17)$; $B(34; 196; 17)$; $C(19; 20; -21)$; $D(19; 23; -17)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2720; -5; -85)$ і $\mathbf{b} = (-6; 6970; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2720; -5; 90)$ і $\mathbf{b} = (-13600; 25; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(32; -5; -6)$ і точка $A(-81; -82; -50)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (32; -5; -6)$ і $\mathbf{b} = (-81; -82; -50)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(15; 16; 17)$, $B(18; -20; -22)$, $C(9; 8; 6)$, $D(21; -22; 23)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

81 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-16; 17; -18)$; $B(19; -21; 23)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-16; 17; -18)$; $B(-16; 38; 202)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (19; -21; 23)$; $\mathbf{b} = (10; 9; 7)$; $\mathbf{c} = (22; 23; 24)$. Знайти $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (24; -13; -14)$ і $\mathbf{b} = (-12; -13; 19)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$; $C(23; 24; 25)$; $D(34; 24; 85)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$; $C(23; 24; 25)$; $D(34; 24; 85)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2666; 6; -86)$ і $\mathbf{b} = (7; 7138; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2666; 6; 89)$ і $\mathbf{b} = (-15996; 36; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-31; 6; 7)$ і точка $A(-82; -83; -51)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дроби координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-31; 6; 7)$ і $\mathbf{b} = (-82; -83; -51)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-16; 17; -18)$, $B(19; -21; 23)$, $C(10; 9; 7)$, $D(22; 23; 24)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

82 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(17; 18; 19)$; $B(20; -22; 24)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(17; 18; 19)$; $B(40; 18; 283)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (20; -22; 24)$; $\mathbf{b} = (11; 10; 8)$; $\mathbf{c} = (23; -24; 25)$. Знайти $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-23; 14; 15)$ і $\mathbf{b} = (-13; -14; 18)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(15; 16; 17)$; $B(34; 196; 17)$; $C(19; 20; -21)$; $D(19; 23; -17)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$; $C(-24; 25; 26)$; $D(-11; 109; 26)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2610; -7; -87)$ і $\mathbf{b} = (8; 7308; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2610; -7; 88)$ і $\mathbf{b} = (-18270; 49; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(30; -7; 8)$ і точка $A(-83; -84; -52)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(15; 16; 17)$; $B(34; 196; 17)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дроби координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (30; -7; 8)$ і $\mathbf{b} = (-83; -84; -52)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(17; 18; 19)$, $B(20; -22; 24)$, $C(11; 10; 8)$, $D(23; -24; 25)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

83 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-18; 19; 20)$; $B(21; -23; -25)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-18; 19; 20)$; $B(7; 331; 20)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (21; -23; -25)$; $\mathbf{b} = (12; 11; 9)$; $\mathbf{c} = (24; 25; 26)$. Знайти $\mathbf{d} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 10\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (22; -15; 16)$ і $\mathbf{b} = (-14; -15; 17)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$; $C(23; 24; 25)$; $D(34; 24; 85)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(21; 22; 23)$; $B(28; 46; 23)$; $C(25; 26; -27)$; $D(25; 41; 85)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2552; 8; -88)$ і $\mathbf{b} = (-9; 7480; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2552; 8; 87)$ і $\mathbf{b} = (-20416; 64; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-29; 8; -9)$ і точка $A(-84; -85; -53)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-29; 8; -9)$ і $\mathbf{b} = (-84; -85; -53)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-18; 19; 20)$, $B(21; -23; -25)$, $C(12; 11; 9)$, $D(24; 25; 26)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

84 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(22; -24; 26)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(19; 20; -21)$; $B(19; 23; -17)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (22; -24; 26)$; $\mathbf{b} = (13; 12; 10)$; $\mathbf{c} = (25; -26; 27)$. Знайти $\mathbf{d} = 7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-21; 16; -17)$ і $\mathbf{b} = (-15; -16; 16)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$; $C(-24; 25; 26)$; $D(-11; 109; 26)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$; $C(-32; 33; 34)$; $D(-27; 33; 46)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2492; -9; -89)$ і $\mathbf{b} = (-10; 7654; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2492; -9; 86)$ і $\mathbf{b} = (-22428; 81; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(28; -9; -10)$ і точка $A(-85; -86; -54)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (28; -9; -10)$ і $\mathbf{b} = (-85; -86; -54)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(19; 20; -21)$, $B(22; -24; 26)$, $C(13; 12; 10)$, $D(25; -26; 27)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

85 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(23; -25; 27)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$; $B(-15; 21; 34)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (23; -25; 27)$; $\mathbf{b} = (14; 13; 11)$; $\mathbf{c} = (26; 27; 28)$. Знайти $\mathbf{d} = 8\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 12\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (20; -17; -18)$ і $\mathbf{b} = (-16; -17; 15)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(21; 22; 23)$; $B(28; 46; 23)$; $C(25; 26; -27)$; $D(25; 41; 85)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$; $C(33; 34; 35)$; $D(40; 58; 35)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2430; 10; -90)$ і $\mathbf{b} = (11; 7830; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2430; 10; 85)$ і $\mathbf{b} = (-24300; 100; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-27; 10; 11)$ і точка $A(-86; -87; -55)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(21; 22; 23)$; $B(28; 46; 23)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-27; 10; 11)$ і $\mathbf{b} = (-86; -87; -55)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-20; 21; 22)$, $B(23; -25; 27)$, $C(14; 13; 11)$, $D(26; 27; 28)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

86 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(21; 22; 23)$; $B(24; -26; -28)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(21; 22; 23)$; $B(28; 46; 23)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (24; -26; -28)$; $\mathbf{b} = (15; 14; 12)$; $\mathbf{c} = (27; -28; 29)$. Знайти $\mathbf{d} = 9\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 13\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-19; 18; 19)$ і $\mathbf{b} = (-17; -18; 14)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$; $C(-32; 33; 34)$; $D(-27; 33; 46)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$; $C(33; 34; 35)$; $D(40; 58; 35)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2366; -11; -91)$ і $\mathbf{b} = (12; 8008; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2366; -11; 84)$ і $\mathbf{b} = (-26026; 121; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (26; -11; 12)$ і точка $A(-87; -88; -56)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (26; -11; 12)$ і $\mathbf{b} = (-87; -88; -56)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(21; 22; 23)$, $B(24; -26; -28)$, $C(15; 14; 12)$, $D(27; -28; 29)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

87 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-22; 23; -24)$; $B(25; -27; 29)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-22; 23; -24)$; $B(-22; 32; 16)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (25; -27; 29)$; $\mathbf{b} = (16; 15; 13)$; $\mathbf{c} = (28; 29; 30)$. Знайти $\mathbf{d} = 10\mathbf{a} + 9\mathbf{b} - 14\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (18; -19; 20)$ і $\mathbf{b} = (-18; -19; 13)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$; $C(33; 34; 35)$; $D(40; 58; 35)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$; $C(-34; 35; -36)$; $D(-34; 44; 4)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2300; 12; -92)$ і $\mathbf{b} = (-13; 8188; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2300; 12; 83)$ і $\mathbf{b} = (-27600; 144; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-25; 12; -13)$ і точка $A(-88; -89; -57)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-25; 12; -13)$ і $\mathbf{b} = (-88; -89; -57)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-22; 23; -24)$, $B(25; -27; 29)$, $C(16; 15; 13)$, $D(28; 29; 30)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

88 Варіант. Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(23; 24; 25)$; $B(26; -28; 30)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(23; 24; 25)$; $B(34; 24; 85)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (26; -28; 30)$; $\mathbf{b} = (17; 16; 14)$; $\mathbf{c} = (29; -30; 31)$. Знайти $\mathbf{d} = 11\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 15\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-17; 20; -21)$ і $\mathbf{b} = (-19; -20; 12)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$; $C(33; 34; 35)$; $D(40; 58; 35)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(27; 28; 29)$; $B(46; 208; 29)$; $C(31; 32; -33)$; $D(31; 35; -29)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2232; -13; -93)$ і $\mathbf{b} = (-14; 8370; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2232; -13; 82)$ і $\mathbf{b} = (-29016; 169; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (24; -13; -14)$ і точка $A(-89; -90; -58)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (24; -13; -14)$ і $\mathbf{b} = (-89; -90; -58)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(23; 24; 25)$, $B(26; -28; 30)$, $C(17; 16; 14)$, $D(29; -30; 31)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

89 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-24; 25; 26)$; $B(27; -29; -31)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-24; 25; 26)$; $B(-11; 109; 26)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (27; -29; -31)$; $\mathbf{b} = (18; 17; 15)$; $\mathbf{c} = (30; 31; 32)$. Знайти $\mathbf{d} = 12\mathbf{a} + 11\mathbf{b} - 16\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (16; -21; -22)$ і $\mathbf{b} = (-20; -21; 11)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$; $C(-34; 35; -36)$; $D(-34; 44; 4)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$; $C(35; 36; 37)$; $D(46; 36; 97)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2162; 14; -94)$ і $\mathbf{b} = (15; 8554; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2162; 14; 81)$ і $\mathbf{b} = (-30268; 196; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-23; 14; 15)$ і точка $A(-90; -91; -59)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-23; 14; 15)$ і $\mathbf{b} = (-90; -91; -59)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-24; 25; 26)$, $B(27; -29; -31)$, $C(18; 17; 15)$, $D(30; 31; 32)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

90 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(28; -30; 32)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(25; 26; -27)$; $B(25; 41; 85)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (28; -30; 32)$; $\mathbf{b} = (19; 18; 16)$; $\mathbf{c} = (31; -32; 33)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-15; 22; 23)$ і $\mathbf{b} = (-21; -22; 10)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(27; 28; 29)$; $B(46; 208; 29)$; $C(31; 32; -33)$; $D(31; 35; -29)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дроби проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2090; -15; -95)$ і $\mathbf{b} = (16; 8740; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (2090; -15; 80)$ і $\mathbf{b} = (-31350; 225; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(22; -15; 16)$ і точка $A(-91; -92; -60)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(27; 28; 29)$; $B(46; 208; 29)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (22; -15; 16)$ і $\mathbf{b} = (-91; -92; -60)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(25; 26; -27)$, $B(28; -30; 32)$, $C(19; 18; 16)$, $D(31; -32; 33)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

91 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(29; -31; 33)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$; $B(-9; 27; 172)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (29; -31; 33)$; $\mathbf{b} = (20; 19; 17)$; $\mathbf{c} = (32; 33; 34)$. Знайти $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (14; -23; 24)$ і $\mathbf{b} = (-22; -23; 9)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$; $C(35; 36; 37)$; $D(46; 36; 97)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(40; 58; 35)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2016; 16; -96)$ і $\mathbf{b} = (-17; 8928; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-2016; 16; 79)$ і $\mathbf{b} = (-32256; 256; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-21; 16; -17)$ і точка $A(-92; -93; -61)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-21; 16; -17)$ і $\mathbf{b} = (-92; -93; -61)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-26; 27; 28)$, $B(29; -31; 33)$, $C(20; 19; 17)$, $D(32; 33; 34)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

92 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(27; 28; 29)$; $B(30; -32; -34)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(27; 28; 29)$; $B(46; 208; 29)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (30; -32; -34)$; $\mathbf{b} = (21; 20; 18)$; $\mathbf{c} = (33; -34; 35)$. Знайти $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-13; 24; -25)$ і $\mathbf{b} = (-23; -24; 8)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1940; -17; -97)$ і $\mathbf{b} = (-18; 9118; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1940; -17; 78)$ і $\mathbf{b} = (-32980; 289; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(20; -17; -18)$ і точка $A(-93; -94; -62)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (20; -17; -18)$ і $\mathbf{b} = (-93; -94; -62)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(27; 28; 29)$, $B(30; -32; -34)$, $C(21; 20; 18)$, $D(33; -34; 35)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

93 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-28; 29; -30)$; $B(31; -33; 35)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-28; 29; -30)$; $B(-28; 50; 190)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (31; -33; 35)$; $\mathbf{b} = (22; 21; 19)$; $\mathbf{c} = (34; 35; 36)$. Знайти $\mathbf{d} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 10\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (12; -25; -26)$ і $\mathbf{b} = (-24; -25; 7)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(40; 58; 35)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(3; 4; 5)$; $D(10; 28; 5)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1862; 18; -98)$ і $\mathbf{b} = (19; 9310; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1862; 18; 77)$ і $\mathbf{b} = (-33516; 324; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-19; 18; 19)$ і точка $A(-94; -95; -63)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(40; 58; 35)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-19; 18; 19)$ і $\mathbf{b} = (-94; -95; -63)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-28; 29; -30)$, $B(31; -33; 35)$, $C(22; 21; 19)$, $D(34; 35; 36)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

94 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(29; 30; 31)$; $B(32; -34; 36)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(29; 30; 31)$; $B(52; 30; 295)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (32; -34; 36)$; $\mathbf{b} = (23; 22; 20)$; $\mathbf{c} = (35; -36; 37)$. Знайти $\mathbf{d} = 7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-11; 26; 27)$ і $\mathbf{b} = (-25; -26; 6)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(-4; 5; -6)$; $D(-4; 14; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1782; -19; -99)$ і $\mathbf{b} = (20; 9504; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1782; -19; 76)$ і $\mathbf{b} = (-33858; 361; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(18; -19; 20)$ і точка $A(-95; -96; -64)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (18; -19; 20)$ і $\mathbf{b} = (-95; -96; -64)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(29; 30; 31)$, $B(32; -34; 36)$, $C(23; 22; 20)$, $D(35; -36; 37)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

95 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-30; 31; 32)$; $B(33; -35; -37)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-30; 31; 32)$; $B(-5; 343; 32)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (33; -35; -37)$; $\mathbf{b} = (24; 23; 21)$; $\mathbf{c} = (36; 37; 38)$. Знайти $\mathbf{d} = 8\mathbf{a} + 7\mathbf{b} - 12\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (10; -27; 28)$ і $\mathbf{b} = (-26; -27; 5)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(3; 4; 5)$; $D(10; 28; 5)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 44; 4)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1700; 20; -100)$ і $\mathbf{b} = (-21; 9700; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1700; 20; 75)$ і $\mathbf{b} = (-34000; 400; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-17; 20; -21)$ і точка $A(-96; -97; -65)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-17; 20; -21)$ і $\mathbf{b} = (-96; -97; -65)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-30; 31; 32)$, $B(33; -35; -37)$, $C(24; 23; 21)$, $D(36; 37; 38)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

96 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(34; -36; 38)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(31; 32; -33)$; $B(31; 35; -29)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (34; -36; 38)$; $\mathbf{b} = (25; 24; 22)$; $\mathbf{c} = (37; -38; 39)$. Знайти $\mathbf{d} = 9\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 13\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-9; 28; -29)$ і $\mathbf{b} = (-27; -28; 4)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(-4; 5; -6)$; $D(-4; 14; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1616; -21; -101)$ і $\mathbf{b} = (-22; 9898; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1616; -21; 74)$ і $\mathbf{b} = (-33936; 441; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (16; -21; -22)$ і точка $A(-97; -98; -66)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (16; -21; -22)$ і $\mathbf{b} = (-97; -98; -66)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(31; 32; -33)$, $B(34; -36; 38)$, $C(25; 24; 22)$, $D(37; -38; 39)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

97 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(35; -37; 39)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$; $B(-27; 33; 46)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (35; -37; 39)$; $\mathbf{b} = (26; 25; 23)$; $\mathbf{c} = (38; 39; 40)$. Знайти $\mathbf{d} = 10\mathbf{a} + 9\mathbf{b} - 14\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (8; -29; -30)$ і $\mathbf{b} = (-28; -29; 3)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 44; 4)$; $C(-1; 2; 3)$; $D(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(-4; 5; -6)$; $D(-4; 14; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1530; 22; -102)$ і $\mathbf{b} = (23; 10098; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1530; 22; 73)$ і $\mathbf{b} = (-33660; 484; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(-15; 22; 23)$ і точка $A(-98; -99; -67)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 44; 4)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (-15; 22; 23)$ і $\mathbf{b} = (-98; -99; -67)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-32; 33; 34)$, $B(35; -37; 39)$, $C(26; 25; 23)$, $D(38; 39; 40)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

98 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(36; -38; -40)$. Знайти координати вектора **AB**.
2. Дано точки: $A(33; 34; 35)$; $B(40; 58; 35)$. Знайти довжину вектора **AB**.
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (36; -38; -40)$; $\mathbf{b} = (27; 26; 24)$; $\mathbf{c} = (39; -40; 41)$. Знайти $\mathbf{d} = 11\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 15\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-7; 30; 31)$ і $\mathbf{b} = (-29; -30; 2)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами **AB** та **CD**.
6. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(5; 6; 7)$; $D(16; 6; 67)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора **AB** на вісь вектора **CD**.
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1442; -23; -103)$ і $\mathbf{b} = (24; 10300; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1442; -23; 72)$ і $\mathbf{b} = (-33166; 529; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор **AB** = $(14; -23; 24)$ і точка $A(-99; -100; -68)$. Знайти координати кінця вектора **AB**.
10. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору **AB**.
11. Дано $\mathbf{a} = (14; -23; 24)$ і $\mathbf{b} = (-99; -100; -68)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(33; 34; 35)$, $B(36; -38; -40)$, $C(27; 26; 24)$, $D(39; -40; 41)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах **AB**, **AC**, **AD**.

99 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(37; -39; 41)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$; $B(-34; 44; 4)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (37; -39; 41)$; $\mathbf{b} = (28; 27; 25)$; $\mathbf{c} = (40; 41; 42)$. Знайти $\mathbf{d} = 12\mathbf{a} + 11\mathbf{b} - 16\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (6; -31; 32)$ і $\mathbf{b} = (-30; -31; 1)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(-4; 5; -6)$; $D(-4; 14; 34)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$; $C(-2; 3; 4)$; $D(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1352; 24; -104)$ і $\mathbf{b} = (-25; 10504; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-1352; 24; 71)$ і $\mathbf{b} = (-32448; 576; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (-13; 24; -25)$ і точка $A(-100; -101; -69)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-1; 2; 3)$; $B(-1; 5; 7)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (-13; 24; -25)$ і $\mathbf{b} = (-100; -101; -69)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(-34; 35; -36)$, $B(37; -39; 41)$, $C(28; 27; 25)$, $D(40; 41; 42)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

100 **Варіант.** Домашня контрольна робота № 4 (вектори)

1. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(38; -40; 42)$. Знайти координати вектора \mathbf{AB} .
2. Дано точки: $A(35; 36; 37)$; $B(46; 36; 97)$. Знайти довжину вектора \mathbf{AB} .
3. Дано вектори: $\mathbf{a} = (38; -40; 42)$; $\mathbf{b} = (29; 28; 26)$; $\mathbf{c} = (41; -42; 43)$. Знайти $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$.
4. Дано вектори: $\mathbf{a} = (-5; 32; -33)$ і $\mathbf{b} = (-31; -32; 0)$. Знайти їх скалярний добуток.
5. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(5; 6; 7)$; $D(16; 6; 67)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу косинус кута між векторами \mathbf{AB} та \mathbf{CD} .
6. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$; $C(3; 4; 5)$; $D(10; 28; 5)$. Знайти та подати у вигляді звичайного нескоротного дробу проекцію вектора \mathbf{AB} на вісь вектора \mathbf{CD} .
7. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1260; -25; -105)$ і $\mathbf{b} = (-26; 10710; a)$. Знайти таке значення параметра a , при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} перпендикулярні.
8. Дано вектори: $\mathbf{a} = (1260; -25; 70)$ і $\mathbf{b} = (-31500; 625; a)$. Знайти таке значення параметра a при якому вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} колінеарні.
9. Дано вектор $\mathbf{AB} = (12; -25; -26)$ і точка $A(-101; -102; -70)$. Знайти координати кінця вектора \mathbf{AB} .
10. Дано точки: $A(-2; 3; 4)$; $B(3; 3; 16)$. Знайти та подати у вигляді звичайних нескоротних дробів координати одиничного (довжиною 1) вектора колінеарного вектору \mathbf{AB} .
11. Дано $\mathbf{a} = (12; -25; -26)$ і $\mathbf{b} = (-101; -102; -70)$. Знайти векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
12. Дано точки: $A(35; 36; 37)$, $B(38; -40; 42)$, $C(29; 28; 26)$, $D(41; -42; 43)$. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах \mathbf{AB} , \mathbf{AC} , \mathbf{AD} .

Список рекомендованої літератури

1. Буйвол В.М., Пятецький І. В. , Чечіна Т. Г. Збірник задач з лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії – К. : НАУ, 2003. – 136 с.
2. Лубенська Т. В. , Чунаха Л. Д. Збірник задач з лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії : навч. посібник – К. : НАУ, 2005. – 212 с.
3. Лубенська Т. В. Збірник задач з лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії: Навч. посібник – К. : НАУ, 2005. – 212 с.
4. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С. , Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ математ. аналізу. Прикладні задачі: навч. посібник – К. : Книги України ЛТД, 2009. – 578 с.
5. Довгий О.Я. Курс вищої математики для студентів спеціальності «Географія»: Навч.-метод. посібник – Івано-Франківськ.: Видавничо-дизайнерський відділ ЦТ, 2006. – 147 с.
6. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
7. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001. – 248 с.
8. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. та ін. Вища математика: Навч.-метод. Посібник для самост. вивч. диск. – К.: КНЕУ, 1999. – 396 с.
9. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. – К.: Видавничий цент „Академія”, 2002. – 624 с.
10. Дубовик В.П., Юрик І.І. та ін. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.
11. Овчинников П.Ф. та ін. Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення – К.: Техніка, 2000. – 592 с.
12. Ушаков Р.П. Повторювальний курс математики: Навч. пос.. – К.: Техніка. – 2003. – 591 с.

Методичні рекомендації

Довгий Олег Ярославович

Методичні рекомендації до вивчення розділу “Елементи векторної алгебри” для студентів спеціальності “Географія” / Довгий О.Я. – Івано-Франківськ, 2013. – 80 с.