В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан,
О.С. Кондур, В.С. Дронь

ВИЩА МАТЕМАТИКА. КУРС ЛЕКЦІЙ

У трьох частинах

Частина I

Математичні методи дослідження операцій

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2011

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11я73
В558

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист про надання грифу № 1/11-1491 від 22. 02. 2011 р.)

Рецензенти:

Благун І.С. – заслужений діяч науки і техніки України, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Івасишен С.Д. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичної фізики Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут";

Пукальський І.Д. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

В 558 **Вища математика. Курс лекцій** : [навчальний посібник] : у 3 ч. Ч.3 : Математичні методи дослідження операцій / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, О. С. Кондур, В. С. Дронь. – Івано-Франківськ : Видавництво Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2011. – 312 с.
ISBN 978-966-640-301-3

Курс лекцій охоплює теоретичний матеріал з математичних методів дослідження операцій згідно з навчальною програмою вищих навчальних закладів України. Наведено багато прикладів розв'язування задач, а також запропоновано вправи для самостійного розв'язання.

Для студентів спеціальностей: економічних, інженерно-економічних, менеджмент у виробничій та невиробничій сферах.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 978-966-640-301-3

Передмова

Посібник охоплює матеріал з вищої математики для студентів, які навчаються у вищих навчальних закладах за спеціальностями економічними, інженерно-економічними, менеджмент у виробничій та невиробничій сферах та маркетингу. Він складається з трьох частин. У першій частині розглядаються елементи лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу. Друга частина присвячена теорії ймовірностей та елементам математичної статистики. У третій частині викладено матеріали з математичних методів дослідження операцій (математичного програмування).

Основу посібника склали курси лекцій з вищої математики, що читались авторами впродовж багатьох років студентам економічних спеціальностей Чернівецького національного університету, Чернівецького торговельно-економічного інституту Київського національного університету, Прикарпатського національного університету, Інституту підприємництва та перспективних технологій при національному університеті "Львівська політехніка", Інституту управління природними ресурсами. Він разом з виданим раніше авторами збірником задач і вправ з грифом Міністерства освіти і науки України утворює повний набір навчальних посібників з вищої математики для економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Кожна частина посібника поділена на розділи, підрозділи й пункти, в яких у логічній послідовності вводяться поняття і факти вищої математики. Автори вважали за доцільне наводити доведення лише тих теорем, які вчать студентів логічно мислити. Крім того, кожне нове поняття ілюструється прикладами. Значну увагу автори звертали на складання математичних моделей економічних задач та описання методів їхнього розв'язання.

Кожний розділ посібника завершується вправами, які пропонуються для розв'язування в аудиторії або при самостійній роботі.

Тому його можна використовувати і як збірник задач і вправ.

Третя частина посібника містить сім розділів. У першому розділі висвітлені основні поняття та принципи дослідження операцій. Другий розділ присвячений моделям лінійного програмування та деяким способам їхнього розв'язування. У третьому розділі наведено елементи теорії двоїстості у лінійному програмуванні. У четвертому розділі розглянуто дві спеціальні задачі лінійного програмування – транспортна задача та задача цілочислового лінійного програмування. Елементи теорії ігор та зведення матричної гри до пари взаємно двоїстих задач лінійного програмування розглянуті у п'ятому розділі. Деякі типи задач нелінійного та динамічного програмування та методи їхнього розв'язування проаналізовані відповідно у шостому та сьомому розділах. Виклад матеріалу супроводжується значною кількістю задач і вправ, які допоможуть тим, хто вивчає вищу математику, краще зрозуміти суть понять, означень і тверджень, а також націлить їх на застосування викладеного матеріалу при розв'язуванні конкретних прикладних задач.

Предмет та об'єкти математичних методів дослідження операцій

Проблеми раціонального використання природних і виробничих ресурсів, оптимального управління виробничо-технологічними, соціально-економічними, еколого-економічними процесами сприяли інтенсивному розвитку математичної теорії оптимізаційних задач, тобто задач на знаходження мінімального або максимального значень функцій і функціоналів. Отримання на практиці їхнього розв'язку приводить, зазвичай, до досить складних задач, в окремих випадках навіть нерозв'язних, якщо не зробити деяких припущень і спрощень. Складність здійснення такого переходу полягає в тому, що потрібно вміти у системі, яка розглядається, виділити головні фактори і знехтувати другорядними, які суттєво не впливають на хід керованого процесу. Широке застосування математичних методів і сучасної обчислювальної техніки - важливий інструмент для обґрунтування рішень у всіх сферах цілеспрямованої людської діяльності.

1. Основні поняття і принципи дослідження операцій

Дослідження операцій – це наукова дисципліна, яка займається розробкою і практичним застосуванням методів найефективнішого управління різними організаційними системами.

Отже, пердметом дослідження операцій є системи організаційного управління (організації), які складаються з великого числа взаємодіючих між собою підрозділів, інтереси яких, взагалі кажучи, протилежні. Метою дослідження операцій є застосування математичних методів обґрунтування рішень, що допоможуть здійснити відповідну операцію найефективніше, тобто **оптимально**.

Основним методом дослідження систем є **метод моделювання**, тобто спосіб теоретичного аналізу і практичної дії, спрямований на розробку і використання моделей. При цьому під моделлю розумітимемо образ реального об'єкта (процесу) в матеріальній або ідеальній формі, який відображає істотні властивості модельованого об'єкта (процесу) і заміщає його під час дослідження і управління. Метод моделювання ґрунтується на принципі аналогії, тобто можливості вивчення реального об'єкта не безпосередньо, а за допомогою розгляду подібного до нього й простішого об'єкта – його моделі. Важливим при будь-якому моделюванні є поняття **адекватності моделі**, тобто відповідності моделі досліджуваному об'єкту або процесу.

Під **операцією** розумітимемо будь-який захід, спрямований на досягненя мети (цілі). Результат операції залежить від способу її проведення, організації, тобто від вибору деяких параметрів. Всякий певний вибір параметрів називається **розв'язком**. **Оптимальним** вважається той розв'язок (або розв'язки), який має перевагу, з тих чи інших міркувань, над іншими.

Ефективність операції, тобто ступінь її пристосованості до виконання задачі, кількісно виражається у вигляді критерію ефективності – **цільової функції**.

2. Основні етапи математичного моделювання

Математичне моделювання або дослідження операцій включає такі основні етапи: постановка задачі та її аналіз; побудова математичної моделі; знаходження розв'язку; перевірка й коректування моделі; аналіз знайденого розв'язку і його застосування. Розглянемо кожний з цих етапів детально.

Постановка задачі та її аналіз. На цьому етапі треба сформулювати суть проблеми, вивчити фактори, які впливають на результати досліджуваного процесу, а також виділити найважливіші риси і властивості об'єкта, вивчити його структуру, описати припущення, що пояснюють поведінку й розвиток об'єкта.

Побудова математичної моделі. Маючи постановку задачі, треба побудувати її математичну модель. У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є одним з найскладніших етапів дослідження, оскільки вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язання інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалась.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному випадку вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи. При цьому треба врахувати всі основні кількісні характеристики, які притаманні задачі. Деякі з цих характеристик, позначимо їх c_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, можуть бути незмінними, тобто сталими для цього випадку, вони називаються параметрами задачі. Інші мають характер змінних величин, залежних і незалежних, детермінованих, чи випадкових. Незалежні змінні поділяють на дві групи: 1) x_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, – керовані змінні, значення яких змінюються в деякому інтервалі; 2) y_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, – некеровані змінні, значення яких не залежать від волі людей і визначаються комплексом зовнішніх умов або параметрами системи; їх можна вважати змінними параметрами задачі й розглядати як підгрупу в заданій групі параметрів. За цих умов, як правило, вдається установити функціональну залежність між величиною f, якою вимірюється ступінь досягнення мети системи і незалежними змінними та параметрами системи:

$$f = f(X, Y, C), \tag{1}$$

де $X = (x_1; \ldots; x_n)$, $Y = (y_1; \ldots; y_m)$, $C = (c_1; \ldots; c_n)$.

Функція f називається **цільовою функцією** або функцією ефективності, оскільки її значення є мірою ефективності роботи системи по досягненню певної мети.

Очевидно, що можливості вибору значень керованих змінних x_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, обмежені. Вони залежать як від зовнішніх умов, так і від параметрів системи. Їх можна описати системою нерівностей

$$g_i(x, y) \leq b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{2}$$

яка називається **системою обмежень** або **системою умов задачі**. З економічних або інших міркувань на деякі керовані накладаються умови невід'ємності

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, k\}, \quad k \leq n, \tag{3}$$

а інколи – цілочисловості.

Отже, дослідження на екстремум цільової функції f при обмеженнях (2) і (3) визначає математичну модель задачі, яка є **задачею математичного програмування**.

Математичне програмування – це розділ прикладної математики, який вивчає задачі знаходження екстремуму функції за певних заданих умов і розробляє методи їхнього розв'язування.

Знаходження розв'язку. Всякий набір змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ що задовольняє систему обмежень (2), (3), називається **допустимим планом** задачі математичного програмування. Таких планів, взагалі кажучи, може бути багато. Множина Ω розв'язків системи (2), (3) називається **множиною допустимих планів задачі**. Плани, які реалізують екстремум цільової функції, називаються **оптимальними**.

Розв'язати задачу математичного програмування означає:

1) або знайти всі її оптимальні плани;

2) або переконатись, що цільова функція необмежена зверху (знизу) на множині допустимих планів, якщо вона досліджується на максимум (мінімум);

3) або переконатись, що множина допустимих планів є порожньою.

У залежності від вигляду і структури цільової функції та обмежень використовують ті або інші методи математичного програмування. За характером математичних співвідношень задачі математичного програмування діляться на такі: 1) **лінійні**, у яких функції f і g_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, є лінійними; 2) **нелінійні**, у яких всі або частина з функцій f, g_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, є нелінійними; 3) **статистичні**, у яких враховується випадковий характер досліджуваних процесів; 4) **детерміновані**, у яких нехтують випадковим характером реальних процесів і враховують лише усереднені значення параметрів; 5) **динамічні**, у яких розглядається розвиток цієї системи впродовж декількох періодів часу; 6) **статичні**, у яких розглядається лише один період часу; 7) **дискретні,** в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень; 8) **неперервні,** якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі. Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які в свою чергу поділяються на інші класи. Наприклад, як детерміновані, так і статистичні задачі можуть бути статичними або динамічними, які вже бувають лінійними або нелінійними.

Крім основних типів задач математичного програмування можна також за різними ознаками виокремлювати й інші підтипи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і статистичного програмування. Наприклад, як окремий тип розглядають задачі цілочислового програмування, транспортні задачі, дробово-лінійного програмування, задачі теорії ігор.

Найпростішими з розглянутих типів є статичні детерміновані лінійні задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їхнього розв'язування розроблено універсальний метод, який називається симплексним методом. Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Проте для деяких типів лінійних задач, що мають особливу структуру, доцільно розробляти спеціальні методи розв'язання, які є ефективнішими. Так, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими методами є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Перевірка й коректування моделі. Складність економічних і природничих систем (явищ, процесів) як об'єктів досліджень вимагає їхнього ретельного вивчення з метою з'ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв'язків між їхніми елементами. Оскільки часто між об'єктами, що досліджуються, є лише статистичні залежності, то на етапі моделювання використовують можливі спрощення і припущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей. Однак лише прийняття певних гіпотез уможливлює формалізацію будь-якої ситуації. Тому у складних системах, до яких відносяться системи організаційного типу, модель лише частково відображає реальний процес. Отже, необхідна перевірка ступеня відповідності або адекватності моделі реальному процесу. Перевірку здійснюють порівнюючи передбачувану (прогнозовану) поведінку з фактичною при зміні значень зовнішніх некерованих впливів.

Коректування може вимагати додаткових досліджень об'єкта, уточнення структури математичної моделі, зміни параметрів моделі.

При цьому, чотири названі вище етапи повторюють багаторазово до тих пір, поки не буде досягнуто необхідної відповідності між реальним об'єктом і математичною моделлю.

Аналіз знайденого розв'язку та його застосування. На цьому етапі розв'язується важливе питання правильності й повноти результатів моделювання і застосування їх як в практичній діяльності, так і з метою удосконалення моделі. Тому в першу чергу треба провести перевірку адекватності моделі за тими властивостями, що вибрані як істотні, тобто треба провести перевірку правильності структури (логіки) моделі та відповідності даних, одержаних на основі моделі, реальному процесові.

3. Типові класи задач дослідження операцій

За змістом типові задачі дослідження операцій можна розбити на певні класи [5].

Задачі управління обмеженими запасами полягають у відшуканні оптимальних значень рівня запасів і розміру замовлення. Особливістю цих задач є те, що при збільшенні рівня запасів, з одного боку, збільшуються витрати на їхнє зберігання, а з другого боку, зменшуються витрати внаслідок можливого дефіциту запасів.

Задачі сіткового планування розглядають співвідношення між строками закінчення великого комплексу операцій (робіт) і моментами початку операцій комплексу. Ці задачі передбачають знаходження мінімальних тривалостей комплексу операцій, оптимального співвідношення між величинами вартостей і термінами виконання.

Задачі масового обслуговування присвячені вивченню та аналізу систем обслуговування з чергами заявок або вимог і полягають у визначенні показників ефективності роботи систем, їхніх оптимальних характеристик, наприклад, у визначенні числа каналів обслуговування, часу обслуговування і т.п.

Задачі розподілу ресурсів виникають, коли існує певний набір робіт (операцій), які необхідно виконувати, а наявних ресурсів для виконання кожної роботи як найкраще не вистачає і тому треба знайти оптимальний розподіл ресурсів між операціями.

Задачі ремонту і заміни обладнання з'являються у тих випадках, коли працююче обладнання зношується, старіє і з часом потребує заміни. Вони зводяться до знаходження оптимальних термінів, числа профілактичних ремонтів і перевірок, а також моментів заміни обладнання модернізованим.

Задачі календарного складання розкладу полягають у визначенні оптимальної черговості виконання операцій (наприклад, обробки деталей) на різних типах обладнання.

Задачі планування і розміщення полягають у визначенні оптимального числа і місця розміщення нових об'єктів з врахуванням їхньої взаємодії з існуючими об'єктами і між собою.

Задачі вибору маршруту або сіткові задачі найчастіше зустрічаються при дослідженні різноманітних задач на транспорті і в системі зв'язку і полягають в знаходженні найекономічніших маршрутів.

Врахування невизначеності як об'єктивної характеристики розвитку економічних систем, а також об'єктивне існування конфліктності, розуміння того, що на заплановане економічне зростання впливають випадкові чинники, котрі можуть, зокрема, затримати очікуваний результат, або змінити його, – важлива проблема аналізу, моделювання та управління економічними системами та процесами. Правила прийняття рішень в умовах невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику базуються на різних концепціях. Тому важливу роль відіграють моделі прийняття оптимальних рішень у таких ситуаціях, що вивчає теорія ігор. До конфліктних ситуацій, в яких стикаються інтереси двох або більше сторін, що переслідують різні цілі, належать ситуації в економіці, правознавстві, військовій справі і т.д. У цих задачах треба виробити рекомендації щодо розумної поведінки учасників конфлікту, визначити їхні оптимальні стратегії.

Загальна задача лінійного програмування

Серед задач математичного програмування найпростішими і найкраще вивченими є задачі лінійного програмування.

Лінійне програмування – наука про методи дослідження і відшукання найбільших і найменших значень деякої лінійної функції при певних обмеженнях, які відображаються системою лінійних нерівностей або рівнянь. Лінійне програмування широко використовується в економіці, оскільки дослідження залежностей між величинами, які зустрічаються в економічних задачах, приводять до лінійної цільової функції з лінійними обмеженнями, накладеними на незалежні змінні. Такі задачі часто трапляються на практиці, наприклад, при розв'язанні проблем розподілу ресурсів, планування виробництва, керування різноманітними виробничими і технологічними процесами, організації роботи транспорту.

1. Постановка задачі лінійного програмування

Нехай треба дослідити на екстремум лінійну функцію

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

при лінійних обмеженнях

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right.$$

$\{c_j,\, a_{ij},\, b_i\} \subset \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\{m,\, n\} \subset \mathbb{N}$.

Ця задача відноситься до задач про дослідження на умовний екстремум деякої функції. Здавалося б, що для дослідження лінійної функції багатьох змінних на умовний екстремум достатньо застосувати відомі методи з математичного аналізу, але виявляється, що це неможливо через специфіку вказаних задач.

Оскільки f є лінійною функцією, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = c_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, але всі коефіцієнти цільової функції f не можуть одночасно дорівнювати нулю, тому всередині області, утвореної системою обмежень, стаціонарних точок немає. Вони можуть бути на межі області, але досліджувати точки межі неможливо, бо частинні похідні є сталими. Отже, застосування класичних методів пошуку умовного екстремуму функцій для розв'язування заданої задачі неможливе, тому для розв'язування задач лінійного програмування довелося створювати спеціальні методи.

Під загальною задачею лінійного програмування розуміють задачу вигляду

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \to \text{extr}; \tag{1}$$

при лінійних обмеженнях

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\{\leq, =, \geq\}b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\{\leq, =, \geq\}b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\{\leq, =, \geq\}b_m; \end{array}\right. \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, \ldots, k\}, \quad k \leq n, \tag{3}$$

де $\{c_j, a_{ij}, b_i\} \subset \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$.

1.1. Приклади задач лінійного програмування

Розглянемо декілька прикладів реальних задач, математичні моделі яких є задачами лінійного програмування.

Задача про використання сировини (задача планування виробництва). Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують три типи сировини S_1, S_2, S_3. Запаси сировини, кількість одиниць сировини, що витрачається на виготовлення одиниці продукції, а також величина прибутку, одержувана від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці

Тип сировини	Кількість од. сир. S_i, що що витр. на вигот. од. прод. P_j		Запаси сировини
	P_1	P_2	
S_1	2	5	20
S_2	8	5	40
S_3	5	6	30
Прибуток	50	40	

Треба скласти математичну модель задачі знаходження плану випуску продукції, щоб при її реалізації одержати максимальний прибуток.

◀ Позначимо через x_j, $j \in \{1, 2\}$, кількість одиниць продукції P_j, $j \in \{1, 2\}$. Тоді, враховуючи кількість одиниць сировини, що витрачається на виготовлення одиниці продукції, а також запаси сировини, дістанемо систему обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \end{cases}$$

яка стверджує, що кількість сировини, яка витрачається на виготовлення всієї продукції, не повинна перевищувати запасів сировини. Якщо продукція P_j не випускається, то $x_j = 0$, $j \in \{1, 2\}$, а якщо випускається, то $x_j > 0$, $j \in \{1, 2\}$. Отже, одержуємо знакові обмеження на невідомі x_1, x_2:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Реалізація x_1 одиниць продукції P_1 і x_2 одиниць продукції P_2 дає відповідно $50x_1$ і $40x_2$ грошових одиниць прибутку, а тому сумарний прибуток

$$f = 50x_1 + 40x_4 \ \ \text{(гр.од.)}$$

Отже, ми одержали математичну модель задачі:

$$f = 50x_1 + 40x_2 \to \max;$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\}. \ \blacktriangleright$$

Зауваження 1. Задачу, що розглядається вище, можна узагальнити на випадок, коли при виготовленні n видів продукції використовується m типів сировини. Позначимо через S_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, тип сировини; b_i – запаси сировини S_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$; P_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, – вид продукції; a_{ij} – кількість одиниць i-ої сировини, що йде на виготовлення одиниці j-ої продукції; c_j – величину прибутку від реалізації одиниці продукції P_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Треба скласти математичну модель задачі знаходження плану випуску продукції, щоб при її реалізації одержати максимальний прибуток.

◀ Запишемо умови задачі у вигляді таблиці

Тип сировини	Кількість од. сир. S_i, що витр. на вигот. од. пр. P_j				Запаси сировини
	P_1	P_2	$\ldots$	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	b_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
S_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
Прибуток	c_1	c_2	$\ldots$	c_n	

Нехай x_j – кількість одиниць продукції P_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max; \tag{4}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{5}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \qquad \blacktriangleright \tag{6}$$

Задача про розкрій матеріалів. З листового прокату треба вирізати заготовки двох видів P_1 і P_2 для виробництва 60 штук виробів. Для одного виробу слід мати три заготовки типу B_1 і вісім заготовок типу B_2. Розміри листа, а також розміри і конфігурація заготовок дозволяють вибрати чотири раціональних варіанти A_1, A_2, A_3 і A_4 розкрою листа, що задано таблицею

Вид заготов.	Варіант розкрою				Потреби
	A_1	A_2	A_3	A_4	
B_1	4	3	2	1	180
B_2	0	4	6	10	480
Відходи	12	5	3	0	

Необхідно скласти модель задачі знаходження оптимального плану розкрою, який передбачає мінімальні сумарні відходи.

◀ Нехай x_j – кількість листів, які розкроюються за варіантом A_j, $j \in \{1, \ldots, 4\}$. Тоді сумарна кількість відходів дорівнює $f = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 0x_4$.

Оскільки заготовок виду B_1 має бути 180 штук, а заготовок виду B_2 – 480 штук, то, враховуючи те скільки заготовок цих видів виходить при відповідному варіанті розкрою, дістаємо обмеження задачі

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 180, \\ 0 \cdot x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 480, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

Крім того, всі x_j, $j \in \{1, \ldots, 4\}$, набувають цілих значень.

Згідно з умовою задачі сумарні відходи мають бути мінімальними, а тому математична модель задачі має вигляд

$$f = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 0x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 180, \\ 0 \cdot x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 480, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}. \ \blacktriangleright$$

Зауваження 2. Узагальнемо цю задачу. Припустимо, що деякий напівфабрикат (листи, рулони, прути, тощо), який надходить на виробництво, треба розкроїти на відповідні заготовки певного вигляду. Відомо, що кожну одиницю матеріалу можна розкроїти одним із можливих способів розкрою. При цьому використання того чи іншого способу розкрою одиниці матеріалу зумовлює відповідні відходи матеріалу. Задача полягає в такому виборі способу розкрою кожної одиниці матеріалу, щоб було одержано потрібне число заготовок кожного типу і водночас сумарна величина відходів матеріалу була б найменшою.

◀ Введемо такі позначення. Нехай m – число типів заготовок; n – число способів розкрою одиниці матеріалу; a_{ij} – число заготовок i-го типу, що одержується при розкрої одиниці матеріалу j-м способом; b_i – число потрібних заготовок i-го типу; c_j – величина відходу при розкрої одиниці матеріалу j-м способом; x_j – число одиниць матеріалу, що планується розкроїти j-м способом, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$.

Запишемо умови задачі у вигляді таблиці

Вид заготовок	К-сть заг-к i-го типу при розкрої од. матер. j-м сп.				Потреби
	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	b_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
S_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
Відходи	c_1	c_2	$\ldots$	c_n	

Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{7}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{8}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \ldots, n\}. \qquad \blacktriangleright \tag{9}$$

Можливі складніші постановки цієї задачі, які включають вимогу цілочисловості окремих невідомих x_j, наявності листів різного формату і т.п. [14].

Задача про складання кормового раціону (задача про дієту). При відгодівлі кожна тварина щоденно повинна отримувати не менше 9 одиниць поживної речовини S_1, не менше 8 одиниць речовини S_2 і не менше 12 одиниць речовини S_3. Для складання раціону використовуються два види корму P_1 і P_2. Вміст кількості одиниць поживної речовини в 1 кг кожного виду корму і вартість 1 кг корму наведено в таблиці

Поживні речовини	Кількість од. поживної речовини в 1 кг корму		Кількість поживної речовини
	P_1	P_2	
S_1	3	1	9
S_2	1	2	8
S_3	1	6	12
Вартість 1 кг корму	4	6	

Треба скласти математичну модель формування добового раціону потрібної поживності при мінімальних витратах на нього.

◀ Для складання математичної моделі позначимо через x_1 і x_2 відповідно кількість корму P_1 і P_2 (кг) в добовому раціоні. Тоді з умови задачі випливає, що повинні виконуватись такі обмеження:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

Якщо корм P_1 не використовується в раціоні, то $x_1 = 0$, а коли використовується, то $x_1 > 0$. Аналогічно маємо, що $x_2 \geq 0$. Отже, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.

Нашою метою є добитися мінімальних витрат при складанні добового раціону. Оскільки сумарна вартість раціону

$$f = 4x_1 + 6x_2,$$

то цю функцію треба дослідити на мінімум. Отже, математична модель задачі така:

$$f = 4x_1 + 6x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \ \blacktriangleright$$

Зауваження 3. Задачу про складання кормового раціону можна узагальнити, якщо передбачити в раціоні m типів поживних речовин S_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, у кількостях не менших від b_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, одиниць і використовувати n видів корму P_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$. При цьому через a_{ij} позначимо кількість одиниць поживної речовини S_i, що міститься в одиниці P_j корму, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, а через c_j – вартість одиниці корму P_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

$\blacktriangleleft$ Нехай x_j – кількість одиниць корму P_j в денному раціоні, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min; \tag{10}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m; \end{cases} \tag{11}$$

$$x_j \geq 0, \ j \in \{1, \ldots, n\}. \qquad \blacktriangleright \tag{12}$$

Зауваження 4. Якщо врахувати те, що певні поживні речовини мають максимальну добову норму, то систему обмежень треба доповнити нерівностями вигляду

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le d_i, \; i \in \{1, \ldots, k\}, \; k \le n,$$

де d_i – максимальна добова норма i-ої поживної речовини.

Задача про використання потужностей (задача про завантаження обладнання). Підприємству задано план випуску продукції відносно часу й асортименту: треба за час T випустити $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одиниць продукції P_1, P_2, ..., P_n. Продукція виробляється на верстатах S_1, S_2, ..., S_m. Для кожного верстата відомі продуктивність a_{ij}, тобто число одиниць продукції P_j, яке можна виготовити на верстаті S_i, а також витрати c_{ij} на виготовлення продукції P_j на верстаті S_i за одиницю часу, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Треба скласти модель задачі знаходження оптимального плану роботи верстатів, тобто такого розподілу випуску продукції між верстатами, щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальними.

◀ Позначимо через x_{ij} час, впродовж якого верстат S_i буде зайнятий виготовленням продукції P_j, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Оскільки час роботи кожного верстата обмежений і не перевищує T, то правильні нерівності

$$\left\{ \begin{array}{c} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \le T, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} \le T, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} \le T. \end{array} \right. \tag{13}$$

Для виконання плану випуску за номенклатурою необхідно, щоб виконувалися рівності

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_{1n} = b_1, \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{2n} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \ldots + a_{mn}x_{mn} = b_m. \end{array} \right. \tag{14}$$

Крім того,

$$x_j \geq 0,\ i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{15}$$

Витрати на виробництво всієї продукції виражаються функцією

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}. \tag{16}$$

Отже, математична модель задачі така: знайти розв'язок $X = (x_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$, який задовольняє системи (13), (14), умови (15) і при якому функція (16) набуває мінімального значення. ▶

Задача про інвестиції. Пропонується n інвестиційних проектів P_1, P_2, ..., P_n, економічний аналіз яких передбачає одержати для кожного з проектів P_j достатньо переконливі кількісні оцінки c_j, очікуваного ефекту від його реалізації, і необхідні величини капіталовкладень g_j. Загальний обсяг можливих інвестицій обмежений величиною G. Необхідно так розпорядитися наявними фінансовими ресурсами, щоб сумарний ефект був максимальним.

◀ Введемо керовані змінні

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо проект } P_j \text{ інвестується,} \\ 0, & \text{якщо не інвестується.} \end{cases}$$

Тоді математична модель задачі має вигляд

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \max;$$

$$g_1x_1 + g_2x_2 + \ldots + g_nx_n \leq G;$$
$$x_j \in \{0; 1\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Зазначена задача є задачею дискретного лінійного програмування з булевими змінними, тобто змінними, які можуть набувати лише двох значень 0 або 1. ▶

1.2. Форми запису задачі лінійного програмування

При постановці задач лінійного програмування можливі різні випадки: цільова функція в одних задачах максимізується, а в інших мінімізується; обмеження на змінні можуть задаватися рівностями або нерівностями. Крім того, у деяких задачах вимога невід'ємності поширюється не на всі змінні. Важливим є те, що в усіх цих випадках відмінності носять формальний характер. Зокрема, немає необхідності розрізняти задачі максимізації і мінімізації цільової функції, оскільки

$$\max f(x) = -\min(-f(x)),$$

$$\min f(x) = -\max(-f(x)).$$

Стосовно систем обмежень задачі, то в залежності від їх особливостей усі постановки задачі лінійного програмування вкладаються у три основні типи: стандартну, канонічну і загальну.

Задачі вигляду

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{array}\right. \tag{17}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, n\},$$

або

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min;$$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m; \end{array}\right. \tag{17'}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, n\}.$$

називають **стандартними (симетричними)**

Це задачі з однотипними обмеженнями-нерівностями і невід'ємними змінними. Очевидно, що задачі про використання сировини (4) – (6) і про складання добового раціону (10) – (12) є стандартними.

У стандартній задачі співвідношення між числом невідомих n і числом обмежень m може бути довільним, тобто задача має зміст при $n > m$, $n = m$ і $n < m$.

Часто задачі (17) і (17′) записують відповідно у вигляді:

$$
\begin{gathered}
f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}; \\
x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\};
\end{gathered} \tag{18}
$$

$$
\begin{gathered}
f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}; \\
x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.
\end{gathered} \tag{18′}
$$

Канонічною задачею називається задача, де всі змінні невід'ємні, а обмеження мають форму рівностей:

$$
\begin{gathered}
f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \mathrm{extr}; \\
\left\{
\begin{array}{c}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m;
\end{array}
\right. \\
x_j \ge 0, \ j \in \{1, \ldots, n\},
\end{gathered} \tag{19}
$$

або

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{extr};$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}; \tag{20}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

У канонічній задачі число невідомих завжди більше числа рівнянь, $n > m$. Справді, якщо число невідомих дорівнює числу рівнянь і рівняння лінійно незалежні, то система має єдиний розв'язок, і задача оптимізації відсутня.

Якщо ж рівнянь більше ніж невідомих, то вони або лінійно залежні, і тоді частину з них можна відкинути, або суперечливі, і тоді задача не має допустимих розв'язків.

Надалі вважатимемо, що серед рівнянь системи обмежень канонічної задачі немає зайвих, тобто вони утворюють систему лінійно незалежних рівнянь, і матриця умов задачі має ранг m.

Частинним випадком канонічної задачі є задача в **базисній формі**, яка характерна тим, що всі $b_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, і в кожному рівнянні є змінна з коефіцієнтом 1, яка не входить в жодне з решти рівнянь. Така змінна називається **базисною**. Наприклад,

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{extr};$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\};$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

де $b_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Тут змінні x_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, є базисними.

Загальна задача лінійного програмування – це задача, в якій є обмеження у вигляді як рівностей, так і нерівностей, крім того, умова невід'ємності накладається не на всі змінні:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{extr};$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i \in \{1, \dots, m_1\}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, \quad i \in \{m_1+1, \dots, m_2\}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i \in \{m_2+1, \dots, m\}; \end{cases} \tag{21}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, n_1\};$$

$$x_j \text{ – довільні, } j \in \{n_1+1, \dots, n\}.$$

Стандартні і канонічні задачі можна записувати у різних формах.

Матрична форма. Введемо позначення $C = (c_1; c_2; \dots; c_n)$;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді стандартні задачі (17) і (17′) можна подати у матричній формі відповідно:

$$f = CX \to \max; \qquad f = CX \to \min;$$
$$AX \le A_0; \qquad AX \ge A_0;$$
$$X \ge 0. \qquad X \ge 0.$$

Канонічна задача набуває вигляду:

$$f = CX \to \text{extr};$$
$$AX = A_0;$$
$$X \ge 0.$$

Векторна форма. Якщо позначити через A_j j-й стовпчик матриці A, тобто

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

то задачі (17) і (17′) відповідно можна подати у векторній формі:

$$f = CX \to \max;$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n \le A_0;$$
$$X \ge 0,$$

$$f = CX \to \min;$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n \ge A_0;$$
$$X \ge 0,$$

де CX – скалярний добуток векторів $C = (c_1; \ldots; c_n)$ і $X = (x_1; \ldots; x_n)$.

Канонічна задача у векторній формі має вигляд

$$f = CX \to \text{extr};$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = A_0,$$
$$X \ge 0.$$

1.3. Еквівалентні перетворення задач лінійного програмування

Очевидно, що стандартна і канонічна задачі є частинними випадками загальної. Кожна з них має своє специфічне застосування.

Наприклад, виробничі та планово-економічні процеси описуються математичною задачею лінійного програмування в стандартній або загальній формі. Оскільки основні методи розв'язування розроблені для канонічної задачі, то виникає необхідність зведення однієї задачі до іншої. Виявляється, що всі три форми задач лінійного програмування еквівалентні між собою: загальна задача за допомогою простих перетворень зводиться до стандартної або канонічної, а останні перетворюються одна в другу. Тому, розв'язавши будь-яку з них, ми однозначно дістанемо розв'язок другої.

Опишемо перетворення, які дозволяють зводити одну форму задачі лінійного програмування до іншої.

Для переходу від канонічної до стандартної форми треба кожне рівняння

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

замінити двома нерівностями

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i \end{cases}$$

або однією з таких пар:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ -(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) \le -b_i; \end{cases} \quad \begin{cases} -(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) \ge -b_i, \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i. \end{cases}$$

Для переходу від стандартної задачі з числом нерівностей m і невідомих n до канонічної вводяться додаткові невід'ємні змінні x_{n+1}, $i \in \{1, \ldots, m\}$ і кожна нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$

замінюється рівністю

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Це можна робити, оскільки правильною є лема [8].

Лема. *Всякому розв'язку $(\alpha_1; \ldots; \alpha_n)$ нерівності*

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \tag{22}$$

відповідає розв'язок $(\alpha_1; \ldots; \alpha_n; \alpha_{n+i})$ рівняння

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \tag{23}$$

де

$$x_{n+i} \geq 0 \tag{24}$$

і, навпаки, кожному розв'язку $(\alpha_1; \ldots; \alpha_n; \alpha_{n+i})$ *рівняння (23) і нерівності (24) відповідає розв'язок* $(\alpha_1; \ldots; \alpha_n)$ *нерівності (22).*

Зауваження 5. Кожну нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

можна відповідно замінити рівністю

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

де $\quad x_{n+i} \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}$.

Зауваження 6. Канонічну задачу лінійного програмування можна звести до симетричної форми, зменшивши кількість незалежних змінних.

Нехай ми маємо задачу

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{25}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{26}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad m < n. \tag{27}$$

До системи обмежень (26) застосуємо метод Жордана-Гаусса так, щоб перші m змінних стали базисними

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad +\bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ \qquad x_2 \qquad\quad +\bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_m \; +\bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_m. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо

$$\begin{cases} x_1 = \bar{b}_1 - (\bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n), \\ x_2 = \bar{b}_2 - (\bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \bar{b}_m - (\bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n). \end{cases} \tag{28}$$

Звідси, врахувавши те, що $x_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, дістанемо еквівалентну систему нерівностей

$$\begin{cases} \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n \leq \bar{b}_1, \\ \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n \leq \bar{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n \leq \bar{b}_m. \end{cases} \tag{29}$$

Підставивши (28) у цільову функцію (25), після зведення подібних членів, дістанемо

$$f = \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{c}_n x_n + c_0.$$

Отже, задача (25) – (27) замінюється еквівалентною їй симетричною (стандартною) задачею:

$$f = \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{c}_n x_n + c_0 \to \max;$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n \leq \bar{b}_1, \\ \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n \leq \bar{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n \leq \bar{b}_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{m+1, \ldots, n\}.$$

У канонічних та симетричних задачах усі незалежні змінні невід'ємні. Проте в багатьох прикладних задачах змінні можуть бути невід'ємними, недодатними або такими, що можуть набувати як додатних, так і від'ємних значень. Тому при розв'язуванні цих задач розробленими методами математичного програмування виникає необхідність переходу до невід'ємних змінних. Покажемо як це робити.

Нехай змінна x_k є невід'ємною, тоді ця змінна не зазнає жодних перетворень. Якщо змінна $x_p \leq 0$, то введемо нову змінну $\bar{x}_p = -x_p$, яка є невід'ємною, тобто $\bar{x}_p \geq 0$. У випадку, коли x_q довільного знаку, тобто може бути як додатною, так і від'ємною, а також набувати значення 0, то її замінюємо різницею невід'ємних змінних, тобто $x_q = x'_q - x''_q$, де $x'_q \geq 0$, $x''_q \geq 0$.

Отже, використовуючи, описані вище, перетворення, будь-яку задачу можна звести до потрібного вигляду. Це означає, що, вміючи розв'язувати, наприклад, канонічну задачу, ми зможемо розв'язати будь-яку іншу.

Приклад 1. Звести до канонічного вигляду задачу:

$$f = 8x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 16, \\ 4x_1 - 2x_2 \le 20; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0.$$

◀ У заданій задачі обидва обмеження є нерівностями, а на змінну x_2 не накладено ніяких обмежень. Для зведення задачі до канонічного вигляду введемо в обмеження-нерівності додаткові (балансуючі) невід'ємні змінні $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, які ввійдуть в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами, а змінну x_2 замінимо різницею двох невід'ємних змінних $x_2' \ge 0$ і $x_2'' \ge 0$. Дістанемо таку задачу:

$$f = 8x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' + x_3 = 16, \\ 4x_1 - 2x_2' + 2x_2'' + x_4 = 20; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \quad ▶$$

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду на максимум задачу:

$$f = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 \le 12, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 8; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$$

◀ На змінні x_1 і x_2 накладено вимогу невід'ємності. Змінну x_3 замінимо на $\bar{x}_3 = -x_3$, вважаючи, що $\bar{x}_3 \ge 0$. Змінну x_4 замінюємо різницею $x_4 = x_4' - x_4''$, де $x_4' \ge 0$, $x_4'' \ge 0$. Крім того, введемо дві додаткові (балансуючі) змінні $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$, щоб перетворити перше і друге обмеження-нерівності в рівності. Далі від цільової функції f перейдемо до функції $\bar{f} = -f$.

Остаточно задача набуде вигляду

$$\bar{f} = -(2x_1 - 3x_2 - \bar{x}_3 - 2x_4' + 2x_4'') \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4\bar{x}_3 + x_4' - x_4'' + x_5 = 12, \\ -2x_1 + 3x_2 - \bar{x}_3 - 2x_4' + 2x_4'' - x_6 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + \bar{x}_3 + 3x_4' - 3x_4'' = 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \bar{x}_3 \geq 0,\ x_4' \geq 0,\ x_4'' \geq 0,$$

$$x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0. \qquad \blacktriangleright$$

Приклад 3. Звести до стандартного вигляду канонічну задачу

$$f = 2 - x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

◀ Запишемо систему обмежень у вигляді нерівностей, зменшивши кількість незалежних змінних. Для цього спочатку зведемо систему до базисної форми, використавши метод Жордана-Гаусса:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_0
2	1	$\boxed{1}$	−3	10
4	1	−1	1	8
2	1	1	−3	10
6	2	0	−2	18
2	1	1	−3	10
3	$\boxed{1}$	0	1	9
−1	0	1	−2	1
3	1	0	−1	9

Отже, система обмежень набула базисного вигляду

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 9. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_1 + 2x_4, \\ x_2 = 9 - 3x_1 + x_4. \end{cases}$$

Підставивши знайдені x_2 і x_3 у цільову функцію, одержимо, що

$$f = 2 - x_1 + 3(9 - 3x_1 + x_4) = 29 - 10x_1 + 3x_4.$$

Оскільки $x_2 \geq 0$ і $x_3 \geq 0$, то систему обмежень можна записати у вигляді нерівностей

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_4 \leq 1, \\ 3x_1 - x_4 \leq 9. \end{cases}$$

Отже, наша задача зведена до такої стандартної форми:

$$f = 29 - 10x_1 + 3x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_4 \leq 1, \\ 3x_1 - x_4 \leq 9. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_4 \geq 0. \quad \blacktriangleright$$

2. Властивості задач лінійного програмування

Вивчення властивостей задачі лінійного програмування вимагає додаткових понять і означень лінійної алгебри.

2.1. Опуклі множини точок

Означення 1. Множина Ω називається опуклою, якщо вона разом з двома своїми довільними точками $X_1 \in \Omega$, $X_2 \in \Omega$ містить всі точки вигляду

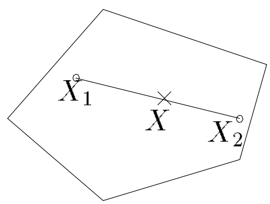
$$X = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2, \tag{1}$$

де $0 \leq \alpha \leq 1$.

У випадку, коли $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то $X_1 = (x_1^{(1)}; x_2^{(1)})$, $X_2 = (x_1^{(2)}; x_2^{(2)})$ і рівнсть (1) в координатах має вигляд:

$$x_1 = \alpha x_1^{(1)} + (1 - \alpha) x_1^{(2)}, \quad x_2 = \alpha x_2^{(1)} + (1 - \alpha) x_2^{(2)}, \tag{2}$$

де x_1 і x_2 координати точки X, тобто $X(x_1; x_2)$. Рівності (2) рівносильні колінеарності векторів $\overrightarrow{X_2 X}$ і $\overrightarrow{X_2 X_1}$, тобто рівності $\overrightarrow{X_2 X} = \alpha \overrightarrow{X_2 X_1}$.

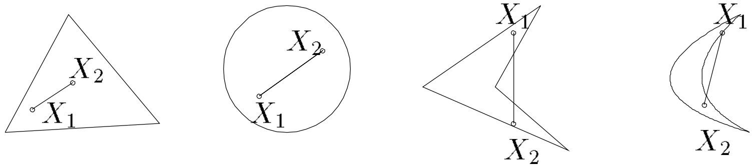


Очевидно, що коли α пробігає значення від 0 до 1, то точка X описує відрізок $X_2 X_1$. Точка X, для якої виконується умова (1), називається **опуклою лінійною комбінацією точок X_2 і X_1.** Точки X_1 і X_2 називаються **кутовими** або **крайніми** точками відрізка $X_1 X_2$.

Якщо врахувати те, що (1) є параметричним рівнянням прямої, яка проходить через точки X_1 і X_2, то можна дати геометричне означення опуклої множини.

Означення 2. Множина Ω називається опуклою, якщо вона разом зі своїми двома довільними точками X_1 і X_2 містить і відрізок, який їх з'єднує.

Прикладами опуклих множин є прямолінійний відрізок, пряма, напівплощина, круг, куля, куб, напівпростір і т.д.

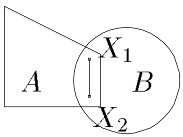


Опуклі множини Неопуклі множини

Опуклі множини мають важливу властивість, яка описується такою теоремою.

Теорема 1. *Переріз довільного числа опуклих множин є опуклою множиною.*

◀ Розглянемо випадок двох множин. Нехай X_1 і X_2 – довільні дві точки перерізу множин A і B. Оскільки точки X_1 і X_2 належать перерізу множин, тобто одночасно і опуклій множині A, і опуклій множині B, то згідно з означенням опуклої множини всі точки



відрізка X_1X_2 будуть належати як множині A, так і множині B, тобто перерізу цих множин. Звідси й випливає, що переріз двох множин є опуклою множиною. ▶

Означення 3. Точка X називається опуклою лінійною комбінацією точок X_1, X_2, ..., X_n, якщо виконується умова

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n,$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

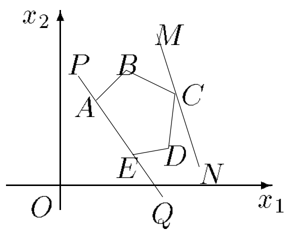
У відповідності з означенням 1 множина Ω називається **опуклою**, якщо вона містить опуклу лінійну комбінацію будь-яких своїх точок.

Означення 4. Точка опуклої множини називається **крайньою**, якщо її не можна подати у вигляді опуклої лінійної комбінації будь-яких двох різних точок цієї множини.

Наприклад, крайніми точками многокутника є його вершини.

Опукла замкнена множина точок простору (площини), яка має скінченне число кутових (крайніх) точок, називається **опуклим многогранником (многокутником)**, якщо вона обмежена, і **опуклою многогранною (многокутною) областю**, якщо вона необмежена.

Кутові точки многокутника називаються його **вершинами**, а відрізки, що з'єднують дві вершини і утворюють його межу – **сторонами**.



Опорною прямою опуклого многокутника називається пряма, яка має з многокутником, розміщеним по один бік від неї, принаймні одну спільну точку. Прямі MN і PQ є опорними до многокутника $ABCDE$.

У випадку многогранника кутові точки називають також **вершинами**, многокутники, які обмежують многогранник, називають **гранями**, а відрізки, по яких вони перетинаються, – **ребрами**. **Опорною площиною** многогранника називається площина, яка має з многогранником, розміщеним по один бік від неї, принаймні одну спільну точку.

2.2. Геометричний зміст розв'язків нерівностей, рівнянь та їх систем

Розглянемо розв'язки нерівностей.

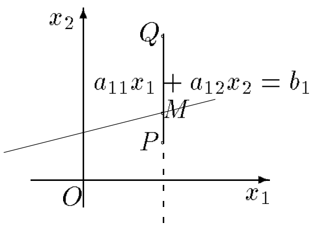
Теорема 2. *Множина розв'язків нерівності з двома змінними*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \tag{3}$$

є однією з двох півплощин, на які пряма $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ ділить всю площину, включаючи й цю пряму, а друга півплощина з тією самою прямою є множиною розв'язків нерівності

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1. \tag{4}$$

◀ Для довільної абсциси x_1 ордината точки M, яка лежить на прямій $a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$, за умови, що $a_{12} \neq 0$, є $x_2 = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x_1+\dfrac{b_1}{a_{12}}$, тобто координати точки M $\left(x_1; -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \dfrac{b_1}{a_{12}}\right)$. Через точку M проведемо пряму, паралельну осі Ox_2.



Тоді для довільних точок P і Q цієї прямої, розміщених вище і нижче точки M, тобто у верхній і нижній півплощинах, будуть правильними нерівності $x_{2Q} \geq x_{2M}$ і $x_{2P} \leq x_{2M}$ або $x_2 \geq -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x_1+\dfrac{b_1}{a_{12}}$ і $x_2 \leq -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x_1+\dfrac{b_1}{a_{12}}$.

За умови, що $a_{12} > 0$, нерівності зводяться відповідно до вигляду $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ і $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$, тобто координати всіх точок верхньої півплощини задовольняють нерівність (3), а нижньої півплощини – нерівність (4).

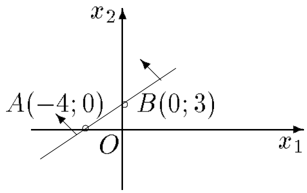
У випадку $a_{12} < 0$ навпаки, координати всіх точок верхньої півплощини задвольняють нерівність (4), а координати нижньої півплощини – нерівність (3). ▶

Приклад 1. Побудувати множину розв'язків нерівності:

1) $3x_1 - 4x_2 \leq -12$; 2) $3x_1 - 2x_2 \geq 0$.

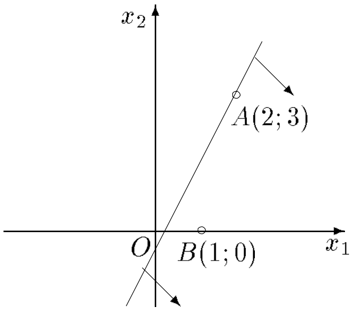
◀ Згідно з теоремою 2 множина розв'язків нерівності є півплощиною.

1) Будуємо пряму $3x_1 - 4x_2 = -12$, знайшовши точки її перетину з осями координат $A(-4; 0)$ і $B(0; 3)$. Для визначення шуканої півплощини візьмемо контрольну точку, наприклад $O(0; 0)$, що не лежить на цій прямій.



Оскільки нерівність не виконується в точці O, бо $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 > -12$, то вона не виконується і в усіх точках півплощини, яка містить контрольну точку O. Шукана область указана стрілками.

2) Пряма $3x_1 - 4x_2 = 0$ проходить через точку $O(0;0)$ і, наприклад, точку $A(2;3)$.



За контрольну точку візьмемо точку $B(1;0)$. Найпростішу точку $O(0;0)$ брати за контрольну не можна, бо вона лежить на нашій прямій. Оскільки координати контрольної точки $B(1;0)$ задовольняють нерівність, бо $3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \geq 0$, то розв'язком цієї нерівності є нижня (права) півплощина, яка містить цю точку. ▶

Враховуючи, що множина точок, які задовольняють рівняння

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{5}$$

при $n = 3$, є площиною, а при $n > 3$ – її узагальненям у n-вимірному просторі – **гіперплощиною**, теорему 2 можна поширити на випадок трьох і більше змінних: множина всіх розв'язків лінійної нерівності з n змінними

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

є одним з півпросторів, на які весь простір ділить площина або гіперплощина (5), включаючи й цю площину (гіперплощину) [8].

Розглянемо множину розв'язків системи нерівностей.

Теорема 3. *Множина розв'язків сумісної системи m лінній-*

них нерівностей з двома змінними

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases}$$

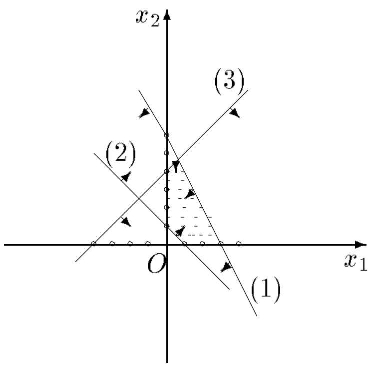
є опуклим многокутником або опуклою многокутною областю.

◀ Кожна з нерівностей згідно з теоремою 2 визначає одну з півплощин, яка є опуклою множиною точок. Множиною розв'язків сумісної системи лінійних нерівностей є точки, які належать півплощинам розв'язків усіх нерівностей, тобто належать їхньому перерізу. Згідно з теоремою 1 про переріз опуклих множин ця множина є опуклою і містить скінченне число кутових точок, тобто є опуклим многокутником або опуклою многокутною областю. ▶

Аналогічно можна довести, що множина розв'язків сумісної системи m лінійних нерівностей з n змінними є опуклим многогранником або опуклою многогранною областю в n-вимірному просторі.

Приклад 2. Побудувати множину розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$



◀ Для побудови шуканої множини розв'язків системи нерівностей послідовно побудуємо півплощини, що визначаються кожною з нерівностей, як це було зроблено в прикладі 1. Заштрихована область і є множиною розв'язків системи нерівностей. ▶

2.3. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Розглянемо канонічну задачу

$$f = CX \to \max; \tag{6}$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = A_0, \tag{7}$$

$$X \geq 0, \tag{8}$$

де CX – скалярний добуток векторів $C = (c_1; \ldots; c_n)$ і $X = (x_1; \ldots; x_n)$, вектори-стовпчики

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

складаються відповідно з коефіцієнтів при змінних і вільних членів.

З обмежень (7), (8) випливає, що вектор $X = (x_1; \ldots; x_n)$, $x_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, є **планом** задачі (6) – (8) тоді й тільки тоді, коли вектор A_0 є невід'ємною лінійною комбінацією векторів A_1, A_2, ..., A_n, де коефіцієнтами є координати вектора X.

Означення 5. План $X = (x_1; \ldots; x_n)$ задачі (6) – (8) називається **опорним**, якщо система векторів-стовпчиків A_j, які відповідають додатним x_j, лінійно незалежна.

З цього означення випливає, що число додатних координат опорного плану не перевищує m, бо вектори A_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, є m-вимірними, а у m-вимірному просторі максимальне число лінійно незалежних векторів дорівнює m.

Опорний план називається **невиродженим**, якщо число його додатних координат дорівнює m, і **виродженим**, якщо воно менше за m.

Означення 6. Базисом опорного плану називається система з m лінійно незалежних векторів-стовпчиків A_j матриці A, що містить всі вектори, які відповідають додатним координатам опорного плану.

Приклад 3. Система обмежень деякої задачі лінійного програмування має вигляд

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, 2, 3\}.$$

З'ясувати, чи є план $X = (1/2; 0; 1/4)$ опорним.

◀ Додатним координатам плану $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{1}{4}$ відповідають вектори-стовпчики A_1 і A_3 матриці A. Якщо ці вектори лінійно незалежні, то план $X = (1/2; 0; 1/4)$ буде опорним.

Для перевірки того, чи є вектори A_1 і A_3 лінійно незалежні, обчислимо визначник, складений з координат цих векторів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то вектори A_1 і A_3 лінійно незалежні і план $X = \left(\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{4}\right)$ є опорним.

Очевидно, що вектори A_1 і A_3 утворюють базис, що відповідає опорному плану $X = \left(\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{4}\right)$. ▶

Теорема 4. *Множина планів задачі лінійного програмування опукла, якщо вона непорожня.*

◀ Для зручності використовуватимемо матричний запис задачі лінійного програмування

$$f = CX \to \max; \tag{9}$$

$$AX = A_0; \tag{10}$$

$$X \geq 0. \tag{11}$$

Нехай X_1 і X_2 – плани задачі лінійного програмування (9) – (11). Доведемо, що їхня опукла лінійна комбінація $X = \alpha_1 X_1 +$

$\alpha_2 X_2$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1 \geq 0$ також є її планом. Оскільки X_1 і X_2 плани задачі, то $AX_1 = A_0$, $AX_2 = A_0$. Тоді

$$AX = A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 = \alpha_1 A_0 + (1-\alpha_1)A_0 = A_0,$$

тобто X задовольняє систему (10). Очевидно, що $X \geq 0$, бо $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$ і $\alpha_2 \geq 0$.

Отже, X – план задачі лінійного програмування (9) – (11). ▶

З теореми 4 випливає, що множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла, а, точніше, є опуклим многогранником або опуклою многогранною областю, яку надалі називатимемо **многогранником розв'язків** і позначатимемо символом Ω.

Відповідь на питання, в якій точці многогранника розв'язків досягається екстремум цільової функції дає теорема.

Теорема 5. *Якщо цільова функція f має максимум на опуклому многограннику допустимих розв'язків (планів), то він досягається у вершині (кутовій точці) цього многогранника.*

Якщо цільова функція має максимум більше ніж в одній кутовій точці, то вона набуває його в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією цих точок.

◀ Вважатимемо, що многогранник розв'язків Ω є обмеженим. Позначимо його кутові точки через X_1, ..., X_k, а оптимальний розв'язок через X^*, тобто $\max\limits_{\Omega} f(X) = f(X^*)$. Тоді $f(X^*) \geq f(X)$, $X \in \Omega$. Якщо серед вершин X_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, знайдеться принаймні одна, наприклад, X_p, для якої $\max f = CX^* = CX_p$, то теорема доведена. Припустимо протилежне, тобто, що X^* не є кутовою точкою. Тоді

$$f(X^*) = CX^* \geq CX_i = f(X_i),\ i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Подамо X^* у вигляді лінійної комбінації кутових точок многогранника розв'язків

$$X^* = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k,$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, k\}, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Оскільки f – лінійна функція, то

$$f(X^*) = CX^* = C\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_i = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i CX_i = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(X_i).$$

Позначимо максимальне значення функції f серед усіх кутових точок через f_0, тобто $f_0 = \max\{f(X_1), \ldots, f(X_k)\}$. Тоді $f(X^*) \leq \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i f_0 = f_0\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i = f_0$.

З нерівностей $f(X^*) \geq f(X)$, $X \in \Omega$, і $f(X^*) \leq f_0$ випливає, що $f(X^*) = f_0$, тобто існує хоча б одна кутова точка, де цільова функція досягає свого максимального значення.

Для доведення другої частини теореми припустимо, що f набуває максимуму в декількох вершинах X_1, …, X_q многогранника розв'язків Ω, тобто $\max\limits_{\Omega} f(X) = CX_i = f_0$, $i \in \{1, \ldots, q\}$. Тоді для довільної опуклої лінійної комбінації

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_q X_q,\ \ \alpha_i \geq 0,\ \ i \in \{1, \ldots, q\},\ \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_q = 1,$$

цих вершин, маємо

$$f = CX = C\sum_{i=1}^{q}\alpha_i X_i = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i CX_i = f_0\sum_{i=1}^{q}\alpha_i = f_0,$$

тобто цільова функція f набуває максимального значення в довільній точці X, яка є опуклою лінійною комбінацією кутових точок X_1, …, X_q. ▶

Згідно з цією теоремою, замість дослідження нескінченної множини допустимих розв'язків для знаходження серед них шуканого оптимального розв'язку, досить дослідити лише скінченне число кутових точок многогранника розв'язків.

Наступна теорема дає аналітичний метод знаходження кутових точок [12].

Теорема 6. *Вектор X є опорним планом задачі (9) – (11) тоді й тільки тоді, коли X є вершиною многогранника Ω допустимих планів.*

З теореми 6 випливає, що множина опорних планів задачі лінійного програмування збігається з множиною крайніх точок або вершин многогранника Ω, який визначається умовами задачі. З еквівалентності алгебраїчного поняття опорного плану геометричному поняттю вершини многогранника випливають очевидні наслідки.

Наслідок 1. *Кожна вершина многогранника Ω має не більше m додатних координат.*

Це очевидно, оскільки число додатних координат опорного плану згідно з означенням не може перевищувати m.

Наслідок 2. *Кожній вершині многогранника Ω відповідає $k \leq m$ лінійно незалежних векторів-стовпчиків матриці A.*

Це по суті означення 5, де поняття опорного плану замінено поняттям вершини многогранника.

Отже, якщо цільова функція задачі лінійного програмування обмежена на опуклому многограннику, заданому умовами задачі, то існує крайня точка (опорний план) цієї множини, у якій цільова функція досягає максимуму. Тому для розв'язування задачі лінійного програмування треба дослідити тільки вершини многогранника розв'язків – опорні плани задачі лінійного програмування.

3. Градієнтний (графічний) метод розв'язування задач лінійного програмування

В основі градієнтного (графічного) методу лежить геометричний зміст задачі лінійного програмування. Застосовується цей метод в основному при розв'язуванні задач у випадку двох незалежних змінних і тільки деяких задач, коли є три незалежні змінні, оскільки графічно важко побудувати многогранник розв'язків у n-вимірному просторі, де $n \geq 3$.

Розглянемо спочатку задачу лінійного програмування у випадку двох незалежних змінних

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \text{extr}; \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{3}$$

Припустимо, що система (2) за умов (3) сумісна і її многокутник розв'язків обмежений.

Кожна з нерівностей (2) за умов (3), як доведено раніше, визначає півплощину з межею $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. Цільова функція (1) при фіксованих значеннях h визначає пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, $h \in \mathbb{R}$.

Будуємо многокутник розв'язків, який визначається системою обмежень (2), (3) і графік цільової функції (1) при $f = 0$. Тоді задачу (1) – (3) можна тлумачити так: знайти вершину многокутника розв'язків, у якій пряма $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ опорна і цільова функція f набуває при цьому максимуму (мінімуму).

Значення цільової функції f зростає у напрямку вектора $\vec{n} \equiv$ rm $\text{grad}\, f = (c_1; c_2)$, тому пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ (f) пересуваємо паралельно самій собі у напрямку вектора $\vec{n}$.

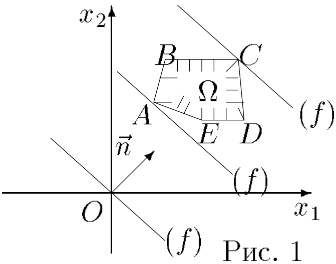


Рис. 1

З рис. 1 випливає, що пряма (f) двічі стає опорною до многокутника розв'язків Ω, а саме, в точках A і C, причому мінімальне значення досягається цільовою функцією в точці A, а максимальне – в точці C.

Координати точки A знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь, якими визначаються прямі AE і AB, а координати точки C – систему рівнянь, якими визначаються прямі BC і CD.

Якщо многокутник розв'язків необмежений, то можливі випадки:

1) пряма (f), тобто лінія рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ рухаючись у напрямку вектора $\vec{n}$ або протилежно до нього, постійно перетинає многокутник розв'язків і в жодній точці не є опорною до нього. У цьому випадку цільова функція не обмежена на многокутнику розв'язків як зверху, так і знизу (рис. 2);

2) пряма (f), рухаючись все таки стає опорною щодо многокутника розв'язків. Тоді в залежності від вигляду області цільова функція може бути обмеженою зверху і необмеженою знизу (рис. 3,а), обмеженою знизу і необмеженою зверху (рис. 3,б), або обмеженою як знизу, так і зверху (рис. 3,в).

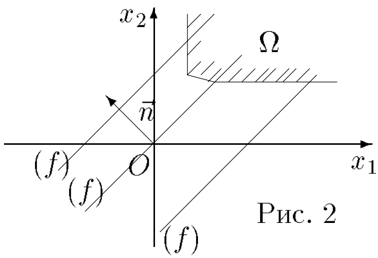


Рис. 2

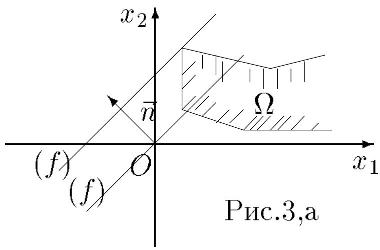


Рис.3,а

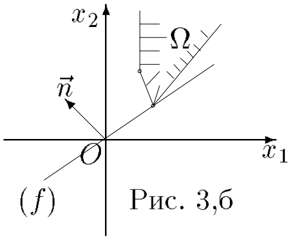


Рис. 3,б

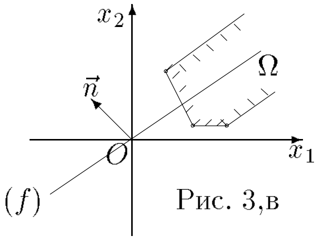


Рис. 3,в

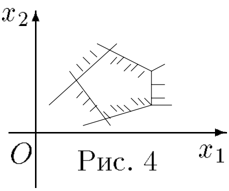


Рис. 4

Якщо обмеження задачі суперечливі, то множина допустимих розв'язків порожня, а отже, задача не має оптимального розв'язку (рис. 4).

Цільова функція може набувати оптимального значення як у одній вершині (рис. 3,а і 3,б), так і на відрізку (рис. 5) чи промені (рис. 3,в).

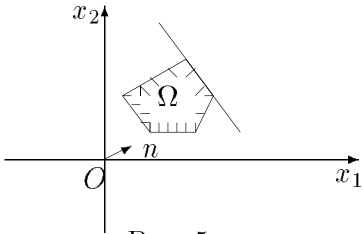


Рис. 5

Приклад 1. Розв'язати задачу про використання сировини:

$$f = 50x_1 + 40x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20; \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40; \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\}.$$

◀ Побудуємо многокутник розв'язків. Для цього в системі координат

Ox_1x_2 на площині зобразимо межові прямі (рис. 6)

$$\begin{array}{lr} 2x_1+5x_2=20, & (1)\\ 8x_1+5x_2=40, & (2)\\ 5x_1+6x_2=30, & (3)\\ x_1=0, x_2=0, & (4)\end{array}$$

і опишемо півплощини, які визначає кожне обмеження. Спільна частина цих півплощин і є многокутником розв'язків, зображеним на рис. 6

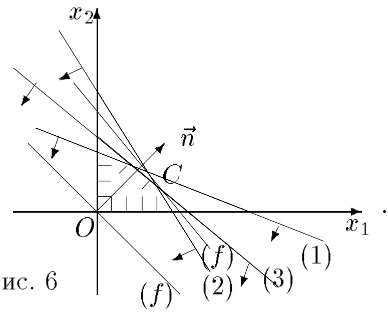


Рис. 6

Для побудови лінії рівня $50x_1+40x_2=0$ (f) будуємо нормальний вектор $\vec{n}=(50;40)=10(5;4)$ і через точку 0 проводимо пряму, перпендикулярну до цього вектора. Побудовану пряму пересуваємо паралельно самій собі у напрямку вектора $\vec{n}$. З рисунка 6 випливає, що опорною до многокутника розв'язків Ω ця пряма є в точці C, де функція f набуває максимального значення. Координати точки C знаходимо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 8x_1+5x_2=40, \\ 5x_1+6x_2=30, \end{cases} \quad \left|\begin{array}{c} 5 \\ -8 \end{array}\right|\begin{array}{c} 6 \\ -5 \end{array}$$

$$23x_2=40, \quad x_2=\frac{40}{23}\approx 1,7;$$

$$23x_1=90, \quad x_1=\frac{90}{23}\approx 3,9.$$

Оптимальний план задачі $X^*=(3,9;1,7)$, а $f_{\max}=50\cdot 3,9+40\cdot 1,7\approx 260,3$.

Отже, для одержання максимального прибутку в розмірі 260,3 грошових одиниць, необхідно запланувати виробництво 3,9 одиниць продукції P_1 і 1,7 одиниць продукції P_2. ▶

Приклад 2. Розв'язати задачу про складання кормового раціону:

$$f = 4x_1 + 6x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

◀ Побудуємо многокутник розв'язків. Для цього в системі Ox_1x_2 на площині зобразимо межові прямі

$$\begin{array}{cc} 3x_1 + x_2 = 9, & (1) \\ x_1 + 2x_2 = 8, & (2) \\ x_1 + 6x_2 = 12, & (3) \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 0 & (4) \end{array}$$

і з'ясуємо, яку півплощину визначає кожна нерівність відносно відповідної прямої (рис. 7).

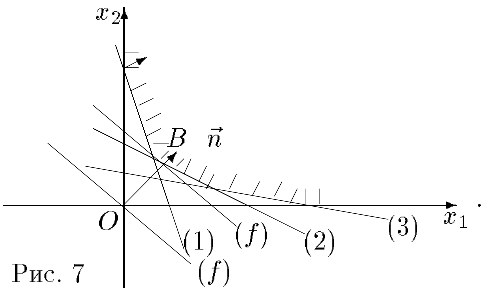


Рис. 7

Будуємо вектор $\vec{n} = (4; 6) = 2(2; 3)$ і пряму $4x_1 + 6x_2 = 0$ (f). Якщо пересувати пряму (f) у напрямку вектора $\vec{n}$, то вперше вона стає опорною до многокутника розв'язків Ω у точці B, а це означає, що в цій точці функція f набуває мінімального значення. Точка B лежить на перетині прямих (1) і (2), а тому для знаходження її координат треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \end{cases}$$

звідки випливає, що

$$-5x_2 = -15, \quad x_2 = 3,$$

$$5x_1 = 10, \quad x_1 = 2.$$

Отже, оптимальний план $X^* = (2;3)$, а $f_{\min} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26$.

Це означає, що для забезпечення необхідного добового раціону при мінімальних витратах у 26 грошових одиниць треба скласти раціон з 2 кг корму P_1 і 3 кг корму P_2. ▶

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$f = 2x_1 + 2x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

◀ Будуємо спочатку множину допустимих планів задачі (многокутник розв'язків)– п'ятикутник $ABCDE$ (рис. 8). Очевидно, що мінімум цільової функції f досягається на відрізку AE, де $A(1;0)$, $E(0;1)$. Отже, задача має безліч розв'язків, які зобразимо за допомогою опуклої лінійної комбінації $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, де $X_1^* = (1;0)$, $X_2^* = (0;1)$, $\lambda \in [0;1]$. Тоді $f_{\min} = 2 \cdot 1 = 2$. ▶

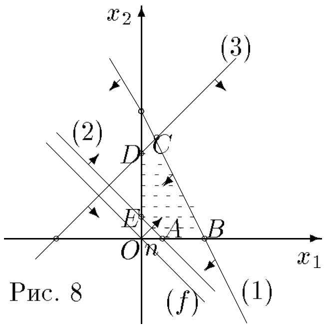


Рис. 8

Зауваження. За допомогою графічного методу можна розв'язувати задачі лінійного програмування, система обмежень яких містить n невідомих і m лінійних незалежних рівнянь, якщо n і m зв'язані співвідношенням $n - m = 2$.

Справді, нехай є канонічна задача лінійного програмування:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \text{extr}; \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{array}\right. \tag{5}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{6}$$

де всі рівняння лінійно незалежні і виконується співвідношення $n - m = 2$.

За допомогою методу Жордана-Гаусса зведемо систему (5) до базисної форми, де базисними змінними є $x_1, \ldots, x_m$, а вільними x_{m+1}, і x_n:

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & & & +a'_{1m+1}x_{m+1} + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ & x_2 & & +a'_{2m+1}x_{m+1} + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & x_m & +a'_{mm+1}x_{m+1} + a'_{mn}x_n = b'_m; \end{array}\right. \tag{7}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Знайдемо x_1, …, x_m з (7) і підставимо в цільову функцію f. Тоді цільова функція виразиться через вільні змінні x_{m+1} і x_n. Врахувавши те, що всі базисні змінні невід'ємні та відкинувши їх, перейдемо від обмежень (7) до обмежень, які є нерівностями. Отже, одержуємо задачу:

$$f = c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{1n}x_n + c'_0 \to \text{extr};$$

$$\left\{\begin{array}{c} a'_{1m+1}x_{m+1} + a'_{1n}x_n \leq b'_1, \\ a'_{2m+1}x_{m+1} + a'_{2n}x_n \leq b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{mm+1}x_{m+1} + a'_{mn}x_n \leq b'_m; \end{array}\right.$$

$$x_{m+1} \geq 0, \quad x_n \geq 0.$$

Ця задача містить дві незалежні змінні, а тому її можна розв'язати графічно. Знайшовши оптимальні значення x^*_{m+1} і x^*_n, підставимо їх у (7), тоді одержимо оптимальні значення x^*_1, …, x^*_m.

Приклад 4. Розв'язати задачу

$$f = x_1 + 2x_3 + x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 + x_5 = 5, \\ \qquad\quad x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 - x_5 = 2, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 \quad -x_4 + x_5 = 1; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

◀ У цій задачі $n = 5$, $m = 3$. Оскільки $n - m = 2$, то задачу можна розв'язувати графічно. Для цього систему обмежень запишемо у базисній формі, скориставшись методом Жордана-Гаусса.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
1	1	1	1	1	5
0	$\boxed{1}$	1	1	−1	2
0	0	1	−1	1	1
1	0	0	0	2	3
0	1	1	1	−1	2
0	0	$\boxed{1}$	−1	1	1
1	0	0	0	2	3
0	1	0	2	−2	1
0	0	1	−1	1	1

Отже, система обмежень набуде вигляду

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad +2x_5 = 3, \\ \qquad x_2 \qquad\quad +2x_4 - 2x_5 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 \quad\; -x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_4 + 2x_5, \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5. \end{cases}$$

Підставивши ці вирази в цільову функцію, дістанемо

$$f = 3 - 2x_5 + 2(1 + x_4 - x_5) + x_5 = 2x_4 - 3x_5 + 5.$$

Якщо відкинути базисні змінні $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ і $x_3 \geq 0$ у системі обмежень, то одержимо таку задачу лінійного програмування:

$$f = 2x_4 - 3x_5 + 5 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_5 \leq 3; \\ 2x_4 - 2x_5 \leq 1, \\ -x_4 + x_5 \leq 1; \end{cases}$$

$$x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.$$

Розв'яжемо цю задачу графічно (рис. 9), де $\vec{n} = (2; -3) = 2\,(1; -3/2)$.

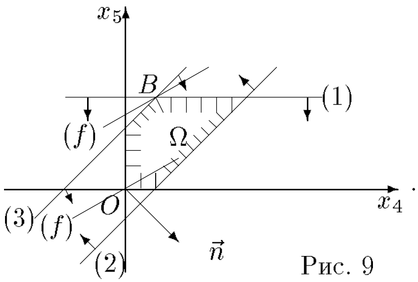


Рис. 9

Очевидно, що f досягає мінімуму в точці B, яка є точкою перетину прямих (1) і (3):

$$\begin{cases} 2x_5 = 3, \\ -x_4 + x_5 = 1, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x_5^* = \dfrac{3}{2}, \\ x_4^* = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Тоді $\quad f_{\min} = 2x_4^* - 3x_5^* + 5 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot \dfrac{3}{2} + 5 = \dfrac{3}{2}.$

Оскільки

$$x_1^* = 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0; \quad x_2^* = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} 2 \cdot 2 = 3; \quad x_3^* = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0,$$

то оптимальним розв'язком вихідної задачі є $X^* = \left(0; 3; 0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$, $f_{\min} = \dfrac{3}{2}$. ▶

4. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Серед універсальних методів розв'язування задач лінійного програмування найпоширенішим є симплексний метод (симплекс-метод), розроблений американським вченим Дж. Данцігом. Ідея цього методу полягає в тому, що початковий опорнй план послідовно покращується і за певне число етапів (ітерацій) доводиться до оптимального. Знаходження початкового опорного плану і перехід до наступного опорного плану здійснюється за допомогою застосування методу Жордана-Гаусса до системи лінійних рівнянь у канонічній формі, у якій повинна бути записана задача лінійного програмування. Напрямок переходу від одного опорного розв'язку до іншого вибирається згідно з критерієм оптимальності цільової функції задачі. При цьому використовується той факт, що коли задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то він відповідає принаймні одній кутовій точці многогранника розв'язків, тобто допустимому опорному плану.

Основою обчислювальної схеми симплексного методу є перетворення базисних систем лінійних рівнянь. Кожне перетворення зв'язане із переведенням однієї базисної змінної в список небазисних, а однієї небазисної – в список базисних. При цьому зазначений перехід здійснюється так, що значення цільової функції, яка досліджується на максимум (мінімум), на наступному опорному плані має бути не меншим (не більшим), ніж на попередньому.

4.1. Алгебра симплексного методу

Розглянемо задачу лінійного програмування в канонічній формі

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{1}$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ \bar{a}_{21}x_1 + \bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_{m1}x_1 + \bar{a}_{m2}x_2 + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \ j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3}$$

$$\bar{b}_i \geq 0, \ \ i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{4}$$

За допомогою жорданових виключень

$$\bar{a}_{rs} \neq 0, \tag{5}$$

$$a_{rj} = \frac{1}{\bar{a}_{rs}} \bar{a}_{rj}, \quad b_r = \frac{1}{\bar{a}_{rs}} \bar{b}_r, \tag{6}$$

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{is}\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}, \quad b_i = \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is}\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}, \tag{7}$$

$$i \in \{1, \ldots, m\}, i \neq r, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

систему обмежень (2) зведемо до базисної форми, де базисними змінними є, наприклад, перші m змінних x_1, ..., x_m:

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_1 & & & +a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ & x_2 & & +a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & & x_m & +a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \tag{8}$$

причому $\quad b_i \geq 0, \ \ i \in \{1, \ldots, m\}$.

Тоді загальний і базисний розв'язки системи відповідно мають вигляд

$$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i \in \{1, \ldots, m\}; \tag{9}$$

$$x_i = \left\{ \begin{array}{ll} b_i, & i \in \{1, \ldots, m\}; \\ 0, & i \in \{m+1, \ldots, n\}. \end{array} \right. \tag{10}$$

Цільову функцію f перетворимо так, щоб вона залежала тільки від вільних змінних. Підставивши (9) в (4), дістанемо

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j \right) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

або

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{j=m+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \right) x_j$$

Ввівши позначення

$$f_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i, \tag{11}$$

$$f_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{12}$$

зведемо цільову функцію до вигляду

$$f = f_0 - \sum_{j=m+1}^{n} (f_j - c_j)\, x_j$$

або

$$f = f_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j, \tag{13}$$

де

$$\Delta_j = f_j - c_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{14}$$

Рівність (13) називається **зведеним виразом цільової функції**, а коефіцієнти Δ_j – **зведеними коефіцієнтами цільової функції** або **оцінками відповідних змінних** x_j.

Оскільки базисна змінна входить в одне з рівнянь системи з коефіцієнтом 1, а в інші – з коефіцієнтом 0, то з (12) випливає, що для базисних змінних правильна рівність $f_j = c_j$, а отже, оцінки базисних змінних дорівнюють нулю, тобто

$$\Delta_j = f_j - c_j = c_j - c_j = 0, \quad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

З'ясуємо зв'язок між величиною цільової функції і вільними змінними.

Можливі три випадки.

Випадок 1. Усі коефіцієнти Δ_j при вільних змінних x_j функції (13) невід'ємні, тобто $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{m+1, \ldots, n\}$. Тоді будь-яке збільшення вільних змінних $x_{m+1}, \ldots, x_n$, які в базисному розв'язку дорівнюють нулю, приводить до зменшення функції f. Отже, допустимий базисний розв'язок (10) реалізує максимум цільової функції $f_{\max} = f_0$ і є оптимальним. Звідси випливає, що умова $\Delta_j = f_j - c_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, є умовою оптимальності опорного плану задачі.

Випадок 2. Серед оцінок Δ_j вільних змінних є принаймні одна від'ємна і при цьому серед коефіцієнтів стовпчика базисної системи, який їй відповідає, немає додатних. У цьому випадку функція f необмежена зверху в області допустимих розв'язків.

Справді, нехай $\Delta_s < 0$ і всі $a_{is} \leq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Тоді, покладаючи у виразах (9) і (13) усі вільні змінні, крім x_s, рівними нулю, дістанемо

$$x_i = b_i - a_{is}x_s, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{15}$$

$$f = f_0 - \Delta_s x_s. \tag{16}$$

Оскільки $\Delta_s < 0$, то з (16) випливає, що при збільшенні x_s функція f монотонно зростає. Одночасно з (15) випливає, що при $a_{is} \leq 0$ всі змінні x_i, залежні від x_s, залишаються невід'ємними при довільних як завгодно великих x_s. Отже, функція f максимуму не має, оптимальний план відсутній, хоча допустимих планів безліч.

Випадок 3. Вільна змінна x_s має оцінку $\Delta_s < 0$ і принаймні один із коефіцієнтів $a_{is} > 0$. Тоді можна знайти новий опорний план, для якого значення цільової функції є більшим, якщо розглядуваний опорний план невироджений.

Справді, як видно з (16), при $\Delta_s < 0$ збільшення x_s приводить до зростання цільової функції. Збільшення x_s допустиме до тих пір, поки праві частини виразу (15) залишаються невід'ємними при всіх i. Максимально можливе значення $x_s = \theta_{0s}$, при якому забезпечується невід'ємність змінних в (15), визначається з умови

$$\theta_{0s} = \min_{i \,:\, a_{is}>0} \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \right\} = \frac{b_r}{a_{rs}}. \tag{17}$$

Число θ_{0s} називають **симплексним відношенням**.

Для невиродженого опорного плану всі $b_i > 0$, і, отже, $\theta_{0s} > 0$. Надаючи у відповідності з (17) змінній x_s значення

$$x_s = \theta_{0s} \equiv \frac{b_r}{a_{rs}}, \tag{18}$$

ми переведемо вільну змінну x_s у число базисних замість базисної змінної x_r. Для визначення значень решти базисних змінних x_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq s$, виконаємо за формулами (3) крок жорданового перетворення з провідним елементом a_{rs}. Тоді базисний розв'язок перетвореної системи набуде вигляду

$$\begin{cases} x_i = b_i - \dfrac{a_{is} b_r}{a_{rs}}, \quad i \in \{1, \ldots, m\},\ i \neq r, \\ x_r = 0, \\ x_s = \dfrac{b_r}{a_{rs}}, \\ x_j = 0, \quad j \in \{m+1, \ldots, n\},\ j \neq s. \end{cases} \tag{19}$$

Зауваження 1. Якщо мінімум відношень $\dfrac{b_i}{a_{is}}$ у (17) досягається у декількох рядках $i \in \{r, q, \ldots\}$, то нульових значень набудуть декілька відповідних змінних x_r, x_q, ... Нова базисна змінна x_s вводиться замість будь-якої з них, а решта залишаються в базисі. Отже, одержуваний в цьому випадку план є виродженим.

Вивчимо, як змінюється цільова функція при переході до нового опорного плану. У відповідності з рівностями (16), (18) її нове значення визначається рівністю

$$f' = f_0 - \frac{\Delta_s}{a_{rs}} b_r. \tag{20}$$

Оскільки $\Delta_s < 0$, $\dfrac{b_r}{a_{rs}} > 0$, то цільова функція зростає на величину $\Delta_s \theta_{0s} = \Delta_s \dfrac{b_r}{a_{rs}}$. Вираз (20) нагадує формулу (7) жорданових виключень для знаходження правих частин системи обмежень, де коефіцієнт a_{is} замінено коефіцієнтом Δ_s.

Справді, вираз (13), записаний у вигляді

$$f + \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j = f_0 \tag{21}$$

формально не відрізняється від рівнянь системи обмежень. Тому його можна розглядати як $(m+1)$-е рівняння з базисною змінною f, і виконувати над елементами Δ_j, f_0 ті самі перетворення, що й над елементами a_{ij}, b_i. Формула для знаходження перетворених елементів Δ'_j набуде вигляду

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_s a_{rj}}{a_{rs}}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{22}$$

Отже, виконавши жорданове перетворення системи обмежень (8), розширеної рядком зведеної цільової функції (21), дістанемо новий допустимий план (допустимий базисний розв'язок) системи (8), для якого значення цільової функції вже буде більшим.

Для з'ясування, чи є новий базисний розв'язок оптимальним, треба провести аналіз оцінок Δ_j. При цьому виникає знову один з трьох можливих випадків. Якщо має місце випадок 3, то процес жорданових перетворень продовжується. Після скінченного числа перетворень при невиродженому початковому опорному плані й невироджених опорних планах на кожній з ітерацій можливі випадки 1 або 2, тобто або буде знайдено оптимальний розв'язок, або буде доведено, що цільова функція необмежена. Оскільки число різних опорних планів дорівнює C_n^m, то симплексний метод є скінченним.

Якщо в процесі ітерацій з'явиться вироджений опорний план, то на цій ітерації перехід до наступного опорного плану відбувається без збільшення цільової функці. Теоретично можливий випадок, коли послідовність вироджених опорних планів повторюється, тобто відбувається зациклювання. Для запобігання зациклювання розроблено спеціальні прийоми. Слід зазначити, що на практиці зациклювання майже не зустрічається.

Зауваження 2. Якщо розглядати задачу на мінімум, то умовою оптимальності її плану є $\Delta_j \leq 0$ для всіх $j \in \{1, \ldots, n\}$. Випадки 2 і 3 переформулюються відповідно так. Якщо серед оцінок

Δ_j вільних змінних є принаймні одна додатна і при цьому серед коефіцієнтів стовпчика базисної системи, який їй відповідає, немає додатних, то цільова функція f необмежена знизу в області допустимих розв'язків. Якщо ж вільна змінна x_s має оцінку $\Delta_s < 0$ і принаймні один із коефіцієнтів $a_{is} > 0$, тоді можна знайти новий опорний план, для якого значення цільової функції є меншим (не більшим), якщо розглядуваний опорний план невироджений (вироджений).

4.2. Алгоритм симплексного методу

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в базисній формі

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad +a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad x_2 \qquad\qquad +a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_m \quad +a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j \in \{1, \ldots, n\};$$

$$b_i \geq 0, \ \ i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{23}$$

Умови такої задачі зручно записувати у вигляді симплексної таблиці

i	Б	$C_б$	A_0	c_1	c_2	$\ldots$	c_m	$\ldots$	c_n
				A_1	A_2	$\ldots$	A_m	$\ldots$	A_n
1	A_1	c_1	b_1	1	0	$\ldots$	0	$\ldots$	a_{1n}
2	A_2	c_2	b_2	0	1	$\ldots$	0	$\ldots$	a_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
m	A_m	c_m	b_m	0	0	$\ldots$	1	$\ldots$	a_{mn}
$m+1$			f_0	Δ_1	Δ_2	$\ldots$	Δ_m	$\ldots$	Δ_n

Над позначеннями векторів $A_1, \ldots, A_n$ записуються коефіцієнти цільової функції. У стовпчику Б (базис) записуються одиничні базисні вектори; у стовпчику $C_б$ – коефіцієнти цільової функції, які відповідають векторам базису; у стовпчику A_0 – значення базисних змінних; у стовпчиках A_1, A_2, ..., A_n – коефіцієнти a_{ij} матриці умов; в оціночному $(m+1)$-му рядку – значення цільової функції f_0 і зведені коефіцієнти Δ_j при невідомих цільової функції. При заповненні $(m+1)$-го рядка користуються формулами (11), (12), (14).

Очевидно, що коли цільова функція містить лише вільні змінні, тобто зведена до одиничного базису, то елементи $(m+1)$-го рядка визначаються так: $f_0 = 0$, $\Delta_j = 0$ для базисних змінних і $\Delta_j = -c_j$ для вільних змінних.

Опишемо алгоритм симплексного методу по кроках.

1. Переглядаємо знаки всіх коефіцієнтів Δ_j оціночного рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то задача розв'язана: допустимий базисний розв'язок (10) оптимальний, $f_{\max} = f_0$. Якщо не всі $\Delta_j \geq 0$, то переходимо до кроку 2.

2. Серед значень $\Delta_j < 0$ вибираємо найбільше за абсолютною величиною, і стовпчик, який йому відповідає, беремо за провідний. Нехай це буде стовпчик з номером s. Якщо в провідному стовпчику елементи $a_{is} \leq 0$ для всіх $i \in \{1, \ldots, m\}$, то маємо випадок 2 – цільова функція необмежена, тобто $f_{\max} = \infty$, і отже, задача розв'язку не має. Якщо ж не всі $a_{is} \leq 0$, то переходимо до кроку 3.

3. Для кожного елемента $a_{is} > 0$ провідного стовпчика знаходимо відношення $\dfrac{b_i}{a_{is}}$, вибираємо серед них найменше, тобто знаходимо симплексне відношення, і називаємо рядок, де воно досягається, провідним. Нехай це буде рядок з номером r. Елемент a_{rs} на перетині провідного стовпчика і провідного рядка візьмемо за провідний (розв'язувальний).

4. Виконуємо жорданове перетворення таблиці з провідним елементом a_{rs} за формулами (3), (20), (22) і переходимо до кроку 1.

Послідовність операцій 1 – 4 називається **ітерацією симплексного методу**.

Зауваження 3. Якщо на кроці 2 є декілька найбільших за абсолютною величиною оцінок Δ_j, то в базис включають той вектор, якому відповідає $\max\limits_j c_j$. Точнішим є таке правило: *якщо не виконується умова оптимальності* $\Delta_j \ge 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$, *то в базис включають той вектор, якому відповідає* $\min\limits_j \theta_{0j}\Delta_j$, *де мінімум береться по тих* j, *для яких* $\Delta_j < 0$; *якщо ж мінімальних оцінок декілька, то в базис включають вектор, якому відповідає* $\max\limits_j c_j$.

Зауваження 4. Якщо в задачі (23) $f \to \min$, то умовою оптимальності плану є $\Delta_j \le 0$ для всіх $j \in \{1, \dots, n\}$. Якщо ж умова оптимальності не виконується, то в базис включають вектор, якому відповідає найбільше Δ_j. У випадку, коли таких значень є декілька, то включають той вектор, якому відповідає $\min\limits_j c_j$.

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$f = 4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 18; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}.$$

◀ Складемо симплексну таблицю і проведемо перетворення згідно з описаним вище

i	Б	$C_б$	A_0	4	1	1	-3	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	1	6	$\boxed{2}$	-1	1	0	0
2	A_4	-3	8	1	-1	0	1	0
3	A_5	0	18	1	1	0	0	1
$m+1$			-18	-5	1	0	0	0
1	A_1	4	3	1	$-1/2$	$1/2$	0	0
2	A_4	-3	5	0	$-1/2$	$-1/2$	1	0
3	A_5	0	15	0	$\boxed{3/2}$	$-1/2$	0	1
$m+1$			-3	0	$-3/2$	$5/2$	0	0
1	A_1	4	8	1	0	$1/3$	0	$1/3$
2	A_4	-3	10	0	0	$-2/3$	1	$1/3$
3	A_2	1	10	0	1	$-1/3$	0	$2/3$
$m+1$			12	0	0	2	0	1

У першій симплексній таблиці маємо

$$f_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i b_i = 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 8 + 0 \cdot 18 = -18,$$

$$f_1 = \sum_{i=1}^{3} c_i a_{i1} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -1,$$

$$\Delta_1 = f_1 - c_1 = -1 - 4 = -5,$$

$$f_2 = \sum_{i=1}^{3} c_i a_{i2} = 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 2,$$

$$\Delta_2 = f_2 - c_2 = 2 - 1 = 1,$$

$$f_3 = \sum_{i=1}^{3} c_i a_{i3} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$\Delta_3 = f_3 - c_3 = 1 - 1 = 0$$

і аналогічно $\Delta_4 = 0$ і $\Delta_5 = 0$.

Після двох жорданових перетворень з провідними елементами 2 і $\frac{3}{2}$, взятими у симплексних таблицях у рамку, дістаємо план $X^* = (8; 10; 0; 10; 0)$, $f_{\max} = f(X^*) = 4 \cdot 8 + 10 + 0 - 3 \cdot 10 = 12$, при якому всі Δ_j в $(m+1)$-у рядку невід'ємні. Отже, цей план оптимальний. ▶

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$f = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

◀ Запишемо задачу в канонічній формі, ввівши додаткові (балансуючі) змінні $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$, які є базисними. Матимемо

$$f = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\}.$$

Складемо симплексні таблиці

i	Б	$C_б$	A_0	1	-1	-3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	1	2	-1	$\boxed{1}$	1	0	0
2	A_5	0	2	-4	2	-1	0	1	0
3	A_6	0	5	3	0	1	0	1	1
$m+1$			0	-1	1	3	0	0	0
1	A_3	-3	1	2	-1	1	1	0	0
2	A_5	0	3	-2	$\boxed{1}$	0	1	1	0
3	A_6	0	4	1	1	0	-1	0	1
$m+1$			-3	-7	4	0	-3	0	0
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0
2	A_2	-1	3	-2	1	0	1	1	0
3	A_6	0	1	$\boxed{3}$	0	0	-2	-1	1
$m+1$			-15	1	0	0	-7	-4	0
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0
2	A_2	-1	$11/3$	0	1	0	$-1/3$	$1/3$	$2/3$
3	A_1	1	$1/3$	1	0	0	$-2/3$	$-1/3$	$1/3$
$m+1$			$-46/3$	0	0	0	$-19/3$	$-11/3$	$-1/3$

Як видно з першої симплексної таблиці умова оптимальності не виконується, оскільки Δ_2 і Δ_3 додатні. Тоді за провідний стовпчик беремо A_3, а за провідний рядок $i = 1$, бо

$$\theta_{03} = \min\left\{\frac{1}{1}; \frac{5}{1}\right\} = 1.$$

У другій симлексній таблиці за провідний стовпчик беремо A_2, а за провідний рядок $i = 2$, бо

$$\theta_{02} = \min\left\{\frac{3}{1}; \frac{3}{1}\right\} = 3.$$

Як видно з третьої симлексної таблиці, за провідний стовпчик треба взяти перший, що відповідає A_1, а за провідний рядок – третій, бо

$$\theta_{03} = \min\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}.$$

В останній симплексній таблиці всі $\Delta_j \le 0$, а це означає, що умова оптимальності виконується, тобто задача розв'язана:

$$X^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{11}{3}; 4\right), \quad f_{\min} = f(X^*) = -\frac{46}{3}. \ \blacktriangleright$$

Приклад 3. Знайти максимум функції

$$f = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\}.$$

◀ Розв'язуватимемо задачу за допомогою симплексних таблиць

i	Б	$C_Б$	A_0	2	-6	0	0	5	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	0	20	-2	1	1	0	1	0
2	A_4	0	24	-1	-2	0	1	$\boxed{3}$	0
3	A_6	0	18	3	-1	0	0	-12	1
$m+1$			0	-2	6	0	0	-5	0
1	A_3	0	12	$-5/3$	$5/3$	1	$-1/3$	0	0
2	A_5	5	8	$-1/3$	$-2/3$	0	$1/3$	1	0
3	A_6	0	114	-1	-9	0	4	0	1
$m+1$			40	$-4/3$	$8/3$	0	$5/3$	0	0

Оскільки в першій симплексній таблиці серед Δ_j є від'ємні, то початковий опорний план не оптимальний. Максимальним за абсолютною величиною серед $\Delta_j < 0$ є $\Delta_5 = -5$, а тому до базису треба включити A_5, а виключити A_4, бо

$$\theta_{05} = \min\left\{\frac{20}{1}; \frac{24}{3}\right\} = 8.$$

Зробивши перерахунок таблиці за допомогою методу Жордана-Гаусса з провідним елементом $a_{25} = 3$, дістанемо другу симплексну таблицю. У цій таблиці провідним є перший стовпчик, бо $\Delta_1 = -\dfrac{11}{3}$. Оскільки в цьому стовпчику всі елементи від'ємні, то задача розв'язку не має, бо цільова функція необмежена. ▶

Зауваження 5. Якщо в останній симплексній таблиці виконується умова оптимальності плану, але число тих Δ_j, які дорівнюють нулю, більше за m, то це означає, що оптимальний план не єдиний. Для знаходження другого оптимального плану, треба перейти до наступного опорного плану, взявши за провідний той з небазисних стовпчиків, якому відповідає $\Delta_j = 0$, а провідний рядок вибрати за симплексним відношенням.

Приклад 4. Підприємство випускає чотири види продукції, використовуючи при цьому три типи сировини. Дані про запаси сировини, витрати сировини на одиницю продукції, а також величину прибутку від реалізації одиниці продукції наведено в таблиці

Тип сировини	Витрати сировини				Запаси сировини
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	2	2	4	5	28
S_2	0	1	2	2	10
S_3	2	1	0	6	14
Прибуток	2	4	6	1	

Треба так спланувати випуск продукції, щоб сумарний прибуток від її реалізації був максимальним.

◀ Складемо математичну модель задачі. Нехай x_j, $j \in \{1, \ldots, 4\}$, – кількість продукції j-го виду, що виробляється на підприємстві.

Тоді математична модель задачі така:

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 28, \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad + 6x_4 \le 14; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

Запишемо задану задачу в канонічній формі, ввівши додаткові (балансуючі) змінні $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$, $x_7 \ge 0$.

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 28, \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad + 6x_4 + x_7 = 14; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 7\}.$$

Складемо симплексні таблиці, використовуючи алгоритм симплексного методу. Пояснення до таблиць робитимемо послідовно, переходячи від таблиці до таблиці.

i	Б	$C_б$	A_0	2	4	6	1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_5	0	28	2	2	4	5	1	0	0
2	A_6	0	10	0	1	$\boxed{2}$	2	0	1	0
3	A_7	0	14	2	1	0	6	0	0	1
$m+1$			0	-2	-4	-6	-1	0	0	0
1	A_5	0	8	$\boxed{2}$	0	0	1	1	-2	0
2	A_3	6	5	0	$1/2$	1	1	0	$1/2$	0
3	A_7	0	14	2	1	0	0	0	0	1
$m+1$			30	-2	-1	0	5	0	3	0
1	A_1	2	4	1	0	0	$1/2$	$1/2$	-1	0
2	A_3	6	5	0	$1/2$	1	1	0	$1/2$	0
3	A_7	0	6	0	$\boxed{1}$	0	5	-1	2	1
$m+1$			38	0	-1	0	6	1	1	0
1	A_1	2	4	1	0	0	$1/2$	$1/2$	-1	0
2	A_3	6	2	0	0	1	$-3/2$	$\boxed{1/2}$	$-1/2$	$-1/2$
3	A_2	4	6	0	1	0	5	-1	2	1
$m+1$			44	0	0	0	11	0	3	1
1	A_1	2	2	1	0	-1	2	0	$-1/2$	$1/2$
2	A_5	0	4	0	0	2	-3	1	-1	-1
3	A_2	4	10	0	1	2	2	0	1	0
$m+1$			44	0	0	0	11	0	3	1

У першій симплексній таблиці умова оптимальності не виконується, бо всі $\Delta_j \leq 0$. Оскільки найбільшим за абсолютною величиною є $\Delta_3 = -6$, то до базису треба ввести вектор A_3 і вивести A_6, бо

$$\theta_{03} = \min\left\{\frac{28}{4}; \frac{10}{2}\right\} = 5, \quad i = 2.$$

У другій симлексній таблиці найбільшим за абсолютною величиною серед $\Delta_j < 0$ є $\Delta_1 = -2$, а тому до базису вводимо вектор A_1, а виводимо A_5, бо

$$\theta_{01} = \min\left\{\frac{8}{2}; \frac{14}{2}\right\} = 4, \quad i = 1.$$

У третій симплексній таблиці умова оптимальності не виконується і до базису треба ввести вектор A_2, а вивести A_7, бо

$$\theta_{02} = \min\left\{\frac{5}{1/2}; \frac{6}{1}\right\} = 6, \quad i = 3.$$

У четвертій симплексній таблиці всі $\Delta_j \geq 0$, а це означає, що план оптимальний. Оскільки в $(m+1)$-у рядку є чотири $\Delta_j = 0$ замість трьох, то цей оптимальний план не єдиний. Тому організуємо ще одну ітерацію, увівши в базис вектор A_5 замість вектора A_3, бо

$$\theta_{05} = \min\left\{\frac{4}{1/2}; \frac{2}{1/2}\right\} = \min(8; 4) = 4, \quad i = 2.$$

Отже, маємо вже два оптимальні плани $X_1^* = (4; 6; 2; 0)$, $X_2^* = (2; 10; 0; 0)$ і $f_{\max} = 44$. Тоді загальний розв'язок задачі подається як лінійна комбінація

$$X^* = \lambda X_1^* + (1 - \lambda)X_2^*, \quad \lambda \in [0; 1].$$

Якщо ж у задачі передбачається, що кількість виробленої продукції повинна бути цілою, то λ вибирається не довільним, а певним числом з [0;1].

Звідси випливає, що підприємство може випускати продукцію, наприклад, за такими планами: 1) 4 одиниці продукції P_1, 6 одинць продукції P_2, 2 одиниці продукції P_3 і 0 одиниць продукції P_4 (при $\lambda = 1$); 2) 3 одиниці продукції P_1, 8 одинць продукції P_2, 1 одиниці продукції P_3 і 0 одиниць продукції P_4 (при $\lambda = 0,5$); 3) 2 одиниці продукції P_1, 10 одинць продукції P_2 і не виробляти продукції P_3 і P_4 (при $\lambda = 0$), або за іншим планом, підбираючи λ. При цьому прибуток дорівнюватиме 44 гр.од. ▶

5. Метод штучного базису (М-метод)

У попередньому розділі доведено, що коли обмеження задачі лінійного програмування містять одиничну матрицю порядку m, то тоді при невід'ємних правих частинах рівнянь-обмежень існує початковий опорний план, виходячи з якого за допомогою симплексного методу знаходять оптимальний план.

Знаходження початкового опорного плану можна розглядати як окрему задачу, але в деяких випадках його побудова є простою. Наприклад, коли обмеження задачі лінійного програмування мають вигляд $AX \le A_0$, де $A_0 \ge 0$, то система обмежень завжди містить одиничну підматрицю порядку m, а отже, і початковий опорний план.

Нагадаємо, що перехід від системи нерівностей стандартної задачі

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\};$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}$$

$$b_i \ge 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

до еквівалентної системи рівнянь канонічної задачі

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\};$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, n+m\},$$

здійснюється введенням додаткових невід'ємних змінних $x_{n+i} \ge 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, які входять у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами. Очевидно, що за початковий опорний план такої задачі

можна взяти
$$\begin{cases} x_j = 0, & j \in \{1, \ldots, n\}, \\ x_{n+i} = b_i, & i \in \{1, \ldots, m\}. \end{cases}$$

Цей план є допустимим, бо він задовольняє всі обмеження задачі. Вектори умов, що відповідають додатним компонентам плану, лінійно незалежні, оскільки вони утворюють повний набір одиничних векторів – лінійно незалежну систему. Отже, план $\tilde{X}_0 = (0; \ldots; 0; b_1; \ldots; b_m)$, де нульовими є перші n координат, є опорним.

Для знаходження початкового опорного плану задачі, записаної у канонічній формі, можна застосувати метод жорданових виключень, але зазвичай це трудомістка задача. Тому для виявлення зайвих рівнянь у системі рівнянь-обмежень, коли такі існують, і знаходження початкового опорного плану та побудови відповідної симплексної таблиці, застосовують метод, який називають методом **штучного базису (М-методом)**.

Нехай задано канонічну задачу лінійного програмування:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3}$$

$$b_i \geq 0, \ \ i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{4}$$

де система обмежень не містить одиничної матриці.

Для одержання одиничної матриці до кожної рівності з (2) додамо по одній змінній $x_{n+i} \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, які назвемо **штучними** і розглянемо **розширену задачу (М-задачу)**:

$$\tilde{f} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m} \to \max; \tag{5}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases} \tag{6}$$

$$x_j \geq 0,\ \ j \in \{1, \dots, m+n\}, \qquad (7)$$

$$b_i \geq 0,\ \ i \in \{1, \dots, m\}, \qquad (8)$$

При цьому вважаємо, що M – як завгодно велике додатне число.

У задачі (5) – (8) одиничні вектори-стовпчики A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{n+m} утворюють **штучний одиничний базис**. Йому відповідають початковий опорний план $\tilde{X}_0 = (0; \dots; 0; b_1; \dots; b_m)$, де нульовими є перші n координат, і значення цільової функції $\tilde{f}_0 = -Mb_1 - Mb_2 - \dots - Mb_m$.

Наявність у цільовій функції $\tilde{f}$ коефіцієнтів $-M$ при штучних змінних x_{n+i}, $i \in \{1, \dots, m\}$, еквівалентна штрафу за включення їх в опорний план. Числа $-M$, за абсолютною величиною значно перевищують решту коефіцієнтів цільової функції, що дозволяє виводити з базису штучні вектори і вводити в базис вектори вихідної задачі.

Оскільки задача (5) – (8) має початковий опорний план, то для її розв'язування можна застосувати симплексний метод.

Теорема 1. *Якщо в оптимальному плані $\tilde{X}^* = (x_1^*; \dots; x_n^*; x_{n+1}^*; \dots; x_{n+m}^*)$ М-задачі всі штучні змінні дорівнюють нулю $x_{n+i}^* = 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$, то план $X^* = (x_1^*; \dots; x_n^*)$ є оптимальним планом вихідної задачі.*

◀ Зауважимо, що плани $\tilde{X}^*$ і X^* відрізняються m останніми координатами, які дорівнюють нулю. Отже, якщо вектор $\tilde{X}^*$ задовольняє обмеження (6) – (8) розширеної задачі, то вектор X^* задовольняє обмеження (2) – (4) вихідної задачі, тобто є планом. При цьому, оскільки відмінні від нуля координати планів $\tilde{X}^*$ і X^* збігаються, значення цільових функцій $\tilde{f}(\tilde{X}^*)$ і $f(X^*)$ також збігаються, тобто $\tilde{f}(\tilde{X}^*) = f(X^*)$.

Доведемо, що X^* – оптимальний план вихідної задачі. Нехай існує план $X_0 = (x_{10}; \dots; x_{n0})$ вихідної задачі, такий, що $f(X_0) \geq f(X^*)$. Тоді $\tilde{X}_0 = (x_{10}; \dots; x_{n0}; 0; , \dots; 0)$ – план М-задачі, що відповідає плану X_0 вихідної задачі, причому $\tilde{f}(\tilde{X}_0) = f(X_0)$.

Отже,

$$\tilde{f}(\tilde{X}_0) = f(X_0) \geq f(X^*) = \tilde{f}(\tilde{X}^*),$$

тобто $\tilde{f}(\tilde{X}_0) \geq \tilde{f}(\tilde{X}^*)$.

Оскільки X^* – оптимальний план М-задачі, то $\tilde{f}(\tilde{X}_0) = \tilde{f}(\tilde{X}^*)$, а тому, $f(X_0) = f(X^*)$, і отже, X^* – оптимальний план вихідної задачі. ▶

Теорема 2. *Якщо задача (1) – (4) має розв'язок, то існує таке число* $M_0 > 0$, *що для довільного* $M > M_0$ *задача (5) – (8) також має розв'язок. При цьому, якщо* $\tilde{X}^* = (x_1^*; \ldots; x_{n+m}^*)$ *– оптимальний план М-задачі, то* $x_{n+i}^* = 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Отже, якщо, розв'язавши М-задачу, одержимо оптимальний план, у якого всі штучні змінні $x_{n+i}^* = 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то його перші n координат дають оптимальний план вихідної задачі.

Можна також довести, що коли:

1) *в оптимальному плані М-задачі принаймні одна з штучних змінних не дорівнює нулю, то вихідна задача не має допустимих планів, тобто її умови несумісні*; 2) *М-задача не має розв'язків, то й вихідна задача нерозв'язна.*

Для відшукання оптимального плану розширеної задачі у випадку, коли не задано величину M, застосовують симплексний метод із складанням симплексних таблиць, які мають на один рядок більше, ніж звичайна таблиця. За $(m+2)$-им рядком визначають вектор, який треба включити в базис. Оскільки $\tilde{\Delta}_j = \tilde{f}_j - \tilde{c}_j = f_j - c_j + \lambda_j M = \Delta_j + \lambda_j M$, то до $(m+1)$-го рядка включають Δ_j, а до $(m+2)$-го рядка λ_j.При переході від одного опорного плану до другого в базис вводять вектор, який відповідає найбільшому за абсолютною величиною від'ємному числу λ_j $(m+2)$-го рядка. Штучний вектор, виключений з базису в результаті деякої ітерації, надалі можна не вводити у жодний з наступних базисів, і, отже, перетворення стовпчика цього вектора зайве. Однак якщо треба знайти розв'язок двоїстої задачі до заданої (про що буде пізніше), то таке перетворення слід проводити. Може трапитись так, що в результаті деякої ітерації жодний з штучних векторів з базису не буде виключено.

Перерахунок симплексних таблиць при переході від одного опорного плану до другого проводять за загальними правилами симплексного методу.

Ітераційний процес по $(m+2)$-му рядку проводимо до тих пір, поки або: 1) *всі штучні вектори будуть виведені з базису*; 2) *не всі штучні вектори виведені з базису, але* $(m+2)$*-й рядок не містить більше від'ємних елементів у стовпчиках* $A_1, \ldots, A_{n+m}$.

У першому випадку базис відповідає деякому опорному плану вихідної задачі й знаходження її оптимального плану продовжують за $(m+1)$-им рядком.

У другому випадку, якщо елемент, який стоїть в $(m+2)$-му рядку в стовпчику A_0 від'ємний, то вихідна задача розв'язку не має; якщо ж він дорівнює нулю, то знайдений опорний план вихідної задачі є виродженим, бо базис містить принаймні один вектор штучного базису.

Зауваження 1. Якщо матриця A системи обмежень містить $k < m$ різних одиничних векторів, то при складанні М-задачі вводимо $m-k$ штучних змінних.

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$f = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \; j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

◀ Система обмежень не містить одиничного базису. Тому додамо до кожного рівняння по одній невід'ємній штучній змінній відповідно $x_5 \geq 0$ та $x_6 \geq 0$ і перейдемо до розширеної задачі

$$\tilde{f} = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\}.$$

Отже, маємо задачу, яку можна розв'язати за допомогою симплексного методу. Зробимо це, використовуючи симплексні таблиці.

i	Б	$C_б$	A_0	5	3	4	-1	$-M$	$-M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_5	$-M$	3	1	$\boxed{3}$	2	2	1	0
2	A_6	$-M$	3	2	2	1	1	0	1
$m+1$			0	-5	-3	-4	1	0	0
$m+2$			-6	-3	-5	-3	-3	0	0
1	A_2	3	1	$1/3$	1	$2/3$	$2/3$		0
2	A_6	$-M$	1	$\boxed{4/3}$	0	$-1/3$	$-1/3$		1
$m+1$			3	-4	0	-2	3		0
$m+2$			-1	$-4/3$	0	$1/3$	$1/3$		0
1	A_2	3	$3/4$	0	1	$3/4$	$\boxed{3/4}$		
2	A_1	5	$3/4$	1	0	$-1/4$	$-1/4$		
$m+1$			6	0	0	-3	2		
$m+2$			0	0	0	0	0		
1	A_3	4	1	0	$4/3$	1	1		
2	A_1	5	1	1	$1/3$	0	0		
$m+1$			9	0	4	0	5		

У $(m+2)$-му рядку першої симплексної таблиці $\max\limits_{j\,:\,\lambda_j<0}|\lambda_j| = 5$, а це означає, що в базис треба ввести вектор A_2, а вивести A_5, бо $\theta_{02} = \min\left\{\frac{3}{3}; \frac{3}{2}\right\} = 1$, $i = 1$.

У другій симплексній таблиці від'ємним у $(m+2)$-му рядку є $\lambda_1 = -\frac{4}{3}$, тому в базис треба ввести вектор A_1, а вивести A_6, оскільки $\theta_{01} = \min\left\{\frac{3}{1}; \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, $i = 2$.

Штучні вектори виведено з базису, а тому надалі аналіз симплексної таблиці проводимо по $(m+1)$-му рядку. Маємо $\Delta_3 = -3$, яке найбільше за абсолютною величиною серед від'ємних Δ_j, а тому в базис вводимо вектор A_3, а виводимо A_2, бо $\theta_{03} = \min\left\{\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\} = 1$.

У четвертій симплексній таблиці всі $\Delta_j \geq 0$, а це означає, що план оптимальний. Отже, $X^* = (1; 0; 1; 0)$, $f_{\max} = 9$. ▶

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$f = 2x_1 - x_2 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 \geq 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 36; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

◀ Розглянемо розширену задачу, ввівши дві невід'ємні додаткові змінні x_5, x_6, а також дві невід'ємні штучні змінні x_7, x_8:

$$\tilde{f} = -2x_1 + x_2 + x_4 - Mx_7 - Mx_8 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 + x_7 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 + x_8 = 36; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j \in \{1, \ldots, 8\}.$$

Запишемо розв'язування задачі у вигляді симплексних таблиць.

i	Б	$C_б$	A_0	-2	1	0	1	0	0	$-M$	$-M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	A_3	0	10	1	-2	1	0	0	0	0	0
2	A_7	$-M$	18	-2	-1	0	-2	-1	0	1	0
3	A_8	$-M$	36	3	$\boxed{2}$	0	1	0	-1	0	1
$m+1$			0	2	-1	0	-1	0	0	0	0
$m+2$			-54	-1	-1	0	1	1	1	0	0
1	A_3	0	46	4	0	1	1	0	-1	0	
2	A_7	$-M$	36	$-1/2$	0	0	$-3/2$	-1	$-1/2$	1	
3	A_2	1	18	$3/2$	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	0	
$m+1$			18	$7/2$	0	0	$-1/2$	0	$-1/2$	0	
$m+2$			-36	$1/2$	0	0	$3/2$	1	$1/2$	0	

У першій симплексній таблиці в $(m+2)$-му рядку є два однакових від'ємних значення у стовпчиках A_1 і A_2, а тому за провідний стовпчик виберемо той, у якому стоїть $\max\limits_j c_j$, тобто другий. За провідний рядок беремо третій, оскільки $\theta_{02} = \min\left\{\dfrac{36}{2}\right\} = 18$, $i = 3$.

Перейшовши до другої симплексної таблиці, бачимо, що в $(m+2)$-му рядку в стовпчиках A_1, …, A_7 відсутні від'ємні елементи. У цьому рядку в стовпчику A_0 маємо від'ємне число, а це означає, що вихідна задача не має опорного плану – її умови несумісні. ▶

Зауваження 2. Якщо задано канонічну задачу лінійного програмування:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \;\; j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$b_i \geq 0, \;\; i \in \{1, \ldots, m\},$$

де система обмежень не містить одиничної матриці, то необов'язково переходити до задачі на максимум. Для неї М-задача на мінімум матиме вигляд:

$$\tilde{f} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m} \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \;\; j \in \{1, \ldots, m+n\},$$

$$b_i \geq 0, \;\; i \in \{1, \ldots, m\},$$

При цьому вважаємо, що M – як завгодно велике додатне число.

Симплекс-таблиці з $(m+2)-$ма рядками перетворюють за тими самими правилами, що й звичайні симплекс-таблиці. Однак вектор, що вводиться у новий базис, відповідає тепер найбільшому додатному елементу $(m+2)-$го рядка.

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$f = -x_1 - x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \; j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

◀ Розглянемо розширену задачу, ввівши одну невід'ємну штучну змінну x_5:

$$\tilde{f} = -x_1 - x_2 + Mx_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

Запишемо розв'язування задачі у вигляді симплексних таблиць.

i	Б	$C_б$	A_0	-1	-1	0	0	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_5	M	1	$\boxed{1}$	-1	1	0	1
2	A_4	0	3	2	-3	1	1	0
$m+1$			0	1	1	0	0	0
$m+2$			1	1	-1	1	0	0
1	A_1	-1	1	1	-1	1	0	
2	A_4	0	1	0	-1	-1	1	
$m+1$			-1	0	2	-1	0	

У першій симплексній таблиці в $(m+2)$-му рядку є два однакових додатних значення у стовпчиках A_1 і A_3, а тому за провідний стовпчик виберемо той, у якому стоїть $\min\limits_j c_j$, тобто перший. За провідний рядок беремо перший, оскільки $\theta_{01} = \min\left\{\frac{1}{1}; \frac{3}{2}\right\} = 1$, $i = 1$.

Перейшовши до другої симплексної таблиці, бачимо, що в $(m+1)$-му рядку в стовпчику A_2 стоїть додатний елемент. Оскільки елементи матриці обмежень цього стовпчика від'ємні, то задача розв'язку не має, бо цільова функція необмежена знизу на множині допустимих планів. ▶

Отже, процес знаходження розв'язку задачі (1) – (4) методом штучного базису містить такі етапи: 1) *складають розширену задачу (5) – (8)*; 2) *знаходять опорний план розширеної задачі (5) – (8)*; 3) *за допомогою симплексного методу виключають штучні вектори з базису і як результат або знаходять опорний план вихідної задачі (1) – (4), або встановлюють її нерозв'язність*; 4) *використовуючи знайдений опорний план задачі (1) – (4) або знаходять симплексним методом її оптимальний план, або доводять її нерозв'язність*.

6. Зациклення в задачах лінійного програмування та його усунення

При застосуванні симплексного методу в задачах лінійного програмування усі вільні члени b_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, як у вихідній системі, так і в одержаних після ітерації системах додатні. Якщо в деяких рівняннях вільні члени дорівнюють нулю, то відповідний опорний план буде виродженим. У випадку, коли провідне рівняння (провідний рядок) має вільний член, що дорівнює нулю, тобто $b_r = 0$, то змінна, яка вводиться в базис, також дорівнює нулю. Більше того, всі значення базисних змінних у наступному опорному плані залишаються без змін, оскільки $b'_k = b_k - \dfrac{a_{ks} \cdot b_r}{a_{rs}} = b_k$, тобто на цій ітерації приріст цільової функції дорівнює нулю. Це означає, що наступні ітерації не покращують значення цільової функції. Крім того, після певного числа ітерацій може з'явитися опорний план, який вже було отримано раніше в процесі розв'язування задачі. Подальші ітерації, проведені аналогічно, приводять до повторного перебору тих самих опорних планів. Виникає зациклення у схемі розрахунків і постає питання про скінченність процесу послідовних ітерацій. Причиною виникнення зациклень є наявність виродженого опорного плану у задачі.

Вироджені задачі зустрічаються часто, але до зациклення вони приводять у виняткових випадках, що пояснюється специфікою обмежуючих умов. Тому після скінченного числа ітерацій вичерпуються опорні плани, для яких приріст цільової функції дорівнює нулю.

Для того щоб швидше позбутися зациклення, використовують певні прийоми.

Правило усунення зациклення. Якщо на деякому етапі розрахунку при визначенні провідного рядка виникає невизначеність у виборі провідного рядка, тобто виявляється декілька однакових мінімальних відношень $\dfrac{b_i}{a_{ij}}$, то треба вибрати той рядок, для якого буде найменшим відношення елементів наступного стовпчика до розв'язуючого. У випадку, коли й при цьому буде декілька однакових мінімальних відношень, складають відношення елементів наступного стовпчика, і так до тих пір, поки провідний рядок не визначиться однозначно.

Приклад. Розв'язати задачу

$$f = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 5x_2 + x_5 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_6 = 12; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\}.$$

◀ Розв'язування проведемо за допомогою симплексних таблиць.

i	Б	$C_б$	A_0	2	4	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	0	6	-2	$\boxed{1}$	1	0	0	0
2	A_4	0	9	-1	$3/2$	0	1	0	0
3	A_5	0	30	-1	5	0	0	1	0
4	A_6	0	12	1	1	0	0	0	1
$m+1$			0	-2	-4	0	0	0	0
1	A_2	4	6	-2	1	1	0	0	0
2	A_4	0	0	$\boxed{2}$	0	$-3/2$	1	0	0
3	A_5	0	0	9	0	-5	0	1	0
4	A_6	0	6	3	0	-1	0	0	1
$m+1$			24	-10	0	4	0	0	0
1	A_2	4	6	0	1	$-1/2$	1	0	0
2	A_1	2	0	1	0	$-3/4$	$1/2$	0	0
3	A_5	0	0	0	0	$\boxed{7/4}$	$-9/2$	1	0
4	A_6	0	6	0	0	$5/4$	$-3/2$	0	1
$m+1$			24	0	0	$-7/2$	5	0	0

1	A_2	4	6	0	1	0	$-2/7$	$2/7$	0
2	A_1	2	0	1	0	0	$-10/7$	$3/7$	0
3	A_3	0	0	0	0	1	$-18/7$	$4/7$	0
4	A_6	0	6	0	0	0	$\boxed{12/7}$	$-5/7$	1
$m+1$			24	0	0	0	$-28/7$	$15/7$	0
1	A_2	4	7	0	1	0	0	$1/6$	$1/6$
2	A_1	2	5	1	0	0	0	$-1/6$	$5/6$
3	A_3	0	9	0	0	1	0	$-1/2$	$3/2$
4	A_4	0	$7/2$	0	0	0	1	$-5/2$	$7/12$
$m+1$			38	0	0	0	0	$5/6$	$7/3$

У першій симплексній таблиці є від'ємні Δ_j, а це означає, що умова оптимальності не виконується. За провідний стовпчик беремо A_2, бо найбільшим за абсолютною величиною серед від'ємних Δ_j є $\Delta_2 = -4$.

Складемо симплексне відношення для знаходження провідного рядка:

$$\theta_{02} = \min\left\{\frac{6}{1}, \frac{9\cdot 2}{3}, \frac{30}{5}, \frac{12}{1}\right\} = 6, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Оскільки маємо три однакових мінімальних значення, то розглянемо відношення елементів стовпчика A_1 до елементів стовпчика A_2 (провідного) і знайдемо найменше:

$$\min\left\{-2; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{5}; 1\right\} = -2, \quad i = 1.$$

Отже, за провідний рядок беремо перший.

У другій симплексній таблиці є тільки одне від'ємне $\Delta_1 = -10$, а тому стовпчик A_1 беремо за провідний. Провідний рядок вибираємо за симплексним відношенням

$$\theta_0 = \min\left\{\frac{0}{2}; \frac{0}{9}; \frac{6}{3}\right\} = 0, \quad i \in \{2, 3\}.$$

Знову маємо невизначеність, а тому розглянемо відношення елементів стовпчика A_3 до елементів стовпчика A_1 і виберемо найменше:

$$\min\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{9}; -\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}, \quad i = 2.$$

Звідси випливає, що провідним є другий рядок.

Третя симплексна таблиця в $(m+1)$-му рядку містить $\Delta_3 = -7/2$, а це означає, що стовпчик A_3 беремо за провідний. За провідний рядок беремо третій, бо $\theta_{03} = \min\left\{\frac{0}{7/4}; \frac{6}{5/4}\right\} = 0$, $i = 3$.

У четвертій симплексній таблиці умова оптимальності не виконується, бо $\Delta_4 = -28/7$, а це означає, що стовпчик A_4 беремо за провідний.

Оскільки $\theta_{04} = \min\left\{\frac{6}{12/7}\right\} = \frac{42}{12}$, то провідним рядком є четвертий.

У п'ятій симплексній таблиці всі $\Delta_j \geq 0$, а це означає, що план оптимальний. Отже, $X^* = (9; 7; 9; 7/2; 0; 0)$, а $f_{\max} = 38$. ▶

Вправи

1. На меблевій фабриці ввели нову технологію, що привело до економії 500 м деревини типу A і 300 м деревини типу B. Вивчення попиту меблевих магазинів дозволяє припустити, що із зекономлених матеріалів доцільно виготовити принаймні 40 столів, 130 стільців, 30 сервантів та не більше 10 книжкових шаф. Для виготовлення надпланової продукції фабриці потрібно 800 людино-годин.

Витрати матеріалів, затрати робочого часу на одиницю продукції, а також прибуток від її реалізації наведені в таблиці

Вироби / Ресурси	Стіл	Стілець	Сервант	Книжкова шафа
Деревина т. A	1,7	0,1	3,1	4
Деревина т. B	0,7	1,1	1,3	0,3
Робочий час	3	2	5	10
Прибуток	6	2	8	5

.

Спланувати випуск продукції так, щоб продукція могла бути реалізована і прибуток від її реалізації був максимальним.

2. З вокзалу можна відправляти щодня швидкі та кур'єрські поїзди. Вмістимість вагонів та їх кількість на станції подано в таблиці

Тип вагона		Багажний	Поштовий	Жорсткий	Купейний	М'який
К-ть вагонів у поїзді	Кур'єрськ.	1	—	5	6	3
	Швидк.	—	4	8	4	1
Вагон вміщ. пасажирів		—	—	58	40	32
К-ть вагонів на станції		12	8	81	70	27

.

Вибрати таке співвідношення між числом кур'єрських та швидких поїздів, при якому число відправлених пасажирів кожного дня буде максимальним.

3. Треба утворити суміш з трьох хімічних речовин A_1, A_2, A_3. Відомо, що утворена суміш повинна містити речовини A_1 не менше 6 одиниць, речовини A_2 – не менше 8 одиниць, речовини A_3 – не менше 12 одиниць. Речовини A_1, A_2, A_3 містяться у трьох видах продуктів $П_1$, $П_2$, $П_3$ у концентраціях, що визначаються таблицею

Продукти	Хімічні речовини		
	A_1	A_2	A_3
$П_1$	2	1	3
$П_2$	1	2	4
$П_3$	3	1,2	2

.

Вартість одиниці продукту $П_1$ становить 2 гривні, одиниці продукту $П_2$ – 3 гривні, одиниці продукту $П_3$ – 2,5 гривні. Суміш повинна бути такою, щоб вартість використаних продуктів була найменшою. Скласти математичну модель задачі.

4. У пунктах A_1 і A_2 розміщені цегельні заводи, а в пунктах B_1 і B_2 – кар'єри, які постачають глину. Потреби заводів у глині не більші, ніж продуктивність кар'єрів. Відома також вартість перевезення однієї тонни глини з кожного кар'єру до заводів. Треба скласти математичну модель постачання заводів глиною так, щоб витрати були найменшими, якщо всі необхідні дані наведено в таблиці

Постачальник	Споживач		Запаси
	A_1	A_2	
B_1	2	6	70
B_2	5	3	30
Потреби	40	50	

.

5. Турист наповнює рюкзак, і йому необхідно вирішити, які продукти взяти у похід. У його розпорядженні є м'ясо, макарони, сухе молоко, цукор. У рюкзаку залишилось для продуктів лише 45 дм^3 об'єму, до того ж необхідно, щоб загальна маса продуктів не перевищувала 35 кг. Лікарі рекомендують, щоб м'яса за масою було менше, ніж макаронів принаймні удвічі, макаронів не менше, ніж молока, а молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру. Скласти математичну модель, розв'язок якої б дав відповідь на питання: скільки та яких продуктів потрібно покласти до рюкзака, щоб сумарна калорійність продуктів була найбільшою? Дані про продукти наведені в таблиці

Показники	Продукти			
	М'ясо	Макарони	Молоко	Цукор
Об'єм, дм^3/кг	1	1,5	2	1
Калорійність, ккал/кг	1500	5000	5000	4000

.

6. Фірма має можливість рекламувати свою продукцію, використовуючи радіо- та телемережі. При цьому вона бажає використовувати радіомережу хоча б у 2 рази частіше, ніж телемережу. Кожна хвилина радіореклами коштує 5 гр.од. Кожна хвилина телереклами коштує 100 гр.од. і забезпечує обсяг збуту у 25 разів більший, ніж хвилина радіореклами. Фірма може витратити 1000 гр.од. на радіо- і телерекламу. Побудувати лінійну модель задачі.

7. Фірма випускає два види продукції A і B. Обсяг збуту продукції A повинен становити не менше 60% від загального обсягу реалізації продукції обох видів. Для виготовлення продукції A і B використовується однотипна сировина, добовий запас якої обмежений величиною 100 кг. Витрати сировини на одиницю продукції A становлять 0,2 кг, а на одиницю продукції B – 0,4 кг. Ціна одиниці продукції видів A і B дорівнює відповідно 20 і 40 гр.од. Скласти лінійну модель оптимального розподілу сировини для виготовлення продукції A і B.

8. Звести пропоновану задачу лінійного програмування до канонічного вигляду:

1) $f = 4x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 24, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 35; \end{cases}$$
$x_i \geq 0,\ i \in \{1, 2, 3\};$

2) $f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 12x_3 \leq 14, \\ -2x_10 + x_2 + 3x_3 = 8; \end{cases}$$
$x_i \geq 0,\ i \in \{1, 2, 3\};$

3) $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0;$

4) $f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8; \end{cases}$$
$x_1 \leq 0;$

5) $f = -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 8; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0.$

9. Звести пропоновану задачу лінійного програмування до симетричного (стандартного) вигляду:

1) $f = 6x_1 + 12x_2 -$
$-x_3 - x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 \leq 4, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 \geq 8, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, 2, 3\};$

2) $f = x_1 + 2x_3 - 5x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, 3\},\ x_2 \leq 0.$

3) $f = 4x_1 + 2x_2 -$
$-x_3 - x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ -5x_1 + x_3 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 5\};$

4) $f = x_1 - x_3 + 5x_5 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 7, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 - x_3 + 3x_5 = 4; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 5\}.$

5) $f = 4x_1 + 7x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 8, \\ -5x_1 + x_2 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 5\};$

6) $f = x_1 - x_2 + 5x_5 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 - x_6 + 3x_5 = 4; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 6\}.$

10. Знайти вершини опуклого многокутника, який задається нерівностями

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 9 \geq 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 6 \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 0. \end{cases}$$

11. Опуклий многокутник має своїми вершинами точки $(-1;0)$, $(3;4)$, $(0;-3)$, $(1;6)$. Записати систему нерівностей, яка визначає цей многокутник.

12. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

1) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 5x_2 \geq 4; \end{cases}$$
$$0 \leq x_1 \leq 3,\ 0 \leq x_2 \leq 3;$$

2) $f = 10x_1 + 6{,}2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 7x_1 + 9x_2 \leq 63, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 5; \end{cases}$$

3) $f = x_1 - 10x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - 0{,}5x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

4) $f = -2x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \geq -1; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

5) $f = 3x_1 + 10x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 8; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

6) $f = 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ -5x_1 + x_3 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 5\};$$

7) $f = -x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 4; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

8) $f = x_1 - 8x_2 - x_3 +$
$+x_4 + x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 8x_4 - x_5 = 3, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 42, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 = 48; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 5\};$$

9) $f = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 6\};$

10) $f = -x_3 + x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 15, \\ -x_1 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 = -3, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 6; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 5\}.$

13. Для перевезення вантажів використовуються машини двох типів: А та В, кожна з яких за один раз може перевезти 5 т. За одну ходку машина типу А витрачає 1,5 кг мастила та 50 л пального, машина типу В – 2 кг мастила та 30 л пального. На базі є 35 кг мастила і 900 л пального. Витрати на експлуатацію однієї машини типу А становлять 8 гр.од., машини В – 5 гр.од. Необхідно перевезти 100 т вантажів. Скільки потрібно використовувати машин обох типів, щоб експлуатаційні витрати були мінімальними? Розв'язати задачу: 1) графічно; 2) симплекс-методом.

14. На виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 підприємство витрачає ресурси: сировину, енергію, робочу силу. Запаси сировини й енергії становлять 46 і 32 одиниці, а резерви робочої сили не менші, ніж 24 одиниць. У таблиці наведено норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції кожного виду. Загальні витрати підприємства на виготовлення одиниці продукції виду P_1 і P_2 становлять відповідно 8 і 5 одиниць.

Ресурси	Кількість од. ресурсів, що що витр. на вигот. од. прод. P_j	
	P_1	P_2
Сировина	10	3
Енергія	2	4
Робоча сила	5	2

Передбачається, що продукції P_1 повинно випускатись не менше 2 одиниці, а продукції P_1 – не менше 1 одиниці. Скласти такий план виробництва, за якого витрати будуть мінімальними. Розв'язати задачу: 1) графічно; 2) М-методом.

15. Симплексним методом розв'язати задачу:

1) $f = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j \in \{1, 2, 3\};$

2) $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\quad j \in \{1, ..., 6\};$

3) $f = 8x_1 + 19x_2 + 7x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 50; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, 2, 3\};$

4) $f = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

5) $f = x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 10, \\ 2x_2 + 3x_4 - x_5 \le 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \le 25; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, ..., 5\};$

6) $f = -x_1 + x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

7) $f = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7, \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, 2, 3\};$

8) $f = 2x_3 + 2x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 6x_4 = 24, \\ x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 30; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

9) $f = 2x_1 - 3x_2 + x_3 -$
$-x_5 + 6x_6 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, ..., 6\};$

10) $f = x_2 - x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\}.$

16. Методом штучного базису розв'язати задачу:

1) $f = 2x_1 + x_2 -$
$-x_3 - x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, ..., 4\};$

2) $f = x_1 - x_2 + x_3 +$
$+x_4 + x_5 - x_6 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 6\};$

3) $f = -3x_1 + x_2 +$
$+3x_3 - x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, ..., 4\};$

4) $f = x_1 - 3x_3 + x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

5) $f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 4\};$

6) $f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

7) $f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_3 \leq 5, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 3; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j \in \{1, 2, 3\};$

8) $f = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

9) $f = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 20, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\}.$

Відповіді

1. $f = 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 1,7x_1 + 0,1x_2 + 3,1x_3 + 4x_4 \leq 500, \\ 0,7x_1 + 1,1x_2 + 1,3x_3 + 0,3x_4 \leq 300, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 800, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 130,\ x_3 \geq 30,\ 0 \leq x_4 \leq 10,$$

x_1, x_2, x_3, x_4 – план випуску столів, стільців, сервантів, книжкових шаф відповідно.

2. $f = 626x_1 + 656x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12, \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 81, \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 70, \\ 3x_1 + x_2 \leq 27; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ 0 \leq x_2 \leq 8,$$

x_1 – число кур'єрських, x_2 – число швидких поїздів.

3. $f = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 + 1,2x_3 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0,$$

x_j – кількість одиниць продукту Π_j, $j \in \{1, 2\}$, яку треба придбати.

4. $f = 2x_{11} + 6x_{12} = 5x_{21} + 3x_{22} \to \min;$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 70, \\ x_{21} + x_{22} \leq 30, \\ x_{11} + x_{21} = 40, \\ x_{12} + x_{22} = 50; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \{i, j\} \subset \{1, 2\},$$

x_{ij} – кількість глини, яку треба перевести з кар'єру A_i на завод B_j, $\{i, j\} \subset \{1, 2\}$.

5. $f = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 35, \\ x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 45, \\ 2x_1 \leq x_2, \\ x_2 \geq x_3, \\ x_3 \geq 8x_4; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j \in \{1, ..., 4\}.$$

6. $f = x_1 + 25x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 \geq 2x_2, \\ 5x_1 + 100x_2 \leq 1000; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0,$$

x_1 – кількість закуплених хвилин радіореклами, а x_2 – телереклами.

7. $f = 20x_1 + 40x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,4x_2 \leq 100, \\ x_1 \leq 0,6(x_1 + x_2); \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0,$$

x_1 кг – кількість продукції A, x_2 кг – продукції B.

10. $(-3;3)$, $(-7;5)$, $(-3;3)$, $(3/2;-3/2)$. **11.** $\begin{cases} -3x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ 3x_1 - x_2 \geq -3, \\ 2x_1 - x_2 \leq 3. \end{cases}$.

12. 1) $f_{\min} = 4$, $x_1 = \frac{8}{7}$, $x_2 = \frac{4}{7}$; 2) $f_{\max} = 74\frac{7}{15}$, $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{7}{3}$; 3) немає розв'язку; 4) немає розв'язку; 5) $X^* = (1,5;\ 1)$, $f_{\max} = 14,5$; 6) $X^* = (6;\ 0;\ 2;\ 33)$, $f_{\max} = 22$; 7) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $X_1^* = (3;\ 1)$, $X_2^* = (4;\ 0)$, $f_{\min} = -4$; 8) $f_{\max} \to +\infty$; 9) $X^* = (5;\ 6;\ 5;\ 0;\ 0;\ 13)$, $f_{\min} = 2$; 10) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $X_1^* = (9;\ 3;\ 0;\ 0;\ 3)$, $X_2^* = (7;\ 0;\ 1;\ 0;\ 4)$, $f_{\max} = 3$.

13. Математична модель задачі:

$$f = 8x_1 + 5x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 \leq 35, \\ 50x_1 + 30x_2 \leq 900, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \\ 5x_1 + 5x_2 = 100; \end{cases}$$

$X^* = (10;10)$, $f_{\min} = 130$ гр.од., x_1 – кількість машин типу А, x_2 – кількість машин типу В).

14. $X^* = (4;20)$, $f_{\min} = 42$ гр.од.,x_1 – кількість продукції P_1, x_2 – кількість продукції P_2.

15. 1) $f_{\min} = -\frac{21}{10}$, $X^* = \left(\frac{13}{10};0;\frac{2}{5}\right)$; 2) $f_{\min} = -\frac{18}{5}$, $X^* = \left(\frac{71}{10};0;0;\frac{13}{10};0;\frac{2}{5}\right)$; 3) $f_{\max} = 150$, $X^* = \left(0;\frac{25}{9};\frac{125}{9}\right)$; 4) $f_{\max} = \frac{7}{2}$, $X^* = \left(0;1;\frac{1}{2}\right)$; 5) $f_{\max} = 15$, $X^* = (7;0;0;2;0)$; 6) $f_{\min} = -3$, $X^* = (4;1;9;0;0)$; 7) $f_{\min} = -11$, $X^* = (4;5;0)$; 8) $f_{\max} = 10$, $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $X_1^* = (4;0;5;0)$, $X_2^* = (0;0;3;2)$; 10) $f_{\max} = 3$, $X^* = (9;4;0;0;1)$.

16. 1) $f_{\min} = 2$, $X^* = (3;0;1;3)$; 2) $f_{\min} = -2$, $X^* = (0;14;3;9;0;0)$; 3) $f_{\min} = 7$, $X^* = (1;1;3;0)$; 4) $f_{\max} = 1$, $X^* = (1;0;0;0)$; 5) немає розв'язку (система умов несумісна); 6) $f_{\max} = 14$, $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $X_1^* = (4;0;2)$, $X_2^* = (2;4;0)$; 7) $f_{\min} = -4$, $X^* = \left(\frac{3}{2};0;1\right)$; 8) немає розв'язку (система умов несумісна); 9) $f_{\max} \to +\infty$.

Двоїстість (спряженість) у лінійному програмуванні

Поняття двоїстості в задачах лінійного програмування має велике значення не лише в теоретичному плані, але й широко застосовується для обґрунтування та прийняття практичних рішень. Двоїсті задачі мають чітку економічну інтерпретацію, а теореми двоїстості широко використовуються в економічних дослідженнях.

1. Пари взаємно двоїстих задач лінійного програмування

З кожною задачею лінійного програмування тісно пов'язана інша цілком визначена задача лінійного програмування, яка називається **двоїстою** до заданої. Початкову задачу при цьому називають **прямою** або **вихідною**. Зв'язок між прямою та двоїстою задачами є взаємним, тобто якщо вихідною вважати двоїсту задачу, то двоїста до неї збігається з прямою задачею. Цей зв'язок полягає також і в тому, що розв'язавши одну з них, ми знаходимо розв'язок другої. Такі задачі називаються **парою взаємно двоїстих задач**.

1.1. Поняття двоїстості в економічних задачах

Розглянемо теорію двоїстості для випадку пари симетричних двоїстих задач.

Нехай є симетрична задача лінійного програмування:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_nx_n \to \max; \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\} \tag{3}$$

або в матричній формі

$$f = CX \to \max;$$

$$AX \leq A_0;$$

$$X \geq 0. \qquad (4)$$

Введемо m-вимірний вектор-рядок $Y = (y_1; \ldots; y_m)$ і побудуємо симетричну задачу лінійного програмування вигляду

$$F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min; \qquad (5)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases} \qquad (6)$$

$$y_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \qquad (7)$$

або в матричній формі

$$F = YA_0 \to \min;$$

$$YA \geq C;$$

$$Y \geq 0. \qquad (8)$$

Якщо порівняти задачі (1) – (3) й (5) – (7), то побачимо правило, у відповідності з яким одна симетрична задача (пряма) перетворюється в іншу (двоїсту). Змінних y_i у задачі (5) – (7) стільки, скільки обмежень в (2). Матриця умов у задачі (5) – (7) є транспонованою до матриці умов задачі (1) – (3). Задача максимізації переходить у задачу мінімізації, обмеження-нерівності вигляду "$\leq$" замінюються обмеженнями-нерівностями вигляду "$\geq$". Вектор коефіцієнтів цільової функції прямої задачі стає вектором обмежень двоїстої задачі, а вектор A_0 обмежень задачі (1) – (3) стає вектором коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі (5) – (7). Зауважимо, що коли одна з двоїстих задач симетрична, то й друга симетрична. Система обмежень в обох випадках задана нерівностями. Тому задачі (1) – (3) і (5) – (7) називаються **симетричними**.

Зв'язок між обмеженнями взаємно двоїстих симетричних задач зручно зображати у вигляді такої схеми:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i \in \{1,\dots,m\} \longleftrightarrow y_i \ge 0,\ i \in \{1,\dots,m\};$$

$$x_j \ge 0,\ j \in \{1,\dots,n\} \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j,\ j \in \{1,\dots,n\}.$$

Звідси випливає, що кожному обмеженню однієї задачі ставиться у відповідність змінна з тим самим номером другої задачі, а кожній змінній однієї задачі – обмеження з тим самим номером другої задачі.

Теорема. *Двоїстою до двоїстої задачі (5) – (7) є пряма задача (1) – (3).*

◀ Подамо двоїсту задачу (5) – (7) у такому вигляді, щоб вона відповідала вимогам прямої задачі. Для цього замість цільової функції F розглянемо функцію $F_1 = -F$. Тоді замість вимоги $F \to \min$ дістанемо рівносильну вимогу $F_1 \to \max$. Кожне з обмежень (6) помножимо на (-1) і перейдемо від нерівностей вигляду "$\ge$" до рівносильних нерівностей вигляду "$\le$". Остаточно одержимо задачу:

$$F_1 = -b_1y_1 - b_2y_2 - \ldots - b_my_m \to \max;$$

$$\begin{cases} -a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \ldots - a_{m1}y_m \le -c_1, \\ -a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \ldots - a_{m2}y_m \le -c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \ldots - a_{mn}y_m \le -c_n; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i \in \{1,\dots,m\}. \tag{9}$$

Запишемо задачу, двоїсту до (9), позначивши нові змінні через $x_1, \ldots, x_n$, а цільову функцію – через f_1:

$$f_1 = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \to \min;$$

$$\left\{\begin{array}{l} -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n \geq -b_1, \\ -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n \geq -b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n \geq -b_m; \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{10}$$

Якщо тепер замість цільової функції f_1 розглянемо функцію $f = -f_1$, а кожне з обмежень задачі (10) помножимо на -1, то дістанемо задачу (1) – (3). Отже, двоїстою до задачі (5) – (7) є задача (1) – (3). ▶

Дамо економічну інтерпретацію пари двоїстих задач на прикладі задачі оптимального планування виробництва.

Нехай підприємство має m типів сировини (ресурсів) S_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, і випускає n видів продукції P_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$. На виробництво одиниці продукції P_j витрачається a_{ij} одиниць сировини S_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Запаси сировини S_i становлять b_i одиниць, $i \in \{1, \ldots, m\}$, а прибуток від реалізації одиниці продукції P_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, – c_j грошових одиниць. Треба знайти такий план $X = (x_1, \ldots, x_n)$ випуску продукції, щоб сумарний прибуток від її реалізації був максимальним. Математичною моделлю цієї задачі є (1) – (3).

З економічної точки зору двоїсту задачу (5) – (7) можна трактувати, наприклад, так. Нехай задані величини b_i, a_{ij}, c_j, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, мають той самий зміст, що й у вихідній задачі. Нехай, крім того, сировину можна направити або на виготовлення продукції, або на продаж іншому підприємству. Запитується, яку мінімальну ціну треба встановити за одиницю кожного типу сировини S_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, щоб прибуток від реалізації усіх її запасів був не меншим, ніж прибуток від реалізації продукції, яку можна виробити з цієї сировини.

Якщо позначити через y_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, шукану ціну одиниці сировини типу S_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то прибуток, який ми одержимо від продажу сировини, необхідної для виготовлення одиниці продукції виду P_j, дорівнюватиме

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

а прибуток від реалізації всіх запасів становитиме

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Щоб продаж сировини був не менш вигідний, ніж реалізація продукції, виготовленої з неї, повинна виконуватись нерівність

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Будь-яка система цін y_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, установлених із врахуванням цієї умови, задовольняє інтереси продавця сировини. Зрозуміло, що врахування інтересів покупця вимагає вибору такої системи цін, яка мінімізує сумарну вартість сировини, тобто

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min .$$

Отже, математичною моделлю двоїстої задачі є (5) – (7).

Змінні y_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, називають **оцінками** або **обліковими (неявними) цінами**.

1.2. Різні вигляди математичних моделей двоїстих задач

Розглянемо канонічну задачу

$$\begin{aligned} f = CX &\to \max; \\ AX &= A_0; \\ X &\geq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Описані в попередньому пункті правила побудови двоїстої задачі для випадку стандартної задачі можна застосувати і до задачі

(11), записавши її у вигляді стандартної задачі. Двоїста задача до задачі (11) має вигляд:

$$F = YA_0 \to \min;$$
$$YA \geq C, \tag{12}$$

де на вектор Y не накладається умова невід'ємності. Взаємно двоїсті задачі (11), (12) називають **несиметричними**, оскільки в прямій задачі система обмежень задана рівностями, а в двоїстій – нерівностями, у прямій задачі всі змінні невід'ємні, а в двоїстій можуть бути й від'ємними.

Отже, взаємно двоїсті задачі бувають двох типів: симетричні й несиметричні.

Симетричні задачі

1) Пряма задача
$f = CX \to \max;$
$AX \leq A_0;$
$X \geq 0.$

Двоїста задача
$F = YA_0 \to \min;$
$YA \geq C;$
$Y \geq 0.$

2) Пряма задача
$f = CX \to \min;$
$AX \geq A_0;$
$X \geq 0.$

Двоїста задача
$F = YA_0 \to \max;$
$YA \leq C;$
$Y \geq 0.$

Несиметричні задачі

3) Пряма задача
$f = CX \to \max;$
$AX = A_0;$
$X \geq 0.$

Двоїста задача
$F = YA_0 \to \min;$
$YA \geq C.$

4) Пряма задача
$f = CX \to \min;$
$AX = A_0;$
$X \geq 0.$

Двоїста задача
$F = YA_0 \to \max;$
$YA \leq C.$

Тому спершу ніж записати двоїсту задачу до заданої прямої задачі, систему обмежень прямої задачі треба звести до відповідного вигляду.

Приклад 1. Записати двоїсту задачу до заданої:

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

◀ Запишемо задану задачу у вигляді 2), помноживши першу нерівність в обмеженнях на (-1):

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Тоді двоїста задача до цієї має вигляд

$$F = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2, \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \le 1, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \le 5; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \ i \in \{1, 2, 3\}.$$

Враховуючи те, що ми множили першу нерівність вихідної задачі на (-1), то в отриманій двоїстій задачі треба y_1 замінити на $-y_1$. Отже, двоїстою до вихідної задачі буде така задача:

$$F = 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2, \\ -y_1 - 5y_2 - y_3 \le 1, \\ -y_1 + y_2 + 3y_3 \le 5; \end{cases}$$

$$y_1 \leq 0,\ y_i \geq 0,\ i \in \{2, 3\}. \ \blacktriangleright$$

Розглянемо тепер загальну задачу лінійного програмування

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{13}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m_1\}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i \in \{m_1 + 1, \ldots, m_2\}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in \{m_2 + 1, \ldots, m\}; \end{cases} \tag{14}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n_1\}, \tag{15}$$

$$x_j \leq 0, \quad j \in \{n_1 + 1, \ldots, n_2\}, \tag{16}$$

$$m_1 \leq m_2 \leq m \qquad n_1 \leq n_2 \leq n.$$

Тоді задачу

$$F = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \to \min; \tag{17}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad i \in \{1, \ldots, n_1\}; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \leq c_j, \quad i \in \{n_1 + 1, \ldots, n_2\}; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} y_i = c_j, \quad i \in \{n_2 + 1, \ldots, n\}; \end{cases} \tag{18}$$

$$y_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m_1\}; \tag{19}$$

$$y_i \leq 0, \quad i \in \{m_1 + 1, \ldots, m_2\}, \tag{20}$$

$$m_1 \leq m_2 \leq m \qquad n_1 \leq n_2 \leq n.$$

називають **двоїстою задачею** до задачі (13) – (16).

Зауваження. Аналогічно як у теоремі 1 можна довести, що двоїстою до задачі (17) – (20) буде задача (13) – (16). Отже, ці дві задачі є взаємно двоїстими.

Приклад 2. Пряма задача має вигляд

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 4x_2 + x_4 \geq 0; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0.$$

Записати двоїсту до неї.

◀ Перше і друге обмеження двоїстої задачі будуть зі знаком "$\geq$", бо $x_1 \geq 0$ і $x_2 \geq 0$, третє обмеження двоїстої задачі – зі знаком "$\leq$", бо $x_3 \leq 0$, а четверте – зі знаком "=", бо для x_4 не накладено обмеження на знак. Отже,

$$F = 5y_1 + 6y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 2, \\ -4y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -1, \\ 2y_1 - y_2 \leq 1, \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 = 5; \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_3 \leq 0.$$

При цьому $y_1 \geq 0$, оскільки перше обмеження прямої задачі має знак "$\leq$", $y_3 \leq 0$, бо третє обмеження прямої задачі має знак "$\geq$", а обмеження на знак y_2 не накладається, бо друге обмеження у прямій задачі має знак "=". ▶

2. Зв'язок між розв'язністю прямої і двоїстої задачі

2.1. Основні теореми двоїстості

Для зручності розглянемо симетричну пару взаємно двоїстих задач лінійного програмування:

$$f = CX \to \max;$$

$$AX \le A_0;$$
$$X \ge 0, \tag{1}$$

і

$$F = YA \to \min;$$

$$YA \ge C;$$
$$Y \ge 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Для довільних допустимих розв'язків X і Y прямої і двоїстої задач правильна нерівність*

$$f(X) \le F(Y). \tag{3}$$

◀ Оскільки X є допустимим планом задачі (1), то $AX \le A_0$ і $X \ge 0$. З того, що Y допустимий план задачі (2), випливають нерівності $YA \ge C$, $Y \ge 0$. Тому $YAX \le YA_0$, $YAX \ge CX$, а отже, $CX \le YAX \le YA_0$, тобто $f(X) \le F(Y)$. ▶

Нерівність (3) називається **основною нерівністю теорії двоїстості.** Економічний зміст її полягає в тому, що при довільному допустимому плані виробництва X загальна вартість всієї продукції не перевищує сумарної оцінки ресурсів, яка відповідає довільному допустимому плану оцінок Y.

Теорема 2. *Нехай X^* і Y^* допустимі плани прямої (1) і двоїстої (2) задач такі, що*

$$f(X^*) = F(Y^*). \tag{4}$$

Тоді план X^* є оптимальним планом прямої задачі, а план Y^* – оптимальним планом двоїстої задачі.

◀ Поряд з планом X^* розглянемо довільний допустимий план X прямої задачі (1). Згідно з теоремою 1 і рівністю (4) маємо $f(X) \leq F(Y^*) = f(X^*)$, а це означає, що X^* – оптимальний план прямої задачі.

Аналогічно, якщо розглянути поряд з Y^* довільний допустимий план Y двоїстої задачі (2), то матимемо $F(Y) \geq f(X^*) = F(Y^*)$, тобто Y^* є оптимальним планом задачі (2). ▶

Теорема 2 дає критерій оптимальності для пари двоїстих задач лінійного програмування. Згідно з цією теоремою, якщо серед допустимих розв'язків цих задач знайдуться вектори X^* і Y^*, що задовольняють умову (4), то вони будуть оптимальними розв'язками відповідних задач. З економічної точки зору це означає, що плани виробництва і оцінки ресурсів є оптимальними, коли ціна всієї продукції і сумарна оцінка ресурсів однакові.

Теорема 3 (перша теорема двоїстості). *Якщо одна з пари симетричних взаємно двоїстих задач розв'язна, то розв'язною є й друга задача, причому оптимальні значення цільових функцій відповідних задач збігаються.*

Якщо цільова функція однієї з пари симетричних взаємно двоїстих задач необмежена (для прямої задачі – зверху, а для двоїстої – знизу), то друга задача не має допустимих планів.

◀ Повне доведення теореми є, зокрема, в книзі [14]. Зробимо певні пояснення щодо змісту теореми і доведемо її другу частину. Перша частина теореми стверджує, що умова $f(X^*) = F(Y^*)$ є необхідною і достатньою умовою оптимальності розв'язків пари взаємно двоїстих задач.

Твердження другої частини легко доводиться методом від супротивного. Припустимо, що у вихідній задачі цільова функція необмежена, тобто $f_{\max} = \infty$, а умови двоїстої задачі несуперечливі, тобто існує принаймні один допустимий розв'язок $Y = (y_1, \ldots, y_m)$. Тоді згідно з теоремою 1 $f(X) \leq F(Y)$, що суперечить умові необмежності f. Отже, при $f_{\max} = \infty$ у вихідній задачі, двоїста задача розв'язків не має. ▶

Приклад 1. Для задачі

$$f = -2x_1 - 3x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

записати двоїсту й розв'язати графічно обидві задачі.

◀ Двоїста задача має вигляд

$$F = 4y_1 + 6y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -4y_1 + y_2 \leq -2, \\ 2y_1 + y_2 \leq -3; \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

З рис. 1 випливає, що пряма задача не має оптимального розв'язку, бо цільова функція f необмежена знизу на множині допустимих планів.

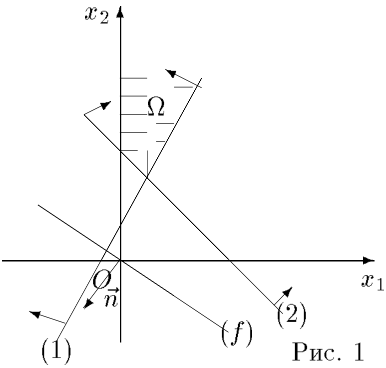


Рис. 1

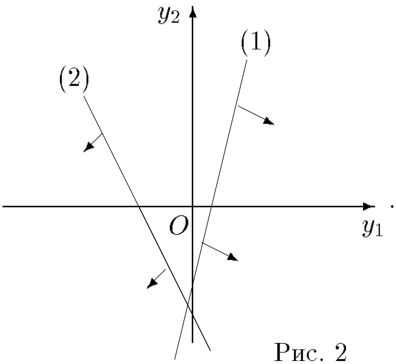


Рис. 2

Двоїста задача не має планів, як видно з рис. 2, бо многокутник розв'язків є порожньою множиною. ▶

Зауваження 1. Твердження, обернене до другої частини теореми 3, взагалі кажучи, неправильне, тобто з того, що умови вихідної задачі суперечливі, не випливає, що цільова функція двоїстої задачі необмежена. Двоїста задача так само може не мати допустимих планів.

З'ясуємо **економічний зміст першої теореми двоїстості.** Максимальний прибуток $f_{\max}$ підприємство отримує за умови виробництва продукції згідно з оптимальним планом $X^* = (x_1^*; \ldots; x_n^*)$, однак таку саму суму грошей $F_{\min} = f_{\max}$ воно може мати, реалізувавши ресурси за оптимальними цінами $Y^* = (y_1^*; \ldots; y_m^*)$. За умов використання інших планів $X \neq X^*$ і $Y \neq Y^*$ на підставі основної нерівності теорії двоїстості можна стверджувати, що прибутки від реалізації продукції менші, ніж витрати на її виробництво.

Теорема 4 (друга теорема двоїстості). *Допустимі розв'язки X^* і Y^* прямої та двоїстої задач є оптимальними планами відповідних задач (1) і (2) тоді й тільки тоді, коли виконуються* **умови доповнюючої нежорсткості***:*

$$\text{1) } \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}; \tag{5}$$

$$\text{2) } y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{6}$$

◀ **Необхідність.** Нехай X^* і Y^* – оптимальні плани відповідних задач (1) і (2). З теореми 3 випливає, що $f(X^*) = F(Y^*)$ або $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i^*$, а також x_j^*, $j \in \{1, \ldots, n\}$, і y_j^*, $i \in \{1, \ldots, m\}$, задовольняють системи обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \leq b_i, \ i \in \{1, \ldots, m\}; \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j, \ j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{8}$$

Помноживши (7) на y_i^*, а (8) – на x_j^* і просумувавши ліві й праві частини, отримаємо такі нерівності:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* x_j^* \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$$

Праві частини цих нерівностей різні, а ліві однакові, тому вони правильні одночасно лише як рівності, тобто

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* x_j^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

або

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0. \tag{10}$$

Враховуючи (7) і те, що $y_i^* \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, отримуємо, що рівність (9) можлива лише тоді, коли кожний доданок вигляду $y_i^* \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right)$ дорівнює нулю. Провівши аналогічні міркування для (10), одержимо, що всі доданки $x_j^* \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0$.

Достатність. Нехай виконуються умови доповнюючої нежорсткості (5) і (6). Доведемо, що X^* і Y^* – оптимальні плани відповідно прямої (1) і двоїстої (2) задач. У кожній з рівностей (5) і (6) розкриємо дужки і просумуємо першу з них по $j \in \{1, \ldots, n\}$, а другу по $i \in \{1, \ldots, m\}$. Тоді матимемо

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* x_j^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_iy_i^*.$$

Оскільки ліві частини однакові, то $\sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j^* = \sum\limits_{i=1}^{m} b_iy_i^*$. Тоді згідно з теоремою 4 X^* і Y^* – оптимальні плани відповідно прямої (1) і двоїстої (2) задач. ▶

Отже, оптимальні розв'язки пари взаємно двоїстих задач мають властивість ортогональності: *якщо j-та компонента оптимального вектора $X*$ додатна, то j-те обмеження двоїстої задачі повинно виконуватись як рівність. Аналогічно, якщо додатною є i-та компонента оптимального вектора $Y*$, то повинно виконуватись як рівність i-те обмеження прямої задачі.*

Зауваження 2. Теореми 1 – 4 правильні й у випадку несиметричної пари взаємно двоїстих задач. Зокрема, одна з умов теореми 4 виконується автоматично.

Приклад 2. Знайти розв'язок прямої задачі, графічно розв'язавши двоїсту до неї, якщо

$$f = 15x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 25; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

◀ Двоїста задача до заданої має вигляд

$$F = 9y_1 + 25y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 \geq 15, \\ 2y_1 - 3y_2 \geq 6, \\ -y_1 + 4y_2 \geq 4. \end{cases}$$

Графічне розв'язування двоїстої задачі подамо на рис. 3

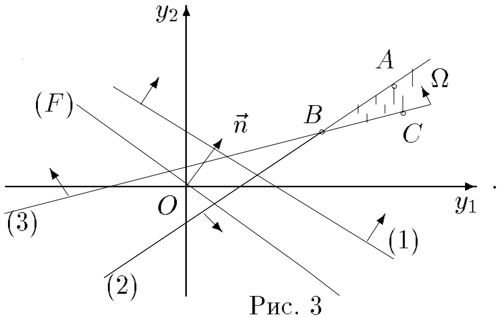


Рис. 3

Областю допустимих розв'язків є кут ABC. Оптимального значення цільова функція F досягає в точці B, координати якої одержимо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 = 6, \\ -y_1 + 4y_2 = 4. \end{cases}$$

Маємо $y_1 = 7,2$; $y_2 = 2,8$, тобто $Y^* = (7,2; 2,8)$, $F_{\min} = 134,8$. Підставляючи одержаний розв'язок в систему обмежень двоїстої задачі, знаходимо

$$3 \cdot 7,2 + 2,8 \cdot 5 = 35,6 > 15,$$

$$2 \cdot 7,2 - 3 \cdot 2,8 = 6,$$

$$-7,2 + 4 \cdot 2,8 = 4.$$

Перше обмеження задовольняється як строга нерівність, а отже, згідно з другою теоремою двоїстості, змінна $x_1 = 0$. Підставляючи $x_1 = 0$ у вихідну систему обмежень, знаходимо

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 9, \\ -3x_2 + 4x_3 = 25; \end{cases}$$

звідки $x_2 = 12,2$; $x_3 = 15,4$. Тому $X^* = (0; 12,2; 15,4)$, $f_{\max} = 134,8$. ▶

З'ясуємо **економічний зміст другої теореми двоїстості**.

Згідно з умовою 1) теореми 4, якщо деякий продукт P_j входить в оптимальний план виробництва, тобто $x_j^* > 0$, то при оптимальній системі цін двоїстої задачі витрати ресурсів на його виготовлення збігаються з вартістю цього продукту.

За умовою 2), якщо в оптимальній системі цін деякий ресурс S_i має ціну $y_i^* > 0$, то у відповідності з оптимальним планом виробництва вихідної задачі цей ресурс буде використаний повністю.

Якщо розглянути обмеження прямої та двоїстої задач, то можна доповнити тлумачення умов 1) і 2) теореми 4.

З другого співвідношення теореми 4 випливає, що коли $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* > c_j$, то $x_j^* = 0$, а це означає, що коли виробництво j-ї продукції для підприємства збиткове, то така продукція на цьому підприємстві не вироблятиметься.

З першого співвідношення теореми 4, у свою чергу, одержуємо, що при виконанні нерівності $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$ оцінка $y_i^* = 0$, тобто, коли при оптимальному плані виробництва i-й ресурс використовуватиметься не повністю, то його оцінка y_i^* повинна дорівнювати нулю. Отже, оптимальна двоїста оцінка ресурсу y_i^* вказує, чи є відповідний ресурс дефіцитним, чи ні.

Зв'язок, який існує між взаємно двоїстими задачами, дозволяє, розв'язавши одну з них, знайти розв'язок другої.

2.2. Розв'язування пари двоїстих задач симплексним методом

Нехай задача (1) розв'язана за допомогою симплексного методу і знайдено оптимальний план $X^* = (x_1^*; \ldots; x_n^*)$, який визначається базисом, утвореним векторами $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$. Позначимо через $C_б = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_m})$ вектор-рядок, складений з коефіцієнтів при невідомих у цільовій функції задачі (1), які відповідають цьому базису, а через A^{-1} матрицю, обернену до матриці A, складеної з компонентів векторів $A_{i_1}, \ldots A_{i_m}$ базису. Доведено [14], що вектор $Y^* = C_б A^{-1}$ є оптимальним планом двоїстої задачі (2).

Отже, якщо знайдено за допомогою симплексного методу оптимальний план задачі (1), то з останньої симплексної таблиці знайдемо $C_б$ і A^{-1}, і, отже, за допомогою співвідношення $Y^* = C_б A^{-1}$ одержимо оптимальний план задачі (2).

Якщо ми маємо канонічну задачу лінійного програмування і двоїсту до неї, то у випадку, коли серед векторів $A_1, \ldots, A_n$, складених з коефіцієнтів при невідомих у системі обмежень прямої задачі, є m одиничних, указану матрицю A^{-1} утворюють числа перших m рядків останньої симплексної таблиці, які стоять у стовпчиках цих векторів. Тоді відпадає необхідність визначати оптимальний план двоїстої задачі множенням $C_б$ на A^{-1}, оскільки компоненти цього плану збігаються з відповідними елементами Δ_j $(m+1)$-го рядка одиничних векторів, якщо коефіцієнт $c_j = 0$, і дорівнюють сумі відповідного елемента Δ_j цього рядка та c_j, якщо $c_j \neq 0$.

У випадку задачі (1) компоненти оптимального плану двоїстої задачі (2) збігаються з числами Δ_j $(m+1)$-го рядка останньої симплексної таблиці розв'язування прямої задачі. Указані числа стоять у стовпчиках векторів, що відповідають додатковим (балансуючим) змінним.

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$f = x_2 - x_4 - 3x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, 6\};$$

й двоїсту до неї.

◀ Двоїста задача до заданої має вигляд

$$F = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 \leq 0, \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1, \\ y_2 \leq 0, \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1, \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3, \\ y_3 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язуватимемо симплексним методом пряму задачу

i	Б	$C_б$	A_0	0	1	0	-1	-3	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_1	0	1	1	2	0	-1	$\boxed{1}$	0
2	A_3	0	2	0	-4	1	2	-1	0
3	A_6	0	5	0	3	0	0	1	1
$m+1$			0	0	-1	0	1	3	0
1	A_5	-3	1	1	2	0	-1	1	0
2	A_3	0	3	1	-2	1	$\boxed{1}$	0	0
3	A_6	0	4	-1	1	0	1	0	1
$m+1$			-3	-3	-7	0	4	0	0
1	A_5	-3	4	2	0	1	0	1	0
2	A_4	-1	3	1	-2	1	1	0	0
3	A_6	0	1	-2	$\boxed{3}$	-1	0	0	1
$m+1$			-15	-7	1	-4	0	0	0
1	A_5	-3	4	2	0	1	0	1	0
2	A_4	-1	$11/3$	$-1/3$	0	$1/3$	1	0	$2/3$
3	A_2	1	$1/3$	$-2/3$	1	$-1/3$	0	0	$1/3$
$m+1$			$-46/3$	$-19/3$	0	$-11/3$	0	0	$-1/3$

Отже, оптимальний план прямої задачі $X^* = (0;\, 1/3;\, 0;\, 11/3;\, 4;\, 0)$, а $f_{\min} = -\dfrac{46}{3}$.

Знайдемо тепер оптимальний план двоїстої задачі. Його координати знаходяться в $(m+1)$-у рядку останньої симплексної таблиці, а саме, i-та координата стоїть навпроти відповідного вектора, який входив до початкового базису, якщо до неї додати відповідне значення коефіцієнта цільової функції:

$$y_1 = -\frac{19}{3} + 0 = -\frac{19}{3}, \quad y_2 = -\frac{11}{3} + 0 = -\frac{11}{3},$$

$$y_3 = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}.$$

При цьому $F_{\max} = -\dfrac{46}{3}$. ▶

Зауваження 3. Якщо оптимальний план прямої задачі вироджений, то оптимальний план двоїстої задачі, взагалі кажучи, не єдиний. Перехід до нової симплексної таблиці здійснюють так: за провідний рядок беруть той, що відповідає $b_r = 0$, а провідний стовпчик визначають з умови

$$\theta_r = \min_{j\ :\ a_{rj}<0} \left\{ -\frac{\Delta_j}{a_{rj}} \right\}.$$

При цьому досить перерахувати лише $(m+1)$–й рядок, оскільки стовпчик A_0 не зміниться.

Приклад 4. Розв'язати задачу

$$f = 4x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in \{1, 2\};$$

й двоїсту до неї.

◀ Двоїста задача до заданої має вигляд

$$F = y_1 + 2y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 4, \\ 2y_1 + y_2 \ge 4; \end{cases}$$

$$y_j \ge 0,\ j \in \{1, 2\}.$$

Зауважимо, що зазначені задачі легко розв'язати графічно, проте, щоб продемонструвати зауваження 3 розв'язуватимемо симплексним методом пряму задачу.

i	Б	$C_б$	A_0	4	4	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_3	0	1	$\boxed{1}$	2	1	0
2	A_4	0	2	2	1	0	1
$m+1$			0	-4	-4	0	0
1	A_1	4	1	1	2	1	0
2	A_4	0	0	0	$\boxed{-3}$	-2	1
$m+1$			4	0	4	4	0
1	A_1	4	1				
2	A_2	4	0				
$m+1$			4	0	0	4/3	4/3

Отже, оптимальний план прямої задачі $X^* = (1; 0)$, а $f_{\max} = 4$.

Двоїста задача має безліч розв'язків, які подамо як лінійну комбінацію $Y^* = \lambda Y_1^* + (1 - \lambda) Y_2^*$, $\lambda \in [0; 1]$, де $Y_1^* = (4; 0)$ (знайдено за другою симплекс-таблицею) і $Y_2^* = (4/3; 4/3)$ (знайдено за третьою симплекс-таблицею). При цьому $F_{\min} = 4$. ▶

3. Двоїстий симплексний метод

При застосуванні симплексного методу до розв'язування задачі лінійного програмування вимагалося, щоб компоненти вектора обмежень b_i були невід'ємними. При цьому оцінки Δ_j могли бути довільними.

Часто зустрічаються випадки, коли є базис, що задовольняє ознаку оптимальності, тобто всі $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, але умова допустимості не виконується, оскільки не всі $b_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Варіант симплексного методу, що застосовується при розв'язуванні таких задач, називається **двоїстим симплексним методом або методом уточнення оцінок**.

У попередньому пункті встановлено зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач. Для знаходження оптимального розв'язку однієї із взаємно двоїстих задач можна перейти до двоїстої і, скориставшись її оптимальним планом, знайти оптимальний розв'язок прямої. Виявляється, що перехід до двоїстої задачі не обов'язковий, бо як випливає з будови смплексної таблиці у її стовпчиках записана пряма задача, а в рядках – двоїста. Оцінками прямої задачі є компоненти Δ_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $(m+1)-$го рядка, а оцінками плану двоїстої задачі – компоненти b_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, стовпчика A_0. Розв'язавши симплексним методом пряму задачу, ми знаходимо одночасно і розв'язок двоїстої задачі. Двоїстий симплексний метод дозволяє розв'язавши двоїсту задачу за допомогою таблиці, в якій записана пряма задача, знайти розв'язок прямої задачі.

Розглянемо задачу

$$\begin{gathered} f = CX \to \max; \\ AX = A_0; \\ X \geq 0, \end{gathered} \tag{1}$$

де матриця A містить одиничний базис і всі оцінки $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, але умова невід'ємності не накладається на компоненти b_i вектора A_0. Таку задачу називатимемо **задачею у двоїстій базисній формі**.

Симплексний метод, який застосовуємо до задачі в базисній формі, приводить до еквівалентних задач із зростаючим значенням цільової функції і невід'ємними b_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, а це означає, що кожний базисний розв'язок є допустимим. Двоїстий симплексний метод, при застосуванні його до задачі у двоїстій базисній формі, приводить до послідовності задач зі спадним значенням цільової функції, невід'ємними оцінками Δ_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, і значеннями b_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, довільного знаку. За перший опорний план беремо деякий допустимий розв'язок двоїстої задачі, який називається **псевдопланом.** Перехід до наступної симплексної таблиці зберігає його допустимість, тобто $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. При цьому серед значень цього плану можуть бути від'ємні b_r, $r \in \{i_1, \ldots, i_k\}$, а це означає, що одержаний план не є оптимальним для прямої задачі і одночасно, згідно з теоремою 3, не є оптимальним планом для двоїстої задачі відповідний йому план, бо всі оцінки оптимального плану двоїстої задачі мають бути невід'ємними. Отже, вектор, що відповідає $b_r < 0$, треба вивести з базису прямої задачі, а вектор двоїстої задачі, що відповідає цій від'ємній оцінці, включити до базису двоїстої. Відомо, що у прямому симплексному методі виявляють вектор, який треба ввести в базис, а в двоїстому навпаки – спочатку визначають вектор, який слід виключити з базису, а потім вектор, який вводять у базис. Ітерації продовжуємо до тих пір, поки не буде встановлено, що вихідна задача не має допустимого плану або буде одержана задача з допустимим базисним розв'язком (всі $b_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$), який є одночасно оптимальним.

Відносно задачі (1) у двоїстій базисній формі можливі три випадки.

Випадок 1. Усі координати вектора обмежень A_0 невід'ємні, $b_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Тоді вони дають не тільки допустимий, але й оптимальний план задачі, оскільки згідно з припущенням усі оцінки $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Випадок 2. Існує рядок i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, такий, що $b_i < 0$ і $a_{ij} \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. У цьому випадку задача нерозв'язна, бо система обмежень несумісна. Справді, для довільного вектора $X =$

$(x_1; \ldots; x_n)$, де $x_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, при $a_{ij} \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, маємо $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq 0$, а тому i-те обмеження $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, де $b_i < 0$, не має змісту.

Випадок 3. Існує рядок $r \in \{1, \ldots, m\}$, такий, що $b_r < 0$ і $a_{rj} < 0$ принаймні для одного $j \in \{1, \ldots, n\}$. Нехай $s \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $a_{rs} < 0$ і

$$-\frac{\Delta_s}{a_{rs}} = \min_{j\ :\ a_{rj}<0} \left\{ \frac{-\Delta_j}{a_{rj}} \right\}.$$

Тоді жорданове перетворення з провідним елементом a_{rs} приводить до еквівалентної задачі, в якій всі оцінки $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, і значення цільової функції $f' \leq f$, а при $\Delta_s \neq 0$ $f' < f$.

◀ Доведемо, що це справді так. Якщо застосувати жорданове перетворення з провідним елементом a_{rs}, то у $(m+1)$-у рядку еквівалентної задачі матимемо

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_s}{a_{rs}} a_{rj}, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$f' = f - \frac{\Delta_s}{a_{rs}} b_r.$$

При обчисленні коефіцієнта Δ'_j можливі два випадки: $a_{rj} \geq 0$ і $a_{rj} < 0$. Якщо $a_{rj} \geq 0$, то $-\dfrac{\Delta_s}{a_{rs}} a_{rj} \geq 0$, а тому $\Delta'_j \geq \Delta_j \geq 0$. Якщо ж $a_{rj} < 0$, то згідно з вибором s маємо $\dfrac{\Delta_j}{a_{rj}} \leq \dfrac{\Delta_s}{a_{rs}}$. Помноживши обидві частини цієї нерівності на $a_{rj} < 0$, дістанемо $\Delta_j \geq \dfrac{\Delta_s}{a_{rs}} a_{rj}$. Тому $\Delta'_j \geq 0$. Отже, невід'ємність оцінок Δ'_j доведена.

Оскільки $\Delta_s \geq 0$, $a_{rs} < 0$, $b_r < 0$, то $\dfrac{\Delta_s}{a_{rs}} b_r \geq 0$. Звідси випливає, що $f' = f - \dfrac{\Delta_s}{a_{rs}} b_r \leq f$. Якщо ж $\Delta_s \neq 0$, то $\dfrac{\Delta_s}{a_{rs}} b_r > 0$, і тому $f' < f$. ▶

Зауваження. У випадку $f \to \min$ задача лінійного програмування називається задачею у двоїстій базисній формі, якщо вона містить одиничний базис і всі оцінки $\Delta_j \leq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, але умову невід'ємності задовольняють не всі компоненти b_i вектора A_0. Умовою оптимальності її плану є $\Delta_j \le 0$ для всіх $j \in \{1, \ldots, n\}$. Випадок 3 формулюється відповідно так: якщо існує рядок $r \in \{1, \ldots, m\}$, такий, що $b_r < 0$ і $a_{rj} < 0$ принаймні для одного $j \in \{1, \ldots, n\}$ і $s \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $a_{rs} < 0$, а

$$\frac{\Delta_s}{a_{rs}} = \min_{j \,:\, a_{rj}<0} \left\{ \frac{\Delta_j}{a_{rj}} \right\},$$

то жорданове перетворення з провідним елементом a_{rs} приводить до еквівалентної задачі, в якій всі оцінки $\Delta_j \le 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, і значення цільової функції $f' \ge f$, а при $\Delta_s \ne 0$ $f' > f$.

Опишемо **алгоритм двоїстого симплексного методу**.

Нехай є задача лінійного програмування (1) у двоїстій базисній формі. Двоїстий симплексний метод, застосований до цієї задачі, складається з наступних кроків, які повторюються до тих пір, поки в ході жорданових перетворень не буде встановлено відповідність чергової еквівалентної задачі випадкам 1) або 2), які описані вище.

1. Перевіряємо знаки компонент вектора обмежень A_0. Якщо всі $b_i \ge 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то має місце випадок 1. Базисний розв'язок і значення цільової функції, які записані в стовпчику A_0 симплексної таблиці, дають оптимальний розв'язок вихідної задачі. Якщо ж серед b_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, є від'ємні, то переходимо до кроку 2.

2. Серед від'ємних коефіцієнтів b_i вибираємо коефіцієнт b_r, найбільший за абсолютною величиною, і рядок r називаємо провідним.

3. У провідному рядку перевіряємо знаки всіх коефіцієнтів a_{rj}, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Якщо всі $a_{rj} \ge 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то маємо випадок 2. Розв'язування закінчено, оскільки доведено, що задача розв'язку не має. Якщо ж принаймні один із коефіцієнтів a_{rj}, $j \in \{1, \ldots, n\}$, від'ємний, то маємо випадок 3, і переходимо до наступного кроку 4.

4. Серед від'ємних коефіцієнтів a_{rj}, $j \in \{1, \ldots, n\}$, провідного рядка вибираємо елемент a_{rs}, для якого

$$-\frac{\Delta_s}{a_{rs}} = \min_{j \,:\, a_{rj}<0} \left\{ -\frac{\Delta_j}{a_{rj}} \right\}$$

і назвемо його провідним.

5. Виконуємо жорданове перетворення симплексної таблиці з провідним елементом a_{rs} і переходимо до кроку 1.

Оптимальний план прямої задачі визначається базисними змінними та їхніми значеннями в стовпчику A_0 останньої симплексної таблиці, а двоїстої задачі – змінними двоїстої задачі, які відповідають базисним стовпчикам вихідної задачі, та їхніми значеннями, що знаходяться в оціночному $(m+1)$-у рядку з урахуванням c_j.

Двоїстий симплексний метод зручно використовувати також для розв'язування задач, які мають одиничний базис, але не належать до задач у базисній формі, оскільки мають від'ємні компоненти серед елементів вектора A_0 і $(m+1)$-го рядка одночасно. Розв'язуються такі задачі в два етапи. Спочатку за допомогою двоїстого симплексного методу виключаються всі $b_i < 0$, а потім оптимальний план знаходиться звичайним симплексним методом. Треба лише на першому етапі замінити крок 4 на такий:

4′. Серед від'ємних коефіцієнтів a_{rj} провідного рядка вибираємо елемент a_{rs}, для якого

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \max_{j\ :\ a_{rj}<0} \left\{ \frac{b_r}{a_{rj}} \right\}.$$

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$f = 5x_2 + 7x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} -10x_2 + x_3 + x_4 = -16, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_4 = -12, \\ -6x_2 - 2x_4 + x_5 = -17; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, 5\},$$

і двоїсту до неї.

◀ Двоїстою до заданої є задача

$$F = -16y_1 - 12y_2 - 17y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} -10y_1 - 3y_2 - 6y_3 \leq 5, \\ y_1 \leq 0, \\ y_1 - 3y_2 - 2y_3 \leq 7, \\ y_3 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо пряму задачу за допомогою симплексних таблиць

i	Б	$C_Б$	A_0	0	5	0	7	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	-16	0	-10	1	1	0
2	A_1	0	-12	1	-3	0	-3	0
3	A_5	0	-17	0	$\boxed{-6}$	0	-2	1
$m+1$			0	0	-5	0	-7	0
1	A_3	0	$37/3$	0	0	1	$13/3$	$-5/3$
2	A_1	0	$-7/2$	1	0	0	-2	$\boxed{-1/2}$
3	A_2	5	$17/6$	0	1	0	$1/3$	$-1/6$
$m+1$			$85/6$	0	0	0	$-16/3$	$-5/6$
1	A_3	0	24	$-10/3$	0	1	11	0
2	A_5	0	7	-2	0	0	4	1
3	A_3	5	4	$-1/3$	1	0	1	0
$m+1$			20	$-5/3$	0	0	-2	0

У першій симплексній таблиці всі $\Delta_j \leq 0$, тобто виконується умова оптимальності, але в стовпчику A_0 є від'ємні числа, найменше з яких дорівнює -17. Отже, третій рядок беремо за провідний, а провідний стовпчик виберемо за двоїстим симплексним відношенням

$$\min\left\{\frac{-5}{-6}; -\frac{7}{2}\right\} = \frac{5}{6}, \quad j = 2.$$

Зробимо жорданове перетворення з провідним елементом $a_{32} = -6$. У другій симплексній таблиці стовпчик A_0 містить від'ємне число $b_2 = -7/2$, тому за провідний рядок беремо другий. Провідний стовпчик, а отже, і розв'язувальний елемент знаходимо за допомогою двоїстого симплексного відношення

$$\min\left\{\frac{-16/3}{-2}; \frac{-5/6}{-1/2}\right\} = \frac{10}{6}, \quad j = 5.$$

Після жорданового перетворення з провідним елементом $a_{25} = -1/2$, дістанемо, що в стовпчику A_0 стоять додатні елементи, а в оціночному $(m+1)$-у рядку всі Δ_j, як і раніше, недодатні. Це означає, що план $X^* = (0; 4; 24; 0; 7)$ є оптимальним, а $f_{\min} = 20$.

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі $Y^* = (0; -5/3; 0)$, а $F_{\max} = 20$. ▶

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$f = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in \{1,\, 2,\, 3\},$$

і двоїсту до неї.

◀ Двоїста задача до заданої має вигляд

$$F = 4y_1 + 5y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \le -2; \\ y_1 - 5y_2 \le 1; \\ -y_1 + y_2 \le 5; \end{cases}$$

$$y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0.$$

Розв'язуватимемо пряму задачу за допомогою двоїстого симплексного методу. Для цього запишемо її спочатку в канонічній базисній формі

$$f = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

i	Б	$C_Б$	A_0	-2	1	5	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	0	4	1	1	-1	1	0
2	A_5	0	-5	-1	5	$\boxed{-1}$	0	1
$m+1$			0	2	-1	-5	0	0
1	A_4	0	9	$\boxed{2}$	-4	0	1	-14
2	A_3	5	5	1	-5	1	0	-1
$m+1$			25	7	-26	0	0	5
1	A_1	-2	$9/2$	1	-2	0	$1/2$	$-1/2$
2	A_3	5	$1/2$	0	-3	1	$-1/2$	$-1/2$
$m+1$			$-13/2$	0	-12	0	$-7/2$	$-3/2$

У першій симплексній таблиці за провідний рядок візьмемо другий, бо йому відповідає від'ємне $b_2 = -5$. Скористаємось кроком $4'$ і виберемо провідний елемент за відношенням

$$\max\left\{\frac{-5}{-1}; \frac{-5}{-1}\right\} = 5.$$

Оскільки маємо два значення, то візьмемо будь-яке з них, наприклад, $a_{23} = -1$.

Зробивши жорданове перетворення з провідним елементом $a_{23} = -1$, дістанемо в стовпчику A_0 всі додатні елементи, але умова оптимальності не виконується. Тепер скористаємося звичайним симплексним методом. Провідним стовпчиком є перший, і провідним рядком також перший, бо

$$\theta_{01} = \max\left\{\frac{9}{2}; \frac{5}{1}\right\} = \frac{9}{2}, \ i = 1.$$

Після жорданового перетворення з провідним елеметом $a_{11} = 2$, дістанемо, що умова оптимальності виконується, тобто задача розв'язана:

$$X^* = \left(\frac{9}{2}; 0; \frac{1}{2}\right), \ f_{\min} = -\frac{13}{2}.$$

Розв'язок двоїстої задачі міститься в $(m+1)$-у рядку останньої симплексної таблиці в стовпчиках, що відповідають початковому опорному плану. Оскільки при зведенні першої задачі до канонічної базисної форми ми змінили знаки на протилежні у другій нерівності, то для y_2 треба взяти значення з протилежним знаком. Отже, $Y^* = \left(-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$, а $F_{\max} = -\frac{13}{2}$. ▶

Вправи

1. Задана задача лінійного програмування

$$f = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Перевірити, чи план $X = (0;1/4;5/4;0)$ цієї задачі і план $Y = (-2;-1/2)$ двоїстої до неї задачі є оптимальними планами відповідних задач.

2. Задана задача лінійного програмування

$$f = 7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 7; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j \in \{1, 2, 4\}.$$

Перевірити, чи план $X = (3;0;1)$ цієї задачі і план $Y = (1;3)$ двоїстої до неї задачі є оптимальними планами відповідних задач.

3. Скласти двоїсту задачу до заданої, і, розв'язавши графічно одну з них, знайти розв'язок другої:

1) $$f = 2x_1 + 7x_2 \to \max; \quad \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases} \quad x_j \geq 0, \ j \in \{1, 2\};$$

2) $$f = -2x_1 - 3x_2 \to \min; \quad \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 6; \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2\};$$

3) $$f = x_1 + 3x_2 \to \max; \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2; \end{cases} \quad x_j \geq 0, \ j \in \{1, ..., 5\};$$

4) $$f = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 11; \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$$

5) $$f = -3x_1 - 3x_2 \to \min; \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -4, \\ x_1 + 4x_2 \geq -18, \\ -4x_1 + x_2 \geq -30, \\ -x_1 + x_2 \geq -5; \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

4. Записати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування, і, розв'язавши за допомогою симплексного методу одну з них, знайти розв'язок другої:

1) $$f = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max; \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 36; \end{cases} \quad x_j \geq 0, \ j \in \{1, 2, 3\};$$

2) $$f = 14x_1 + 6x_2 + 22x_3 \to \max; \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leq 27, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6; \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$$

3) $f = x_1 - 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, 2\};$

4) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\};$

5) $f = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \le 16, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 10; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

5. За допомогою двоїстого симплексного методу знайти розв'язки заданої та двоїстої до неї задач:

1) $f = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, 2, 3\};$

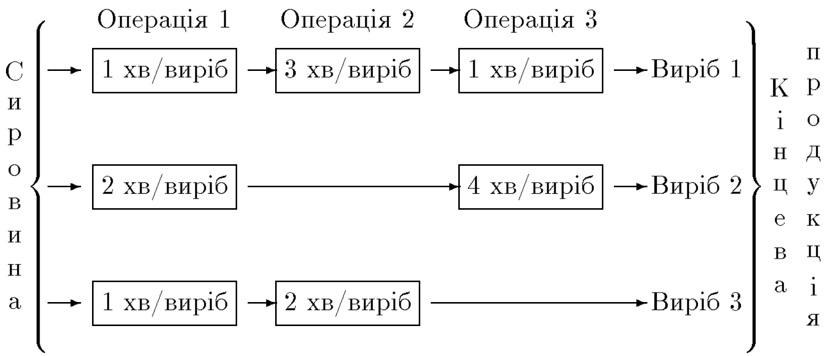
2) $f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

3) $f = 8x_1 + 4x_2 - 8x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 = 3, \\ -5x_1 - 3x_2 + x_3 = -10, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, 2, 3\};$

4) $f = x_1 - x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ x_1 - 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le -2, \\ -x_1 - 2x_2 \le -2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\};$

5) $f = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 7; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j \in \{1, 2, 3\}.$$

6. Підприємство випускає три види продукції. У процесі виробництва застосовуються три технологічні операції. На рисунку показана технологічна схема виготовлення кожного виробу.



Фонд робочого часу, впродовж якого кожна з операцій може застосовуватись для виробництва трьох згаданих виробів становить для першої операції 430 хв., для другої – 460 хв., для третьої – 420 хв. Очікуваний прибуток від продажу виробів кожного виду становить 3, 2 та 5 гр.од. відповідно.

1) Визначити оптимальний план випуску продукції. 2) Побудувати модель задачі, яка є двоїстою до заданої. Знайти її оптимальний план. 3) Охарактеризувати з економічної точки зору розв'язки обох задач.

7. Підприємство має в розпорядженні 500 од. ресурсу P_1 виду, 400 од. – P_2 виду та 200 од. – P_3 виду. Згадані ресурси можуть бути використані для виробництва продукції трьох типів: $П_1$, $П_2$, $П_3$. Норми витрат ресурсів та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного типу вказано в таблиці

Ресурси	Норми витрат на 1 од. продукції		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
P_1	1	2	0
P_2	2	1	0
P_3	0	1	1
Прибуток від реалізації 1 од.	3	4	1

1) Визначити оптимальний план випуску продукції. 2) Побудувати модель задачі, яка є двоїстою до заданої. Знайти її оптимальний план. 3) Охарактеризувати з економічної точки зору розв'язки обох задач.

Відповіді

1. Так. **2.** Так. **3.** 1) $X^* = (2;\,6)$, $Y^* = (1;\,4)$, $f_{\max} = F_{\min} = 46$; 2) У прямої задачі цільова функція необмежена знизу, а у двоїстої – множина планів порожня; 3) $X^* = (1/2;\,3/2;\,0;\,2;\,0)$, $Y^* = (1;\,0;\,2)$, $f_{\max} = F_{\min} = 5$; 4)$X^* = (0;\,0;\,23/6;\,11/2;\,0)$, $Y^* = (4/3;\,2/3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 46/3$; 5) $X^* = (6;6)$, $Y^* = (0;15/17;\,9/17;0)$, $f_{\min} = F_{\max} = -36$.

4. 1) $X^* = (18;\,6;\,0)$, $Y^* = (7/9;\,0;\,13/9)$, $f_{\max} = F_{\min} = 66$; 2) $X^* = (3/2;\,0;\,3/2)$, $Y^* = (2;\,0;\,5)$, $f_{\max} = F_{\min} = 54$; 3) $X^* = (6;\,1)$, $Y^* = (0;\,1/3;\,2/3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 4$; 4) У прямої задачі цільова функція необмежена знизу, а у двоїстої – множина планів порожня; 5) $X^* = (14;\,0;\,-4)$, $Y^* = (0;\,1;\,3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 46$.

5. 1)$X^* = (14/3;\,2/3;\,8/3)$, $Y^* = (2;\,1/3;\,2/3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 32/3$; 2) Пряма задача не має розв'язку, бо множина її допустимих планів порожня, а двоїста тому, що цільова функція F необмежена знизу; 3)$X^* = (23/7;\,2/7;\,0)$, $Y^* = (0;\,44/7;\,0;\,12/7)$, $f_{\max} = F_{\min} = 192/7$; 4)$X^* = (20/3;\,1/3)$, $Y^* = (1/6;\,5/6;\,0;\,0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 19/3$; 5)$X^* = (3/2;\,5/2;\,0)$, $Y^* = (3/2;\,1/2)$, $f_{\min} = F_{\max} = 19/2$.

6. $X^* = (0;\,100;\,230)$, $Y^* = (1;\,2;\,0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 1350$;

7. $X^* = (100;\,200;\,0)$, $Y^* = (1;\,1;\,1)$, $f_{\max} = F_{\min} = 1100$;

Спеціальні задачі лінійного програмування

Існують важливі класи задач лінійного програмування, до яких застосування універсальних алгоритмів є або нераціональним, або недостатнім для одержання розв'язку. Такі класи задач виділяють як **спеціальні задачі лінійного програмування** і для них розроблені свої методи розв'язування.

1. Цілочислове лінійне програмування

Важливе місце у застосуваннях займають задачі математичного програмування, де на всі змінні або на частину з них накладено умову цілочисловості. Необхідність цієї умови зрозуміла, якщо згадати, що багато видів ресурсів виробництва визначаються цілими числами: люди, літаки, машини, верстати і т.п.

Задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається задачею **цілочислового програмування.** У тому разі, коли цілочислових значень мають набувати всі змінні, задача називається **повністю цілочисловою**, а якщо одна чи кілька змінних – **частково цілочисловою.** Серед задач цілочислового програмування краще вивчені задачі цілочислового лінійного програмування.

1.1. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування

Задача цілочислового програмування формулюється так само, як і задача лінійного програмування, але з додатковою умовою, що значення деяких змінних, які дають оптимальний розв'язок, повинні бути цілими числами. Отже, загальна задача цілочислового лінійного програмування записується так:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \mathrm{extr};$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i \in \{1, \dots, m_1\}; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, \quad i \in \{m_1+1, \dots, m_2\}; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i \in \{m_2+1, \dots, m\}; \end{cases} \tag{21}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, n_1\};$$

$$x_j \text{ – довільні, } j \in \{n_1+1, \dots, n\}.$$

$$x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \dots, k\}, \quad k \le n.$$

Оскільки ця задача відрізняється від задачі лінійного програмування тільки додатковою умовою цілочисловості (4), то виникає припущення, що цілочисловий розв'язок можна одержати з розв'язку звичайної задачі лінійного програмування або безпосередньо, або заокругленням нецілих значень у відповіді. На практиці це припущення рідко реалізується, а тому доводиться розвивати нові методи, як правило, складніші, ніж методи лінійного програмування. Це зв'язано з дискретністю множини допустимих розв'язків цілочислових задач.

Наприклад, у двовимірному випадку плани цілочислової задачі визначаються скінченною множиною цілих точок, які лежать всередині й на межі многокутника обмежень звичайної задачі лінійного програмування. Методи розв'язування задач лінійного програмування здійснюють перебір тільки крайніх точок. Отже, вони гарантують відшукання оптимального цілочислового розв'язку, якщо всі крайні точки опуклого многокутника цілочислові. Таку властивість має вузький клас задач – транспортна та близькі до неї, де цілочислові розв'язки є завжди, коли умови задачі є цілими числами. Якщо крайні точки многокутника нецілочислові, то знайти оптимальний план цілочислової задачі методами лінійного програмування у загальному випадку не можна.

Якщо б ми хотіли наближено розв'язати задачу за допомогою заокруглення розв'язку звичайної задачі лінійного програмування, то це не завжди вдається. Наприклад, екстремум задачі, якій відповідає рис. 1, досягається в точці B, але жодна з найближчих до неї цілочислових точок K, L, M, N не є допустимою. Отже, обмеження цілочисловості є істотним і воно вимагає застосування спеціальних методів для розв'язування заданої задачі.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового лінійного програмування застосовують точні методи або наближені. Точні методи поділяються на методи відсікання (відтинання) та комбінаторні методи. Основою методів відсікання є ідея поступового звуження області допустимих розв'язків задачі, що розглядається, за допомогою спеціально побудованих додаткових обмежень, які вводяться у модель. Область звужується доти, поки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень. Найвідомішим методом відсікання є метод Гоморі. Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір досить невеликої частини розв'язків. Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

1.2. Методи відсікання. Побудова додаткового обмеження методом Гоморі

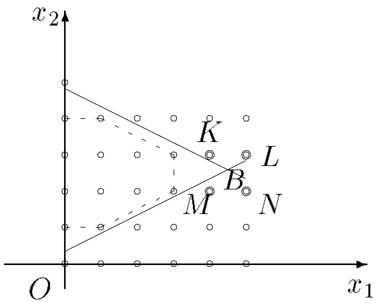


Рис. 1

Основну ідею методу відсікання пояснимо на рис. 1. На ньому суцільною лінією відзначено межу допустимої області Ω звичайної задачі лінійного програмування, а пунктиром – опуклу область Ω_1, всі крайні точки якої цілочислові.

Якщо розв'язати на Ω_1 задачу лінійного програмування, то одночасно буде розв'язана задача цілочислового програмування. Метод відсікання дає процедуру побудови області Ω_1 за допомогою послідовного відкидання деяких підмножин області Ω, які не містять цілих точок множини Ω_1 з цілочисловими координатами.

Ідея цього методу, який запропонований Гоморі, грунтується на симплексному методі і зміст його такий. Симплексним методом або його модифікацією знаходимо оптимальний план задачі без врахування цілочисловості. Якщо оптимальний план цілочисловий, то обчислення закінчуємо, а якщо він містить принаймні одну нецілу компоненту b_i, то накладаємо додаткове обмеження, яке враховує цілочисловість компонент плану і обчислення продовжуємо до одержання нового оптимального плану. Якщо ж й він не є цілочисловим, то складаємо наступне обмеження, яке не виконується для отриманого плану задачі, проте задовольняє будь-який цілочисловий розв'язок. Таке додаткове обмеження називають **правильним відсіканням.** Система обмежень задачі доповнюється новою умовою і далі розв'язується розширена задача лінійного програмування. Процес приєднання додаткових обмежень повторюємо до тих пір, поки буде або знайдено цілочисловий оптимальний план, або доведено, що задача не має цілочислового плану. Останнє буде тоді, коли для нецілого b_r всі a_{rj}, $j \in \{1, \ldots, n\}$, у цьому рядку є цілими.

Геометрично додавання кожного лінійного обмеження відповідає побудові площини, яка відсікає від многогранника розв'язків попередньої задачі оптимальну точку з нецілими компонентами, але не зачіпає жодної з цілочислових точок цього многогранника.

Розглянемо задачу цілочислового лінійного програмування, записану у вигляді

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_nx_n \to \text{extr}; \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{array} \right. \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}; \tag{3}$$

$$x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \ldots, k\}, \quad k \le n. \tag{4}$$

Опишемо спочатку алгоритм для повністю цілочислових задач (перший алгоритм Гоморі), тобто для випадку $k = n$.

Припустимо, що в оптимальному плані задачі (1) – (4) базисними є перші m змінних. Тоді маємо базисну систему обмежень вигляду

$$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{5}$$

Якщо покласти $x_j = 0$ для $j > m$, то дістанемо базисні компоненти оптимального розв'язку $x_i = b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Припустимо, що b_k – неціле і, крім того, нецілим є принаймні один з елементів a_{kj}, $j \in \{1, \ldots, n\}$, k-го рядка. Зобразимо b_k і всі a_{kj} у вигляді двох складових: $b_k = [b_k] + \{b_k\}$, $a_{kj} = [a_{kj}] + \{a_{kj}\}$, $j \in \{m+1, \ldots, n\}$, де $[\cdot]$ означає цілу частину числа, тобто $[b_k]$ – найбільше ціле число, що не перевищує b_k; $\{\cdot\}$ – дробову частину числа, тобто $\{b_k\} = b_k - [b_k]$.

Наприклад, для $b_k = \dfrac{13}{7}$ маємо $[b_k] = \left[\dfrac{13}{7}\right] = 1$, а $\{b_k\} = \dfrac{13}{7} - 1 = \dfrac{6}{7}$; для $b_k = -\dfrac{13}{7}$ очевидно $[b_k] = \left[-\dfrac{13}{7}\right] = -2$, а $\{b_k\} = -\dfrac{13}{7} - (-2) = \dfrac{1}{7}$. Для будь-якого дійсного числа b_k завжди $0 \le \{b_k\} < 1$.

За допомогою введених позначень запишемо k-те рівняння системи (5) у вигляді

$$x_k = [b_k] + \{b_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} [a_{kj}] x_j - \sum_{j=m+1}^{n} \{a_{kj}\} x_j. \tag{6}$$

Подамо доданки у правій частині виразу (6) як такі дві групи:

$$[b_k] - \sum_{j=m+1}^{n} [a_{kj}] x_j; \tag{7}$$

$$\{b_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a_{kj}\} x_j. \tag{8}$$

Вираз (7) при цілих значеннях x_j завжди цілочисловий. Тому й вираз (8) повинен бути цілочисловим.

Припустимо, що

$$\{b_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a_{kj}\}x_j > 0. \tag{9}$$

Тоді, згідно з тим, що $0 \le \{b_k\} < 1$, а $\{a_{kj}\} \ge 0$, $x_j \ge 0$, то виконуватиметься нерівність

$$\{b_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a_{kj}\}x_j \le \{b_k\} < 1. \tag{10}$$

Очевидно, що нерівності (9) і (10) суперечать цілочисловості x_k. Отже, для цілочисловості розв'язків повинна виконуватись умова протилежна до (9), тобто

$$\{b_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a_{kj}\}x_j \le 0. \tag{11}$$

У той же час, (11) не виконується для довільного нецілочислового базисного плану X.

Справді, небазисні компоненти плану дорівнюють нулю, тобто $x_j = 0$, $j \in \{m+1, \ldots, n\}$, і (11) набуває вигляду $\{b_k\} \le 0$, що рівносильно $\{b_k\} = 0$, а це суперечить припущенню про нецілочисловість плану X, оскільки в базисному плані $x_i = b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Це означає, що обмеження (11) задає правильне відсікання.

Процес включення в умови задачі нових обмежень-відсікань будується за таким правилом. Запишемо (11) у вигляді $\sum\limits_{j=m+1}^{n} \{a_{kj}\}x_j \ge \{b_k\}$, помножимо на (-1) і введемо нову невід'ємну додаткову змінну x_{n+1}. Тоді одержимо відсікання у вигляді рівняння

$$-\sum_{j=m+1}^{n} \{a_{kj}\}x_j + x_{n+1} = -\{b_k\},$$

дописавши яке до останньої симплексної таблиці, дістанемо нову задачу, яку розв'язуватимемо за допомогою двоїстого симплексного методу. Якщо розв'язок виявиться нецілочисловим, знову використаємо останню симплексну таблицю для побудови нового обмеження, продовжуючи цей процес до тих пір, поки на черговому кроці не одержимо цілочисловий розв'язок. Отже, при розв'язуванні задачі кількість обмежень і кількість змінних поступово збільшуються.

У книзі [5] доведено, що за певних умов алгоритм Гоморі є скінченним, але, взагалі кажучи, містить багато ітерацій. Кількість ітерацій залежить від того, чи правильно сформовано відсікання. Крім (11) існують й інші відсікання [5].

Зауваження 1. Якщо в оптимальному плані є декілька нецілих b_i, то додаткове обмеження складають для максимального $\{b_i\}$.

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$f = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

◀ Спочатку розв'яжемо задачу лінійного програмування без умови цілочисловості.

i	Б	$C_б$	A_0	1	-1	-3	0	0	0	
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_4	0	1	2	-1	$\boxed{1}$	1	0	0	
2	A_5	0	2	-4	2	-1	0	1	0	
3	A_6	0	5	3	0	1	0	0	1	
$m+1$			0	-1	1	3	0	0	0	
1	A_3	-3	1	2	-1	1	1	0	0	
2	A_5	0	3	-2	$\boxed{1}$	0	1	1	0	
3	A_6	0	4	1	1	0	-1	0	1	
$m+1$			-3	-7	4	0	-3	0	0	

1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	
2	A_2	-1	3	-2	1	0	1	1	0	
3	A_6	0	1	$\boxed{3}$	0	0	-2	-1	1	
$m+1$			-15	1	0	0	-7	-4	0	
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	
2	A_2	-1	$11/3$	0	1	0	$-1/3$	$1/3$	$2/3$	
3	A_1	1	$1/3$	1	0	0	$-2/3$	$-1/3$	$1/3$	
$m+1$			$-46/3$	0	0	0	$-19/3$	$-11/3$	$-1/3$	
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	0
2	A_2	-1	$11/3$	0	1	0	$-1/3$	$1/3$	$2/3$	0
3	A_1	1	$1/3$	1	0	0	$-1/2$	$-1/3$	$1/3$	0
4	A_7	0	$-2/3$	0	0	0	$-2/3$	$-1/3$	$\boxed{-2/3}$	1
$m+1$			$-46/3$	0	0	0	$-19/3$	$-11/3$	$-1/3$	0
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	0
2	A_2	-1	3	0	1	0	-1	0	0	1
3	A_1	1	0	1	0	0	-1	$-1/2$	0	$1/2$
4	A_6	0	1	0	0	0	1	$1/2$	1	$-3/2$
$m+1$			-15	0	0	0	-6	$-7/2$	0	$-1/2$

Після четвертої ітерації дістанемо, що виконується умова оптимальності, але в стовпчику A_0 маємо нецілі компоненти $x_2 = 11/3$, $x_1 = 1/3$. Тому складемо додаткове обмеження для $b_2 = \dfrac{11}{3}$, яке має найбільшу дробову частину: $\{b_2\} = b_2 - [b_2] = \dfrac{11}{3} - 3 = \dfrac{2}{3}$. Оскільки $\{a_{21}\} = \{a_{22}\} = \{a_{23}\} = 0$, $\{a_{24}\} = a_{24} - [a_{24}] = -\dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{2}{3}$; $\{a_{25}\} = a_{25} - [a_{25}] = \dfrac{1}{3} - 0 = \dfrac{1}{3}$; $\{a_{26}\} = a_{26} - [a_{26}] = \dfrac{2}{3} - 0 = \dfrac{2}{3}$, то додаткове обмеження має вигляд:

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \geq \frac{2}{3}.$$

Помноживши обидві частини нерівності на (-1) і, ввівши додаткову змінну $x_7 \geq 0$, перетворимо нерівність у рівність

$$-\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_6 + x_7 = -\frac{2}{3}.$$

Допишемо коефіцієнти цього рівняння знизу до четвертої симплексної таблиці і введемо в базис додатковий вектор A_7, компоненти якого запишемо в останньому стовпчику таблиці. Одержимо таблицю, де в стовпчику A_0 є від'ємний елемент $b_4 = -\dfrac{2}{3}$ і виконується умова оптимальності, тобто маємо задачу в двоїстій базисній формі. Взявши четвертий рядок за провідний, за допомогою двоїстого симплексного відношення знайдемо провідний елемент

$$\min_{\substack{\Delta_j \le 0 \\ a_{4j} < 0}} \left(\frac{-\frac{19}{3}}{-\frac{2}{3}}; \frac{-\frac{11}{3}}{-\frac{1}{3}}; \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{2}, a_{46} = -\frac{2}{3}.$$

Провівши жорданове перетворення з цим провідним елементом, одержимо, що задача розв'язана, бо x_1, x_2 і x_3 є цілими. Отже, $X^* = (0; 3; 4)$, а $f_{\min} = -15$. ▶

Якщо в задачі (1) – (4) не всі незалежні змінні є цілими, тобто $k < n$, то алгоритм розв'язування такої задачі відрізняється від описаного вище лише тим, що перед введенням додаткових змінних і відсікання не обов'язково зводити задачу до вигляду, коли коефіцієнти та вільні члени є цілими.

Нехай задачу (1) – (3) розв'язано за допомогою симплексного методу й знайдено оптимальний план. Якщо значення змінних, на які накладено вимогу цілочисловості є цілими, то задачу розв'язано.

У випадку наявності нецілих компонент проводиться відсікання. Нехай для деякої змінної, що на неї накладено вимогу цілочисловості, маємо нецілий результат b_s і організовуємо відсікання для s-го рядка. Зазначене відсікання запишемо у вигляді додаткового рядка з балансуючою змінною $x_{n+1} \ge 0$:

$$-\alpha_{s1}x_1 - \alpha_{s2}x_2 - \ldots - \alpha_{sn}x_n + x_{n+1} = -\{b_s\},$$

де α_{sj}, $j \in \{1, \ldots, n\}$ – спеціальні коефіцієнти. Для змінних x_j, на які не накладено вимог цілочисловості

$$\alpha_{sj} = \begin{cases} a_{sj}, & \text{якщо } a_{sj} \ge 0, \\ \dfrac{\{b_s\}}{1 - \{b_s\}}|a_{sj}|, & \text{якщо } a_{sj} < 0; \end{cases} \tag{12}$$

а для змінних x_j з вимогою цілочисловості

$$\alpha_{sj} = \begin{cases} \{a_{sj}\}, & \text{якщо } \{a_{sj}\} \le \{b_s\}, \\ \dfrac{\{b_s\}}{1-\{b_s\}}(1-\{a_{sj}\}), & \text{якщо } \{a_{sj}\} > \{b_s\}. \end{cases} \tag{13}$$

Додатково введений рядок беремо за розв'язувальний і після вибору розв'язувального елемента за правилом двоїстого симплексного методу переходимо до нової симплексної таблиці. Якщо у відповіді є знову нецілі компоненти, то робимо нове відсікання з додатковою змінною x_{n+2}. І так до тих пір, поки не одержимо відповідь з цілочисловими результатами для тих змінних, на які накладено вимогу цілочисловості.

Приклад 2. Розв'язати задачу частково цілочислового програмування

$$f = x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 19/3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 4\};\ \ x_j \in \mathbb{Z}, j \in \{1, 2\}.$$

◀ Розв'яжемо за допомогою симплексного методу спочатку задачу

$$f = x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 19/3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

i	Б	$C_б$	A_0	1	2	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_3	0	13	2	$\boxed{2}$	1	0
2	A_4	0	19/3	1	-1	0	1
$m+1$			0	-1	-2	0	0
1	A_2	2	13/2	1	1	1/2	0
2	A_4	0	77/6	2	0	1/2	1
$m+1$			13	1	0	1	0

Одержали, що умова оптимальності виконується, бо всі $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, 4\}$. У той же час оптимальний план $X^* = (0; 13/2; 0; 77/6)$ містить дві нецілі компоненти і, зокрема, x_2, яка згідно з умовою задачі повинна бути цілочисловою. Для цієї змінної (першого рядка) складемо додаткове обмеження, використовуючи формули (12) і (13)

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Ввівши додаткову змінну $x_5 \geq 0$, перепишемо це обмеження у вигляді

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 = -1$$

і доповнимо ним останню таблицю

i	Б	$C_б$	A_0	1	2	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_2	2	13/2	1	1	1/2	0	0
2	A_4	0	77/6	2	0	1/2	1	0
3	A_5	0	−1	0	0	$\boxed{-1}$	0	
$m+1$			13	1	0	1	0	0
1	A_2	2	6	1	1	0	0	1/2
2	A_4	0	37/3	2	0	0	1	1/2
3	A_3	0	1	0	0	1	0	−1
$m+1$			12	1	0	0	0	1

Процес розв'язування розширеної задачі відображено у поданій вище таблиці. З неї випливає, що $X^* = (0; 6; 1; 37/3)$ є оптимальним планом вихідної задачі і $f_{\max} = 12$. ▶

1.3. Метод гілок і меж розв'язування задач цілочислового лінійного програмування

Метод гілок і меж належить до комбінаторних методів. Ці методи грунтуються на тому, що число допустимих планів задачі лінійного програмування є скінченним і замінюють повний набір всіх планів їхнім частинним напрямленим перебором.

Розглянемо повністю цілочислову задачу лінійного програмування вигляду

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{14}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{15}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}; \tag{16}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{17}$$

Нехай Ω_0 – множина допустимих планів задачі (14) – (17), а Ω_1 – множина допустимих планів задачі (14) – (16).

Отже, Ω_0 – це множина таких елементів з множини Ω_1, які задовольняють умову цілочисловості (17).

Вважатимемо, що Ω_1 непорожня множина і задача (14) – (16) має оптимальний розв'язок X^*, якому відповідає значення цільової функції

$$f_1 = f(X^*).$$

Очевидно, що для довільного плану $X \in \Omega_0$ виконується нерівність $f(X) \le f_1$, причому якщо $X^* \in \Omega_0$, то це оптимальний план задачі (14) – (17).

Вважатимемо, що $X^* \notin \Omega_0$. Тоді знайдеться принаймні одне $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що x_{j_0} – неціле. Тому для будь-якого плану $X = (x_1, \ldots, x_{j_0}, \ldots, x_n) \in \Omega_0$ виконується одна з нерівностей

$$\left[\begin{array}{ll} x_{j_0} \le [x^*_{j_0}], & (18) \\ & \\ x_{j_0} \ge [x^*_{j_0}] + 1, & (19) \end{array} \right.$$

тобто

$$\Omega_0 = (\Omega_0 \cap \Omega_{1,1}) \cup (\Omega_0 \cap \Omega_{1,2}),$$

де

$$\Omega_{1,1} = \{X \in \Omega_1 | X = (x_1; \ldots; x_{j_0}; \ldots; x_n),\ x_{j_0} \le [x^*_{j_0}]\},$$

$$\Omega_{1,2} = \{X \in \Omega_1 | X = (x_1; \ldots; x_{j_0}; \ldots; x_n),\ x_{j_0} \geq [x^*_{j_0}] + 1\}.$$

Легко бачити, що найбільше значення цільової функції на множині Ω_0 збігається з максимумом серед найбільших значень цільової функції окремо на множині $\Omega_0 \cap \Omega_{1,1}$ і $\Omega_0 \cap \Omega_{1,2}$.

Завдяки введенню до задачі (14) – (17) нерівностей (18), (19), ми одержимо дві задачі. Це означає, що процес пошуку екстремуму на множині Ω_0 розгалужується за двома напрямками: за одним досліджується множина $\Omega_{1,1}$, а за іншим – множина $\Omega_{1,2}$.

Отже, маємо такі дві задачі:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i \in \{1, \ldots, m\}; \tag{21}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, n\}; \tag{22}$$

$$x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \ldots, n\}; \tag{23}$$

$$x_{j_0} \leq [x^*_{j_0}]; \tag{24}$$

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i \in \{1, \ldots, m\}; \tag{26}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, n\}; \tag{27}$$

$$x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \ldots, n\}; \tag{28}$$

$$x_{j_0} \geq [x^*_{j_0}] + 1; \tag{29}$$

Ці задачі спочатку розв'язуємо, відкинувши умови цілочисловості (23) і (28). Якщо знайдені оптимальні плани не містять нецілих координат, то вони є розв'язками задачі (14) – (17). Якщо ж ні, то пошук цілочислового розв'язку триває. Для подальшого розгалуження вибираємо розв'язок задачі з більшим значенням цільової функції.

Розгалужений пошук за вибраним напрямком припиняється в одному з таких випадків:

1) вибрана множина допустимих планів порожня;

2) на вибраній множині знайдено цілочисловий оптимальний план відповідної підзадачі;

3) оптимальне значення цільової функції на вибраній множині не перевищує найкращого значення цієї функції на інших множинах, де знайдено цілочислові оптимальні плани відповідних підзадач.

Легко бачити, що зі зростанням кількості напрямків пошуку перший і другий випадки припинення розгалуження стають все ймовірнішими, оскільки нові обмеження типу (18), (19) істотно скорочують область пошуку. Що ж до третього випадку, то тут введенням додаткових обмежень до вибраної множини, якщо вона й містить цілочислові плани, ніколи не вдасться покращити значення цільової функції.

При виборі множини для чергового розгалуження процесу пошуку цілочислового розв'язку беруть ту множину, на якій цільова функція набуває найменшого значення, яке називається **межовим.** Коли за кожним з напрямів пошуку процес розгалуження припиняється, то за розв'язок вихідної задачі (14) – (17) беруть цілочисловий розв'язок тієї з підзадач, при якому значення цільової функції найбільше.

Процес розв'язування задач лінійного програмування методом гілок і меж можна пришвидшити, якщо врахувати те, що кожна наступна задача відрізняється від попередньої лише одним обмеженням. Тому не треба розв'язувати їх симплексним методом щоразу спочатку. Досить почергово приєднати нові обмеження (24) і (29) до останньої симплексної таблиці попередньої задачі, вилучивши, якщо треба, непотрібні попередні обмеження.

Опишемо алгоритм методу меж і гілок.

1. Симплексним методом розв'язуємо задачу (14) – (16). Якщо серед координат оптимального плану цієї задачі немає нецілих чисел, то цей розв'язок є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (14) – (17). Якщо задача (14) – (16) не має розв'язку, тобто цільова функція необмежена або система обмежень несумісна, то задача (14) – (17) також не має розв'язку.

2. Якщо ж в оптимальному плані задачі (14) – (16) є нецілі координати, то вибираємо одну з нецілочислових змінних x_{j_0} і знаходимо її цілу частину $[x_{j_0}]$.

3. Записуємо обмеження (18) і (19), які відсікають нецілочислові розв'язки.

4. Кожну з одержаних нерівностей приєднуємо до обмежень початкової задачі. Дістанемо дві нові задачі цілочислового лінійного програмування.

5. Розв'язуємо кожну з отриманих задач. Якщо одержано цілочисловий розв'язок хоча б однієї з цих задач, то значення цільової функції цієї задачі порівнюють з її попереднім значенням. Якщо різниця не більша від заданого числа ε, то процес розв'язування закінчують. У випадку, коли цілочисловий розв'язок одержано в обох задачах, то з розв'язком попередньої задачі порівнюється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах отримано нецілочислові розв'язки, то для подальшого розгалуження вибирають ту, для якої маємо краще значення цільової функції і повертаємося до кроку 2.

Зауваження 2. Ефективність розв'язування конкретних задач методом гілок і меж повністю залежить від того, за якою змінною на кожному кроці алгоритму розбивати вибрану множину на підмножини (при наявності у відповідному оптимальному плані декількох нецілих компонент). Очевидно, для кожної задачі існує свій оптимальний варіант процесу її розв'язування методом гілок і меж, тобто варіант, який веде до мінімального числа кроків. Однак у літературі немає якихось рекомендацій щодо вибору оптимального варіанту процесу розв'язування таких задач.

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі

$$f = x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \max; \tag{30}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3; \end{cases} \tag{31}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, 2, 3\}, \tag{32}$$

$$x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2, 3\}. \tag{33}$$

◀ Розв'яжемо спочатку задачу (30) – (32) (табл. 1). Оптимальний план цієї задачі $X_1^* = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{9}{2}\right)$, тобто x_1^* і x_3^* не задовольняють умову цілочисловості

i	Б	$C_б$	A_0	1	-4	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	4	2	1	-1	1	0	0
2	A_5	0	2	4	-3	0	0	1	0
3	A_6	0	3	-3	2	$\boxed{1}$	0	0	1
$m+1$			0	-1	4	-3	0	0	0
1	A_4	0	7	-1	3	0	1	0	1
2	A_5	0	2	$\boxed{4}$	-3	0	0	1	0
3	A_3	3	3	-3	2	1	0	0	1
$m+1$			9	-10	10	0	0	0	3
1	A_4	0	15/2	0	9/4	0	1	1/4	1
2	A_1	1	1/2	1	$-3/4$	0	0	1/4	0
3	A_3	3	9/2	0	$-1/4$	1	0	3/4	1
$m+1$			14	0	5/2	0	0	5/2	3

Табл. 1

Виберемо першу координату x_1. Тоді розгалуження процесу пошуку цілочислового розв'язку визначатиметься умовами:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 \leq \left[\frac{1}{2}\right] = 0, \\ \\ x_1 \geq \left[\frac{1}{2}\right] + 1 = 1. \end{array}\right.$$

Отже, в першій підзадачі додаткове обмеження набирає вигляду $x_1 = 0$. Для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування з таким додатковим обмеженням, досить в останній симплексній таблиці попередньої задачі розглянути змінну x_1 як штучну, тобто замінити коефіцієнт у цільовій функції на $-M$ і продовжити далі розв'язування M-задачі (табл. 2)

i	Б	$C_б$	A_0	$-M$	-4	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	15/2	0	9/4	0	1	1/4	1
2	A_1	$-M$	1/2	1	$-3/4$	0	0	$\boxed{1/4}$	0
3	A_3	3	9/2	0	$-1/4$	1	0	3/4	1
$m+1$			27/2	0	13/4	0	0	9/4	3
$m+2$			$-1/2$	0	3/4	0	0	$-1/4$	0
1	A_4	0	7	-1	3	0	1	0	1
2	A_5	0	2	4	-3	0	0	1	0
3	A_3	3	3	-3	2	1	0	0	1
$m+1$			9	$M-9$	10	0	0	0	3

Табл. 2

Маємо розв'язок $X^*_{1,1} = (0;0;3)$, $f(X^*_{1,1}) = 9$.

Оскільки $X^*_{1,1}$ цілочисловий план, то подальший пошук у цьому напрямку припиняємо.

Друга підзадача має додаткове обмеження $x_1 \geq 1$, або $x_1 - x_7 + x_8 = 1$, де $x_7 \geq 0$ – додаткова змінна, а $x_8 \geq 0$ – штучна змінна. Оскільки з останньої симплексної таблиці (табл. 1) випливає, що $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_5$, то остаточно матимемо обмеження $\frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_5 - x_7 + x_8 = \frac{1}{2}$, яке й записуємо в нову симплексну таблицю

i	Б	$C_б$	A_0	1	-4	3	0	0	0	0	$-M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	A_4	0	15/2	0	9/4	0	1	1/4	1	0	0
2	A_1	1	1/2	1	$-3/4$	0	0	1/4	0	0	0
3	A_3	3	9/2	0	$-1/4$	1	0	3/4	1	0	0
4	A_8	$-M$	1/2	0	$\boxed{3/4}$	0	0	$-1/4$	0	-1	1
$m+1$			14	0	5/2	0	0	5/2	3	0	0
$m+2$			$-1/2$	0	$-3/4$	0	0	1/4	0	1	0

1	A_4	0	6	0	0	0	1	1	1	3	
2	A_1	1	1	1	0	0	0	0	0	-1	
3	A_3	3	14/3	0	0	1	0	2/3	1	-1/3	
4	A_2	-4	2/3	0	1	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	
$m+1$			37/3	0	0	0	0	10/3	3	10/3	

Табл. 3

Розв'язком цієї задачі є $X^*_{1,2} = \left(1; \frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$, $f(X^*_{1,2}) = 37/3$.

Цей план має нецілочислові координати x^*_2 і x^*_3. Далі розгалуження виконуватимемо за x_2:

$$\left[\begin{array}{l} x_2 \leq \left[\frac{2}{3}\right] = 0, \qquad (34) \\ \\ x_2 \geq \left[\frac{2}{3}\right] + 1 = 1. \qquad (35) \end{array}\right.$$

Вихідну симплексну таблицю для розв'язування задачі з додатковим обмеженням (34) будуємо на основі оптимальної таблиці з табл. 3

i	Б	$C_б$	A_0	1	$-M$	3	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_4	0	6	0	0	0	1	1	1	3
2	A_1	1	1	1	0	0	0	0	0	-1
3	A_3	3	14/3	0	0	1	0	2/3	1	$-1/3$
4	A_2	$-M$	2/3	0	1	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$
$m+1$			45/3	0	0	0	0	2	3	-2
$m+2$			$-2/3$	0	0	0	0	1/3	0	4/3

Множина планів заданої задачі порожня, оскільки змінна x_2, яка відіграє в ній роль штучної змінної, набуває в оптимальному плані ненульового значення.

Обмеження $x_2 \geq 1$ з (35) запишемо у вигляді $x_2 - x_8 + x_9 = 1$, і, оскільки, згідно з останньою симплексною таблицею (табл. 3), $x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{4}{3}x_7$, то остаточно це обмеження набуде вигляду $\frac{1}{3}x_5 + \frac{4}{3}x_7 - x_8 + x_9 = \frac{1}{3}$.

Розв'язком задачі з цим обмеженням є $X^*_{1,2,2} = \left(\frac{5}{4}; 1; \frac{19}{4}\right)$, $f(X^*_{1,2,2}) = \frac{23}{2}$ (табл. 4). Далі розгалуження здійснюємо, використавши оптимальний розв'язок з табл. 4

i	Б	$C_б$	A_0	1	-4	3	0	0	0	0	0	$-M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_4	0	6	0	0	0	1	1	1	3	0	0
2	A_1	1	1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0
3	A_3	3	$14/3$	0	0	1	0	$2/3$	1	$-1/3$	0	0
4	A_2	-4	$2/3$	0	1	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	0	0
5	A_9	$-M$	$1/3$	0	0	0	0	$1/3$	0	$\boxed{4/3}$	-1	1
$m+1$			$37/3$	0	0	0	0	$10/3$	3	$10/3$	0	0
$m+2$			$-1/3$	0	0	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	1	0
1	A_4	0	$21/4$	0	0	0	1	$1/4$	1	0	$9/4$	
2	A_1	1	$5/4$	1	0	0	0	$1/4$	0	0	$-3/4$	
3	A_3	3	$19/4$	0	0	1	0	$3/4$	1	0	$-1/4$	
4	A_2	-4	1	0	1	0	0	0	0	0	-1	
5	A_7	0	$1/4$	0	0	0	0	$1/4$	0	1	$-3/4$	
$m+1$			$46/4$	0	0	0	0	$10/4$	3	0	$10/4$	

Табл. 4

Розгалуження будуємо за змінною x_1, ввівши додаткові обмеження:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 \le \left[\frac{5}{4}\right] = 1, \qquad (36) \\ \\ x_1 \ge \left[\frac{5}{4}\right] + 1 = 2. (37) \end{array}\right.$$

У першому випадку додаткове обмеження $x_1 \le 1$, або $x_1 + x_9 = 1$, з урахуванням того, що $x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_5 + \frac{3}{4}x_8$, набуде вигляду $\frac{1}{4}x_5 - \frac{3}{4}x_8 - x_9 + x_{10} = \frac{1}{4}$, де $x_9 \ge 0$ – додаткова змінна, а $x_{10} \ge 0$ – штучна змінна. Розв'язавши нову підзадачу з цим обмеженням (табл.5), дістанемо оптимальний цілочисловий розв'язок $X^*_{1,2,2,1} = (1; 1; 4)$, $f(X^*_{1,2,2,1}) = 9$.

i	Б	$C_б$	A_0	1	-4	3	0	0	0	0	0	0	$-M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
1	A_4	0	21/4	0	0	0	1	1/4	1	0	9/4	0	0
2	A_1	1	5/4	1	0	0	0	1/4	0	0	$-3/4$	0	0
3	A_3	3	19/4	0	0	1	0	3/4	1	0	$-1/4$	0	0
4	A_2	-4	1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0
5	A_7	0	1/4	0	0	0	0	1/4	0	1	$-3/4$	0	0
6	A_{10}	$-M$	1/4	0	0	0	0	$\boxed{1/4}$	0	0	$-3/4$	-1	1
$m+1$			46/4	0	0	0	0	10/4	3	0	10/4	0	0
$m+2$			$-1/4$	0	0	0	0	$-1/4$	0	0	3/4	1	0
1	A_4	0	5	0	0	0	1	0	1	0	3	1	
2	A_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	
3	A_3	3	4	0	0	1	0	0	1	0	2	3	
4	A_2	-4	1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	
5	A_7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	
6	A_5	0	1	0	0	0	0	1	0	0	-3	-4	
$m+1$			9	0	0	0	0	0	3	0	10	10	

Табл. 5

Введемо додаткове обмеження $x_1 \geq 2$, яке з урахуванням того, що $x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_5 + \frac{3}{4}x_8$, набуде вигляду $-\frac{1}{4}x_5 + \frac{3}{4}x_8 - x_9 + x_{10} = \frac{3}{4}$, де $x_9 \geq 0$ – додаткова змінна, а $x_{10} \geq 0$ – штучна змінна. Зробимо це за допомогою симплекс-методу (табл.6). Одержуємо, що $X^*_{1,2,2,2} = (2;2;5)$, $f(X^*_{1,2,2,2}) = 9$.

i	Б	$C_б$	A_0	1	-4	3	0	0	0	0	0	0	$-M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
1	A_4	0	21/4	0	0	0	1	1/4	1	0	9/4	0	0
2	A_1	1	5/4	1	0	0	0	1/4	0	0	$-3/4$	0	0
3	A_3	3	19/4	0	0	1	0	3/4	1	0	$-1/4$	0	0
4	A_2	-4	1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0
5	A_7	0	1/4	0	0	0	0	1/14	0	1	$-3/4$	0	0
6	A_{10}	$-M$	3/4	0	0	0	0	$-1/4$	0	0	$\boxed{3/4}$	-1	1
$m+1$			46/4	0	0	0	0	10/4	3	0	10/4	0	0
$m+2$			$-3/4$	0	0	0	0	1/4	0	0	$-3/4$	1	0

1	A_4	0	3	0	0	0	1	1	1	0	0	3	
2	A_1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	
3	A_3	3	5	0	0	1	0	$2/3$	1	0	0	$-1/3$	
4	A_2	-4	2	0	1	0	0	$-1/3$	0	0	0	$-4/3$	
5	A_7	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	
6	A_8	0	1	0	0	0	0	$-1/3$	0	0	1	$-4/3$	
$m+1$			9	0	0	0	0	$10/3$	3	0	0	$10/3$	

Табл. 6

Отже, процес розгалуження припиняється. Із множини цілочислових розв'язків трьох задач вибираємо найкращий.

Знайдено три цілочислові оптимальні плани $X_1^* = (0;0;3)$, $X_2^* = (1;1;4)$, $X_3^* = (2;2;5)$.Оптимальне значення для всіх цих планів однакове $f_{\max} = 9$. ▶

2. Задачі транспортного типу

Транспортна задача є однією з основних спеціальних моделей лінійного програмування. Її метою є розробка раціональних шляхів і способів транспортування товарів, усунення довгих, зустрічних, повторних перевезень. Все це скорочує час перевезення товарів, зменшує витрати підприємств, фірм, які пов'язані з процесами постачання сировини, матеріалів, пального і т.п. Крім того, до транспортної задачі зводиться і низка виробничих задач.

2.1. Математична постановка і умова розв'язності транспортної задачі

Загальна постановка транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення (постачальники) A_1, ..., A_m у n пунктів призначення (споживачі) B_1, ..., B_n. При цьому за критерій оптимальності беруть або мінімальну вартість перевезень всього вантажу, або мінімальний час його перевезення. Розглянемо класичну транспортну задачу, в якій за критерій оптимальності взято мінімальну вартість перевезень всього вантажу.

Припустимо, що в пункті A_i зосереджено a_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, одиниць товару, а споживачу B_j потрібно b_j, $j = \{1, \ldots, n\}$, одиниць товару і відома вартість c_{ij} перевезення одиниці вантажу з пункту A_i в пункт B_j, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j = \{1, \ldots, n\}$. Треба знайти такий план перевезень продукції від постачальників до споживачів, щоб сумарні витрати f на транспортування вантажів були мінімальними.

Для побудови математичної моделі розглядуваної задачі введемо змінні x_{ij}, які означають обсяг перевезень продукції з пункту A_i в пункт B_j, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j = \{1, \ldots, n\}$. Матрицю

$$X = (x_{ij})_{\substack{i \in \{1, \ldots, m\} \\ j \in \{1, \ldots, n\}}},$$

складену з цих змінних, називають **планом перевезень**.

Транспортну задачу та її розв'язування зручно подавати у вигляді транспортної таблиці (матриці) вигляду

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	$\ldots$	B_j	$\ldots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	$\ldots$	c_{1j} x_{1j}	$\ldots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_i	c_{i1} x_{i1}	$\ldots$	c_{ij} x_{ij}	$\ldots$	c_{in} x_{in}	a_i
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	$\ldots$	c_{mj} x_{mj}	$\ldots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	$\ldots$	b_j	$\ldots$	b_n	

Сумарні транспортні витрати f, пов'язані з планом перевезень X, обчислюються за формулою

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots +$$

$$+c_{i1}x_{i1} + c_{i2}x_{i2} + \ldots + c_{in}x_{in} + \ldots +$$

$$+c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Отже, цільова функція транспортної задачі має вигляд

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min . \tag{1}$$

План перевезень $X = (x_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$ задовольняє певні обмеження, а саме:

1) загальний обсяг продукції, що вивозиться від кожного постачальника, не повинен перевищувати запасу продукції цього постачальника

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}; \tag{2}$$

2) обсяг продукції, яка надходить кожному споживачу, не повинен бути меншим від потреб цього споживача

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}; \tag{3}$$

3) обсяги перевезень за кожним із маршрутів не можуть набувати від'ємних значень

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Сукупність умов (1) – (4) визначає математичну модель класичної транспортної задачі.

План перевезень X називають **допустимим**, якщо його компоненти x_{ij}, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, задовольняють обмеження задачі (2) – (4).

Якщо допустимий план X^* такий, що $f(X^*)$ є мінімальним значенням функції f, то він називається **оптимальним планом транспортної задачі**.

Транспортна задача **розв'язувана**, якщо вона має принаймні один оптимальний план перевезень.

Розв'язати транспортну задачу означає знайти один або всі оптимальні плани перевезень і обчислити значення цільової функції, які їм відповідають, або довести, що задача не має розв'язку.

Очевидно, що згідно з економічним змістом транспортної задачі (1) – (4),

$$\begin{array}{l} a_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \\ b_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \\ c_{ij} \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \end{array} \tag{5}$$

Зауваження 1. На практиці з метою незагромадженості таблиці транспортної задачі записують лише ненульові значення поставок $x_{ij} > 0$. Ці клітини називаються **заповненими**, а всі інші – **порожніми**, в які вписують "$-$" (їм відповідають значення поставок $x_{ij} = 0$).

Теорема 1. *Транспортна задача (1) – (4) при виконанні умов (5) розв'язна тоді й тільки тоді, коли*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (6)$$

◀ Необхідність припущення (6) очевидна. Справді, якщо виконується протилежна нерівність

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то задача не матимеме жодного допустимого плану перевезень і, отже, вона не має розв'язку.

Доведемо, що нерівність (6) є достатньою умовою розв'язності транспортної задача (1) – (4). Оскільки транспортна задача є задачею лінійного програмування, то до неї можна застосувати теорему про розв'язність задачі лінійного програмування. Згідно з цією теоремою задача має розв'язок тоді й тільки тоді, коли множина її допустимих планів непорожня, а цільова функція обмежена знизу, коли розглядається задача мінімізації.

Установимо, що множина допустимих планів непорожня. Надамо x_{ij} значень

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i}, \ \ i \in \{1, \ldots, m\}, \ \ j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Тоді

$$x_j \geq 0, \ \ i \in \{1, \ldots, m\}, \ \ j \in \{1, \ldots, n\},$$

а

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \sum_{j=1}^{n} b_j \leq a_i, \;\; i \in \{1, \ldots, m\},$$

бо за нерівністю (6)

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \leq 1;$$

аналогічно

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \frac{b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j, \;\; j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Отже, ці змінні x_{ij}, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, задовольняють умови (2) – (4), а це означає, що $X = (x_{ij})_{\substack{i \in \{1,\ldots,m\} \\ j \in \{1,\ldots,n\}}}$, є допустимим планом перевезень.

Доведемо, що цільова функція транспортної задачі обмежена знизу і зверху на множині допустимих планів.

Позначимо $C_1 = \max\limits_{i,j} c_{ij}$, $C_2 = \min\limits_{i,j} c_{ij}$, тоді, з одного боку

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \leq C_1 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} =$$

$$= C_1 \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j = C_1 \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

а з другого

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq C_2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} =$$

$$= C_2 \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j = C_2 \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Отже, f обмежена на множині планів. ▶

Якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{7}$$

то транспортна задача (1) – (4) називається **закритою (збалансованою)**. У цьому випадку обмеження (2) і (3) виконуються як рівності. Тому закрита транспортна задача має вигляд

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min; \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}; \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}; \tag{10}$$

$$x_{ij} \geq 0, i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{11}$$

Якщо умова (7) не виконується, то задача (1) – (4) є **відкритою**. Для того, щоб її можна було розв'язувати, треба збалансувати (зрівняти) поставки й потреби. Робиться це введенням фіктивного постачальника або фіктивного споживача, в залежності від співвідношення між сумами $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i$ і $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

У випадку, коли $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i > \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ вводиться фіктивний $(n+1)$-й пункт призначення (споживач) з потребою $b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, відповідні тарифи якого вважаються нульовими, тобто $c_{i\,n+1} = 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Одержана задача вже буде закритою.

Якщо $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i < \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то вводиться фіктивний $(m+1)$-й пункт відправлення (постачальник) із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$ і тарифами $c_{m+1\,j} = 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Отже, задача знову зводиться до закритої. У цьому випадку обсяги перевезень $x_{m+1\,j}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, треба розуміти як недопостачання продукції j-му споживачу через дефіцит. Це означає, що оптимально організовуємо перевезення від постачальників до споживачів наявний вантаж, можливо й недостатній для повного задоволення потреб усіх споживачів.

Без такого тлумачення задача (8) – (11) при $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i < \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, згідно з теоремою 1 розв'язку не має через дефіцит вантажу.

Розглянемо закриту транспортну задачу. Оскільки вона є задачею лінійного програмування, то її можна розв'язуати симплексним методом. Проте специфічна форма системи обмежень заданої задачі дозволяє істотно спростити звичайний симплексний метод. Модифікація симплексного методу стосовно транспортної задачі називається **розподільчим методом (методом потенціалів)**. Розв'язування здійснюється кроками, кожному з яких відповідає поділ змінних на базисні та вільні.

Число r базисних змінних транспортної задачі дорівнює рангу системи лінійних рівнянь, тобто максимальному числу лінійно незалежних рівнянь у системі обмежень (9), (10). З'ясуємо чому дорівнює число r.

Теорема 2. *Ранг r системи рівнянь (9), (10) за умови (7) дорівнює $m+n-1$.*

◀ Спершу зауважимо, що рівняння системи (9), (10) за умови (7) лінійно залежні і, отже, ранг системи не більший, ніж $m+n-1$.

Справді, порівняємо суму

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{12}$$

перших m рівнянь системи (суму рівнянь системи (9)) із сумою

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_j \tag{13}$$

решти n рівнянь (сумою рівнянь системи (10)).

Згідно з умовою (7) праві частини (12) і (13) збігаються. Ліві частини (12) і (13), які є сумами змінних x_{ij} цієї задачі, також збігаються. Отже, збігаються рівняння (9) і (10), тобто сума перших m рівнянь системи обмежень дорівнює сумі решти n рівнянь системи обмежень. Це означає, що системи (9) і (10) лінійно залежні.

Доведемо, що ранг r системи не менший, ніж $n+m-1$. З лінійної алгебри відомо, що коли деякі k змінних довільної системи лінійних рівнянь можна лінійно виразити через решту змінних системи, то ранг цієї системи не менший, ніж k.

Виразимо, наприклад, змінні x_{ij}, які входять в перший стовпчик і перший рядок транспортної таблиці, через решту змінних x_{ij}, $i \in \{2,\dots,m\}$, $j \in \{2,\dots,n\}$. Спочатку знайдемо такі вирази для змінних, відмінних від x_{11}. Для кожної змінної x_{1j} першого рядка скористаємось (10):

$$x_{1j} = b_j - \sum_{i=2}^{m} x_{ij}, \qquad j \in \{2,\dots,n\}. \tag{14}$$

Аналогічно для кожної змінної x_{i1} першого стовпчика скористаємося (9):

$$x_{i1} = a_i - \sum_{j=2}^{n} x_{ij}, \qquad i \in \{2,\dots,m\}. \tag{15}$$

Змінну x_{11} знайдемо, наприклад, з (9):

$$x_{11} = a_1 - \sum_{j=2}^{n} x_{1j}. \tag{16}$$

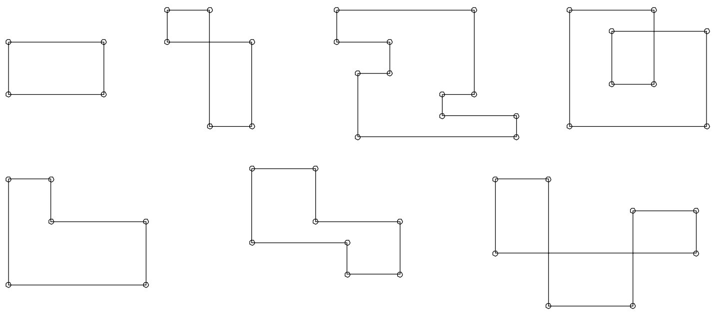
Підставивши в праву частину рівняння (16) вирази для x_{1j}, $j \in \{2, \ldots, n\}$, з (14), дістанемо шукане значення для x_{11}.

Отже, $m+n-1$ змінні цієї задачі можна виразити через решту $mn-m-n+1$ змінні, тобто $r \geq m+n-1$. Оскільки з одного боку $r \leq m+n-1$, а з другого $r \geq m+n-1$, то $r = m+n-1$. ▶

З теореми 2 випливає, що опорний план задачі (8) – (11) може мати не більше, ніж $m+n-1$ відмінних від нуля невідомих.

Якщо в опорному плані число відмінних від нуля компонент дорівнює $n+m-1$, то план називається **невиродженим**, а якщо менше, то – **виродженим**. Транспортна задача називається **невиродженою**, якщо всі її опорні плани є невиродженими. Якщо хоч би один опорний план транспортної задачі є виродженим, то така тарнспортна задача називається **виродженою**.

З поняттям опорного плану тісно пов'язане поняття циклу. **Циклом** у таблиці умов транспортної задачі називається ламана, вершини якої розміщені в клітинках таблиці, а ланки – вздовж рядків та стовпчиків, причому в кожній вершині циклу зустрічаються тільки дві ланки, одна з яких знаходиться в рядку, а друга – в стовпчику. Точки самоперетину циклу не є його вершинами.



Щодо розташування вершин циклу, то мають виконуватися такі умови:

1) в одному рядку (або стовпчику) розташовуються точно дві вершини циклу;

2) остання (завершальна) вершина циклу знаходиться в тому самому рядку, що й перша (вихідна);

3) якщо умовно з'єднати вершини циклу відрізками, то в кожній наступній вершині виконується поворот на 90^0.

Якщо так тлумачити взаємозв'язок між вершинами циклу, то не важливо, через скільки зайнятих або вільних клітинок проходять умовні відрізки.

Правильні твердження [14].

Теорема 3 (критерій опорності планів транспортної задачі). *Для того щоб план X транспортної задачі був опорним, необхідно і досить, щоб із клітинок, в яких містяться додатні перевезення, не можна було скласти цикл.*

Наслідок. *Довільна сукупність з $m + n$ клітинок таблиці транспортної задачі утворює цикл.*

Отже, сукупність базисних клітин та однієї вільної клітини таблиці транспортної задачі завжди утворює цикл.

Нехай $X = (x_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$ – деякий опорний план транспортної задачі. Позначимо через S множину його клітинок, які відповідають додатним перевезенням x_{ij} цього плану.

Теорема 4 (критерій невиродженості опорнорних планів транспортної задачі). *Для того щоб опорний план транспортної задачі був невиродженим, необхідно і досить, щоб довільні дві клітинки множини S можна було з'єднати ламаною, вершини якої належать до цієї множини.*

Зауваження 2. Вироджений план може виникати не лише при побудові опорного плану, але й при його перетвореннях у процесі знаходження оптимального плану. Найчастіше, щоб позбутися виродженості опорного плану, в деякі клітини таблиці транспортної задачі в необхідній кількості вводять нульові постачання. Обсяги запасів постачальників і потреб споживачів після цього не змінюються, проте ці клітинки з нульовим значенням вважаються заповненими. Головною умовою при введені нульової поставки є збереження необхідної і достатньої умови опорності плану транспортної задачі, тобто неможливості побудови циклу для заповнених клітинок.

Для знаходження опорного плану транспортної задачі існує декілька методів, які ми опишемо в наступному пункті.

2.2. Побудова опорних планів транспортної задачі

Для розв'язування транспортної задачі методом потенціалів треба мати початковий опорний план задачі. Існує ціла низка методів пошуку початкових опорних планів транспортної задачі. Усі їх можна об'єднати в дві групи: прямі методи й методи, що базуються на додаткових обчисленнях.

До групи прямих методів належать метод північно-західного кута і його модифікації, методи мінімального елемента (мінімальної вартості) і його модифікації, зокрема, метод подвійної переваги та інші. До другої групи методів належать метод Фогеля, метод Лебедєва та інші.

При використанні прямих методів початковий опорний план одержується швидко. Проте, взагалі кажучи, такий опорний план може бути далеким від оптимального. Пошук початкового опорного плану методом другої групи передбачає проведення значних додаткових обчислень. Однак початковий опорний план, який при цьому одержується, є близьким до оптимального. Отже, якщо при використання прямих методів ми виграємо в обсязі роботи на етапі пошуку початкового опорного плану і можемо програти на етапі пошуку оптимального плану, то при використанні методів другої групи ми програємо на першому етапі, але можемо виграти на другому. Який шлях кращий – невідомо.

Розглянемо знаходження опорного плану задачі за допомогою деяких прямих методів: **північно-західного кута; мінімального елемента (мінімальної вартості); подвійної переваги.**

Суть цих методів полягає в тому, що опорний план знаходять послідовно за $n+m-1$ кроків, на кожному з яких у таблиці умов заповнюють одну клітинку. Заповнення одної з клітинок забезпечує повністю або задоволення потреб у вантажі одного з пунктів призначення (того, в стовпчику якого знаходиться заповнена клітинка), або вивезення вантажу з одного із пунктів відправлення (з того, в рядку якого знаходиться заповнювана клітинка).

У першому випадку тимчасово виключають з розгляду стовпчик, який містить заповнену на цьому кроці клітинку, і розглядають задачу, таблиця умов якої містить на один стовпчик менше, ніж було перед цим кроком, але те саме число рядків і відповідно змінені запаси вантажу в одному із пунктів відправлення (у тому, за рахунок запасів якого було задоволено потреби у вантажі пункту призначення на цьому кроці). У другому випадку тимчасово виключають з розгляду рядок, який містить заповнену клітинку, і вважають, що таблиця умов має на один рядок менше при незмінній кількості стовпчиків і при відповідній зміні потреб у стовпчику якого знаходиться заповнювана клітинка.

Після того, як пророблено $n+m-2$, описаних вище кроків, дістанемо задачу з одним пунктом призначення і одним пунктом відправлення. При цьому залишається вільною тільки одна клітинка, а запаси останнього пункту відправлення дорівнюють потребам пункту призначення. Заповнивши цю клітинку, ми зробимо тим самим $(n+m-1)$-й крок, і, отже, одержимо шуканий опорний план. Якщо на деякому кроці, але не на останньому, виявиться, що потреби чергового пункту призначення збігаються із запасами чергового пункту відправлення, то в цьому випадку виключають з розгляду або стовпчик, або рядок (щось одне). Цим самим або запаси відповідного пункту відправлення, або потреби вказаного пункту призначення вважаємо нульовими, що гарантує одержання $n+m-1$ зайнятих клітинок, у яких стоять компоненти опорного плану. Відмінність від нуля $n+m-1$ компонент опорного плану (заповненість $n+m-1$ клітинок транспортної таблиці) є обов'язковою умовою для дослідження цього плану на оптимальність.

2.2.1. Метод північно-західного кута. Будуватимемо допустимий план в таблиці транспортної задачі, де кожній змінній x_{ij}, відповідає клітинка (i, j).

При користуванні методом північно-західного кута на кожному кроці розглядають перший, з тих, що залишилися, пункт відправлення, і перший же, з тих, що залишилися, пункт призначення. Заповнення клітинок таблиці транспортної задачі починають з лівої верхньої клітинки (1, 1) (північно-західний кут) і закінчують клітинкою (m, n), тобто йдуть немовби по діагоналі.

Розглянемо процедуру цього методу на прикладі.

Приклад 1. Побудувати опорний план транспортної задачі, яка визначена таблицею

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 –	4 –	1 –	4 –	100
A_2	2 100	7 150	10 –	6 –	11 –	250
A_3	8 –	5 50	3 100	2 50	2 –	200
A_4	11 –	8 –	12 –	16 50	13 250	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

◀ Оскільки задача закрита, то можна будувати опорний план.

У клітинку (1, 1) помістимо 100 од., бо більше немає в пункті A_1. При цьому перший рядок виключаємо з розгляду. Далі у клітинку (2, 1) поміщаємо 100 од. і оскільки потреби пункту B_1 забезпечено, то перший стовпчик виключаємо з розгляду. В пункті A_2 залишилося 150 од., які записуємо в клітинку (2, 2) і другий рядок більше не розглядаємо. Продовжуючи аналогічно далі, у клітинку (4, 5) помістимо 250 од. Вказаний план є опорним, бо, починаючи рух з клітинки (1, 1), повернутися до неї або будь-якої іншої заповненої клітини, рухаючись лише по заповнених клітинках, неможливо. Цей план невироджений, оскільки $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ і стільки ж заповнених клітинок.

При побудові опорного плану цим методом ми не враховували вартість перевезень, а тому одержаний план є далеким від оптимального.

Очевидно, що вартість перевезень при такому опорному плані дорівнює

$$f = 10 \cdot 100 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 150 + 5 \cdot 50 + 3 \cdot 100 +$$

$$+2 \cdot 50 + 16 \cdot 50 + 13 \cdot 250 = 6950 \text{ грош. од.} \quad \blacktriangleright$$

2.2.2. Метод мінімального елемента (метод мінімальної вартості). Суть методу полягає в тому, що з усієї таблиці вартостей вибирають найменшу і в клітинку, яка їй відповідає, записують найменше з чисел a_i або b_j. Потім з розгляду виключають або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю вичерпані, або стовпчик, який відповідає споживачу, потреби якого повністю задоволені. З таблиці вартостей, які залишилися, знову вибираємо найменшу вартість і процес розподілу запасів продовжуємо до тих пір, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені.

Приклад 2. Методом мінімальної вартості знайти опорний план транспортної задачі з прикладу 1.

◀ Маємо таблицю

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 –	7 –	4 –	1 100	4 –	100
A_2	2 200	7 50	10 –	6 –	11 –	250
A_3	8 –	5 –	3 –	2 –	2 200	200
A_4	11 –	8 150	12 100	16 –	13 50	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Вибираємо клітинку з найменшою вартістю. Це клітинка (1, 4). Оскільки $a_1 = b_4 = 100$, то помістимо в цю клітинку весь вантаж і виключимо з розгляду перший рядок і четвертий стовпчик. У таблиці, що залишилась, найменшою є вартість, яка розміщена в клітинці (2, 1), а також в клітинці (3, 5). Заповнимо будь-яку з них, наприклад, (2, 1), помістивши туди 200 од., а 50 од. залишивши в пункті A_2. При цьому стовпчик B_1 виключаємо з розгляду. Далі в таблиці вартостей знову вибираємо найменшу вартість і продовжуємо процес до тих пір, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені.

Оскільки заповнено 7 клітинок, а $m+n-1 = 4+5-1 = 8$, то план є виродженим. Виникає запитання, яку клітинку треба вважати заповненою, щоб план став невиродженим. Цією клітинкою може бути, наприклад, клітинка (2, 4) або одна з клітинок (1, 3) чи (1, 5), бо, заповнюючи клітинку (1, 4), ми звільнили одночасно перший рядок і четвертий стовпчик, а треба було звільнити щось одне – або рядок, або стовпчик.

Очевидно, що

$$f = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 200 + 7 \cdot 50 + 2 \cdot 200 + 8 \cdot 150 +$$

$$+12 \cdot 100 + 13 \cdot 50 = 4300 \text{ грош. од.}$$

Одержали, що вартість перевезень нижча, ніж у випадку опорного плану, який побудовано в прикладі 1 методом північно-західного кута. ▶

2.2.3. Метод подвійної переваги. Якщо транспортна таблиця велика, то перебрати всі клітинки важко. У цьому випадку використовують метод подвійної переваги, зміст якого полягає в такому.

У кожному стовпчику помічаємо значком $\vee$ клітинку з найменшою вартістю. Потім це саме зробимо в кожному рядку. Як результат матимемо у деяких клітинках помітки $\vee\vee$. Цим клітинкам відповідає мінімальна вартість як по стовпчику, так і по рядку. В зазначені клітинки записуємо максимально можливі обсяги, кожного разу виключаючи з розгляду відповідні стовпчики або рядки. Потім розподіляємо обсяги перевезень по клітинках, які помічені значком $\vee$. У тій частині таблиці, що залишилася, вантаж розподіляємо за найменшою вартістю.

Приклад 3. Знайти опорний план транспортної задачі з прикладу 1, використовуючи метод подвійної переваги.

◀ Заповнимо спочатку клітинки (2, 1), (3, 5), (1, 4), що мають помітки $\vee\vee$. Далі заповнюємо клітинку (4, 2) з поміткою $\vee$, а потім клітинки (2, 3), (4, 3) і (4, 5) у порядку зростання вартостей.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 –	7 –	4 –	1 ∨∨ 100	4 –	100
A_2	2 ∨∨ 200	7 –	10 50	6 –	11 –	250
A_3	8 –	5 ∨ –	3 ∨ –	2 ∨ –	2 ∨∨ 200	200
A_4	11 –	8 ∨ 200	12 50	16 –	13 50	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Одержаний план є виродженим. Для того щоб він став невиродженим, одну клітинку, наприклад, (2, 4) треба вважати заповненою, помістивши туди нульовий вантаж.

Знайдемо вартість перевезень за побудованим опорним планом.

$$f = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 200 + 10 \cdot 50 + 2 \cdot 200 + 8 \cdot 200+$$

$$+12 \cdot 50 + 13 \cdot 50 = 4250 \text{ грош. од.} \quad \blacktriangleright$$

Зауваження 3. Можна було б очікувати, що з погляду близькості до оптимуму, плани, які побудовані з врахуванням тарифів перевезень, будуть кращими від планів, одержаних методом північно-західного кута. Оскільки на практиці це не завжди так, то надалі використовуватимемо той, який простіший за процедурою – метод північно-західного кута.

Побудований за допомогою одного з описаних вище методів опорний план можна довести до оптимального, скориставшись симплексним методом. Оскільки це громіздко, то використовуватимемо простіші методи, одним з яких є **метод потенціалів**.

2.3. Знаходження оптимального плану транспортної задачі методом потенціалів

Принцип знаходження оптимального плану транспортної задачі аналогічний симплексному методу, а саме: спочатку знаходимо початковий опорний план, а потім його послідовно покращуємо до оптимального.

Для одержання початкового опорного плану транспортної задачі можна скористатися одним із методів, які розглянуто в попередньому пункті. Ці методи дають можливість побудувати невироджений план, у якому є $m+n-1$ заповнена клітинка, при цьому в деяких з цих клітинок можуть стояти нулі. Для перевірки на оптимальність **невиродженого** опорного плану скористаємось теоремою.

Теорема 5. *Якщо для деякого невиродженого опорного плану* $X = (x_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$ *транспортної задачі існують такі числа* α_i, $i \in \{1,\ldots,m\}$, *та* β_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *що*

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij} \quad \textit{при} \quad x_{ij} > 0,$$

$$\beta_j - \alpha_i \le c_{ij} \quad \textit{при} \quad x_{ij} = 0,$$

для всіх $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *то цей план є оптимальним.*

Числа α_i *та* β_j *називаються потенціалами відповідно пунктів відправлення* A_i *і пунктів призначення* B_j.

Ця теорема дозволяє побудувати алгоритм знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі.

Якщо є деякий невироджений опорний план, то спочатку знаходимо потенціали α_i, $i \in \{1,\ldots,m\}$, і β_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, з системи рівнянь

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij}, \tag{17}$$

де c_{ij} – тарифи перевезень, які стоять у заповнених клітинках таблиці умов транспортної задачі. Оскільки число заповнених клітинок дорівнює $m+n-1$, то система (17) з $m+n$ невідомими містить $m+n-1$ рівнянь. Це означає, що число невідомих на одиницю більше, ніж число рівнянь. Тому одне з невідомих можна взяти нульовим, наприклад, $\alpha_1 = 0$. Решта α_i та β_j знаходимо з системи (17).

Після того, як усі потенціали знайдено, для кожної з вільних клітинок знаходимо числа

$$d_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}.$$

Якщо серед чисел d_{ij} немає додатних, то вказаний опорний план є оптимальним. Якщо ж серед чисел d_{ij} є додатні, то вихідний опорний план не є оптимальним і треба перейти до нового опорного плану. Для цього серед d_{ij} вибираємо максимальне і клітинку, якій воно відповідає, треба заповнити. Заповнюючи вибрану клітинку, необхідно змінити обсяги поставок, перерозподіливши їх між заповненими клітинками, які зв'язані з нею циклом.

Доведено [14], що при правильній побудові опорного плану для будь-якої вільної клітинки можна побудувати тільки один цикл.

Переміщення вантажу в межах клітинок, які зв'язані з цією вільною клітинкою циклом здійснюємо за таким правилом: 1) кожній з клітинок, які зв'язані циклом з зазначеною вільною клітинкою, приписуємо певний знак, вільній клітинці знак плюс, а всім іншим – почергово знаки мінус і плюс; 2) у цю вільну клітинку переносимо менше з чисел x_{ij}, які знаходяться в мінусових клітинках. Одночасно це число додаємо до відповідних чисел, які стоять у плюсових клітинках і віднімаємо від чисел, які стоять у мінусових клітинках. Вільна клітинка стає заповненою, а мінусова клітинка, в якій стояло мінімальне число x_{ij}, – вільною.

У результаті таких переміщень одержимо новий опорний план. Описаний вище метод переходу до нового опорного плану називається **зсувом за циклом перерахунку**. При цьому число заповнених клітинок залишається рівним $m + n - 1$. Якщо в мінусових клітинках є два або більше однакових найменших числа x_{ij}, то звільняємо лише одну з них, а інші залишаємо заповненими (з нульовим вантажем). Одержаний новий опорний план перевіряємо знову на оптимальність і т.д.

Зауваження 4. У випадку, коли принаймні одна оцінка $d_{ij} = 0$, існують альтернативні оптимальні плани з одним тим самим значенням цільової функції. Отримати новий оптимальний план можна, якщо побудувати цикл перерозподілу обсягів перевезень для клітинки, якій відповідає $d_{ij} = 0$.

Приклад 4. Знайти оптимальний план транспортної задачі, вихідні дані якої наведені в таблиці

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 30	2 $-$ 20	4 $-$	1 $\oplus$ $-$	50
A_2	2 $-$	3 $+$ 10	1 10	5 $-$ 10	30
A_3	3 $-$	2 $-$	4 $-$	4 10	10
Потреби	30	30	10	20	90

◀ За допомогою методу північно-західного кута знаходимо опорний план задачі й записуємо його в попередню таблицю. Перевіримо цей план на оптимальність. Розглянемо заповнені клітинки і складемо для них систему рівнянь (17):

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_3 - \alpha_2 = 1,$$

$$\beta_2 - \alpha_1 = 2, \quad \beta_4 - \alpha_2 = 5,$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = 3, \quad \beta_4 - \alpha_3 = 4.$$

Взявши $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = 4$, $\alpha_3 = 0$. Далі для кожної вільної клітинки обчислюємо числа $d_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$:

$$d_{13} = 0 - 0 - 4 = -4; \quad d_{14} = 4 - 0 - 1 = 3;$$

$$d_{21} = 1 + 1 - 2 = 0; \quad d_{32} = 2 - 0 - 2 = 0;$$

$$d_{31} = 1 - 0 - 3 = -2; \quad d_{33} = 0 - 0 - 4 = -4.$$

Оскільки серед d_{ij} є додатне, а саме $d_{14} = 3$, то план не оптимальний, тому для клітинки (1, 4) треба побудувати цикл і провести переміщення вантажу за циклом. Для цього клітинку (2, 4), у якій стоїть найменше число з тих, що містяться у мінусових клітинках, звільняємо, в клітинки (1, 4) і (2, 2) додаємо 10 од. вантажу, а в клітинці (1, 2) віднімаємо 10 од. вантажу. Одержуємо новий опорний план:

1 30	2 $-$ 10	4	1 $+$ 10
2	3 20	1 10	5
3	2 $\oplus$	4	4 $-$ 10

Перевіряємо цей опорний план на оптимальність. Для заповнених клітинок складемо систему рівнянь (17):

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_2 - \alpha_2 = 3,$$

$$\beta_2 - \alpha_1 = 2, \quad \beta_3 - \alpha_2 = 1,$$

$$\beta_4 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_4 - \alpha_3 = 4,$$

звідки одержуємо, що $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_4 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_3 = 0$, $\alpha_3 = -3$.

Для кожної з вільних клітинок маємо відповідно: $d_{13} = -4$; $d_{21} = 0$; $d_{24} = -3$; $d_{31} = 1$; $d_{32} = 3$; $d_{33} = -1$. Оскільки серед d_{ij} є додатні, то план неоптимальний. Клітинку, в якій стоїть найбільше d_{ij}, тобто клітинку (3, 2) треба заповнити, зробивши зсув за циклом. Маємо дві клітинки (1, 2) і (3, 4) зі знаком мінус, у яких стоїть однаковий мінімальний вантаж, тому одну з них, наприклад, (3, 4) звільняємо, а другу (1, 2) вважаємо заповненою з нульовим вантажем. Одержимо такий опорний план

1 $-$ 30	2 $+$ 0	4	1 20
2 $\oplus$	3 $-$ 20	1 10	5
3	2 10	4	4

Перевірка цього плану на оптимальність дає:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_2 - \alpha_2 = 3,$$

$$\beta_2 - \alpha_1 = 2, \quad \beta_3 - \alpha_2 = 1,$$

$$\beta_4 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_2 - \alpha_3 = 2,$$

а отже, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_4 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_3 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тоді $d_{13} = -4$; $d_{21} = 0$; $d_{24} = -3$; $d_{31} = -2$; $d_{33} = -4$; $d_{43} = -3$. Оскільки всі $d_{ij} \leq 0$, то план оптимальний:

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{\min} = 1 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 140 \text{ грош. од.}$$

Серед d_{ij} є $d_{21} = 0$, а це означає, що оптимальний план не єдиний. Клітинку (2, 1) треба заповнити, зробивши зсув за циклом. Тоді одержимо другий оптимальний план

$$X_2^* = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 & 20 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Отже, розв'язком задачі є комбінація $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda) X_2^*$, $\lambda \in [0;1]$, а $f_{\min} = 140$ гр.од. ▶

Приклад 5. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею

Пункти відправлення	Пункти призначення			Запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	3	4	120
A_2	6	2	3	160
Потреби	110	90	100	

◀ Очевидно, що задача відкрита, оскільки $\sum\limits_{i=1}^{2} a_i = 120 + 160 = 280$, $\sum\limits_{j=1}^{3} b_j = 110 + 9 + 100 = 300$. Маємо випадок, коли запаси менші, ніж потреби. Тому введемо додаткового постачальника, запаси якого $a_3 = 300 - 280 = 20$, а тарифи перевезень нульові.

Отже, маємо транспортну задачу:

Пункти відправлення	Пункти призначення			Запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5 − 110	3 − 10	4	120
A_2	6	2 + 80	3 − 80	160
A_3	0 ⊕	0	0 + 20	20
Потреби	110	90	100	300

Початковий опорний план знайдемо за допомогою методу північно-західного кута. Для перевірки його на оптимальність знайдемо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 5, \quad \beta_3 - \alpha_2 = 3,$$
$$\beta_2 - \alpha_1 = 3, \quad \beta_3 - \alpha_3 = 0,$$
$$\beta_2 - \alpha_2 = 2,$$

а тому $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_3 = 4$, $\alpha_3 = 4$.

Для порожніх клітинок маємо: $d_{13} = 3 - 0 - 4 = -1$; $d_{21} = 5 - 1 - 6 = -2$; $d_{31} = 5 - 4 - 0 = 1$; $d_{32} = 3 - 4 - 0 = -1$

Цей опорний план не є оптимальним, бо серед d_{ij} є додатне значення $d_{31} = 1$. Тому для вказаної клітинки треба організувати цикл і провести перерозподіл вантажу. При цьому ми звільнимо клітинку (3, 3), а новий опорний план матимеме вигляд

5 90	3 30	4
6	2 60	3 100
0 20	0	0

Для нього маємо

$$\beta_1 - \alpha_1 = 5, \quad \beta_3 - \alpha_2 = 3,$$
$$\beta_2 - \alpha_1 = 3, \quad \beta_1 - \alpha_3 = 0,$$
$$\beta_2 - \alpha_2 = 2,$$

звідки одержуємо, що $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_3 = 4$, $\alpha_3 = 5$.

Далі для порожніх клітинок матимемо $d_{13} = 4 - 0 - 4 = 0$; $d_{21} = 5 - 1 - 6 = -2$; $d_{32} = 3 - 5 - 0 = -2$; $d_{33} = 4 - 5 - 0 = -1$. Оскільки всі $d_{ij} \leq 0$, то план оптимальний. Отже,

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 30 & 0 \\ 0 & 60 & 100 \end{pmatrix},$$

$$f_{\min} = 5 \cdot 90 + 3 \cdot 30 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 100 = 960 \text{ гр.од.}$$

Очевидно, що перший споживач недоодержить 20 одиниць вантажу. ▶

2.4. Транспортні задачі з особливостями

У багатьох задачах транспортного типу їхня постановка відрізняється від класичної, яка розглянута нами в попередніх пунктах тим, що містить деякі обмеження, зокрема: 1) заборонено перевозити вантажі за певними маршрутами; 2) за деякими маршрутами обсяги перевезень фіксовані; 3) задано обмеження знизу на обсяги перевезень за транспортними маршрутами; 4) обмежена пропускна здатність окремих маршрутів. Розглянемо деякі з цих випадків. З іншими можна познайомитися в [10]. Ці задачі за допомогою спеціальних перетворень зводяться до класичної транспортної задачі.

2.4.1. Задача, що містить обмеження на перевезення за деякими маршрутами. Припустимо, що не можна перевозити вантаж з пункту A_p у пункт B_q. Очевидно, що ця задача має розв'язок тоді й тільки тоді, коли вона має принаймні один допустимий план перевезень, що не містить забороненого маршруту. Розв'язуватимемо цю задачу так. Вважатимемо, що вартість перевезень по забороненому маршруту (p, q) $c_{pq} = M$, де M достатньо велике додатне число, яке можна розглядати як штраф, що його треба сплатити в разі організації перевезення по цьому маршруту. Тоді дістанемо класичну транспортну задачу, оптимальний план якої не передбачає перевезення за забороненим маршрутом. Цей план буде також оптимальним планом вихідної задачі. Якщо ж нова транспортна задача в оптимальному плані містить ненульові перевезення за забороненим маршрутом, то це означає, що вихідна задача не має допустимого плану перевезень, тобто вона нерозв'язна.

Можна розв'язувати цю задачу, не звертаючи увагу на обмеження і, якщо $x_{pq} = 0$, то все добре.

2.4.2. Транспортна задача з фіксованими обсягами перевезень за окремими маршрутами. Нехай за деякими маршрутами (i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_p, j_p) треба перевезти наперед визначений вантаж – відповідно $\alpha_{i_1 j_1}$, $\alpha_{i_2 j_2}$, ..., $\alpha_{i_p j_p}$ одиниць. У цьому випадку треба спочатку перевірити, чи відповідають задані фіксовані поставки можливостям постачальників. Якщо ця умова не виконнується, то задача розв'язку не має.

Якщо обсяги фіксованих поставок не перевищують запасів, то треба ці поставки зареєструвати і перейти до нової транспортної задачі, де запаси і потреби зменшені з урахуванням фіксованих поставок. У новій транспортній задачі треба заборонити перевезення вантажу за маршрутами (i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_p, j_p), оскільки вантаж у потрібних обсягах туди вже завезено. Отже, до нової транспортної задачі треба застосувати метод розв'язування, який запропоновано в п. 2.4.1. Якщо нова задача має розв'язок, то для знаходження оптимального плану вихідної задачі треба оптимальний план нової задачі доповнити фіксованими поставками. Нерозв'язність нової задачі означає, що при фіксованих обсягах перевезень вихідна задача не має допустимих планів, які відповідали б наявним запасам вантажу в постачальників і попиту на продукцію з боку споживачів.

2.4.3. Задача з обмеженнями знизу на обсяги перевезень. У класичній транспортній задачі всі незалежні змінні $x_{ij} \geq 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, тоді як в багатьох прикладних задачах виникають обмеження типу

$$x_{ij} \geq \beta_{ij},\ i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\},$$

де невід'ємні величини β_{ij}, якщо вони не дорівнюють нулю, визначають мінімальну кількість вантажу, яку обов'язково треба перевезти за вказаним маршрутом.

При розв'язуванні таких задач треба спочатку перевірити, чи відповідають нижні межі обсягів перевезень можливостям постачальників:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \leq a_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{18}$$

Якщо ця умова не виконується, то задача розв'язку не має.

У випадку, коли умова (18) виконується можна перейти до класичної транспортної задачі, ввівши нові змінні

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} - \beta_{ij}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{19}$$

а також зробивши перерахунок запасу вантажу і попиту на нього:

$$\begin{cases} \bar{a}_i = a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij}, \ i \in \{1, \ldots, m\}, \\ \bar{b}_j = \max\left\{0; b_j - \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij}\right\}, \ j \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases} \tag{20}$$

Якщо нова задача з вихідними даними $\bar{a}_i$, $\bar{b}_j$ та c_{ij}, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, має розв'язок $\bar{X}^* = (\bar{x}_{ij})_{\substack{i \in \{1,\ldots,m\} \\ j \in \{1,\ldots,n\}}}$, то компоненти оптимального плану вихідної задачі можна обчислити, використовуючи значення компонентів оптимального плану перевезень нової задачі,

$$x_{ij}^* = \bar{x}_{ij}^* + \beta_{ij}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \ j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Якщо нова задача розв'язку не має, то й вихідна задача при заданих обмеженнях розв'язку не має.

Приклад 6. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею

Пункти відправлення	Пункти призначення			Запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	7	10	12	40
A_2	3	16	7	50
A_3	4	14	12	70
A_4	8	11	6	90
Потреби	100	120	30	250

при таких додаткових обмеженнях:

1) за маршрутами (1, 1), (3, 2) і (4, 1) обсяги перевезень фіксовані й дорівнюють відповідно 15, 35 і 30 одиниць вантажу;

2) за маршрутами (2, 1), (2, 2) і (4, 3) треба перевезти не менше, ніж 10, 15 і 20 одиниць вантажу відповідно.

◀ Розв'язуватимемо задачу в два етапи. На першому етапі переконаємося в тому, що можна одночасно виконати фіксовані поставки, а також поставки, які обмежені знизу. Зробимо це за допомогою транспортної таблиці

Пункти відправлення	Пункти призначення			Запаси	Залишки запасів
	B_1	B_2	B_3		
A_1	7 $= 15$	10	12	40	25
A_2	3 ≥ 10	16 ≥ 15	7	50	25
A_3	4	14 $= 35$	12	70	35
A_4	8 $= 30$	11	6 ≥ 20	90	40
Потреби	100	120	30	250	
Завезено	55	50	20		
Залишилось завезти	45	70	10		125

Отже, план фіксованих і обмежених знизу поставок можливий, причому після його виконання в постачальників залишиться відповідно 25, 25, 35 і 40 одиниць вантажу. Його потрібно з найменшими транспортними витратами розподілити між споживачами, рівень недопоставки вантажу до яких становить відповідно 45, 70 і 10 одиниць вантажу. При цьому треба врахувати, що поставки за маршрутами (1, 1), (3, 2) і (4, 1) заборонені. Отже, задача має такий вигляд

Пункти відправлення	Пункти призначення			Запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	M	10 25	12	25
A_2	3 $-$ 25	16	7 $\oplus$	25
A_3	4 $+$ 20	M $-$ 15	12	35
A_4	M	11 $+$ 30	6 $-$ 10	40
Потреби	45	70	10	125

де M – достатньо велике додатне число.

Початковий опорний план побудуємо методом мінімальної вартості і перевіримо його на оптимальність. Розглянемо заповнені клітинки і складемо систему рівнянь (17):

$\beta_2 - \alpha_1 = 10, \quad \alpha_1 = 0,$
$\beta_1 - \alpha_2 = 3, \quad \beta_2 = 10,$
$\beta_1 - \alpha_3 = 4, \quad \alpha_3 = 10 - M,$
$\beta_2 - \alpha_3 = M, \quad \alpha_4 = -1,$
$\beta_2 - \alpha_4 = 11, \quad \beta_1 = 14 - M,$
$\beta_3 - \alpha_4 = 6, \quad \alpha_2 = 11 - M, \quad \beta_3 = 5.$

Для вільних клітинок маємо:

$d_{11} = 14 - M - M = 14 - 2M; \qquad d_{13} = 5 - 12 = -7;$
$d_{22} = 10 - 11 + M - 16 = M - 17; \; d_{23} = 5 - 11 + M - 7 = M - 13;$
$d_{33} = 5 - 10 + M - 12 = M - 17; \quad d_{41} = 14 - M + 1 - M = 15 - 2M.$

Згідно з умовою M – довільне додатне число, а тому найбільше додатне число d_{ij} відповідає клітинці (2, 3). Цю клітинку треба заповнити, зробивши перерозподіл вантажу за циклом. Отже, маємо такий новий опорний план

M	10 25	12
3 $-$ 15	16 $\oplus$	7 10
4 $+$ 30	M $-$ 5	12
M	11 40	6

Для заповнених клітинок запишемо систему рівнянь і знайдемо потенціали:

$$\beta_2 - \alpha_1 = 10, \quad \beta_1 - \alpha_3 = 4,$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 3, \quad \beta_2 - \alpha_3 = M,$$

$$\beta_3 - \alpha_2 = 7, \quad \beta_2 - \alpha_4 = 11,$$

$\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = 10$, $\alpha_3 = 10 - M$, $\beta_1 = 14 - M$, $\alpha_2 = 11 - M$, $\alpha_4 = -1$, $\beta_3 = 18 - M$.

Обчисливши d_{ij} для порожніх клітинок, матимемо $d_{11} = 14 - M - 0 - M = 14 - 2M$; $d_{13} = 18 - M - 0 - 12 = 6 - M$; $d_{22} = 10 - 11 + M - 16 = M - 17$; $d_{33} = 18 - M - 10 + M - 12 = -4$; $d_{41} = 14 - M + 1 - M = 15 - 2M$; $d_{43} = 18 - M + 1 - 6 = 13 - M$.

Оскільки $d_{22} > 0$, то клітинку (2, 2) треба заповнити. Для цієї клітинки організуємо цикл і проведемо перерозподіл вантажу. Одержимо новий опорний план

M	10 25	12
3 10	16 5	7 10
4 35	M	12
M	11 40	6

.

Перевірка на оптимальність одержаного опорного плану дає:

$$\beta_2 - \alpha_1 = 10, \quad \beta_3 - \alpha_2 = 7,$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 3, \quad \beta_1 - \alpha_3 = 4,$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = 16, \quad \beta_2 - \alpha_4 = 11;$$

$\alpha_1 = 0$; $\beta_2 = 10$; $\alpha_2 = -6$; $\beta_3 = 1$; $\alpha_4 = -1$; $\beta_1 = -3$; $\alpha_2 = -7$; $d_{11} = -3 - 0 - M = -3 - M < 0$; $d_{13} = 1 - 0 - 12 < 0$; $d_{32} = 10 - 7 - M < 0$; $d_{33} = 1 + 7 - 12 < 0$; $d_{41} = -3 + 1 - M < 0$; $d_{43} = 1 + 1 - 6 < 0$.

Умова оптимальності виконується, а отже, задача розв'язана:

$$\bar{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 0 \\ 10 & 5 & 10 \\ 35 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}_{\min} = 10 \cdot 25 + 3 \cdot 10 + 16 \cdot 5 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 35 + 11 \cdot 40 = 1010 \text{ гр.од.}$$

Оскільки ми на першому етапі виконали план фіксованих та обмежених знизу поставок

$$X_0 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 10 & 15 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 30 & 0 & 20 \end{pmatrix},$$

з вартістю

$$f_0 = 7 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 16 \cdot 15 + 14 \cdot 35 + 8 \cdot 30 + 6 \cdot 20 = 1225 \text{ гр.од.},$$

то розв'язок початкової задачі такий

$$X^* = X_0 + \bar{X}^* = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 0 \\ 20 & 20 & 0 \\ 35 & 35 & 0 \\ 30 & 40 & 20 \end{pmatrix},$$

$$f_{\min} = f_0 + \bar{f}_{\min} = 2235 \text{ гр.од.} \quad \blacktriangleright$$

2.5. Застосування транспортної задачі до розв'язування деяких економічних задач

2.5.1. Оптимальне закріплення за верстатами операцій з обробки деталей. Нехай на підприємстві є m видів верстатів A_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, максимальний час роботи яких відповідно дорівнює a_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, годин. Кожний з верстатів може виконувати n видів операцій B_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Сумарний час виконання кожної операції відповідно дорівнює b_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, годин. Відома продуктивність c_{ij} верстата A_i при виконанні операції B_j. Треба визначити скільки часу і на якій операції треба використовувати кожний з верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей.

Для складання математичної моделі позначимо через x_{ij}, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, час, який i-й верстат працюватиме над виконанням j-ої операції. Тоді кількість деталей, оброблених на i-му верстаті, дорівнює $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$, а на всіх верстатах – $f = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$.

Оскільки час роботи i-го верстата і час, який відведено на j-ту операцію обмежені, то

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

З умови задачі випливає, що загальний час роботи всіх верстатів

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

і час, необхідний для виконання всіх операцій

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

повинні бути однаковими.

Звідси випливає, що $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

Отже, математична модель задачі така:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\};$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, що для застосування методу потенціалів треба або перейти до функції $\bar{f} = -f$, яку треба досліджувати на мінімум, або критерій оптимальності змінити за знаком на протилежний, тобто d_{ij} повинні бути невід'ємними для порожніх клітинок.

2.5.2. Оптимальні призначення або проблема вибору. Нехай є n осіб A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, які можуть виконувати B_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, різних робіт. Відома продуктивність c_{ij} i-ої особи при виконанні j-ої роботи. Необхідно визначити кого і на яку роботу слід призначити, щоб добитися максимальної сумарної продуктивності за умови, що кожна особа може бути призначена тільки на одну роботу.

Для складання математичної моделі позначимо через x_{ij} призначення i-ої особи на j-ту роботу. Тоді, оскільки кількість осіб дорівнює кількості робіт і кожна особа може одержати призначення тільки на одну роботу, змінні x_{ij} можуть набувати тільки два значення:

$$x_{ij} = \left[\begin{array}{ll} 1, & \text{якщо } i\text{-та особа дістає призначення на } j\text{-ту посаду,} \\ 0, & \text{якщо } i\text{-та особа не призначається на } j\text{-ту посаду.} \end{array} \right.$$

Звідси випливає, що $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ і $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$. При призначенні i-ої особи на j-ту посаду продуктивність дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. Сумарна продуктивність виражається функцією

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Отже, маємо таку задачу:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i \in \{1, \ldots, n\};$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Приклад 7. Розв'язати задачу про оптимальні призначення трьох спеціалістів на три посади, якщо ефективність їхнього призначення задано таблицею

Спеціа- лісти	Посади			
	B_1	B_2	B_3	
A_1	40	30	50	1
A_2	30	50	20	1
A_3	50	30	40	1
	1	1	1	

◀ Складемо початковий опорний план за методом північно-західного кута. Оскільки $m+n-1 = 3+3-1 = 5$, то повинно бути п'ять заповнених клітинок. Тому в клітинки (1, 2) і (2, 3) поставимо нульові заповнення.

40 1	30 $-$ 0	50 $\oplus$	1
30	50 $+$ 1	20 $-$ 0	1
50	30	40 1	1
1	1	1	

Розглянемо заповнені клітинки і знайдемо потенціали α_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, та β_j, $j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{ll} & \alpha_1 = 0, \\ \beta_1 - \alpha_1 = 40, & \beta_1 = 40, \\ \beta_2 - \alpha_1 = 30, & \beta_2 = 30, \\ \beta_2 - \alpha_2 = 50, & \alpha_2 = 20, \\ \beta_3 - \alpha_2 = 20, & \beta_3 = 0, \\ \beta_3 - \alpha_3 = 40, & \alpha_3 = -40. \end{array}$$

Для порожніх клітинок маємо, що $d_{13} = -50$, $d_{21} = 30$, $d_{31} = 30$, $d_{32} = 40$. Оскільки $d_{13} < 0$, то план не оптимальний. У клітинку (1, 3) треба провести заповнення за допомогою зсуву за циклом.

40 $-$ 1	30 0	50 $+$ 0
30	50 1	20
50 $\oplus$	30	40 $-$ 1

Проведемо дослідження на оптимальність нового опорного плану. Маємо: $\beta_1 - \alpha_1 = 40$, $\beta_2 - \alpha_1 = 30$, $\beta_3 - \alpha_1 = 50$, $\beta_2 - \alpha_2 = 50$, $\beta_3 - \alpha_3 = 40$, тобто $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 40$, $\beta_2 = 30$, $\beta_3 = 50$, $\alpha_2 = -20$, $\alpha_3 = 10$. Тому $d_{21} = 30$, $d_{23} = 50$, $d_{31} = -20$, $d_{32} = -10$, а це означає, що план не оптимальний і клітинку (3, 1) треба заповнити, організувавши для неї цикл. Після перерозподілу посад за циклом дістанемо таблицю

40 0	30 0	50 1
30	50 1	20
50 1	30	40

Знову розглянемо спочатку заповнені клітинки і знайдемо потенціали α_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, та β_j, $j \in \{1, 2, 3\}$: $\beta_1 - \alpha_1 = 40$, $\beta_2 - \alpha_1 = 30$, $\beta_3 - \alpha_1 = 50$, $\beta_3 - \alpha_2 = 50$, $\beta_1 - \alpha_3 = 50$, а тому $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 40$, $\beta_2 = 30$, $\alpha_2 = -20$, $\alpha_3 = -10$, $\beta_3 = 50$. Для порожніх клітинок маємо: $d_{21} = 20$, $d_{23} = 50$, $d_{32} = 10$, $d_{33} = 20$. Отже, умова оптимальності виконується і задача розв'язана.

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{\max} = 50 + 50 + 50 = 150.$$

Звідси випливає, що максимальна ефективність, яка дорівнює 150 балам, досягається, якщо перший спеціаліст буде призначений на третю посаду, другий – на другу, а третій – на першу посаду. ▶

2.6. Транспортна задача за критерієм часу

Розглянемо задачу про перевезенуя однорідного вантажу, зосередженого в пунктах A_i в обсягах a_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, в пункти B_j з потребами b_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, якщо відомий час t_{ij}, необхідний для перевезення одиниці вантажу з пункту A_i у пункт B_j, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Треба знайти mn невід'ємних змінних x_{ij}, тобто план перевезень $(x_{ij})_{\substack{i \in \{1, \ldots, m\} \\ j \in \{1, \ldots, n\}}}$, за яким весь вантаж буде доставлено споживачам у найкоротший термін.

Очевидно, що система обмежень у цій задачі така сама, як у класичній транспортній задачі. Змінюється лише цільова функція.

Нехай $\bar{t}_{ij}$ ті елементи матриці $(t_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$, яким відповідають завантажені клітинки в плані $x = (x_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$, або елементи $x_{ij} > 0$. Позначимо через T найбільше серед $\bar{t}_{ij}$, тобто $T = \max\{\bar{t}_{ij}\}$.

Величина T визначатиме час, впродовж якого здійснюється цей план перевезень X. Кожному плану перевезень X відповідає певне значення T, тобто $T = T(X)$. Необхідно знайти такий план перевезень X, для якого величина T буде найменшою.

Можна довести [10], що оптимальний розв'язок, побудований за умовою мінімізації функції $f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=}^{n} t_{ij}x_{ij}$, не забезпечуватиме перевезень за мінімальний час.

Опишемо алгоритм розв'язування транспортних задач за критерієм часу.

Починаючи з вихідного опорного плану, знайденого одним із методів, які описані вище, всі наступні будуватимемо, визначаючи на кожній ітерації значення $T = \max\{\bar{t}_{ij}\}$.

Усі вільні клітинки, яким відповідають значення $t_{ij} > T$, заповнювати недоцільно, оскільки це приведе до збільшення T, тому, закреслюючи, вилучаємо їх з подальшого розгляду.

У таблиці, що залишилася, клітинку (p, q), для якої $\bar{t}_{pq} = T$ треба звільнити. Для цього побудуємо цикл, який може складатися як з заповнених, так і з вільних клітинок, але за умови, що всім клітинкам зі знаком мінус, вважаючи першою з таких клітинок (p, q), відповідатимуть $x_{ij} > 0$, а зі знаком плюс – клітинки, для яких $t_{ij} < T$. Таких циклів, взагалі кажучи, можна побудувати декілька.

Визначивши для побудованого циклу значення $\lambda = \min\{x_{ij}\}$, переміщуватимемо його вздовж циклу, віднімаючи від $x_{ij} > 0$, розміщених у клітинках "$-$"та додаючи до чисел, розміщених у клітинках "$+$". Якщо виявиться, що $\lambda = x_{pq}$, то клітинка (p, q) повністю звільняється і надалі не розглядається (закреслюється). Якщо ж $\lambda < x_{pq}$, то вантаж у заданій клітинці зменшується: $\bar{x}_{pq} = x_{pq} - \lambda$. У цьому випадку будуватимемо новий цикл і т.д., поки не дістанемо $\bar{x}_{pq} = 0$. На цьому одна ітерація закінчується. Далі знову визначатимемо нове значення $T_1 \equiv \max\{\bar{t}_{ij}\} < T$, закреслюючи клітинки зі значеннями $t_{ij} > T_1$. Продовжуємо цей процес доти, поки на деякій ітерації вже неможливо буде перетворити на нуль вантаж, якому відповідає час T. Це означатиме, що задача розв'язана.

Приклад 8. Розв'язати за критерієм часу транспортну задачу, яка визначена таблицею

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8 $\ominus$ 5	3 5	5 +	2	10
A_2	4 +	1 5	6 − 10	7	15
A_3	1	$\cancel{9}$	4 10	3 15	25
Потреби	5	10	20	15	

◀ Початковий опорний план побудуємо за допомогою методу північно-західного кута. Значення $T_0 = \max\{\bar{t}_{ij}\} = \max\{8, 3, 1, 6, 4, 3\} = 8$ візьмемо в кружечок. Серед вільних клітинок є тільки клітинка (3, 2) зі значенням $t_{32} > T_0 = 8$. Закреслимо її. Для клітинки (1, 1) будуємо розвантажувальний цикл і, знайшовши $\lambda = \min\{5, 10\} = 5$, переміщатимемо його вздовж циклу, віднімаючи від мінусових клітинок $x_{11} = 5$ і $x_{23} = 10$ та додаючи до плюсових клітинок $x_{13} = 0$ і $x_{21} = 0$. Як результат одержимо новий опорний план, в якому клітинка (1, 1) стала розвантаженою.

$\cancel{8}$	3 − 5	5 + 5	2
4 5	1 + 5	6 $\ominus$ 5	$\cancel{7}$
1	$\cancel{9}$	4 10	3 15

Знайдемо значення $T_1 = \max\{\bar{t}_{ij}\} = \max\{3, 5, 4, 1, 6, 4, 3\} = 6$ і клітинки (1, 1) та (2, 4) на цій ітерації закреслимо.

Тепер розвантажимо клітинку (2, 3). Переміщуючи вздовж побудованого циклу $\lambda_1 = \min\{5, 5\} = 5$, одержимо нове значення λ_2.

~~8~~	3 0	5 $\ominus$ 10	2 $+$
4 5	1 10	~~6~~	~~7~~
1	~~9~~	4 $+$ 10	3 $-$ 15

Викреслюємо клітинку (2, 3). Для заповнених клітинок визначаємо $T_2 = \max\{3, 5, 4, 1, 4, 3\} = 5$.

Побудувавши для клітинки (1, 3) цикл і перемістивши число $\lambda_2 = \min(10, 15) = 10$, одержимо оптимальний план.

~~8~~	3 0	~~5~~	2 10
4 5	1 10	~~6~~	~~7~~
1	~~9~~	4 20	3 5

Справді, $T_3 = \max\{3, 2, 4, 1, 4, 3\} = 4$ і очевидно, що для клітинок (2, 3) та (3, 3) не можна побудувати цикл.

Отже, оптимальний план перевезень

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix}$$

здійснюється за час $T_{\min} = 4$. ▶

Вправи

1. З прутів довжиною 5,5 м треба нарізати 100 заготовок довжиною 2 м, 200 заготовок довжиною 1,5 м і 300 заготовок довжиною 0,8 м так, щоб сумарна величина відходів матеріалу була мінімальною. Скласти математичну модель задачі.

2. Для покращення фінансового стану фірма прийняла рішення про збільшення випуску конкурентноздатної продукції, для чого вирішено в одному з цехів установити додаткове обладнання, яке займає $\frac{19}{3}$ м^2 площі. На придбання додаткового обладнання фірма виділила 10 гр.од., при цьому вона може купити обладнання двох типів. Придбання одного комплекту обладнання першого типу коштує одну гр.од., другого типу – 3 гр.од. Придбання одного комплекту обладнання першого типу дозволяє збільшити випуск продукції за зміну на 2 од., а другого типу – на 4 од. Знаючи, що для встановлення одного комплекту обладнання першого типу потрібно 2 м^2 площі, а для другого – 1 м^2 площі, визначити такий набір додаткового обладнання, який дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

3. Деяке підприємство планує відкрити цех з випуску нової продукції на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн. і можливість придбати устаткування двох типів A_1 і A_2. Відповідна техніко-економічна інформація подана в таблиці

Показник	Устаткування		Ресурс
	A_1	A_2	
Вартість, тис. грн.	25	10	100
Необх. виробн. площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн./рік	350	150	

Скільки комплектів обладнання типів A_1 і A_2 треба придбати, щоб сумарна його потужність була максимальною?

4. Фірма випускає два види глиняного посуду: горщики та вази. Виготовлення горщика потребує 1,6 кг глини та 1 годину роботи, а його реалізація дає 4 гр.од. прибутку. Для виготовлення вази потрібно 1,2 кг глини та 2 години роботи; а прибуток від її реалізації становить 5 гр.од. прибутку. На фірмі по 40 годин на тиждень працюють три гончарі; допустимі витрати глини становлять 48 кг на тиждень на одного гончара. Визначити скільки горщиків та ваз треба виготовити впродовж тижня, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

5. Підприємство випускає чотири види продукції P_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, застосовуючи три типи обладнання: токарне, фрезерувальне та шліфувальне. Витрати часу на обробку одиниці продукції, фонд робочого часу роботи обладнання та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду подані у таблиці

Тип обладнання	Витрати часу (верстато-год.) на виготов. од. продукції				Фонд роб. часу (верстато-год.)
	P_1	P_2	P_3	P_4	
Токарне	2	1	1	4	200
Фрезерувальне	2	0	3	1	150
Шліфувальне	1	5	1	0	300
Прибуток від реалізації од. продукціїї	8	4	6	5	

Визначити оптимальний план випуску продукції.

6. Підприємство випускає вироби трьох моделей: M_1, M_2, M_3. Для їхнього виготовлення використовується два види ресурсів А і Б, запаси яких становлять 400 та 600 одиниць відповідно. Норми витрат ресурсів та прибуток від реалізації одиниці продукції кожної моделі вказані в таблиці

Ресурси	Норми витрат на 1 од. продукції		
	M_1	M_2	M_3
А	2	4	5
Б	4	2	8
Прибуток від реалізації 1 од.	3	2	5

Аналіз умов збуту показав, що максимальний попит на продукцію підприємства становить 200, 200 і 150 виробів моделей M_1, M_2 і M_3 відповідно. При цьому сума обсягів збуту продукції всіх трьох видів ніколи не перевищує 400 одиниць.

Сформулювати і розв'язати задачу визначення таких обсягів випуску виробів кожної моделі, які забезпечать максимальний сумарний прибуток від реалізації.

7. Підприємство випускає вироби трьох моделей: M_1, M_2 і M_3. Для їх виготовлення використовується два види ресурсів А і Б, запаси яких 2000 та 2500 одиниць відповідно. Норми витрат ресурсів та прибуток від реалізації одиниці продукції кожної моделі вказані в таблиці

Ресурси	Норми витрат на 1 од. продукції		
	M_1	M_2	M_3
А	4	8	10
Б	6	4	12
Прибуток від реалізації 1 од.	3	2	5

Аналіз умов збуту показав, що максимальний попит на продукцію підприємства становить 100, 50 і 80 виробів моделей M_1, M_2 і M_3 відповідно. При цьому обсяг збуту продукції другого виду завжди не менший 20% від сумарного збуту продукції першого та третього видів.

1) Сформулювати і розв'язати задачу визначення таких обсягів випуску виробів кожної моделі, які забезпечать максимальний сумарний прибуток від реалізації. 2) Побудувати модель задачі, яка є двоїстою до заданої. Знайти її оптимальний план. 3) Охарактеризувати з економічної точки зору розв'язки обох задач.

8. Знайти цілочисловий розв'язок задачі:

1) $f = 16x_1 + 9x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

2) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 3; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

3) $f = 4x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 3x_1 + 10x_2 \le 15; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

4) $f = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

5) $f = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ -3x_1 + x_2 \le 0; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

6) $f = x_1 - 20x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 \le 40, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 29; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

7) $f = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

9. Розв'язати частково цілочислову задачу:

$$1)\ f = x_1 + x_2 \to \max;\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ x_2 \le 1; \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ j \in \{1, 2\},\ x_1 \in \mathbb{Z};$$

$$2)\ f = x_1 + 2x_2 \to \max;\quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7, \\ 10x_1 + 3x_2 + x_4 = 15; \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ j \in \{1,\ 2\};\quad x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1,\ 2\};$$

$$3)\ f = 5x_1 + x_2 \to \max;\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7/2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 1; \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1,\ 2\}.$$

10. На трьох складах знаходиться борошно в кількостях 60 т, 130 т, 90 т, яке необхідно впродовж місяця доставити чотирьом хлібзаводам у кількості: 30, 80, 60, 110 т відповідно. Скласти оптимальний план перевезень, якому відповідають мінімальні транспортні витрати, якщо вартість доставки 1 т борошна на хлібзаводи задається матрицею

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 15 & 4 \\ 9 & 15 & 2 & 3 \\ 9 & 15 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

11. Фірма здійснює поставку пляшок на 3 заводи, які займаються виробництвом напоїв. Вона має 3 склади, причому на першому складі знаходяться 6000 пляшок, на другому – 3000 пляшок, на третьому – 4000 пляшок. Першому заводу потрібно 4000 пляшок, другому – 5000 пляшок, третьому – 1000 пляшок. Матриця вартостей перевезення однієї пляшки має вигляд

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Як організувати доставку пляшок заводам, щоб вартість перевезень була мінімальною?

12. Розв'язати транспортну задачу, задану таблицею:

1)

a_i \ b_j	70	30	20	40
90	1	3	4	5
30	5	3	1	2
40	2	1	4	2

;

2)

a_i \ b_j	30	80	60	110
60	6	8	15	4
130	9	15	2	3
90	6	12	7	1

;

3)

b_j / a_i	120	80	60
100	2	4	2
70	5	5	6
70	4	6	3
20	6	8	1

;

4)

b_j / a_i	40	20	10	30
50	5	6	4	2
30	3	2	4	1
20	2	3	6	5

;

5)

b_j / a_i	5	5	3
6	6	4	9
3	5	M	2
4	M	3	0

(перевезення (2, 2) і (3, 1) заборонено, в таблиці відповідні тарифи позначено числом $M > 0$).

13. Розв'язати за критерієм часу транспортну задачу

b_j / a_i	8	12	16	14
10	1	3	4	5
11	2	5	1	3
20	3	2	8	4
9	1	4	3	2

.

Відповіді

1. Розглянути всеможливі способи розкрою одиниці матеріалу, кількість одиниць кожного типу заготовок і величини відходів матеріалу, що одержуються при кожному способі розкрою:

Номер способу розкрою	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число заготовок довжиною 2 м	2	2	1	1	1	0	0	0	0
Число заготовок довжиною 1,5 м	1	0	2	1	0	3	2	1	0
Число заготовок довжиною 0,8 м	0	1	0	2	4	1	3	5	6

$$f = 0,7x_2 + 0,5x_3 + 0,4x_4 + 0,3x_5 + 0,2x_6 + 0,1x_7 + 0,7x_9 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 = 200, \\ x_2 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 + 3x_7 + 5x_8 + 6x_9 = 300; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \ldots, 9\},$$

де x_j, $j \in \{1, \ldots, 9\}$, – кількість одиниць матеріалу, що планується розкроїти j–тим способом.

2. $f = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq \dfrac{19}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$$

$X^* = (1;\ 3)$, $f_{\max} = 14$ гр.од.

3. $f = 350x_1 + 150x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 25x_1 + 10x_2 \leq 100, \\ 40x_1 + 20x_2 \leq 190; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1,\ 2\};$$

$$x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1,\ 2\};$$

$X^* = (2;\ 5)$, $f_{\max} = 1450$ гр.од.

4. $X^* = (72;\ 24)$, $f_{\max} = 408$ гр.од.

5. $X^* = (74;\ 45;\ 0;\ 1)$, $f_{\max} = 777$ гр.од.

6. $X^* = (134;\ 32;\ 0)$, $f_{\max} = 466$ гр.од.

7. $X^* = (100;\ 50;\ 80)$, $f_{\max} = 800$ гр.од.

8. 1) $X^* = (2; 4)$, $f_{\max} = 68$; 2) $X^* = (5; 0)$, $f_{\min} = 10$; 3) $X^* = (1; 1)$, $f_{\max} = 5$; 4) $X_1^* = (1; 1)$, $X_2^* = (0;\ 2)$, $f_{\max} = 2$; 5) $X = (1; 2)$, $f_{\max} = 3$; 6) $X^* = (0; 4)$, $f_{\min} = -80$; 7) $X = (0; 1; 2; 14)$, $f_{\max} = 42$.

9. 1) $X^* = (1; 2/3)$, $f_{\max} = 7/3$; 2) $X^* = (1;\ 1;\ 1;\ 2)$, $f_{\max} = 3$; 3) $X^* = (3;\ 0;\ 1/2;\ 5)$, $f_{\max} = 15$.

10. Задача має оптимальні розв'язки X_1^* і X_2^*. Загальний розв'язок знаходиться за формулою $X^* = \lambda X_1^* + (1 - \lambda)X_2^*$, де $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 70 \\ 30 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 110 \\ 30 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 - 40\lambda & 0 & 40\lambda \\ 0 & 0 & 20 + 40\lambda & 110 - 40\lambda \\ 30 & 20 + 40\lambda & 40 - 40\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$f_{\min} = 1550$.

11.

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 3000 & 0 & 3000 \\ 0 & 2000 & 1000 & 0 \\ 4000 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$f_{\min} = 28000.$

12.

$$1)\ X^* = \begin{pmatrix} 70 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 30 \end{pmatrix};$$

$f_{\min} = 240;$

$$2)\ X^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 70 \\ 30 & 20 & 0 & 40 \end{pmatrix};$$

$f_{\min} = 1270;$

$$3)\ X^* = \begin{pmatrix} 90+10\lambda & 10-100\lambda & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 30-10\lambda & 10\lambda & 40 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix};$$

$f_{\min} = 830;$

$$4)\ X^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 & 30 \\ 10 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$f_{\min} = 260;$

$$5)\ X^* = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$f_{\min} = 52.$

13.

$$X^* = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$T_{\min} = 4.$

Елементи теорії ігор

1. Основні поняття теорії ігор

У багатьох задачах дослідження операцій доводиться оцінювати наслідки прийняття того або іншого рішення в умовах невизначеності. При цьому невизначеність може мати різну природу. Ми розгладатимемо лише випадки, коли невизначеність зумовлена свідомими діями декількох учасників операції, які переслідують, як правило, різні цілі, причому результат будь-якого рішення кожного з них залежить від рішень, прийнятих іншими учасниками. Такі ситуації називаються **конфліктними**. Приклади операцій, яким притаманні конфліктні ситуації, можна виявити у будь-якій сфері людської діяльності. Зокрема, таких операцій багато на ринку товарів та послуг; конфліктні ситуації є типовими при проведенні військових операцій і спортивних змагань.

Необхідність якось раціоналізувати прйняття рішень у конфліктних ситуаціях, врахувати свідоме протиборство розумного супротивника чи супротивників у досягненні певної визначеної мети, зумовила становлення та розвиток спеціального розділу математики – **теорії ігор**, однієї з найважливіших частин математичних методів дослідження соціально-економічних процесів і явищ. Отже, **теорія ігор** – це математична теорія конфліктних ситуацій.

Гра – це дійсний або формальний конфлікт, у якому є принаймні два учасники (гравці), кожний з яких намагається досягти своїх цілей. Допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення певної мети, називають **правилами гри**. За означенням гри, кількість її учасників має бути не меншою двох. Якщо гравців два, то таку гру називають **парною**. Щоб розрізняти гравців, їх прийнято позначати, наприклад, гравець A, гравець B і т.д.

Декілька гравців можуть утворювати постійну або тимчасову коаліцію, укладаючи при цьому певну угоду щодо правила прийняття ними індивідуальних рішень. Формально створення коаліції еквівалентно заміні всіх її учасників одним узагальненим гравцем.

Кількісна оцінка результатів гри називається **платежем**.

Розглянемо парну гру гравців A і B. Якщо сума платежів дорівнює нулю, тобто виграш гравця A дорівнює програшу гравця B, то гра називається парною грою з **нульовою сумою**. **Ходом** в теорії ігор називається вибір однієї з допустимих правилами гри дії та її здійснення. **Стратегією** гравця називається план, за яким він здійснює вибір у будь-якій можливій ситуації і при довільній можливій фактичній інформації. Зрозуміло, що гравець приймає рішення у ході гри, але теоретично можна вважати, що всі ці рішення прийнято гравцем наперед. У залежності від числа можливих стратегій ігри діляться на **скінченні** (наприклад, шахи, шашки) та **нескінченні** (наприклад, гра типу "дуелі"). Завданням теорії ігор є вироблення рекомендацій для гравців, тобто вибір для них оптимальної стратегії. **Оптимальною** називається стратегія, яка при багаторазовому повторенні гри забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш.

Отже, розглянемо парну гру з нульовою сумою. Гра складається з двох ходів: гравець A вибирає одну із своїх можливих стратегій A_i, $i \in \{1,\ldots,m\}$, а гравець B – стратегію B_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, причому кожний вибір проводиться при повному незнанні вибору іншого гравця. Нехай $\varphi_1(A_i, B_j)$ – виграш першого гравця, а $\varphi_2(A_i, B_j)$ – виграш другого гравця, тоді $\varphi_1(A_i, B_j) + \varphi_2(A_i, B_j) = 0$. Звідси, якщо покласти $\varphi_1(A_i, B_j) = \varphi(A_i, B_j)$, одержимо, що $\varphi_2(A_i, B_j) = -\varphi(A_i, B_j)$. Очевидно, що гравець A хоче максимізувати функцію $\varphi(A_i, B_j)$, а гравець B – мінімізувати цю саму функцію. Нехай $\varphi(A_i, B_j) = a_{ij}$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Складемо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рядки матриці відповідають стратегіям A_i, $i \in \{1,\ldots,m\}$, стовпчики – стратегіям B_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Матриця C називається **платіжною** або **матрицею гри**. При цьому кожне число a_{ij}, $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, – це платіж гравцю A (рядковому гравцю), якщо він вибрав i-й рядок, а стовпчиковий гравець (гравець B) j-у стратегію. Очевидно, що коли $a_{ij} = 0$, то це нічия, тобто жодний з гравців не дістає ніякого виграшу. Якщо ж $a_{ij} > 0$, то у виграші гравець A, а при $a_{ij} < 0$ – гравець B.

Оскільки елементи матриці C – це платежі гравцеві A, то цей гравець є максимізуючим у виборі свого рядка, а гравець B – мінімізуючим у виборі стовпчика. Однак це не означає, що, наприклад, гравець A зорієнтується на r-й рядок (стратегію), у якому знаходиться найбільший елемент a_{rs}. Припускається, що суперник (гравець B) також підготовлений добре і вибере не s-й стовпчик, а деякий інший, наприклад, p-й стовпчик і елемент a_{rp} буде програшним для гравця A. Враховуючи усе це, гравець A спочатку в кожному рядку знаходить мінімальний елемент, а потім вибирає для реалізації той рядок, у якому знаходиться найбільший елемент, тобто

$$\min_j a_{ij} = \alpha_i, \qquad i \in \{1, \dots, m\};$$

$$\max_i \alpha_i = \alpha,$$

або

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Число α називається **нижньою ціною гри (максимінним виграшем)**.

Аналогічно гравець B, розуміючи, що елементи матриці C є платежами гравцеві A, в кожному своєму стовпчику j знаходить максимальний елемент β_j, а потім вибирає той стовпчик, якому відповідає найменше з чисел β_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, тобто

$$\max_i a_{ij} = \beta_j, \qquad j \in \{1, \dots, n\};$$

$$\min_j \beta_j = \beta,$$

або

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Число β називається **верхньою ціною гри (мінімаксом)**.

Принцип обережності, що диктує гравцям вибір максимінного або мінімаксного рішення в теорії ігор є основним і має назву **принципу мінімакса**. Він є наслідком припущення щодо розумності та корисливості кожного з гравців, кожний з яких намагається досягти мети, протилежної меті супротивника. Для найобережніших максимінного та мінімаксного рішень використовують узагальнений термін **мінімаксне рішення**.

Теорема 1. *У матричній грі нижня ціна гри не перевищує верхньої ціни гри, тобто $\alpha \le \beta$.*

◀ Згідно з означенням $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij} \le a_{ij}$, а $\beta_j = \max\limits_i a_{ij} \ge a_{ij}$. Тоді з цих двох нерівностей випливає, що

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij} \le \max_i a_{ij} = \beta_j,$$

тобто

$$\alpha_i \le \beta_j, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Ця нерівність правильна для будь-яких i та j, а тому $\alpha \le \beta$. ▶

Фактичний виграш гравця A при розумних діях партнерів обмежений нижньою і верхньою ціною гри. Якщо ці вирази однакові, тобто $\alpha = \beta = v$, то виграш гравця A – цілком визначене число. Гра при цьому називається **цілком визначеною**, а виграш v називається **значенням (ціною) гри** і дорівнює деякому елементу a_{rs}. Такі ігри називають іграми **з сідловою точкою**. Елемент a_{rs} матриці такої гри є одночасно мінімальним у рядку r, максимальним у стовпчику s, і називається **сідловою точкою**. Сідловій точці відповідають оптимальні стратегії A_r і B_s гравців, які називають **чистими стратегіями**. Трійку $(A_r; B_s; v)$ називають **розв'язком гри**.

Приклад 1. Розв'язати гру, яка задана матрицею

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & -5 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 7 & -3 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

◀ Маємо

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{min} & & \\
 & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & -5 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 7 & -3 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \to \\ \to \\ \to \\ \to \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -5 \\ -6 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}\right\} & \xrightarrow{\max} 3 = \alpha, \\
\text{max} & \underbrace{\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 3 & 5 & 5 & 6 \end{matrix}} & & & \\
 & \text{min} \downarrow & & & \\
 & 3 = \beta & & &
\end{array}
$$

Отже, $\alpha = 3$, $\beta = 3$ і тому $\alpha = \beta = v = 3 = a_{32}$. Це означає, що гра розв'язується в чистих стратегіях. Чистими стратегіями є A_3 і B_2, сідловою точкою $a_{32} = 3$, а ціною гри $v = 3$.

Розв'язок задачі $(A_3, B_2, 3)$. ▶

Приклад 2. Кожний з гравців A і B записує одне з чисел 1; 4; 6; 9, потім вони одночасно показують написане. Якщо обидва числа виявилися однакової парності, то суму цих чисел виграє A, якщо різної – виграє B. Скласти платіжну матрицю, знайти нижню і верхню ціну гри, мінімаксні стратегії гравців.

◀ Стратегіями гравця A будуть: A_1 – записати число 1; A_2 – число 4; A_3 – число 6; A_4 – число 9. У гравця B будуть аналогічні стратегії.

Елемент $a_{11} = 2$, оскільки в ситуації $(A_1; B_1)$ обидва гравці записують непарне число 1 і виграш гравця A дорівнює $1+1 = 2$. Елемент $a_{12} = -5$, оскільки в ситуації $(A_1; B_2)$ гравець A записує число 1, а B – число 4, тобто числа різної парності, а тому виграш гравця B дорівнює 5, тоді як виграш гравця A становить -5. Аналогічно обчислюються інші елементи платіжної матриці, яка матиме вигляд

$$
\begin{pmatrix} 2 & -5 & -7 & 10 \\ -5 & 8 & 10 & -13 \\ -7 & 10 & 12 & -15 \\ 10 & -13 & -15 & 18 \end{pmatrix}.
$$

Знайдемо нижню і верхню ціни гри. Маємо.

$$\begin{array}{cccc}
 & & \min & \\
 & \begin{pmatrix} 2 & -5 & -7 & 10 \\ -5 & 8 & 10 & -13 \\ -7 & 10 & 12 & -15 \\ 10 & -13 & -15 & 18 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \to \\ \to \\ \to \\ \to \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -7 \\ -13 \\ -15 \\ -15 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\max} -7 = \alpha, \\
\max & \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} & & \\
 & \underbrace{\begin{matrix} 10 & 10 & 12 & 18 \end{matrix}} & & \\
 & \min \quad \downarrow & & \\
 & 10 = \beta & &
\end{array}$$

Оскільки нижня ціна гри $\alpha = -7$ не дорівнює верхній ціні гри $\beta = 10$, то задана гра не має сідлової точки. Максимінною для гравця A буде чиста стратегія A_1. Користуючись нею, гравець A "виграє" не менше -7 (програє не більше 7). Мінімаксними для гравця B будуть чисті стратегії B_1 і B_2, при яких він програє не більше 10. ▶

2. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Розглянемо гру, матриця якої

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

не містить сідлової точки, тобто $\alpha < \beta$. Така гра є цікавою в азартно-змагальному розумінні, тобто вона складається з декількох партій. Окрема партія полягає в тому, що гравець A називає деяку стратегію A_p, а гравець B – стратегію B_q і рядковому гравцю йде платіж a_{pq}. При проведенні серії партій виникає запитання, як часто гравцям слід користуватися своїми стратегіями. Тому вводимо ймовірності вибору кожної із стратегій. Позначимо через u_i ймовірність (частоту) вибору стратегії A_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, гравцем A, а через z_j – ймовірність (частоту) вибору стратегії B_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, гравцем B. Треба знайти такі значення u_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, і такі значення z_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, щоб рядковому гравцеві в середньому за одну партію йшов виграш більший за нижню ціну гри α, а гравцеві B – програш менший за верхню ціну гри β. Цей програш - виграш називають ціною гри і позначають v, де $\alpha < v < \beta$.

Набори ймовірностей $U = (u_1; \dots; u_m)$ і $Z = (z_1; \dots; z_n)$ вибору кожної із своїх стратегій відповідно гравцем A і гравцем B, назвемо **мішаними стратегіями** цих гравців. Очевидно, що правильними є такі співвідношення:

1) $u_i \geq 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $u_1 + \dots + u_m = 1$;

2) $z_j \geq 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $z_1 + \dots + z_n = 1$.

Оскільки гравці вибирають свої чисті стратегії випадково і незалежно один від одного, то гра має випадковий характер і випадковою є так само величина виграшу (програшу). У цьому випадку середня величина виграшу (програшу), тобто математичне сподівання, є функцією від U і Z

$$f(U,Z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_iz_j.$$

Функція f називається **платіжною функцією** гри з матрицею C.

Стратегії $U^*=(u_1^*;\dots;u_m^*)$ і $Z^*=(z_1^*;\dots;z_n^*)$ називаються **оптимальними**, якщо для довільних стратегій $U=(u_1;,\dots;u_m)$, $Z=(z_1;\dots;z_n)$ виконуються умови

$$f(U,Z^*)\le f(U^*,Z^*)\le f(U^*,Z).$$

Використання у грі оптимальних мішаних стратегій забезпечує гравцеві A виграш не менший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії U; другому гравцеві – програш, не більший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії Z.

Сукупність оптимальних стратегій і ціни гри $(U^*;Z^*;v)$ визначає **розв'язок гри**.

Значення платіжної функції f при оптимальних стратегіях визначає ціну гри v, тобто $f(U^*,Z^*)=v$.

Доводиться, що *будь-яка парна скінченна гра з нульовою сумою має розв'язок у мішаних стратегіях* [16].

Нехай задано матричну гру з платіжною матрицею C і деякі мішані стратегії U^* і Z^* гравців A і B відповідно, які забезпечують суму виграшу v. Для того щоб перевірити чи $(U^*;Z^*;v)$ є розв'язком гри, треба переконатися, що виконується умова оптимальності. Оскільки різних мішаних стратегій, серед яких й оптимальні, є безліч, то перевіряти ці нерівності складно. Розглянемо наступну теорему.

Теорема 2. [14] *Для того щоб мішані стратегії $U^*=(u_1^*;\dots;u_m^*)$ і $Z^*=(z_1^*;\dots;z_n^*)$ були оптимальними для гравців A і B у грі з платіжною матрицею C і виграшем v, необхідно і досить виконання нерівностей:*

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}u_i^*\ge v,\quad j\in\{1,\dots,n\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j^* \leq v, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Згідно з теоремою 2 маємо: *якщо гравець A застосовує оптимальну мішану стратегію U^*, а гравець B – довільну стратегію Z, то виграш гравця A буде не меншим ніж ціна гри v.* Аналогічно, *якщо гравець B застосовує оптимальну мішану стратегію Z^*, а гравець A – довільну стратегію U, то програш гравця B не перевищить ціни гри v.*

Чисті стратегії гравця, які входять в його оптимальну мішану стратегію з ненульовими ймовірностями, називаються **активними** стратегіями гравця.

Теорема 3. [14] *Якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної мішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри незалежно від того, яку стратегію застосовує другий гравець, якщо тільки він не виходить за межі своїх активних стратегій.*

За допомогою введених ймовірностей вибору стратегій гравцями, матричну гру можна звести до пари двоїстих задач лінійного програмування.

Розглянемо гру, платіжна матриця якої C не має сідлової точки. Вважатимемо, що всі елементи цієї матриці невід'ємні. Якщо ця умова не виконується, то до всіх елементів матриці додаємо одне й те саме досить велике число K, яке переводить платежі в область невід'ємних значень. При цьому суть гри та її розв'язування не зміниться і лише ціна гри збільшиться на величину K [16]. Отже, можна вважати, що ціна гри $v > 0$.

Нехай існують і знайдені оптимальні стратегії гравців: $U^* = (u_1, \ldots, u_m)$ – гравця A і $Z^* = (z_1, \ldots, z_n)$ – гравця B, де $u_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 1$, $z_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 1$.

Застосування рядковим гравцем A оптимальної стратегії гарантує йому виграш не менший за ціну гри v, причому це не залежить від стратегії стовпчикового гравця B. Нехай, наприклад, гравець B у серії партій весь час застосовує j-у стратегію (вибирає стовпчик B_j матриці C), а гравець A застосовує оптимальну змішану стратегію U^*. Тоді середній виграш гравця A становить $v_j = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \ldots + a_{mj}u_m$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Оскільки в розглядуваній ситуації мова йде про оптимальну поведінку гравця A і неоптимальне повторення стратегії B_j гравцем B у серії партій, то $v_j \geq v$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, де v – ціна гри, яка відповідає оптимальній поведінці гравців. Отже, маємо нерівності

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq v, \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \geq v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \geq v. \end{cases} \tag{1}$$

Поділивши ліві та праві частини цих нерівностей на $v > 0$, і, ввівши позначення $\dfrac{u_i}{v} = y_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, з (1) дістанемо

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq 1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq 1, \end{cases} \tag{2}$$

де

$$y_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{3}$$

бо $u_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $v > 0$.

Далі маємо

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \frac{u_1}{v} + \frac{u_2}{v} + \ldots + \frac{u_m}{v} =$$

$$= \frac{1}{v}(u_1 + u_2 + \ldots + u_m) = \frac{1}{v},$$

і, оскільки, рядковий гравець A максимізує ціну гри v, то $\dfrac{1}{v}$ мінімізується, а тому одержуємо цільову функцію

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \min . \tag{4}$$

Припустивши тепер, що в серіях партій гравець B діє оптимально, тобто орієнтується на застосування оптимальної стратегії Z^*, а гравець A – неоптимально, тобто, використовує довільно стратегії A_1, ..., A_m, матимемо:

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1n}z_n \leq v, \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2n}z_n \leq v, \\ \dotfill \\ a_{m1}z_1 + a_{m2}z_2 + \ldots + a_{mn}z_n \leq v. \end{cases} \tag{5}$$

Після ділення обох частин нерівностей (5) на $v > 0$ і введення позначення

$$\frac{z_j}{v} = x_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

матимемо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq 1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq 1, \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq 1, \end{cases} \tag{6}$$

де

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{7}$$

оскільки $z_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, і $v > 0$. Далі

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{z_1}{v} + \frac{z_2}{v} + \ldots + \frac{z_n}{v} =$$

$$= \frac{1}{v}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) = \frac{1}{v}.$$

Гравець B зацікавлений у мінімізації ціни гри v, тому

$$f = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \to \max. \tag{8}$$

Отже, ми одержали пару двоїстих задач (6) – (8) і (2) – (4). Для них, як відомо

$$f_{\max} = F_{\min} = \frac{1}{v}.$$

Розв'язавши задачі (6) – (8) і (2) – (4), дістанемо

$$u_i = \frac{y_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i} = vy_i, z_j = \frac{x_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j} = vx_j,$$

$$i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$v = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}.$$

Зауважимо, що в оптимальній мішаній стратегії деякі чисті стратегії можуть і не використовуватися за умови, що їхні ймовірності дорівнюють нулю.

Приклад 1. Знайти розв'язок гри, яка задана матрицею

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

◀ Перевіримо спочатку, чи розв'язується задача в чистих стратегіях

$$\begin{array}{cccc}
 & & \min & \\
 & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \to \\ \to \\ \to \end{array} & \left.\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\max} 3 = \alpha, \\
\max & \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{array} & & \\
 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\min \quad \downarrow} & & \\
 & 4 = \beta & &
\end{array}$$

Оскільки $\alpha < \beta$, то розв'язуватимемо задачу в змішаних стратегіях. Складаємо пару двоїстих задач лінійного програмування:

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \le 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \le 1; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j \in \{1, \ldots, 4\};$$

$$F = y_1 + y_2 + y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 1, \\ 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 \ge 1, \\ 4y_1 + 6y_2 + y_3 \ge 1, \\ 2y_1 + 5y_2 + 3y_3 \ge 1; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Розв'яжемо пряму задачу симплексним методом

i	Б	$C_Б$	A_0	1	1	1	1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_5	0	1	$\boxed{4}$	3	4	2	1	0	0
2	A_6	0	1	3	4	6	5	0	1	0
3	A_7	0	1	2	5	1	3	0	0	1
$m+1$			0	-1	-1	-1	-1	0	0	0
1	A_1	1	$1/4$	1	$3/4$	1	$1/2$	$1/4$	0	0
2	A_6	0	$1/4$	0	$7/4$	3	$\boxed{7/2}$	$-3/4$	1	0
3	A_7	0	$1/2$	0	$7/2$	-1	2	$-1/2$	0	1
$m+1$			$1/4$	0	$-1/4$	0	$-1/2$	$1/4$	0	0
1	A_1	1	$3/14$	1	$1/2$	$4/7$	0	$5/14$	$-1/7$	0
2	A_4	1	$1/14$	0	$1/2$	$6/7$	1	$-3/14$	$2/7$	0
3	A_7	0	$5/14$	0	$5/2$	$-19/7$	0	$-1/14$	$-4/7$	1
$m+1$			$2/7$	0	0	$3/7$	0	$1/7$	$1/7$	0

У першій симплексній таблиці умова оптимальності не виконується. Розв'язувальний елемент знайдемо з умови

$$\min_{\substack{j:\\ \Delta_j<0}} \theta_{0j}\Delta_j = \min\left\{-\frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{5}\right\} = -\frac{1}{4},$$

$$i = 1, \quad j = 1.$$

Зробивши жорданове перетворення з провідним елементом $a_{11} = 4$, дістанемо другу симплексну таблицю. У ній знову не виконується умова оптимальності. Провідним є стовпчик A_4, а провідним є другий рядок, бо

$$\theta_{04} = \min\left\{\frac{1/4}{1/2}; \frac{1/4}{7/2}; \frac{1/2}{2}\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{14}; \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{14}, \quad i = 2.$$

Після переходу до нової симплексної таблиці, дістанемо, що умова оптимальності виконується. Оптимальним планом задачі є $X^* = \left(\frac{3}{14}; 0; 0; \frac{1}{14}\right)$, $f_{\max} = \frac{2}{7}$.

Тоді $v = \frac{7}{2}$, $Z^* = vX^* = \frac{7}{2}\left(\frac{3}{14}; 0; 0; \frac{1}{14}\right) = \left(\frac{3}{4}; 0; 0; \frac{1}{4}\right)$.

Розв'язком двоїстої задачі є $Y^* = \left(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; 0\right)$, а тому $U^* = vY^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Отже, мішані стратегії $U^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $Z^* = \left(\frac{3}{4}; 0; 0; \frac{1}{4}\right)$, а ціна гри $v = \frac{7}{2}$. ▶

Приклад 2. Знайти виграш першого гравця у грі з матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

якщо він вибрав мішану стратегію $X = (1/2; 1/2; 0)$, а другий гравець – стратегію $Y = (0; 1/3; 2/3)$.

◀ Виграш першого гравця визначається за формулою

$$XCY^T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j. \tag{9}$$

У нашому випадку

$$XCY^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 & 4 \cdot \frac{1}{3} & 2 \cdot \frac{2}{3} \\ 1 \cdot 0 & 6 \cdot \frac{1}{3} & 0 \cdot \frac{2}{3} \\ 2 \cdot 0 & 3 \cdot \frac{1}{3} & 4 \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/3 \\ 2 \\ 11/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot \frac{11}{3} = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}.$$

Отже, виграш першого гравця дорівнює $\frac{7}{3}$ гр.од. ▶

Приклад 3. Перевірити, чи стратегії $X^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ і $Y^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ є оптимальними для гри за платіжною матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

◀ Для того, щоб стратегії X^* і Y^* були оптимальними для гри з матрицею C, необхідно й досить, щоб

$$A_i Y^{*T} \le X^* C Y^{*T} \le X^* B_j, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{10}$$

де A_i – i-й рядок матриці C, B_j – j-й стовпчик матриці C.

У нашому випадку маємо

$$X^* C Y^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{7}{9} + \frac{7}{9} + \frac{7}{9} = \frac{7}{3}.$$

$$A_1 Y^{*T} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3},$$

$$A_2 Y^{*T} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} = \frac{7}{3},$$

$$A_3 Y^{*T} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{3};$$

$$X^*B_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3},$$

$$X^*B_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} = \frac{7}{3},$$

$$X^*B_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{3}.$$

Звідси випливає, що нерівність (10) виконується, а це означає, що X^* і Y^* – оптимальні стратегії. ▶

3. Графічний метод розв'язування матричної гри

Метод розв'язування матричної гри в мішаних стратегіях за допомогою зведення її до пари взаємно двоїстих задач лінійного програмування не завжди раціональний. Існують інші методи, які грунтуються на використанні специфіки цієї задачі. У цьому розділі ми розглянемо графічний метод розв'язування матричної гри, яка описується матрицею розміру 2×2, $2 \times n$, чи $m \times 2$, де $n > 2$, $m > 2$.

Нехай матриця гри має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

а оптимальні стратегії гравців A і B відповідно такі $U^* = (u_1, u_2)$ і $Z^* = (z_1, z_2)$. З'ясуємо як можна їх знайти, використовуючи графічний метод.

Розв'яжемо спочатку цю задачу аналітично. Згідно з теоремою 3

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 = v, \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 = v, \quad \text{де} \quad u_1 + u_2 = 1, \end{cases}$$

а v – ціна гри. Тоді $u_2 = 1 - u_1$, а отже,

$$a_{11}u_1 + a_{21}(1 - u_1) = a_{12}u_1 + a_{22}(1 - u_1),$$

або

$$((a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21}))u_1 = a_{22} - a_{21}.$$

Звідси випливає, що

$$u_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}, \tag{1}$$

$$u_2 = 1 - \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} =$$

$$= \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}. \tag{2}$$

Знаючи u_1 і u_2, знаходимо v:

$$v = \frac{a_{11}(a_{22} - a_{21})}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} + \frac{a_{21}(a_{11} - a_{12})}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} =$$

$$= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}. \tag{3}$$

Якщо відоме v, то z_1 і z_2 знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_1 = v; \\ z_1 + z_2 = 1. \end{cases}$$

Оскільки $z_2 = 1 - z_1$, то

$$a_{11}z_1 + a_{12}(1 - z_1) = v,$$

або

$$(a_{11} - a_{12})z_1 + a_{12} = v.$$

Звідси випливає, що

$$z_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}},$$

а тоді

$$z_2 = 1 - \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}},$$

коли $a_{11} \neq a_{12}$.

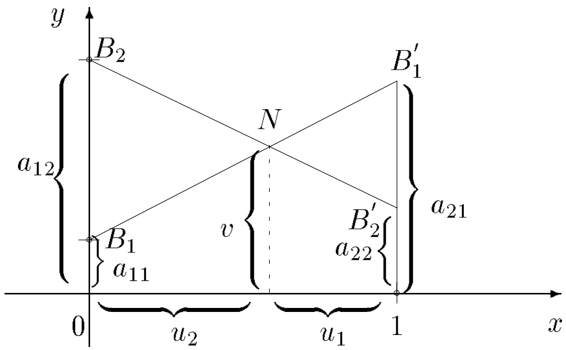
Отже, задача розв'язана, оскільки знайдено оптимальні мішані стратегії та ціну гри.

Алгоритм графічного розв'язування матричної гри такий:

1) на осі Ox відкладаємо відрізок одиничної довжини;

2) на осі Oy відкладаємо виграші при стретегії A_1, а на прямій $x = 1$ відкладаємо виграші при стратегії A_2: $a_{11} \sim B_1$, $a_{21} \sim B'_1$, $a_{12} \sim B_2$, $a_{22} \sim B'_2$ і проводимо дві прямі $B_1B'_1$ і $B_2B'_2$;

3) визначаємо ординату точки перетину N прямих B_1B_1' і B_2B_2', яка дорівнює v, абсциса точки N дорівнює u_2 $(u_1 = 1 - u_2)$.



Цей метод має достатньо широке застосування, що ґрунтується на загальній властивості ігор $m \times n$, яка полягає в тому, що в будь-якій грі $m \times n$ кожний гравець має оптимальну мішану стратегію, в якій число чистих стратегій не більше, ніж $\min(m; n)$.

З цієї властивості випливає, що *у будь-якій грі* $2 \times n$ *і* $m \times 2$ *кожна оптимальна стратегія* U^* *і* Z^* *містить не більше двох активних стратегій.* Отже, довільну гру $2 \times n$ і $m \times 2$ можна розв'язати графічно.

Для гри $2 \times n$ на рисунку слід зобразити перетин n прямих, що відповідатимуть n стратегіям гравця B. Максимальне значення нижньої межі й визначатиме оптимальну мішану стратегію гравця B. Якщо ж розглядається гра $m \times 2$, то на рисунку слід зобразити перетин m прямих, що відповідатимуть m стратегіям гравця A. Мінімальне значення верхньої межі й визначатиме оптимальну мішану стратегію гравця A

Приклад 1. Розв'язати графічно гру, яка задана платіжною матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 1,5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

◀ Відкладаємо на осі абсцис одиничний відрізок A_1A_2. На вертикальній осі $I - I$ відкладаємо відрізки: $a_{11} = 1,5$, який відповідає стратегії

B_1 і $a_{12} = 3$, який відповідає стратегії B_2. На вертикальній осі $II - II$ відрізок $a_{21} = 2$, який відповідає стратегії B'_1, відрізок $a_{22} = 1$ відповідає стратегії B'_2. Нижня ціна гри $\alpha = a_{11} = 1,5$. Верхня ціна гри $\beta = a_{21} = 2$, а отже, сідлова точка відсутня.

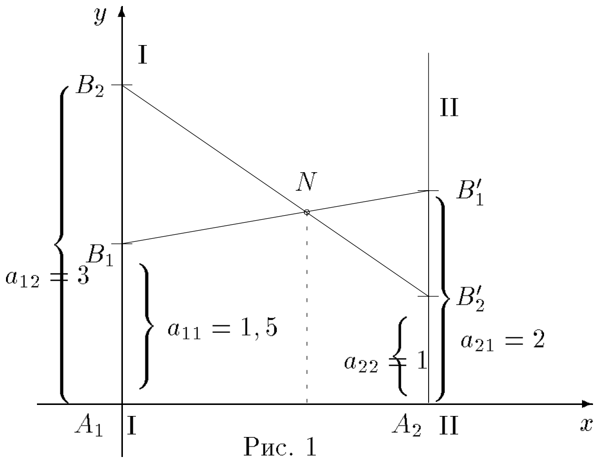


Рис. 1

З рис. 1 видно, що абсциса точки N визначає оптимальну стратегію U^*, а ордината – ціну гри v. Точка N є точкою перетину прямих $B_1B'_1$ і $B_2B'_2$. Рівняння прямої $B_1B'_1$ знайдемо як рівняння прямої, що проходить через точки $(0; 1,5)$ і $(1; 2)$:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1,5}{2-1,5}, \quad \text{або} \quad y = 0,5x + 1,5.$$

Рівняння прямої $B_2B'_2$, яка проходить через точки $(0; 3)$ і $(3; 1)$, має вигляд

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-3}{1-3}, \quad \text{або} \quad y = -2x + 3.$$

Координати точки перетину прямих є розв'язком системи

$$\begin{cases} y = 0,5x + 1,5, \\ y = -2x + 3; \end{cases}$$

звідки $x = 0,6$, $y = 1,8$, тобто $N(0,6; 1,8)$. Отже, $u_2^* = 0,6$, $u_1^* = 1 - 0,6 = 0,4$; оптимальна стратегія $U^* = (0,4; 0,6)$, ціна гри $v = 1,8$.

Графічно можна також знайти оптимальну мішану стратегію гравця B, якщо поміняти місцями гравців A і B і замість максимуму нижньої межі A_2MA_1 у відповідності з принципом мінімакса (рис. 2) розглянути мінімум верхньої межі.

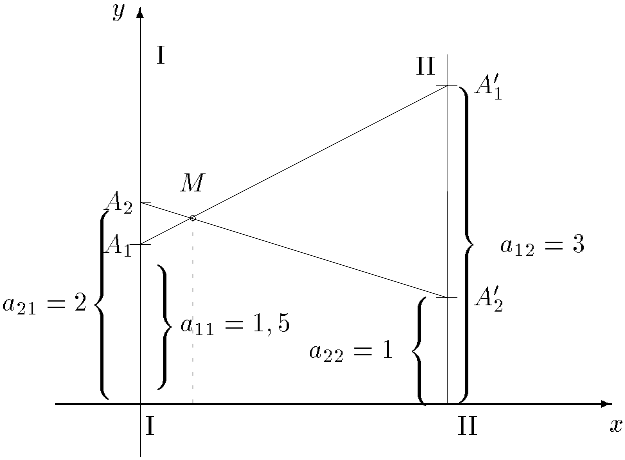


Рис. 2

Абсциса точки M визначає z_2^* оптимальної стратегії гравця B, ордината цієї точки – ціну гри.

Пряма A_1A_1', яка проходить через точки $(0; 1,5)$ і $(1; 3)$, має рівняння

$$y = 1,5x + 1,5,$$

а пряма A_2A_2', яка проходить через точки $(0; 2)$ і $(1; 1)$ – рівняння

$$y = -x + 2.$$

Координати точки їхнього перетину M задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 1,5x + 1,5, \\ y = -x + 2; \end{cases}$$

тобто $x = 0,2$, $y = 1,8$. Звідси випливає, що $z_2^* = 0,2$, $z_1^* = 1 - 0,2 = 0,8$; оптимальна стратегія $Z^* = (0,8; 0,2)$, ціна гри $v = 1,8$. ▶

Зауваження. Як правило, задачі теорії ігор, що моделюють реальні ситуації, мають платіжні матриці великого розміру. Тому виникає необхідність зменшити розмір заданої матриці. Це можна зробити, якщо вилучити стратегії, про які наперед відомо, що вони невигідні або повторюють одна одну. Стратегії, яким відповідають однакові значення елементів платіжної матриці, тобто однакові рядки (стовпчики), називаються **дублюючими**. Якщо всі елементи p-го рядка (стовпчика) платіжної матриці більші (менші) відповідних елементів q-го рядка (стовпчика), то кажуть, що p-та стратегія гравця A (гравця B) є **домінуючою** над q-ою стратегією.

Для спрощення розрахунків дублюючі та ті стратегії, для яких існують домінуючі, вилучають з платіжної матриці.

Імовірностям чистих стратегій, номери яких відповідають номерам опущених рядків (стовпчиків) платіжної матриці, надають нульових значень.

При розв'язуванні довільної скінченної гри з матрицею розміру $m \times n$ зручно дотримуватись певних правил.

1) Виключити з платіжної матриці явно невигідні иа дублюючі стратегії.

2) Знайти нижню і верхню ціни гри і перевірити, чи має гра сідлову точку. Якщо сідлова точка є, то стратегії, що їй відповідають, будуть оптимальними, а ціна збігається з верхньою (нижньою) ціною.

3) Якщо сідлова точка відсутня, то розв'язок треба шукати в мішаних стратегіях. Для ігор з матрицею розміру $m \times n$ рекомендується симплексний метод, а ігри, в яких матриця має розмір 2×2, $2 \times n$ аба $m \times 2$ зручно розв'язувати графічно.

Приклад 2. Підприємство випускає продукцію, що швидко псується, яку можна відправити зразу споживачеві (стратегія A_1), відправити на склад для зберігання (стратегія A_2) або піддати додатковій обробці для тривалого зберігання (стратегія A_3).

Споживач може придбати продукцію або негайно (стратегія B_1), або через деякий час (стратегія B_2), або після тривалого зберігання (стратегія B_3).

У випадку стратегій A_2 і A_3 підприємство має додаткові витрати на зберігання і обробку продукції, яких не буде у випадку стратегії A_1. Крім того, при стратегії A_2 можливі збитки через псування продукції, якщо споживач вибере стратегію B_2 або B_3.

Треба знайти оптимальні пропорції продукції при використанні стратегій A_1, A_2, A_3 для гарантування середнього рівня збитків, якщо матриця витрат

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

◀ Перший рядок в матриці C з точки зору рядкового гравця можна опустити, оскільки його елементи явно менші або дорівнюють відповідним елементам другого рядка. Тому матриця C набуває вигляду

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Елементи першого стовпчика більші відповідних елементів другого стовпчика, а тому його можна відкинути (з точки зору стовпчикового гравця).

Отже, матриця гри остаточно набуде вигляду

$$\approx\!\!\!\!\!\!C = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулами (1), (2) і (3) маємо

$$u_2^* = \frac{8-10}{6+8-10-10} = \frac{1}{3};$$

$$u_3^* = \frac{6-10}{6+8-10-10} = \frac{2}{3};$$

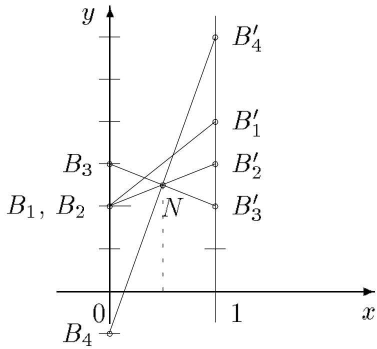
$$v = \frac{6\cdot 8 - 10\cdot 10}{6+8-10-10} = \frac{52}{6} = \frac{26}{3}.$$

Звідси випливає, що оптимальна стратегія виробника продукції $U^* = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, тобто стратегія A_1 не застосовується, $\frac{1}{3}$ продукції відправляється на склад (стратегія A_2), $\frac{2}{3}$ продукції додатково обробляється (стратегія A_3), при цьому ціна гри $v = \frac{26}{3}$. ▶

Приклад 3. Знайти розв'язок гри, яка визначена матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

◀ Платіжна матриця має розмір 2×4, а тому цю задачу розв'язуватимемо графічно.



Точка N лежить на перетині прямих B_3B_3' і B_4B_4'. Записавши рівняння цих прямих і розв'язавши відповідну систему рівнянь, знайдемо координати точки N:

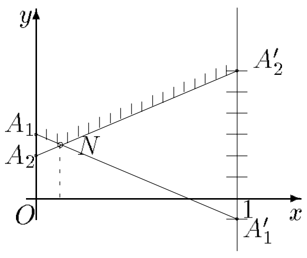
B_3B_3': $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-3}{2-3}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{-1}$, або $x+y-3=0$;

B_4B_4': $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y+1}{6+1}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{7}$, або $7x-y-1=0$;

$\begin{cases} x+y-3=0, \\ 7x-y-1=0, \end{cases}$ звідки випливає, що $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{5}{2}$.

Тому $u_2^* = x = \dfrac{1}{2}$, $u_1^* = 1 - u_2^* = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, а $v = y = \dfrac{5}{2}$.

Оскільки оптимальні стратегії гравця A відповідають третій і четвертій стратегіям гравця B, то $z_1^* = 0$, $z_2^* = 0$. Тому досить розглянути третю і четверту стратегії гравця B.



Маємо

A_1A_1': $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{-1-3}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{-4}$, або $4x + y - 3 = 0$;

A_2A_2': $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{6-2}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{4}$, або $4x - y + 2 = 0$. Тому маємо систему рівнянь $\begin{cases} 4x + y - 3 = 0, \\ 4x - y + 2 = 0, \end{cases}$ звідки знаходимо, що $x = \dfrac{1}{8}$, $y = \dfrac{5}{2}$.

Отже, $z_4^* = x = \dfrac{1}{8}$, $z_3^* = 1 - z_4^* = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$.

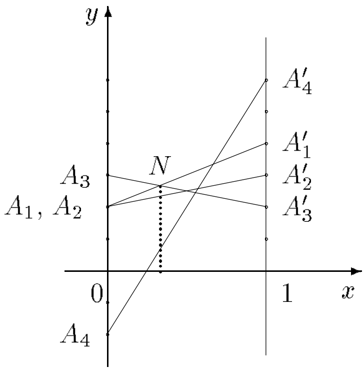
Остаточно одержуємо, що

$$U^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad Z^* = \left(0; 0; \frac{7}{8}; \frac{1}{8}\right), \quad v = \frac{5}{2}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 4. Розв'язати гру, яка визначена матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\blacktriangleleft$ Знайдемо оптимальну мішану стратегію гравця B.



Очевидно, що точка N є точкою перетину прямих A_1A_1' і A_3A_3'. Маємо

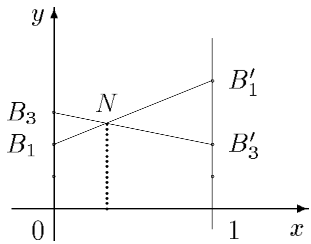
A_1A_1': $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{4-2}$, або $2x - y + 2 = 0$;

A_3A_3': $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{2-3}$, або $x + y - 3 = 0$;

$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ x + y - 3 = 0, \end{cases}$ звідки одержуємо, що $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{8}{3}$.

Тому $z_2^* = \frac{1}{3}$, $z_1^* = 1 - z_2^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $v = \frac{8}{3}$.

Для знаходження мішаної стратегії гравця A, скористаємось тим, що точці N відповідають стратегії A_1 і A_3, а тому $u_2^* = 0$ і $u_4^* = 0$.



Для знаходження u_1^* і u_3^* розв'яжемо систему рівнянь, що відповідають прямим B_1B_1' і B_3B_3':

B_1B_1': $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{4-2}$, або $2x - y + 2 = 0$;

B_3B_3': $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2-3}$, або $x + y - 3 = 0$;

$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ x + y - 3 = 0, \end{cases}$ звідки випливає, що $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{8}{3}$.

Тому $u_1^* = x = \frac{1}{3}$, $u_3^* = 1 - u_1^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Отже, мішані стратегії $U^* = \left(\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}; 0\right)$, $Z^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, а ціна гри $v = \frac{8}{3}$. ▶

Вправи

1. Побудувати матрицю гри для задачі:

1) "Двопальцева гра Морра". Кожний гравець показує іншому один або два пальці і одночасно називає число пальців, яке, на його думку, може показати противник. Якщо один з гравців вгадав правильно, він отримує суму, яка дорівнює числу пальців, яку показали обидва гравці. У всіх інших випадках нічия. Побудувати матрицю гри.

Вказівка: (i, j), $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$ – можливі стратегії першого гравця (А) та другого гравця (В).

2) У полководця, який захищає місто, є 3 дивізії, а у його супротивника – 2 дивізії. Відомо, що місто буде здано тільки в тому випадку, якщо

на одній з двох застав атакуючі дивізії будуть мати кількісну перевагу.

Вказівка: стратегії мають вигляд (r, s), де r – кількість дивізій на першій заставі, s – кількість дивізій на другій заставі.

3) Підприємці A і B конкурують на ринку збуту товарів. Кожний з них виробляє по два види товарів P_1, P_2 і Q_1, Q_2 відповідно. При цьому товари P_1 і Q_1 та товари P_2 і Q_2 мають майже однакові властивості.

Ціна одиниці товару P_1 і Q_1 становить 10 гр.од., товару P_2 – 20 гр.од., а товару Q_2 – 15 гр.од.

Ринок насичений цими товарами у такому співвідношенні: $P_1 : Q_1 = 1 : 1$, $P_2 : Q_2 = 1 : 4$. Щодня на ринку продається по 2000 одиниць товару P_1 і Q_1, 1000 одиниць товару P_2 і 4000 одиниць товару Q_2. Від продажу кожної одиниці товару P_1 і Q_1 прибуток становить 2 гр.од., а P_2 і Q_2 – 4 гр.од.

Підприємець A бажає посісти провідне становище на ринку товарів. Для цього він може скористатися такими стратегіями:

A_1 – знизити ціну виробу P_1 до 9,5 гр.од., що дає можливість витиснути з ринку товар Q_1,

A_2 – знизити ціну виробу P_2 до 19 гр.од. – у цьому випадку, якщо ціна Q_2 не зміниться, товари P_2 і Q_2 на ринку розподіляться у відношенні 2:3.

Проаналізувавши ситуацію, підприємець A дійшов висновку, що підприємець B може скористатися однією з таких стратегій:

B_1 – нічого не робити у відповідь;

B_2 – знизити ціну виробу Q_1 до 9,5 гр.од.;

B_3 – збільшити обсяг продажу виробів Q_2 на 25%, що дає його можливість повністю витиснути A з ринку товарів Q_2.

Передбачається, що у разі потреби кожен з підприємців може повністю наситити ринок товарами.

Вказівка: елементи a_{ij} матриці гри дорівнюють різниці між новим прибутком і старим прибутком при стратегіях A_i, $i \in \{1, 2\}$ і B_j, $j \in \{1, 2, 3\}$ гравців; наприклад, a_{21} (A знижує ціну на виріб P_1, а B знижує ціну на виріб Q_1 до 9,5 гр.од.) дорівнює $-2000 \cdot 20 + 2000 \cdot 1,5 = -1000$.

2. Для матричної гри, яка задана платіжною матрицею, знайти оптимальні чисті стратегії, сідлові точки і ціну гри.

1) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 & 8 & 2 & -5 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & -1 & -4 \\ 5 & 7 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & 5 & -6 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 7 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 8 & 8 & 6 \\ -2 & 3 & -8 & 5 & -2 & 5 \\ -5 & 4 & 6 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Визначити виграш першого гравця у грі з матрицею C, якщо перший гравець вибрав стратегію X, а другий – стратегію Y:

а) $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $X = (1/3; 1/6; 1/3)$, $Y = (1/2; 1/3; 1/6)$;

б) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $X = (1/3; 1/3; 1/3)$, $Y = (1/12; 5/6; 1/12)$.

4. Перевірити на оптимальність стратегії X^*, Y^* у грі з матрицею C:

а) $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $X^* = (3/5; 2/5)$, $Y^* = (4/5; 0; 1/5)$;

б) $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X^* = (1/3; 1/3; 1/3)$, $Y^* = (1/2; 0; 1/2)$.

5. Розв'язати матричну гру, задану відповідною платіжною матрицею, звівши її до пари двоїстих задач лінійного програмування:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

3). $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Торговельна фірма розробила декілька варіантів продажу товарів на майбутньому ярмарку з урахуванням змін кон'юнктури ринку та попиту споживачів. Можливі показники доходу, які залежать від різних сполучень показників, наведені в таблиці

План продажу	Величина доходу, гр.од.		
	K_1	K_2	K_3
$П_1$	8	4	2
$П_2$	2	8	4
$П_3$	1	2	8

Визначити оптимальний план продажу товарів.

Вказівка: звести задачу до пари двоїстих задач ЛП.

7. Підприємство може випускати чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4, одержуючи прибуток у залежності від попиту, який умовно можна визначити трьома різними станами B_1, B_2, B_3. Відомо, що матриця виграшів C, елементи якої a_{ij}, $i \in \{1, \dots, 4\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ визначають прибуток підприємства за умови випуску i-ої продукції при j-му попиті на неї має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальні пропорції при виробництві продукції, які б гарантували деяку середню величину прибутку за будь-якого попиту, вважаючи його невизначеним.

8. Розв'язати графічно гру, задану матрицею:

1)

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вказівка: викреслюванням невигідних стратегій, звести платіжну матрицю до вигляду $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповіді

1. Матриця гри:

1)

A \ B	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(1, 1)	0	2	−3	0
(1, 2)	−2	0	0	3
(2, 2)	0	0	0	−4
(2, 2)	0	−3	4	0

;

2)

Пол. \ Пр.	(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)
(3, 0)	1	−1	−1
(2, 1)	1	1	−1
(1, 2)	−1	1	1
(0, 3)	−1	−1	1

;

3) $\begin{pmatrix} 2000 & -1000 & -2000 \\ 2000 & 0 & -4000 \end{pmatrix}$.

2. 1) (A_2, B_5); a_{25}; $v = \alpha = \beta = 2$; 2) (A_4, B_4); (A_4, B_6); (A_5, B_4); (A_5, B_6); $a_{44} = a_{46} = a_{54} = a_{56}$; $v = \alpha = \beta = 2$; 3) (A_2, B_3), (A_5, B_3); $a_{23} = a_{53}$; $v = \alpha = \beta = 2$; 4) (A_2, B_6), (A_3, B_6); a_{26}, a_{36}; $v = \alpha = \beta = 6$.

3. а) $\dfrac{55}{18}$; б) $\dfrac{77}{36}$. **4.** а) так; б) ні.

5. 1) $U^* = \left(0; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{4}\right)$, $Z^* = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right)$, $v = \dfrac{1}{2}$; 2) $U^* = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, $Z^* = (0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$, $v = \dfrac{5}{2}$; 3) $U^* = \left(\dfrac{1}{3}; 0; \dfrac{2}{3}; 0\right)$, $Z^* = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$, $v = \dfrac{8}{3}$; 4) $U^* = \left(\dfrac{5}{11}; 0; \dfrac{6}{11}\right)$, $Z^* = \left(0; \dfrac{9}{11}; \dfrac{2}{11}\right)$, $v = \dfrac{1}{11}$;

5) $U^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $Z^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}; 0\right)$, $v = \frac{1}{5}$; 6) $U^* = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, $Z^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $v = \frac{3}{2}$.

6. Для першого гравця (торговельна фірма) $U^* = (20/45; 11/45; 14/45)$, для другого гравця (кон'юнктура ринку та попит споживачів) $Z^* = (1/14; 11/196; 5/49)$, ціна гри $v = \frac{196}{45}$.

7. $U^* = \left(\frac{2}{5}; 0; \frac{3}{5}\right)$, $Z^* = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}; 0\right)$, $v = \frac{27}{5}$, тобто підприємству доцільно випускати 40% $\left(\frac{2}{5}\right)$ продукції A_1, 60% $\left(\frac{3}{5}\right)$ – продукції A_3 і не випускати продукції A_2; при цьому оптимальний попит відповідає 20% $\left(\frac{1}{5}\right)$ стану попиту B_1 та 80% $\left(\frac{4}{5}\right)$ стану B_2.

8. 1) $U^* = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $Z^* = \left(0; 0; 0; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}0\right)$, $v = \frac{7}{2}$; 2) $U^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $Z^* = \left(0; 0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $v = \frac{5}{2}$; 3) $U^* = \left(\frac{3}{8}; 0; \frac{5}{8}\right)$, $Z^* = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$, $v = \frac{27}{4}$; 4) $U^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $Z^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}; 0\right)$, $v = \frac{1}{5}$.

Нелінійне програмування

Нелінійне програмування, охоплюючи дуже широке коло задач, є одним з основних розділів в теорії дослідження операцій. Прості лінійні моделі часто дозволяють описати з достатньою для практики точністю деякі економічні та природничі задачі. Проте складність та різноманітність соціально-економічних задач часто не дозволяють знехтувати нелінійністю складових чи робити припущення про постійність коефіцієнтів у обмеженнях. Отже, для ефективного вивчення природничих, соціально-економічних процесів потрібне застосування нелінійних економіко-математичних моделей. Велика сукупність нелінійних функцій дозволяє достатньо точно змоделювати реальні процеси.

1. Постановка та особливості задачі нелінійного програмування. Графічний метод розв'язування задачі нелінійного програмування

Задача нелінійного програмування полягає у відшуканні максимального (мінімального) значення функції

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

за умови, що її аргументи задовольняють співвідношення

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \{\leq, =, \geq\} b_i,\ i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{2}$$

де f, g_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, – деякі відомі функції n змінних (при чому хоча б одна з функцій нелінійна), а b_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, – задані числа.

Крім умов (2) можуть ще задаватися додаткові обмеження невід'ємності або цілочисловості змінних $x_1, \ldots, x_n$.

Якщо всі знаки обмежень "=" і $x_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то кажуть, що задача (1), (2) записана у канонічній формі.

1.1. Особливості задачі нелінійного програмування

Нелінійність функцій f і g_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, викликає істотну відмінність задачі (1), (2) від задачі лінійного програмування. Наприклад, в задачі лінійного програмування екстремальною є вершина многогранника допустимих розв'язків, тоді як у задачі нелінійного програмування екстремум цільової функції може досягатися як на межі області допустимих розв'язків, так і всередині неї. Область допустимих розв'язків у випадку задачі (1), (2) не обов'язково опукла, а якщо й опукла, то кількість кутових точок може бути нескінченною.

Ці особливості, які відрізняють нелінійні задачі від лінійних, значно ускладнюють їхнє розв'язування. Зокрема, якщо для задачі лінійного програмування існує ознака оптимальності допустимого розв'язку, то для задачі нелінійного програмування, де f і g_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, – довільного вигляду, такої ознаки немає. Якщо деякий план задачі лінійного програмування не оптимальний, то можна перейти до нового плану, на якому значення цільової функції ближче до оптимального, ніж на попередньому. В загальній задачі нелінійного програмування такої можливості немає. Якщо навіть на деякому етапі розв'язування одержано план, який є оптимальним, то довести це можна лише за допомогою обчислення цільової функції в усіх інших підозрюваних на екстремум точках та їхнього порівняння між собою. Довільну задачу лінійного програмування завжди можна розв'язати за допомогою універсального симплекс-методу або його модифікацій. Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв'язування, що зумовило розроблення значної кількості різних методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування. Розглянемо деякі типи нелінійних задач оптимізації та методи їхнього розв'язування.

1.2. Графічний метод розв'язування задачі нелінійного програмування

У випадку, коли функції f і g_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, залежить від двох незалежних змінних при розв'язуванні задачі (1), (2) можна застосувати графічний метод. Роблять це за такою схемою:

1) знаходять область допустимих розв'язків задачі, яка визначається співвідношеннями (2) (у випадку, коли вона порожня, задача не має розв'язку);

2) будують лінію рівня $f(x_1, x_2) = h$, $h \in \mathbb{R}$, і визначають лінію найвищого (найнижчого) рівня або переконуються в необмеженості функції f зверху (знизу) на множині допустимих розв'язків, що означає нерозв'язність задачі;

4) знаходять точку області допустимих розв'язків, через яку проходить лінія найвищого (найнижчого) рівня, і визначають у ній значення цільової функції f.

Якщо цільова функція неперервна, а множина допустимих розв'язків замкнена, обмежена і непорожня, то глобальний екстремум задачі існує.

Приклад 1. Знайти екстремальні значення функції

$$f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

◀ Побудуємо область допустимих планів (рис. 1).

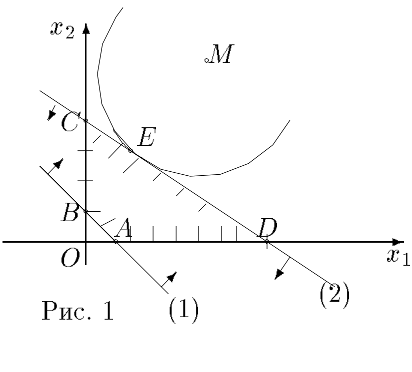


Рис. 1

Якщо розглянути лінії рівня $f = h$, $h \geq 0$, то ми дістанемо сім'ю кіл

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 = h^2$$

з центром у точці $M(4;6)$ і радіусом h.

Проводячи з точки M, як центра, кола різних радіусів, дістанемо мінімальне значення функції f у точці E. Для знаходження координат точки E, прирівняємо кутові коефіцієнти дотичної до кола і прямої (2). Продиференціювавши рівняння лінії рівня по x_1, вважаючи x_2 функцією від x_1, одержимо:

$$x_1 - 4 + (x_2 - 6)x_2' = 0, \quad x_2' = -\frac{x_1 - 4}{x_2 - 6}.$$

Кутовий коефіцієнт прямої (2) дорівнює $-\dfrac{2}{3}$, а тому маємо рівність

$$\frac{x_1 - 4}{x_2 - 6} = \frac{2}{3} \quad \text{або} \quad x_2 = \frac{3}{2}x_1.$$

Підставивши це значення x_2 в рівняння прямої (2), дістанемо, що

$$2x_1 + 3\frac{3}{2}x_1 = 12, \quad \text{або} \quad x_1 = \frac{24}{13}.$$

Тоді $x_2 = \dfrac{36}{13}$. Отже, точка E має координати $E\left(\dfrac{24}{13}; \dfrac{36}{13}\right)$, а $f_{\min} = f(E) = \left(\dfrac{24}{13} - 4\right)^2 + \left(\dfrac{36}{13} - 6\right)^2 = \dfrac{196}{13}$.

Очевидно, що функція f досягає свого найбільшого значення у точці $A(1;0)$ і $f_{\max} = f(A) = (1-4)^2 + (0-6)^2 = 45$. ▶

Приклад 2. Знайти екстремальні значення функції

$$f = x_1^2 + x_2^2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \leq 7, \\ x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

◀ Область допустимих розв'язків не є опуклою і складається з двох окремих частин, які лежать далеко одна від одної (рис. 2).

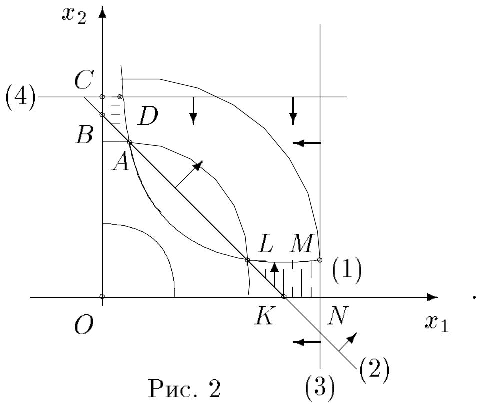


Рис. 2

Лінії рівня $x_1^2 + x_2^2 = h^2$, $h \geq 0$, – сім'я кіл з центром в початку координат. Уперше лінія рівня перетинає область допустимих розв'язків у точках $A(1;4)$ і $L(4;1)$. Це означає, що в цих точках реалізується мінімум цільової функції. Отже,

$$f_{\min} = f(A) = f(L) = 4^2 + 1^2 = 17.$$

Глобальний максимум досягається в точці $M\left(7; \dfrac{4}{7}\right)$ і тому

$$f_{\max} = f(M) = 7^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{2417}{49}. \qquad ▶$$

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

◀ Побудуємо область допустимих планів (рис. 3).

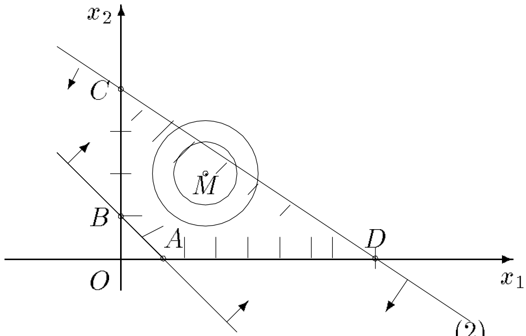


Рис. 3

Якщо розглянути лінії рівня $f = h$, $h \geq 0$, то ми дістанемо сім'ю кіл

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = h^2$$

з центром у точці $M(2;2)$ і радіусом h.

Очевидно, що точка M є точкою мінімуму, оскільки їй відповідає найменше можливе значення цільової функції

$$f_{\min} = f(M) = (2-2)^2 + (2-2)^2 = 0.$$

Як бачимо, точка, яка відповідає оптимальному плану задачі (мінімальному значенню цільової функції), може знаходитись всередині многокутника розв'язків, що для задач лінійного програмування неможливо. ▶.

Приклад 4. Розв'язати задачу

$$f = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 9;$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

◀ Побудуємо область допустимих розв'язків (рис. 4). Оскільки цільова функція лінійна, то лінії рівня – це прямі, які перпендикулярні до вектора $\vec{n} = (3; 2)$.

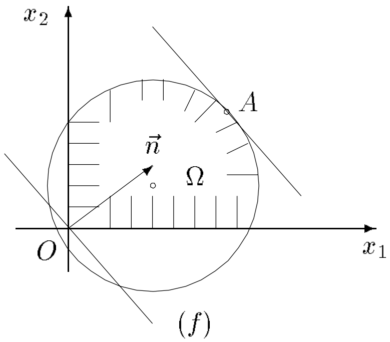


Рис. 4

Очевидно, що в точці A цільова функція f досягає максимуму. Знайдемо координати точки A, прирівнявши кутові коефіцієнти лінії рівня (f) і дотичної до кола $(x_1-2)^2+(x_2-1)^2 = 9$. Кутовий коефіцієнт цільової функції $k_1 = -\dfrac{3}{2}$, а кутовий коефіцієнт дотичної знайдемо, продиференціювавши рівняння кола по x_1, вважаючи x_2 функцією від x_1:

$$2(x_1 - 2) + 2(x_2 - 1)x_2' = 0, \quad x_2' = \frac{2 - x_1}{x_2 - 1},$$

тобто

$$k_2 = \frac{2 - x_1}{x_2 - 1}.$$

З рівності $k_1 = k_2$, одержуємо, що

$$\frac{2 - x_1}{x_2 - 1} = -\frac{3}{2}, \quad 4 - 2x_1 = 3 - 3x_2, \quad x_2 = \frac{2x_1 - 1}{3}.$$

Якщо підставити x_2 в рівняння кола $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9$, то дістанемо $(x_1 - 2)^2 + \left(\dfrac{2x_1 - 1}{3} - 1\right)^2 = 9$, $(x_1 - 2)^2 \cdot 13 = 9^2$, $x_1 = 2 + \dfrac{9}{\sqrt{13}}$, а тому $x_2 = 1 + \dfrac{6}{\sqrt{13}}$. Отже, $X^* = \left(2 + \dfrac{9}{\sqrt{13}}; 1 + \dfrac{6}{\sqrt{13}}\right)$, $f_{\max} = 3\left(2 + \dfrac{9}{\sqrt{13}}\right) + 2\left(1 + \dfrac{6}{\sqrt{13}}\right) = 8 + 3\sqrt{13}$. ▶

2. Задачі дробово-лінійного програмування

Деякі задачі нелінійного програмування можна звести до задач лінійного програмування. Прикладом такої задачі є задача **дробово-лінійного програмування**:

$$f = \frac{c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_0}{d_1x_1 + \ldots + d_nx_n + d_0} \to \text{extr}; \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \,\{\leq, =, \geq\}\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \,\{\leq, =, \geq\}\, b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \,\{\leq, =, \geq\}\, b_m; \end{array} \right. \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3}$$

Якщо сукупність обмежень задачі сумісна, то вона визначає опуклий многогранник розв'язків Ω.

Для зручності покладемо

$$\varphi_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0,$$

$$\varphi_2 = d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n + d_0$$

і припустимо, що $\varphi_2(x) \neq 0$, $x \in \Omega$.

Не порушуючи загальності, можна вважати знаменник додатним, тобто $\varphi_2(x) > 0$, $x \in \Omega$, оскільки у випадку від'ємності φ_2 знак мінус можна віднести до чисельника. Якщо ж φ_2 на Ω може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то Ω розбивають на дві частини, на одній з яких $\varphi_2(x) > 0$, а на другій – $\varphi_2(x) < 0$ і на кожній частині розв'язують окремо задачу.

Перепишемо задачу (1) – (3) у нових змінних. Для цього введемо позначення:

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n + d_0 = \frac{1}{y_0}, \tag{4}$$

$$y_j = y_0x_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

Тоді

$$f = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \varphi_1 y_0 = (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + c_0) y_0 =$$

$$= c_1 x_1 y_0 + c_2 x_2 y_0 + \ldots c_n x_n y_0 + c_0 y_0 =$$

$$= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots c_n y_n + c_0 y_0. \qquad (6)$$

Оскільки $y_0 > 0$, то з умови (3) випливає, що

$$y_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \qquad (7)$$

Помноживши кожне з рівнянь системи обмежень (2) на y_0, і враховуючи (5), дістанемо таку систему обмежень:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n - b_1 y_0 \{\leq, =, \geq\} 0, \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n - b_2 y_0 \{\leq, =, \geq\} 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mn} y_n - b_m y_0 \{\leq, =, \geq\} 0; \end{cases} \qquad (8)$$

з тими самими знаками обмежень, що й у сисмемі (2).

З рівності (4), скориставшись позначенням (5), одержуємо додаткове обмеження

$$d_1 y_1 + d_2 y_2 + \ldots + d_n y_n + d_0 y_0 = 1. \qquad (9)$$

Отже, задача (1) – (3) у нових позначеннях матиме вигляд:

$$\tilde{f} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + c_0 y_0 \to \mathrm{extr}; \qquad (10)$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n - b_1 y_0 \{\leq, =, \geq\} 0, \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n - b_2 y_0 \{\leq, =, \geq\} 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mn} y_n - b_m y_0 \{\leq, =, \geq\} 0, \\ d_1 y_1 + d_2 y_2 + \ldots + d_n y_n + d_0 y_0 = 1; \end{cases} \qquad (11)$$

$$y_0 > 0, \quad y_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \qquad (12)$$

Задача (10) – (12) є задачею лінійного програмування і її можна розв'язати симплексним методом. Якщо знайдено оптимальний розв'язок цієї задачі $y_0^* > 0$, $y_j^* \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, який реалізує екстремум цільової функції $\tilde{f}$, то координати оптимального розв'язку задачі (1) – (3) визначаються за формулами $x_j^* = \dfrac{y_j^*}{y_0^*}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. У випадку, коли $y_0^* = 0$, задача (1) – (3) розв'язку не має, оскільки цільова функція є необмеженою на множині допустимих розв'язків. Якщо ж задача (10) – (12) має безліч розв'язків, то розглядають тільки ті, в яких $y_0^* > 0$.

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$f = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

◀ Введемо позначення

$$x_1 + 2x_2 + 1 = \frac{1}{y_0}, \quad y_j = y_0 x_j, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Тоді одержимо таку задачу лінійного програмування

$$\tilde{f} = 2y_1 - y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 - 2y_0 \leq 0, \\ 2y_1 + y_2 - 6y_0 \leq 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 = 1; \end{cases}$$

$$y_0 > 0, \ y_j \geq 0, \ j \in \{1, 2\}.$$

Подамо цю задачу в канонічному вигляді

$$\tilde{f} = 2y_1 - y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 - 2y_0 = 0, \\ 2y_1 + y_2 + y_4 - 6y_0 = 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 = 1; \end{cases}$$

$$y_0 > 0, \ y_j \geq 0, \ j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

Одержану задачу зведемо до базисної форми, виключивши, за допомогою третього рівняння, y_0 з першого та другого рівнянь:

$$\tilde{f} = 2y_1 - y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 & = 2, \\ 8y_1 + 13y_2 \quad + y_4 & = 6, \\ y_1 + 2y_2 \qquad + y_0 & = 1; \end{cases}$$

$$y_0 > 0, \quad y_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

i	Б	$C_б$	B	0	2	-1	0	0
				A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_3	0	2	0	$\boxed{3}$	2	1	0
2	A_4	0	6	0	8	13	0	1
3	A_0	0	1	1	1	2	0	0
$m+1$			0	0	-2	1	0	0
1	A_1	2	$2/3$	0	1	$2/3$	$1/3$	0
2	A_4	0	$2/3$	0	0	$23/3$	$-8/3$	1
3	A_0	0	$1/3$	1	0	$4/3$	$-1/3$	0
$m+1$			$4/3$	0	0	$7/3$	$2/3$	0

Оскільки у першій симплексній таблиці умова оптимальності не виконується, бо $\Delta_1 = -2 < 0$, то за провідний стовчик беремо другий (A_1), а за провідний рядок перший, бо

$$\theta_{01} = \min\left\{\frac{2}{3}; \frac{6}{8}; \frac{1}{1}\right\} = \frac{2}{3}.$$

У другій симплексній таблиці умова оптимальності виконується і, отже, задача розв'язана: $Y^* = \left(\frac{2}{3}; 0; 0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $f_{\max} = \frac{4}{3}$.

Врахувавши, що $y_0^* = \frac{1}{3}$, одержуємо

$$x_1^* = \frac{y_1}{y_0} = \frac{2/3}{1/3} = 2, \quad x_2^* = \frac{y_2}{y_0} = 0,$$

тобто $X^* = (2; 0)$, а $f_{\max} = \frac{4}{3}$. ▶

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$f = \frac{2x_1 - x_2 + 4x_3}{x_1 + x_2 - x_3} \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 & +2x_4 & \le 15, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & -2x_4 & \ge -4, \\ \quad x_2 + 3x_3 & -x_4 & \ge 0; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

◀ Введемо нові змінні

$$y_0 = \frac{1}{x_1 + x_2 - x_3}, \;\; y_j = y_0 x_j, \;\; j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

В області допустимих планів задачі змінна y_0 може набувати як додатних, так і від'ємних значень. При $x_1 + x_2 > x_3$ змінна $y_0 > 0$ і навпаки. Якщо позначити через Ω область допустимих розв'язків задачі, то вихідну задачу треба розв'язувати в областях $\Omega_1 = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 > x_3\} \bigcap \Omega$ і $\Omega_2 = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + +x_2 < x_3\} \bigcap \Omega$.

Розглянемо спочатку задачу у півпросторі Ω_1. Тоді у нових змінних вона набуде вигляду

$$\tilde{f} = 2y_1 - y_2 + 4y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 + 2y_4 - 15y_0 \le 0, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 - 2y_4 + 4y_0 \ge 0, \\ y_2 + 3y_3 - y_4 \ge 0, \\ y_1 + y_2 - y_3 = 1; \end{cases}$$

$$y_0 > 0, \;\; y_j \ge 0, \;\; j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

Запишемо задачу в канонічній формі

$$\tilde{f} = 2y_1 - y_2 + 4y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 + 2y_4 - 15y_0 + y_5 = 0, \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4 - 4y_0 + y_6 = 0, \\ -y_2 - 3y_3 + y_4 + y_7 = 0, \\ y_1 + y_2 - y_3 = 1; \end{cases}$$

$$y_0 > 0, \;\; y_j \ge 0, \;\; j \in \{1, \ldots, 7\}.$$

Оскільки відсутній одиничний базис, то розглянемо M-задачу, ввівши в останнє обмеження штучну змінну $y_8 \geq 0$,

$$\tilde{f} = 2y_1 - y_2 + 4y_3 - My_8 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 + 2y_4 - 15y_0 + y_5 = 0, \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4 - 4y_0 + y_6 = 0, \\ -y_2 - 3y_3 + y_4 + y_7 = 0, \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_8 = 1; \end{cases}$$

$$y_0 > 0, \ \ y_j \geq 0, \ \ j \in \{1, \ldots, 8\}.$$

i	Б	$C_б$	B	0	2	-1	4	0	0	0	0	$-M$
				A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	A_5	0	0	-15	3	-1	0	2	1	0	0	0
2	A_6	0	0	-4	-1	-2	1	2	0	1	0	0
3	A_7	0	0	0	0	-1	-3	1	0	0	1	0
4	A_8	$-M$	1	0	1	$\boxed{1}$	-1	0	0	0	0	1
$m+1$			0	0	-2	1	-4	0	0	0	0	0
$m+2$			-1	0	-1	-1	1	0	0	0	0	0
1	A_5	0	1	-15	4	0	-1	2	1	0	0	
2	A_6	0	2	-4	3	0	-1	2	0	1	0	
3	A_7	0	1	0	1	0	-4	1	0	0	1	
4	A_2	-1	1	0	1	1	-1	0	0	0	0	
$m+1$			-1	0	-1	0	-3	0	0	0	0	

У $(m+2)$-му рядку першої симплексної таблиці серед λ_i є від'ємне, а це означає, що умова оптимальності не виконується і оскільки $\max\limits_{\lambda_j<0}\{\theta_{0j}(-\lambda_j)\} = \min\limits_{\lambda_j<0}\{\theta_{0j}\lambda_j\} = \min(0 \cdot (-1); 1 \cdot (-1)) = -1$, то провідним є елемент $a_{42} = 1$.

Аналізуючи другу симплексну таблицю, бачимо, що умова оптимальності не виконується, бо $\Delta_1 = -1$ і $\Delta_3 = -3$. Більшою серед цих оцінок за абсолютною величиною є Δ_3, а це означає, що провідним є стовпчик A_3. Оскільки в цьому стовпчику всі $a_{i3} < 0, \ \ i \in \{1, \ldots, 4\}$, то задача розв'язку не має, бо цільова функція необмежена зверху. Звідси випливає, що й вихідна задача розв'язу не має.

Аналогічний результат отримуємо, якщо розглядати задачу в області Ω_2. ▶

У випадку $n = 2$ задачу (1) – (3) можна розв'язувати графічно.

Нехай маємо задачу

$$f = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_0} \to \text{extr}; \tag{13}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_m; \end{array} \right. \tag{14}$$

$$x_j \geq 0, \ j \in \{1, 2\}. \tag{15}$$

Розглянемо спочатку випадок $c_0 = d_0 = 0$. Область допустимих розв'язків є опуклою. З'ясуємо, як поводять себе лінії рівня

$$\frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} = h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно x_2, одержимо

$$x_2 = \frac{c_1x_1 - hd_1x_1}{hd_2 - c_2} = \frac{c_1 - hd_1}{hd_2 - c_2}x_1 = kx_1, \tag{16}$$

тобто це пучок прямих з центром у початку координат. При деякому фіксованому значенні h кутовий коефіцієнт k прямої також фіксований і пряма займе певне положення. Якщо змінювати значення h, то пряма $x_2 = kx_1$ буде повертатися навколо початку координат.

З'ясуємо, як поводитиме себе кутовий коефіцієнт k при монотонному зростанні h. Оскільки $\dfrac{dk}{dh} = \dfrac{c_2d_1 - c_1d_2}{(hd_2 - c_2)^2}$, то одержуємо, що ця похідна має сталий знак, і при збільшенні h кутовий коефіцієнт буде зростати або спадати, а пряма буде обертатися в один бік. Навпаки, при обертанні прямої (16) в одному напрямку функція f або зростає, або спадає. Очевидно, що коли $c_2d_1 - c_1d_2 > 0$, то f зростає при обертанні проти годинникової стрілки, а при $c_2d_1 - c_1d_2 < 0$, – за годинниковою стрілкою.

Якщо $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$, то замість рівняння (16) матимемо рівняння $x_2 - x_2^0 = k(x_1 - x_1^0)$, яке визначає прямі, що проходять через точку $O_1(x_1^0, x_2^0)$, де x_1^0 і x_2^0 знаходяться з системи

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = 0, \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_0 = 0. \end{cases}$$

Якщо точка $O_1(x_1^0, x_2^0)$ лежить всередині області допустимих планів, то задача (13) – (15) не має розв'язків.

Установивши напрямок обертання ліній рівня, знаходимо вершину многокутника, в якій функція f набуває максимального (мінімального) значення, чи встановлюємо необмеженість цільової функції f.

Інколи точок екстремуму може бути безліч. Це має місце, коли лінія рівня (f) при обертанні навколо центру пучка та при вході чи виході з області допустимих розв'язків Ω, дотикається до сторони многокутника розв'язків.

Приклад 3. Розв'язати графічно задачу з прикладу 1:

$$f = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

◀ Побудуємо область допустимих розв'язків (рис. 4).

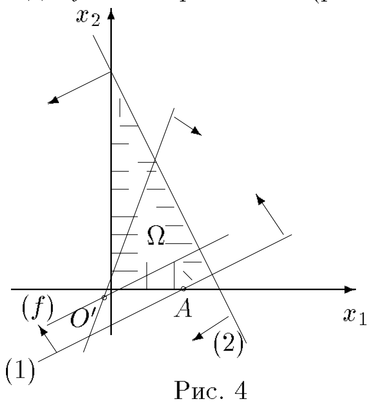


Рис. 4

Знайдемо центр пучка ліній рівня, розв'язавши систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 1 = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1, \\ x_1 + 4x_1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Звідси одержуємо, що $5x_1 = -1$, $x_1 = -\dfrac{1}{5}$, а $x_2 = -\dfrac{2}{5}$. Отже, центром пучка прямих є точка $O'\left(-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$, а лінії рівня – це прямі, які проходять через цю точку.

З'ясуємо, у якому напрямку слід рухати прямі пучка. Маємо

$$c_2d_1 - c_1d_2 = -2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -4 - 1 = -5 < 0,$$

а це означає, що рухати їх треба за годинниковою стрілкою. Очевидно, що останній раз пряма з пучка ліній рівня має з областю допустимих розв'язків Ω спільну точку $A(2;0)$. Отже, оптимальний план $X^* = (2;0)$, а $f_{\max} = \dfrac{2 \cdot 2 - 0}{2 + 2 \cdot 0 + 1} = \dfrac{4}{3}$. ▶

Приклад 4. Розв'язати задачу

$$f = \frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + 5x_2} \to \text{extr};$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 13; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

◀ Область допустимих розв'язків має вигляд (рис. 5).

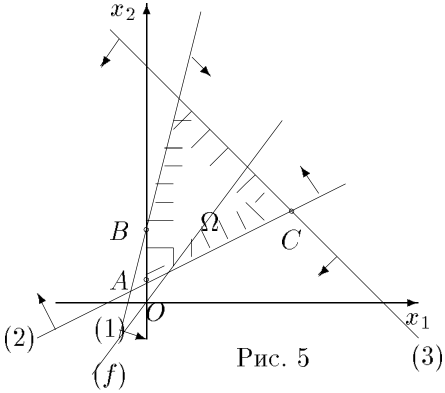


Рис. 5

Лінії рівня – це прямі, що проходять через початок координат.

Оскільки

$$c_2 d_1 - c_1 d_2 = -2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 = -7 < 0,$$

то цільова функція f зростає при обертанні ліній рівня за годинниковою стрілкою. Очевидно f досягає мінімального значення на відрізку AB, де $A(0;2)$ і $B(0;4)$ – є точками перетину відповідно прямих (2) і (1) з віссю Oy.

Отже, $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, де $X_1^* = (0;2)$, $X_2^* = (0;4)$, $\lambda \in [0;1]$, і $f_{\min} = \dfrac{0 - 2x_2}{0 + 5x_2} = -\dfrac{2}{5}$.

Максимального значення цільова функція f досягає в точці $C(8;5)$ перетину прямих (2) і (3):

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 13. \end{cases}$$

Отже, $X^* = (8;5)$, $f_{\max} = f(8;5) = \dfrac{8 - 10}{8 + 25} = -\dfrac{2}{33}$. ▶

Розв'язуючи економічні задачі, часто за критерії оптимальності беруть рівень рентабельності, собівартість, продуктивність праці тощо. Ці показники математично виражаються дробово-лінійними функціями. Так, якщо ввести позначення: x_j – кількість j-го виду продукції, c_j – собівартість (прибуток) від реалізації одиниці j-го виду продукції, d_j – витрати на виробництво одиниці j-го виду продукції, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то функції

$$f_1 = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

і

$$f_2 = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n}{d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n}$$

виражають відповідно середню собівартість однорідної продукції та рівень рентабельності виробництва.

Приклад 5. У цеху деталі одного типу виготовляються на двох конвеєрах різної потужності. Попит на деталі щомісяця в середньому становить 90000 штук. Собівартість однієї деталі з першого конвеєра становить 1,5 гр.од., а з другого – 1,6 гр.од. Кількість виготовлених деталей не повинна перевищувати максимальні можливості конвеєрів: на першому – 68000 штук, на другому – 26000 штук. Крім того, щоб виконувати план, слід на першому конвеєрі виготовляти за місяць не менше 35000 штук, а на другому конвеєрі – не менше 12000 штук деталей. Треба розподілити місячний виробіток деталей по конвеєрах так, щоб собівартість деталі була мінімальною.

◀ Нехай x_1 – кількість деталей, виготовлених за місяць на першому конвеєрі, x_2 – на другому конвеєрі. Тоді собівартість деталі виражається функцією

$$f = \frac{1,5x_1 + 1,6x_2}{x_1 + x_2}.$$

Враховуючи практичні обмеження на кількість деталей, які слід виготовити за місяць, отримуємо задачу дробово-лінійного програмування

$$f = \frac{1,5x_1 + 1,6x_2}{x_1 + x_2} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 90000, \\ 35000 \leq x_1 \leq 68000, \\ 12000 \leq x_2 \leq 35000; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 - \text{цілі}.$$

Областю допустимих розв'язків є сукупність точок з цілими координатами, які належать $ABCDE$ (рис. 6).

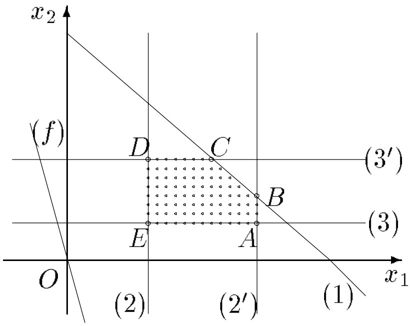


Рис. 6

Лінії рівня – це в'язка прямих, що проходять через початок координат. Оскільки

$$c_2 d_1 - c_1 d_2 = 1,6 \cdot 1 - 1,5 \cdot 1 = 0,1 > 0,$$

то цільова функція f зростає при обертанні ліній рівня проти годинникової стрілки. Очевидно f досягає мінімального значення у точці $A(68000; 12000)$, яка є точкою перетину прямих $(2')$ і (3).

Отже, $X^* = (68000; 12000)$ і $f_{\min} = 1,515$, тобто мінімальна собівартість однієї деталі 1,5150 гр.од. досягається тоді, коли за місяць на першому конвеєрі виготовляти 68000 штук, а на другому лише 12000 штук. ▶

3. Задачі нелінійного програмування без обмежень і з обмеженнями-рівностями. Метод множників Лагранжа

У цьому розділі ми розглянемо клас нелінійних задач, які розв'язуються класичними методами оптимізації.

3.1. Класична задача оптимізації

Розглянемо задачу про знаходження екстремуму функції багатьох змінних $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, коли на змінні не накладено ніяких обмежень. Таку задачу називають **задачею нелінійного програмування без обмежень**, або **класичною задачею оптимізації**.

Функція f має **локальний максимум (мінімум)** у внутрішній точці $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ множини Ω, якщо існує окіл $U(X^*) \subset \Omega$ точки X^* такий, що $f(X) \leq f(X^*)$ $(f(X) \geq f(X^*))$ для всіх $X = (x_1, \ldots, x_n) \in U(X^*)$.

Якщо функція f має в точці X^* локальний максимум або мінімум, то кажуть, що вона має в цій точці **локальний екстремум** або просто **екстремум**.

З'ясуємо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, яка є двічі неперервно диференційовною в області визначення. Відомо, що необхідною умовою екстремуму такої функції є рівність нулю частинних похідних першого порядку

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = 0. \tag{1}$$

Позначатимемо розв'язки системи (1) через $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Серед них можуть бути як точки екстремуму, так і точки, у яких функція не досягає екстремуму. Щоб визначити характер оптимальності точки X^* недостатньо частинних похідних першого порядку. Для цього треба використовувати похідні другого порядку.

Згідно з означенням локального екстремуму, для того, щоб точка X^* була оптимальною, досить виконання в околі цієї точки умови $f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(x_1^* \ldots, x_n^*)$ у випадку мінімуму або

$f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(x_1^* \ldots, x_n^*)$ у випадку максимуму. Це залежить від знаку квадратичної форми

$$d^2 f(X^*) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*). \qquad (2)$$

Для його визначення введемо матрицю, складену з частинних похідних другого порядку

$$H_f(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & .. & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

яка називається **матрицею Гессе (гессіаном)**.

Якщо матриця H_f додатно (від'ємно) визначена в точці X^*, то і квадратична форма (2) є додатно (від'ємно) визначеною. Якщо ж квадратична форма (2) у точці X^* є додатно (від'ємно) визначеною, то в цій точці функція f має локальний екстремум. При цьому, якщо $d^2 f(X^*) < 0$, то в точці X^* функція f має локальний максимум, а якщо $d^2 f(X^*) > 0$, то – локальний мінімум.

Найпростішими умовами додатної (від'ємної) визначеності матриці є **умови Рауса-Гурвіца**, які описуються за допомогою головних мінорів:

$$M_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$M_n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Якщо головні мінори матриці $H_f(X^*)$ задовольняють умови: 1) $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $M_3 > 0$, ..., $M_n > 0$, то в точці X^* функція f має мінімум; 2) $M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 < 0$, ..., $(-1)^n M_n > 0$, то в точці X^* функція f має максимум.

Зауваження. Для функції двох змінних достатні умови локального екстремуму такі:

1) якщо $M_2 > 0$, то в точці X^* функція має локальний екстремум, причому при $M_1 > 0$ – локальний максимум, а при $M_1 < 0$ – локальний мінімум;

1) якщо $M_2 < 0$, то в точці X^* функція не має екстремуму;

1) якщо $M_2 = 0$, то точка X^* може бути, а може й не бути точкою екстремуму.

Приклад 1. На малому підприємстві виготовляють продукцію двох видів. Витрати на виробництво x_1 одиниць продукції першого виду і x_2 одиниць другого виду виражаються функцією $f(x_1, x_2) = 800 - 12x_1 - 10x_2 + 0,3x_1^2 + 0,1x_2^2$ (гр.од.) Скільки продукції першого та другого виду треба виготовити, щоб витрати на її виробництво були мінімальними? Визначити прибуток від реалізації цієї продукції, якщо вартість одиниці першого виду становить 15 гр.од., а другого – 10 гр.од.

◀ Математична модель задачі така:

$$f(x_1, x_2) = 800 - 12x_1 - 10x_2 + 0,3x_1^2 + 0,1x_2^2 \to \min,$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

Знайдемо перші частинні похідні функції витрат

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -12 + 0,6x_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -10 + 0,2x_2.$$

Скориставшись необхідними умовами екстремуму, одержуємо

$$\begin{cases} -12 + 0,6x_1 = 0, \\ -10 + 0,2x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad X^* = (20; 50).$$

Оскільки $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0,6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0,2$, то матриця H_f для заданої функції має вигляд

$$H_f = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами матриці Гессе є $M_1 = 0,6 > 0$ і $M_2 = \begin{vmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,12 > 0$, а це означає, що в точці $X^* = (20; 50)$ функція f має мінімум і $f_{\min} = 430$ гр.од. Цей локальний мінімум є також і абсолютним, бо гессіан не залежить від X^*.

Обчислимо тепер прибуток від реалізації знайденої кількості продукції $\Pi(20; 50) = 15 \cdot 20 + 10 \cdot 50 - 430 = 370$ гр.од. ▶

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію

$$f = x_1 + 2x_3 + x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

◀ Для знаходженя стаціонарних точок функції запишемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 1 + x_2 - 2x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - 2x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $X^* = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; 1\right)$. Складемо гессіан для заданої функції. Маємо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -2$, а тому

$$H_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори цієї матриці $M_1 = -2 < 0$; $M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$ $= 3 > 0$; $M_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6 < 0.$

Оскільки знаки мінорів чергуються, причому знак першого мінора від'ємний, то матриця Гессе від'ємно визначена, а отже, X^* – точка локального максимуму функції f.

У цьому випадку гессіан $H_f(X^*)$ не залежить від X^*, тобто він від'ємно визначений для будь-якого $X \in \mathbb{R}^3$. Отже, точка X^* є точкою не лише локального, а й глобального максимуму функції і $f_{\max} = f(X^*) = \dfrac{2}{3} + 2$ $+\dfrac{2}{9} - \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{9} - 1 = \dfrac{4}{3}$. ▶

3.2. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа

Розглянемо задачу про дослідження на екстремум функції

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = b_m. \end{cases} \tag{3}$$

Ця задача є задачею знаходження **умовного екстремуму**. Вважатимемо, що функції f і g_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, неперервні разом зі своїми частинними похідними другого порядку в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ і $m < n$.

Нехай змінні $x_1, \ldots, x_n$ зв'язані системою рівнянь (3), де g_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, визначені й двічі неперервно диференційовні в області

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ і точка $X^* = (x_1^*; \ldots; x_n^*) \in \Omega$ така, що $g_i(x_1^*, \ldots, x_n^*) = b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Функція $f : \Omega \to \mathbb{R}$ має **умовний максимум (мінімум)** у точці X^*, якщо існує окіл $U(X^*) \subset \Omega$ точки X^* такий, що $f(X) \leq f(X^*)$ $(f(X) \geq f(X^*))$ для всіх $X = (x_1; \ldots; x_n) \in U(X^*)$, для яких $g_i(x_1, \ldots, x_n) = b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Іншими словами, умовний максимум (мінімум) – це найбільше (найменше) значення функції в точці X^* відносно не всіх точок з деякого околу точки X^*, а тільки тих з них, які зв'язані між собою умовами зв'язку (3).

Розглянемо два методи розв'язування задачі про умовний екстремум функції.

У багатьох задачах вдається виразити з умов-обмежень (3) одні змінні через інші і звести задачу (2), (3) до задачі на безумовний екстремум.

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$f = x_1x_2 + x_2x_3 \to \text{extr};$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

◀ З умов зв'язку виразимо x_1 і x_3 через x_2 і підставимо їх в цільову функцію. Тоді матимемо

$$x_1 = 2 - x_2, \;\; x_3 = 2 - x_2,$$

$$f = (2 - x_2)x_2 + (2 - x_2)x_2 = 4x_2 - 2x_2^2.$$

Отже, треба дослідити на безумовний екстремум функцію

$$\tilde{f} = 4x_2 - 2x_2^2.$$

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції. Маємо, що $\tilde{f}' \equiv 4 - 4x_2 = 0$, коли $x_2 = 1$. Оскільки $\tilde{f}''(x) = -4 < 0$, то в точці $x_2 = 1$ $\tilde{f}$ має максимум. Це означає, що вихідна задача має максимум в точці $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, причому $f_{\max} = 2$. ▶

Однак не завжди вдається з обмежень-рівностей аналітично виразити одні змінні через інші. Часто це досить важко здійснити або й неможливо.

У загальному випадку задачу (2) – (3) можна розв'язувати за допомогою методу множнинків Лагранжа. Цей метод зводить задачу умовного екстремуму (2) – (3) до задачі безумовного екстремуму для **функції Лагранжа**

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, \ldots, x_n)), \tag{4}$$

де λ_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, – невідомі **множники Лагранжа**.

Для функції L необхідна умова екстремуму записується у вигляді системи $n+m$ рівнянь відносно змінних x_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, і невизначених множників Лагранжа λ_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0, \;\; j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \equiv b_i - g_i(X) = 0, \;\; i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{5}$$

де $X = (x_1; \ldots; x_n)$.

Серед розв'язків системи (5) знаходиться точка $(X^*; \Lambda^*)$, $X^* = (x_1^*; \ldots; x_n^*)$, $\Lambda^* = (\lambda_1^*; \ldots; \lambda_n^*)$, яка реалізує екстремум функції Лагранжа (4) в необмеженій області й одночасно є точкою межі, заданою умовами (3), де досягає екстремуму цільова функція f.

Достатні умови існування локального екстремуму для функції Лагранжа первіряються за таким правилом [14]. За функцією Лагранжа будуємо матрицю Гессе, яка має блочну структуру порядку $(n+m) \times (n+m)$:

$$H_L = \left(\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P' & Q \end{array} \right),$$

де O – матриця порядку $m \times m$, що складається з нульових елементів; P – матриця порядку $m \times n$ вигляду

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix};$$

P' – транспонована матриця до матриці P порядку $n \times m$; Q – матриця порядку $n \times n$ вигляду

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & .. & \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_n} & \dots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Нехай точка (X^*, Λ^*), $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$, є розв'язком системи (5). Тоді правильні такі твердження:

1) точка X^* є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m+1)$, наступні $(n-m)$ головних мінорів матриці утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$;

2) точка X^* є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m+1)$, наступні $(n-m)$ головних мінорів матриці утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^m$.

У випадку, коли задача (2) – (3) має вигляд

$$f = f(x_1, x_2) \to \text{extr};$$

$$g(x_1, x_2) = 0,$$

функцією Лагранжа є

$$L(x_1, x_2; , \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2).$$

Система (5) складається з трьох рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \equiv \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \equiv \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv g(x_1, x_2) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Нехай $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, λ^* – довільний розв'язок системи і

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial g(X^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g(X^*)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g(X^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L(X^*, \lambda^*)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L(X^*, \lambda^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial g(X^*)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L(X^*, \lambda^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L(X^*, \lambda^*)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція f має в точці X^* умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Приклад 4. Розв'язати задачу

$$f = x_1 + 2x_2 \to \text{extr};$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 5.$$

◀ Маємо, що $g(x_1, x_2) = 5 - x_1^2 - x_2^2$. Складемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2; \lambda) = x_1 + 2x_2 + \lambda(5 - x_1^2 - x_2^2).$$

Система (6) для цієї функції має вигляд:

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x_1 = 0, \\ 2 - 2\lambda x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 5. \end{cases}$$

Вона має два розв'язки

$$x_1^* = -1, \;\; x_2^* = -2, \;\; \lambda_1^* = -\frac{1}{2}$$

та

$$x_1^* = 1, \;\; x_2^* = 2, \;\; \lambda_2^* = \frac{1}{2}.$$

Знайдемо похідні $\dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -2\lambda$ і обчислимо їх в точках $X_1^* = (-1;-2)$ при $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ та $X_2^* = (1;2)$ при $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$. Тоді одержимо, що

$$\Delta(X_1^*) = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

$$\Delta(X_2^*) = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0.$$

Отже, функція f має в точці $X_1^*(-1;-2)$ умовний мінімум $f_{\min} = -4$, а в точці $X_2^*(1;2)$ умовний максимум і $f_{\max} = 5$. ▶

Приклад 5. Розв'язати задачу

$$f = x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \text{extr};$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

◀ З другої умови зв'язку виразимо x_3 через $x_2 : x_3 = 2 - x_2$, і підставимо в цільову функцію. Тоді матимемо оптимізаційну задачу для функції двох змінних

$$\tilde{f} = x_1 x_2 + 2x_2 - x_2^2 \to \text{extr};$$

при обмеженнях $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

Функція Лагранжа для цієї задачі має вигляд

$$L(x_1, x_2; \lambda) = x_1 x_2 + 2x_2 - x_2^2 + \lambda(2 - x_1^2 - x_2^2).$$

Система (6) складається з трьох рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \equiv x_2 - 2\lambda x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \equiv x_1 + 2 - 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv 2 - x_1^2 - x_2^2 = 0; \end{cases}$$

звідки знаходимо, що $\tilde{X}^* = (1;1)$, $\lambda^* = 1/2$.

Знайдемо похідні $\dfrac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -2 - 2\lambda$ і обчислимо їх у точці $\tilde{X}^* = (1;1)$ при $\lambda^* = \dfrac{1}{2}$. Тоді одержуємо, що

$$\Delta(X^*) = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -24 < 0.$$

Отже, функція $\tilde{f}$ має в точці $\tilde{X}^*(1;1)$ умовний максимум і $\tilde{f}_{\max} = 2$. Це означає, що вихідна задача має максимум у точці $X^*(1;1;1)$, причому $f_{\max} = 2$. ▶

У загальному випадку система (5) є нелінійною і її розв'язування є досить складним. Навіть, коли знайдено точки можливого екстремуму функції L, то перевірка достатньої умови екстремуму є непростою задачею. Для перевірки точки $(X^*;\Lambda^*)$ на оптимальність треба дослідити на знак другий диференціал функції Лагранжа в цій точці

$$d^2L(X^*,\Lambda^*) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

бо $d\lambda_j = 0$, оскільки λ_i – число, $i \in \{1,\ldots,m\}$, причому dx_i і dx_j зв'язані між собою m співвідношеннями, які випливають з умов зв'язку (3). Якщо $d^2L(X^*,\Lambda^*) > 0$ ($d^2L(X^*,\Lambda^*) < 0$), то $(X^*;\Lambda^*)$ є точкою умовного мінімуму (максимуму) функції Лагранжа. При цьому екстремальній точці функції L відповідає точка умовного екстремуму функції f при умовах зв'язку (3).

Якщо ж $d^2L(X^*, \Lambda^*)$ є знакозмінною квадратичною формою, то вираз $d^2f(X^*)$, з врахуванням умов зв'язку, може бути знаковизначеною квадратичною формою, тобто не завжди точка локального екстремуму функції f при умовах зв'язку (3) відповідає точці локального екстремуму функції Лагранжа L.

Приклад 6. Знайти умовний екстремум функції $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, якщо $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 2$.

◀ Функція Лагранжа має вигляд

$$L(x_1, x_2; \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 2\right).$$

Знайдемо стаціонарні точки функції L, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \equiv 1 - \dfrac{\lambda}{x_1^2} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \equiv 1 - \dfrac{\lambda}{x_2^2} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} - 2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \lambda = x_1^2, \\ \lambda = x_2^2, \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 2, \end{cases}$$

звідки випливає, що $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $\lambda^* = 1$.

Визначимо значення других частинних похідних функції L у стаціонарній точці (1; 1; 1):

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = \frac{2\lambda}{x_1^3}, \quad \frac{\partial^2 L(1,1;1)}{\partial x_1^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L(1,1;1)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = \frac{2\lambda}{x_2^3}, \quad \frac{\partial^2 L(1,1;1)}{\partial x_2^2} = 2.$$

Тоді

$$d^2L(1,1;1) \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(dx_1)^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 +$$

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(dx_2)^2 = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2 > 0.$$

Це означає, що функція Лагранжа L має мінімум у точці $(X^*, \Lambda^*) = (1, 1; 1)$, а отже, функція f має мінімум у точці $X^* = (1; 1)$ і $f_{\min} = f(1, 1) = 2$.

Зауважимо, що dx_1 і dx_2 зв'язані між собою через умову зв'язку:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 2 = 0, \quad d\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 2\right) = 0,$$

$$\frac{1}{x_1^2}dx_1 + \frac{1}{x_2^2}dx_2 = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dx_1}{x_1^2} = -\frac{dx_2}{x_2^2}.$$

При $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ одержуємо, що $dx_1 = -dx_2$. ▶

4. Задачі опуклого та квадратичного програмування

4.1. Опуклі функції

Функція f, яка визначена на опуклій множині $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, називається **опуклою (вгнутою)**, якщо для довільних двох точок $\{X_1, X_2\} \subset \Omega$ і довільного λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, правильна нерівність

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(X_2)$$

$$(f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \geq \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)) \tag{1}$$

Функція f називається **строго опуклою** (**строго вгнутою**), якщо в умові (1) замість знаку "$\leq$"("$\geq$") стоїть знак "$<$"("$>$").

Очевидно, що коли f – опукла, то $-f$ – вгнута, і навпаки. Лінійна функція $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ є одночасно і опуклою і вгнутою, оскільки для довільних $\{X_1, X_2\} \subset \mathbb{R}^n$ і довільного λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, виконується рівність

$$C(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) = \lambda CX_1 + (1-\lambda)CX_2.$$

Наведені означення опуклих і вгнутих функцій дають одночасно і правило дослідження їх на опуклість чи вгнутість, але використовувати на практиці це, як правило, складно. У деяких частинних випадках перевірка функцій на опуклість (вгнутість) дещо спрощується.

Нехай f – двічі неперервно диференційовна функція в Ω. Складемо для неї матрицю Гессе $H_f(X)$, $X \in \Omega$.

Якщо Ω – опукла множина і $X_0 \in \Omega$, то для того, щоб функція f була строго опуклою (вгнутою) в деякому околі точки X_0, необхідно і досить, щоб у цьому околі були додатними всі головні мінори гессіана H_f (непарні головні мінори H_f від'ємні, а парні додатні). У випадку, коли умови опуклості (вгнутості) виконуються для всіх $X \in \Omega$, то функція f є строго опуклою (вгнутою) скрізь на множині Ω.

Якщо функції $f_j(X)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, опуклі (вгнуті) на множині Ω, то і функція $f(X) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(X)$ також опукла (вгнута) на Ω, якщо $\alpha_j \geq 0$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$.

Між опуклістю (вгнутістю) і досягненням функцією локального (відносного) мініміму (максимуму) є певний зв'язок.

Теорема 1 [14]. *Для того щоб в точці X_0 функція f досягала внутрішнього локального максимуму (мінімуму), досить рівності нулю всіх перших частинних похідних в цій точці і строгої вгнутості (опуклості) f в околі точки X_0.*

Теорема 2 [11, 14]. *Якщо f – строго опукла (вгнута) функція на множині Ω, то f має лише один відносний мінімум (максимум), який є одночасно й абсолютним.*

4.2. Опукле програмування

Розглянемо задачу нелінійного програмування

$$f = f(x_1, \dots, x_n) \to \max; \tag{2}$$

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \tag{3}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \tag{4}$$

де f – вгнута, а g_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, – опуклі функції, визначені на $\mathbb{R}^n$.

Якщо розглядається задача мінімізації, то цільова функція f повинна бути опуклою.

Теорема 3 (про опуклість допустимої множини розв'язків). *Якщо в задачі (2) – (4) $g_i(x)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, – опуклі функції, то множина допустимих розв'язків $\Omega = \{X : X \geq 0,\ g_i(x) \leq b_i,\ i \in \{1, \dots, m\}\}$ є опуклою.*

◀ Нехай $f_i(X) = g_i(X) - b_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Очевидно, що f_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, – опуклі як сума опуклих функцій.

Доведемо, що кожна нерівність $f_i(X) \le 0$ визначає або порожню, або опуклу множину Ω_i. Якщо Ω_i не порожня і $\{X_1, X_2\} \subset \Omega_i$, то $f_i(X_1) \le 0$, $f_i(X_2) \le 0$. Тоді згідно з опуклістю f_i, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, маємо

$$f_i(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \le \alpha_1 f_i(X_1) + \alpha_2 f_2(X_2) \le 0$$

для довільних $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 \ge 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Отже, $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in \Omega_i$. Звідси випливає, що Ω_i – опукла множина. Замкненість цієї множини очевидна.

Системі нерівностей (3) відповідає множина $\Omega = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \Omega_i$, яка є або порожньою, або опуклою і замкненою. ▶

Задачу (2) – (4) називають **задачею опуклого програмування.** Якщо Ω обмежена і замкнена, то вона має розв'язок, оскільки неперервна функція досягає на обмеженій замкненій множині найбільшого та найменшого значень. Якщо ж Ω не обмежена, то оптимальний розв'язок може і не існувати.

Задачі опуклого програмування мають важливу властивість, яка дозволяє спростити їхнє розв'язання.

Теорема 4. *Будь-який локальний максимум (мінімум) задачі опуклого програмування є також і глобальним максимумом (мінімумом).*

◀ Якщо $X^* \subset \Omega$ – точка локального максимуму (мінімуму), то існує окіл $U(X^*)$ такий, що $f(X) - f(X^*) \le 0$ (≥ 0), коли $x \in \Omega \cap U(X^*)$.

Нехай $\tilde{X}$ – точка з Ω така, що

$$f(\tilde{X}) > f(X^*) \quad (f(\tilde{X}) < f(X^*)).$$

Якщо $0 \le \alpha \le 1$, то

$$f((1-\alpha)X^* + \alpha\tilde{X}) > (1-\alpha)f(X^*) + \alpha f(\tilde{X}) > f(X^*)$$

$$(f((1-\alpha)X^* + \alpha\tilde{X}) < (1-\alpha)f(X^*) + \alpha f(\tilde{X}) < f(X^*)).$$

Оскільки при малому α маємо $(1-\alpha)X^* + \alpha\tilde{X} \in \Omega \cap U(X^*)$, то одержимо суперечність, звідки випливає, що в точці X^* функція f досягає глобального максимуму (мінімуму). ▶

Кажуть, що множина допустимих розв'язків задачі (2) – (4) задовольняє умову **регулярності** (**Слейтера**), якщо існує принаймні одна точка X^0, що належить області допустимих розв'язків Ω така, що $g_i(X^0) < b_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Функцією Лагранжа задачі опуклого програмування (2) – (4) називається функція

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(X)), \tag{5}$$

де $X = (x_1; \ldots; x_n)$, $\Lambda = (\lambda_1; \ldots; \lambda_m)$ – вектор множників Лагранжа.

Оскільки, якщо f – опукла, то $-f$ – вгнута, і навпаки, то для спрощення викладок надалі вважатимемо, що цільова функція (2) вгнута і досліджується на максимум.

Точка $(X^*; \Lambda^*) = (x_1^*; \ldots; x_n^*; \lambda_1^*; \ldots; \lambda_m^*)$ називається **сідловою точкою** функції Лагранжа, якщо

$$L(X, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda) \tag{6}$$

для будь-яких $X \geq 0$, $\Lambda \geq 0$.

Між поняттям сідлової точки функції Лагранжа (5) і розв'язком задачі опуклого програмування (2) – (4) існує взаємозв'язок, який доводиться в теоремі Куна-Таккера.

Теорема 5 (теорема Куна-Таккера). *Нехай область Ω допустимих розв'язків задачі (2) – (4) має внутрішні точки, тобто виконується умова регулярності (Слейтера). Тоді для того, щоб X^* було оптимальним розв'язком задачі (2) - (4), необхідно і досить, щоб існував такий вектор Λ^*, що $(X^*; \Lambda^*)$ є сідловою точкою функції Лагранжа (5), тобто*

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - g_i(X)) \leq$$

$$\leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - g_i(X^*)) \leq$$

$$\leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(b_i - g_i(X^*)), X \geq 0, \Lambda \geq 0. \qquad (7)$$

◀ Достатність. Нехай $(X^*; \Lambda^*)$ – сідлова точка функції Лагранжа. Тоді виконуються нерівності (7), які можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - g_i(X^*)) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(b_i - g_i(X^*)), \Lambda \geq 0; \qquad (8)$$

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - g_i(X)) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(b_i - g_i(X^*)), x \in \Omega. \quad (9)$$

Для доведення достатності треба встановити, що X^* є оптимальним розв'язком задачі (2) – (4), тобто $X^* \in \Omega$ і $f(X) \leq f(X^*)$ для довільного $X \in \Omega$.

З (8) випливає, що

$$b_i - g_i(X^*) \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \qquad (10)$$

Справді, якщо б для деякого $i = i_0$ виконувалась нерівність $b_{i_0} - g_{i_0}(X^*) < 0$. то це суперечило б обмеженості знизу виразу $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(b_i - g_i(X^*))$ при $\lambda_i = 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

З (10) одержуємо, що $X^* \in \Omega$.

Нерівність (9) правильна при довільному $\Lambda \geq 0$, а тоді при $\Lambda = 0$ маємо

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - g_i(X)) \leq f(X^*). \qquad (11)$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - g_i(X)) \geq 0$, $X \in \Omega$, то з (11) випливає, що $f(X) \leq f(X^*)$ для всіх $X \in \Omega$. Отже, X^* – оптимальний розв'язок задачі (2) – (4).

Доведення необхідності є складним, а тому ми його опустимо. Воно є в книзі [11]. ▶

Зауваження 1. Якщо умова Слейтера не виконується, то сідлова точка $(X^*; \Lambda^*)$ може не існувати. Про це свідчить наступний приклад:

$$f = x \to \max;$$

$$x^2 \leq 0.$$

Умова Слейтера не виконується, оскільки множина значень X, для яких $x^2 < 0$, порожня. Максимум досягається в точці $x = 0$. Функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, \lambda) = x - \lambda x^2.$$

Необхідною умовою мінімуму по x є умова

$$\frac{\partial L}{\partial x} \equiv 1 - \lambda x = 0.$$

При $x = 0$ не існує λ, яке задовольняє цю умову, тобто функція Лагранжа не має сідлової точки вигляду $(0; \lambda)$.

Якщо припустити, що цільова функція f і функції g_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, неперервно диференційовні, то теорема Куна-Таккера записується за допомогою аналітичних виразів, які визначають необхідні та достатні умови того, щоб точка $(X^*; \Lambda^*)$ була сідловою точкою функції Лагранжа, тобто була розв'язком задачі опуклого програмування.

Теорема 6. *Нехай в задачі опуклого програмування (2) – (4) функції f, g_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, – неперервно диференційовні. Для того, щоб точка $(X^*; \Lambda^*)$ була сідловою точкою функції Лагранжа $L(X, \Lambda)$, необхідно і досить виконання умов:*

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \leq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{12}$$

$$x_j^* \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{14}$$

$$\lambda_i^* \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{15}$$

◀ Доведемо спочатку необхідність.

Нехай $(X^*; \Lambda^*)$ – сідлова точка функції Лагранжа $L(X, \Lambda)$. Тоді виконуються нерівності (6) для всіх $X \in \Omega$ і $\Lambda \geq 0$. З першої нерівності (6) випливає, що по X функція Лагранжа має максимум в точці X^*, а з другої, що вона має мінімум по Λ в точці Λ^*.

Оскільки f вгнута, а g_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, опуклі, то функція Лагранжа L є вгнутою по X і опуклою по Λ.

Точка $(X^*; \Lambda^*)$ може бути як внутрішньою, так і точкою межі області зміни X і Λ, тому необхідною умовою екстремуму є виконання нерівностей:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{17}$$

якщо точка $(X^*; \Lambda^*)$ є внутрішньою точкою, тобто $X^* > 0$, $\Lambda^* > 0$, і

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \geq 0 \text{ при } X = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0 \text{ при } \Lambda = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{19}$$

З цих співвідношень і випливають умови (12) - (15).

Тепер доведемо достатність. Нехай виконуються умови (12) – (15). Треба довести, що точка $(X^*; \Lambda^*)$ є сідловою точкою функції Лагранжа L.

З умов (12) – (15) випливає [14], що функція Лагранжа вгнута по X і опукла по Λ для всіх $X \in \Omega$ і $\Lambda \geq 0$, а отже, L має по X максимум, а по Λ мінімум в цій області. Це означає, що існує точка

$(X^*; \Lambda^*)$, $X^* \in \Omega$, $\Lambda^* \geq 0$, у якій для всіх $X \in \Omega$ і $\Lambda \geq 0$ правильні нерівності

$$L(X^*, \Lambda) \geq L(X^*, \Lambda^*),$$

$$L(X^*, \Lambda^*) \geq L(X, \Lambda^*),$$

тобто $(X^*; \Lambda^*)$ є сідловою точкою, що й треба було довести. ▶

Зауваження 2 [14]. Для задачі мінімізації (2) – (4), де всі функції f, g_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, диференційовні й опуклі на $\mathbb{R}^n$, маємо умови, аналогічні до умов (12) – (15), але зі знаком "$\geq$" у нерівностях (13), (15).

Часто умови (12) – (15) називаються **локальними умовами Куна-Таккера**.

4.3. Квадратичне програмування

Сформульовані в попередньому пункті обмеження, які дозволяють записати необхідні та достатні умови для сідлової точки $(X^*; \Lambda^*)$ функції Лагрнжа L у вигляді співвідношень (12) – (15), задовольняє задача квадратичного програмування, яку ми розглянемо нижче.

Квадратичною формою відносно змінних $x_1, \ldots, x_n$ називається числова функція K вигляду

$$K(X) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Квадратична форма K називається **додатно (від'ємно) визначеною**, якщо $K(X) > 0$ $(K(X) < 0)$ для всіх $X \in \mathbb{R}^n$, крім $X = 0$.

Квадратична форма K називається **додатно (від'ємно) напіввизначеною**, якщо $K(X) \geq 0$ $(K(X) \leq 0)$ для довільних $X \in \mathbb{R}^n$ і, крім того, існує таке $X' = (x_1'; \ldots; x_n')$, де не всі x_i' одночасно дорівнюють нулю, що $K(X') = 0$.

Розглянемо матрицю, складену з коефіцієнтів квадратичної форми

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \; c_{ij} = c_{ji}, \; \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}.$$

Головними мінорами матриці C називаються визначники:

$$C_1 = c_{11}, \; C_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \; \dots, \; C_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо всі визначники C_1, …, C_n додатні, то квадратична форма **додатно визначена**.

Якщо в послідовності чисел 1, C_1, C_2, …, C_n знаки чергуються, то квадратична форма **від'ємно визначена**.

Якщо ранг r матриці C менший за n, то квадратична форма **додатно напіввизначена**, коли $C_1 > 0$, …, $C_r > 0$, $C_{r+1} = 0$, …, $C_n = 0$, і **від'ємно напіввизначена**, коли в послідовності 1, C_1, C_2, …, C_r знаки чергуються, а $C_{r+1} = 0$, …, $C_n = 0$.

Якщо в послідовності чисел 1, C_1, C_2, …, C_n знаки не чергуються і при цьому існують $C_i < 0$, то квадратична форма є невизначеною.

Відомо, що квадратична форма є опуклою функцією, якщо вона додатно напіввизначена, і вгнутою функцією, якщо вона від'ємно напіввизначена.

Теорема 7 [14]. *Для того щоб довільна квадратична форма була додатно (від'ємно) визначена, необхідно і досить, щоб всі корені λ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, характеристичного рівняння*

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

були додатними (від'ємними). Якщо хоча б один з цих коренів дорівнює нулю, то квадратична форма є напівдодатною (напів-від'ємною). Якщо ж корені характеристичного рівняння мають різні знаки, то квадратична форма є невизначеною.

Приклад 1. Визначити тип квадратичної форми

$$K = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2.$$

◀ Матриця C цієї квадратичної форми має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 5\lambda = 0,$$

звідки одержуємо, що $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$. Отже, квадратична форма K згідно з теоремою 6 є напівдодатною. ▶

Приклад 2. Визначити тип квадратичної форми

$$K = -2x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

◀ Матриця C цієї квадратичної форми має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо головні мінори:

$$C_1 = -2,\ C_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ C_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

Оскільки в послідовності $1, C_1, C_2, C_3$ знаки чергуються, то квадратична форма K є від'ємно визначеною. ▶

Задача нелінійного програмування

$$f = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j \to \max(\min); \qquad (20)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{21}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{22}$$

де $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j$ – від'ємно (додатно) напіввизначена квадратична форма, називається задачею **квадратичного програмування**.

Оскільки задачу на мінімум легко звести до задачі на максимум, то надалі вважатимемо, що цільова функція (20) досліджується на максимум.

Застосувавши до цієї задачі теорему Куна-Таккера, дістанемо умови для оптимального розв'язку у вигляді системи лінійних рівнянь, яку можна розв'язувати за допомогою симплексного методу.

Функція Лагранжа для задачі (20) - (22) має вигляд

$$L(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} d_jx_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right). \tag{23}$$

Якщо $(X^*; \Lambda^*)$ сідлова точка функції Лагранжа, то в цій точці виконуються локальні умови Куна-Таккера (12) – (15). Ввівши додаткові змінні v_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ і w_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, перетворимо нерівності (12) і (14) в рівності. Тоді матимемо задачу

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} + v_j = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{25}$$

$$x_j^* v_j = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{26}$$

$$\lambda_i^* w_i = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{27}$$

де

$$x_j^* \geq 0,\ v_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, n\},$$
$$\lambda_i^* \geq 0,\ w_i \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{28}$$

Отже, для розв'язання задачі квадратичного програмування (20) – (22) треба знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь (24), (25), який задовольняє умови (26), (27). Це можна зробити, наприклад, за допомогою методу штучного базису, застосованого до задачі:

$$F = -\sum_l My_l \to \max$$

за умов (24), (25), (28), врахувавши рівності (26), (27). Тут y_l – це штучні змінні, які введено в рівняння (24) і (25). Розв'язавши одержану задачу лінійного програмування, ми дістанемо розв'язок задачі квадратичного програмування (20) – (22) або доведемо, що вона розв'язку не має.

Приклад 3. Знайти максимальне значення функції

$$f = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_2 \leq 5; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, 2\}.$$

◀ Оскільки цільова функція від'ємно визначена, а обмеження лінійні, то маємо задачу квадратичного програмування. Складемо функцію Лагранжа

$$L = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2 + \lambda_1(7 - x_1 - x_2) + \lambda_2(5 - x_2)$$

і запишемо для неї локальні умови Куна-Таккера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \equiv -2x_1 + 1 - \lambda_1 \leq 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \equiv -2x_2 + 8 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0; \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} \equiv 7 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} \equiv 5 - x_2 \geq 0; \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \equiv x_1(-2x_1 + 1 - \lambda_1) = 0, \\ x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \equiv x_2(-2x_2 + 8 - \lambda_1 - \lambda_2) = 0; \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} \equiv \lambda_1(7 - x_1 - x_2) = 0, \\ \lambda_2 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} \equiv \lambda_2(5 - x_2) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Перепишемо систему нерівностей у вигляді:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 \geq 1, \\ 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 \geq 8; \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_2 \leq 5; \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 - v_1 = 1, \\ 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 8; \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 + w_1 = 7, \\ x_2 + w_2 = 5. \end{cases} \tag{35}$$

Тоді система рівностей з умов (32) і (33) набуде вигляду:

$$x_1 v_1 = 0, \quad x_2 v_2 = 0; \quad \lambda_1 w_1 = 0, \quad \lambda_2 w_2 = 0. \tag{36}$$

Отже, маємо задачу про знаходження невід’ємного розв’язку системи

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 - v_1 = 1, \\ 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 8, \\ x_1 + x_2 + w_1 = 7, \\ x_2 + w_2 = 5 \end{cases}$$

при обмеженнях (36).

Розв’язуватимемо цю задачу методом штучного базису. У перше і друге рівняння системи введемо штучні змінні y_1, y_2 і розглянемо задачу

$$F = -My_1 - My_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 - v_1 + y_1 = 1, \\ 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + y_2 = 8, \\ x_1 + x_2 + w_1 = 7, \\ x_2 + w_2 = 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0;\ v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0;$$

$$w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

i	Б	$C_б$	A_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				Ax_1	Ax_2	$A\lambda_1$	$A\lambda_2$	Av_1	Av_2	Aw_1	Aw_2	Ay_1	Ay_2
1	Ay_1	$-M$	1	$\boxed{2}$	0	1	0	-1	0	0	0	1	0
2	Ay_2	$-M$	8	0	2	1	1	0	-1	0	0	0	1
3	Aw_1	0	7	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
4	Aw_2	0	5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$m+2$			-9	-2	-2	-2	-1	1	1	0	0	0	0
1	Ax_1	0	$1/2$	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	0	0	0	$1/2$	0
2	Ay_2	$-M$	8	0	$\boxed{2}$	1	1	0	-1	0	0	0	0
3	Aw_1	0	$13/2$	0	1	$-1/2$	0	$1/2$	0	1	0	$-1/2$	1
4	Aw_2	0	5	0	1	0	0	$5/2$	0	0	1	0	0
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$m+2$			-8	1	-2	-1	-1	0	1	0	0	0	0
1	Ax_1	0	$1/2$	1	0					0	0		
2	Ax_2	0	4	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$-1/2$	0	0	0	0
3	Aw_1	0	$5/2$	0	0					1	0		
4	Aw_2	0	1	0	0					0	1		
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Отже, $x_1^* = \dfrac{1}{2}$; $x_2^* = 4$; $\lambda_1^* = 0$; $\lambda_2^* = 0$; $v_1 = 0$; $v_2 = 0$; $w_1 = 5/2$; $w_2 = 1$.

Легко перевіряємо, що при цьому виконуються рівності (36). Отже, сідловою точкою функції Лагранжа є $(X^*; \Lambda^*) = \left(\dfrac{1}{2}; 4; 0; 0\right)$.

Тому $X^* = \left(\dfrac{1}{2}; 4\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (29) і $f_{\max} = -\dfrac{1}{4} - 16 + \dfrac{1}{2} + 32 = \dfrac{65}{4}$. ▶

Приклад 4. Розв'язати задачу:

$$f = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 15x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2\}.$$

◀ Оскільки цільова функція додатно визначена, а обмеження лінійні, то маємо задачу квадратичного програмування. Зведемо її до задачі на максимум

$$\tilde{f} = -x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 15x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 13, \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Для заданої задачі квадратичного програмування складемо функцію Лагранжа і запишемо для неї локальні умови Куна-Таккера:

$$L = -x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 15x_2 + \lambda_1 1(13 - 2x_1 - 3x_2) + \lambda_2(10 - 2x_1 - x_2);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \equiv -2x_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 10 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \equiv -2x_2 - 3\lambda_1 - \lambda_2 + 15 \le 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} \equiv 13 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} \equiv 10 - 2x_1 - x_2 \ge 0; \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \equiv x_1(-2x_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 10) = 0, \\ x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \equiv x_2(-2x_2 - 3\lambda_1 - \lambda_2 + 15) = 0; \\ \lambda_1 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} \equiv \lambda_1(13 - 2x_1 - 3x_2) = 0, \\ \lambda_2 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} \equiv \lambda_2(10 - 2x_1 - x_2) = 0; \end{cases} \tag{38}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0.$$

Ввівши додаткові (балансуючі) змінні, запишемо систему (36) і обмеження (37) у вигляді

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 10, \\ 2x_2 + 3\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 15, \\ 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + w_2 = 10; \end{cases} \tag{39}$$

$$x_1 v_1 = 0,\ x_2 v_2 = 0,\ \lambda_1 w_1 = 0,\ \lambda_2 w_2 = 0, \tag{40}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0;\ v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0;\ w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0.$$

Для знаходження невід'ємного розв'язку задачі (39), (40) розглянемо таку задачу лінійного програмування:

$$F = -My_1 - My_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + y_1 = 10, \\ 2x_2 + 3\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + y_2 = 15, \\ 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + w_2 = 10; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0;\ v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0,$$

$$w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0;\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

i	Б	$C_б$	A_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				Ax_1	Ax_2	$A\lambda_1$	$A\lambda_2$	Av_1	Av_2	Aw_1	Aw_2	Ay_1	Ay_2
1	Ay_1	$-M$	10	2	0	$\boxed{2}$	2	-1	0	0	0	1	0
2	Ay_2	$-M$	15	0	2	3	1	0	-1	0	0	0	1
3	Aw_1	0	13	2	3	0	0	0	0	1	0	0	0
4	Aw_2	0	10	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$m+2$			-25	-2	-2	-5	-3	1	1	0	0	0	0
1	$A\lambda_1$	0	5	1	0	1	1	$-1/2$	0	0	0	$1/2$	0
2	Ay_2	$-M$	0	-3	$\boxed{2}$	0	-2	$3/2$	-1	0	0	$-3/2$	0
3	Aw_1	0	13	2	3	0	0	0	0	1	0	0	1
4	Aw_2	0	10	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$m+2$			0	3	-2	0	2	$-3/2$	1	0	0	$3/2$	0
1	$A\lambda_1$	0	5	1	0	1	1	$-1/2$	0	0	0		
2	Ax_2	0	0	$-3/2$	1	0	-1	$3/4$	$-1/2$	0	0		
3	Aw_1	0	13	$\boxed{13/2}$	0	0	3	$-9/4$	$3/2$	1	0		
4	Aw_2	0	10	$7/2$	0	0	1	$-3/4$	$1/2$	0	1		
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	$A\lambda_1$	0	3	0	0	1	$7/13$	$-2/3$	$-3/13$	$-2/13$	0		
2	Ax_2	0	3	0	1	0	$-4/13$	$3/13$	$-2/13$	$3/13$	0		
3	Ax_1	0	2	1	0	0	$6/13$	$-9/26$	$3/13$	$2/13$	0		
4	Aw_2	0	3	0	0	0	$-8/13$	$6/13$	$-4/13$	$-7/13$	1		
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	0	0		

У третій симплексній таблиці одержуємо оптимальний розв'язок

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 0;\ \lambda_1^* = 5,\ \lambda_2^* = 0;\ v_1 = 0,\ v_2 = 0;\ w_1 = 13,\ w_2 = 0.$$

Перевіримо, чи виконуються при цьому умови (40):

$$x_1^* v_1 = 0,\ \ x_2^* v_2 = 0;\ \ \lambda_1^* w_1 = 5 \cdot 13 \neq 0,\ \ \lambda_1^* w_1 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Отже, умови (40) не виконуються, а тому знайдемо інший розв'язок задачі (39), взявши за провідний елемент $\frac{13}{2}$. Тоді одержимо розв'язок: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 3$, $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $w_1 = 0$, $w_2 = 3$. Легко перевірити, що цей розв'язок задовольняє умови (40). Звідси випливає, що сідловою точкою є $(X^*; \Lambda^*) = (2, 3; 3, 0)$, а тому оптимальним розв'язком вихідної задачі є $X^* = (2; 3)$ і $f_{\min} = -\tilde{f}_{\max} = -52$. ▶

Вправи

1. Побудувати область невід'ємних розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x_1 - 6 \leq 0, \\ x_2 - 6 \leq 0, \\ x_1 x_2 - 6 \leq 0. \end{cases}$$

2. Побудувати область невід'ємних розв'язків нерівності

$$x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0.$$

3. Побудувати область невід'ємних розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x_1 - 7 \leq 0, \\ x_2 - 8 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 12 \leq 0. \end{cases}$$

Розглянути цільову функцію

$$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 x_2 - 10x_1 - 20x_2$$

і порівняти значення функції f у вершинах області невід'ємних розв'язків з її значенням у внутрішній точці $M(4; 6)$.

4. Розв'язати графічно задачу:

1) $f = x_1 + 2x_2 \to \text{extr};$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 25,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

2) $f = x_1 + 3x_2 \to \text{extr};$
$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 8, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 4; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

3) $f = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr};$
$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 7, \\ x_2 \le 6; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

4) $f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \text{extr};$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0;$$

5) $f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 12; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0;$$

6) $f = x_1 x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0;$$

7) $f = x_1^2 + x_2^2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 9, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

5. Знайти умовні екстремуми функції, якщо виконуються відповідні умови:

1) $f = 2x_1 x_3 - x_2 x_3;$
$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2; \end{cases}$$

2) $f = 2x_1 - x_2 + x_3;$
$$\{ \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1;$$

3) $f = x_1 x_2 + x_2 x_3;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_3 = 4; \end{cases}$$

4) $f = x_1 x_2^2;$
$$\{ \ x_1 + 2x_2 = 1.$$

6. Згідно з планом виробництва продукції підприємству необхідно виготовити 180 виробів. Ці вироби можна виготовляти двома технологічними способами. При виробництві першим способом x_1 виробів витрати становлять $4x_1 + x_1^2$ гр.од., а при виготовленні x_2 виробів другим способом

$-\ 8x_2 + x_2^2$ гр.од. Визначити, скільки виробів треба виготовити кожним способом, щоб витрати виробництва були мінімальними.

7. Фірма повинна виготовити 60 одиниць продукції, використовуючи обладнання двох видів. Якщо на обладнанні першого виду виготовити x одиниць продукції, то її собівартість становитиме $10x + x^2$ гр.од., а якщо ж таку кількість продукції виготовити на обладнанні другого виду, то собівартість становитиме $3x^2$ гр.од. Скільки одиниць продукції потрібно виготовити на обладнанні кожного виду, щоб собівартість продукції була найменшою?

8. Фірма, якій належить дві фабрики, отримала замовлення на виготовлення 100000 пар взуття. На першій взуттєвій фабриці використовують обладнання виду A, для якого виробничі витрати, пов'язанні з виготовленням x пар взуття, становлять $0,005x^{3/2}$ гр.од., а на другій фабриці використовують обладнання виду B, для якого ці витрати становлять $\sqrt{3,75 \cdot 10^{-5}} x^{3/2}$ гр.од. Як потрібно розподілити замовлення між фабриками, щоб виконати його з найменшими виробничими витратами?

9. На виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 підприємство витрачає ресурси: сировину, енергію, робочу силу. Запаси сировини й енергії становлять 46 і 32 одиниці, а резерви робочої сили не менші, ніж 24 одиниці. У таблиці наведені норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції кожного виду. Загальні витрати підприємства на виготовлення одиниці продукції виду P_1 і P_2 становлять відповідно 8 і 5 одиниць, а прибуток від реалізації одиниці готової продукції P_1 і P_2 – відповідно 5 і 2 гр.од.

Ресурси	Кількість од. ресурсів, що що витр. на вигот. од. прод. P_j	
	P_1	P_2
Сировина	10	3
Енергія	2	4
Робоча сила	5	2

Скласти такий план виробництва, щоб: 1) собівартість продукції була мінімальною; 2) рентабельність виробництва була найбільшою.

10. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування:

1) $f = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to \text{extr};$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq -13, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ 4x_1 - x_2 \leq 19; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0;$$

2) $f = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to \text{extr};$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ 3x_1 - x_2 \leq 11; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0;$$

3) $f = \frac{3x_1 + 7x_2}{x_1 + x_2} \to \text{extr};$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ 5x_1 - x_2 \geq 2; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0;$$

4) $f = \frac{3x_1 + 4x_2 + 7}{2x_1 + x_2 + 2} \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0;$$

5) $f = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ j \in \{1, 2, 3\}.$$

11. Розв'язати задачу квадратичного програмування:

1) $f = 9x_1 + 5x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 \to \max;$

$$\begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 \leq 6; \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0; \end{matrix} .$$

2) $f = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \geq -8; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0;$$

3) $f = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max;$

$$\begin{cases} 7 - x_1 \geq 0 \\ 8 - x_2 \geq 0, \\ 10 - x_1 - x_2 \geq 0, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0;$$

Відповіді

1. ОДР не є опуклою множиною. **2.** ОДР має нескінченну кількість кутових точок (вершин). **3.** $f(0;0)=0$, $f(0;8)=-32$, $f(4;8)=-72$, $f(7;5)=-57$, $f(7;0)=28$, $f(4;6)=-80$. **4.** 1) $X_1^*=(0;0)$, $f_{\min}=0$; $X_2^*=(2\sqrt{5};\sqrt{5})$, $f_{\max}=4\sqrt{5}$. 2) $X_1^*=(0;0)$, $f_{\min}=0$; $X_2^*=(2;4)$, $f_{\max}=14$. 3) $X_1^*=(1;4)$, $X_2^*=(4;1)$, $f_{\min}=17$; $X_3^*=(7;4/7)$, $f_{\max}=\dfrac{2417}{49}$; 4) $X_1^*=(8;0)$, $f_{\max}=40$; $X_2^*=(2;2)$, $f_{\min}=0$; 5) $X_1^*=(6+2\sqrt{7};6-2\sqrt{7})$, $X_2^*=(6-2\sqrt{7};6+2\sqrt{7})$, $f_{\min}=64$; 6) $X^*=(5/2;5)$, $f_{\max}=25/2$; 7) $X^*=(2;5)$, $f_{\max}=29$; **5.** 1) $X^*=(3;-1;-2)$, $f=-14$; 2) $X^*=\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}};\dfrac{\sqrt{6}}{6};-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $f=-\sqrt{6}$; 3) $X^*=(1;1;1)$, $f=2$; 4) $X_1^*=(1;0)$, $f_{\min}=0$; $X_2^*=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, $f_{\max}=\dfrac{1}{27}$.

6. $f=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2\to\min$; $x_1+x_2=180$; $X^*=(91;89)$, $f_{\min}=17278$. **7.** 35 одиниць – на обладнанні першого виду; 25 одиниць – на обладнанні другого виду; найменша собівартість – 4675 гр.од. **8.** Перша фабрика – 60000 пар взуття; друга фабрика – 40000 пар взуття; найменші витрати – 122474 гр.од.

9. 1) $X^*=(2;7)$, $f_{\min}=\dfrac{17}{3}$; 2) $X^*=(4;2)$, $f_{\max}=\dfrac{4}{7}$. **10.** 1) $X^*=(1;5)$, $f_{\min}=-\dfrac{1}{2}$; $f_{\max}=\dfrac{3}{2}$ при $X^*=(5;1)$; 2) $X_1^*=(2;3)$, $f_{\min}=\dfrac{3}{5}$; $X_2^*=(4;1)$, $f_{\max}=\dfrac{11}{5}$; 3) $X_1^*=(3;1)$, $f_{\min}=4$; $X_2^*=(2;8)$, $f_{\max}=6,2$; 4) $X^*=(0;1)$, $f_{\max}=\dfrac{11}{3}$; 5) $X^*=(2;0;2)$, $f_{\min}=-\dfrac{4}{3}$.

11. 1) $X^*=\left(\dfrac{13}{6};\dfrac{1}{6}\right)$, $f_{\max}=\dfrac{97}{9}$; 2) $X^*=(0;4)$, $f_{\max}=16$; 3) $X^*=(4;6)$, $f_{\max}=80$.

Динамічне програмування

Деякі задачі математичного програмування мають певні особливості, які дозволяють звести їхнє розв'язання до деякої сукупності дещо простіших задач. У результаті питання глобальної оптимізації функції зводиться до поетапної оптимізації проміжних цільових функцій. Динамічне програмування розглядає методи, які дозволяють за допомогою поетапної (багатокрокової) оптимізації одержати загальний оптимум. Оптимізація цього багатокрокового процесу здійснюється на підставі принципу оптимальності Беллмана. Зокрема, прикладом багатоетапного процесу господарського планування є діяльність деякого підприємства, системи підприємств, галузі, тощо, яка планується на певний проміжок часу. Цей проміжок складається з деяких періодів чи господарських років, причому наприкінці відповідного періоду підводяться підсумки діяльності і, можливо, відбувається коректування розподілу засобів на наступний період.

У широкому розумінні **під динамічним програмуванням** розуміють оптимальне керування процесами. Процес вважається керованим, якщо є можливість впливати на його хід, вибираючи відповідним чином певні параметри так, щоб оптимізувати кінцевий результат за вибраними критеріями.

1. Постановка задачі динамічного програмування. Суть обчислювального методу динамічного програмування

Як правило, методами динамічного програмування оптимізують роботу **керованих систем**, мета яких оцінюється **адитивною** або **мультиплікативною** цільовою функцією. **Адитивною** називається функція декількох змінних $f(x_1, \ldots, x_n)$ вигляду

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j). \tag{1}$$

Доданки цієї функції відповідають ефекту рішень, які приймаються на окремих етапах керованого процесу.

Мультиплікативною називається функція вигляду

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j), \tag{2}$$

де $f_j(x_j) > 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$, скрізь в області визначення.

Оскільки логарифм функції (2) є адитивною функцією, то досить обмежитися розглядом функції вигляду (1).

Розглянемо суть обчислювального методу динамічного програмування на прикладі задачі оптимізації

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max; \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \;\; a_j > 0, \;\; x_j \geq 0, \;\; j \in \{1, \dots, n\}. \tag{4}$$

Якщо всі $f_j(x_j)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, – опуклі (вгнуті), то для розв'язування можна застосувати метод множників Лагранжа. Якщо ж є багато локальних максимумів, то цей метод дає лише один з таких розв'язків. У випадку якщо треба знайти глобальний максимум, метод множників Лагранжа не застосовний.

Розглянемо метод, який забезпечує розв'язання задачі (3), (4).

Будемо інтерпретувати задану задачу як задачу оптимального вкладення деяких ресурсів S_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, зведених до однієї розмірності за допомогою коефіцієнтів x_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, в різні інвестиційні проекти (підприємства), що характеризуються функціями прибутку f_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, тобто такого розподілу обмеженого за обсягом ресурсу b, який максимізує сумарний прибуток. Вважатимемо, що поставлена задача розв'язується послідовно для кожного проекту. Якщо на першому кроці прийнято рішення про вкладення в n-ий проект x_n одиниць, то на решті кроків ми зможемо розподілити $b - a_n x_n$ одиниць ресурсу. Якщо з певних причин ми не змогли вплинути на прийняття рішення на першому кроці, то на наступних кроках природно поступати так, щоб розподіл поточного обсягу ресурсу відбувався оптимально. Це рівносильно розв'язуванню задачі

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max; \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \le b - a_n x_n,\ \ a_j > 0,\ \ x_j \ge 0,\ \ j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{6}$$

Очевидно, що максимальне значення залежить від розміру розподілюваного залишку. Якщо позначити кількість ресурсу, що залишився, через ξ, то величину (5) можна записати як функцію від ξ:

$$F_{n-1}(\xi) = \max_{x_1, \ldots, x_{n-1} : \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j x_j \le \xi} \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j), \tag{7}$$

де індекс $n-1$ вказує на кількість кроків, які залишилося зробити. Тоді сумарний доход, одержуваний як наслідок рішення, прийнятого на першому кроці й оптимальних рішень на решті кроків, дорівнюватиме

$$G_n(x_n) = f_n(x_n) + F_{n-1}(b - a_n x_n). \tag{8}$$

Якщо б ми мали можливість впливати на x_n, то для одержання максимального прибутку, треба максимізувати Ω_n по змінній x_n, тобто знайти $F_n(b)$, розв'язавши задачу

$$\max_{0 \le x_n \le \frac{b}{a_n}} G_n(x_n) = \max_{0 \le x_n \le \frac{b}{a_n}} (f_n(x_n) + F_{n-1}(b - a_n x_n)) = F_n(b). \tag{9}$$

У результаті одержуємо вираз для значення цільової функції задачі при оптимальному поетапному процесі прийняття рішення про розподіл ресурсу. Він згідно з побудовою цього процесу дорівнює глобальному максимуму цільової функції

$$\max_{x_1,\dots,x_n} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \right) = F_n(b), \tag{10}$$

тобто значенню цільової функції при одномоментному розподілі ресуру. Якщо у виразі (9) замінити значення b на ξ, а n на k, то його можна розглядати як **рекурентну формулу**, яка дозволяє послідовно обчислювати оптимальні значення цільової функції при розподілі ресурсу обсягом ξ одиниць за k кроків:

$$F_k(\xi) = \max_{0 \le x_k \le \frac{\xi}{a_k}} \left(f_k(x_k) + F_{k-1}(\xi - a_k x_k) \right), \;\; k \in \{1, \dots, n\}. \tag{11}$$

Позначимо через $\hat{x}_k(\xi)$ значення змінної x_k, при якому досягається розглядуваний максимум.

При $k = 1$ формула (11) набуває вигляду

$$F_1(\xi) = F_k(\xi) = \max_{0 \le x_1 \le \frac{\xi}{a_1}} f_1(x_1), \tag{12}$$

тобто дає можливість безпосередньо обчислити функції $F_1(\xi)$ і $\hat{x}_1(\xi)$.

Скориставшись (12) як початком обчислень, за допомогою формули (11), обчислимо послідовно $F_k(\xi)$ і $\hat{x}_k(\xi)$, $k \in \{2, \dots, n\}$. Поклавши на останньому кроці $\xi = b$, згідно з (9) знайдемо глобальний максимум функції (3), що дорівнює $F_n(b)$ і компоненту оптимального плану $x_n^* = \hat{x}_n(b)$. Одержане значення x_n^* дає можливість обчислити нерозподілений залишок на наступному кроці при оптимальному плануванні: $\xi_{n-1} = b - a_n x_n^*$, і, в свою чергу, знайти $x_{n-1}^* = \hat{x}_{n-1}(\xi_{n-1})$. Провівши послідовно потрібні обчислення, ми знайдемо всі компоненти оптимального плану.

Отже, динамічне програмування є цілеспрямованим перебором варіантів, який приводить до знаходження глобального максимуму. Рівняння (11), яке виражає оптимальне рішення на k-му кроці через рішення, які прийняті на попередніх кроках, називається

основним рекурентим співвідношенням динамічного програмування.

Слід зауважити, що описана схема розв'язування при такій загальній постановці задачі має чисто теоретичне значення, оскільки зводить обчислювальний процес до побудови функцій $x_{n-1}^* = \hat{x}_{n-1}(\xi_{n-1})$, тобто зводить вихідну задачу (3), (4) до іншої непростої задачі. У той же час при певних умовах застосування рекурентних співвідношень є досить ефективним. Зокрема, це стосується задач, які допускають табличне задання функцій $F_k(\xi)$.

Розглянемо конкретну задачу вигляду (3) – (4).

Приклад. Знайти максимум функції $f(x) = 3x_1^2 - 4x_2 + 3x_3^3$ при обмеженнях

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 8,$$

$$x_j \ge 0,\ \ x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

◀ Цільова функція задачі f є адитивною, оскільки її можна подати у вигляді суми функцій $f_j(x_j)$, кожна з яких залежить лише від однієї змінної x_j:

$$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3),$$

де

$$f_1(x_1) = 3x_1^2, \quad f_2(x_2) = -4x_2, \quad f_3(x_3) = 3x_3^3.$$

Знаходимо $F_1(\xi) = \max\limits_{0 \le x_1 \le \left[\frac{\xi}{4}\right]} f_1(x_1) = \max\limits_{0 \le x_1 \le \left[\frac{\xi}{4}\right]} 3x_1^2$. Оскільки $\xi \le 8$, то $x_1 \in \{0, 1, 2\}$. Маємо:

$$\xi = 0,\, x_1 = 0, \quad F_1(0) = f_1(0) = 0,$$

$$\xi = 1,\, x_1 = 0, \quad F_1(1) = f_1(0) = 0,$$

$$\xi = 2,\, x_1 = 0, \quad F_1(2) = f_1(0) = 0,$$

$$\xi = 3,\, x_1 = 0, \quad F_1(3) = f_1(0) = 0,$$

$$\xi = 4,\, x_1 \in \{0, 1\}, \quad F_1(4) = \max\{f_1(0); f_1(1)\} = 3,$$

$$\xi = 5,\, x_1 \in \{0, 1\}, \quad F_1(5) = \max\{f_1(0); f_1(1)\} = 3,$$

$$\xi = 6,\, x_1 \in \{0, 1\}, \quad F_1(6) = \max\{f_1(0); f_1(1)\} = 3,$$

$$\xi = 7,\, x_1 \in \{0, 1\}, \quad F_1(7) = \max\{f_1(0); f_1(1)\} = 3,$$

$$\xi = 8,\ x_1 \in \{0,1,2\}, \quad F_1(7) = \max\{f_1(0); f_1(1); f_1(2)\} = 12.$$

Тепер знайдемо $F_2(\xi) = \max\limits_{0 \le x_2 \le \left[\frac{\xi}{3}\right]} \{f_2(x_2) + F_1(\xi - 3x_2)\}$:

$$\xi = 0,\ x_2 = 0, \quad F_2(0) = \max\{f_2(0) + F_1(0)\} = \max\{0 + 0\} = 0,$$

$$\xi = 1,\ x_2 = 0, \quad F_2(1) = \max\{f_2(0) + F_1(1)\} = \max\{0 + 0\} = 0,$$

$$\xi = 2,\ x_2 = 0, \quad F_2(2) = \max\{f_2(0) + F_1(2)\} = \max\{0 + 0\} = 0,$$

$$\xi = 3,\ x_2 \in \{0,1\}, \quad F_2(3) = \max\{f_2(0) + F_1(0); f_2(1) + F_1(2)\} =$$

$$= \max\{0 + 0;\ -1 + 0\} = 0,$$

$$\xi = 4, x_2 \in \{0,1\}, \quad F_2(4) = \max\{f_2(0) + F_1(4);\ f_2(1) + F_1(1)\} = \\ = \max\{0 + 3;\ -4 + 0\} = 3,$$

$$\xi = 5, x_2 \in \{0,1\}, \quad F_2(5) = \max\{f_2(0) + F_1(5); f_2(1) + F_1(2)\} = \\ = \max\{0 + 3; -4 + 0\} = 3,$$

$$\xi = 6, x_2 \in \{0,1,2\}, \quad F_2(6) = \max\{f_2(0) + F_1(6); f_2(1) + F_1(3); f_2(2) + \\ + F_1(0)\} = \max\{0 + 3; -4 + 0; -8 + 0\} = 3,$$

$$\xi = 7, x_2 \in \{0,1,2\}, \quad F_2(7) = \max\{f_2(0) + F_1(7); f_2(1) + F_1(4); f_2(2) + \\ + F_1(1)\} = \max\{0 + 3; -4 + 3; -8 + 0\} = 3,$$

$$\xi = 8, x_2 \in \{0,1,2\}, \quad F_2(8) = \max\{f_2(0) + F_1(8); f_2(1) + F_1(5); f_2(2) + \\ + F_1(6)\} = \max\{0 + 12; -4 + 3; -8 + 3\} = 12.$$

При обчисленні $F_3(\xi)$ досить розглянути випадок $\xi = 8$. Тоді $x_3 \le \left[\dfrac{8}{2}\right] = 4$ і тому

$$F_3(8) = \max_{0 \le x_3 \le 4} \{f_3(x_3) + F_2(8 - 2x_3)\} =$$

$$= \max\{f_3(0) + F_2(8); f_3(1) + F_2(6); f_3(2) + F_2(4); f_3(3) + F_2(2);$$

$$\underline{f_3(4) + F_2(0)}\} = \max\{0 + 12;\ 3 + 3;\ 3 \cdot 2^3 + 3;\ 3 \cdot 3^3 + 0;\ \underline{3 \cdot 4^3 + 0}\} = 192.$$

Отже, $x_3^* = 4$. Тоді ми одержуємо, що $x_2^* = 0$, бо $F_2(0) = 0$, а тому $x_1^* = 0$, бо $F_1(0) = 0$.

Звідси випливає, що $X^* = (0; 0; 4)$, $\quad f_{\max} = 192$. ▶

2. Алгоритм динамічного програмування розв'язування задач, які допускають табличне задання рекурентних співвідношень

Опишемо процес розв'язування задачі

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b; \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3}$$

де змінні x_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, і параметри a_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, b є цілими числами, і, крім того, $a_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $b \geq 0$. Якщо мова йде про задачу оптимального розподілу капіталовкладень, то ці припущення реальні й їх можна посилити, вимагаючи, щоб x_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ були кратними, наприклад, деякому числу одиниць.

У відповідності зі схемою обчислювального алгоритму, описаного в попередньому параграфі, на першому кроці ми будуємо функцію

$$F_1(\xi) = \max_{0 \leq x_1 \leq \frac{\xi}{a_1}} f_1(x_1). \tag{4}$$

Оскільки $\xi \leq b$, то x_1 набуває скінченне число цілих значень від 0 до $\dfrac{b}{a_1}$. Це дозволяє, перебираючи значення $f_1(x_1)$, знайти функцію $F_1(\xi)$ і записати її у формі таблиці вигляду:

ξ	$F_1(\xi)$	$\hat{x}_1(\xi)$
0		
1		
$\ldots$		
b		

Табл. 1

Останній стовпчик табл. 1 містить значення x_1, на якому досягається оптимальний розв'язок першого кроку. Його треба запам'ятати, щоб до останнього кроку мати значення всіх компонент оптимального плану.

На наступному (другому) кроці обчислимо значення функції $F_2(\xi)$ для всіх ξ від 0 до b за формулою

$$\max\Big\{f_2(0) + F_1(\xi), f_2(1) + F_1(\xi - a_2 \cdot 1), \ \ldots,$$

$$\ldots, \ f_2\{\frac{\xi}{a_2}) + F_1(\xi - a_2\frac{\xi}{a_2})\Big\}, \tag{5}$$

де $F_1(\xi)$, $F_1(\xi - a_2 \cdot 1)$, ..., $F_1(\xi - a_2\dfrac{\xi}{a_2})$ беруть з табл. 1. За результатами обчислень формуємо таблицю значень $F_2(\xi)$, яка містить на один стовпчик більше, ніж в табл. 1, оскільки тепер необхідно запам'ятати оптимальні розв'язки першого і другого кроків, тобто $\hat{x}_1(\xi)$ і $\hat{x}_2(\xi)$.

На наступних кроках з номерами $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ здійснюються аналогічні дії, за результатами яких заповнюється табл. 2 значень $F_k(\xi)$, де $\xi \in \{0, 1, \ldots, b\}$.

На останньому n-му кроці немає необхідності складати таблицю значень функції $F_n(\xi)$, оскільки достатньо знайти лише $F_n(b) = f(\hat{x}_n(b)\}$.

ξ	$F_k(\xi)$	$\hat{x}_k(\xi)$	$\ldots$	$\hat{x}_1(\xi)$
0				
1				
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
b				

Табл. 2

Одночасно визначаємо й оптимальне значення n-ої компоненти оптимального плану $x_n^* = \hat{x}_n(b)$.

Далі, використовуючи таблицю, сформовану на попередньому кроці, знаходимо оптимальне значення решти змінних $x_{n-1}^* =$

$\hat{x}_{n-1}(b - a_n x_n^*)$, $x_{n-2}^* = \hat{x}_{n-2}(b - a_n x_n^* - a_{n-1}x_{n-1}^*)$ і т.д. або, в загальному випадку

$$x_k^* = \hat{x}_k \left(b - \sum_{j=k+1}^{n} a_j x_j^* \right), k \in \{1, \ldots, n-1\}. \tag{6}$$

Приклад. Для збільшення обсягів продукції, яка виготовляється трьома підприємствами, виділені капіталовкладення в обсязі 700 тис. гр.од. Використання i-им підприємтсвом x_i тис. гр.од. із вказаної суми забезпечує приріст випуску продукції, що визначається значеннями функцій $f_i(x_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, які наведені в таблиці

Капітало-вкладення тис. гр.од.	Приріст випуску продукції		
	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Табл. 3

Знайти розподіл капіталовкладень між підприємствами, який забезпечив би максимальне збільшення випуску продукції.

◀ Для розв'язування цієї задачі складемо рекурентні співвідношення Беллмана

$$F_1(\xi) = \max_{0 \le x_1 \le \xi} f_1(x_1),$$

$$F_2(\xi) = \max_{0 \le x_2 \le \xi} \{f_2(x_2) + F_1(\xi - x_2)\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_{n-1}(\xi) = \max_{0 \le x_{n-1} \le \xi} \{f_{n-1}(x_1) + F_{n-2}(\xi - x_{n-1})\}.$$

Тут функції $F_i(\xi)$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, визначають максимальний приріст випуску продукції при відповідних розподілах ξ тис. гр.од. капіталовкладень між підприємствами. Тому значення функції $F_n(\xi)$ обчислюється лише для $\xi = 700$, оскільки обсяг капіталовкладень, що виділяються всім $n = 3$ підприємствам, становить 700 тис. гр.од.

Розпочнемо з визначення оптимальних капіталовкладень, що виділяються для розвитку першого підприємства. Для цього знаходимо значення $F_1(\xi)$ для кожного ξ, що набуває значення 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 і 700.

Нехай $\xi = 0$, тоді $F_1(0) = 0$. Візьмемо тепер $\xi = 100$, тоді $F_1(100) = \max\{f_1(0), f_1(100)\} = \max\{0; 30\} = 30$, $\hat{x}_1 = 100$.

Аналогічно знаходимо умовно оптимальні рішення для інших значень ξ:

$$
\begin{aligned}
F_1(200) &= \max\{f_1(0), f_1(100), f_1(200)\} = \max\{0, 30, 50\} = 50, \hat{x}_1 = 200;\\
F_1(300) &= \max\{f_1(0), f_1(100), f_1(200), f_1(300)\} =\\
&= \max\{0, 30, 50, 90\} = 90, \quad \hat{x}_1 = 300;\\
F_1(400) &= \max\{f_1(0), f_1(100), f_1(200), f_1(300), f_1(400)\} =\\
&= \max\{0, 30, 50, 90, 110\} = 110, \quad \hat{x}_1 = 400;\\
F_1(500) &= \max\{f_1(0), f_1(100), f_1(200), f_1(300), f_1(400), f_1(500)\} =\\
&= \max\{0, 30, 50, 90, 110, 170\} = 170, \quad \hat{x}_1 = 500;\\
F_1(600) &= \max\{f_1(0), f_1(100), f_1(200), f_1(300), f_1(400), f_1(500), f_1(600)\} =\\
&= \max\{0, 30, 50, 90, 110, 170, 180\} = 180, \quad \hat{x}_1 = 600;\\
F_1(700) &= \max\{f_1(0), f_1(100), f_1(200), f_1(300), f_1(400), f_1(500), f_1(600),\\
f_1(700)\} &= \max\{0, 30, 50, 90, 110, 170, 180, 210\} = 210, \quad \hat{x}_1 = 700.
\end{aligned}
$$

Запишемо результати обчислень і одержані відповідні умовно оптимальні рішення у вигляді таблиці

ξ	$F_1(\xi)$	$\hat{x}_1(\xi)$	ξ	$F_1(\xi)$	$\hat{x}_1(\xi)$
0	0	0	400	110	400
100	30	100	500	170	500
200	50	200	600	180	600
300	90	300	700	210	700

.

Табл. 4

Використовуючи тепер дані таблиці 4, визначимо умовно оптимальні обсяги капіталовкладень, що виділяються другому підприємству. Маємо

$$F_2(\xi) = \max_{0 \le x_2 \le \xi} \{f_2(x_2) + F_1(\xi - x_2); F_2(0)\} = 0, \hat{x}_2 = 0;$$

$$F_2(100) = \max_{0 \le x_2 \le 100} \{f_2(x_2) + F_1(100 - x_2)\} = \max\{f_2(0) + F_1(100);$$

$$\underline{f_2(100) + F_1(0)}\} = \max\{0 + 30; \underline{50 + 0}\} = 50, \hat{x}_2 = 100;$$

$$F_2(200) = \max_{0 \le x_2 \le 200} \{f_2(x_2) + F_1(200 - x_2)\} = \max\{f_2(0) + F_1(200);$$

$$\underline{f_2(100) + F_1(100)}; f_2(200) + F_1(0)\} = \max\{0 + 50; \underline{50 + 30}; 80 + 0\} = 80,$$

$$\hat{x}_2 = 100;$$

$$F_2(300) = \max_{0 \le x_2 \le 300} \{f_2(x_2) + F_1(300 - x_2)\} = \max\{f_2(0) + F_1(300);$$

$$f_2(100) + F_1(200); \underline{f_2(200) + F_1(100)}; f_2(300) + F_1(0)\} =$$

$$= \max\{0 + 90; 50 + 50; \underline{80 + 30}; 90 + 0\} = 110, \hat{x}_2 = 200;$$

$$F_2(400) = \max_{0 \le x_2 \le 400} \{f_2(x_2) + F_1(400 - x_2)\} = \max\{f_2(0) + F_1(400);$$

$$f_2(100) + F_1(300); f_2(200) + F_1(200); f_2(300) + F_1(100); \underline{f_2(400) + F_1(0)}\} =$$

$$= \max\{0 + 110; 50 + 90; 80 + 50; 90 + 30; \underline{150 + 0}\} = 150, \hat{x}_2 = 400;$$

$$F_1(500) = \max_{0 \le x_2 \le 500} \{f_2(x_2) + F_1(500 - x_2)\} = \max\{f_2(0) + F_1(500);$$

$$f_2(100) + F_1(400); f_2(200) + F_1(300); f_2(300) + F_1(200); f_2(400) + F_1(100);$$

$$\underline{f_2(500) + F_1(0)}\} = \max\{0 + 170; 50 + 110; 80 + 90; 90 + 50; 150 + 30;$$

$$\underline{190 + 0}\} = 190, \hat{x}_2 = 500;$$

$$F_1(600) = \max_{0 \le x_2 \le 600} \{f_2(x_2) + F_1(600 - x_2)\} = \max\{f_2(0) + F_1(600);$$

$$\underline{f_2(100) + F_1(500)}; f_2(200) + F_1(400); f_2(300) + F_1(300); f_2(400) + F_1(200);$$

$$f_2(500) + F_1(100); f_2(600) + F_1(0)\} = \max\{0 + 180; \underline{50 + 170}; 80 + 110; 90+$$

$$+90; 150 + 150; 190 + 30; 210 + 0\} = 220, \hat{x}_2 = 100;$$

$$F_1(700) = \max_{0 \le x_2 \le 700} \{f_2(x_2) + F_1(700 - x_2)\} = \max\{f_2(0) + F_1(700);$$

$$f_2(100) + F_1(600); \underline{f_2(200) + F_1(500)}; f_2(300) + F_1(400); f_2(400) + F_1(300);$$

$$f_2(500) + F_1(200); f_2(600) + F_1(100); f_2(700) + F_1(0)\} =$$

$$= \max\{0 + 210; 50 + 180; \underline{80 + 170}; 90 + 110; 150 + 90;$$

$$190 + 50; 210 + 30; 220 + 0\} = 250, \hat{x}_2 = 200.$$

Одержані результати і знайдені умовно оптимальні обсяги капіталовкладень, що виділяються другому підприємству, запишемо в таблицю

ξ	$F_2(\xi)$	$\hat{x}_2(\xi)$	$\hat{x}_1(\xi)$	ξ	$F_2(\xi)$	$\hat{x}_2(\xi)$	$\hat{x}_1(\xi)$
0	0	0	0	400	150	400	0
100	50	100	0	500	190	500	0
200	80	100	100	600	220	100	500
300	110	200	100	700	250	200	500

.

Табл. 5

Тепер обчислимо значення $F_3(\xi) = \max\limits_{0 \le x_3 \le \xi} \max\{f_3(x_3) + F_2(\xi - x_3)\}$. Оскільки число підприємств $n = 3$, то проведемо обчислення лише для одного значення $\xi = 700$:

$$F_3(700) = \max_{0 \le x_3 \le 700}\{f_3(x_3) + F_2(700 - x_3)\} = \max\{f_3(0) + F_2(700);$$

$$f_3(100) + F_2(600); f_3(200) + F_2(500); f_3(300) + F_2(400); f_3(400) + F_2(300);$$

$$f_3(500) + F_2(200); \underline{f_3(600) + F_2(100)}; f_3(700) + F_2(0)\} =$$

$$= \max\{0 + 250; 40 + 220; 50 + 190; 110 + 150; 120 + 110;$$

$$180 + 80; \underline{220 + 50}; 240 + 0\} = 270, \hat{x}_2 = 600.$$

Отже, максимальний приріст випуску продукції становить 270 тис. гр.од. Це буде тоді, коли третьому підприємству виділяється 600 тис. гр.од., а першому і другому підприємствам – 100 тис. гр.од. З табл. 5 випливає, що другому підприємству треба виділити 100 тис. гр.од, а першому не виділяти жодних капіталовкладень. ▶

3. Принцип оптимальності Беллмана

Суть методу динамічного програмування полягає в заміні розв'язування вихідної багатовимірної задачі послідовністю задач меншої розмірності.

Цей метод можна застосовувати до задач, які мають властивості:

1) об'єктом дослідження є **керована система** (об'єкт) із заданими допустимими **станами** і допустимими **керуваннями**;

2) задачу можна інтерпретувати як багатокроковий процес, кожний крок якого складається з прийняття рішення про вибір одного з допустимих керувань, які викликають зміну стану системи;

3) задача повинна бути визначеною для будь-якого числа кроків і мати структуру, що не залежить від їхнього числа;

4) стан системи на кожному кроці повинен описуватися однаковим за складом набором параметрів;

5) вибір рішення (керування) на k-му кроці не повинен впливати на попередні рішення, крім необхідного перерахунку змінних. Ця властивість називається **відсутністю післядії**.

$$\boxed{\xi_1} \xrightarrow{x_1} \boxed{\xi_2} \xrightarrow{x_2} \cdots \boxed{\xi_k} \xrightarrow{x_k} \boxed{\xi_{k+1}} \xrightarrow{x_{k+1}} \cdots \boxed{\xi_n}$$

Розглянемо застосування моделі динамічного програмування в загальному випадку. Нехай є задача керування деяким об'єктом, який може перебувати в різних станах. Вважатимемо, що стан об'єкту ототожнено з деяким набором параметрів, які позначатимемо надалі ξ і називатимемо **вектором станів**. Множину цих станів позначатимемо через Y. Множину **допустимих керувань** позначимо через X. Цю множину можна вважати числовою множиною. Керуючі впливи здійснюються в дискретні моменти часу $k \in \{1, \dots, n\}$, причому керування полягає у виборі одного з керувань $x_k \in X$. **Планом** задачі або **стратегією** керування називається вектор $x = (x_1; \dots; x_{n-1})$, компоненти якого – це керування, що вибираються на кожному кроці процесу. Оскільки відсутня післядія, то між кожними двома послідовними станами об'єкту ξ_k і ξ_{k+1} існує певна функціональна залежність, яка включає також вибране керування $x_k : \xi_{k+1} = \varphi_k(x_k, \xi_k)$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Отже, задання початкового стану об'єкта $\xi_1 \in Y$ і вибір плану X однозначно визначають траєкторію поведінки об'єкта.

Ефективність керування на кожному кроці k залежить від поточного стану ξ_k, вибраного управління x_k, і кількісно оцінюється за допомогою функцій $f_k(x_k, \xi_k)$, які є складовими адитивної цільової функції, що характеризує загальну ефективність керування об'єктом. Зауважимо, що в означення функції $f_k(x_k, \xi_k)$ включається область допустимих значень x_k, і ця область, як правило, залежить від поточного стану ξ_k. **Оптимальне керування** при заданому початковому стані ξ_1 зводиться до вибору такого оптимального плану x^*, при якому досягається **максимум** суми значень f_k на відповідній траєкторії.

Основний принцип динамічного програмування полягає в тому, що на кожному кроці треба не ізольовано оптимізувати функції $f_k(x_k, \xi_k)$, а вибирати оптимальне управління x_k^* в припущенні, що всі наступні кроки є оптимальними. Формально вказаний принцип реалізується за допомогою побудови на кожному кроці k умовних оптимальних керувань $\hat{x}_k(\xi)$, $\xi \in Y$, які забезпечують найбільшу сумарну ефективність, починаючи з цього кроку, в припущенні, що поточним є стан ξ.

Позначимо через $F_k(\xi)$ максимальне значення суми функцій f_k протягом усіх кроків від k до n, яке одержується при оптимальному керуванні на заданному відрізку процесу, за умови, що об'єкт на початку k-го кроку знаходився в стані ξ. Тоді функція $F_k(\xi)$ визначається рекурентним співвідношенням:

$$F_k(\xi) = \max_{x_k}\{f_k(x_k, \xi) + F_{k+1}(\xi_{k+1})\}, k \in \{1, \ldots, n-1\}, \qquad (1)$$

де $\xi_{k+1} = \varphi_k(x_k, \xi)$.

Співвідношення (1) називається **основним рекурентним співвідношенням** динамічного програмування. Воно описує принцип динамічного програмування, який називається **принципом оптимальності Беллмана**: *яким би не був стан системи перед черговим k-им кроком, треба вибрати керування на цьому кроці так, щоб сума виграшу на цьому кроці і оптимального виграшу на всіх наступних кроках була максимальною.*

Зміст цього принципу полягає в тому, що поетапне планування багатокрокового процесу треба здійснювати так, щоб при плануванні кожного етапу враховувалась не вигода, отримана лише на цьому етапі, а загальна вигода, яка одержується по закінченню всього процесу. Саме стосовно загальної вигоди проводиться оптимальне планування.

Основне співвідношення (1) дозволяє знайти функції $F_k(\xi)$ лише в поєднанні з початковою умовою, якою у нашому випадку є рівність

$$F_n(\xi) = \max_{x_n}\{f_n(x_n, \xi)\}.$$

Підкреслимо, що сформульований вище принцип оптимальності застосовний лише для управління об'єктами, у яких вибір оптимального керування не залежить від того, як система прийшла до цього стану. Ця обставина дозволяє здійснити декомпозицію задачі, і зробити можливим її практичне розв'язання.

Недоліком методу динамічного програмування є те, що обчислення значень функції $F_k(\xi_1, \xi_k)$ вимагає перебирання великого числа точок. Цю проблему Р.Беллман назвав "прокляттям багатовимірності".

Приклад. Для розвитку двох галузей виробництва A_1 і A_2 на три роки виділено ξ коштів. Кількість коштів x, вкладених у галузь A_1, дозволяє отримати за рік прибуток $\varphi(x) = x^2$ і зменшується за цей час до величини $\psi(x) = 0,75x$, а кількість коштів $\xi - x$, вкладених у галузь A_2, – прибуток $\alpha(\xi - x) = 2(\xi - x)^2$ і зменшується до величини $\beta(\xi - x) = 0,3(\xi - x)$.

Необхідно так розподілити виділені кошти між галузями виробництва на роки планового періоду, щоб повний прибуток був максимальним.

◀ Розглянемо три етапи, співставивши кожному року етап. Очевидно, що процес є неперервним, але для зручності величини ξ і x на кожному етапі відзначатимемо індексами.

Розпочнемо знаходження оптимального розв'язку з третього етапу, на початку якого розподілу підлягає залишок ξ_2 коштів з другого етапу. Для цього знайдемо оптимальне значення x_3.

Маємо

$$f_3(x_3, \xi_2) = \varphi(x_3) + \alpha(\xi_2 - x_3) = x_3^2 + 2(\xi_2 - x_3)^2,$$

$$F_3(\xi_2) = \max_{0 \le x_3 \le \xi_2} \{x_3^2 + 2(\xi_2 - x_3)^2\} = \max_{0 \le x_3 \le \xi_2} g_1(x_3).$$

Знайдемо найбільше значення функції $g_1(t) = t^2 + 2(\xi_2 - t)^2$ на відрізку $[0; \xi_2]$. Оскільки $g'(t) = 2t - 4(\xi_2 - t)$, то, прирівнявши цю похідну до нуля, одержимо, що стаціонарною точкою є $t_0 = \dfrac{2}{3}\xi_2$. Визначимо значення функції g_1 в точках $x_3 = 0$, $x_3 = \dfrac{2}{3}\xi_2$, $x_3 = \xi_2$: $g_1(0) = 2\xi_2^2$, $g_1\left(\dfrac{2}{3}\xi_2\right) = \dfrac{4}{9}\xi_2^2 + \dfrac{2}{9}\xi_2^2 = \dfrac{2}{3}\xi_2^2$, $g_1(\xi_2) = \xi_2^2$. Очевидно, що найбільше значення цієї функції досягається в точці $x_3 = 0$. Тому $F_3(\xi_2) = 2\xi_2^2$. Це означає, що максимальний прибуток на останньому (третьому) етапі досягається лише тоді, коли на початку етапу всі кошти, які залишилися з попереднього етапу, вкласти у розвиток галузі A_2.

На другому етапі маємо

$$F_2(\xi_1) = \max_{0 \le x_2 \le \xi_1} \{f(x_2, \xi_1) + F_3(\xi_2)\} = \max_{0 \le x_2 \le \xi_1} \{x_2^2 + 2(\xi_1 - x_2)^2 + 2\xi_2^2\},$$

де ξ_2 – сума коштів, які залишаться, коли на другому етапі використано x_2 коштів у галузі A_1 і $\xi_1 - x_2$ – у галузі A_2, тобто $\xi_2 = 0,75x_2 + 0,3(\xi_1 - x_2) = 0,45x_2 + 0,3\xi_1$.

Тому

$$F_2(\xi_1) = \max_{0 \le x_2 \le \xi_1} \{x_2^2 + 2(\xi_1 - x_2)^2 + 2(0,45x_2 + 0,3\xi_1)^2\} = \max_{0 \le x_2 \le \xi_1} g_2(x_2).$$

Якщо знайти екстремальне значення функції $g_2(t)$ на відрізку $[0; \xi_1]$, то дістанемо, що стаціонарною точкою є $t_0 = \dfrac{346}{651}\xi_1$, у якій $g_2(t_0) = g_2\left(\dfrac{346}{681}\xi_1\right) \approx 1,3\xi_1^2$. На кінцях відрізка маємо $g_2(0) = 2,18\xi_1^2$, $g_2(\xi_1) = 2,125\xi_1^2$. Отже, найбільше значення досягається в точці $t = 0$. Тоді $F_2(\xi_1) = 2,18\xi_1^2$. Звідси випливає, що максимальний прибуток на другому етапі досягається тоді, коли на початку етапу всі кошти, що залишилися з попереднього, вкласти у розвиток галузі A_2.

Для першого етапу функціональне рівняння Беллмана має вигляд:

$$F_1(\xi) = \max_{0 \le x_1 \le \xi} \{g_1(x_1, \xi) + F_2(\xi_1)\} = \max_{0 \le x_1 \le \xi} \{x_1^2 + 2(\xi - x_1)^2 + 2,18\xi_1^2\},$$

де ξ_1 – кількість засобів, що залишилась від попереднього етапу. Враховуючи, що $\xi_1 = 0,75x_1 + 0,3(\xi - x_1) = 0,45x_1 + 0,3\xi$, одержимо

$$F_1(\xi) = \max_{0 \le x_1 \le \xi} \{x_1^2 + 2(\xi - x_1)^2 + 2,18(0,45x_1 + 0,3\xi)^2\} = \max_{0 \le x_1 \le \xi} g_3(x_1).$$

Можна довести, що функція $g_3(t)$ досягає найменшого значення в точці $t_0 = \dfrac{341120}{68829}\xi$ і $g_3(t_0) \approx 1,35\xi^2$. На кінцях відрізка $[0;\xi]$ маємо $g_3(0) = 2,169\xi^2$, $g_3(\xi) = 2,226\xi^2$, а тому найбільшого значення функція $g_3(t)$ досягає в точці $t = \xi$. Отже,

$$F_1(\xi) = g_3(\xi) \approx 2,23\xi^2.$$

Звідси випливає, що оптимальний прибуток на першому етапі отримаємо, коли на його початку всі наявні кошти вкладемо у розвиток галузі A_1.

Проаналізувавши проведене розв'язування, робимо висновок, що на початку першого року виділені кошти ξ необхідно вкласти в галузь A_1 і їхня кількість зменшується до $0,75\xi$. Ці кошти треба вкласти на другому етапі в галузь A_2 і їхня кількість зменшиться до величини $0,3 \cdot 0,75\xi = 0,225\xi$. На третьому етапі залишок коштів $0,225\xi$ знову треба вкласти в галузь A_2 і він зменшиться до величини $0,3 \cdot 0,225\xi = 0,0675\xi$. При такому розподілі коштів максимальний доход дорівнюватиме $2,23\xi^2$ гр. од. ▶

4. Задача послідовного прийняття рішень

Важливим класом задач, де застосування динамічного програмування достатньо ефективне є задачі послідовного прийняття рішень. Їхньою особливістю є те, що шукані змінні x_1, x_2, ..., x_k, ... повинні визначатися в строгій часовій послідовності і не повинні мінятися місцями. Як приклад розглянемо задачу про використання робочої сили.

У цій задачі розглядається деякий економічний об'єкт (фірма, магазин, фабрика і т.п.), який функціонує протягом скінченного числа періодів, що позначаються номерами j, $j \in \{1, \dots, n\}$. Кожний період характеризується нормативними потребами у певній кількості однотипних працівників m_j.

Якщо б виконавець робіт міг звільняти й приймати нових працівників без додаткових витрат, то він міг би в j-му місяці прийняти m_j працівників, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Припустимо, що роботу j-го місяця можна виконати й меншим числом працівників при понаднормовій роботі. Нехай x_j фактичне число працівників в j-му місяці. Витрати при зміні числа працюючих при переході від $(j-1)$-го місяця до j-го визначається функцією $f_j(x_j - x_{j-1})$. У залежності від знаку величини $x_j - x_{j-1}$ функції $f_j(x_j - x_{j-1})$ визначають витрати на наймання або звільнення працівників. Очевидно, $f_j(0) = 0$. Відхилення числа працівників від заданого m_j приводить до витрат $g_j(x_j - m_j)$, причому $g_j(0) = 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Вважаємо, що в початковий момент число робітників складало m_0. Цільова функція задачі f визначається співвідношенням

$$f = \sum_{j=1}^{n} (f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j)\}, \qquad (1)$$

де $x_0 = m_0$. Очевидно, що це задача з фіксованим початком x_0.

Введемо основне рекурентне співвідношення:

$$f = \min_{x_1,\dots,x_n} \{f_1(x_1 - m_0) + g_1(x_1 - m_1) +$$

$$+\sum_{j=2}^{n}(f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j));$$

$$\min_{x_1,\ldots,x_n}\sum_{j=2}^{n}(f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j))\} =$$

$$= \min_{x_2}\{(f_2(x_2 - x_1) + g_2(x_2 - m_2)\}+$$

$$+\min_{x_3,\ldots,x_n}\sum_{j=3}^{n}(f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j))\}. \qquad (2)$$

Цю задачу зручно розв'язувати у зворотному напрямку. Позначимо

$$F_n(\xi) = \min_{x_n}\{f_n(x_n - \xi) + g_n(x_n - m_n)\}, \qquad (3)$$

де $\xi = x_{n-1}$.

Основне рекурентне співвідношення має вигляд

$$F_k(\xi) = \min_{x_k}\{f_k(x_k - \xi) + g_k(x_k - m_k) + F_{k+1}(x_k)\}, \qquad (4)$$

де $F_k(\xi)$ – мінімальні витрати за місяці від k-го до n-го включно, якщо кількість працівників в $(k-1)$-му місяці дорівнює ξ.

На останньому кроці визначаємо оптимальне число працівників у перший місяць за умови, що на початку місяця їхня чисельність складала m_0.

Знайшовши x_1^*, послідовно знаходимо $x_2^* = \hat{x}_2(x_1^*)$, $x_3^* = \hat{x}_3(x_2^*)$ і т.д.

Тут розв'язування у зворотному напрямку зручне, оскільки нічого не відомо про число працівників у $(n+1)$-му місяці, якщо задано початкове число працівників m_0.

Розглянемо тепер випадок, коли крім m_0 задано m_{n+1}. Тепер шукатимемо цілі числа, які перетворюють в мінімум вираз

$$f = \sum_{j=1}^{n}(f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j)) + f_{n+1}(m_{n+1} - x_n),$$

тобто

$$\min_{x_1,\dots,x_n} f = \min_{x_n}\{f_{n+1}(m_{n+1}-x_n)+$$

$$+\min_{x_1,\dots,x_{n-1}}\sum_{j=1}^{n}(f_j(x_j-x_{j-1})+g_j(x_j-m_j))\}.$$

Оскільки відомий кінцевий стан системи m_{n+1}, то розв'язуватимемо задачу від початку до кінця.

Визначимо послідовність функцій стану

$$F_k(\xi) = \min_{x_1,\dots,x_k}\{f_{k+1}(\xi-x_k)+g_{k+1}(\xi-m_{k-1})+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}(f_j(x_j-x_{j-1})+g_j(m_j-x_j))\}, k\in\{1,\dots,n\},$$

де мінімум знаходять за цілими невід'ємними x_1 , ..., x_k. Тоді

$$F_1(\xi) = \min_{x_1}\{f_2(\xi-x_1)+g_2(\xi-m_2)+f_1(x_1-m_0)+g_1(m_1-x_1)\}.$$

Основне рекурентне співвідношення динамічного програмування

$$F_k(\xi) = \min_{x_k}\{f_{k+1}(\xi-x_k)+g_{k+1}(\xi-m_{k+1})+F_{k-1}(x_k)\}.$$

Функція $F_k(\xi)$ дає мінімальні витрати протягом перших k місяців за умови, що кількість працюючих в $(k+1)$-му місяці дорівнює ξ.

На останньому кроці при $k=n$ дістанемо співвідношення

$$F_n(m_{n+1}) = \min_{x_n}\{f_{n+1}(m_{n+1}-x_n)+F_{n-1}(x_n)\}.$$

Визначивши з цієї рівності оптимальне значення x_n^*, за таблицею попереднього $(n-1)$-го кроку знайдемо шукані значення решти змінних x_{n-1}^*, x_{n-2}^*, ..., x_1^*, підставивши у відповідні співвідношення $\xi = x_n^*$.

Отже, при використанні алгоритмів динамічного програмування, якщо задано початковий стан керованої системи, то задача розв'язується у **зворотному напрямку**, а якщо кінцевий, то – **в прямому**.

Якщо ж задано як початковий, так і кінцевий стан системи, то можна розв'язувати як в прямому, так і зворотному напрямку. Результати за обома схемами збігаються.

Приклад. Розв'язати задачу про використання працівників протягом чотирьох періодів: $j \in \{1, \ldots, 4\}$; $m_1 = 2$, $m_2 = 5$, $m_3 = 3$, $m_4 = 1$, $m_0 = 2$, якщо

$$f_j(x_j) = \begin{cases} 10(x_j - x_{j-1}), & \text{якщо} \quad x_j > x_{j-1}, \\ 7(x_{j-1} - x_j), & \text{якщо} \quad x_{j-1} > x_j, \end{cases}$$

$$f_j(0) = 0;$$

$$g_j(x_j) = \begin{cases} 8(x_j - m_j), & \text{якщо} \quad x_j > m_j, \\ 11(m_j - x_j), & \text{якщо} \quad m_j > x_j, \end{cases}$$

$$g_j(0) = 0, \ j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

◀ Оскільки задано початкове число працівників $x_0 = m_0 = 2$, то розв'язуватимемо задачу в зворотному напрямку.

Основне рекурентне співвідношення

$$F_k(\xi) = \min_{x_k}\{f_k(x_k - \xi) + g_k(x_k - m_k) + F_{k+1}(x_k)\}, \xi = x_{k-1}, k \in \{1, 2, 3\};$$

$$F_4 = \min_{x_4}\{f_4(x_4 - \xi) + g_4(x_4 - m_4)\}.$$

Нехай $f_4(x_4 - \xi) + g_4(x_4 - m_4) = \varphi_4(x_4, \xi)$.

Тоді $F_4 = \min\limits_{x_4} \varphi_4(x_4, \xi)$.

Складемо таблицю значень $\varphi_4(x_4, \xi)$:

1) $\xi = 0$; $x_4 = 0$; $\varphi_4 = f_4(0 - 0) + g_4(0 - 1) = 0 + 11(1 - 0) = 11$;
$x_4 = 1$; $\varphi_4 = f_4(1 - 0) + g_4(1 - 1) = 10(1 - 0) + 0 = 10$;
$x_4 = 2$; $\varphi_4 = f_4(2 - 0) + g_4(2 - 1) = 10(2 - 0) + 8(2 - 1) = 28$.

2) $\xi = 1$; $x_4 = 0$; $\varphi_4 = f_4(0 - 1) + g_4(0 - 1) = 7(1 - 0) + 11(1 - 0) = 18$;
$x_4 = 1$; $\varphi_4 = f_4(1 - 1) + g_4(1 - 1) = 0 + 0 = 0$.

3) $\xi = 2$; $x_4 = 0$; $\varphi_4 = f_4(0 - 2) + g_4(0 - 1) = 7(2 - 0) + 11(1 - 0) = 25$;
$x_4 = 1$; $\varphi_4 = f_4(1 - 2) + g_4(1 - 1) = 7(2 - 1) + 0 = 7$;
$x_4 = 2$; $\varphi_4 = f_4(2 - 2) + g_4(2 - 1) = 0 + 8(2 - 1) = 8$.

4) $\xi = 3$; $x_4 = 0$; $\varphi_4 = f_4(0 - 3) + g_4(0 - 1) = 7(3 - 0) + 11(1 - 0) = 32$;
$x_4 = 1$; $\varphi_4 = f_4(1 - 3) + g_4(1 - 1) = 7(3 - 1) + 0 = 14$;
$x_4 = 2$; $\varphi_4 = f_4(2 - 3) + g_4(2 - 1) = 7(3 - 2) + 8(2 - 1) = 7 + 8 = 15$.

5) $\xi = 4$; $x_4 = 0$; $\varphi_4 = f_4(0 - 4) + g_4(0 - 1) = 7(4 - 0) + 11(1 - 0) = 39$;

$x_4 = 1;\ \varphi_4 = f_4(1-4) + g_4(1-1) = 7(4-1) + 0 = 21;$
$x_4 = 2;\ \varphi_4 = f_4(2-4) + g_4(2-1) = 7(4-2) + 8(2-1) = 22.$
6) $\xi = 5;\ x_4 = 0;\ \varphi_4 = f_4(0-5) + g_4(0-1) = 7(5-0) + 11(1-0) = 46;$
$x_4 = 1;\ \varphi_4 = f_4(1-5) + g_4(1-1) = 7(5-1) + 0 = 28;$
$x_4 = 2;\ \varphi_4 = f_4(2-5) + g_4(2-1) = 7(5-2) + 8(2-1) = 29.$

ξ	x_4	φ_4	ξ	x_4	φ_4
0	0	11	3	0	32
	1	10		1	14
	2	28		2	15
1	0	18	4	0	39
	1	0		1	21
				2	22
2	0	25	5	0	46
	1	7		1	28
	2	8		2	29

Табл. 1

Тоді $F_4(\xi) = \min\limits_{x_4} \varphi_4(x_4, \xi)$ можна подати у вигляді таблиці

ξ	$F_4(\xi)$	x_4	ξ	$F_4(\xi)$	x_4
0	10	1	3	14	1
1	0	1	4	21	1
2	7	1	5	28	1

.

Табл. 2

Далі обчислимо

$$F_3(\xi) = \min_{x_3}\{f_3(x_3 - \xi) + g_3(x_3 - m_3) + F_4(x_3)\},$$

де значення $F_4(x-3)$ беремо з таблиці 2. Позначимо через $\varphi_3(x, \xi) = f_3(x_3 - \xi) + g_3(x_3 - m_3)$.

Аналогічно як і вище маємо:

1) $\xi = 0;\ x_3 = 0;\ F_3 = f_3(0-0) + g_3(0-3) + F_4(0) = 0 + 11 \cdot 3 + 10 = 43,$
$x_3 = 1;\ F_3 = f_3(1-0) + g_3(1-3) + F_4(1) = 10(1-0) + 11 \cdot 2 = 10 + 22 = \underline{32},$
$x_3 = 2;\ F_3 = f_3(2-0) + g_3(2-3) + F_4(2) = 10 \cdot 2 + 11(3-2) + 7 = 20 + 11 + 7 = 38,$

$x_3 = 3;\ F_3 = f_3(3-0) + g_3(3-3) + F_4(3) = 10 \cdot 3 + 0 \cdot 15 = 45;$

2) $\xi = 1;\ x_3 = 0;\ F_3 = f_3(0-1) + g_3(0-3) + F_4(0) = 7 \cdot 1 + 11 \cdot 3 + 10 = 50,$

$x_3 = 1;\ F_3 = f_3(1-1) + g_3(1-3) + F_4(1) = 0 + 11 \cdot 2 + 0 = \underline{22},$

$x_3 = 2;\ F_3 = f_3(2-1) + g_3(2-3) + F_4(2) = 10 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 7 = 28,$

$x_3 = 3;\ F_3 = f_3(3-1) + g_3(3-3) + F_4(3) = 10 \cdot 2 + 0 + 14 = 34;$

3) $\xi = 2;\ x_3 = 0;\ F_3 = f_3(0-2) + g_3(0-3) + F_4(0) = 7 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 10 = 57,$

$x_3 = 1;\ F_3 = f_3(1-2) + g_3(1-3) + F_4(1) = 7 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 0 = 29,$

$x_3 = 2;\ F_3 = f_3(2-2) + g_3(2-3) + F_4(2) = 0 + 11 + 7 = \underline{18},$

$x_3 = 3;\ F_3 = f_3(3-2) + g_3(3-3) + F_4(3) = 10 + 0 + 14 = 24;$

4) $\xi = 3;\ x_3 = 0;\ F_3 = f_3(0-3) + g_3(0-3) + F_4(0) = 7 \cdot 3 + 11 \cdot 3 + 10 = 64,$

$x_3 = 1;\ F_3 = f_3(1-3) + g_3(1-3) + F_4(1) = 7 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 0 = 36,$

$x_3 = 2;\ F_3 = f_3(2-3) + g_3(2-3) + F_4(2) = 7 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 7 = 25,$

$x_3 = 3;\ F_3 = f_3(3-3) + g_3(3-3) + F_4(3) = 0 + 0 + 14 = \underline{14},$

$x_3 = 4;\ F_3 = f_3(4-3) + g_3(4-3) + F_4(4) = 10 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 21 = 39;$

5) $\xi = 4;\ x_3 = 0;\ F_3 = f_3(0-4) + g_3(0-3) + F_4(0) = 7 \cdot 4 + 11 \cdot 3 + 10 = 71,$

$x_3 = 1;\ F_3 = f_3(1-4) + g_3(1-3) + F_4(1) = 7 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 0 = 43,$

$x_3 = 2;\ F_3 = f_3(2-4) + g_3(2-3) + F_4(2) = 7 \cdot 2 + 11 \cdot 1 + 7 = 32,$

$x_3 = 3;\ F_3 = f_3(3-4) + g_3(3-3) + F_4(3) = 7 \cdot 1 + 0 + 14 = \underline{21},$

$x_3 = 4;\ F_3 = f_3(4-4) + g_3(4-3) + F_4(4) = 0 + 8 + 21 = 29;$

6) $\xi = 5;\ x_3 = 0;\ F_3 = f_3(0-5) + g_3(0-3) + F_4(0) = 7 \cdot 5 + 11 \cdot 3 + 10 = 78,$

$x_3 = 1;\ F_3 = f_3(1-5) + g_3(1-3) + F_4(1) = 7 \cdot 4 + 11 \cdot 2 + 0 = 50,$

$x_3 = 2;\ F_3 = f_3(2-5) + g_3(2-3) + F_4(2) = 7 \cdot 3 + 11 \cdot 1 + 7 = 39,$

$x_3 = 3;\ F_3 = f_3(3-5) + g_3(3-3) + F_4(3) = 7 \cdot 2 + 0 + 14 = \underline{28},$

$x_3 = 4;\ F_3 = f_3(4-5) + g_3(4-3) + F_4(4) = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 21 = 36.$

Запишемо дані для F_3 у вигляді таблиці

ξ	$F_3(\xi)$	x_3	x_4	ξ	$F_3(\xi)$	x_3	x_4
0	32	1	1	3	14	3	1
1	22	1	1	4	21	3	1
2	18	2	1	5	28	3	1

Табл. 3

Для $F_2(\xi)$ маємо співвідношення

$$F_2(\xi) = \min_{x_2}\{f_2(x_2 - \xi) + g_2(x_2 - m_2) + F_3(x_2)\}.$$

Тоді:

1) $\xi = 0;\ x_2 = 0;\ F_2 = f_2(0-0) + g_2(0-5) + F_3(0) = 0 + 11 \cdot 5 + 32 = 87,$

$x_2 = 1;\ F_2 = f_2(1-0) + g_2(1-5) + F_3(1) = 10 \cdot 1 + 11 \cdot 4 + 22 = 76,$

$x_2 = 2;\ F_2 = f_2(2-0) + g_2(2-5) + F_3(2) = 10 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 18 = 71,$

$x_2 = 3;\ F_2 = f_2(3-0) + g_2(3-5) + F_3(3) = 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 14 = \underline{66},$

$x_2 = 4;\ F_2 = f_2(4-0) + g_2(4-5) + F_3(4) = 10 \cdot 4 + 11 \cdot 1 + 21 = 72;$

2) $\xi = 1;\ x_2 = 0;\ F_2 = f_2(0-1) + g_2(0-5) + F_3(0) = 7 \cdot 1 + 11 \cdot 5 + 32 = 94,$

$x_2 = 1;\ F_2 = f_2(1-1) + g_2(1-5) + F_3(1) = 0 + 11 \cdot 4 + 22 = 66,$

$x_2 = 2;\ F_2 = f_2(2-1) + g_2(2-5) + F_3(2) = 10 \cdot 1 + 11 \cdot 3 + 18 = 61,$

$x_2 = 3;\ F_2 = f_2(3-1) + g_2(3-5) + F_3(3) = 10 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 14 = \underline{56},$

$x_2 = 4;\ F_2 = f_2(4-1) + g_2(4-5) + F_3(4) = 10 \cdot 3 + 11 \cdot 1 + 21 = 62;$

3) $\xi = 2;\ x_2 = 0;\ F_2 = f_2(0-2) + g_2(0-5) + F_3(0) = 7 \cdot 2 + 11 \cdot 5 + 32 = 101,$

$x_2 = 1;\ F_2 = f_2(1-2) + g_2(1-5) + F_3(1) = 7 \cdot 1 + 11 \cdot 4 + 22 = 73,$

$x_2 = 2;\ F_2 = f_2(2-2) + g_2(2-5) + F_3(2) = 0 + 11 \cdot 3 + 18 =$
$= 51,$
$x_2 = 3;\ F_2 = f_2(3-2) + g_2(3-5) + F_3(3) = 10 \cdot 1+$
$+11 \cdot 2 + 14 = \underline{46},$
$x_2 = 4;\ F_2 = f_2(4-2) + g_2(4-5) + F_3(4) = 10 \cdot 2+$
$+11 \cdot 1 + 21 = 52;$
4) $\xi = 3;\ x_2 = 0;\ F_2 = f_2(0-3) + g_2(0-5) + F_3(0) = 7 \cdot 3 + 11 \cdot 5 + 32 =$
$= 108,$
$x_2 = 1;\ F_2 = f_2(1-3) + g_2(1-5) + F_3(1) = 7 \cdot 2 + 11 \cdot 4 + 22 =$
$= 80,$
$x_2 = 2;\ F_2 = f_2(2-3) + g_2(2-5) + F_3(2) = 7 \cdot 1 + 11 \cdot 3 + 18 =$
$= 58,$
$x_2 = 3;\ F_2 = f_2(3-3) + g_2(3-5) + F_3(3) = 0 + 11 \cdot 2 + 14 =$
$= \underline{36},$
$x_2 = 4;\ F_2 = f_2(4-3) + g_2(4-5) + F_3(4) = 10 + 11 + 21 =$
$= 42;$
5) $\xi = 4;\ x_2 = 0;\ F_2 = f_2(0-4) + g_2(0-5) + F_3(0) = 7 \cdot 4 + 11 \cdot 5 + 32 =$
$= 110,$
$x_2 = 1;\ F_2 = f_2(1-4) + g_2(1-5) + F_3(1) = 7 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 22 =$
$= 87,$
$x_2 = 2;\ F_2 = f_2(2-4) + g_2(2-5) + F_3(2) = 7 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 18 =$
$= 65,$
$x_2 = 3;\ F_2 = f_2(3-4) + g_2(3-5) + F_3(3) = 7 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 14 =$
$= 43,$
$x_2 = 4;\ F_2 = f_2(4-4) + g_2(4-5) + F_3(4) = 0 + 11 \cdot 1 + 21 =$
$= \underline{32},$
$x_2 = 5;\ F_2 = f_2(5-4) + g_2(5-5) + F_3(5) = 10 + 0 + 28 = 38;$
6) $\xi = 5;\ x_2 = 0;\ F_2 = f_2(0-5) + g_2(0-5) + F_3(0) = 7 \cdot 5 + 11 \cdot 5 + 32 =$
$= 122,$
$x_2 = 1;\ F_2 = f_2(1-5) + g_2(1-5) + F_3(1) = 7 \cdot 4 + 11 \cdot 4 + 22 =$
$= 94,$
$x_2 = 2;\ F_2 = f_2(2-5) + g_2(2-5) + F_3(2) = 7 \cdot 3 + 11 \cdot 3 + 18 =$
$= 72,$
$x_2 = 3;\ F_2 = f_2(3-5) + g_2(3-5) + F_3(3) = 7 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 14 =$
$= 50,$
$x_2 = 4;\ F_2 = f_2(4-5) + g_2(4-5) + F_3(4) = 7 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 21 =$
$= 39,$
$x_2 = 5;\ F_2 = f_2(5-5) + g_2(5-5) + F_3(5) = 0 + 0 + 28 = \underline{28}.$

За даними результатами складемо таблицю для F_2:

ξ	$F_2(\xi)$	x_2	x_3	x_4	ξ	$F_2(\xi)$	x_2	x_3	x_4
0	66	3	1	1	3	36	3	3	1
1	56	3	1	1	4	32	4	3	1
2	46	3	2	1	5	28	5	3	1

Табл. 4

Розглянемо останній четвертий крок, у якому $\xi = x_0 = 2$:

$$F_1(\xi) = \min_{x_1}(f_1(x_1 - x_0) + g_1(x_1 - m_1) + F_2(x_1)\};$$

$\xi = 2$; $x_1 = 0$; $F_1 = f_1(0-2) + g_1(0-2) + F_2(0) = 7 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 66 = = 102$,

$x_1 = 1$; $F_1 = f_1(1-2) + g_1(1-2) + F_2(1) = 7 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 56 = = 74$,

$x_1 = 2$; $F_1 = f_1(2-2) + g_1(2-2) + F_2(2) = 0 + 0 + 46 = \underline{46}$,

$x_1 = 3$; $F_1 = f_1(3-2) + g_2(3-2) + F_3(3) = 10 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 36 = = 54$.

Отже, маємо для F_1 таблицю

ξ	$F_1(\xi)$	x_1	ξ	$F_1(\xi)$	x_1
0	102	0	2	46	2
1	74	1	3	54	3

Табл. 5

З цієї таблиці одержуємо, що $x_1^* = 2$, а $F_1(x_1^*) = 46$, а з таблиці 4 для $\xi = x_1^* = 2$ знаходимо оптимальне значення решти змінних: $x_2^* = 3$, $x_3^* = 2$, $x_4^* = 1$.

Отже, $X^* = (2, 3, 2, 1)$, $f_{\min} = 46$. ▶.

5. Однопродуктова задача управління запасами і застосування обчислювальної схеми динамічного програмування для її розв'язування

Однією з найвідоміших ділянок застосування методів динамічного програмування є область математичної економіки, яка називається **теорією управління запасами**. Її предметом є розробка і дослідження математичних моделей систем, які є посередниками між виробниками деяких ресурсів та їхніми споживачами. При математичній формалізації доводиться широко використовувати розривні, не диференційовні і кусково-неперервні функції. Це пов'язано з тим, що треба враховувати ефекти концентрації, фіксованих витрат і плати за замовлення. Такі задачі важко піддаються аналітичному розв'язанню класичними методами, але їх можна розв'язати за допомогою методу динамічного програмування. Розглянемо задачу, яка виникає в плануванні діяльності системи постачання – **динамічну задачу управління запасами**.

Нехай є деяка система постачання (склад, оптова база і т.п.), що планує свою роботу на n періодів. Її діяльність полягає в забезпеченні попиту скінченного числа споживачів деякого продукту, для чого вона проводить замовлення виробнику продукту. Попит клієнтів у цій моделі розглядається як деяка сумарна величина, що набуває заданих значень для кожного з періодів, і він завжди задовольняється, тобто не допускається заборгованість і відмова. Також припускається, що замовлення виробником виконується повністю, і часом між замовленням і його виконанням можна знехтувати, тобто розглядається система з миттєвим виконанням замовлення.

Введемо позначення: y_k – залишок запасу після $(k-1)$-го періоду; d_k – наперед відомий сумарний попит в k-му періоді; $x - k$ замовлення (поставка виробника) в k-му періоді; $C_k(x_k)$ – витрати на виконання замовлення обсягом x_k в k-му періоді; $S(\xi_k)$ – витрати на зберігання запасу обсягом ξ_k в k-му періоді.

Після одержання поставки і задоволення попиту обсяг товару, який треба зберігати в k-й період, становить $\xi_k = y_k + x_k - d_k$. Згідно із змістом параметра y_k, можна записати співвідношення

$$\xi_k = \xi_{k-1} + x_k - d_k, k \in \{2, \ldots, n\}. \quad (1)$$

Витрати на одержання і зберігання товару в k-й період описується функцією

$$f_k(x_k, \xi_k) = C_k(x_k) + S_k(\xi_k), k \in \{1, \ldots, n\}. \quad (2)$$

Планом задачі вважатимемо вектор $X = (x_1; \ldots; x_n)$, компонентами якого є послідовні замовлення впродовж заданого проміжку часу. Співвідношення між запасами (1) з врахуванням початкової умови зв'язує стан системи з вибраним планом і дозволяє виразити сумарні витрати за всі n періодів функціонування керованої системи постачання у формі адитивної цільової функції

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k, \xi_k). \quad (3)$$

Треба знайти послідовність оптимальних керувань (замовлень) x_k^* і зв'язаних з нею оптимальних станів (запасів) ξ_k^*, які реалізують мінімум функції (3). За початкову умову візьмемо вимогу про зберігання після завершення керування заданої кількості товару y_{n+1} , а саме

$$\xi_n^* = y_{n+1}. \quad (4)$$

При розв'язуванні поставленої задачі методом динамічного програмування за функцію стану керованої системи $F_k(\xi)$ візьмемо мінімальний обсяг витрат, які виникли після перших k періодів за умови, що в k-й період є запас ξ. Тоді можемо записати основне рекурентне співвідношення

$$F_k(\xi) = \min_{0 \leq x_k \leq \xi + d_k} \{f_k(x_k, \xi) + F_{k-1}(\xi - x_k + d_k)\}, k \in \{2, \ldots, n\}, \quad (5)$$

оскільки $y_k = \xi - x_k + d_k \geq 0$ і

$$F_1(\xi) = \min_{0 \leq x_1 \leq \xi + d_1} \{C_1(x_1) + S_1(\xi)\}. \quad (6)$$

Система рекурентних співвідношень (5), (6) дозволяє знайти послідовність функцій станів $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$, ..., $F_n(\xi)$ і умовних оптимальних керувань $\hat{x}_1(\xi)$, $\hat{x}_2(\xi)$, ..., $\hat{x}_n(\xi)$. На n-му кроці за допомогою початкової умови (4) можна визначити $x_n^* = \hat{x}_n(y_{n+1})$. Решту значень оптимальних керувань x_k^* визначають за формулою

$$x_k^* = \hat{x}_k(y_{n+1} + \sum_{j=k+1}^{n} (d_j - x_j^*)). \tag{7}$$

Цікавим є частинний випадок задачі (1) – (3), коли функції витрат на поповнення запасу $C_k(x_k)$ вгнуті, а функції витрат $S_k(\xi_k)$ на зберігання лінійні, тобто $S_k(\xi_k) = s_k \cdot \xi_k$.

Позначимо функцію витрат для k-го періоду через

$$f_k(x_k, \xi_k) = C_k(x_k) + s_k \xi_k, \tag{8}$$

або

$$f_k(x_k, y_{k+1}) = C_k(x_k) + s_k y_{k+1}. \tag{9}$$

Згідно із зробленими припущеннями всі функції витрат $f_k(x_k, y_k)$ є вгнутими як сума вгнутої і лінійної функцій. Ця властивість значно спрощує процес розв'язування, оскільки для відшукання мінімуму вгнутих функцій $f_k(x_k, y_{k+1})$ досить розглянути тільки дві крайні точки множини, на якій шукаємо мінімум.

Врахувавши введене позначення задачу (1) – (3) запишемо у вигляді

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k, y_{k+1}) \to \min \tag{10}$$

якщо

$$x_k + y_k - y_{k+1} = d_k, \quad k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{11}$$

Розглянемо процедуру розв'язування задачі (10), (11). Оскільки шукається мінімум суми вгнутих функцій $f_k(x_k, y_{k+1})$, то розв'язок досягатиметься в одній із крайніх точок множини, що визначається умовами (11). Число змінних x_k і y_k в системі (11) дорівнює $2n$. У заданій системі всього n рівнянь, тому в оптимальному плані буде не більше ніж n нульових компонент. При цьому для кожного періоду k значення x_k і y_k не можуть одночасно дорівнювати нулю, через те, що необхідно задовольнити попит або за рахунок замовлення, або за рахунок запасу. Цей факт можна записати у вигляді умови доповнюючої жорсткості:

$$x_k^* y_k^* = 0, k \in \{1, \dots, n\}, \tag{12}$$

де

$$\begin{cases} y_k^* = 0, & \text{і отже}, \quad x_k^* > 0, \\ x_k^* = 0, & \text{і отже}, \quad y_k^* > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Умови (12), (13) означають, що при *оптимальному керуванні* замовлення постачальнику на нову партію не повинно надходити, якщо на початок пероіду є ненульовий запас, або *розмір замовлення повинен дорівнювати величині попиту за ціле число періодів.* Звідси випливає, що запас на кінець останнього періоду повинен дорівнювати нулю, тобто $y_{n+1}^* = 0$. Останнє дозволяє розв'язувати задачу в прямому напрямку, застосовуючи рекурентне співвідношення

$$F_k(\xi) = \min_{x_k}\{f_k(x_k, \xi) + F_{k-1}(\xi - x_k - d_k)\}, \tag{14}$$

де $\xi = y_{k+1} = x_k + y_k - d_k$.

Враховуючи (12), (13) і вгнутість $f_k(x_k, \xi)$, одержуємо, що мінімум (14) досягається в одній з крайніх точок $x_k = 0$ або $x_k = \xi + d_k$, тому

$$F_k(\xi) = \min \left\{ \begin{array}{c} f_k(\xi + d_k, \xi) + F_{k-1}(0), \\ f_k(0, \xi) + F_{k-1}(\xi + d_k) \end{array} \right\}, \tag{15}$$

а тоді для попереднього періоду функція стану визначається так:

$$F_{k-1}(\xi + d_k) = \min \left\{ \begin{array}{c} f_k(\xi + d_k + d_{k-1}, \xi + d_k) + F_{k-2}(0), \\ f_k(0, \xi + d_k) + F_{k-2}(\xi + d_k + d_{k-1}) \end{array} \right\}, \tag{16}$$

завдяки чому в загальному випадку одержуємо модифіковану форму для рекурентного співвідношення

$$F_k(\xi) = \min_{1 \le i \le k} \left\{ f_i \left(\xi + \sum_{j=1}^{k} d_j, \xi + \sum_{j=i+1}^{k} d_j \right) + \right.$$

$$+\sum_{l=i+1}^{k} f_l\left(0, \xi+\sum_{j=i+1}^{k} d_j\right)+F_{i-1}(0)\Bigg\}. \qquad (17)$$

Якщо відома ще деяка додаткова інформація про вигляд $f_k(x_k, y_{k+1})$, то можна одержати компактніші формули для рекурентних співвідношень [14].

Вправи

1. Кошти в сумі S гр.од. розподіляються між N підприємствами. Виділені k-му підприємству кошти у розмірі x гр.од. дають доход $f_k(x)$, $k \in \{1, \ldots, N\}$. Знайти, які кошти слід виділити кожному підприємству, щоб сумарний прибуток всіх підприємств був максимальним:

1) $S = 4$ млн. гр.од., $N = 3$. Кошти підприємствам розподіляються у кількостях, кратних 1 млн.гр.од. Функції f_k, $k \in \{1, 2, 3\}$, задані таблицею

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
1	5	4	7
2	9	8	9
3	11	12	10
4	12	14	11

2) $S = 100$ тис. гр.од., $N = 4$. Кошти кожному підприємству виділяються у кількостях, кратних 25 тис. гр.од. Функції f_k, $k \in \{1, \ldots, 4\}$, задані таблицею

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
25	12	12	12	8
50	14	18	16	12
75	20	24	24	16
100	28	30	30	24

3) $S = 200$ тис. гр.од, $N = 4$. Кошти підприємствам виділяються в обсягах 50, 100, 150 та 200 тис. гр.од. Функції f_k, $k \in \{1, \ldots, 4\}$, задані таблицею

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

4) $S = 120$ млн. гр.од., $N = 4$. Кошти кожному підприємству виділяються у кількостях, кратних 20 млн.гр.од. Функції f_k, $k \in \{1, \ldots, 4\}$, задані таблицею

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

2. У трьох районах міста фірма планує побудувати п'ять підприємств однакової потужності, які випускатимуть продукцію, що користується попитом.

Необхідно розмістити підприємства так, щоб забезпечити мінімальні сумарні витрати на їх будівництво і експлуатацію. Значення функцій витрат g_i наведені в таблиці

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	11	18	35	51	76
$g_2(x)$	10	19	34	53	75
$g_3(x)$	9	20	36	54	74

Тут $g_i(x)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ – функції витрат у млн.гр.од., які характеризують величину витрат на будівництво і експлуатацію в залежності від кількості розміщуваних підприємств в i-му районі.

Вказівка. Скористатися рекурентними співвідношеннями: для першого району $\varphi_1(x) = \min g_i(x) = g_1(x)$, для решти районів

$$\varphi_k(x) = \min\{g_k(x_k) + \varphi_{k-1}(x - x_k)\}, \;\; k \in \{2, \ldots, n\},$$

3. У трьох областях необхідно побудувати п'ять підприємств однакової потужності з переробки сільськогосподарської продукції.

Треба розмістити підприємства так, щоб забезпечити мінімальні сумарні витрати на їхнє будівництво і експлуатацію.

Функції витрат $g_i(x)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, які характеризують величину витрат на будівництво і експлуатацію в залежності від кількості підприємств, що розміщуються в i-й області, наведені в таблиці

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	8	14	22	29	34
$g_2(x)$	10	17	18	27	31
$g_3(x)$	11	16	15	26	31

Вказівка. Скористатися вказівкою до задачі 2.

Відповіді

1. 1) $X_1^* = (1; 2; 1)$, $X_2^* = (2; 1; 1)$, $J^* = 20$; 2) $X^* = (25; 25; 25; 25)$, $J^* = 44$; 3) $X^* = (0; 0; 50; 150)$, $J^* = 146$; 4) $X^* = (0; 40; 40; 40)$, $J^* = 64$. **2.** $X^* = (2; 2; 1)$, $J^* = 46$. **3.** $X^* = (2; 0; 3)$, $J^* = 29$.

Література

1. Исследование операций в экономике : Учебн. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман: Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2000. – 407 с.

2. Экономико-математические методы и прикладные модели : Учебн. пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайнтбегов и др. : Под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

3. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1988. – 208 с.

4. Дубров А. М. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 176 с.

5. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій / Ю. П. Зайченко. – К. : ЗАТ "ВІПОЛ", 2000. – 688 с.

6. Давыдов Э. Г. Исследование операций : Учебн. пособие для студентов вузов / Э. Г. Давыдов. – М. : Высш. шк., 1990. – 383 с.

7. Математика для економістів : теорія та застосування. Економіко-математичне моделювання : Підручник. – 2-е вид., виправлене / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, В. С. Дронь, О. С. Кондур. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 184 с.

8. Балашевич В. А. Основы математического программирования : Учебное пособие для инженерно-экономических и экономических специальностей / В. А. Балашевич. – Минск : Вышэйш. шк., 1985. – 173 с.

9. Христиановський В. В. Збірник задач з математичного програмування. На допомогу студентам-економістам : Навч. посібник / В. В. Христиановський, В. Г. Єрин, О. В. Ткаченко. – К : НМКВО, 1992. – 328 с.

10. Кігель В. Р. Елементи лінійного, цілочислового лінійного, нелінійного програмування : Навч. посібник / В. Р. Кігель. – К. : ІСДО, 1995. – 400 с.

11. Линейное и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Карагодова, Н. В. Черникова, Н. З. Шор. – К. : Вища школа, 1975. – 372 с.

12. Математичне програмування / І. М. Богаєнко, В. С. Григорків, М. В. Бойчук, М. О. Рюмшин. – К. : Логос, 1996. – 266 с.

13. Математика в экономике. Учебник : В 2-х ч. Ч.2 / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов, И. Г. Шандра. – М. : Финансы и статистика, 1999. – 376 с.

14. Наконечний С. І. Математичне програмування : Навч. посібник / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2003. – 452 с.

15. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : Навч. посібник / В. Я. Кутковецький. – К.: ВД "Професіонал", 2005. – 264 с.

16 Кузнецов А. В. Высшая математика : Математическое программирование : Учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск : Вышэйш. шк., 1994. – 286 с.

Предметний покажчик

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Зміст

Навчальне видання

ЛАВРЕНЧУК Володимир Петрович,
ГОТИНЧАН Тетяна Іванівна,
КОНДУР Оксана Созонтівна,
ДРОНЬ Віталій Сильвестрович

ВИЩА МАТЕМАТИКА. КУРС ЛЕКЦІЙ

У трьох частинах

Частина III

Математичні методи дослідження операцій

Навчальний посібник

Головний редактор *Василь ГОЛОВЧАК*
Літературне редагування *Ольга МАКСИМОНЬКО*
Комп'ютерна верстка *Тетяна ГОТИНЧАН*

Підп. до друку 4. 5. 2011 р.
Формат 60x84/16. Папір офсет. Гарнітура "Times New Roman".
Друк на ризографі. Вид. арк. 29.
Наклад 300 прим. Зам. № 46.

ISBN 978-966-640-301-3

Видавець
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
76000, м. Івано-Франківськ,
вул. С. Бандери, 1, тел.: 71-56-22
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру від 12.12.2006, серія ДК 2718