В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан,
О.С. Кондур, В.С. Дронь

ВИЩА МАТЕМАТИКА. КУРС ЛЕКЦІЙ

У трьох частинах

Частина II

Теорія ймовірностей та математична статистика

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2011

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11я73
В558

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист про надання грифу № 1/11-1491 від 22. 02. 2011 р.)

Рецензенти:

Благун І.С. – заслужений діяч науки і техніки України, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Івасишен С.Д. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичної фізики Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут";

Пукальський І.Д. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

В 558 **Вища математика. Курс лекцій** : [навчальний посібник] : у 3 ч. Ч.2 : Теорія ймовірностей та математична статистика / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, О. С. Кондур, В. С. Дронь. – Івано-Франківськ : Видавництво Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2011. – 264 с.
ISBN 978-966-640-301-2

Курс лекцій охоплює теоретичний матеріал з теорії ймовірностей і математичної статистики згідно з навчальною програмою вищих навчальних закладів України. Наведено багато прикладів розв'язування задач, а також запропоновано вправи для самостійного розв'язання.

Для студентів спеціальностей: економічних, інженерно-економічних, менеджмент у виробничій та невиробничій сферах.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 978-966-640-301-2

Передмова

Посібник охоплює матеріал з вищої математики для студентів, які навчаються у вищих навчальних закладах за спеціальностями економічними, інженерно-економічними, менеджмент у виробничій та невиробничій сферах та маркетингу. Він складається з трьох частин. У першій частині розглядаються елементи лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу. Друга частина присвячена теорії ймовірностей та елементам математичної статистики. У третій частині викладено матеріали з математичних методів дослідження операцій (математичного програмування).

Основу посібника склали курси лекцій з вищої математики, що читались авторами впродовж багатьох років студентам економічних спеціальностей Чернівецького національного університету, Чернівецького торговельно-економічного інституту Київського національного університету, Прикарпатського національного університету, Інституту підприємництва та перспективних технологій при національному університеті "Львівська політехніка", Інституту управління природними ресурсами. Він разом з виданим раніше авторами збірником задач і вправ з грифом Міністерства освіти і науки України утворює повний набір навчальних посібників з вищої математики для економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Кожна частина посібника поділена на розділи, підрозділи й пункти, в яких у логічній послідовності вводяться поняття і факти вищої математики. Автори вважали за доцільне наводити доведення лише тих теорем, які вчать студентів логічно мислити. Крім того, кожне нове поняття ілюструється прикладами. Значну увагу автори звертали на складання математичних моделей економічних задач та описання методів їхнього розв'язання.

Кожний розділ посібника завершується вправами, які пропонуються для розв'язування в аудиторії або при самостійній роботі.

Тому його можна використовувати і як збірник задач і вправ.

Друга частина посібника містить десять розділів, перші п'ять з яких містять основи теорії ймовірностей: простір елементарних подій, випадкові події, дії над ними та їхні ймовірності; випадкові величини, їхні розподіли та числові характеристики; важливі граничні теореми теорії ймовірностей. Наступні п'ять розділів присвячені елементам математичної статистики. В них викладені основи вибіркового методу, теорії оцінювання ймовірнісних параметрів, перевірки статистичних гіпотез, регресійного аналізу.

Теорія ймовірностей

1. Імовірнісний простір. Аксіоми теорії ймовірностей

1.1. Стохастичний експеримент, випадкові події, алгебра подій

Початковими поняттями теорії ймовірностей є поняття стохастичного експерименту, випадкової події та ймовірності випадкової події. Стохастичними називаються експерименти (досліди), результати яких наперед не можна точно передбачити. Теоретико-множинний метод побудови теорії ймовірностей передбачає, що розглядуваному випробуванню відповідає деяка множина Ω, елементи (точки) якої дають найповнішу інформацію про результати випробування. Цю множину називають **простором елементарних подій**, а її точки – **елементарними подіями**.

Розглянемо ряд прикладів, які розкривають ці поняття.

Приклад 1. Проводиться випробування: один раз кидають монету.

$\triangleleft$ Очевидно, що простір елементарних подій має вигляд $\Omega = \{$ Г, Н $\}$, де літера Г означає появу герба, а Н – напису. $\triangleright$

Приклад 2. Випробування полягає в тому, що підкидається гральний кубик, зроблений з однорідного матеріалу, грані якого пронумеровані від 1 до 6.

$\triangleleft$ Подію "при одному підкиданні випало i очок" позначатимемо через ω_i, $i \in \{1, \ldots, 6\}$; події ω_i є елементарними (нерозкладними) і вони вичерпують усі можливі результати випробування. Звідси випливає, що простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$. З цим випробуванням можна пов'язати і складені (розкладні) події. Так, нехай подія A полягає в тому, що при одному підкиданні кубика випало парне число очок, подія B – випало число очок, кратне 3. Очевидно, що ці події можна розкласти на елементарні події: подія A настає тоді й тільки тоді, коли настає одна з елементарних подій ω_2, ω_4, ω_6; так само настання події B еквівалентне настанню однієї з подій ω_3, ω_6. Тому природно розглядати події A і B як відповідні множини елементарних подій: $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$. $\triangleright$

Приклад 3. Розглядається експеримент, який полягає в тому, що тричі підкидається однорідна монета.

$\triangleleft$ У цьому випадку є всього 8 результатів випробування – елементарних подій: ГГГ, ГГН, ГНГ, НГГ, ГНН, НГН, ННГ, ННН (Г означає випадання герба, Н – напису).

Розглянемо приклади складених подій. Нехай подія A полягає в тому, що випало принаймні два герби, подія B – випав рівно один напис. Тоді $A = \{$ ГГГ, ГГН, ГНГ, НГГ $\}$, $B = \{$ ГГН, ГНГ, НГГ $\}$. $\triangleright$

У цих прикладах простір елементарних подій є скінченною множиною. У той же час у багатьох задачах теорії ймовірностей доводиться мати справу з випробуваннями (експериментами), які мають нескінченне число можливих результатів.

Приклад 4. На площині задано квадрат. Випробування полягає в тому, що в цей квадрат випадковим чином ставиться точка.

$\triangleleft$ Елементарними подіями в цьому випадку природно вважати події, що полягають у попаданні в окремі точки квадрата. Отже, множина всіх елементарних подій (усіх нерозкладних результатів випробування) еквівалентна множині точок квадрата.

Розглянемо подію C, яка полягає в тому, що кинута точка попала в круг C, який лежить усередині квадрата. Ця подія розкладається на нескінченну множину елементарних подій, які відповідають попаданням у різні точки круга C. $\triangleright$

Приклад 5. Проводиться випробування: однорідну правильної форми монету підкидають до першої появи герба.

$\triangleleft$ Очевидно, що простором елементарних подій такого випробування є множина $\Omega = \{\omega_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, де $\omega_n = \underbrace{\text{Н...Н}}_{n-1}\text{Г}$ означає, що герб випав при n-му підкиданні. $\triangleright$

Отже, під елементарними подіями, пов'язаними з певним випробуванням, розуміють усі нерозкладні результати цього випробування. Кожну подію, яка може настати в результаті цього випробування, можна розглядати як деяку множину елементарних подій. Розглянуті приклади демонструють, що елементарні події можуть бути об'єктами найрізноманітнішої природи. Тому прийнято називати простором елементарних подій довільну множину (скінченну або нескінченну).

Як було зазначено вище, простір елементарних подій позначатимемо буквою Ω, його елементи (точки), тобто елементарні події, буквами ω_i або ω. Під подією A розумітимемо певну підмножину Ω, яка складається з усіх тих точок ω – елементарних подій, які сприяють появі події A. Сама множина Ω називається **вірогідною подією**, а порожня множина – **неможливою подією** і позначається символом $\emptyset$.

Розглянемо відношення, в яких можуть бути події, і операції над подіями.

Означення 1. *Подія A називається* **окремим випадком** *події B (або B є* **наслідком** *A), якщо множина A є підмножиною B.*

Позначають це відношення так само, як для множин: $A \subset B$ або $B \supset A$. Отже, відношення $A \subset B$ означає, що всі елементарні події, які входять в A, входять також у B, тобто при настанні події A настає також подія B. При цьому, якщо $A \subset B$ і $A \subset B$, то $A = B$.

Означення 2. **Сумою (об'єднанням)** $A+B$ ($A\bigcup B$) *подій A і B називають подію, яка складається з елементарних подій, що входять до складу хоча б однієї з подій A або B.*

Означення 3. **Добутком (перерізом)** AB ($A\bigcap B$) *подій A і B називається подія, яка складається з елементарних подій, що входять в обидві події A і B.*

Отже, подія $A + B$ настає тоді й тільки тоді, коли настає або подія A, або подія B, або обидві події; подія AB настає тоді й тільки тоді, коли настають обидві події.

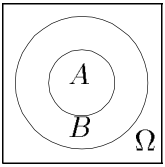
Аналогічно визначаються суми та добутки кількох подій.

Означення 4. **Протилежною** *подією $\overline{A}$ для події A називається теоретико-множинне доповнення $\Omega \setminus A$, тобто подія, що складається з усіх елементарних подій, які не входять до A.*

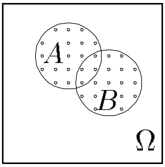
Отже, подія $\overline{A}$ настає тоді й тільки тоді, коли не настає подія A.

Означення 5. *Події A та B називаються* **несумісними,** *якщо $AB = \emptyset$.*

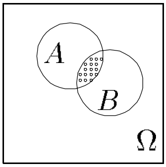
Наведені вище означення зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера-Венна:



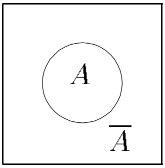
$A \subset B$

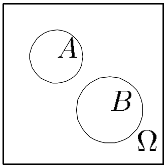


$A \bigcup B$



$A \bigcap B$





$A \bigcap B = \emptyset$

Легко довести, що мають місце такі властивості операцій над подіями.

Властивість 1. $A + B = B + A$; $AB = BA$ (**комутативні закони для додавання та множення**).

Властивість 2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; $(AB)C = A(BC)$ (**асоціативні закони для додавання та множення**).

Властивість 3. $(A + B)C = (AC) + (BC)$ (**дистрибутивний закон множення відносно додавання**).

Властивість 4. $(AB)+C = (A+C)(B+C)$ (**дистрибутивний закон додавання відносно множення**).

Властивість 5. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ (**закони де Моргана**).

Властивість 6. $A + \overline{A} = \Omega$; $A\overline{A} = \emptyset$.

Ці властивості виражають той факт, що множина подій є алгеброю Буля [1].

1.2. Класичне означення ймовірності

Розглянемо випадок, коли простір елементарних подій Ω є скінченною множиною, тобто $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$. Часто таку множину Ω називають **повною групою** всіх попарно несумісних результатів експерименту. Вважатимемо додатково, що всі елементарні події рівноможливі, тобто немає об'єктивних причин надавати перевагу одній з елементарних подій у порівнянні з іншими. У цьому випадку подією є будь-яка підмножина простору елементарних подій Ω.

Означення 6 (класичне означення ймовірності). Імовірністю події A *називається відношення числа результатів випробування, сприятливих для події* A*, до числа всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування. Вона визначається формулою*

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}, \tag{1}$$

де $N(A)$ *– число елементів множини* A.

Приклад 6. Знайти ймовірність того, що число очок, яке випаде на кубику при одному підкиданні, буде: а) парним (подія A); б) кратним трьом (подія B).

$\triangleleft$ Простір елементарних подій складається з 6 елементів: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, де ω_i – подія, що полягає у випаданні i очок. Оскільки $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$, то $N = 6$, $N(A) = 3$, $N(B) = 2$ і

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \ \triangleright$$

Приклад 7. Однорідну правильної форми монету підкидають два рази. Знайти ймовірність випадання одного герба.

$\triangleleft$ У цьому випадку $\Omega = \{$ ГГ, ГН, НГ, НН $\}$, $A = \{$ НГ, ГН $\}$, тобто $N = 4$, $N(A) = 2$, тому

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \ \triangleright$$

Приклад 8. З колоди, яка містить 52 карти, вийнято 4 карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде дві дами.

$\lhd$ Очевидно, що $N = C_{52}^4 = 270725$, а $N(A) = C_4^2 C_{48}^2 = 6768$. Тоді

$$P(A) = \frac{6768}{270725} \approx 0,025. \ \rhd$$

Доведемо деякі властивості ймовірності події.

Властивість 1. *Для кожної події $A \subset \Omega$*

$$0 \le P(A) \le 1.$$

$\lhd$ Оскільки $0 \le N(A) \le N$, то з (1) випливає, що $0 \le P(A) \le 1$. $\rhd$

Властивість 2. *Імовірність вірогідної події дорівнює 1, тобто*

$$P(\Omega) = 1.$$

$\lhd$ Справді, $P(\Omega) = \dfrac{N}{N} = 1$. $\rhd$

Властивість 3 (теорема додавання для несумісних подій). *Якщо події A і B несумісні, тобто $AB = \emptyset$, то*

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{2}$$

$\lhd$ Оскільки $N(A+B) = N(A) + N(B)$, то з (1) випливає (2). $\rhd$

Цю властивість можна узагальнити на випадок, коли події A_1, $A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні, тобто $A_i A_j = \emptyset$, $i \ne j$. Тоді формула (2) набуває вигляду

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{3}$$

Властивість 4. *Імовірність протилежної до A події $\overline{A}$ дорівнює*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{4}$$

$\lhd$ Справді, оскільки $A + \overline{A} = \Omega$, а події A і $\overline{A}$ несумісні, то

$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

звідки й дістаємо (4). $\rhd$

Властивість 5. *Імовірність неможливої події дорівнює нулю:*

$$P(\emptyset) = 0.$$

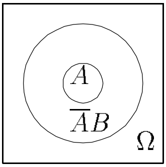
$\triangleleft$ Оскільки $N(\emptyset) = 0$, то $P(\emptyset) = \dfrac{0}{N} = 0$. Зазначимо, що при доведенні цієї властивості можна було використати властивості (2) і (4):

$$P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0. \triangleright$$

Властивість 6. *Якщо подія A є окремим випадком події B, тобто $A \subset B$, то*

$$P(A) \leq P(B).$$

$\triangleleft$ Очевидно, що $B = A + (\overline{A}B)$ і події A і $\overline{A}B$ несумісні, тому згідно з властивостями 3 і 1 маємо



$$P(B) = P(A + (\overline{A}B)) =$$
$$= P(A) + P(\overline{A}B) \geq P(A).$$

$\triangleright$

Властивість 7 (теорема додавання для довільних подій). *Якщо A і B довільні події, то*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

$\triangleleft$ Справді, оскільки $N(A + B) = N(A) + N(B) - N(AB)$, то згідно з (1)

$$P(A + B) = \frac{N(A + B)}{N} = \frac{N(A) + N(B) - N(AB)}{N} =$$
$$= \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} - \frac{N(AB)}{N} = P(A) + P(B) - P(AB). \triangleright$$

Приклад 9. В урні є n деталей, з яких m стандартні. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих k деталей принаймні одна стандартна.

$\triangleleft$ Нехай A – подія, яка полягає в тому, що серед k деталей принаймні одна стандартна. Тоді $\overline{A}$ – подія, серед k деталей немає жодної стандартної, і отже,

$$P(\overline{A}) = \frac{N(\overline{A})}{N} = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k},$$

а тому

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}. \triangleright$$

1.3. Алгебра і $\sigma-$алгебра множин. Аксіоми теорії ймовірностей

Класичне означення ймовірності є недостатнім при розв'язуванні багатьох задач, де треба обчислювати ймовірність події. Справа в тому, що навіть у випадку скінченного простору елементарних подій не завжди виконується умова рівноможливості. Крім того, не завжди множина всіх можливих результатів експерименту є скінченною. Можливі випадки, коли за одних числових даних існує скінченний простір елементарних подій, а за інших – ні. Нехай, наприклад, у крузі виділено сектор A з центральним кутом α. Треба знайти ймовірність того, що точка кинута в круг, попаде в цей сектор. Можливі два випадки:

1) відношення $\dfrac{\alpha}{2\pi}$ – число раціональне, тобто $\dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{m}{n}$, де $\{n,\, m\} \subset \mathbb{N}$. У цьому випадку круг можна розділити на n рівних частин – секторів $A_1, \ldots, A_n$ так, що $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$. Якщо подія A_i – точка попала в сектор A_i, то за простір елементарних подій можна взяти систему $A_1, \ldots, A_n$. Подія A містить m з цих подій, тому $P(A) = \dfrac{m}{n}$;

2) відношення $\dfrac{\alpha}{2\pi}$ – число ірраціональне, у цьому випадку, очевидно, неможливо розділити круг на скінченне число частин однакової площі так, щоб сектор A складався з кількох з них, бо відношення площі сектора до площі круга дорівнює $\dfrac{\alpha}{2\pi}$. Тому в цьому випадку класичне означення ймовірності застосувати не можна.

Для того щоб перебороти ці труднощі А.М. Колмогоров у 1929 році запропонував будувати теорію ймовірностей на аксіоматичній основі. Основним поняттям аксіоматики Колмогорова є поняття простору елементарних подій і події. При цьому важливу роль відіграють питання теорії множин і теорії міри.

Нехай є деяка множина Ω і підмножини цієї множини.

Означення 7. *Клас $\mathcal{S}$ підмножин множини Ω називається* **алгеброю**, *якщо: 1) $\Omega \in \mathcal{S}$; 2) з того, що $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$, випливає, що $(A \bigcup B) \in \mathcal{S}$; 3) з того, що $A \in \mathcal{S}$, випливає, що $\overline{A} \in \mathcal{S}$.*

Звідси, зокрема випливає: 1) $\emptyset \in \mathcal{S}$, бо $\emptyset = \overline{\Omega}$; 2) якщо $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$, то й $(AB) \in \mathcal{S}$, бо $AB = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$.

Приклад 10. Нехай A – деяка підмножина Ω. Тоді клас множин $\mathcal{S} = \{\Omega, \emptyset, A, \overline{A}\}$ утворює алгебру.

Приклад 11. Нехай $\Omega = [0, 1)$ і $\mathcal{S}$ – система підмножин множини Ω, кожна з яких є скінченною сумою інтервалів вигляду $[a, b)$, які не перетинаються. Тоді $\mathcal{S}$ – алгебра.

Приклад 12. Нехай $\Omega = [0, 1) \times [0, 1)$ і $\mathcal{S}$ – множина всіх прямокутників $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ і скінченних сум таких прямокутників, які не перетинаються. Тоді $\mathcal{S}$ – алгебра.

Означення 8. *Клас $\mathcal{F}$ підмножин множини Ω називається* **σ-алгеброю**, *якщо: 1) $\Omega \in \mathcal{F}$; 2) з того, що $\{A_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, випливає, що $(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i) \in \mathcal{F}$; 3) з того, що $A \in \mathcal{F}$, випливає, що $\overline{A} \in \mathcal{F}$.*

Звідси, як і вище, випливає: 1) $\emptyset \in \mathcal{F}$; 2) $\sigma-$алгебра разом з множинами $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ містить також їхній переріз $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ оскільки $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i}$.

Приклад 13. Множина всіх підмножин нескінченної множини Ω утворює $\sigma-$алгебру.

Зазначимо, що кожна $\sigma-$алгебра є алгеброю, але не навпаки. Проте, якщо алгебра містить скінченну кількість елементів, то вона є й $\sigma-$алгеброю.

Нехай Ω – область у $n-$вимірному просторі $\mathbb{R}^n$. $\sigma-$алгеброю **борельових** підмножин Ω називається $\sigma-$алгебра, породжена системою всіх відкритих або замкнених множин, що містяться в Ω. Прикладами борельових множин на $\mathbb{R}$ є, зокрема, довільна зліченна чи скінченна множина, відрізок $[a, b]$, інтервал (a, b), напіввідкриті відрізки $(a, b]$, $[a, b)$, тощо; прикладами борельових множин на $\mathbb{R}^2$ є довільна зліченна чи скінченна множина, відкриті, замкнені, напіввідкриті прямокутники і взагалі довільні замкнені і відкриті множини.

Можна довести, що будь-яка борельова множина є вимірною за Лебегом [1].

Введемо тепер поняття ймовірності події. Нехай задано вимірний простір $(\Omega, \mathcal{F})$, тобто простір елементарних подій Ω і $\sigma-$алгебру $\mathcal{F}$ підмножин Ω, тобто подій.

Означення 9. **Імовірністю** *називається числова функція P, яка визначена на $\sigma-$алгебрі $\mathcal{F}$ вимірного простору $(\Omega, \mathcal{F})$ і має такі властивості:*

Аксіома 1. $P(A) \geq 0$ *для всіх* $A \in \mathcal{F}$;

Аксіома 2. $P(\Omega) = 1$;

Аксіома 3. *Для довільної послідовності* $\{A_n,\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, *такої, що* $A_i A_j = \emptyset$, $i \neq j$, *правильна рівність*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_n).$$

Трійка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, де $\mathcal{F}$ – $\sigma-$алгебра підмножин з Ω, P – ймовірність, визначена на $\mathcal{F}$, називається **ймовірнісним простором**. Кажуть, що побудовано ймовірнісну модель випробування, якщо побудовано ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, тобто описано простір елементарних подій Ω, $\sigma-$алгебру $\mathcal{F}$ випадкових подій і визначено ймовірність P на $\mathcal{F}$.

У випадку класичного означення ймовірності твердження, що містяться в аксіомах 1 і 2, доведені на основі цього означення. Аксіома 3, яка називається аксіомою зчисленної адитивності, у випадку класичного означення ймовірності не розглядалася, бо там число всіх можливих подій було скінченним, а саме 2^N.

Якщо скористатися аксіомами теорії ймовірностей, то можна довести властивості ймовірності, аналогічні до тих, які були доведені у випадку класичного означення ймовірності. Розглянемо деякі з них.

Властивість 1. *Ймовірність події* $\overline{A}$ *дорівнює*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

$\triangleleft$ Оскільки $A + \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \emptyset$, то згідно з аксіомами 2 і 3 маємо

$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

тобто $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. $\triangleright$

Властивість 2. *Імовірність неможливої події дорівнює нулю, тобто* $P(\emptyset) = 0$.

$\triangleleft$ Справді $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$. $\triangleright$

Властивість 3. *Якщо* $A \subset B$, *то* $P(A) \leq P(B)$.

$\triangleleft$ Скориставшись аксіомами 3 і 1, з рівності $B = A + \overline{A}B$ дістанемо

$$P(B) = P(A + \overline{A}B) = P(A) + P(\overline{A}B) \geq P(A). \triangleright$$

З властивості 3 випливає, що для будь-якої події $A \in \mathcal{F}$ завжди $P(A) \leq 1$, оскільки $A \subset \Omega$.

Властивість 4. *Нехай* A *і* B *довільні події, тоді*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

$\triangleleft$ Оскільки $A + B = A + \overline{A}B$, $B = AB + \overline{A}B$, де доданки в правих частинах несумісні, то згідно з аксіомою 3 $P(A + B) = P(A) + P(\overline{A}B)$, $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$. Якщо відняти від першої рівності другу, то одержимо $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. $\triangleright$

Якщо події A і B несумісні, тобто $AB = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$, бо $P(\emptyset) = 0$.

Властивість 5 [3]. *Якщо є послідовність подій* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, *де* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ *і* $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_n = A$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

Цю властивість називають теоремою неперервності.

Приклад 14. Нехай Ω – скінченна або зліченна множина, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$; такий простір елементарних подій називають **дискретним**. Описати ймовірнісний простір.

$\triangleleft$ Подією назвемо будь-яку підмножину Ω. Задамо на Ω числову функцію P таку, що $P(\omega_i) \geq 0$, $i \geq 1$, і $\sum\limits_i P(\omega_i) = 1$. Для довільної $A \subset \Omega$ покладемо

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i).$$

Легко перевірити, що при такому означенні ймовірності виконуються аксіоми 1 – 3.

Нехай, зокрема, множина $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$. Якщо всі події рівноможливі, то з умови $\sum\limits_{i=1}^{N} P(\omega_i) = 1$ випливає, що $p(\omega_i) = \dfrac{1}{N}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, тому

$$P(A) = \frac{N(A)}{N},$$

тобто одержуємо класичне означення ймовірності. $\triangleright$

Приклад 15. Нехай $\Omega = [a; b]$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра борельових множин на $[a; b]$. Описати ймовірність на $\mathcal{F}$.

$\triangleleft$ Природно вважати, що ймовірність попадання точки в деякий інтервал $(c; d) \subset [a; b]$ залежить тільки від довжини цього інтервалу і пропорційна їй. Тому доцільно визначити ймовірність $P(A)$ так, щоб для $A = (c, d)$ було $P(A) = \lambda(d - c)$, де $\lambda > 0$ – стала. З умови $P(\Omega) = 1$ знаходимо $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$. Отже, $P(A) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

Виконання аксіом 1 і 2 очевидне. Аксіома 3 випливає з властивості σ-адитивності міри Лебега [1]. $\triangleright$

Приклад 16. Троє осіб X, Y, Z грають у шахи. Відомо, що X і Y грають однаково, а Z удвічі краще, ніж X. Знайти ймовірність того, що виграє X або Z.

$\triangleleft$ Очевидно, що простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, де ω_1 – виграє X, ω_2 – виграє Y, ω_3 – виграє Z. Визначимо на Ω функцію $P\{\omega\} \geq 0$ так, щоб $P\{\omega_1\} + P\{\omega_2\} + P\{\omega_3\} = 1$. Елементарні події ω_1, ω_2, ω_3 не рівноможливі. Згідно з умовою $P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\}$, а $P\{\omega_3\} = 2P\{\omega_1\}$. Тоді з рівності $P\{\omega_1\} + P\{\omega_2\} + P\{\omega_3\} = 1$ випливає, що $P\{\omega_1\} + P\{\omega_1\} + 2P\{\omega_1\} = 1$ або $P\{\omega_1\} = \frac{1}{4}$. Тому $P\{\omega_2\} = \frac{1}{4}$, а $P\{\omega_3\} = \frac{1}{2}$.

Нехай A – подія, що виграє X або Z, тобто $A = \{\omega_1, \ \omega_3\}$. Тоді згідно з наслідком з властивості 4 $P(A) = P\{\omega_1\} + P\{\omega_3\} = \frac{3}{4}$. $\triangleright$

1.4. Геометричні ймовірності

Нехай розглядається випробування, простором елементарних подій якого є область Ω у $n-$вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Прикладом такого випробування є кидання навмання точки в область Ω. Припустимо, що область Ω має міру Лебега $\mu(\Omega)$ [1]. За σ-алгебру $\mathcal{F}$ візьмемо множину всіх борельових підмножин множини Ω. Вважатимемо, що ймовірність будь-якої множини $A \in \mathcal{F}$ пропорційна мірі Лебега цієї множини $\mu(A)$. Аналогічно як у прикладі 15 одержуємо, що

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Очевидно, що для цього означення виконуються аксіоми 1 - 3.

У задачах, які виникають на практиці, під $\mu(A)$ можна розуміти звичайну довжину кривої (відрізка) $(n = 1)$, площу фігури $(n = 2)$, об'єм тіла $(n = 3)$ тощо.

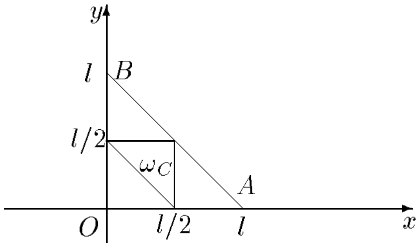
Приклад 17. Кругла мішень обертається зі сталою кутовою швидкістю. П'ята частина мішені пофарбована в чорний колір. По мішені здійснюється постріл так, що влучення в мішень – вірогідна подія. Треба знайти ймовірність попадання в сектор мішені, який пофарбовано в чорний колір.

$\triangleleft$ Нехай A – подія, яка полягає в тому, що попадання відбулося в сектор, який пофарбовано в чорний колір, а Ω – область мішені. Оскільки $\mu(\Omega) = \pi R^2$, а $\mu(A) = \dfrac{1}{5}\pi R^2$ (R – радіус круга), то

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1}{5}. \ \triangleright$$

Приклад 18. Відрізок завдовжки l розділили на три частини, вибираючи дві точки поділу навмання. Знайти ймовірність того, що з утворених трьох відрізків можна скласти трикутник.

◁ Позначимо довжини частин відрізка через x, y, $l-x-y$. Усі можливі способи поділу відрізка на три частини характеризуються значеннями x, y, для яких $0 < x+y < l$, $0 < x < l$, $0 < y < l$. Якщо x, y розглядати як прямокутні декартові координати на площині, то простір елементарних подій Ω буде трикутником OAB.



Для того щоб з відрізків x, y, $l-x-y$ можна було скласти трикутник, необхідно і достатньо, щоб кожний з цих відрізків був меншим від суми двох інших, тобто $x < y+(l-x-y)$, $y < x+(l-x-y)$, $l-x-y < x+y$ або $2x < l$, $2y < l$, $2(x+y) > l$. Звідси випливає, що $x < \frac{l}{2}$, $y < \frac{l}{2}$, а $x+y > \frac{l}{2}$. Остання система нерівностей описує трикутник ω_C. Тому

$$P(C) = \frac{\text{пл.}\omega_C}{\text{пл.}\Omega} = \frac{l^2/4}{l^2} = \frac{1}{4}. \ \triangleright$$

Зауваження. У випадку класичного означення ймовірності $P(A) = 0$ тоді й тільки тоді, коли A є неможливою подією. Для геометричної події цей факт не має місця. Справді, нехай, наприклад, Ω – деяка область на площині $\mathbb{R}^2$, A – точка або лінія в Ω. Відомо, що площа лінії або точки дорівнює нулю. Тоді $P(A) = 0$, хоча подія A не є неможливою, бо точка може попасти в A.

1.5. Умовні ймовірності та незалежні події. Формула повної ймовірності та формули Байєса

Часто доводиться розглядати ймовірності випадкових подій, коли відомо, що настала деяка випадкова подія B, тобто $P(B) > 0$.

Означення 10. *Нехай* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *– ймовірнісний простір,* $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$. **Умовною ймовірністю** *події* A *за умови, що відбулась подія* B*, називається число*

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{5}$$

Зазначимо, що для умовних ймовірностей виконуються аксіоми 1 – 3. При цьому роль простору елементарних подій відіграє B, а замість $\sigma-$алгебри $\mathcal{F}$ береться $\mathcal{F}B \equiv \{AB \,|\, A \in \mathcal{F}\}$. Перевіримо, наприклад, аксіому 2. Якщо у формулі (5) покласти $A = B$, то одержимо

$$P(B/B) = \frac{P(BB)}{P(B)} = 1.$$

З формули (5) безпосередньо випливає так звана **теорема множення** (для двох подій):

$$P(AB) = P(B)P(A/B). \tag{6}$$

Помінявши місцями A і B, дістанемо другий запис теореми множення:

$$P(AB) = P(A)P(B/A), \tag{$6'$}$$

де $P(A) > 0$.

Означення 11. *Події* A *і* B *називаються* **незалежними***, якщо*

$$P(AB) = P(B)P(A). \tag{7}$$

Якщо події A і B незалежні, то з (6) і ($6'$) випливає, що

$$P(A/B) = P(A),\ P(B) > 0;\ P(B/A) = P(B),\ P(A) > 0, \tag{8}$$

тобто настання однієї з двох незалежних подій не впливає на ймовірність настання іншої. Навпаки, кожна з умов (8) гарантує незалежність подій.

Теорема 1. *Якщо події* A *і* B *незалежні, то незалежними є також події* A *і* $\overline{B}$.

$\triangleleft$ Справді, $P(A) = P((AB) + (A\overline{B})) = P(AB) + P(A\overline{B})$, звідки

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) =$$

$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}). \triangleright$$

Наслідок. *Якщо події A і B незалежні, то незалежними є також події B і $\overline{A}$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$.*

У випадку кількох подій теорема множення має вигляд:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) =$$

$$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1A_2)) \cdot \ldots \cdot P(A_n/(A_1A_2\ldots A_{n-1})).$$

Приклад 19. Студент прийшов на екзамен, підготувавши 20 з 25 питань програми. Екзаменатор задав йому 3 питання. Знайти ймовірність того, що студент відповість на всі ці питання.

$\triangleleft$ Позначимо через A_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, подію "студент знає відповідь на $i-$те питання, задане екзаменатором,"через A – подію "студент знає відповіді на всі три запитання". Тоді $A = A_1A_2A_3$ і оскільки події A_1, A_2, A_3 залежні, то

$$P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1A_2)) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{111} \approx 0,496. \triangleright$$

Означення 12. *Події $A_1, \ldots, A_n$ називаються* **незалежними в сукупності**, *якщо при будь-яких $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$, $2 \leq r \leq n$, виконується рівність*

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_r}). \tag{9}$$

Якщо умова (9) виконується лише при $r = 2$, то ці події називаються **попарно незалежними.**

З'ясовується, що попарно незалежні події можуть не бути незалежними в сукупності. Про це свідчить такий приклад.

Приклад 20 (приклад С.Н.Бернштейна [3]). Нехай на трьох гранях правильного тетраедра, зробленого з однорідного матеріалу, написано відповідно цифри 1, 2, 3, а на четвертій грані – всі три цифри 1, 2, 3. Позначимо через A_i подію, яка полягає в тому, що тетраедр після підкидання впаде на грань, на якій зображена цифра i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Тоді

$P(A_i) = 2/4 = 1/2$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Доведемо, що події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні. Справді, $P(A_1A_2) = 1/4$ (подія A_1A_2 настає тоді й тільки тоді, коли тетраедр впаде на четверту грань), отже, A_1 і A_2 незалежні. Аналогічно встановлюється незалежність подій A_1 і A_3, A_2 і A_3. Але події A_1, A_2, A_3 не є незалежними в сукупності, оскільки $P(A_1A_2A_3) = 1/4$, а $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1/8$.

Означення 13. *Набір випадкових подій* $\{H_1, \ldots, H_n\} \in \mathcal{F}$ *утворює* **повну групу подій**, *якщо:*

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$;

2) $H_iH_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Теорема 2 (формула повної ймовірності). *Якщо* $\{H_1, \ldots, H_n\} \in \mathcal{F}$ *– повна група подій,* $P(H_i) > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, *то для довільної події* $A \subset \sum\limits_{i=1}^{n} H_i$ *правильна рівність*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \tag{10}$$

Рівність (10) називають **формулою повної ймовірності**, події $\{H_1, \ldots, H_n\}$ – **гіпотезами**, а ймовірності $P(H_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, – **апріорними** (від латинського слова a priori – до досліду) **оцінками гіпотез**.

$\lhd$ Маємо

$$A = A\Omega = A\left(\sum_{i=1}^{n} H_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(AH_i).$$

Події AH_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, попарно несумісні, бо

$$(H_iA)(H_jA) = (H_iH_j)(AA) = \emptyset A = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Тому

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n}(AH_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \rhd$$

Приклад 21. 25 екзаменаційних білетів містять по 2 питання, які не повторюються. Деякий студент може відповісти лише на 40 питань. Знайти ймовірність того, що іспит буде складено, якщо для цього досить відповісти на два питання з одного білета або на одне питання з білета і на додаткове питання з іншого білета.

$\triangleleft$ Нехай A – подія, що іспит складено. Гіпотези: H_1 – студент знає обидва питання з білета, H_2 – тільки одне питання, H_3 – не знає жодного. Тоді

$$P(H_1) = \frac{C_{40}^2}{C_{50}^2} = \frac{156}{245};$$

$$P(H_2) = \frac{C_{40}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{50}^2} = \frac{16}{49};$$

$$P(H_3) = \frac{C_{10}^2}{C_{50}^2} = \frac{9}{245};$$

$P(A/H_1) = 1$ (бо студент знає відповідь на обидва питання);

$P(A/H_2) = 39/48$ (імовірність відповісти на додаткове питання з іншого білета);

$P(A/H_3) = 0$ (оскільки за гіпотези H_3 іспит не буде складено).

Тому

$$P(A) = \frac{156}{245} \cdot 1 + \frac{16}{49} \cdot \frac{39}{48} + \frac{9}{245} \cdot 0 = \frac{221}{245} \approx 0,902. \quad \triangleright$$

Теорема 3 (формули Байєса). *Нехай події* $\{H_1, \ldots, H_n\} \in \mathcal{F}$ *утворюють повну групу подій, причому* $P(H_i) > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Тоді для довільної випадкової події* $A \subset \sum\limits_{i=1}^{n} H_i$ *такої, що* $P(A) > 0$, *правильні формули*

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, \; k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{11}$$

Формули (11) називають **формулами Байєса**, а ймовірності $P(H_k/A)$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, – **апостеріорними** (від латинського слова a posteriori – з досліду) **оцінками гіпотез**.

◁ Згідно з теоремою множення для двох подій

$$P(H_kA) = P(H_k)P(A/H_k) = P(A)P(H_k/A),$$

звідки

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Підставивши сюди значення $P(A)$ з формули (10), дістанемо формули (11). ▷

Приклад 22. До крамниці надходять вироби з двох підприємств, причому з першого надходить у три рази більше виробів, ніж з другого. Перше підприємство випускає в середньому $0,5\%$ бракованої продукції, а друге – $0,2\%$. Придбаний у крамниці виріб виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він випущений першим підприємством?

◁ Нехай H_i – подія, що виріб випущено i-м підприємством, $i \in \{1,\ 2\}$. Згідно з умовою $P(H_1) = 3P(H_2)$. Оскільки $P(H_1) + P(H_2) = 1$, то $4P(H_2) = 1$ або $P(H_2) = \frac{1}{4}$. Тому $P(H_1) = \frac{3}{4}$.

Якщо A – подія, що придбаний виріб є бракованим, то $P(A/H_1) = 0,005$, $P(A/H_2) = 0,002$.

Скориставшись формулою Байєса, одержимо

$$P(A/H_1) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \cdot 0,005}{\frac{3}{4} \cdot 0,005 + \frac{1}{4} \cdot 0,002} = \frac{15}{17}. \qquad ▷$$

Вправи

1. Для стажування 25 студентам виділено 10 місць у першій фірмі, 8 місць у другій та 7 місць у третій фірмі. Вважаючи розподіл рівноможливим, визначити, скількома способами можна розподілити студентів по фірмах так, щоб 3 певних студенти потрапили на одну фірму.

2. На конкурс по заміщенню вакансій у компанію надіслали анкети 10 бухгалтерів і 5 менеджерів. Вважаючи рівноможливим вибір, визначити, скількома способами можна прийняти на роботу трьох спеціалістів, причому серед них повинен бути принаймні один бухгалтер й один менеджер.

3. Нехай A, B, C – три довільні події. Знайти вирази для подій, які полягають у тому, що:

а) відбулась лише подія A;

б) відбулась лише одна з подій;

в) відбулись лише дві з подій;

г) всі три події відбулись;

д) відбулась принаймні одна подія;

е) відбулось не більше двох подій.

4. Спростити наступні вирази: 1) $(A+B)(A+\overline{B})$;

2) $(A+B)(B+C)(C+A)$;

3) $A+(B-AB)(C-AC)$;

4) $(A+B)B+A(AB)$.

5. Яка ймовірність того, що навмання вибрана на глобусі точка знаходиться:

а) за полярним кругом ($66^0 33^{'}$ північної широти);

б) між 60^0 і 30^0 північної широти;

в) між 10^0 і 40^0 західної довготи.

6. На автомобілі встановлено два охоронних пристрої, які працюють незалежно. Імовірність того, що при викраденні спрацює перший пристрій дорівнює 0,95, другий – 0,90. Знайти ймовірність того, що при викраденні спрацює: 1) тільки один пристрій; 2) хоча б один.

7. Підприємець має акції двох компаній. Імовірність отримання дивідендів за акціями тільки однієї з двох компаній дорівнює 0,38, причому для першої компанії вона дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що підприємець отримає дивіденди за акціями другої компанії.

8. Імовірність того, що файл, який потрібний програмісту, знаходиться на першій, другій, третій або четвертій дискеті відповідно дорівнює 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Знайти ймовірності подій:

1) B – файл знаходиться не більше, ніж на трьох дискетах;

2) C – файл знаходиться не менше, ніж на двох дискетах.

9. Консультаційна фірма претендує на замовлення від двох корпорацій. Експерти фірми вважають, що ймовірність одержання замовлення від корпорації A дорівнює 0,5. Крім того, вони також вважають, що коли фірма одержить замовлення від корпорації A, то ймовірність того, що й корпорація B звернеться до них, дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що консультаційна фірма одержить обидва замовлення?

10. Прилад складається з чотирьох вузлів A_1, A_2, A_3, A_4. Причому A_2 дублює A_1, а A_4 – A_3. При відмові будь-якого з основних вузлів (A_1 або A_3) відбувається автоматичне перемикання на дублюючий вузол.

Надійність протягом заданого часу кожного з вузлів дорівнює відповідно p_1, p_2, p_3, p_4. Надійність кожного з перемикаючих пристроїв – p. Всі елементи можуть вийти з ладу незалежно один від одного. Визначити надійність приладу.

11. Покупець може побачити рекламу деякого товару по телебаченню з ймовірністю 0,04, а на рекламному стенді – з ймовірністю 0,06. Вважається, що обидві події незалежні. Знайти ймовірність того, що покупець побачить: а) обидві реклами; б) принаймні одну.

12. Серед студентів деякого факультету, які здобувають рівень бакалавра, 30% першокурсників, 35% другокурсників, 20% третьокурсників і 15% четверокурсників. За результатами сесії на першому курсі 20%, на другому – 30%, на третьому – 35% і на четвертому – 40% відмінників. Навмання вибраний студент виявився відмінником. Знайти ймовірність того, що це третьокурсник.

13. Здійснюється вивчення деякого об'єкту за допомогою двох спостережних станцій. Об'єкт може знаходитись у двох різних станах S_1 і S_2, випадково переходячи з одного стану в інший. Встановлено, що біля 30% часу об'єкт знаходиться в стані S_1, 70% – в стані S_2. Перша станція передає помилкові відомості у 2% усіх випадків, друга станція – у 8%. У деякий момент часу перша станція повідомила, що об'єкт знаходиться у стані S_1, а друга станція – у стані S_2. Яке повідомлення є вірогіднішим?

14. Електролампи виготовляються на трьох заводах. Перший завод виробляє 45% усієї кількості електроламп, другий – 40%, третій – 15%. Продукція першого заводу становить 70% стандартних ламп, другого – 80%, третього – 81%. У магазини надходить продукція зі всіх трьох заводів. Яка ймовірність того, що куплена у магазині лампа виявиться стандартною?

15. Товар у три магазини завозять автомобілями. Ймовірність того, що автомобіль буде розвантажений протягом 30 хвилин у кожному з магазинів, дорівнює відповідно 0,77, 0,67 і 0,62. На базу повідомили, що товар розвантажено протягом 30 хвилин. Визначити ймовірність того, що це відбулось у першому магазині.

Відповіді

1. 211. **2.** 325. **3.** а) $A\,\overline{B}\,\overline{C}$; б) $A\,\overline{B}\,\overline{C}+B\,\overline{A}\,\overline{C}+C\,\overline{B}\,\overline{A}$; в) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$; г) ABC; д) $A+B+C$; е) $\overline{ABC}$. **4.** 1) A; 2) $AB+BC+CA$; 3) $A+B+C$; 4) B. **5.** а) $\approx 0,08$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\approx 0,433$; в) $\dfrac{\pi}{12}$. **6.** 1) 0,14; 2) 0,995. **7.** 0,7. **8.** 1) 0,6976; 2) 0,9678. **9.** 0,45. **10.** $(p_1+(1-p_1)pp_2)(p_3+(1-p_3)pp_4)$. **11.** а) 0,0024; б) 0,0976. **12.** 0,237. **13.** Першої станції. **14.** 0,7565. **15.** 0,37.

2. Послідовні незалежні випробування

2.1. Схема Бернуллі. Біномний розподіл

Нехай відбувається скінченне число n послідовних незалежних випробувань, у кожному з яких може настати певна подія A – успіх або настати протилежна подія $\overline{A}$ – невдача. При цьому ймовірність успіху при кожному випробуванні одна й та сама і дорівнює p, $0 < p < 1$. Така послідовність випробувань називається **схемою Бернуллі.** Прикладами випробувань Бернуллі можуть бути послідовні підкидання монети (успіх, наприклад, випадання напису), послідовні підкидання грального кубика (успіх – випадання певної грані), виробництво виробів на певному обладнанні при усталених технологічних й організаційних умовах, де виготовлення стандартної деталі – успіх, бракованої – невдача.

У кожному з цих прикладів ймовірність успіху в будь-якому випробуванні не залежить від того, скільки було успіхів в інших випробуваннях.

Позначимо через μ число успіхів у серії з n послідовних випробувань, при кожному з яких імовірність успіху дорівнює p. Треба знайти ймовірність того, що $\mu = k$. Цю ймовірність позначають $P\{\mu = k\}$ або $P_n(k)$. Отже, $P_n(k)$ – це ймовірність того, що в n випробуваннях буде k успіхів. Покладемо $q = 1 - p$; це ймовірність невдачі, тобто ненастання події A при одному випробуванні.

Теорема 1. *Правильна формула*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

$\triangleleft$ Нехай A_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, – подія "у n випробуванях подія A настала k разів", причому $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Наприклад,

$$A_k = \underbrace{A...A}_{k}\underbrace{\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}.$$

Оскільки випробування незалежні, то згідно з теоремою множення

$$P(A_k) = \underbrace{P(A)\cdot\ldots\cdot P(A)}_{k}\underbrace{P(\overline{A})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A})}_{n-k} = p^k q^{n-k}. \tag{2}$$

Число подій типу A_k, де подія A настає k разів, дорівнює C_n^k і для кожної такої події ймовірність дорівнює $p^k q^{n-k}$. Тому, скориставшись теоремою додавання, остаточно одержуємо формулу (1). $\triangleright$

Набір чисел $P_n(k)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, називають **біномним розподілом**, а саму формулу (1) – **біномною формулою** або **формулою Бернуллі**.

Зауважимо, що події $\{\mu = 0\}$, $\{\mu = 1\}$, $\ldots$, $\{\mu = n\}$ попарно несумісні і в кожній серії з n послідовних незалежних випробувань одна з них обов'язково настає, тому

$$\sum_{k=0}^{n} P\{\mu = k\} = P(\Omega) = 1,$$

тобто

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1. \tag{3}$$

У багатьох практичних задачах виникає необхідність знаходження **найімовірнішого числа успіхів** k_0, тобто такого числа успіхів, при якому $P_n(k)$ досягає найбільшого значення.

Найімовірніше число успіхів k_0 у схемі Бернуллі задовольняє нерівність

$$pn - q \le k_0 \le pn + p. \tag{4}$$

Якщо $pn - q$ неціле, то є одне таке значення k_0, якщо ж $np - q$ ціле, то таких значень два.

Нерівності (4) можна переписати у вигляді

$$p - \frac{q}{n} \le \frac{k_0}{n} \le p + \frac{p}{n}.$$

Очевидно, що коли n достатньо велике, то $\dfrac{k_0}{n} \approx p$, тобто частота $\dfrac{k_0}{n}$ мало відрізняється від ймовірності настання успіху p. Часто $\dfrac{k_0}{n}$ називають **точковою оцінкою ймовірності**.

Приклад 1. Імовірність того, що верстат протягом години потребуватиме уваги робітника, дорівнює 0,6. Припускаючи, що поламки верстатів є незалежними подіями, знайти ймовірність того, що протягом години уваги робітника потребуватиме який-небудь із чотирьох верстатів.

$\triangleleft$ Маємо $n = 4$; $k = 1$; $p = 0,6$; $q = 1 - p = 0,4$. Тоді

$$P_4(1) = C_4^1(0,6)^1(0,4)^{4-1} = 4 \cdot 0,6 \cdot 0,4^3 = 0,1536. \ \triangleright$$

Приклад 2. Частка виробів вищого ґатунку на деякому підприємстві становить 31%. Чому дорівнює найімовірніше число виробів вищого ґатунку у випадково відібраній партії з 75 виробів?

$\triangleleft$ Згідно з умовою $n = 75$, $p = 0,31$, $q = 1 - p = 0,69$, а тому

$$75 \cdot 0,31 - 0,69 \le k_0 \le 75 \cdot 0,31 + 0,31, \qquad 22,56 \le k_0 \le 23,56.$$

Звідси випливає, що $k_0 = 23$. $\triangleright$

2.2. Теорема Пуассона

Існують різні наближені формули, за якими можна обчислювати біномні ймовірності $P_n(k)$ при великих n. У цьому пункті розглянемо наближену формулу, якою зручно користуватись при значеннях p, близьких до нуля, тобто для подій, що рідко трапляються.

Розглянемо послідовність серій випробувань Бернуллі: в $n-$ій серії виконується n послідовних незалежних випробувань, при кожному з яких ймовірність успіху дорівнює $p_n = \lambda/n$ ($\lambda = \text{const}$, $n > \lambda$). Нехай μ_n – число успіхів у $n-$ій серії, $P_n(k) \equiv P\{\mu_n = k\}$ – імовірність k успіхів у n-ій серії випробувань. Правильне таке твердження.

Теорема 2 (теорема Пуассона). *Якщо $p_n \to 0$ і $p_n n \to \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$ при $n \to \infty$, то*

$$P_n(k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

для довільних $k \in \mathbb{Z}_+$.

$\triangleleft$ Скористаємося формулою Бернуллі, де $p \equiv p_n = \frac{\lambda}{n}$, $q = 1 - \frac{\lambda}{n}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \lim_{n\to\infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty} C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{n^k} \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right) \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{n^k} \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}} \right)^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{n^k} e^{-\lambda}. \qquad \triangleright$$

На практиці теоремою Пуассона користуються у формі наближеної рівності

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{5}$$

де $\lambda = np$.

Формула (5) дає добре наближення при малих p, $p < 0,1$, достатньо великих n (не менших кількох десятків) і $np \leq 10$ або $npq \leq 9$.

Введемо позначення $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Сукупність значень $\{P(k),\ k \in \mathbb{Z}_+\}$, називається **розподілом Пуассона з параметром** λ. Для обчислення ймовірностей $P(k)$, а також сум $\sum\limits_{k=m}^{+\infty} P(k)$ можна користуватись відповідно таблицею 3 або 4.

Приклад 3. З умов випуску лотереї відомо, що виграє $1/20$ усіх випущених білетів. а) Скільки треба купити білетів, щоб ймовірність виграшу була не меншою, ніж 0,99? б) Яка ймовірність того, що з 200 білетів виграє не менше п'яти?

$\triangleleft$ Придбання лотерейних білетів можна розглядати як незалежні випробування, в кожному з яких імовірність успіху (виграшу) дорівнює $p = 1/20$. Оскільки p мале, то скористаємось формулою (5).

а) При $k = 0$ ця формула дає ймовірність того, що жоден білет не виграє і $P_n(0) \approx e^{-\lambda}$. Тому ймовірність того, що принаймні один білет виграє (ймовірність протилежної події), дорівнює $1 - e^{-\lambda}$. Треба знайти таке λ, щоб виконувалась нерівність

$$1 - e^{-\lambda} \geq 0,99, \qquad \text{або} \qquad e^{\lambda} \geq 100.$$

Звідси з таблиці 9 знаходимо, що $\lambda \geq 4,6$. Отже, $np \geq 4,6$, звідки отримуємо, що $n \geq \frac{4,6}{p} = 20 \cdot 4,6 = 92$.

б) Якщо придбано 200 білетів, то $\lambda = np = 200 \cdot \frac{1}{20} = 10$. Позначивши через μ кількість виграшів, згідно з теоремою Пуассона матимемо

$$P\{\mu \geq 5\} = \sum_{k=5}^{200} P_{200}(k) \approx \sum_{k=5}^{+\infty} P(k),$$

звідки з таблиці 4 дістаємо, що $P\{\mu \geq 5\} \approx 0,971$. ▷

Приклад 4. Підручник надруковано тиражем 90000 примірників. Імовірність неправильного брошурування підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.

◁ Брошурування кожного підручника можна розглядати як випробування. Оскільки випробування незалежні й мають однакову ймовірність неправильного брошурування, то можна скористатись формулою Пуассона.

Згідно з умовою задачі $n = 90000$ (достатньо велике), $p = 0,0001$ (мале), $k = 5$. Тоді $\lambda = np = 90000 \cdot 0,0001 = 9$, а отже,

$$P_{90000}(5) \approx \frac{9^5}{5!} e^{-9} \approx 0,0607. \ \triangleright$$

Послідовність подій, які з'являються у випадкові моменти часу, називається **потоком подій.** Вважатимемо, що потік подій є **пуассоновим**, коли виконуються умови:

1) середнє число подій, які з'являються за одиницю часу, є сталим і дорівнює a (інтенсивність потоку);

2) події з'являються поодинці, а не групами;

3) відсутня післядія, тобто ймовірність появи події не залежить від появи або не появи події раніше та не впливає на найближче майбутнє.

Якщо потік подій є пуассоновим, то ймовірність появи події A k разів за час t знаходимо за формулою

$$P_t(k) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}. \tag{6}$$

Приклад 5. Середня кількість замовлень таксі, що надходить до диспетчерського пункту щохвилини, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за 2 хвилини надійде: 1) 4 замовлення; 2) менше 4 замовлень; 3) не менше 4 замовлень.

$\triangleleft$ Скористаємось формулою (6), де $a = 3$, $t = 2$.

1) $k = 4$, $P_2(4) = \dfrac{(3 \cdot 2)^4}{4!} e^{-3 \cdot 2} = \dfrac{6^4}{4!} e^{-6} \approx 0,133853$;

2) $k < 4$, тобто $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Тоді

$$P\{k < 4\} = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) + P_2(3) = \frac{6^0}{0!} e^{-6} + \frac{6^1}{1!} e^{-6} + \frac{6^2}{2!} e^{-6} + \frac{6^3}{3!} e^{-6} \approx$$

$$\approx 0,002479 + 0,014873 + 0,044618 + 0,089235 = 0,151205;$$

3) $k \geq 4$, тому $P\{k \geq 4\} = 1 - P\{k < 4\} = 1 - 0,151205 = 0,848795$. $\triangleright$

2.3. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Заміна формули Бернуллі при великих n наближеною формулою Пуассона оправдана, якщо $npq \leq 9$. Якщо ж добуток npq великий, то для обчислення $P_n(k)$ використовують локальну теорему Муавра-Лапласа.

Теорема 3 (локальна теорема Муавра-Лапласа). *Нехай у кожному з n незалежних випробувань імовірність настання події A однакова й дорівнює p, $0 < p < 1$, $P_n(k)$ – імовірність того, що при цих n випробуваннях подія A настане k разів. Тоді*

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} (1 + \alpha_n(x_k)),$$

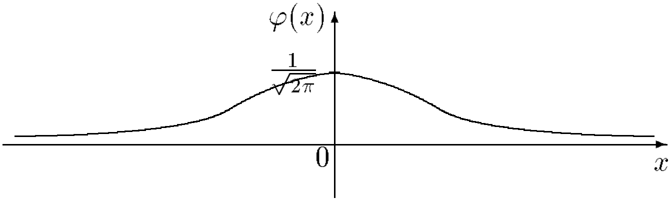
де $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ *і* $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n(x_k) = 0$ *рівномірно для всіх k, для яких x_k належать деякому проміжку $(a;\, b)$.*

При зроблених припущеннях відносно p, якщо n достатньо велике, правильна наближена рівність

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_k), \qquad (7)$$

де
$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \;\; \varphi(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}.$$

Функція $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, називається **функцією Гаусса** або **локальною (малою) функцією Лапласа**. Вона є парною функцією, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $x \geq 0$, і $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$, $\varphi_{max} = \varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.



Функція φ протабульована (таблиця 1 у додатку).

Приклад 6. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що з 200 народжених дітей буде 95 дівчаток.

◁ Оскільки необхідно знайти ймовірність того, що буде 95 дівчаток, то $n = 200$, $k = 95$, $q = 0,515$, $p = 1 - 0,515 = 0,485$. Зазначимо, що $npq = = 200 \cdot 0,485 \cdot 0,515 = 49,955 > 9$, тому використовуємо формулу (7), де
$$\sqrt{npq} = \sqrt{49,955} \approx 7,068, \;\; x_k = \frac{95 - 200 \cdot 0,485}{7,068} \approx -0,283.$$
Тоді
$$P_{200}(95) = \frac{1}{7,068} \varphi(-0,283) = \frac{1}{7,068} \varphi(0,283) = \frac{1}{7,068} \cdot 0,3836 \approx 0,054. \; \triangleright$$

2.4. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

При розв'язуванні практичних задач часто виникає необхідність обчислювати суми вигляду $\sum\limits_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$. Безпосереднє обчислення таких сум, навіть при застосуванні локальної теореми Муавра-Лапласа, дуже громіздке. Крім того, при додаванні великої кількості наближених значень $P_n(k)$ можуть утворюватись значні похибки. Такі суми доцільно обчислювати за допомогою граничної теореми, яка називається інтегральною теоремою Муавра-Лапласа.

Теорема 4. (інтегральна теорема Муавра-Лапласа). *Нехай k – число успіхів при n незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність успіху дорівнює p, $0 < p < 1$. Тоді ймовірність $P\{k_1 \le k \le k_2\}$ того, що число успіхів k міститься в межах від k_1 до k_2, наближено дорівнює*

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \qquad (8)$$

де $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i \in \{1, 2\}$.

Формулу (8) можна записати по-іншому. Для цього введемо функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \ x \in \mathbb{R}, \qquad (9)$$

значення якої наведено у таблиці 2. Цю функцію називають **інтегральною функцією Лапласа.** У таблиці наведено значення функції Φ для $x \le 5$, оскільки при $x > 5$ можна вважати, що $\Phi(x) = 0,5$. Зазначимо, що функція Φ непарна, тобто $\Phi(-x) = \Phi(x)$, $x \ge 0$.

Якщо скористатись (9), то формулу (8) можна подати у вигляді

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (10)$$

де $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $\quad i \in \{1, 2\}$.

Приклад 7. Імовірність того, що деталь не пройшла перевірку відділу технічного контролю, дорівнює $p = 0,2$. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей неперевіреними виявиться від 70 до 100 деталей.

$\triangleleft$ Маємо $n = 400$, $k_1 = 70$, $k_2 = 100$, $p = 0,2$, $q = 0,8$,

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \approx -1,25, \ x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \approx 2,5.$$

Тоді

$$P\{70 \le k \le 100\} \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) =$$

$$= 0,49379 + 0,39435 = 0,88814. \ \triangleright$$

Формулу (10) можна подати й в іншому вигляді. Якщо $k_1 \le k \le k_2$, то

$$x_1 \equiv \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \equiv x_2.$$

Тому (10) набуде вигляду

$$P\left\{x_1 \le \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \le x_2\right\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \tag{11}$$

Нехай задано довільне число $\varepsilon > 0$. Знайдемо за допомогою формули (11) ймовірність події $\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\}$. Очевидно, що

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon \le \frac{k - np}{n} \le \varepsilon\right\} =$$

$$= P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Отже,

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{12}$$

За допомогою формули (12) можна одержати інтервальну оцінку ймовірності події через частоту.

Нехай β – деяке число з $(0,\,1)$, яке називають **надійним рівнем**. З таблиці 2 для значень функції Φ знайдемо значення x_β, для якого $2\Phi(x_\beta)=\beta$. Тоді (12) можна записати у вигляді

$$P\left\{\frac{k}{n}-\varepsilon\le p\le\frac{k}{n}+\varepsilon\right\}\approx\beta, \tag{13}$$

де ε визначається з умови

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=x_\beta,\ \text{ тобто }\ \varepsilon=x_\beta\sqrt{\frac{pq}{n}}. \tag{14}$$

Обчислити ε за цією формулою неможна, оскільки p і q невідомі. Тому оцінимо pq:

$$pq=p(1-p)=p-p^2=-(p-1/2)^2+1/4\le 1/4,$$

а отже,

$$\varepsilon\le\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}. \tag{15}$$

Аналогічно знаходимо, що

$$n\approx\frac{x_\beta^2}{\varepsilon^2}pq \tag{16}$$

Співвідношення (13), враховуючи (15), можна подати у вигляді

$$P\left\{\frac{k}{n}-\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\le p\le\frac{k}{n}+\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right\}\approx\beta.$$

Інтервал

$$\left(\frac{k}{n}-\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}},\ \frac{k}{n}+\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right)$$

називається **надійним інтервалом,** а його кінці – **надійними межами** для ймовірності p при надійному рівні β. Отже, надійний інтервал – це інтервал з випадковими кінцями, залежними від k, який з імовірністю не меншою, ніж β, накриває цілком певне (але невідоме) значення p. Інакше кажучи, з надійністю β можна вважати, що

$$p \approx \frac{k}{n} \pm \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}},$$

де x_β визначається з умови $2\Phi(x_\beta) = \beta$. Отже, замінюючи невідому ймовірність події її частотою, ми робимо (з надійністю β) похибку не більшу, ніж $\dfrac{x_\beta}{2\sqrt{n}}$.

Приклад 8. Посіяно 600 насінин гороху з імовірністю проростання $p = 0,9$ для кожної насінини. Знайти межу для абсолютної величини відхилення частоти проросших насінин від ймовірності p, якщо ця межа повинна гарантуватися з ймовірністю $P = 0,995$.

$\triangleleft$ Маємо $n = 600$, $p = 0,9$, $q = 1 - 0,9 = 0,1$, $P = 0,995$. Тоді за формулою (12)

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - 0,9\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0,9\cdot 0,1}}\right) = 0,995.$$

Із таблиці 2 значень функції Φ знаходимо, що $2\Phi(x) = 0,995$ для $x = 2,81$, і отже,

$$\varepsilon = 2,81 \cdot \sqrt{\frac{0,09}{600}} = 0,034. \triangleright$$

Приклад 9. При надійному рівні $\beta = 0,95$ знайти надійні межі для ймовірності події, яка настала 1260 разів у серії з 10000 випробувань.

$\triangleleft$ З рівності $2\Phi(x) = 0,95$ або $\Phi(x) = 0,475$ за таблицею 2 знаходимо, що для $x_\beta = 1,96$. Тому надійними межами для параметра p є

$$\frac{k}{n} \pm \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} = \frac{1260}{10000} \pm \frac{1,96}{2\sqrt{10000}} \approx 0,126 \pm 0,01,$$

а надійним інтервалом – (0,116; 0,136). $\triangleright$

Вправи

1. Імовірність того, що телевізор не пройшов перевірку перед продажем дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 телевізорів, які знаходяться на складі, не перевірено від 70 до 100.

2. На кондитерській фабриці для святкових дитячих подарунків відібрано порівну цукерки чотирьох найменувань А, Б, В, Г та розфасовано навмання у коробки по 8 цукерок у кожній. Яка ймовірність того, що в навмання відібраній коробці буде одна цукерка найменування А ?

3. Відомо, що 20% відсотків мешканців певного міста добираються на роботу тролейбусом. Чому дорівнює ймовірність того, що серед чотирьох випадково відібраних осіб: а) не буде жодної, хто їде на роботу тролейбусом; б) виявиться принаймні одна особа, яка добирається на роботу тролейбусом; в) буде не більше двох, хто надає перевагу тролейбусу?

4. Скільки разів треба підкинути гральний кубик, щоб найімовірніше число випадання шістки дорівнювало 32 ?

5. Імовірність виготовлення деталі першого гатунку на деякому верстаті дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 26 деталей половина буде першого гатунку.

6. Імовірність виграшу по облігаціях займу за весь період його дії дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що дехто, купуючи 8 облігацій, виграє по 6 з них ?

7. Завод відправив на базу 4000 якісних виробів. Імовірність того, що по дорозі виріб пошкодиться, дорівнює 0,00025. Знайти ймовірність того, що на базу надійде 5 пошкоджених виробів.

8. Середня кількість замовлень, які надходять до магазину кожну годину, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві години надійде: 1) 5 замовлень; 2) менше 5 замовлень; 3) не менше 5 замовлень.

9. Серднє число інкасаторів, які прибувають вранці на автомобілі до банку протягом 15 хвилин, дорівнює 2. Прибуття інкасаторів відбувається випадково й незалежно. Знайти ймовірність того, що протягом 15 хвилин до банку прибуде: 1) принаймні два інкасотори; 2) менше трьох.

10. Серед виробів деякого підприємства брак зустрічається з ймовірністю 0,015. Знайти ймовірність того, що серед 200 виробів бракованих буде 5 виробів.

11. Імовірність виготовлення виробу вищого гатунку дорівнює 0,8. Виготовлено 120 виробів. Чому дорівнює найімовірніше число виробів вищого гатунку та ймовірність такого числа виробів?

12. Імовірність появи позитивного результату в кожному з n незалежних випробувань $p = 0,9$. Скільки треба провести випробувань, щоб з імовірністю $P = 0,98$ можна було сподіватись, що не менше 150 випробувань дадуть позитивний результат?

13. Фірма збирається придбати партію з 100000 одиниць деякого товару. Відомо, що 1% товару зазначеного типу має дефекти. Яка ймовірність того, що в цій партії буде від 950 до 1050 дефектних одиниць товару?

14. Відділ технічного контролю перевіряє 900 деталей на стандартність. Імовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,9. Знайти з ймовірністю 0,9544 межі, в яких буде міститися число k стандартних деталей серед перевірених.

15. З конвейєра сходить у середньому 85 відсотків виробів першого гатунку. Скільки виробів треба взяти, щоб з ймовірністю 0,997 відхилення частоти виробів першого гатунку в них від 0,85 за абсолютною величиною не перевищувало 0,01.

16. У ході перевірки аудитор випадково відбирає 100 рахунків. Знайти ймовірність того, що він виявить 4 рахунки з помилками, якщо в середньому 3% рахунків містять помилки.

17 На виборах до Верховної Ради певний блок підтримують 80% населення деякого округу. У яких межах з ймовірністю 0,95 знаходиться число тих, хто проголосував "так" на виборах, якщо число виборців дорівнює 1200000?

Відповіді

1. 0,8882. **2.** 0,27. **3.** а) 0,4096; б) 0,5904; в) 0,9728. **4.** $\frac{32}{121} \le p \le \frac{33}{121}$. **5.** 0,093. **6.** 0,0038. **7.** 0,003066. **8.** 1) $P_2(5) = \frac{6^5 e^{-6}}{5!} \approx 0,160628$; 2) $P_2\{k < 5\} = \sum_{k=0}^{4} P_2(k) \approx 0,285058$; 3) $P_2\{k \ge 5\} = 1 - P_2\{k < 5\} \approx 0,714942$. **9.** 1) 0,594; 2) 0,6767. **10.** 0,1185. **11.** $k_0 = 96$; $P_{120}(96) = 0,091$. **12.** $n = 175$. **13.** 0,88816. **14.** $792 \le k \le 828$. **15.** $n \approx 11247$. **16.** $P_{100}(4) \approx 0,168031$. **17.** $959160 \le k \le 960840$.

3. Випадкові величини

3.1. Випадкові величини та функція розподілу

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини. Випадкова величина – це змінна величина, значення якої залежить від випадку. Прикладами випадкових величин є, наприклад, число очок, що випало на гральному кубику при одному киданні, число бракованих виробів серед навмання відібраних, число влучень у ціль при певний кількості пострілів і т.д. Значенням випадкової величини є число, яке ставиться у відповідність кожному можливому результатові випробування. Оскільки результати випробування описуються елементарними подіями, то випадкову величину можна розглядати як функцію $\xi = \xi(\omega)$ на просторі елементарних подій Ω.

Означення 1. *Нехай задано ймовірнісний простір* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Будь-яка дійснозначна функція* $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, *така, що*

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F} \tag{1}$$

для довільного $x \in \mathbb{R}$, *називається* **випадковою величиною.**

Множину $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\}$ будемо надалі позначати $\{\xi < x\}$. Аналогічний зміст мають записи $\{x_1 \le \xi < x_2\}$, $\{\xi > x\}$, $\{\xi \le x\}$, тощо. Оскільки згідно з (1) $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$ для довільного $x \in \mathbb{R}$, то визначена ймовірність $P\{\xi < x\}$.

Означення 2. *Функція*

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, \ \ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

називається **функцією розподілу** *випадкової величини* ξ.

Приклад 1. Двоє гравців по одному разу підкидають однорідну монету правильної форми. Якщо випав герб, то перший гравець дістає одну гривню, а якщо напис, то віддає гривню. Знайти функцію розподілу випадкової величини ξ – виграшу першого гравця.

$\triangleleft$ Простором елементарних подій є множина $\Omega = \{\ \text{Г},\ \text{Н}\ \}$. Оскільки монета однорідна, то $P\{\ \text{Г}\ \} = P\{\ \text{Н}\ \} = 0,5$. Випадкова величина ξ визначається так: $\xi(\ \text{Н}\ ) = -1$, $\xi(\ \text{Г}\ ) = 1$, тобто набуває два значення.

Розглянемо довільне $x \in \mathbb{R}$. Тоді:

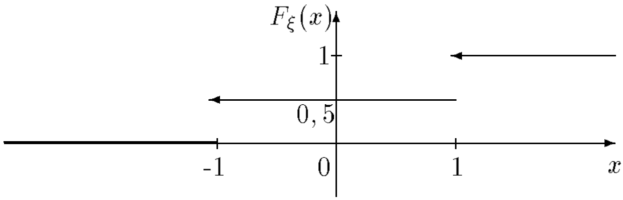
1) якщо $-\infty < x \leq -1$, то $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = 0$;

2) якщо $-1 < x \leq 1$, то $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\text{ Н }\} = 0,5$;

3) якщо $1 < x < +\infty$, то $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\text{ Н }\} + P\{\text{ Г }\} = = 0,5 + 0,5 = 1$.

Отже,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 0,5, & -1 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



. $\triangleright$

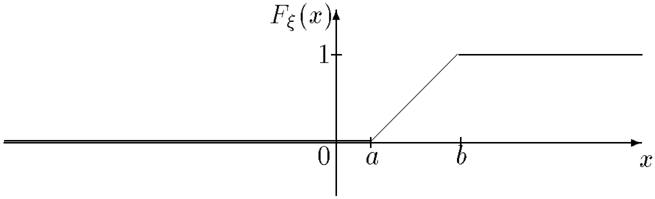
Приклад 2. На відрізку числової прямої навмання ставлять точку, причому вважають, що всі положення точки рівноможливі й імовірність її попадання в деякий інтервал пропорційна його довжині. Знайти функцію розподілу випадкової величини ξ – координати точки.

$\triangleleft$ У цьому стохастичному експерименті $\Omega = [a; b]$, $\mathcal{F}$ – σ–алгебра борельових підмножин відрізка $[a; b]$, P – ймовірність на $\mathcal{F}$ така, що $P\{[c; d]\} = \dfrac{d-c}{b-a}$, якщо $[c; d] \subset [a; b]$. Означимо випадкову величину ξ так: $\xi(\omega) = \omega$, $\omega \in [a; b]$, тобто ξ – координата одержаної точки. Тоді

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ [a; x), & a < x \leq b, \\ [a; b], & x > b. \end{cases}$$

Отже, $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$ для кожного $x \in \mathbb{R}$, тобто ξ – випадкова величина. Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



Вона визначає рівномірний розподіл на $[a;\, b]$. $\triangleright$

Розглянемо властивості функції розподілу.

Властивість 1. *Функція розподілу випадкової величини є невід'ємною і її значення містяться між нулем і одиницею:*

$$0 \le F_\xi(x) \le 1, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

$\triangleleft$ Ця властивість безпосередньо випливає з означення функції розподілу випадкової величини. $\triangleright$

Властивість 2. *Імовірність того, що випадкова величина ξ набуде значення з $[x_1;\, x_2)$, дорівнює різниці $F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$:*

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1). \tag{3}$$

$\triangleleft$ Оскільки

$$\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} \bigcup \{x_1 \le \xi < x_2\},$$

то згідно з теоремою додавання для випадку несумісних подій

$$F_\xi(x_2) = P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \le \xi < x_2\} =$$

$$= F_\xi(x_1) + P\{x_1 \le \xi < x_2\},$$

звідки отримуємо (3). $\triangleright$

Властивість 3. *Функція розподілу є неспадною, тобто: $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$ для довільних $\{x_1,\, x_2\} \subset \mathbb{R}$ таких, що $x_1 < x_2$.*

$\triangleleft$ Якщо $x_1 < x_2$, то згідно з (3) і властивостями ймовірності

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) \ge 0,$$

тобто $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$, $x_1 < x_2$. $\triangleright$

Властивість 4. *Функція розподілу неперервна зліва, тобто*

$$F_\xi(x-0) = F_\xi(x), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Властивість 5. *Імовірність набування випадковою величиною конкретного значення визначається формулою*

$$P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0+0) - F_\xi(x_0), \ \ x_0 \in \mathbb{R}.$$

$\lhd$ Згідно з властивістю 3 $P\{x_0 \le \xi < x_0+\varepsilon\} = F_\xi(x_0+\varepsilon) - F_\xi(x_0)$ для довільного $\varepsilon > 0$. Тому

$$P\{\xi = x_0\} = \lim_{\varepsilon\to 0} P\{x_0 \le \xi < x_0+\varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\xi(x_0+\varepsilon) - F_\xi(x_0) =$$

$$= F_\xi(x_0+0) - F_\xi(x_0). \ \rhd$$

Властивість 6. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1.$

$\lhd$ Справді,

$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = P\{\xi < -\infty\} = P(\emptyset) = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = P\{\xi < +\infty\} = P(\Omega) = 1. \ \rhd$$

Виявляється, що й навпаки, довільну неспадну неперервну зліва функцію F_ξ, для якої $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$, можна розглядати як функцію розподілу деякої випадкової величини ξ [13].

Зазначимо, що випадкова величина визначається своєю функцією розподілу неоднозначно: різні випадкові величини можуть мати ту саму функцію розподілу. Наприклад, якщо ξ набуває двох значень 0 і 1 з імовірностями 0,5, а $\eta = 1-\xi$, то ці випадкові величини різні, але їхні функції розподілу однакові:

$$F_\xi(x) = F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,5, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3.2. Дискретні та неперервні випадкові величини. Розподіли випадкових величин

3.2.1. Дискретні випадкові величини. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір.

Означення 3. *Випадкова величина ξ називається* **дискретною** *випадковою величиною, якщо вона набуває значень, які утворюють скінченну або зліченну множину.*

Для того щоб описати таку випадкову величину, досить для кожного з її можливих значень задати ймовірність його набування

$$p_k = P\{\xi = x_k\}, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Таблиця вигляду

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

, (5)

де в першому рядку стоять усі можливі значення випадкової величини ξ, а в другому ймовірності, з якими ці значення набуваються, називається **рядом (законом) розподілу** дискретної випадкової величини ξ.

Значення x_n, $n \in \mathbb{N}$, випадкової величини можуть бути якими завгодно, а $p_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, і $\sum\limits_n p_n = P(\Omega) = 1$. Навпаки, кожна таблиця вигляду (5), в якій x_n, $n \in \mathbb{N}$, – різні дійсні числа, $p_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, і $\sum\limits_n p_n = 1$, задає випадкову величину ξ, яка має цю таблицю своїм розподілом. Справді, досить взяти

$$\Omega = \{x_n, \, n \in \mathbb{N}\}, \ P(x_n) = p_n, \ \xi(x_n) = x_n, \, n \in \mathbb{N}.$$

За таблицею розподілу (5) можна побудувати функцію розподілу випадкової величини

$$F_\xi(x) = \sum_{n \,:\, x_n < x} p_n, \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Цей запис означає, що підсумовування поширюється на ті індекси n, для яких $x_n < x$. Функція розподілу дискретної випадкової величини має розриви першого роду у кожній точці $x = x_n$, а саме

$$F_\xi(x_n + 0) - F_\xi(x_n) = P\{\xi = x_n\} = p_n.$$

Якщо точки (x_n, p_n), $n \in \mathbb{N}$, нанести на координатну площину і сполучити ламаною лінією, то дістанемо **многокутник (полігон) розподілу** випадкової величини.

Приклад 3. Розглядається робота трьох незалежно працюючих технічних пристроїв. Імовірність нормальної роботи першого пристрою дорівнює 0,2, другого – 0,4, третього – 0,5. Випадкова величина ξ – число працюючих пристроїв. Побудувати ряд і многокутник розподілу випадкової величини ξ та знайти її функцію розподілу.

$\lhd$ Можливі значення випадкової величини ξ: 0, 1, 2, 3. Нехай A_i – подія, що i–тий пристрій працюватиме нормально, тоді $\overline{A}_i$ означає відмову нормальної роботи i–го пристрою. Очевидно, що

$$P(A_1) = 0,2;\ P(A_2) = 0,4;\ P(A_3) = 0,5;\ P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0,8;$$

$$P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 0,6;\ P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 0,5.$$

Тому

$$p_1 = P\{\xi = 0\} = P\{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\} = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,24;$$

$$p_2 = P\{\xi = 1\} = P\{A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\} + P\{\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3\} + P\{\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3\} =$$

$$= 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,46;$$

$$p_3 = P\{\xi = 2\} = P\{\overline{A}_1 A_2 A_3\} + P\{A_1\overline{A}_2 A_3\} + P\{A_1 A_2\overline{A}_3\} =$$

$$0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,26;$$

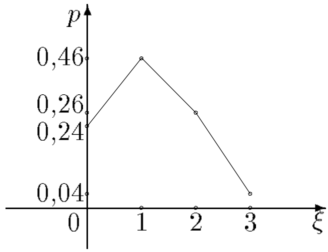
$$p_4 = P\{\xi = 3\} = P\{A_1 A_2 A_3\} = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,04.$$

Отже, ряд розподілу випадкової величини ξ має вигляд:

ξ	0	1	2	3
p	0,24	0,46	0,26	0,04

.

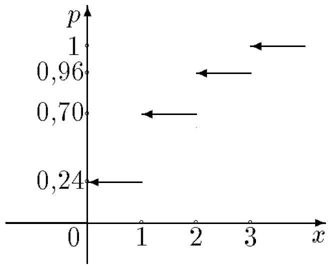
Нарисуємо многокутник (полігон) розподілу



Функція розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,24, & 0 < x \le 1, \\ 0,70, & 1 < x \le 2, \\ 0,96, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Графік функції розподілу зображено на рисунку



▷

Наведемо розподіли випадкових величин, які часто зустрічаються в різних моделях.

Рівномірний розподіл на множині $\{1, \ldots, n\}$. Випадкова величина ξ, що набуває цілочислові значення від 1 до n, має рівномірний розподіл, якщо

$$p_m \equiv P\{\xi = m\} = \frac{1}{n}, \ m \in \{1, \ldots, n\}.$$

Многокутник розподілу випадкової величини ξ є відрізком прямої, паралельної осі Ox. Кінці відрізка мають координати $(1; 1/n)$ і $(n; 1/n)$.

Гіпергеометричний розподіл. Випадкова величина ξ має гіпергеометричний розподіл, якщо значення $\xi \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $m = \min\{n, M\}$ і

$$p_k \equiv P\{\xi = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k \in \{0, 1, \ldots, m\}.$$

Гіпергеометричний розподіл має місце, наприклад, у задачі: нехай у партії є N виробів, серед яких M виробів першого гатунку; з цієї партії навмання береться для контролю n виробів; треба знайти закон розподілу випадкової величини ξ – числа виробів першого гатунку серед вибраних n виробів.

Геометричний розподіл. Випадкова величина ξ має геометричний розподіл, якщо

$$p_m \equiv P\{\xi = m\} = q^m p,\ m \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < p < 1,\ q = 1 - p.$$

Геометричний розподіл має випадкова величина ξ, що дорівнює числу випробувань Бернуллі до першого успіху з ймовірністю успіху p, $0 < p < 1$.

Розподіл Пуассона. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром λ, якщо

$$p_m \equiv P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},\ m \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda > 0.$$

Біномний розподіл. Цілочислова випадкова величина ξ має біномний розподіл, якщо

$$p_m \equiv P\{\xi = m\} \equiv P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},\ m \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

$$0 < p < 1,\ q = 1 - p.$$

3.2.2. Неперервні випадкові величини. Очевидно, що коли множина елементарних подій Ω дискретна, то і випадкова величина, визначена на Ω, також дискретна. Поряд з дискретними випадковими величинами в теорії ймовірностей та її застосуваннях часто використовуються неперервні випадкові величини. Множина значень неперервної випадкової величини незліченна і є деяким проміжком, скінченним або нескінченним.

Не кожна випадкова величина, яка визначена на незліченній множині Ω, є неперервною.

Означення 4. *Випадкову величину ξ називають* **неперервною**, *якщо її функцію розподілу можна подати у вигляді*

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt, \ x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $p_\xi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, і задовольняє умову

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1. \tag{8}$$

Функція p_ξ називається **щільністю розподілу ймовірностей** *або* **щільністю розподілу**.

Розглядатимемо такі випадкові величини, для яких p_ξ є неперервною на $\mathbb{R}$, крім, можливо, скінченного числа точок. З означення випливає, що в точках неперервності щільність розподілу дорівнює похідній функції розподілу

$$F'_\xi(x) = p_\xi(x). \tag{9}$$

Розглянемо деякі властивості неперервної випадкової величини.

Властивість 1. *Для довільних $\{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}$, де $x_1 < x_2$,*

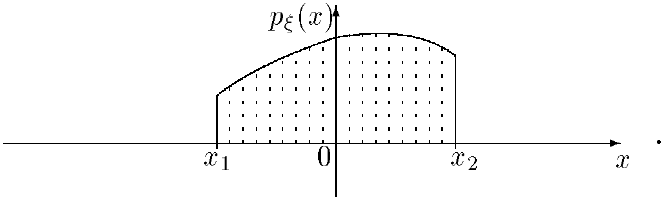
$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx. \tag{10}$$

◁ Справді

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p_\xi(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_\xi(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} p_\xi(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_\xi(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx. \ \triangleright$$

Легко бачити, що ймовірність $P\{x_1 \le \xi < x_2\}$ дорівнює площі фігури, обмеженої прямими $x = x_1$, $x = x_2$, $y = 0$ і графіком функції p_ξ



Властивість 2. *Імовірність того, що неперервна випадкова величина набуде конкретного значення, дорівнює нулю.*

◁ Якщо ξ – неперервна випадкова величина, то її функція розподілу F_ξ є неперервною функцією. Тому згідно з властивістю 5 функції розподілу

$$P\{\xi = x\} = F_\xi(x+0) - F_\xi(x) = F_\xi(x) - F_\xi(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \ \triangleright$$

З властивостей 1 і 2 випливає, що

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = P\{x_1 \le \xi \le x_2\} = P\{x_1 < \xi < x_2\} =$$

$$= P\{x_1 < \xi \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx.$$

Отже, щільність розподілу – невід'ємна функція, що визначена на $\mathbb{R}$, і задовольняє умову (8). Навпаки, кожна невід'ємна функція, що визначена на $\mathbb{R}$ і для яких має місце рівність(8), є щільністю розподілу деякої неперервної випадкової величини.

Приклад 4. Щільність ймовірності випадкової величини ξ має вигляд

$$p_\xi(x) = \frac{A}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Знайти: 1) коефіцієнт A; 2) $P\{0 \le \xi < 5\}$; 3) F_ξ.

$\lhd$ 1) З умови $p_\xi(x) \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$, випливає, що $A \ge 0$, а з умови (8) отримуємо, що

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1+x^2}dx = A \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = A \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \operatorname{arctg} x \Big|_a^b =$$

$$= A(\,\pi/2 + \pi/2\,) = A\pi; \;\; A\pi = 1, \text{ тобто } A = 1/\pi.$$

Отже,

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2)

$$P\{0 \le \xi < 5\} = \int\limits_0^5 p_\xi(x)dx = \int\limits_0^5 \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x \Big|_0^5 =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} 5 - 0) \approx 0,435.$$

3)

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^x \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} t \Big|_a^x = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} a\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x, \;\; x \in \mathbb{R}. \;\rhd$$

Приклад 5. Випадкова величина ξ підпорядкована закону розподілу з щільністю

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a\sin x, & 0 < x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

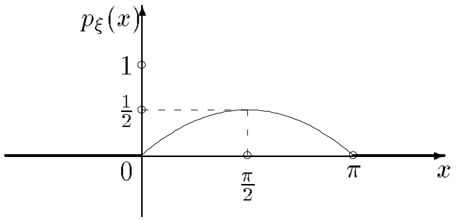
Знайти коефіцієнт a; побудувати графік щільності розподілу; знайти ймовірність попадання випадкової величини на ділянку від 0 до $\pi/2$; знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

$\triangleleft$ Скориставшись означенням щільності розподілу, одержуємо, що $a \geq 0$ і

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = a\int\limits_0^\pi \sin x dx = -a\cos x\Big|_0^\pi = 2a, \text{ звідки } a = 1/2.$$

Отже,

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$



З властивості 1 випливає, що

$$P\{0 \leq \xi < \pi/2\} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin x dx = \frac{-1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Знайдемо функцію розподілу. Нехай:
а) $x \leq 0$, тоді

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

б) $0 < x \leq \pi$, тоді

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_0^x \frac{1}{2}\sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x;$$

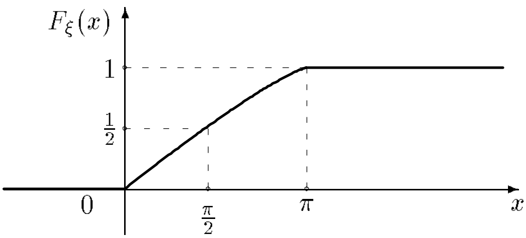
в) $x > \pi$, тоді

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\sin t dt + \int\limits_{\pi}^{x} 0dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Отже,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos x, \quad 0 < x \le \pi, \\ 1, \quad x > \pi. \end{cases}$$



$\triangleright$

Наведемо найпоширеніші закони розподілу неперервних випадкових величин.

Рівномірний розподіл на відрізку $[a;\, b]$**.** Неперервна випадкова величина ξ, має рівномірний розподіл на відрізку $[a;\, b]$, $a < b$, якщо її щільність розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, \quad x \notin [a;\, b], \\ \dfrac{1}{b-a}, \quad x \in [a;\, b]. \end{cases}$$

Для цієї випадкової величини ймовірність того, що вона набуває значення з інтервалу $(c;\, d) \subset [a;\, b]$, не залежить від положення цього інтервалу на числовій осі та пропорційна довжині цього інтервалу $d - c$:

$$P\{c < \xi < d\} = \int\limits_c^d \frac{1}{b-a}dt = \frac{d-c}{b-a}.$$

Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Експоненціальний (показниковий) розподіл. Неперервна випадкова величина ξ має експоненціальний (показниковий) розподіл з параметром $\lambda > 0$, якщо

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Нормальний розподіл (розподіл Гаусса). Неперервна випадкова величина ξ має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами a і $\sigma > 0$, якщо

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Якщо випадкова величина ξ нормально розподілена з параметрами a і σ, то це коротко записують у вигляді $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$. Функція розподілу

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} z = \frac{t-a}{\sigma},\ t = a + z\sigma, \\ dt = \sigma dz, \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} t & -\infty & x \\ \hline z & -\infty & \frac{x-a}{\sigma} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \left| \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

тобто

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),\ x \in \mathbb{R},$$

де Φ – інтегральна функція Лапласа.

Розподіл Максвелла. Неперервна випадкова величина ξ, яка набуває лише невід'ємні значення, має розподіл Максвелла з параметром $\alpha > 0$, якщо щільність розподілу ймовірностей

$$p_\xi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\alpha^3} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Розподіл Стьюдента (t-розподіл). Випадкова величина ξ, розподілена за законом Стьюдента, характеризується щільністю розподілу ймовірностей

$$p_\xi(x) = C\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

де k – параметр (число ступенів свободи), а стала C визначається рівністю

$$C = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi}\Gamma(\frac{k}{2})}.$$

Тут Γ – гамма-функція, яка визначається формулою

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \;\; a > 0.$$

Розподіл χ^2 (хі-квадрат розподіл). Випадкова величина ξ, розподілена за законом χ^2, якщо

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, \;\; x \le 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\frac{k}{2}) 2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \;\; x > 0, \end{cases}$$

де k – параметр (число ступенів свободи), а $\Gamma(\frac{k}{2})$ – значення гамма-функції.

Гамма-розподіл. Випадкова величина ξ, розподілена за гамма-законом, якщо

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, \;\; x \le 0, \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}, \;\; x > 0, \end{cases}$$

де $\alpha > -1$, $\beta > 0$ – параметри розподілу.

Бета-розподіл. Випадкова величина ξ має бета-розподіл з параметрами $a > 0$ і $b > 0$, якщо

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, \;\; x \notin [0;1], \\ \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \;\; x \in [0;1]. \end{cases}$$

Розподіл Коші. Випадкова величина ξ, розподілена за законом Коші, якщо

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Функція розподілу цієї випадкової величини має вигляд

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Зауваження. Крім дискретних і неперервних випадкових величин зустрічаються випадкові величини змішаного типу або неперервно-дискретні випадкові величини, а також сингулярні випадкові величини [1].

3.3. Багатовимірні випадкові величини

На одному й тому самому просторі елементарних подій може бути визначена не одна, а декілька випадкових величин. Це, наприклад, необхідно при моделюванні ситуації, коли об'єкт характеризується декількома випадковими параметрами. Так, при ймовірнісному моделюванні структури видатків витрати випадково відібраної сім'ї на харчування, взуття, одяг, транспорт, на задоволення духовних потреб є випадковими величинами, визначеними на одному просторі елементарних подій.

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано n випадкових величин $\xi_1 = \xi_1(\omega), \ldots, \xi_n = \xi_n(\omega)$. Зручно розглядати їх як координати n-вимірного випадкового вектора $\xi = (\xi_1; \ldots; \xi_n)$. Вектор $(\xi_1; \ldots; \xi_n)$ називається **випадковим**, або **n-вимірною випадковою величиною**. Розглянемо подію $\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\}$, що полягає у виконанні всіх записаних у дужках нерівностей. Оскільки ця подія є добутком подій $\{\xi_1 < x_1\}, \ldots, \{\xi_n < x_n\}$, які належать до σ-алгебри $\mathcal{F}$, то й $\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\} \in \mathcal{F}$ при будь-яких дійсних $x_1, \ldots, x_n$. Отже, визначено ймовірність події $P\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\}$.

Означення 5. *Функція*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\},$$

$$x = (x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

називається **функцією розподілу** *випадкового вектора* $(\xi_1; \ldots; \xi_n)$.

Сформулюємо деякі властивості функції розподілу багатовимірної випадкової величини. Доводяться ці властивості так само, як і в одновимірному випадку. Для зручності розглянемо випадок двовимірної випадкової величини.

Властивість 1. *Функція розподілу набуває значення з проміжку* $[0; 1]$:

$$0 \le F(x, y) \le 1, \ \ (x; y) \in \mathbb{R}^2.$$

Властивість 2. F *є неспадною функцією по кожній із змінних.*

Властивість 3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x, y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Властивість 4. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x, y) = 1.$

Властивість 5. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x, y) = \lim\limits_{x\to+\infty} P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\eta < y\} = F_\eta(y)$, $y \in \mathbb{R}$;

$\lim\limits_{y\to+\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y\to+\infty} P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} = F_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Поведінку випадкового вектора можна характеризувати не тільки за допомогою функції розподілу. З деякими іншими способами задання випадкового вектора ми познайомимося у випадку випадкових векторів двох основних типів – дискретного та неперервного.

3.3.1. Дискретні випадкові вектори. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір.

Означення 6. *Двовимірна випадкова величина* $(\xi; \eta)$ *називається* **дискретною**, *якщо множина значень, які вона набуває, є скінченною чи зліченною.*

Для задання дискретної двовимірної випадкової величини досить задати її можливі значення $(x_i; y_k)$ та ймовірності набування кожного з них $p_{ik} = P\{\xi = x_i, \eta = y_k\}$, де $\sum\limits_{i,k} p_{ik} = 1$.

Закон розподілу такої величини записують у вигляді таблиці

$\eta \setminus \xi$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$\sum$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{\cdot 2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_k	p_{1k}	p_{2k}	$\cdots$	p_{ik}	$\cdots$	$p_{\cdot k}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sum$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$	$\cdots$	1

Тут використано позначення: $p_{i\cdot} = \sum\limits_k p_{ik}, \quad p_{\cdot k} = \sum\limits_i p_{ik}$.

Згідно з аксіомою адитивності

$$p_{i\cdot} = \sum_k p_{ik} = \sum_k P\{\xi = x_i, \eta = y_k\} = P\{\xi = x_i\};$$

аналогічно $p_{\cdot k} = P\{\eta = y_k\}$.

Отже, імовірності $\{p_{i\cdot}, i \geq 1\}$ задають розподіл випадкової величини ξ, а $\{p_{\cdot k}, k \geq 1\}$ – розподіл випадкової величини η. При цьому

$$\sum_{i,k} p_{ik} = \sum_i p_{i\cdot} = \sum_k p_{\cdot k} = 1.$$

Приклад 6. Якість продукції характеризується двома випадковими параметрами ξ і η. Закон розподілу двовимірної випадкової величини $(\xi; \eta)$ задано таблицею

$\eta \setminus \xi$	5	6	7
0	0,2	0	0
0,1	0,1	0,15	0
0,2	0,05	0,15	0,1
0,3	0,05	0,1	0,1

.

Знайти закони розподілу випадкових величин ξ і η.

◁ Знайдемо $p_{i\cdot}$ та $p_{\cdot k}$, $\{i, k\} \subset \{1, 2, 3\}$. Тоді дістанемо таблицю

$\eta \setminus \xi$	5	6	7	$\sum$
0	0,2	0	0	0,2
0,1	0,1	0,15	0	0,25
0,2	0,05	0,15	0,1	0,3
0,3	0,05	0,1	0,1	0,25
$\sum$	0,4	0,4	0,2	1

.

Звідси випливає, що закони розподілу випадкових величин ξ і η мають вигляд:

ξ	5	6	7
p	$0,4$	$0,4$	$0,2$

,

η	0	$0,1$	$0,2$	$0,3$
p	$0,2$	$0,25$	$0,3$	$0,25$

. ▷

Функція розподілу випадкового вектора $(\xi;\eta)$ має вигляд

$$F(x,y)=\sum_{i:x_i<x}\ \sum_{k:y_k<y} p_{ik},\ \ (x;\,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Дамо означення умовного розподілу для дискретних двовимірних випадкових величин. **Умовні розподіли** $p_\xi(x_i/y_j)$ і $p_\eta(y_j/x_i)$ означимо рівностями

$$p_\xi(x_i/y_j)=P\{\xi=x_i/\eta=y_j\},\ i\geq 1;$$

$$p_\eta(y_j/x_i)=P\{\eta=y_i/\xi=x_i\},\ j\geq 1.$$

Згідно з означенням умовної ймовірності події маємо

$$p_\xi(x_i/y_j)=\frac{P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}}{P\{\eta=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad (p_{\cdot j}\neq 0);$$

$$p_\eta(y_j/x_i)=\frac{P\{\eta=y_j,\xi=x_i\}}{P\{\xi=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad (p_{i\cdot}\neq 0);$$

$$i\geq 1,\quad j\geq 1.$$

Приклад 7. За даними прикладу 6 знайти умовний розподіл випадкової величини ξ, за умови, що випадкова величина η набула значення $y_3=0,2$.

◁ Вибравши значення p_{i3} з третього рядка таблиці, що відповідає $j=3$, і поділивши їх на 0,3, одержимо умовний розподіл випадкової величини ξ, за умови, що випадкова величина $\eta=0,2:$

ξ	5	6	7
p	$\frac{0,05}{0,3}$	$\frac{0,15}{0,3}$	$\frac{0,1}{0,3}$

або

ξ	5	6	7
p	$1/6$	$1/2$	$1/3$

. ▷

3.3.2. Неперервні випадкові вектори. Розглянемо випадок двовимірних випадкових величин.

Означення 7. *Двовимірну випадкову величину* $(\xi;\eta)$ *називають* **неперервною**, *якщо існує така функція* p, *що функцію розподілу* F *цієї випадкової величини можна подати у вигляді*

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{y}p(u,v)dv\right)du,\ (x;\,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Функцію p *називають* **щільністю розподілу випадкового вектора** $(\xi;\eta)$. *При цьому*

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=p(x,y),$$

у точках неперервності функції p.

З означення щільності розподілу безпосередньо випливають такі її властивості:

1) $p(x,y)\geq 0,\ (x;\,y)\in\mathbb{R}^2$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)dv\right)du=1$;

3) $P\{(\xi,\,\eta)\in G\}=\iint\limits_{G}p(x,\,y)dxdy,\quad G\subset\mathbb{R}^2$.

Знаючи щільність розподілу p двовимірної величини $(\xi;\eta)$, можна легко знайти щільності розподілу для її компонент p_ξ та p_η. Справді, нехай F – двічі диференційовна функція. Тоді

$$F_\xi(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)dv\right)du,\ x\in\mathbb{R},$$

звідки

$$p_\xi(x)=\frac{dF_\xi(x)}{dx}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x,v)dv,\ x\in\mathbb{R};$$

аналогічно

$$F_\eta(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(u,v)du \right) dv, \ y \in \mathbb{R},$$

$$p_\eta(y) = \frac{dF_\eta(y)}{dy} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(u,y)du, \ y \in \mathbb{R}.$$

Означимо тепер умовні розподіли ймовірностей неперервних випадкових величин. Нехай $(\xi;\eta)$ – неперервна випадкова величина з щільністю розподілу $p(x,y)$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, а $p_\eta(y)$, $y \in \mathbb{R}$, – щільність розподілу η, $p_\eta(y_0) \neq 0$. Тоді, згідно з означенням, умовна щільність розподілу ймовірностей випадкової величини ξ за умови, що $\eta = y_0$, дорівнює

$$p(x/y_0) = \frac{p(x,y_0)}{p_\eta(y_0)} = \frac{p(x,y_0)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y_0)dx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Умовна щільність розподілу ймовірностей випадкової величин η за умови, що $\xi = x_0$

$$p(y/x_0) = \frac{p(x_0,y)}{p_\xi(x_0)} = \frac{p(x_0,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x_0,y)dy}, \quad y \in \mathbb{R},$$

де $p_\xi(x_0) \neq 0$, p_ξ – щільність розподілу випадкової величини ξ.

Приклад 8. Нехай щільність розподілу двовимірної випадкової величини

$$p(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & \text{при} \quad x \geq 0, \, y \geq 0, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти функції розподілу випадкового вектора $(\xi;\eta)$, випадкових величин ξ і η, умовні щільності розподілу.

$\triangleleft$ Спочатку доведемо коректність означення випадкового вектора $(\xi;\eta)$:

1) $p(x,y) \geq 0$, $(x;\, y) \in \mathbb{R}^2$, що очевидно;

$$2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx \right) dy = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} dx \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2y} dy =$$

$$= 2(-e^{-x}) \Bigg|_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2y} \right) \Bigg|_0^{+\infty} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Знайдемо функцію розподілу заданого випадкового вектора $(\xi; \eta)$:

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{y} p(u,v)dv \right) du = 2 \int\limits_{0}^{x} \left(\int\limits_{0}^{y} e^{-u-2v} dv \right) du =$$

$$= 2 \int\limits_{0}^{x} e^{-u} du \int\limits_{0}^{y} e^{-2v} dv = \left(e^{-u}\right) \Bigg|_0^{x} \left(e^{-2v}\right) \Bigg|_0^{y} =$$

$$= \left(1 - e^{-x}\right)\left(1 - e^{-2y}\right) \quad \text{при} \quad x \geq 0,\ y \geq 0.$$

$F(x,y) = 0$ для всіх інших точок $(x; y)$. Очевидно, що $p(x/y) = 0$ при $x < 0$, бо ξ не набуває від'ємних значень; якщо $x \geq 0$, то

$$p(x/y) = \frac{p(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx} =$$

$$= \frac{2e^{-x-2y}}{\int\limits_{0}^{+\infty} 2e^{-x-2y} dx} = \frac{2e^{-x}e^{-2y}}{2e^{-2y}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty}} = \frac{e^{-x}}{1} = e^{-x}.$$

Далі

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(u,y)dy \right) du = \int\limits_{0}^{x} du \int\limits_{0}^{+\infty} 2e^{-u-2y} dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{x} e^{-u} du \cdot 2 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2y} dy = \left(-e^{-u}\right) \Bigg|_0^{x} \left(-e^{-2y}\right) \Bigg|_0^{+\infty} = 1 - e^{-x} \quad \text{при} \quad x \geq 0,$$

$F_\xi(x) = 0 \quad$ при $\quad x < 0.$

Аналогічно $p(y/x) = 0$ при $y < 0$ і $p(y/x) = 2e^{-2y}$ при $y \geq 0$; $F_\eta(y) = 1 - e^{-2y}$ при $y \geq 0$, $F_\eta(y) = 0$ при $y < 0$. $\quad \triangleright$

3.3.3. Незалежність випадкових величин. Розглянемо n випадкових величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Означення 8. *Випадкові величини* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *називаються* **незалежними**, *якщо*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \ldots F_{\xi_n}(x_n),$$

де F *– функція розподілу* n*-вимірної випадкової величини* $(\xi_1; \ldots; \xi_n)$, F_{ξ_i} *– функція розподілу випадкової величини* ξ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Для простоти записів розглядатимемо випадок $n = 2$.

Якщо ξ, η – дискретні випадкові величини, то їхня незалежність означає, що $P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\}P\{\eta = y_j\}$ для будь-яких i, j.

Нехай ξ, η – незалежні неперервні випадкові величини з функціями розподілу F_ξ, F_η і щільностями розподілу ймовірностей p_ξ, p_η, а F і p – функція і щільність розподілу двовимірної випадкової величини $(\xi; \eta)$. Тоді згідно з означенням незалежності випадкових величин

$$F(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y), \; x \in \mathbb{R}, \; y \in \mathbb{R}.$$

Диференціюючи цю рівність по x і y, одержимо

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{dF_\xi(x)}{dx}\frac{dF_\eta(y)}{dy},$$

тобто $p(x, y) = p_\xi(x)p_\eta(y)$ $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Ця умова є й достатньою для незалежності випадкових величин ξ і η. Справді,

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{y} p(u, v) du \right) dv = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{y} p_\xi(u)p_\eta(v) du \right) dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)du \int_{-\infty}^{y} p_\eta(v)dv = F_\xi(x)F_\eta(y), \ (x; y) \in \mathbb{R}^2,$$

тобто випадкові величини ξ і η незалежні.

3.4. Функції від випадкових величин

Часто при побудові математичної моделі з'являються випадкові величини, зв'язані функціональною залежністю.

Розглянемо три випадкові величини: ξ_1 – число бракованих виробів у партії з 100 виробів, ξ_2 – число стандартних виробів у цій партії, ξ_3 – штраф за поставку недоброякісної партії виробів, який пропорційний кількості бракованих виробів з коефіцієнтом пропорційності k. Випадкові величини ξ_2 і ξ_3 можна розглядати як функції від $\xi_1 : \xi_2(\omega) = 100 - \xi_1(\omega)$, $\xi_3(\omega) = k\xi_1(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – імовірнісний простір і $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ – випадкові величини, визначені на множині Ω. Вважатимемо, що множиною значень випадкового вектора $\xi \equiv (\xi_1; \ldots; \xi_n)$ є множина D. Припустимо, що на множині D визначена деяка функція $f(x) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$, $x \equiv (x_1; \ldots; x_n)$. Якщо випадковий вектор ξ набув значення x, то вважатимемо, що випадковий вектор η набув значення $f(x)$. Ця нова випадкова величина називається **функцією випадкової величини** ξ: $\eta = f(\xi)$. У відповідності з означенням випадкової величини, η – випадкова величина тільки тоді, коли $\{\omega : \eta(\omega) < y\} \in \mathcal{F}$ для довільного $y \in \mathbb{R}^n$.

Розглянемо випадок, коли ξ – одновимірна випадкова величина, закон розподілу якої

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

.

Для кожного $i \in \{1, \ldots, n\}$ подія $\{\xi = x_i\}$ відбувається з імовірністю p_i; з такою самою ймовірністю випадкова величина η набуває значення $y_i = f(x_i)$. Маємо таку таблицю розподілу випадкової величини $\eta = f(\xi)$:

η	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

.

Якщо існують декілька значень x_i, для яких $f(x_i)$ однакові, то всі такі випадки об'єднуються в один, якому відповідає згідно з теоремою додавання ймовірність, що дорівнює сумі ймовірностей об'єднуваних випадків.

Приклад 9. Нехай розподіл випадкової величини ξ задано таблицею:

ξ	-2	-1	0	1	2
p	$0,1$	$0,1$	$0,3$	$0,3$	$0,2$

.

Знайти закон розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2 + 1$.

$\triangleleft$ Можливі значення η: $(-2)^2 + 1 = 5$, $(-1)^2 + 1 = 2$, $0^2 + 1 = 1$, $1^2 + 1 = 2$, $2^2 + 1 = 5$. Звідси випливає, що $\eta = \xi^2 + 1$ набуває значення 1, 2, 5 відповідно з імовірностями $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,1 + 0,3 = 0,4$, $p_3 = 0,1 + 0,2 = 0,3$.

Отже, закон розподілу η має вигляд

η	1	2	5
p	$0,3$	$0,4$	$0,3$

. $\triangleright$

Приклад 10. Нехай $(\xi; \eta)$ – двовимірна випадкова величина, закон розподілу якої наведено в таблиці

$\eta \setminus \xi$	1	2	3
1	$0,2$	0	0
2	$0,1$	$0,15$	0
3	$0,05$	$0,15$	$0,1$
4	$0,05$	$0,1$	$0,1$

.

Знайти ряд розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

$\triangleleft$ Складемо допоміжну таблицю для знаходження значень випадкової величини ζ

$\eta + \xi$	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7

.

Отже, випадкова величина ζ набуває значень: 2, 3, 4, 5, 6, 7 з ймовірностями відповідно: $p_1 = 0,2, p_2 = 0,1+0 = 0,1, p_3 = 0+0,15+0,05 = 0,2,$ $p_4 = 0,15+0+0,05 = 0,2, p_5 = 0,1+0,1 = 0,2, p_6 = 0,1$. Тому випадкова величина ζ має такий закон розподілу

ζ	2	3	4	5	6	7
p	0, 2	0, 1	0, 2	0, 2	0, 2	0, 1

. $\triangleright$

Тепер зупинимося на випадку, коли ξ – неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу p_ξ. Нехай $y = f(x)$ – диференційовна строго зростаюча функція на множині значень D випадкової величини ξ. За таких умов для функції f існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$. Тоді функція розподілу F_η випадкової величини $\eta = f(\xi)$ має вигляд

$$F_\eta(y) = P\{f(\xi) < y\} = P\{\xi < f^{-1}(y)\} = F_\xi(f^{-1}(y)),\ \ y \in \mathbb{R}.$$

Якщо функція f неперервна і монотонно спадна на D, то й обернена до неї функція є також монотонно спадною. Функція розподілу випадкової величини $\eta = f(\xi)$ дорівнює

$$F_\eta(y) = P\{f(\xi) < y\} = P\{\xi > f^{-1}(y)\} = 1 - P\{\xi < f^{-1}(y)\} =$$

$$= 1 - F_\xi(f^{-1}(y)),\ \ y \in \mathbb{R}.$$

Можна знайти також щільність розподілу випадкової величини $\eta = f(\xi)$. Якщо f – монотонно диференційовна функція на D, ξ – неперервна випадкова величина, то щільність розподілу випадкової величини $\eta = f(\xi)$ дорівнює

$$p_\eta(y) = p_\xi(f^{-1}(y))|(f^{-1}(y))'|,\ y \in E(f), \tag{11}$$

де $E(f)$ – множина значень функції f.

Якщо ж f – кусково строго монотонна функція на проміжку можливих значень ξ, то весь указаний проміжок розбивається на частинні проміжки, на кожному з яких f – монотонна функція.

Якщо цих проміжків n і на кожному з них обернену функцію до f позначити через f_i^{-1}, $i \in \{1, \ldots, n\}$, то щільність розподілу

$$p_\eta(y) = \sum_{i=1}^{n} p_\xi(f_i^{-1}(y))|(f_i^{-1}(y))'|, \ y \in E(f).$$

Приклад 11. Нехай задано щільність розподілу p_ξ випадкової величини ξ, можливі значення якої містяться в інтервалі $(a; b)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = 3\xi$.

$\triangleleft$ Оскільки функція $y = 3x$ диференційовна й зростає на $(a; b)$, то вона має обернену $x = y/3$, яка визначена на інтервалі $(3a; 3b)$, диференційовна й зростаюча на цьому інтервалі.

Згідно з (11) маємо

$$p_\eta(y) = p_\xi(y/3)|(y/3)'| = \frac{1}{3}p_\xi(y/3), \ y \in (3a;\ 3b). \ \triangleright$$

Приклад 12. Нехай p_ξ – щільність розподілу випадкової величини ξ. Знайти F_η і p_η випадкової величини $\eta = \xi^2$.

$\triangleleft$ Якщо $y \leq 0$, то $F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = 0$ і $p_\eta(y) = F_\eta^{'}(y) = 0$. При $y > 0$ маємо

$$F_\eta(y) = P\{\xi^2 < y\} = P\{-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}\} =$$
$$= F_\xi(\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y}),$$

звідки отримуємо, що

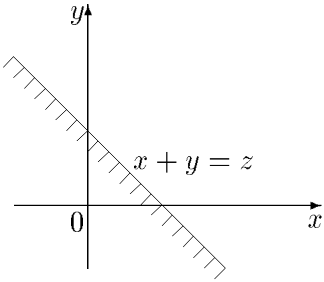
$$p_\eta(y) = \frac{d}{dy}(F_\xi(\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y})) = F_\xi^{'}(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + F_\xi^{'}(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}(p_\xi(\sqrt{y}) + p_\xi(-\sqrt{y})). \ \triangleright$$

Нехай задано двовимірну випадкову величину $(\xi; \eta)$, що має функцію розподілу F і щільність розподілу ймовірностей p. Знайдемо функцію та щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$. Згідно з означенням функції розподілу

$$F_\zeta(z) = P\{\zeta < z\} = P\{\xi + \eta < z\}, z \in \mathbb{R}.$$

Умова $\xi + \eta < z$ еквівалентна умові $(\xi; \eta) \in G$, де G – півплощина площини xOy, що визначається нерівністю $x + y < z$



Тому

$$F_\zeta(z) = P\{(\xi;\eta) \in G\} = \iint\limits_G p(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} p(x,y)dy \right) dx.$$

Зробимо у внутрішньому інтегралі заміну $y = u - x$, після чого змінимо порядок інтегрування

$$F_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{z} p(x, u - x)dudx = \int\limits_{-\infty}^{z} (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x, u - x)dx)du.$$

Звідки випливає, що щільність розподілу випадкової величини ζ

$$p_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x, z - x)dx, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Якщо випадкові величини ξ і η незалежні, то $p(x,y) = p_\xi(x)\times$ $\times p_\eta(y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, і тоді формула (12) набуде вигляду

$$p_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)p_\eta(z - x)dx, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Аналогічно можна довести, що

$$p_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(z - y)p_\eta(y)dy, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Функція p_ζ, утворена з функцій p_ξ і p_η за формулами (13) або (14), називається **згорткою** або **композицією** цих функцій.

Нехай ξ і η – незалежні дискретні випадкові величини, задані своїми законами розподілу. Тоді для визначення закону розподілу функції $\zeta = \xi + \eta$, треба знайти всі можливі значення ζ. Для цього треба додати кожне можливе значення ξ до всіх можливих значень η. Імовірності знайдених можливих значень ζ дорівнюють добутку ймовірностей відповідних значень ξ і η :

$$P\{\zeta = z\} = \sum_i P\{\xi = x_i\} P\{\eta = z - x_i\}.$$

Приклад 13. Випадкові величини ξ і η незалежні і мають відповідно рівномірний і показниковий розподіли:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0;1], \\ 1, & x \in [0;1]; \end{cases} \quad p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти $p_{\xi+\eta}$.

◁ Згідно з формулою (13) маємо

$$p_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u) p_\eta(z-u)du = \int_0^1 p_\eta(z-u)du, \ \ z \in \mathbb{R}.$$

Якщо $0 < u < z$, то $p_\eta(z-u) > 0$, а в решті випадків $p_\eta(z-u) = 0$. Тому при $0 < z \le 1$

$$p_{\xi+\eta}(z) = \int_0^z e^{-(z-u)}du = e^{u-z}\Big|_0^z = 1 - e^{-z},$$

а при $z > 1$

$$p_{\xi+\eta}(z) = \int_0^1 e^{-(z-u)}du = e^{u-z}\Big|_0^1 = e^{-z}(e-1).$$

Отже,

$$p_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 1 - e^{-z}, & 0 < z \le 1, \\ (e-1)e^{-z}, & z > 1. \ \triangleright \end{cases}$$

Приклад 14. Дві ремонтні бригади обслуговують водогінну систему міста. Час надходження чергової заявки на ремонт має показниковий розподіл з параметром λ. Першу заявку, яка надійшла, обслуговує перша бригада, наступну – друга бригада. Знайти закон розподілу випадкової величини – часу очікування своєї заявки другою бригадою.

$\triangleleft$ Нехай ξ – час очікування першої заявки, η – часовий інтервал між першою й другою заявкою. Очевидно, що ξ і η є незалежними випадковими величинами. Час очікування другою бригадою дорівнює сумі $\xi + \eta$. Згідно з умовою ξ і η мають показниковий розподіл зі щільністю

$$p_\xi(t) = p_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases}$$

Оскільки ξ і η незалежні випадкові величини, то

$$p_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(z) p_\eta(t-z) dz = \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda z} p_\eta(t-z) dz.$$

Якщо $z \ge t$, то $p_\eta(t-z) = 0$, і тому

$$p_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda z} \lambda e^{-\lambda(t-z)} dz = \lambda^2 e^{-\lambda t} \int\limits_{0}^{t} dz = \lambda^2 t e^{-\lambda t}.$$

Отже,

$$p_{\xi+\eta}(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases} \triangleright$$

Вправи

1. Є шість квитків у театр, чотири з яких на місця у першому ряду. Навмання вибирають 3 квитки. Скласти таблицю розподілу ймовірностей розподілу випадкової величини ξ – числа вибраних квитків першого ряду. Знайти $P\{\xi < 3\}$.

2. Випадкова величина ξ має закон розподілу

ξ	1	2	3	4	5
p	$1{,}5b^2$	b^2	b	b	0,5

.

Знайти b.

3. Випадкова величина ξ має закон розподілу

ξ	-3	-2	0	2	3
p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

.

Знайти: 1) функцію розподілу; 2) ймовірність $P\{|\xi| \leq 2\}$.

4. У місті 10 комерційних банків, у кожного з яких ризик банкрутства протягом року становить 10%. Який розподіл має випадкова величина ξ – число банків, що можуть збанкрутувати протягом року? Чому дорівнює ймовірність того, що протягом року збанкрутує не більше, ніж один банк?

5. Під час аудиторської перевірки будівельної компанії аудитор випадковим чином відбирає 5 рахунків. За умови, що 3% рахунків містять помилки, треба скласти ряд розподілу числа правильних рахунків серед перевірених.

6. Функція розподілу неперервної випадкової величини ξ задана виразом

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0, \\ ax^2 \text{ при } 0 < x \leq 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) щільність розподілу p_ξ і побудувати її графік; 3) $P\{0,25 < \xi < 0,5\}$.

7. Випадкова величина має щільність розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ \ x \leq 1, \\ a\dfrac{\ln x}{x^3} \ , \ \ x > 1. \end{cases}$$

Знайти a і функцію розподілу.

8. Закон розподілу випадкового вектора $(\xi;\eta)$ дискретного типу задається таблицею

$\eta \setminus \xi$	1	2	3
-1	$0,05$	$0,05$	$0,10$
0	$0,10$	$0,15$	$0,05$
1	$0,15$	$0,15$	0
2	$0,10$	$0,05$	$0,05$

.

Знайти: 1) безумовні закони розподілу ξ і η; 2) умовний закон розподілу ξ за умови, що $\eta = 2$, і умовний закон розподілу η за умови, що $\xi = 1$, 3) $P\{\eta < \xi\}$.

9. Система випадкових величин $(\xi;\eta)$ розподілена за законом

$$p(x,y) = \frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2},\ (x;\,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Визначити коефіцієнт a. Перевірити, чи є величини ξ і η залежними. Знайти p_ξ, p_η і ймовірність попадання випадкової величини $(\xi;\eta)$ в квадрат, центр якого збігається з початком координат, а сторони паралельні осям координат і мають довжину $b = 2$.

10. Задана щільність розподілу p_ξ випадкової величини ξ, яка набуває значень з інтервалу (0; 1). Знайти щільність розподілу p_η випадкової величини η, якщо : 1) $\eta = \ln\xi$; 2) $\eta = \sqrt{\xi}$.

11. Задана функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу F_η випадкової величини $\eta = a\xi + b$.

12. Дискретні випадкові величини ξ і η задані розподілами

ξ	10	12	16
p	0,4	0,1	0,5

,

ξ	1	2
p	0,2	0,8

.

Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

13. Незалежні випадкові величини ξ і η задані щільностями розподілу:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases} \qquad p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{e^{-y/2}}{2}, & y > 0. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

14. Для виконання спортивної вправи студентові надається три спроби. Ймовірність того, що студент правильно виконає вправу, при кожній спробі дорівнює 0,5. Нехай ξ – кількість успішних, а η – неуспішних спроб. Побудувати розподіл ймовірностей для двовимірної випадкової величини $(\xi;\ \eta)$.

15. Двоє стрільців по черзі стріляють по мішені до першого промаху котрогось з них. При одному пострілі перший стрілець влучає у мішень з імовірністю 0,6, а другий – з імовірністю 0,8. Нехай випадкова величина ξ – кількість влучень першого стрільця, а η – кількість влучень другого стрільця. З'ясувати, чи залежні випадкові величини ξ і η.

16. Знайти щільність розподілу системи двох додатних випадкових величин ξ і η за відомою функцією розподілу

$$F(x,y) = (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by}), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (x;y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

17. Випадкові величини ξ і η незалежні, причому

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;1), \\ 12x^2(1-x), & x \in (0;1). \end{cases} \qquad p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (0;1), \\ 2y, & y \in (0;1). \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi\eta$.

Відповіді

1. 0,8. **2.** $b = 0,2$. **3.**

$$1)\ F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3, \\ 0,1, & -3 < x \le -2, \\ 0,3, & -2 < x \le 0, \\ 0,5, & 0 < x \le 2, \\ 0,9, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases} \qquad 2)\ 0,8.$$

4. Випадкова величина ξ – число банків, які можуть збанкрутувати протягом року, має біномний розподіл. $P\{\xi \le 1\} = 0,7359$.

5.

ξ	0	1	2	3	4	5
p	$2,43 \cdot 10^{-8}$	$3,93 \cdot 10^{-6}$	$2,54 \cdot 10^{-4}$	$0,0082$	$00,1328$	$0,8587$

.

6. 1) $a = 1$; 2) $p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 2x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1; \end{cases}$

3) $P\{0,25 < \xi < 0,5\} = 0,1875$.

7. $a = 4$; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 1 - \dfrac{1 + 2\ln x}{x^2} \text{ при } x > 1. \end{cases}$

8. 1)

ξ	1	2	3
p	$0,4$	$0,4$	$0,2$

,

η	-1	0	1	2
p	$0,2$	$0,3$	$0,3$	$0,2$

;

2) $\eta = 2$

ξ	1	2	3
p	0,5	0,25	0,25

,

$\xi = 1$

η	-1	0	1	2
p	0,125	0,250	0,375	0,250

;

3) $P\{\eta < \xi\} = 0,7$. **9.** $a = 1/\pi^2$, $p_\xi(x) = 1/(\pi(1+x^2))$, $x \in \mathbb{R}$;

$p_\eta(y) = 1/(\pi(1+y^2))$, $y \in \mathbb{R}$; $p(x,y) = p_\xi(x)p_\eta(y)$, $(x;\, y) \in \mathbb{R}^2$;

$P\{(\xi;\eta) \in \Pi\} = 1/4$. **10.** 1) $p_\eta(y) = \dfrac{1}{y} p_\xi\left(\ln \dfrac{1}{y}\right)$, $y \in (0;\, 1)$;

2) $p_\eta(y) = 2yp_\xi(\xi^2)$, $\quad y \in (0;\, +\infty)$.

11. $$F_\eta(y) = \begin{cases} F_\xi\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{при } a > 0, \\ 1 - F_\xi\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{при } a < 0, \end{cases} \qquad y \in \mathbb{R}.$$

12.

ξ	11	12	13	14	17	18
p	0,08	0,32	0,02	0,08	0,10	0,40

.

13. $$p_\zeta(z) = \begin{cases} 0 \text{ при } z \le 0, \\ e^{-z/2}(1 - e^{-z/2}) \text{ при } z > 0. \end{cases}$$

14.

$\eta \setminus \xi$	0	1	2	3
0	0	0	0	0,125
1	0	0	0,375	0
2	0	0,375	0	0
3	0,125	0	0	0

.

15. Випадкові величини ξ і η залежні.
16. $p(x,y) = abe^{-(ax+by)}$, $(x;y) \in \mathbb{R}_+^2$.
17. $$p_\zeta(z) = \begin{cases} 0, & z \notin (0;1), \\ 12z(1-z)^2, & z \in (0;1). \end{cases}$$

4. Числові характеристики випадкових величин

Повну інформацію про поведінку випадкової величини дає її функція розподілу. Проте часто досить знати одну або декілька числових характеристик випадкової величини, які б давали не таку повну, але наочнішу інформацію про цю випадкову величину. Характеристики, мета яких описати найсуттєвіші особливості розподілу, називаються **числовими характеристиками** випадкових величин. Розглянемо деякі з них для випадку дискретних і неперервних випадкових величин.

4.1. Характеристики положення розподілу випадкової величини

4.1.1. Медіана розподілу випадкової величини. Нехай ξ – деяка випадкова величина з функцією розподілу F_ξ. Розглянемо число $p \in (0;\, 1)$ і нерівність

$$F_\xi(x) \leq p \leq F_\xi(x+0). \tag{1}$$

Розв'язок цієї нерівності називають **квантиллю порядку** p і позначають x_p. Зазначимо, що коли ξ – неперервна випадкова величина, то нерівність (1) фактично є рівнянням

$$F_\xi(x) = p, \tag{2}$$

оскільки функція розподілу F_ξ є неперервною на $\mathbb{R}$ і тому $F_\xi(x+0) = F_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Означення 1. Медіаною *розподілу випадкової величини* ξ *називають квантиль порядку 1/2.*

Позначають медіану розподілу випадкової величини ξ через $x_{0,5}$ або $Me(\xi)$.

Приклад 1. Знайти медіану рівномірно розподіленої на відрізку $[a;\, b]$ випадкової величини ξ.

$\triangleleft$ Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

Запишемо рівняння (2) при $p = 1/2$, тобто $\dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{1}{2}$. Звідки отримуємо, що $Me(\xi) = \dfrac{a+b}{2}$. $\triangleright$

4.1.2. Мода розподілу випадкової величини. Нехай ξ – неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу p_ξ.

Означення 2. Модою *розподілу неперервної випадкової величини ξ називають значення $x \in \mathbb{R}$, при якому щільність розподілу p_ξ досягає максимуму.*

Означення 3. Модою *розподілу дискретної випадкової величини називають найімовірніше її значення.*

Позначають моду розподілу випадкової величини ξ символом $Mo(\xi)$.

Якщо мода єдина, то такий розподіл називається **унімодальним,** у протилежному випадку – **полімодальним.** Наприклад, якщо $\xi \sim \mathcal{N}(a, b)$, то $Mo(\xi) = Me(\xi) = a$, тобто нормально розподілена випадкова величина має унімодальний розподіл. Рівномірно розподілена на відрізку $[a; b]$ випадкова величина має вже полімодальний розподіл, оскільки кожна точка $x \in [a; b]$ є модою.

4.1.3. Математичне сподівання розподілу випадкової величини. Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано випадкову величину ξ з функцією розподілу F_ξ.

Означення 4. Математичним сподіванням *випадкової величини ξ називають число*

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x), \qquad (3)$$

якщо інтеграл Лебега-Стілтьєса у правій частині (3) збігається абсолютно.

Розглянемо випадки, які найчастіше зустрічаються на практиці.

Нехай ξ – дискретна випадкова величина із законом розподілу

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

.

Функція розподілу F_ξ такої випадкової величини неперервна в усіх точках, крім точок x_k, $k \geq 1$, причому $F_\xi(x_k+0) - F_\xi(x_k-0) = p_k$. Тоді формула (3) набуде вигляду

$$M\xi = \sum_k x_k(F_\xi(x_k+0) - F_\xi(x_k-0)) = \sum_k x_k p_k. \qquad (4)$$

Якщо ж ξ – неперервна випадкова величина з щільністю ймовірності p_ξ, то формула (3) перепишеться так

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx. \qquad (5)$$

При цьому ряд (4) та інтеграл (5) повинні збігатися абсолютно.

Приклад 2. Існує три способи контролю виробів. При використанні кожного зі способів число виробів, помилково визнаних стандартними, є випадковою величиною. Ряди розподілу цих випадкових величин подані в таблицях:

ξ_1	0	1	3	4
p	$0,5$	$0,4$	$0,05$	$0,05$

,

ξ_2	0	1	2	3
p	$0,7$	$0,1$	$0,1$	$0,1$

,

ξ_3	0	1	2	3	4
p	$0,8$	$0,05$	$0,05$	$0,05$	$0,05$

.

Треба вибрати спосіб контролю, який забезпечував би найменше середнє число помилок.

$\triangleleft$ Знайдемо математичні сподівання випадкових величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 :

$M\xi_1 = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,05 = 0,65;$
$M\xi_2 = 0 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 = 0,6;$
$M\xi_3 = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,05 = 0,5.$

Отже, для контролю треба вибрати третій спосіб, при якому математичне сподівання числа помилок найменше. $\triangleright$

Приклад 3. Знайти математичне сподівання випадкової величини, що має розподіл Пуассона з параметром λ.

$\triangleleft$ Нагадаємо, що розподіл Пуассона задається формулами

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ \lambda > 0,\ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Тому

$$M\xi = \sum_{m=0}^{+\infty} x_m p_m = \sum_{m=0}^{+\infty} m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

Отже, параметр λ є математичним сподіванням цієї випадкової величини. $\triangleright$

Приклад 4. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ, рівномірно розподіленої на відрізку $[a,\, b]$.

$\triangleleft$ Оскільки щільність розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a;\, b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;\, b], \end{cases}$$

то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Отже, математичне сподівання рівномірно розподіленої на відрізку $[a;\, b]$ випадкової величини є серединою цього відрізка. $\triangleright$

Приклад 5. Час безвідмовної роботи пристрою є випадковою величиною, що має показниковий розподіл з параметром λ. Знайти середній час безвідмовної роботи пристрою.

$\triangleleft$ Відомо, що щільність розподілу цієї випадкової величини ξ

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

Середній час безвідмовної роботи $M\xi$ знаходимо за формулою (5)

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0 dx + \int\limits_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} x de^{-\lambda x} =$$

$$= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Отже, $M\xi$ обернено пропорційне параметру λ. $\triangleright$

Математичне сподівання – це середнє значення випадкової величини з урахуванням ймовірностей її можливих значень або центр її розподілу.

Теорема 1. *Якщо F_ξ – функція розподілу випадкової величини ξ, f – неперервна на множині значень випадкової величини ξ функція, то*

$$Mf(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF_\xi(x).$$

Зокрема, у випадку неперервної випадкової величини ξ зі щільністю розподілу p_ξ

$$Mf(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_\xi(x) dx, \tag{6}$$

а якщо ξ – дискретна випадкова величина із законом розподілу $p_k = P\{\xi = x_k\}$, $k \in T \subset \mathbb{Z}_+$, де T – деяка множина індексів (наприклад, $T = \{0, 1, \ldots, n\}$), то

$$Mf(\xi) = \sum_k f(x_k) p_k. \tag{7}$$

$\triangleleft$ Доведемо теорему для випадку, коли ξ – дискретна випадкова величина. При цьому не має потреби вимагати неперервності функції f. Дискретна випадкова величина $\eta = f(\xi)$ може набувати лише значення $y_k = f(x_k)$, $k \in T$, але може статись, що для різних значень x_k значення y_k будуть однаковими. Тому

$$P\{\eta = y_k\} = \sum_{j:\, f(x_j)=y_k} P\{\xi = x_j\} = \sum_{j:\, f(x_j)=y_k} p_j.$$

Звідси, згідно з означенням математичного сподівання (формула (4)), отримуємо, що

$$M\eta = \sum_k y_k P\{\eta = y_k\} = \sum_k y_k \left(\sum_{j\,:\, f(x_j)=y_k} p_j \right) = \sum_k f(x_k) p_k. \ \triangleright$$

Зауваження. Аналогічна теорема правильна й у випадку функції двох випадкових величин:

Якщо $(\xi; \eta)$ – двовимірна неперервна випадкова величина з щільністю розподілу p, f – неперервна функція двох змінних, то

$$Mf(\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy. \qquad (8)$$

Якщо $(\xi; \eta)$ – двовимірна дискретна випадкова величина із законом розподілу p_{ij}, $i \in T_1$, $j \in T_2$, де T_1 і T_2 – деякі множини індексів, f – функція, визначена на множині значень випадкової величини $(\xi;\, \eta)$, то

$$Mf(\xi, \eta) = \sum_{i,\, j} f(x_i, y_j) p_{ij}. \qquad (9)$$

Сформулюємо основні властивості математичного сподівання.

Властивість 1. *Математичне сподівання сталої є сама ця стала, тобто*

$$Mc = c.$$

$\triangleleft$ Сталу c можна розглядати як дискретну випадкову величину, яка набуває лише одного значення з ймовірністю одиниця. Тому $Mc = c \cdot 1 = c$. $\triangleright$

Властивість 2. *Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:*

$$M(c\xi) = cM\xi.$$

$\triangleleft$ Нехай ξ – дискретна випадкова величина. Тоді, покладаючи $f(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$, згідно з формулою (7) одержуємо, що

$$M(c\xi) = \sum_k (cx_k)p_k = c\sum_k x_k p_k = cM\xi.$$

Якщо ξ – неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу p_ξ, то на підставі (6) маємо

$$M(c\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (cx)p_\xi(x)dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x)dx = cM\xi. \triangleright$$

Властивість 3. *Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:*

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta.$$

$\triangleleft$ Розглянемо лише випадки, коли ξ і η – одночасно дискретні або неперервні випадкові величини.

Нехай ξ і η – дискретні випадкові величини, які набувають значення x_i і y_j відповідно з ймовірностями $p_{i\cdot}$ і $p_{\cdot j}$, $i \in T_1$, $j \in T_2$. Позначимо $p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$, тоді $p_{i\cdot} = \sum\limits_j p_{ij}$, $p_{\cdot j} = \sum\limits_i p_{ij}$.

Згідно з формулою (9) маємо

$$M(\xi + \eta) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j)p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} =$$

$$= \sum_i x_i p_{i\cdot} + \sum_j y_j p_{\cdot j} = M\xi + M\eta.$$

Зазначимо, що порядок підсумовування можна змінювати, оскільки усі ряди збігаються абсолютно.

Нехай тепер ξ і η – неперервні випадкові величини зі щільностями розподілу p_ξ і p_η відповідно; p – щільність розподілу двовимірної випадкової величини $(\xi,\,\eta)$. Тоді

$$M(\xi+\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x+y)p(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy)dx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx)dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xp_\xi(x)dx+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yp_\eta(y)dy=M\xi+M\eta.\ \triangleright$$

Зауваження. З властивостей 2 і 3 випливає, що

$$M(c_1\xi_1+\ldots+c_n\xi_n)=c_1M\xi_1+\ldots+c_nM\xi_n.$$

Приклад 6. Знайти математичне сподівання числа успіхів у n випробуваннях Бернуллі з ймовірністю успіху p.

$\triangleleft$ Випадкова величина ξ, що дорівнює числу успіхів у n випробуваннях Бернуллі, має біномний розподіл

$$p_m=P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\ m\in\{0,1,\ldots,n\},\ q=1-p.$$

Позначимо через ξ_i випадкову величину, що дорівнює числу успіхів при i-тому випробуванні Бернуллі. Ця випадкова величина має закон розподілу

ξ_i	0	1
p	q	p

.

Тому $M\xi_i=0\cdot q+1\cdot p=p$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Оскільки $\xi=\xi_1+\ldots+\xi_n$, то

$$M\xi=M(\xi_1+\ldots+\xi_n)=M\xi_1+\ldots+M\xi_n=np.$$

Отже, середнє число успіхів при n випробуваннях Бернуллі дорівнює np. $\triangleright$

Приклад 7. Знайти математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини ξ.

◁ Розглянемо випадкову величину $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$. Тоді $\xi = \sigma\eta + a$ і $M\xi = \sigma M\eta + a$. Знайдемо $M\eta$.

$$M\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left| t = \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}, \quad \begin{array}{c|c|c} x & -\infty & +\infty \\ \hline t & -\infty & +\infty \end{array}, \quad dx = \sqrt{2}\sigma dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} t e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} de^{-t^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Отже, $M\xi = \sigma \cdot 0 + a = a$. ▷

Властивість 4. *Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:*

$$M(\xi\eta) = M\xi M\eta.$$

◁ Розглянемо лише випадки, коли ξ і η – одночасно дискретні або неперервні випадкові величини.

Нехай ξ і η – незалежні дискретні випадкові величини. Тоді $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$, $i \in T_1$, $j \in T_2$, а тому

$$M(\xi\eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i p_{i\cdot} y_j p_{\cdot j}$$

$$= \sum_i x_i p_{i\cdot} \sum_j y_j p_{\cdot j} = M\xi M\eta.$$

Якщо ж ξ і η – незалежні неперервні випадкові величини, то $p(x,y) = p_\xi(x) p_\eta(y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, а тому

$$M(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyp(x,y) dx dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyp_\xi(x) p_\eta(y) dx dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x) dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yp_\eta(y) dy = M\xi M\eta. \ \triangleright$$

Властивість 5. *Для будь-якої випадкової величини* ξ

$$|M\xi| \leq M|\xi|.$$

4.2. Характеристики варіації розподілу випадкової величини

Характеристики варіації розподілу вказують на ступінь розсіювання випадкової величини відносно центра групування. Природною характеристикою варіації є

$$M|\xi - M\xi|, \tag{11}$$

проте оскільки

$$f(x) = |x - M\xi| = \begin{cases} x - M\xi, & x \geq M\xi, \\ -(x - M\xi), & x < M\xi, \end{cases}$$

то використовувати формулу (11) незручно. Зазначимо також, що характеристика $M(\xi - M\xi)$ не підходить, оскільки $M(\xi - M\xi) = M\xi - M\xi = 0$ для довільної випадкової величини ξ. Тому найчастіше використовується дисперсія і середнє квадратичне відхилення.

4.2.1. Дисперсія розподілу випадкової величини. Характеристикою відхилення випадкової величини ξ від її математичного сподівання $M\xi$ є дисперсія.

Означення 5. Дисперсією $D\xi$ *випадкової величини* ξ *називають число (якщо воно існує), що дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання*

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2, \tag{12}$$

тобто $D\xi = Mf(\xi)$, де $f(x) = (x - M\xi)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Якщо відомий закон розподілу випадкової величини ξ, то для дискретної і неперервної випадкових величин дисперсію можна обчислювати відповідно за формулами

$$D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i, \qquad (13)$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p_\xi(x) dx. \qquad (14)$$

Часто дисперсію випадкової величини зручно знаходити за формулою

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2, \qquad (15)$$

яка випливає з означення дисперсії та властивості лінійності математичного сподівання:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) =$$

$$= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Якщо скористатись (15), то формули (13) і (14) можна записати відповідно у вигляді

$$D\xi = \sum_i x_i^2 p_i - (M\xi)^2,$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x) dx - (M\xi)^2.$$

Вивчимо деякі властивості дисперсії.

Властивість 1. *Дисперсія довільної випадкової величини невід'ємна.*

$\triangleleft$ Доведення безпосередньо випливає з означення дисперсії. $\triangleright$

Властивість 2. *Дисперсія сталої дорівнює нулю:*

$$Dc = 0.$$

$\triangleleft$ Оскільки $Mc = c$, то $Dc = M(c - Mc)^2 = M(c - c)^2 = M0 = 0$. $\triangleright$

Властивість 3. *Сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрата:*

$$D(c\xi) = c^2 D\xi.$$

$\triangleleft$ Згідно з властивостями математичного сподівання маємо

$$D(c\xi) = M(c\xi - M(c\xi))^2 = M(c\xi - cM\xi)^2 =$$

$$= M(c^2(\xi - M\xi)^2) = c^2 M(\xi - M\xi)^2 = c^2 D\xi. \ \triangleright$$

Властивість 4. *Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:*

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

$\triangleleft$ Оскільки ξ і η – незалежні випадкові величини, то $M(\xi\eta) = M\xi M\eta$. Тому

$$D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta)^2 - (M(\xi + \eta))^2 = M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) -$$

$$-(M\xi + M\eta)^2 = M\xi^2 + 2M(\xi\eta) + M\eta^2 - (M\xi)^2 - 2M\xi M\eta - (M\eta)^2 =$$

$$= M\xi^2 - (M\xi)^2 + 2M\xi M\eta + M\eta^2 - (M\eta)^2 - 2M\xi M\eta = D\xi + D\eta. \ \triangleright$$

Зауваження. 1) Використовуючи властивості 3 і 4, можна довести, що коли випадкові величини ξ і η незалежні, то

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta.$$

2) Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно незалежні випадкові величини, то

$$D(\xi_1 \pm \ldots \pm \xi_n) = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n.$$

Приклад 8. Знайти дисперсію випадкової величини ξ, розподіленої за біномним законом.

◁ Випадкова величина ξ, що дорівнює числу успіхів у n випробуваннях Бернуллі, має біномний розподіл

$$p_m = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},\ m \in \{0, 1, \ldots, n\},\ q = 1 - p.$$

Позначимо через ξ_i випадкову величину, що дорівнює числу успіхів при i-тому випробуванні Бернуллі. Ця випадкова величина має закон розподілу

ξ_i	0	1
p	q	p

.

Відомо, що $M\xi_i = p$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Очевидно, що для кожного $i \in \{1, \ldots, n\}$ випадкова величина ξ_i^2 має такий самий розподіл, що й випадкова величина ξ_i, а тому $M\xi_i^2 = p$. Тоді $D\xi_i = M\xi_i^2 - (M\xi_i)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

Оскільки випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ попарно незалежні (бо послідовні випробування в схемі Бернуллі є незалежними) і $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, то

$$D\xi = D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n = npq.$$

Отже, $D\xi = npq$. ▷

Приклад 9. Знайти дисперсію випадкової величини, що має розподіл Пуассона з параметром λ.

◁ Нагадаємо, що розподіл Пуассона задається формулою

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},\ \lambda > 0,\ m \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{і} \quad M\xi = \lambda.$$

Дисперсію шукатимемо за формулою (15). Маємо

$$M\xi^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} x_m^2 p_m = \sum_{m=0}^{+\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda m \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \lambda M\xi + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda,$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Отже, $D\xi = M\xi = \lambda$. ▷

Приклад 10. Знайти дисперсію випадкової величини ξ, рівномірно розподіленої на відрізку $[a; b]$.

$\triangleleft$ Оскільки щільність розподілу випадкової величини ξ

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a; b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a; b], \end{cases}$$

і доведено, що $M\xi = \dfrac{a+b}{2}$ (приклад 4), то дисперсію шукатимемо за формулою (15). Знайдемо спочатку $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Тоді

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Отже, $D\xi = \dfrac{(a-b)^2}{12}$. $\triangleright$

Приклад 11. Знайти дисперсію випадкової величини ξ, розподіленої за показниковим законом з параметром λ.

$\triangleleft$ Відомо, що щільність розподілу цієї випадкової величини ξ

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

У прикладі 5 було доведено, що $M\xi = \dfrac{1}{\lambda}$. Знайдемо $D\xi$, скориставшись формулою (15).

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x)dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} x^2 de^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x} 2x dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \frac{2}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda} M\xi - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Отже, для заданої випадкової величини $\sqrt{D\xi} = M\xi$. $\triangleright$

Приклад 12. Знайти дисперсію нормально розподіленої випадкової величини $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$.

$\triangleleft$ У прикладі 7 було доведено, що $M\xi = a$. Розглянемо випадкову величину $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$ і знайдемо $D\eta$, врахувавши, що $M\eta = 0$.

$$D\eta = M\eta^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left| \quad t = \frac{x-a}{\sigma}, \quad \begin{array}{c|c|c} x & -\infty & +\infty \\ \hline t & -\infty & +\infty \end{array}, \quad dx = \sigma dt \quad \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t de^{-\frac{t^2}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Оскільки $\xi = \sigma\eta + a$, то використавши послідовно четверту, третю і другу властивості дисперсії, отримаємо, що $D\xi = \sigma^2 D\eta + 0 = \sigma^2$.

Отже, якщо випадкова величина $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$, то параметр a – її математичне сподівання, а σ – квадратний корінь з її дисперсії. $\triangleright$

4.2.2. Середнє квадратичне відхилення розподілу випадкової величини. Розглянемо випадкову величину ξ.

Означення 6. Середнім квадратичним відхиленням σ_ξ *випадкової величини* ξ *називають число (якщо воно існує), що дорівнює квадратному кореню з її дисперсії:*

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}. \tag{16}$$

Властивості σ_ξ безпосередньо випливають з властивостей $D\xi$.

Властивість 1. *Якщо $\xi = c$ – стала випадкова величина, то*

$$\sigma_c = 0.$$

Властивість 2. $\sigma_{c\xi} = |c|\sigma_\xi$, *де c – стала.*

Властивість 3. *Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно незалежні випадкові величини, то*

$$\sigma_{(\xi_1 \pm \xi_2 \pm \ldots \pm \xi_n)} = \sqrt{(\sigma_{\xi_1})^2 + (\sigma_{\xi_2})^2 + \ldots + (\sigma_{\xi_n})^2}.$$

З прикладів 7 і 12 випливає, що коли $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$, то $M\xi = a$, $\sigma_\xi = \sigma$.

4.3. Моменти різних порядків. Характеристики форми розподілу випадкової величини

Означення 7. Моментом k-го порядку *випадкової величини ξ відносно точки a, називається число*

$$\nu_k(a) = M(\xi - a)^k, \ \ k \in \mathbb{N}, \ \ a \in \mathbb{R},$$

якщо воно існує.

Якщо $a = 0$, то моменти називають **початковими** і позначають через ν_k. Якщо ж $a = M\xi$, то моменти називають **центральними** і позначають через ξ_k. Очевидно, що $\nu_1 = M\xi$, $\xi_1 = 0$, а $\xi_2 = D\xi$.

Між центральними і початковими моментами існує зв'язок. Справді, згідно з означенням $\xi_k = M(\xi - \nu_1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Використовуючи біномну формулу і властивості математичного сподівання, отримуємо, що

$$\mu_k = M(\xi - \nu_1)^k = M\left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j \xi^j (-\nu_1)^{k-j}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j M\xi^j \nu_1^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j \nu_j \nu_1^{k-j}, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Зокрема,

$$\mu_1 = 0, \ \ \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2, \ \ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^2,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Ці моменти широко використовуються у статистиці.

Якщо F_ξ – функція розподілу випадкової величини ξ, то

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF_\xi(x), \ \ \mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k dF_\xi(x).$$

У випадку дискретної випадкової величини ці формули набувають вигляду

$$\nu_k = \sum_i x_i^k p_i, \ \ \mu_k = \sum_i (x_i - M\xi)^k p_i,$$

а у випадку неперервної випадкової величини

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_\xi(x) dx, \ \ \mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k p_\xi(x) dx.$$

У теорії ймовірностей та її застосуваннях часто використовують дві числові характеристики випадкової величини, які описуються центральними моментами третього і четвертого порядків відповідно, – коефіцієнт асиметрії α_ξ та ексцес κ_ξ Коефіцієнт асиметрії та ексцес дають уяву про форму щільності розподілу або многокутника розподілу. Ці характеристики є безрозмірними величинами – вони не залежать від масштабу вимірювання випадкових величин.

Означення 8. Коефіцієнтом асиметрії *випадкової величини ξ називають число α_ξ (якщо воно існує), яке визначається формулою*

$$\alpha_\xi = \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3}. \qquad (17)$$

Якщо многокутник розподілу дискретної випадкової величини або графік щільності розподілу неперервної випадкової величини симетричні відносно прямої $x = M\xi$, тобто, коли розподіл ймовірностей випадкової величини симетричний відносно математичного сподівання випадкової величини, то всі центральні моменти непарного порядку дорівнюють нулю

$$\mu_{2k+1} = 0, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

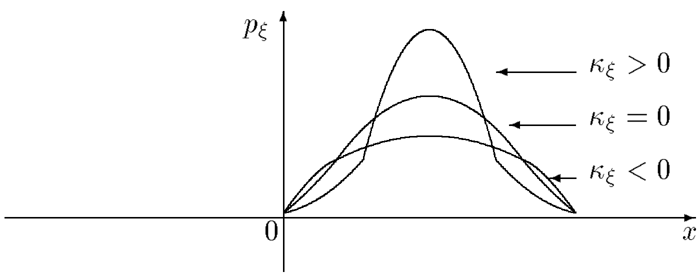
У цьому випадку $\alpha_\xi = 0$.

Якщо розподіл ймовірностей не симетричний відносно математичного сподівання, причому довша частина розподілу розміщена справа від центру групування, то $\alpha_\xi > 0$, якщо ж довша частина розміщена зліва, то $\alpha_\xi < 0$.

Означення 9. Ексцесом *випадкової величини* ξ *називається число (якщо воно існує)* κ_ξ, *яке знаходиться за формулою*

$$\kappa_\xi = \frac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} - 3. \tag{18}$$

Можна довести, що ексцес нормально розподіленої випадкової величини дорівнює нулю. Якщо розподіл ймовірностей випадкової величини ξ унімодальний і графік щільності розподілу p_ξ має гострішу вершину, ніж графік щільності розподілу нормальної випадкової величини з такою самою дисперсією, то $\kappa_\xi > 0$, якщо ж графік p_ξ менш гостроверхий і більш згладженний у порівнянні з графіком щільності відповідного нормального розподілу, то $\kappa_\xi < 0$.



Приклад 13. Дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу

ξ	-2	-1	0	1	2	3
p	$2/20$	$4/20$	$6/20$	$5/20$	$2/20$	$1/20$

.

Знайти початкові та центральні моменти цієї величини до четвертого порядку включно, а також коефіцієнт асиметрії та ексцес.

$\triangleleft$ Знаходимо початкові моменти першого, другого, третього і четвертого порядків:

$$\nu_1 = -2 \cdot \frac{2}{20} - 1 \cdot \frac{4}{20} + 0 \cdot \frac{6}{20} + 1 \cdot \frac{5}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20} = 0,2;$$

$$\nu_2 = (-2)^2 \cdot \frac{2}{20} + (-1)^2 \cdot \frac{4}{20} + 0^2 \cdot \frac{6}{20} + 1^2 \cdot \frac{5}{20} + 2^2 \cdot \frac{2}{20} + 3^2 \cdot \frac{1}{20} = 1,7;$$

$$\nu_3 = (-2)^3 \cdot \frac{2}{20} + (-1)^3 \cdot \frac{4}{20} + 0^3 \cdot \frac{6}{20} + 1^3 \cdot \frac{5}{20} + 2^3 \cdot \frac{2}{20} + 3^3 \cdot \frac{1}{20} = 1,4;$$

$$\nu_4 = (-2)^4 \cdot \frac{2}{20} + (-1)^4 \cdot \frac{4}{20} + 0^4 \cdot \frac{6}{20} + 1^4 \cdot \frac{5}{20} + 2^4 \cdot \frac{2}{20} + 3^4 \cdot \frac{1}{20} = 7,7.$$

Центральні моменти знаходимо за формулами:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 1,7 - (0,2)^2 = 1,66;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3 = 1,4 - 3 \cdot 1,7 \cdot 0,2 + 2 \cdot (0,2)^3 = 0,40;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = 7,7 - 4 \cdot 1,4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 1,7 \cdot (0,2)^2 - \\ -3 \cdot (0,2)^4 = 6,17.$$

Тоді

$$\alpha_\xi = \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3} = \frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3} = \frac{0,40}{(\sqrt{1,66})^3} = 0,19;$$

$$\kappa_\xi = \frac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{6,17}{(1,66)^2} - 3 = -0,76. \ \triangleright$$

Приклад 14. Знайти початкові моменти випадкової величини ξ зі щільністю ймовірностей

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 4/x^5, & x > 1. \end{cases}$$

$\triangleleft$ Скориставшись формулою (6), одержуємо, що

$$\nu_k = M\xi^k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k p_\xi(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} x^k \frac{4}{x^5}dx = 4\int\limits_1^{+\infty} x^{k-5}dx =$$

$$= \frac{4x^{k-4}}{k-4}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{4}{4-k}.$$

Очевидно, що ці розрахунки правильні, коли $k < 4$, бо при $k \geq 4$ невласний інтеграл розбігається. Отже, задана випадкова величина має тільки моменти першого, другого і третього порядків. $\triangleright$

4.4. Числові характеристики розподілу багатовимірних випадкових величин. Числові характеристики міри зв'язку випадкових величин

4.4.1. Математичне сподівання багатовимірного випадкового вектора. Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано n-вимірну випадкову величину $(\xi_1; \ldots; \xi_n)$.

Означення 10. Математичним сподіванням *n-вимірної випадкової величини $(\xi_1; \ldots; \xi_n)$ називається n-вимірний вектор*

$$(M\xi_1; \ldots; M\xi_n),$$

де $M\xi_k$ – математичне сподівання випадкової величини ξ_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Розглянемо двовимірну випадкову величину. Якщо $(\xi; \eta)$ є дискретною випадковою величиною, заданою законом розподілу

$\eta \setminus \xi$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$\sum$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{\cdot 2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_k	p_{1k}	p_{2k}	$\cdots$	p_{ik}	$\cdots$	$p_{\cdot k}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sum$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$	$\cdots$	1

,

то математичним сподіванням вектора $(\xi;\,\eta)$ є вектор $(M\xi;\,M\eta)$, де

$$M\xi = \sum_i x_i p_{i\cdot}, \quad M\eta = \sum_k y_k p_{\cdot k}.$$

Якщо ж $(\xi;\,\eta)$ – двовимірна неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу p, то математичним сподіванням вектора $(\xi;\,\eta)$ є вектор $(M\xi;\,M\eta)$, де

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy \right) dx, \;\; M\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx \right) dy.$$

Розглянемо тепер математичне сподівання випадкової величини ξ за умови, що $\eta = y$. Нехай $(\xi;\,\eta)$ – дискретна двовимірна випадкова величина з розподілом p_{ij}, $i \in T_1$, $j \in T_2$. Згідно з означенням умовного розподілу

$$p_\xi(x_i/y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \;\; p_\eta(y_j/x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \;\; i \in T_1, \;\; j \in T_2.$$

Математичне сподівання випадкової величини ξ за умови, що $\eta = y_{j_0}$, називається **умовним математичним сподіванням** випадкової величини ξ за умови, що $\eta = y_{j_0}$:

$$M(\xi/\eta = y_{j_0}) = \sum_i x_i p_\xi(x_i/y_{j_0}) = \sum_i x_i \frac{p_{ij_0}}{p_{\cdot j_0}} =$$

$$= \frac{1}{p_{\cdot j_0}} \sum_i x_i p_{ij_0},$$

тобто

$$M(\xi/\eta = y_{j_0}) = \frac{1}{p_{\cdot j_0}} \sum_i x_i p_{ij_0}.$$

Аналогічно одержуємо, що

$$M(\eta/\xi = x_{i_0}) = \frac{1}{p_{i_0\cdot}} \sum_j y_j p_{i_0 j}.$$

У випадку неперервних випадкових величин ξ і η умовні щільності $p_\xi(x/\eta=y_0)=\dfrac{p(x,y_0)}{p_\eta(y_0)}$, $x\in\mathbb{R}$, де $p_\eta(y_0)\neq 0$, і $p_\eta(y/\xi=x_0)=$ $=\dfrac{p(x_0,y)}{p_\xi(x_0)}$, $y\in\mathbb{R}$, де $p_\xi(x_0)\neq 0$. Тоді

$$M(\xi/\eta=y_0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x/\eta=y_0)dx=\frac{1}{p_\eta(y_0)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x,y_0)dx,$$

$$M(\eta/\xi=x_0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yp_\eta(y/\xi=x_0)dx=\frac{1}{p_\xi(x_0)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yp(x_0,y)dy.$$

Розглянемо функцію $f_\xi(y)=M(\xi/\eta=y)$, $y\in\mathbb{R}$. Ця функція ставить кожному y у відповідність умовне математичне сподівання випадкової величини ξ за умови, що $\eta=y$, тобто вона відображає залежність від y умовного середнього ξ за умови, що $\eta=y$. Функція $f_\xi(y)=M(\xi/\eta=y)$, $y\in\mathbb{R}$, називається **функцією регресії** ξ на η. Аналогічно функція $f_\eta(x)=M(\eta/\xi=x)$, $x\in\mathbb{R}$, називається **функцією регресії** η на ξ.

Зазначимо, що

$$M(M(\xi/\eta=y))=M\xi \qquad \text{і} \qquad M(M(\eta/\xi=x))=M\eta. \qquad (10)$$

Формули (10) називаються формулами **повного математичного сподівання**. Якщо ξ і η – незалежні випадкові величини, то

$$M(\xi/\eta=y)=M\xi,\ \ M(\eta/\xi=x)=M\eta.$$

4.4.2. Дисперсія багатовимірного випадкового вектора. Коваріація. Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{F},P)$ задано n-вимірну випадкову величину $(\xi_1;\ldots;\xi_n)$.

Означення 11. Дисперсією n-вимірної випадкової величини називається сукупність n^2 чисел, що визначаються формулами

$$b_{ik}=M((\xi_i-M\xi_i)(\xi_k-M\xi_k)),\quad \{i,k\}\subset\{1,\ldots,n\},$$

при цьому $b_{ik} = b_{ki}$.

Часто дисперсію багатовимірної випадкової величини називають **дисперсійною** або **коваріаційною матрицею** і зображують у вигляді

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обмежимося розглядом випадку двовимірної випадкової величини $(\xi;\ \eta)$. Для такої випадкової величини дисперсією є сукупність трьох чисел b_{11}, b_{22}, $b_{12} = b_{21}$. Очевидно, що

$$b_{11} = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi,\ \ b_{22} = M(\eta - M\eta)^2 = D\eta,$$

$$b_{12} = b_{21} = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)).$$

Величина $b_{12} = b_{21}$ називається **коваріацією** випадкових величин і позначається символом $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$:

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)). \tag{19}$$

Подамо формулу (19) в іншому вигляді, скориставшись властивостями математичного сподівання,

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M(\xi\eta - \eta M\xi - \xi M\eta + M\xi M\eta) =$$

$$= M(\xi\eta) - M\xi M\eta - M\eta M\xi + M\xi M\eta = M(\xi\eta) - M\xi M\eta,$$

тобто

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta. \tag{20}$$

У випадку двовимірної випадкової величини дисперсійна матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} D\xi & \mathrm{cov}(\xi, \eta) \\ \mathrm{cov}(\xi, \eta) & D\eta \end{pmatrix}.$$

Визначник дисперсійної матриці називають **узагальненою дисперсією.**

У випадку дискретної випадкової величини елементи дисперсійної матриці обчислюються за формулами

$$D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_{i\cdot}, \quad D\eta = \sum_k (y_k - M\eta)^2 p_{\cdot k}.$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \sum_i \sum_k x_i y_k p_{ik} - M\xi M\eta.$$

Якщо ж (ξ, η) є неперервною випадковою величиною зі щільністю розподілу p, то

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \right) dx,$$

$$D\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta)^2 \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx \right) dy,$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta) p(x, y) dy \right) dx.$$

Вивчимо деякі властивості коваріації.

Властивість 1. *Якщо ξ і η незалежні випадкові величини, то*

$$cov(\xi, \eta) = 0.$$

$\triangleleft$ Якщо ξ і η – незалежні випадкові величини, то $M(\xi\eta) = M\xi M\eta$. Тому

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta = M\xi M\eta - M\xi M\eta = 0. \ \triangleright$$

Отже, якщо $\operatorname{cov}(\xi, \eta) \neq 0$, то випадкові величини ξ і η залежні.

Властивість 2. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$.

$\triangleleft$ Це випливає безпосередньо з означення. $\triangleright$

Властивість 3. *Якщо* c_1 *і* c_2 *– сталі, то*

$$\operatorname{cov}(\xi + c_1, \eta + c_2) = \operatorname{cov}(\xi, \eta).$$

$$\triangleleft\ \operatorname{cov}(\xi + c_1, \eta + c_2) = M((\xi + c_1)(\eta + c_2)) - M(\xi + c_1)M(\eta + c_2) =$$

$$= M(\xi\eta + c_1\eta + c_2\xi + c_1c_2) - (M\xi + c_1)(M\eta + c_2) =$$

$$= M(\xi\eta) + c_1M\eta + c_2M\xi + c_1c_2 - M\xi M\eta - c_1M\eta - c_2M\xi - c_1c_2 =$$

$$= M(\xi\eta) - M\xi M\eta = \operatorname{cov}(\xi, \eta).\ \triangleright$$

Властивість 4. *Якщо* c_1 *і* c_2 *– сталі, то*

$$\operatorname{cov}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2, \eta) = c_1\operatorname{cov}(\xi_1, \eta) + c_2\operatorname{cov}(\xi_2, \eta).$$

$\triangleleft$ Доведення аналогічне доведенню властивості 3. $\triangleright$

4.4.3. Коефіцієнт кореляції. Прямі регресії. Як кількісну характеристику залежності випадкових величин ξ і η використовують коефіцієнт кореляції $\rho(\xi, \eta)$.

Означення 12. Коефіцієнтом кореляції *між випадковими величинами* ξ *і* η *називається число*

$$\rho \equiv \rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} \tag{21}$$

або

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}. \tag{22}$$

Для незалежних випадкових величин $\rho(\xi, \eta) = 0$, оскільки у цьому випадку $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$. З рівності нулю коефіцієнта кореляції $\rho(\xi, \eta)$, взагалі кажучи, не випливає, що випадкові величини ξ і η незалежні. Коефіцієнт кореляції залежних випадкових величин може дорівнювати нулю.

Приклад 15. Нехай $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $f(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\eta = f(\xi) = \xi^2 - 1$. Випадкові величини ξ і η залежні. Довести, що $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$.

$\triangleleft$ Оскільки $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то $M\xi = 0$, $\sigma_\xi = 1$ і $M\xi^3 = 0$. Тоді

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\xi, \xi^2 - 1) = \operatorname{cov}(\xi, \xi^2) - \operatorname{cov}(\xi, 1) =$$

$$= M(\xi(\xi^2 - M\xi^2)) - M(\xi(1-1)) = M\xi^3 - M\xi^2 M\xi - M0 = 0.$$

Отже, $\rho(\xi,\eta) = \dfrac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = 0.$ $\triangleright$

Випадкові величини ξ і η називаються **некорельованими**, якщо їхній коефіцієнт кореляції дорівнює нулю.

Отже, із незалежності випадкових величин випливає їхня некорельованість; тоді як некорельовані випадкові величини можуть бути залежними. Але є випадки, коли незалежність випадкових величин рівносильна їхній некорельованості, зокрема, це буде у випадку нормально розподілених випадкових величин.

Коефіцієнт кореляції має такі властивості.

Властивість 1. $\rho(\xi,\eta) = \rho(\eta,\xi)$.

$\triangleleft$ Доведення випливає безпосередньо з означення. $\triangleright$

Властивість 2. *Абсолютне значення коефіцієнта кореляції не перевищує одиниці, тобто*

$$|\rho(\xi,\eta)| \le 1.$$

$\triangleleft$ Оскільки $\quad 0 \le D(t\xi+\eta)^2 = M(t\xi+\eta - M(t\xi+\eta))^2 =$

$$= M(t(\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 = t^2 M(\xi - M\xi)^2 + 2tM((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) +$$

$$+ M(\eta - M\eta)^2 = t^2 D\xi + 2t\mathrm{cov}(\xi,\eta) + D\eta, \;\; t \in \mathbb{R},$$

то $\mathrm{cov}^2(\xi,\eta) - D\xi D\eta \le 0$, бо квадратний тричлен

$$At^2 + 2Bt + C \ge 0, \;\; t \in \mathbb{R},$$

якщо $A > 0$ і дискримінант $B^2 - AC \le 0$. Отже,

$$|\mathrm{cov}(\xi,\eta)| \le \sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta} \quad \text{або} \quad |\mathrm{cov}(\xi,\eta)| \le \sigma_\xi \sigma_\eta,$$

звідки отримуємо, що

$$|\rho(\xi,\eta)| = \left| \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \right| \le 1. \;\triangleright$$

Властивість 3. *$|\rho(\xi,\eta)| = 1$ тоді й тільки тоді, коли між ξ і η існує лінійна функціональна залежність, тобто $\eta = A\xi + B$, де $A \neq 0$ і B – сталі, причому*

$$\rho(\xi,\eta) = \begin{cases} -1, & A < 0, \\ 1, & A > 0. \end{cases}$$

$\triangleleft$ Доведемо лише достатність цього твердження, а саме, якщо $\eta = A\xi + B$, то $|\rho(\xi,\eta)| = 1$.

Покладемо $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$. Тоді

$$M\eta = M(A\xi + B) = AM\xi + B = Aa + B,$$

$$D\eta = M(\eta - M\eta)^2 = M(A\xi + B - Aa - B)^2 = A^2M(\xi - M\xi)^2 = A^2\sigma^2,$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M((\xi - a)(A\xi + B - Aa - B)) =$$
$$= M((\xi - a)(A(\xi - a))) = AM(\xi - a)^2 = AD\xi = A\sigma^2,$$

і отже,

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{A\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2}\sqrt{A^2\sigma^2}} = \frac{A}{|A|}.$$

Тому $|\rho(\xi,\eta)| = 1$. $\triangleright$

Коефіцієнт кореляції можна розглядати як характеристику лінійності зв'язку між випадковими величинами ξ і η.

Означення 13. *Пряма $y = \alpha x + \beta$ називається* **прямою регресії** *η на ξ, якщо коефіцієнти α і β вибрано так, щоб середнє квадратичне відхилення $\alpha\xi + \beta$ від η було мінімальним, тобто*

$$M(\eta - (\alpha\xi + \beta))^2 \longrightarrow min. \tag{23}$$

Зауваження. Аналогічно визначається пряма регресії ξ на η.

З умови (23) знайдемо α і β. Виконавши елементарні тотожні перетворення, дістанемо

$$M(\eta - \alpha\xi - \beta)^2 = M(\eta - M\eta - \alpha(\xi - M\xi) + M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 =$$

$$= M(\eta - M\eta)^2 + \alpha^2 M(\xi - M\xi)^2 + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 -$$

$$-2\alpha M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) + 2M(\eta - M\eta)(M\eta - \alpha M\xi - \beta) -$$

$$-2\alpha(M\eta - \alpha M\xi - \beta)M(\xi - M\xi) =$$
$$= \sigma_\eta^2 - 2\alpha\mathrm{cov}(\xi,\eta) + \alpha^2\sigma_\xi^2 + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 =$$
$$= \sigma_\eta^2 - 2\alpha\rho(\xi,\eta)\sigma_\xi\sigma_\eta + \alpha^2\sigma_\xi^2 + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 =$$
$$= (\rho(\xi,\eta)\sigma_\eta - \alpha\sigma_\xi)^2 + (1-\rho^2(\xi,\eta))\sigma_\eta^2 + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2.$$

Звідси випливає, що умова (23) виконуватиметься, коли

$$\rho(\xi,\eta)\sigma_\eta - \alpha\sigma_\xi = 0 \quad \text{і} \quad M\eta - \alpha M\xi - \beta = 0,$$

тобто

$$\alpha = \rho(\xi,\eta)\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}, \qquad \beta = M\eta - \alpha M\xi. \tag{24}$$

Коефіцієнт α називається **коефіцієнтом регресії** η на ξ.

Рівняння прямої регресії η на ξ має вигляд

$$y = \rho(\xi,\eta)\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}x + M\eta - \rho(\xi,\eta)\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi$$

або

$$y - M\eta = \rho(\xi,\eta)\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - M\xi). \tag{25}$$

Аналогічно доводиться, що пряма регресії ξ на η має рівняння

$$x - M\xi = \rho(\xi,\eta)\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y - M\eta). \tag{26}$$

Прямі регресії ξ на η і η на ξ збігаються тоді й тільки тоді, коли $|\rho(\xi,\eta)| = 1$.

Приклад 16. Якість продукції характеризується двома випадковими параметрами ξ і η. Закон розподілу двовимірної випадкової величини $(\xi;\,\eta)$ задано таблицею

$\eta \setminus \xi$	5	6	7	$\sum$
0	0,2	0	0	0,2
0,1	0,1	0,15	0	0,25
0,2	0,05	0,15	0,1	0,3
0,3	0,05	0,1	0,1	0,25
$\sum$	0,4	0,4	0,2	1

.

Знайти математичне сподівання, дисперсійну матрицю, коефіцієнт кореляції, пряму регресії η на ξ.

$\triangleleft$ Знайдемо спочатку закони розподілу одновимірних випадкових величин ξ і η:

ξ	5	6	7
p	0,4	0,4	0,2

;

η	0	0,1	0,2	0,3
p	0,2	0,25	0,3	0,25

.

Тоді

$$M\xi = 5 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,4 = 5,8;$$

$$M\eta = 0 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,25 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,25 = 0,16.$$

Отже, математичне сподівання $(M\xi;\ M\eta) = (5,8;\ 0,16)$.

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 5^2 \cdot 0,4 + 6^2 \cdot 0,4 + 7^2 \cdot 0,2 - (5,8)^2 = 0,56;$$

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = 0^2 \cdot 0,2 + (0,1)^2 \cdot 0,25 + (0,2)^2 \cdot 0,3 +$$
$$+ (0,3)^2 \cdot 0,25 - (0,16)^2 = 0,0114.$$

Для знаходження $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ обчислимо спочатку $M(\xi\eta)$.

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_i y_j p_{ij} = 5 \cdot 0 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 \cdot 0,1 +$$

$$+ 5 \cdot 0,2 \cdot 0,05 + 5 \cdot 0,3 \cdot 0,05 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 0,1 \cdot 0,15 +$$

$$+ 6 \cdot 0,2 \cdot 0,15 + 6 \cdot 0,3 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0 \cdot 0 + 7 \cdot 0,1 \cdot 0 +$$

$$+ 7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,975.$$

Тоді

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta = 0,975 - 5,8 \cdot 0,16 = 0,047.$$

Отже, дисперсійна матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0,56 & 0,047 \\ 0,047 & 0,0114 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо коефіцієнт кореляції

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\ \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{0,047}{\sqrt{0,56}\sqrt{0,0114}} \approx 0,588.$$

Запишемо рівняння прямої регресії η на ξ :

$$\alpha = \rho(\xi,\, \eta)\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} = 0,588\frac{\sqrt{0,0114}}{\sqrt{0,56}} = 0,084;$$

$$\beta = M\eta - \alpha M\xi = 0,16 - 0,084 \cdot 5,8 = -0,327,$$

$$y = \alpha x + \beta, \text{ тобто } y = 0,084x - 0,327.$$

Знайдемо значення функції регресії η на ξ і порівняємо їх з наближеними значеннями, одержаними з рівняння прямої регресії. Маємо:

$$M(\eta/\xi = 5) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{4} y_j p_{1j}}{p_{1\cdot}} = \frac{0 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,05}{0,4} = $$
$$= 0,0875;$$

$$M(\eta/\xi = 6) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{4} y_j p_{2j}}{p_{1\cdot}} = \frac{0 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,15 + 0,3 \cdot 0,1}{0,4} = $$
$$= 0,1875;$$

$$M(\eta/\xi = 7) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{4} y_j p_{3j}}{p_{1\cdot}} = \frac{0 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,1}{0,4} = $$
$$= 0,25.$$

Значення функції регресії $M(\eta/\xi = x_i)$ та її лінійного наближення $y_i = 0,084x_i - 0,327$, $i \in \{1,\, 2,\, 3\}$, наведено в таблиці

x_i	5	6	7
$M(\eta/\xi = x_i)$	0,0875	0,1875	0,25
y_i	0,093	0,177	0,261

.

У зазначеному випадку пряма регресії є достатньо добрим наближенням функції регресії. $\triangleright$

Вправи

1. Задано таблиці розподілу випадкового числа очок кожного з двох стрільців:

ξ_1	1	2	3
p	$0,3$	$0,2$	$0,5$

,

ξ_2	1	2	3
p	$0,1$	$0,6$	$0,3$

.

Порівняти результати стрільби.

2. Автомат виготовляє лазерні диски, які вважаються стандартними, якщо відхилення ξ діаметра диска від проектного розміру за абсолютною величиною менше за 0,7 мм. Вважаючи, що випадкова величина ξ розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0,4$ мм, знайти скільки у середньому буде стандартних дисків серед 100 виготовлених.

3. Термін роботи деякого приладу є неперервною випадковою величиною ξ, що має нормальний закон розподілу, з гарантією на 15 років і середнім квадратичним відхиленням, яке дорівнює 3 рокам. Визначити надійність приладу за проміжок часу від 10 до 20 років.

4. Зріст студентів розподілено за нормальним законом. Математичне сподівання зросту студентів дорівнює 175 см, а середнє квадратичне відхилення – 6 см. Визначити ймовірність того, що хоча б один з п'яти викликаних навмання студентів матиме зріст від 170 до 180 см.

5. Випадкова величина ξ підпорядкована закону розподілу, щільність якого

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \neq (0,\,1), \\ ax, & x \in (0,\,1). \end{cases}$$

Знайти числові характеристики випадкової величини ξ.

6. Випадкові величини ξ і η – помилки, які виникають на вході пристрою. Вони мають математичні сподівання $M\xi = -2$, $M\eta = 4$, дисперсії $D\xi = 4$, $D\eta = 9$, коефіцієнт кореляції цих помилок $\rho = -0,5$. Помилка на виході пристрою пов'язана з помилками на вході функціональною залежністю $\zeta = 3\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2 - 3$. Знайти математичне сподівання помилки на виході.

7. Відбувається спостереження за допомогою радіолокаційних станцій за групою об'єктів протягом деякого часу. У групі 4 об'єкти, кожний з яких за час t знаходиться з ймовірністю $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,25$, $p_3 = 0,35$, $p_4 = 0,42$ відповідно. Знайти математичне сподівання числа об'єктів, які будуть знайдені через час t.

8. Вживається ряд заходів, кожний з яких, якщо відбудеться, приносить випадковий прибуток ξ, розподілений за нормальним законом із середнім значенням $M\xi = 2$ гр.од. Число заходів за певний період випадкове і розподілене за законом

η	1	2	3	4
p	0,2	0,3	0,4	0,1

,

причому не залежить від прибутків, що дають ці заходи. Визначити середній очікуваний прибуток за весь період.

9. Помилка приладу виражається функцією $U = 3\zeta + 2\xi - \eta - 4$, де ξ, η, ζ – "первинні помилки", що є системою випадкових величин. Цей вектор має математичне сподівання $(M\xi; M\eta; M\zeta) = (-4; 1; 1)$ і кореляційну матрицю

$$\begin{pmatrix} D\xi & \operatorname{cov}(\xi,\eta) & \operatorname{cov}(\xi,\zeta) \\ \operatorname{cov}(\xi,\eta) & D\eta & \operatorname{cov}(\eta,\zeta) \\ \operatorname{cov}(\xi,\zeta) & \operatorname{cov}(\zeta,\eta) & D\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити математичне сподівання і дисперсію помилки приладу.

10. Відомо, що квантиль порядку 0,15 нормально розподіленої випадкової величини ξ дорівнює 12, а квантиль порядку 0,6 дорівнює 16,2. Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

11. У місті 10 комерційних банків, у кожного з яких ризик банкрутства протягом року становить 10%. Знайти числові характеристики випадкової величини ξ – числа банків, які можуть збанкрутувати протягом наступного року.

12. Під час перевірки будівельної компанії аудитор випадковим чином відбирає 5 рахунків. За умови, що 3% рахунків містять помилки, треба знайти числові характеристики розподілу числа правильних рахунків серед перевірених.

13. З 20 лотерейних білетів виграшними є 4. Навмання беруть чотири білети. Скласти ряд розподілу числа виграшних білетів серед відібраних і знайти числові характеристики цього розподілу.

14. Телевізійний канал рекламує нове дитяче харчування. Ймовірність того, що глядач побачить цю рекламу дорівнює 0,2. Випадковим чином відібрано 10 телеглядачів. Знайти середнє число глядачів, що бачили цю рекламу.

15. На деякий обслуговуючий пристрій у випадкові моменти часу надходять заявки. Проміжок часу між двома послідовними заявками є випадкова величина ξ зі щільністю розподілу

$$p_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}, & t > 0. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, моду і медіану розподілу.

16. Закон розподілу двовимірної випадкової величини $(\xi;\eta)$ має вигляд

$\eta \setminus \xi$	1	2	3
1	$0,1$	$0,15$	$0,12$
2	$0,2$	$0,22$	$0,21$

.

Знайти $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$ і прямі регресії η на ξ.

17. Банк видав позику $n = 1000$ різним позичальникам у розмірі $S = 100$ тис. гр.од. кожному зі ставкою позичкового відсотка $r = 30\%$. Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення величини прибутку банку, а також умову на ставку позичкового відсотка, якщо ймовірність повернення позики позичальником дорівнює $p = 0,8$.

Відповіді

1. $M\xi_1 = M\xi_2 = 2,2$; $D\xi_1 = 0,76$; $D\xi_2 = 0,36$. Отже, при однаковому середньому числа очок, набраних стрільцями, що змагалися, розсіювання результатів у першого стрільця більше, ніж у другого, тобто у другого стрільця результати стрільби кращі (мають більшу щільність). **2.** Приблизно 92 диски. **3.** $\approx 0,905$. **4.** 0,9889. **5.** $M\xi = 2/3$, $D\xi = 1/18$.
6. 68. **7.** 1,22. **8.** 4,8. **9.** $MU = -10$; $DU = 25$. **10.** $M\xi = 15,39$; $D\xi = 3,26$. **11.** $M\xi = np = 1$, $D\xi = npq = 0,9$. **12.** $M\xi = 0,485$, $D\xi = 0,015$. **13.**

ξ	0	1	2	3	4
p	$0,37564$	$0,46233$	$0,14861$	$0,01321$	$0,00021$

,

Випадкова величина ξ має гіпергеометричний розподіл, тому $M\xi = n\dfrac{M}{N} = 0,8$; $D\xi = n \cdot \dfrac{M}{N}\left(1 - \dfrac{M}{N}\right)\left(1 - \dfrac{n-1}{N-1}\right) = 0,53895$.
14. $M\xi = 2$. **15.** $M\xi = T$, $Mo(\xi) = 0$, $Me(\xi) = T\ln 2$.
16. $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = -0,0089$ $\rho\xi,\eta) = -0,023$, $y = -0,014x + 1,658$
17. Якщо ξ – число позичальників, які повернули позику, то прибуток банку є випадковою величиною $\eta = \left(1 + \dfrac{r}{100}\right) S\xi - nS$. Оскільки $M\xi = np$, то $M\eta = nS\left(\dfrac{rp}{100} - (1-p)\right)$. Видача позики має зміст лише тоді, коли $M\eta > 0$, тобто $\dfrac{rp}{100} - (1-p) > 0$. $M\eta = 4$ млн. гр.од., $\sigma_\eta = 1644,38$ тис. гр.од.

5. Граничні теореми теорії ймовірностей

Теореми, які називають **законом великих чисел**, описують умови за яких середнє арифметичне випадкових величин має властивість стійкості. У центральній граничній теоремі формулюються умови, при виконанні яких нормована сума n випадкових величин має при $n \to \infty$ нормальний розподіл. У цьому розділі розглядатимемо тільки дискретні та неперервні випадкові величини.

5.1. Нерівності Чебишова та Маркова

При доведенні різних граничних теорем, а також при розв'язуванні різних прикладних задач важливу роль відіграє нерівність Чебишова.

Перша нерівність Чебишова. *Якщо випадкова величина ξ набуває тільки невід'ємні значення і має скінченне математичне сподівання, то*

$$P\{\xi \geq 1\} \leq M\xi.$$

$\lhd$ Якщо ξ – дискретна випадкова величина, то

$$P\{\xi \geq 1\} = \sum_{i\,:\,x_i \geq 1} p_i \leq \sum_{i\,:\,x_i \geq 1} x_i p_i \leq \sum_i x_i p_i = M\xi.$$

Нехай ξ – неперервна випадкова величина з щільністю розподілу p_ξ. Тоді

$$P\{\xi \geq 1\} = \int\limits_1^{+\infty} p_\xi(x)dx \leq \int\limits_1^{+\infty} x p_\xi(x)dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx = M\xi. \ \rhd$$

Нерівність Маркова. *Якщо випадкова величина ξ набуває тільки невід'ємні значення і має скінченне математичне сподівання, то для довільного $\alpha > 0$ правильна нерівність*

$$P\{\xi \geq \alpha\} \leq \frac{M\xi}{\alpha}. \tag{1}$$

$\lhd$ Скориставшись першою нерівністю Чебишова, одержимо

$$P\{\xi \geq \alpha\} = P\left\{\frac{\xi}{\alpha} \geq 1\right\} \leq M\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) = \frac{M\xi}{\alpha}. \ \rhd$$

Друга нерівність Чебишова. *Нехай випадкова величина ξ має скінченні математичне сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ правильна нерівність*

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \tag{2}$$

$\triangleleft$ Розглянемо протилежну подію $\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\}$, яка еквівалентна події $\{(\xi - M\xi)^2 \geq \varepsilon^2\}$ або події $\left\{\dfrac{(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right\}$. Тоді згідно з першою нерівністю Чебишова

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = P\left\{\frac{(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right\} \leq M\left(\frac{(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} M(\xi - M\xi)^2 = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Тому

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \ \triangleright$$

Приклад 1. Сума усіх вкладів у деякому ощадному банку становить $2 \cdot 10^8$ гривень, а ймовірність того, що випадково взятий вклад не перевищує 10^4 гривень, дорівнює 0,8. Що можна сказати про число вкладників цього банку?

$\triangleleft$ Нехай ξ – величина випадкового взятого вкладу, а n – число всіх вкладників. Тоді з умови задачі випливає, що $M\xi = \dfrac{1}{n} \cdot 2 \cdot 10^8$, а $P\{\xi < 10^4\} = 0,8$. Згідно з нерівністю Маркова (1)

$$P\{\xi < 10^4\} = 1 - P\{\xi \geq 10^4\} \geq 1 - \frac{M\xi}{10^4}, \text{ тому } 0,8 \geq 1 - \frac{2 \cdot 10^8}{10^4 n}.$$

Звідки

$$0,2 \leq \frac{2}{n} \cdot 10^4, \qquad \text{тобто} \qquad n \leq 10^5. \ \triangleright$$

Приклад 2 (правило трьох сигм). Оцінити ймовірність того, що відхилення будь-якої випадкової величини ξ від її математичного сподівання $M\xi$ за модулем буде меншим трьох середніх квадратичних відхилень цієї випадкової величини.

◁ Згідно з другою нерівністю Чебишова (2)

$$P\{|\xi - M\xi| < 3\sigma_\xi\} \geq 1 - \frac{D\xi}{(3\sigma_\xi)^2} = 1 - \frac{\sigma_\xi^2}{9\sigma_\xi^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}. \ \triangleright$$

5.2. Закон великих чисел

Теореми, які називають законом великих чисел, дають умови збіжності середнього арифметичного n випадкових величин до середнього арифметичного їхніх математичних сподівань.

Теорема 1 (закон великих чисел у формі Чебишова). *Нехай $\{\xi_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин, дисперсії яких обмежені зверху однією і тією самою сталою C : $D\xi_i \leq C$, $i \in \mathbb{N}$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ правильна нерівність*

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}D\xi_i}{n^2\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

◁ Розглянемо випадкову величину $\eta_n = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n}$. Згідно з властивостями математичного сподівання і дисперсії

$$M\eta_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}M\xi_i}{n}, \quad D\eta_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}D\xi_i}{n^2} \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Застосовуючи до випадкової величини η_n нерівність Чебишова (2), одержимо, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\{|\eta_n - M\eta_n| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\eta_n}{\varepsilon^2},$$

тобто

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}D\xi_i}{n^2\varepsilon^2}\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Перейшовши до границі при $n\to\infty$ і врахувавши, що ймовірність не може бути більшою за одиницю, матимемо

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|<\varepsilon\right\}=1.\ \triangleright$$

Ця теорема дає обгрунтування правила середнього арифметичного, яким користуються в практиці вимірювань. Наприклад, нехай треба виміряти деяку фізичну величину a. Здійснивши n незалежних вимірювань, ми дістанемо n значень цієї величини $x_1,\ldots,x_n$. Кожне значення x_i є випадковою величиною. При цьому вважатимемо, що математичне сподівання кожної з цих величин дорівнює $a: Mx_i=a,\ i\in\{1,\ldots,n\}$. Ця умова означає, що вимірювання позбавлені систематичних помилок. Крім того, вважатимемо, що $D\xi_i\leq C,\ i\in\{1,\ldots,n\}$, тобто всі вимірювання здійснюються з деякою гарантованою точністю. За цих умов застосовують теорему Чебишова

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-a\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

тобто при достатньо великій кількості вимірювань з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці, середнє арифметичне результатів вимірювань буде як завгодно мало відрізнятись від вимірюваної величини.

Приклад 3. Для визначення середньої тривалості горіння електролампи в партії з 200 однакових ящиків було взято навмання по одній лампі з кожного ящика. Оцінити знизу ймовірність того, що середня тривалість горіння відібраних 200 ламп відрізняється від середньої тривалості горіння в усій партії за абсолютною величиною менше, ніж на 5 год, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння електролампи в кожному ящику менше 7 год.

◁ Нехай ξ_i – тривалість горіння електролампи взятої з i-го ящика. Згідно з умовою задачі $D\xi_i < 7^2 = 49$. Очевидно, що середня тривалість горіння ламп у вибірці $\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200}\xi_i$, а середня тривалість горіння ламп в усій партії

$$\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} M\xi_i.$$

Оцінимо знизу ймовірність

$$P\left\{\left|\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200}\xi_i - \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} M\xi_i\right| < 5\right\},$$

скориставшись формулою (3), де $C = 49$, $\varepsilon = 5$, $n = 200$:

$$P\left\{\left|\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200}\xi_i - \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} M\xi_i\right| < 5\right\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{49}{200\cdot 25} = 1 - \frac{49}{5000} = 1 - 0,0098 = 0,9902. \ \triangleright$$

Теорема 2 (закон великих чисел у формі Пуассона). *Якщо в послідовності незалежних випробувань p_i – імовірність появи події A в i-му випробуванні, а m – число настання події при n випробуваннях, то*

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)}{n^2\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}, \qquad (4)$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Звідси випливає рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Приклад 4. Проведено 800 незалежних випробувань. У 200 з них імовірність появи очікуваного результату дорівнювала 0,5, у 400 випробуваннях ця ймовірність – 0,4, а в решті випадків – 0,3. Оцінити знизу ймовірність того, що відхилення частоти появи очікуваного результату від середньої ймовірності за абсолютною величиною не перевищує 0,04.

$\lhd$ Якщо через p_i позначити ймовірність настання події в i-му випробуванні, то середня ймовірність настання події у 800 випробуваннях

$$\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{800}(0,5\cdot 200 + 0,4\cdot 400 + 0,3\cdot 200) = \frac{3,2}{8} = 0,4.$$

Оцінимо знизу ймовірність $P\left\{\left|\frac{m}{n} - \overline{p}\right| < 0,04\right\}$, користуючись теоремою Пуассона, точніше нерівністю (4). Одержимо

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0,4\right| < 0,04\right\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{0,5(1-0,5)200 + 0,4(1-0,4)400 + 0,3(1-0,3)200}{800^2(0,04)^2} = 0,817. \rhd$$

Наслідок (закон великих чисел у формі Бернуллі). *Якщо $p_1 = \ldots = p_n = p$, то нерівність (4) матиме вигляд*

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}, \qquad (5)$$

з якої випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Приклад 5. Скільки разів треба підкинути однорідну правильної форми монету, щоб з ймовірністю, не меншою, ніж 0,997, можна було стверджувати, що частота випадання герба буде знаходитись між 0,499 і 0,501?

$\lhd$ Якщо k – число випадань герба, а n – число підкидань монети, то згідно з умовою повинна виконуватись нерівність

$$P\left\{0,499 < \frac{k}{n} < 0,501\right\} \geq 0,997$$

або

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-0,5\right|<0,001\right\}\geq 0,997.$$

Оскільки 0,5 – це ймовірність випадання герба, то застосовуючи нерівність (5), матимемо

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-0,5\right|<0,001\right\}\geq 1-\frac{0,5(1-0,5)}{n\cdot(0,001)^2}.$$

Вимагатимемо виконання нерівності

$$1-\frac{0,5\cdot 0,5}{n\cdot(0,001)^2}\geq 0,997,$$

звідки

$$\frac{0,25}{n\cdot(0,001)^2}\leq 0,003,\quad \text{тобто}\quad n\geq 83333333.\ \triangleright$$

5.3. Центральна гранична теорема

Якщо μ – число успіхів у n послідовних незалежних випробуваннях, при кожному з яких імовірність успіху дорівнює $p\in(0;1)$, то згідно з інтегральною теоремою Муавра-Лапласа

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt,\ x\in\mathbb{R}. \qquad (6)$$

Очевидно, що (6) можна записати у вигляді

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<x\right\}=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt, \qquad (7)$$

де $\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, $t\in\mathbb{R}$, – щільність розподілу нормальної випадкової величини $\xi\sim\mathcal{N}(0,\,1)$, а $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$, – функція розподілу цієї випадкової величини. Рівність (7) означає, що функція розподілу випадкової величини $\eta_n = \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}}$ при $n \to \infty$ прямує до функції розподілу нормальної випадкової величини $\xi \sim \sim \mathcal{N}(0,\,1)$. Подамо μ у вигляді $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$, де μ_i – число успіхів у i-му випробуванні, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Відомо, що $M\mu = np$, $D\mu = npq$. Тому (7) можна записати так:

$$\lim_{n\to\infty} F_{\eta_n}(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i - \sum\limits_{i=1}^{n} M\mu_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} D\mu_i}} < x\right\} =$$

$$= F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Отже, якщо кожна з незалежних випадкових величин $\mu_1, \ldots, \mu_n$ може набувати лише два значення 1 і 0 з ймовірностями відповідно p і $q = 1 - p$, то при $n \to \infty$ функція розподілу випадкової величини

$$\eta_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i - \sum\limits_{i=1}^{n} M\mu_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} D\mu_i}}$$

прямує до функції розподілу нормальної випадкової величини $\xi \sim \mathcal{N}(0,\,1)$.

Виникає запитання, чи подібне твердження правильне для послідовностей випадкових величин $\{\xi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, які задовольняють слабкіші умови, ніж $\{\mu_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Відповідь на це запитання дають твердження, які називаються центральними граничними теоремами. Наведемо деякі з них.

Теорема Ляпунова. *Якщо для послідовності взаємно незалежних випадкових величин* $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *існує таке число* $\delta > 0$, *що*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M|\xi_i - M\xi_i|^{2+\delta}}{\left(\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i}\right)^{2+\delta}} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - \sum\limits_{i=1}^{n} M\xi_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$$

рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$.

У математичній статистиці важливу роль відіграє наступне твердження.

Теорема Ліндеберга-Леві. *Якщо взаємно незалежні випадкові величини* $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *однаково розподілені, мають математичне сподівання* $M\xi_i = a$, *і дисперсію* $D\xi_i = \sigma^2$, $i \in \mathbb{N}$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$$

рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$.

Центральна гранична теорема стверджує, що випадкова величина, яка є сумою достатньо великого числа незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких невеликий у порівнянні з їхньою сумарною дією, розподілена за нормальним законом.

Приклад 6. Випадкова величина η_n є середнім арифметичним незалежних і однаково розподілених випадкових величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, дисперсія кожної з яких дорівнює 5. При якому n буде виконуватись нерівність $P\{|\eta_n - M\eta_n| \leq 0,01\} \geq 0,9973$?

$\triangleleft$ Скористаємось теоремою Ліндеберга-Леві

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\xi_i\right| \leq 0,01\right\} =$$

$$= P\left\{\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - \sum\limits_{i=1}^{n}M\xi_i\right|}{\sqrt{5n}} < 0,01\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{0,01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right).$$

Згідно з умовою

$$2\Phi\left(\frac{0,01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) \geq 0,9973.$$

Оскільки $\Phi(3) = 0,49865$, то

$$\frac{0,01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{5}} \geq 3, \quad \text{звідки} \quad n \geq 449999,9.$$

Тому досить взяти $n \geq 450000$. $\triangleright$

Вправи

1. На смугу укріплення противника скидають 100 серій бомб. При скиданні однієї такої серії математичне сподівання числа попадань дорівнює 2, а середнє квадратичне відхилення попадань дорівнює 1,5. Знайти наближено ймовірність того, що при скиданні 100 серій на смугу попаде від 180 до 220 бомб.

2. Схожість насіння деякої рослини становить 70%. Використовуючи закон великих чисел у формі Бернуллі, оцінити ймовірність того, що при висіванні 10000 насінин відхилення частки тих насінин, що зійшли, від ймовірності зійти кожної з них, не перевищить за абсолютною величиною 0,01.

3. Для визначення невідомої ймовірності проведено 40000 випробувань, у яких подія з'явилась 16042 рази. За ймовірність події взято частоту $p_1 = \dfrac{16042}{40000} \approx 0,4$. З якою ймовірністю можна гарантувати, що число, прийняте за ймовірність події, відрізняється від ймовірності її настання в окремому випробуванні не більше, ніж на 0,05?

4. Задано послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, де випадкова величина ξ_n задана законом розподілу

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$\dfrac{1}{2n^2}$	$1-\dfrac{1}{n^2}$	$\dfrac{1}{2n^2}$

$, n \in \mathbb{N},\ \alpha > 0.$

Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел у формі Чебишова?

5. З'ясувати, чи є правильним закон великих чисел для середнього арифметичного n попарно незалежних випадкових величин ξ_n, які задані законом розподілу

ξ_n	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

.

6. Вимірюється швидкість вітру в певному пункті Землі. Випадкова величина ξ – проекція вектора швидкості вітру на фіксований напрямок. Оцінити ймовірність події $A = \{\xi \geq 80\,\text{км/год}\}$, якщо шляхом багаторічних вимірювань встановлена середня швидкість вітру 16 км/год.

7. В умовах попередньої задачі оцінити ймовірність події A, якщо в результаті додаткових вимірювань встановлено, що $\sigma_\xi = 4$ км/год.

8. Число ξ сонячних днів у році для деякої місцевості є випадковою величиною із середнім значенням 100 днів та середнім квадратичним відхиленням 20 днів. Оцінити зверху ймовірність події $A = \{\xi \geq 150\}$.

9. Автопарк після місяця експлуатації відправляє на ремонт у середньому 5 автобусів. Оцінити ймовірність того, що наприкінці місяця автопарк відправить на ремонт менше 15 автобусів, якщо при цьому відхилення становить 2 автобуси.

10. Поїзд складається з n вагонів. Вага кожного вагона в тоннах – випадкова величина ξ з математичним сподіванням a і середнім квадратичним відхиленням σ. Локомотив може везти не більше q тонн. Якщо вага поїзда більша q тонн, то треба причепити другий локомотив. Знайти ймовірність того, що одного локомотива не вистачить для перевезення вказаного вантажу.

11. Вантажний поїзд містить n_1 вагонів, вага ξ_1 кожного з них має математичне сподівання m_1 і дисперсію D_1, n_2 платформ з характеристиками ваги ξ_2 – m_2 і D_2, а також n_3 цистерн з характеристиками ваги ξ_3 – m_3 і D_3. Величини n_1, n_2, n_3 досить великі. Знайти ймовірність того, що загальна вага η поїзда буде більшою за q тонн.

12. У касі закладу є сума $d = 3500$ гр.од. У черзі стоять 20 працівників. Сума ξ, яку треба виплатити окремій особі є випадковою величиною з математичним сподіванням 150 гр.од. та середнім квадратичним відхиленням 60 гр.од. Знайти ймовірність того, що суми d не вистачить для виплати грошей усім, хто знаходиться у черзі.

13. Яку суму треба мати в касі для того, щоб з ймовірністю 0,995 її вистачило за умов попередньої задачі для тих, хто стоїть у черзі?

14. Визначити скільки треба зробити замірів поперечного перерізу дерев на великій ділянці, щоб середній діаметр вибраних дерев відрізнявся від середнього діаметра всіх дерев на заданій ділянці не більше, ніж на 2 см з імовірністю 0,95. Відомо, що середнє квадратичне відхилення поперечного перерізу дерев не перевищує 10 см і заміри проводяться без систематичної похибки.

15. Відомо, що 91% виробів механічного цеху є першого гатунку. Оцінити ймовірність того, що відносна частота виробів першого гатунку серед 20000 виготовлених відрізнятиметься від імовірності виготовлення виробу першого гатунку не більше, ніж на 0,1.

16. З 4000 проведених випробувань у 500 з них імовірність появи очікуваного результату дорівнює 0,4, в 1200 – 0, 5 і в 2300 – 0,6. Знайти межі, в яких повинна знаходитись частота появи очікуваного результату, якщо це треба гарантувати з ймовірністю 0,98.

17. Дисперсія кожної з ξ_i, $i \in \{1, \ldots, 4500\}$, однаково розподілених випадкових величин дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що середнє арифметичне цих випадкових величин відхиляється від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,04 за допомогою: 1) нерівності Чебишова; 2) центральної граничної теореми.

Відповіді

1. 0,82. **2.** 0,79. **3.** 0,9975. **4.** Так. **5.** Так. **6.** 0,2. **7.** 0,0425. **8.** 0,16. **9.** 0, 96. **10.** $P\{\xi > q\} \approx 0,5 - \Phi\left(\dfrac{q - an}{\sqrt{n}\sigma}\right)$.

11. $P\{\eta > q\} \approx 0,5 - \Phi\left(\dfrac{q - M\eta}{\sigma}\right)$. **12.** 0,0322. **13.** 3692,29 гр.од.

14. $n \geq 500$. **15.** $P \geq 0,99875$. **16.** $0,527 < \dfrac{m}{n} < 0,563$.

17. 1) $P\{|\eta_{4500} - M\eta_{4500}| \leq 0,04\} \geq 0,301$;

2) $P\left\{\left|\dfrac{1}{4500}\eta_{4500} - \dfrac{1}{4500}M\eta_{4500}\right| \leq 0,04\right\} = 0,7698$,

де $\eta_{4500} = \dfrac{1}{4500}(\xi_1 + \ldots + \xi_{4500})$.

Математична статистика

Математична статистика вивчає закономірності, яким підпорядковані масові випадкові явища і процеси, за результатами незалежних випадкових спостережень або експериментів і на основі цього роблять певні ймовірнісні висновки. Ці висновки стосуються не окремого випробування, а є твердженнями про загальні характеристики певного явища, наприклад, ймовірність, закон розподілу та його параметри, числові характеристики і т.п. у припущенні незмінності умов, при яких відбувається досліджуване явище.

Основними задачами математичної статистики є такі:

– описання способів збирання та групування статистичних даних і розроблення методів аналізу цих даних;

– визначення законів розподілу випадкових величин;

– знаходження невідомих параметрів розподілу;

– перевірка правильності припущень про закон розподілу випадкової величини, про форму зв'язку між випадковими величинами або про значення параметра, який оцінюємо.

Отже, математична статистика розробляє методи аналізу статистичних явищ у залежності від мети досліджень.

1. Генеральна і вибіркова сукупності. Варіаційний ряд

Статистичною сукупністю називають множину однорідних предметів або явищ. Окремі елементи, які входять у сукупність, називаються **членами статистичної сукупності**, а число членів цієї сукупності – її **обсягом**.

Означення 1. Генеральною сукупністю називається ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, тобто простір елементарних подій Ω із заданими на ньому σ-алгеброю $\mathcal{F}$ і ймовірністю P, і визначена на цьому ймовірнісному просторі випадкова величина ξ. **Елементом генеральної сукупності** називається елементарна подія і значення випадкової величини, яке їй відповідає.

Випадкова величина ξ має певну функцію розподілу і пов'язані з нею числові характеристики. Функцію розподілу випадкової величини ξ, її параметри і числові характеристики будемо називати теоретичними на відміну від вибіркових (емпіричних), які визначаються за вибірковими даними.

Означення 2. Випадковою вибіркою або просто **вибіркою** обсягу n називається сукупність $\xi_1, \ldots, \xi_n$ n незалежних однаково розподілених випадкових величин, розподіл кожної з яких збігається з розподілом досліджуваної випадкової величини ξ.

Конкретний набір вибіркових значень $x_1, \ldots, x_n$ слід розглядати як реалізацію (одну з можливих) багатовимірної випадкової величини $(\xi_1; \ldots; \xi_n)$, компоненти якої незалежні й мають одну й ту саму функцію розподілу F_ξ, що відповідає генеральній сукупності. Тому багатовимірна випадкова величина $(\xi_1; \ldots; \xi_n)$, що характеризує вибірку, має такий розподіл

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i < x_i\} = \prod_{i=1}^{n} F_\xi(x_i), \ \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Вибірка називається **репрезентативною (представницькою)**, якщо вона відтворює всі характерні риси й ознаки генеральної сукупності. Нехай у генеральній сукупності досліджується деяка ознака, яка, взагалі кажучи, змінюється при переході від одного члена статистичної сукупності до іншого. Зміна цієї ознаки називається її **варіацією**, а значення ознаки цього члена статистичної сукупності – **варіантою**.

Означення 3. Варіаційним рядом вибірки $x_1, \ldots, x_n$ називається спосіб її запису, при якому всі варіанти впорядковуються за величиною, тобто записуються у вигляді

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)},$$

де $x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \ldots \leq x^{(n)}$.

Різниця між максимальним і мінімальним елементами вибірки

$$\omega = x^{(n)} - x^{(1)}$$

називається **розмахом вибірки.** Нехай у вибірці обсягу n елемент x_i зустрічається n_i разів. Число n_i називається **частотою** елемента x_i. Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$, $k \le n$.

Означення 4. Статистичним рядом вибірки називається послідовність пар $(x_i; n_i)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Записують статистичний ряд у вигляді таблиці, перший рядок якої містить різні варіанти x_i, а другий – їхні частоти n_i.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

.

Приклад 1. Записати у вигляді варіаційного і статистичного рядів вибірку 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Знайти розмах вибірки.

$\triangleleft$ Обсяг вибірки $n = 15$. Впорядкувавши елементи вибірки за величиною, дістанемо варіаційний ряд

$$2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10.$$

Розмах вибірки $\omega = 10 - 2 = 8$.

Статистичний ряд записується у вигляді таблиці

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

.

Для контролю правильності запису знаходимо $\sum\limits_{i=1}^{6} n_i = 15$. $\triangleright$

Часто статистичний ряд називають **дискретним статистичним (дискретним варіаційним) рядом.**

Якщо провести групування за інтервалами зміни ознаки варіанти, а через n_i позначити число варіант, які лежать в одному інтервалі, то одержимо **інтервальний статистичний (інтервальний варіаційний) ряд**

I_i	$[a_1;\, a_2)$	$[a_2;\, a_3)$	$\ldots$	$[a_{k-1};\, a_k]$
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_{k-1}

.

Якщо проміжки в інтервальному статистичному ряді мають однакові довжини, то їх називають **рівновеликими**, а у протилежному випадку – **нерівновеликими**. При побудові інтервального статистичного ряду виникає проблема вибору довжини проміжків. Для визначення оптимальної довжини рівновеликих проміжків застосовують формулу Стерджерса

$$h = \frac{\omega}{1 + 3,322 \cdot \lg\, n} \quad \text{або} \quad h = \frac{\omega}{1 + 1,4 \cdot \ln\, n},$$

де ω – розмах вибірки, а n – обсяг вибірки.

Кількість інтервалів знаходять за формулою

$$k \approx 1 + 3,322 \cdot \lg\, n \quad \text{або} \quad k \approx 1 + 1,4 \cdot \ln\, n.$$

Для наочного зображення статистичного розподілу користуються графічним зображенням статистичних рядів, а саме: полігоном, гістограмою, кумулятою та огивою.

Для побудови полігона статистичного ряду на осі абсцис прямокутної системи координат відкладають проміжки значень ознаки (або окремі значення ознаки у випадку дискретного розподілу), із середин проміжків (значень ознаки) проводять перпендикуляри, довжини яких пропорційні частотам, потім кінці сусідніх перпендикулярів з'єднують відрізками прямих, а кінці крайніх перпендикулярів – з серединами сусідніх проміжків (сусідніми значеннями ознаки), частоти яких дорівнюють нулю. Як результат одержують замкнену фігуру у вигляді многокутника, яка називається **полігоном частот** або **полігоном статистичного ряду**.

Приклад 2. Побудувати дискретний статистичний ряд і нарисувати полігон частот для розподілу за розмірами 45 пар чоловічого взуття, проданими магазином за день:

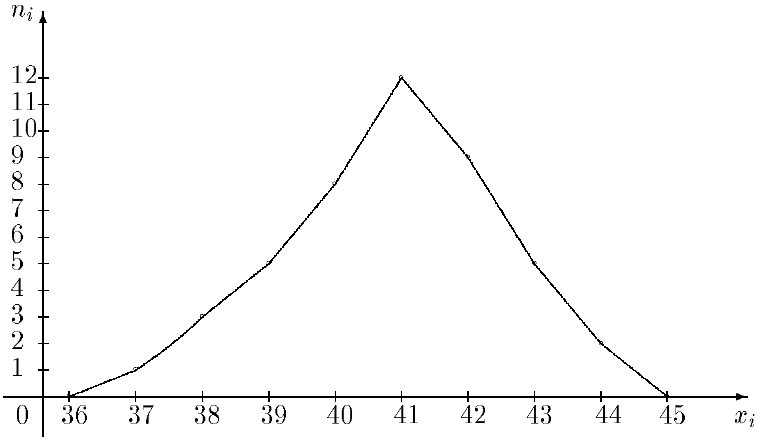
39	41	40	42	41	40	42	44	40	43	42	41	43
39	42	41	42	39	41	37	43	41	38	43	42	41
40	41	38	44	40	39	41	40	42	40	41	42	40
			43	38	39	41	41	42.				

◁ Для побудови статистичного ряду різні значення варіант розмістимо в порядку їхнього зростання

x_i	37	38	39	40	41	42	43	44
n_i	1	3	5	8	12	9	5	2

.

Полігон цього ряду зображено на рисунку



. ▷

Для графічного зображення інтервального статистичного ряду використовують також **гістограму частот**, яка будується так: на осі абсцис відкладають проміжки значень варіант і на кожному з них як на основі будують прямокутник з висотою, пропорційною частоті інтервалу і площею n_i. Звідси випливає, що площа гістограми частот дорівнює обсягу вибірки n. У тому випадку, коли проміжки рівновеликі з довжиною h, висоти прямокутників дорівнюють $h_i = n_i/h$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Приклад 3. Спостереження за довжиною (в мм) 55 виробів певного типу дали такі результати:

17	19	23	18	21	15	16	13	20	18	15
20	14	20	16	14	20	19	15	19	16	19
15	22	21	12	10	21	18	14	14	17	16
13	19	18	20	24	16	20	19	17	18	18
21	17	19	17	13	17	11	18	19	19	17.

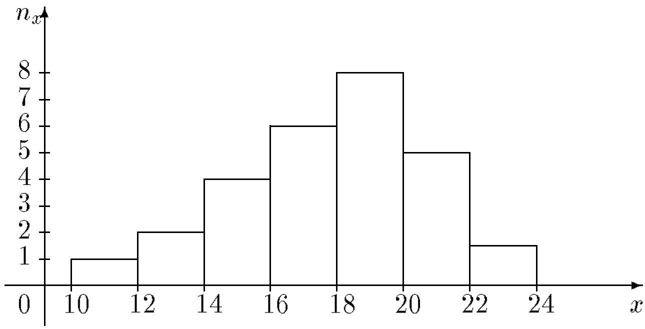
Побудувати гістограму частот розподілу.

◃ Розмах вибірки $\omega = 24 - 10 = 14$. Виберемо довжину проміжку $h = 14/7 = 2$. Для побудови статистичного ряду складемо таблицю

I_i	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24]
n_i	2	4	8	12	16	10	3
$\dfrac{n_i}{h}$	1	2	4	6	8	5	1,5

.

Гістограма частот має вигляд



. ▹

Застосування згрупованих даних дає економію в розрахунках, якщо обсяг вибірки великий ($n > 30$). Тому поряд з частотами у багатьох задачах статистики підраховують одночасно нагромаджені частоти $\gamma_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$, відносні частоти $\dfrac{n_i}{n}$ і нагромаджені відносні частоти $\dfrac{\gamma_i}{n} = \sum_{j=1}^{i} \dfrac{n_j}{n}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Аналогічно будуються полігон і гістограма відносних частот статистичної вибірки.

Як дискретні, так й інтервальні статистичні ряди графічно можна подавати у вигляді кумуляти й огиви. При побудові першої за даними дискретного статистичного ряду на осі абсцис відкладають значення ознаки (варіанти), а на осі ординат – нагромаджені частоти (відносні частоти). На перетині цих значень відкладають точки, які з'єднують відрізками або кривою. Одержана при цьому ламана (крива) називається **кумулятою (кумулятивною кривою)**. У випадку інтервального статистичного ряду нижній межі першого інтервалу відповідає частота, яка дорівнює нулю, а верхній – вся частота інтервалу. Верхній межі другого інтервалу відповідає нагромаджена частота перших двох інтервалів (тобто сума частот цих інтервалів), і т.д. Верхній межі останнього інтервалу відповідає нагромаджена частота, що дорівнює сумі всіх частот. **Огива** будується аналогічно до кумуляти, з тієї різницею, що на осі абсцис відкладаються точки, які відповідають нагромадженим частотам (відносним частотам), на осі ординат – значення варіант.

Приклад 4. Для визначення міцності нитки проведено 1000 випробувань, які дали такі результати

I_i	[180; 190)	[190; 200)	[200; 210)
n_i	50	90	150

I_i	[210; 220)	[220; 230)	[230; 240)	[240; 250]
n_i	280	220	120	90

.

Побудувати кумулятивний ряд і накреслити кумуляту й огиву частот.

$\triangleleft$ Спочатку знаходимо нагромаджені частоти для кожного з інтервалів заданого інтервального статистичного ряду

$$\gamma_1 = \gamma(190) = n_1 = 50; \quad \gamma_2 = \gamma(200) = n_1 + n_2 = \gamma_1 + n_2 = 140;$$

$$\gamma_3 = \gamma(210) = n_1 + n_2 + n_3 = \gamma_2 + n_3 = 290;$$

$$\gamma_4 = \gamma(220) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = \gamma_3 + n_4 = 570;$$

$$\gamma_5 = \gamma(230) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = \gamma_4 + n_5 = 790;$$

$$\gamma_6 = \gamma(240) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = \gamma_5 + n_6 = 910;$$

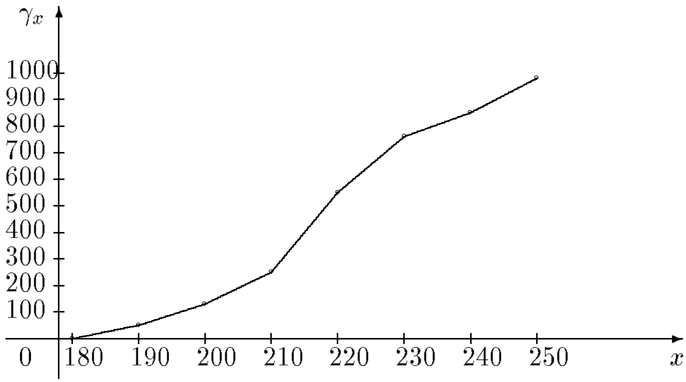
$$\gamma_7 = \gamma(250) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = \gamma_6 + n_7 = 1000.$$

Отже, кумулятивний ряд для заданого розподілу має вигляд

I_i	[180; 190)	[190; 200)	[200; 210)
γ_i	50	140	290

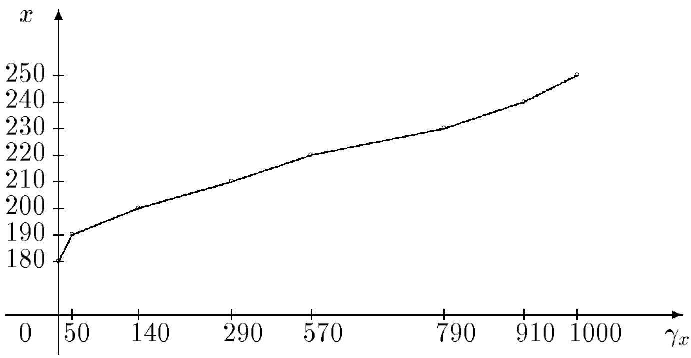
I_i	[210; 220)	[220; 230)	[230; 240)	[240; 250]
γ_i	570	790	910	1000

.



;

Кумулята



. ▷

Огива

Вправи

1. У результаті вибірки одержано числа: -5, 1, -3, -2, 0, 0, -3, -3, -2, 0, 1, 2, 0, 0. Побудувати варіаційний і статистичний ряди, знайти розмах вибірки, нарисувати полігон, кумуляту й огиву частот.

2. Статистична сукупність має вигляд

61,55	61,59	62,09	63,08	63,97	64,74	65,07
67,12	68,10	69,38	70,21	70,21	70,36	71,25
71,86	72,00	72,39	72,41	72,46	72,50	72,80
72,84	73,44	74,93	75,46	75,65	77,13	77,37
77,64	77,86	77,93	78,03	78,28	78,74	78,97
79,07	79,10	79,34	79,34	79,34	79,40	79,49
79,70	80,02	80,26	80,56	80,65	80,69	81,13
81,32	81,40	81,54	81,85	82,27	82,71	82,74
82,78	83,03	83,05	83,59	83,68	83,74	83,78
83,96	84,98	85,18	85,32	85,64	85,71	85,84
86,01	86,03	86,05	86,11	86,48	86,94	86,98
87,38	87,47	87,59	87,89	88,03	88,04	88,11
88,24	88,89	90,34	90,40	90,58	90,73	90,76
92,51	92,72	92,94	94,58	95,06	95,73	96,11
		96,34	96,55.			

Скласти інтервальний ряд розподілу, взявши

$$h = \frac{x^{(k)} - x^{(1)}}{1 + 3,322 \cdot \lg n} \approx 5.$$

Нарисувати полігон, гістограму, кумуляту й огиву частот.

3. У результаті досліду випадкова величина ξ набула значень: 2, 5, 7, 1, 10, 5, 9, 6, 8, 6, 2, 3, 7, 6, 8, 3, 8, 10, 6, 7, 3, 9, 4, 5, 6. Треба :

1) знайти статистичний розподіл вибірки;

2) побудувати полігон, кумуляту й огиву відносних частот.

4. У результаті випробувань неперервна випадкова величина ξ набула значень: 16, 17, 9, 13, 21, 11, 7, 7, 19, 5, 17, 5, 20, 18, 11, 4, 6, 22, 21, 15, 15, 23, 19, 25, 1. Треба :

1) подудувати інтервальний статистичний ряд, розбивши відрізок $[0; 25]$ на п'ять рівновеликих частинних проміжків;

2) побудувати гістограму, кумуляту й огиву відносних частот.

5. Побудувати дискретний та інтервальний статистичні ряди розподілу 60 абітурієнтів за числом балів, одержаних ними на вступних іспитах:

20	19	22	24	21	18	23	17	20	16	15	23
21	24	21	18	23	21	19	20	24	21	20	18
17	22	20	16	22	18	20	17	21	17	19	20
20	21	18	22	23	21	25	22	20	19	21	24
		23	21	19	22	21	19	20	23	22	
				25	21	21.					

Відповіді

1. $\omega = 7$. Статистичний ряд

x_i	-5	-3	-2	0	1	2
n_i	1	3	2	5	2	1

.

2.

I_i	[61,55; 66,55)	[66,55; 71,55)	[71,55; 76,55)	[76,55; 81,55)
n_i	7	7	11	27

,

I_i	[81,55; 86,55)	[86,55; 91,55)	[91,55; 96,55]
n_i	23	16	9

.

3.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	1	2	3	1	3	5	3	3	2	2

.

4.

I_i	[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25]
n_i	3	5	4	8	5

.

5. Дискретний статистичний ряд

x_i	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
n_i	1	2	4	5	6	10	13	7	6	4	2

;

інтервальний статистичний ряд ($h = 2$)

I_i	[15, 17)	[17, 19)	[19, 21)	[21, 23)	[23, 25]
n_i	3	9	16	20	12

.

2. Вибіркові характеристики та способи їх обчислень

Як характеристики варіаційних рядів використовують моду і медіану.

Означення 1. Медіаною Me варіаційного ряду називається варіанта, яка є його серединою. Якщо обсяг вибірки $n = 2k - 1$, то $Me = x_k$; якщо ж $n = 2k$, то $Me = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$.

У випадку інтервального статистичного розподілу

$$Me = x_{i_0} + h\frac{\frac{1}{2}n - \gamma_{i_0-1}}{n_{i_0}}, \tag{1}$$

де x_{i_0} – початкове значення медіанного проміжку, тобто проміжку, який містить медіану; $\gamma_{i_0-1} = \sum_{j=1}^{i_0-1} n_j$ – нагромаджена частота проміжку, який передує медіанному; n_{i_0} – частота медіанного проміжку; h – довжина медіанного проміжку; n – обсяг сукупності. Номер медіанного проміжку i_0 відповідає проміжку, для якого

$$\sum_{j=1}^{i_0} n_j \le \frac{n}{2} < \sum_{j=1}^{i_0+1} n_j \ . \tag{2}$$

Означення 2. Модою Mo дискретного статистичного розподілу називається варіанта, яка має найбільшу частоту. Якщо маємо інтервальний статистичний розподіл, то

$$Mo = x_{i_0} + h\frac{n_{i_0} - n_{i_0-1}}{(n_{i_0} - n_{i_0-1}) + (n_{i_0} - n_{i_0+1})}, \tag{3}$$

де x_{i_0} – початкове значення модального проміжку, тобто проміжку, який містить моду; n_{i_0} – частота модального проміжку; n_{i_0-1} – частота проміжку, передуючого модальному; n_{i_0+1} – частота проміжку, наступного за модальним; h – довжина модального проміжку.

Приклад 1. Обчислити медіану та моду статистичного розподілу проданого магазином взуття (за розміром)

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	1	1	5	8	17	21	18	8

.

$\lhd$ Обсяг сукупності $n = 79$, тобто непарний, а тому $2k-1 = 79$, $k = 40$. Отже, медіаною буде x_{40}. Для знаходження x_{40} знайдемо нагромаджені частоти розподілу

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	1	1	5	8	17	21	18	8
γ_i	1	2	7	15	32	53	71	79

.

В одержаній таблиці знаходимо нагромаджену частоту, яка менша половини обсягу сукупності, і першу частоту, яка більша за неї. Вони дорівнюють відповідно 32 і 53. Отже, перші 32 варіанти за своєю величиною менші 41, а наступні 21 варіанта, які мають номери з 33-го до 53-го включно, набувають значення 41. Отже, медіана $Me = x_{40} = 41$.

Найбільша частота нашого розподілу дорівнює 21 і вона відповідає варіанті 41. Тому мода $Mo = 41$. $\rhd$

Приклад 2. Дослідження якості пряжі на міцність дали такі результати

I_i	[120; 140)	[140; 160)	[160; 180)	[180; 200)
n_i	1	6	19	58
γ_i	1	7	26	84

I_i	[200; 220)	[220; 240)	[240; 260)	[260; 280]
n_i	53	24	16	3
γ_i	137	161	177	180

.

Знайти моду і медіану цього розподілу.

$\lhd$ Оскільки найбільша частота $n_{i_0} = 58$ відповідає проміжку [180; 200), то $x_{i_0} = 180$, $n_{i_0-1} = 19$, $n_{i_0+1} = 53$, $h = 20$. Згідно з формулою (3)

$$Mo = 180 + 20\frac{58-19}{(58-19)+(58-53)} \approx 197,73.$$

Номер медіанного проміжку визначається на основі нерівності (2)

$$\sum_{j=1}^{i} n_j \le \frac{180}{2} \le \sum_{j=1}^{i+1} n_j\,, \qquad \sum_{j=1}^{4} n_j \le 90 \le \sum_{j=1}^{5} n_j,$$

$$84 \le 90 \le 137.$$

Тому номер медіанного проміжку $i = 5$, а сам проміжок $[200; 220)$. Згідно з формулою (1)

$$Me = 200 + 20\frac{90 - 84}{53} \approx 202,26. \ \triangleright$$

Означення 3. Розподілом вибірки називають дискретний розподіл, в якому кожному з чисел x_1, ..., x_n відповідає ймовірність (частота) $1/n$.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
n_i	$1/n$	$1/n$	...	$1/n$

.

Означення 4. Функцією розподілу вибірки (або **емпіричною функцією розподілу**) називається функція

$$F_n(x) = \frac{\nu(x)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

де $\nu(x)$ – кількість тих x_i, для яких $x_i < x$, $x \in \mathbb{R}$.

Очевидно, що $F_n(x) = 0$ при $x \le x_1$, $F_n(x) = 1$ при $x > x_n$ і F_n є неспадною кусково сталою, неперервною зліва функцією на $\mathbb{R}$.

Означення 5. Математичне сподівання, дисперсію, моменти вибірки називають відповідно **вибірковим середнім**, **вибірковою дисперсією**, **вибірковими моментами**.

Вибіркове середнє позначають $\overline{x}$, вибіркову дисперсію S^2, початковий вибірковий момент l-го порядку α_l, центральний вибірковий момент l-го порядку m_l. Отже,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \tag{5}$$

тобто вибіркове середнє є середнім арифметичним вибіркових значень;

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{6}$$

або

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2\,; \tag{7}$$

$$\alpha_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^l, \;\; l \in \mathbb{N}; \tag{8}$$

$$m_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^l, \;\; l \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Очевидно, що $\alpha_1 = \overline{x}$, тобто початковий момент першого порядку дорівнює вибірковому середньому. Крім того,

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \overline{x} = \overline{x} - \overline{x} = 0;$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = S^2.$$

Між центральними і початковими вибірковими моментами, як і у випадку теоретичних моментів, існує зв'язок, який описується тими самими формулами.

Оскільки вибіркові характеристики $\overline{x}$, S^2, α_l, m_l, $l \in \mathbb{N}$, є функціями від випадкових величин $x_1, \ldots, x_n$, то вони самі є випадковими величинами. Доводиться, що емпірична функція розподілу і вибіркові характеристики є наближеннями у певному розумінні відповідно для теоретичної функції розподілу і відповідних теоретичних числових характеристик, коли n досить велике. Тому вибіркові характеристики ще називають **точковими оцінками** теоретичних (генеральних) числових характеристик.

Теорема 1. *При довільних $x \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$ має місце співвідношення*

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|F_n(x) - F_\xi(x)| < \varepsilon\} = 1\,.$$

$\triangleleft$ Зафіксуємо довільне $x \in \mathbb{R}$ і розглянемо послідовність n незалежних експериментів, які дають значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ випадкової величини ξ. Якщо вважати успіхом виконання нерівності $\xi < x$, то згідно з означенням функції розподілу ймовірність успіху при кожному випробуванні дорівнює F_ξ, а згідно з формулою (4) F_n – це частота успіхів при n випробуваннях. Тому згідно із законом великих чисел у формі Бернуллі

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|F_n(x) - F_\xi(x)| < \varepsilon\} = 1\,. \ \triangleright$$

Теорема 2. *Якщо випадкова величина ξ має скінченні математичне сподівання a і дисперсію σ^2, то*

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\overline{x} - a| < \varepsilon\} = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} P\{|S^2 - \sigma^2| < \varepsilon\} = 1\,.$$

$\triangleleft$ Доведемо, наприклад, перше з цих співвідношень. Оскільки кожна з випадкових величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має функцію розподілу F_ξ, то їхні математичні сподівання і дисперсії дорівнюють відповідно a і σ^2. Тому згідно із законом великих чисел у формі Чебишова

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

тобто

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\overline{x} - a| < \varepsilon\} = 1\,. \ \triangleright$$

Якщо обсяг вибірки невеликий, то для обчислення вибіркових характеристик можна використовувати формули (4) – (9). При великих n обчислення за цими формулами стають дуже громіздкими. Для спрощення обчислень зручно записати варіанти у вигляді статистичного ряду

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

.

Тоді

$$F_n(x) = \sum_{i: x_i < x} \frac{n_i}{n}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Формули (5) і (7) – (9) набувають при цьому вигляду

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\,; \tag{11}$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\overline{x})^2\,; \tag{12}$$

$$\alpha_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^l, \;\; l \in \mathbb{N}; \tag{13}$$

$$m_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^l, \;\; l \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Якщо число варіант досить велике, то для спрощення обчислень застосовують групування емпіричних даних. Нехай $[a; b]$ – відрізок, у якому лежать усі вибіркові значення $x_1, \ldots, x_n$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на деяке число k однакової довжини $h = \dfrac{b-a}{k}$ частинних проміжків. Позначимо через z_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, – середини цих проміжків. Вважатимемо, що всі вибіркові значення, які попали в i-й проміжок, дорівнюють z_i, а n_i – число цих значень. Тоді, згідно з формулами (11) – (14), маємо:

$$\overline{x} = \overline{z} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i\,; \tag{15}$$

$$S^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i^2 - (\overline{z})^2\,; \tag{16}$$

$$\alpha_l \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i^l, \;\; l \in \mathbb{N}; \tag{17}$$

$$m_l \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (z_i - \overline{z})^l, \;\; l \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Для подальшого спрощення обчислень вибіркових характеристик використовують **метод умовних варіант (метод добутків)**. Нехай i_0 – номер одного з проміжків, який лежить приблизно посередині відрізка $[a,\, b]$; особливо зручно брати проміжок, що містить найбільшу кількість вибіркових значень, але це не обов'язково. Введемо умовні варіанти $u_i = i - i_0$. Якщо $h = \dfrac{b-a}{k}$ – довжина частинних проміжків (крок), то $z_i = z_1 + (i-1)h$, $i \in \{1, \dots, k\}$, а тому $z_i - z_{i_0} = (i - i_0)h = u_i h$, звідки одержуємо, що

$$z_i = z_{i_0} + u_i h, \;\; i \in \{1, \dots, k\}.$$

Тоді

$$\overline{z} = z_{i_0} + \overline{u}h, \quad \text{де} \quad \overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i, \tag{19}$$

$$S^2 = h^2 \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 - (\overline{u})^2 \right) = h^2 S_u^2. \tag{20}$$

Описаний вище метод умовних варіант можна використовувати при обчисленні вибіркових характеристик, коли маємо сукупність рівновіддалених варіант невеликого обсягу.

Приклад 3. Задано статистичний ряд

x_i	2	5	7	8
n_i	3	4	6	5

.

Знайти середнє вибіркове, вибіркову дисперсію і побудувати емпіричну функцію розподілу.

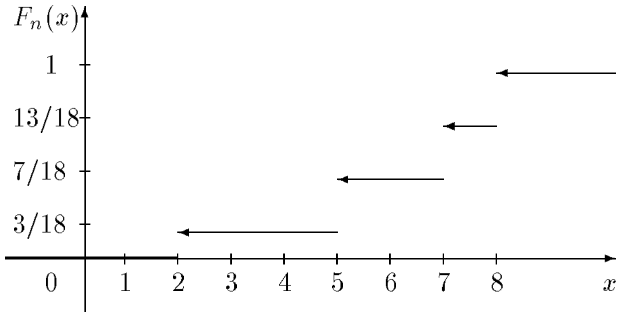
◁ Маємо $n = 3 + 4 + 6 + 5 = 18$. Тоді

$$\overline{x} = \frac{1}{18}(2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5) = \frac{108}{18} = 6;$$

$$S^2 = \frac{1}{18}(2^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 4 + 7^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 5) - 6^2 = \frac{726}{18} - 36 \approx 4,33.$$

Знайдемо емпіричну функцію розподілу та побудуємо її графік:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 1/6, & 2 < x \le 5, \\ 7/18, & 5 < x \le 7, \\ 13/18, & 7 < x \le 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$



. ▷

Приклад 4. Знайти методом умовних варіант вибіркове середнє і вибіркову дисперсію за заданим розподілом вибірки обсягу $n = 100$:

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

.

◁ Оскільки маємо рівновіддалені варіанти, то складемо розрахункову таблицю, для чого:

1) запишемо варіанти в перший стовпчик;

2) запишемо частоти в другий стовпчик;

3) за умовний нуль x_{i_0} візьмемо варіанту 16, яка має найбільшу частоту; у клітинці третього стовпчика, яка належить рядку, що містить умовний нуль, записуємо 0; над нулем послідовно записуємо -1, -2, а під нулем 1, 2, 3;

4) добутки $n_i u_i$ запишемо в четвертий стовпчик; їхню суму записуємо в нижню клітинку четвертого стовпчика;

5) добутки $n_i u_i^2$ запишемо в п'ятий стовпчик; суму чисел цього стовпчика вміщуємо в нижню клітинку п'ятого стовпчика.

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$
12	5	-2	-10	20
14	15	-1	-15	15
16	50	0	0	0
18	16	1	16	16
20	10	2	20	40
22	4	3	12	36
	100		23	127

.

Тоді, згідно з формулами (19) і (20), маємо

$$\overline{x} = 16 + \frac{1}{100} \cdot 23 \cdot 2 = 16,46;$$

$$S^2 = 2^2 \left(\frac{1}{100} \cdot 127 - \left(\frac{23}{100} \right)^2 \right) = 4(1,27 - (0,23)^2) = 4,87,$$

бо $h = 14 - 12 = 2$. $\triangleright$

Якщо початкові варіанти не є рівновіддаленими, то відрізок, в якому містяться всі варіанти вибірки, ділимо на декілька рівних, частинних проміжків довжиною h (бажано, щоб кожний частинний проміжок містив не менше 8 – 10 варіант). Потім знаходимо середини частинних проміжків, які й утворюють послідовність рівновіддалених варіант. За частоту середини кожного проміжку беремо суму частот варіант, які попали у відповідний частинний проміжок.

При обчисленні вибіркової дисперсії для зменшення помилки, викликаної групуванням (особливо при малому числі проміжків), робимо поправку Шеппарда і обчислюємо її за формулою

$$\overline{S}^2 = S^2 - \frac{1}{12} h^2.$$

Приклад 5. За допомогою методу умовних варіант знайти вибіркове середнє і вибіркову дисперсію, якщо розподіл вибірки обсягу $n = 100$ має вигляд

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	25	26
n_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

.

◁ Розіб'ємо відрізок [2; 26] на чотири частинні проміжки довжиною $h = 6$: [2; 8); [8; 14); [14; 20); [20; 26].

Узявши середини проміжків за нові варіанти z_i, матимемо рівновіддалені варіанти: $z_1 = 5$, $z_2 = 11$, $z_3 = 17$, $z_4 = 23$. За частоту n_1 варіанти $z_1 = 5$ візьмемо суму частот варіант, які попали в перший проміжок: $n_1 = 3 + 5 + 10 = 18$.

Знайшовши аналогічно частоти решти варіант, одержимо розподіл рівновіддалених варіант:

z_i	5	11	17	23
n_i	18	20	25	37

.

Складемо розрахункову таблицю

z_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$
5	18	-2	-36	72
11	20	-1	-20	20
17	25	0	0	0
23	37	1	37	37
	100		-19	129

.

Отже, $z_{i_0} = 17$; $\overline{u} = \dfrac{1}{100} \cdot (-19) = -0,19$; $\overline{x} \approx \overline{z} = 17 + (-0,19) \cdot 6 = 15,86$; $S^2 \approx 6^2 \left(\dfrac{1}{100} 129 - (-0,19)^2 \right) = 45,14$.

Якщо врахувати поправку Шеппарда, то одержимо, що $\overline{S}^2 = S^2 - \dfrac{1}{12} h^2 = 45,14 - \dfrac{6^2}{12} = 42,14$. ▷

Означення 6. Вибіркові коефіцієнт асиметрії та **ексцес** статистичного розподілу визначаються відповідно рівностями

$$\alpha = \frac{m_3}{S^3}, \qquad \kappa = \frac{m_4}{S^4} - 3, \tag{21}$$

де m_3 і m_4 – вибіркові центральні моменти 3-го і 4-го порядків; $S = \sqrt{S^2}$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення (середнє вибіркове відхилення).

Середнє вибіркове відхилення, вибіркові коефіцієнт асиметрії та ексцес є точковими оцінками відповідно теоретичних (генеральних) середнього квадратичного відхилення, коефіцієнта асиметрії та ексцесу.

Якщо скористатися методом умовних варіант, то можна довести, що m_3 і m_4 обчислюються за формулами

$$m_3 = (M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3)h^3,$$

$$m_4 = (M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4)h^4,$$

де

$$M_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^j$$

– умовний момент j-го порядку. Очевидно, що $M_1 = \overline{u}$.

Приклад 6. Знайти вибіркові коефіцієнт асиметрії й ексцес за розподілом з прикладу 4.

◁ Розширимо таблицю з прикладу 4, доповнивши її ще двома стовпчиками:

x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$
12	5	-2	-10	20	-40	80
14	15	-1	-15	15	-15	15
16	50	0	0	0	0	0
18	16	1	16	16	16	16
20	10	2	20	40	80	160
22	4	3	12	36	108	324
	100		23	127	149	595

.

Маємо $M_1 = \overline{u} = 0,23$; $M_2 = 1,27$; $M_3 = 1,49$; $M_4 = 5,95$. Тому

$$m_3 = (1,49 - 3\cdot 0,23\cdot 1,27 + 2\cdot(0,23)^3)2^3 = 5,124;$$

$$m_4 = (5,95 - 4\cdot 0,23\cdot 1,49 + 6\cdot(0,23)^2\cdot 1,27 - 3\cdot(0,23)^4)2^4 = 79,582.$$

Якщо врахувати, що $S = \sqrt{4,87} \approx 2,21$, то, згідно з формулами (21), матимемо

$$\alpha = \frac{5,124}{(\sqrt{4,87})^3} \approx 0,49; \quad \kappa = \frac{79,582}{(\sqrt{4,87})^4} - 3 \approx 0,36. \ \triangleright$$

Вправи

1. За даними чотирьох вступних іспитів складена таблиця

Сума балів	12	13	14	15	16	17	18	19	20
К-сть абітур.	1	3	7	15	21	30	12	8	3

.

Знайти вибіркове середнє та вибіркову дисперсію для випадкової величини ξ – суми балів.

2. Задано статистичний ряд:

x_i	5	6	7	10
n_i	4	5	8	2

.

Побудувати емпіричну функцію розподілу.

3. Задано статистичний ряд

x_i	6	9	12	15	18	21	24	27
n_i	3	27	60	85	108	127	153	172

,

x_i	30	33	36	39
n_i	146	82	33	4

.

Знайти для нього медіану та моду.

4. Для інтервального статистичного розподілу робітників за часом (у хв.), який затрачається ними на обробку однієї деталі

I_i	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12]
n_i	133	237	373	362	270	125

знайти медіану та моду.

5. Знайти початкові моменти перших трьох порядків, якщо вибірка задана статистичним рядом

x_i	2	5	7	8
n_i	3	4	6	5

.

6. Знайти коефіцієнт асиметрії та ексцес розподілу вибірки

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

.

7. Методом умовних варіант знайти вибіркове середнє та вибіркову дисперсію статистичного розподілу

x_i	18,6	19,0	19,4	19,8	20,2	20,6
n_i	4	6	30	40	18	2

.

8. Знайти вибіркову дисперсію з урахуванням поправки Шеппарда для вибірки

x_i	6	8	11	13	15,5	17,5	20	23,5	24,5	26
n_i	1	9	6	6	4	6	8	5	4	1

.

9. Знайти вибіркові коефіцієнт асиметрії та ексцес для статистичного ряду вибірки

x_i	1	6	11	16	21
n_i	5	25	40	20	10

.

10. Обчислити вибіркові середнє, дисперсію, коефіцієнт асиметрії й ексцес інтервального статистичного розподілу

I_i	[49; 52)	[52; 55)	[55; 58)	[58; 61)
n_i	3	6	11	19

,

I_i	[61; 64)	[64; 67)	[67; 70]
n_i	30	21	10

.

Відповіді

1. $\overline{x} = 16,48$; $S^2 = 0,4896$. **2.** $F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5, \\ 4/19, & 5 < x \le 6, \\ 9/19, & 6 < x \le 7, \\ 17/19, & 7 < x \le 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$

3. $Me = 24$; $Mo = 27$. **4.** $Me = 6,04$; $Mo = 5,85$. **5.** $\alpha_1 = 6$; $\alpha_2 = \dfrac{121}{3}$; $\alpha_3 = \dfrac{857}{3}$. **6.** $\alpha = 86,59$; $\kappa = 84,13$. **7.** $\overline{x} = 19,672$; $S^2 = 0,169$. **8.** $\overline{S}^2 = 30,7$. **9.** $\alpha = 0,18$; $\kappa = -0,45$. **10.** $\overline{x} = 61,10$; $S^2 = 19,53$; $\alpha = -0,51$; $\kappa = -0,72$.

3. Оцінювання параметрів розподілу

3.1. Точкові оцінки параметрів розподілу

Нехай треба дослідити кількісну ознаку (характеристику) генеральної сукупності. Припустимо, що з певних теоретичних міркувань вдалося вияснити, який саме розподіл має ця ознака. Виникає задача оцінки параметрів, якими визначається цей розподіл. Наприклад, якщо відомо, що досліджена ознака розподілена в генеральній сукупності за нормальним законом, то необхідно оцінити математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення, оскільки ці два параметри визначають нормальний розподіл. Якщо ж можна вважати, що ознака має розподіл Пуассона, то необхідно оцінити параметр λ, яким визначається цей розподіл. Оскільки ми маємо лише дані вибірки $x_1, \ldots, x_n$, одержані як результат n спостережень, то через них і виражаємо оцінюваний параметр. Розглядаючи $x_1, \ldots, x_n$ як значення незалежних випадкових величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, можна сказати, що знаходження статистичної оцінки невідомого параметра теоретичного розподілу означає знаходження певної функції від $x_1, \ldots, x_n$, яка й дає наближене значення оцінюваного параметра.

Статистичною оцінкою невідомого параметра теоретичного розподілу називають функцію від даних спостережень, які одержуються при випробуваннях. Статистична оцінка невідомого параметра генеральної сукупності одним числом називається **точковою**. У математичній статистиці розглядають оцінки, що задовольняють ряд умов, які будуть сформульовані нижче.

Оцінку параметра γ позначимо через $\tilde{\gamma}$. З означення випливає, що

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(x_1, \ldots, x_n).$$

Оскільки $x_1, \ldots, x_n$ – значення випадкової величини, то й $\tilde{\gamma}$ є також випадковою величиною, залежною від даних вибірки.

Означення 1. *Оцінка* $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(x_1, \ldots, x_n)$ *параметра* γ *називається* **спроможною (конзистентною)** *оцінкою цього параме-*

тра, якщо

$$\forall\varepsilon > 0 : \quad \lim_{n\to+\infty} P\{|\tilde{\gamma}(x_1, \ldots, x_n) - \gamma| < \varepsilon\} = 1.$$

З теореми 2 попереднього пункту випливає, що вибіркове середнє і вибіркова дисперсія є спроможними оцінками відповідно для теоретичних математичного сподівання і дисперсії.

Означення 2. *Оцінка $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(x_1, \ldots, x_n)$ параметра γ називається* **незсуненою (незміщеною)** *оцінкою, якщо*

$$M\tilde{\gamma}(x_1, \ldots, x_n) = \gamma$$

при будь-якому $n \in \mathbb{N}$.

Умова незсуненості означає, що похибка від заміни γ на $\tilde{\gamma}$ не має систематичного характеру.

Правильне твердження.

Теорема 1. *Якщо $\tilde{\gamma}$ – незсунена оцінка параметра γ, дисперсія якої $D\tilde{\gamma}(x_1, \ldots, x_n) \to 0$ при $n \to +\infty$, то вона є також і спроможною оцінкою для цього параметра.*

$\lhd$ Оскільки оцінка $\tilde{\gamma}$ параметра γ є незсуненою, то $M\tilde{\gamma}(x_1, \ldots, x_n) = \gamma$. Згідно з теоремою Чебишова

$$\forall\varepsilon > 0 : \quad P\{|\tilde{\gamma}(x_1, \ldots, x_n) - \gamma| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\tilde{\gamma}}{\varepsilon^2}.$$

Переходячи до границі при $n \to +\infty$ і враховуючи, що ймовірність не може бути більшою за 1, одержимо

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\tilde{\gamma}(x_1, \ldots, x_n) - \gamma| < \varepsilon\} = 1.$$

Останнє означає, що оцінка $\tilde{\gamma}$ є спроможною для параметра γ. $\rhd$

Якщо умови спроможності й незсуненості задовольняють декілька оцінок $\tilde{\gamma}$ одного й того самого параметра γ, то бажано вибирати серед них таку, яка була б найстабільнішою, тобто мала найменшу дисперсію. Оскільки для одержання такої оцінки треба провести дуже багато випробувань, що важко реалізувати на практиці, то з декількох оцінок найдоцільніше вибрати ту, яка має мінімальну дисперсію.

Означення 3. *Статистична оцінка називається* **ефективною**, *якщо вона при заданому обсязі вибірки n має найменшу можливу дисперсію.*

На практиці не завжди вдається задовольнити вимоги спроможності, незсуненості та ефективності одночасно. Тому в деяких випадках використовують малозсунені та неефективні оцінки, якщо при цьому досягається значне спрощення обчислень.

З'ясуємо, яка з вибіркових характеристик найкраща в розумінні незсуненості, ефективності та спроможності.

Раніше ми встановили, що *вибіркове середнє є спроможною оцінкою математичного сподівання $M\xi = a$.*

Теорема 2. *Середнє вибіркове є незсуненою оцінкою математичного сподівання.*

$\triangleleft$ Оскільки кожна з випадкових величин x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, має функцію розподілу F_ξ, то $Mx_i = M_\xi = a$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Тому

$$M\overline{x} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i = \frac{1}{n}na = a. \ \triangleright$$

Відповідь на питання, чи є вибіркове середнє ефективною оцінкою математичного сподівання, залежить від структури закону розподілу генеральної сукупності. Наприклад, правильне твердження.

Теорема 3. *Для нормального закону розподілу вибіркове середнє є ефективною оцінкою математичного сподівання у класі лінійних оцінок.*

$\triangleleft$ Справді, нехай $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$, тоді $x_i \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Позначимо через $\tilde{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ деяку лінійну оцінку параметра a. З'ясуємо, які умови повинні задовольняти коефіцієнти c_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, щоб оцінка була незсуненою. Маємо:

$$M\tilde{a} = M\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(c_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i M x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i a = a\sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Для незсуненості оцінки повинна виконуватись умова $M\tilde{a} = a$, тобто

$a \sum_{i=1}^{n} c_i = a$ або $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$.

Знайдемо дисперсію оцінки $\tilde{a}$:

$$D\tilde{a} = D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(c_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \cdot \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Для ефективності оцінки $\tilde{a}$ треба визначити коефіцієнти c_i, $i \in \in \{1, \ldots, n\}$, так, щоб функція

$$f(c_1, \ldots, c_n) \equiv \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

досягала мінімуму за умови

$$g(c_1, \ldots, c_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i - 1 = 0.$$

Ця задача є задачею на умовний екстремум, яку можна розв'язати за допомогою множників Лагранжа. Утворимо функцію Лагранжа

$$L(c_1, \ldots, c_n) = f(c_1, \ldots, c_n) - \lambda g(c_1, \ldots, c_n)$$

і запишемо для неї необхідні умови екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial c_i} \equiv 2\sigma^2 c_i - \lambda = 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv -g(c_1, \ldots, c_n) = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 0. \end{cases}$$

З перших n рівнянь системи знаходимо $c_i = \dfrac{\lambda}{2\sigma^2}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Підставивши їх у останнє рівняння системи, одержуємо $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda}{2\sigma^2} = 1$, звідки отримуємо, що $\lambda = \dfrac{2\sigma^2}{n}$. Тому $c_i = \dfrac{1}{n}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Отже, мінімальну дисперсію має оцінка

$$\tilde{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i = \overline{x},$$

тобто вибіркове середнє. $\triangleright$

Для дисперсії $D\xi = \sigma^2$ спроможною оцінкою є вибіркова дисперсія S^2.

Теорема 4. *Вибіркова дисперсія не є незсуненою оцінкою дисперсії.*

$\triangleleft$ Введемо позначення $y_i = x_i - a$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Тоді

$$My_i = Mx_i - a = a - a = 0; \quad My_i^2 = M(x_i - a)^2 = Dx_i = \sigma^2;$$

$$Dy_i = My_i^2 - (My_i)^2 = \sigma^2.$$

Тому

$$MS^2 = \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right) = \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2\right) = \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right) -$$

$$-\frac{2}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\overline{y}\right) + \frac{1}{n}M(n\overline{y}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}My_i^2 -$$

$$-2M\overline{y}^2 + M\overline{y}^2 = \frac{1}{n}n\sigma^2 - M\overline{y}^2 = \sigma^2 - M\overline{y}^2. \tag{1}$$

Оскільки y_i і y_j, $i \neq j$, незалежні, то $M(y_iy_j) = My_iMy_j = 0$, і

$$M\overline{y}^2 = M\left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}M\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2 + 2\sum_{i\neq j}y_iy_j\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}My_i^2 = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Підставивши це значення в (1), одержимо

$$MS^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2. \tag{2}$$

Отже, $MS^2 \neq \sigma^2$, тобто S^2 не є незсуненою оцінкою для σ^2. $\triangleright$

З формули (2) можна одержати незсунену оцінку для σ^2. Справді, нехай

$$S_1^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2. \tag{3}$$

Тоді

$$MS_1^2 = \frac{n}{n-1}MS^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2.$$

Отже, величина S_1^2, що визначається формулою (3), є незсуненою оцінкою для дисперсії σ^2. Оскільки при $n \to +\infty$ обидві оцінки S^2 і S_1^2 поводять себе однаково, то S_1^2 є також спроможною оцінкою для σ^2.

Нехай відбуваються незалежні випробування з невідомою ймовірністю p появи успіху в кожному випробуванні. За точкову оцінку невідомого параметра p візьмемо відносну частоту $w = \frac{\mu}{n}$, де μ – число успіхів, а n – число випробувань. Відомо, що $M\mu = np$, а $D\mu = npq$, де $q = 1 - p$. Згідно із законом великих чисел у формі Бернуллі w є спроможною оцінкою параметра p. Ця оцінка є також незсуненою, оскільки

$$M(w) = M\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{1}{n}M\mu = \frac{np}{n} = p.$$

3.2. Методи побудови точкових оцінок параметрів розподілу

У цьому пункті розглянемо деякі методи побудови точкових оцінок параметрів розподілу.

3.2.1. Метод моментів. Нехай задано дискретний статистичний розподіл

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

.

Раніше було доведено, що емпірична функція розподілу із зростанням числа спостережень як завгодно мало відрізняється від теоретичної функції розподілу з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці. Тому при великому числі спостережень вибіркові й теоретичні моменти близькі один до одного. Якщо теоретична функція розподілу залежить від деяких параметрів, то від цих параметрів залежать також її теоретичні моменти ν_k і μ_k.

Метод моментів точкової оцінки невідомих параметрів розподілу полягає в прирівнюванні теоретичних моментів до відповідних їм емпіричних моментів того самого порядку.

Якщо теоретичний розподіл визначається одним параметром, то для його відшукання досить прирівняти один теоретичний момент до відповідного емпіричного. Наприклад, можна прирівняти теоретичний початковий момент першого порядку до відповідного емпіричного моменту: $\nu_1 = \alpha_1$. Оскільки $\nu_1 = M\xi$, а $\alpha_1 = \overline{x}$, то

$$M\xi = \overline{x}. \tag{4}$$

Математичне сподівання є функцією від невідомого параметра розподілу, тому, розв'язавши рівняння (4) відносно цього параметра, дістанемо його точкову оцінку.

Якщо теоретичний розподіл визначається двома параметрами, то прирівнюють два теоретичних моменти до двох відповідних емпіричних моментів того самого порядку. Наприклад, можна прирівняти теоретичний початковий момент першого порядку до емпіричного початкового моменту першого порядку і теоретичний центральний момент другого порядку до емпіричного центрального моменту другого порядку: $\nu_1 = \alpha_1$, $\mu_2 = m_2$. Оскільки $\mu_2 = D\xi$, $m_2 = S^2$, то одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} M\xi = \overline{x}, \\ D\xi = S^2. \end{cases} \tag{5}$$

Ліві частини рівнянь (5) є функціями від невідомих параметрів. Тому розв'язавши цю систему відносно цих параметрів, дістанемо їхні точкові оцінки методом моментів. У випадку, коли параметрів більше двох, треба використати стільки моментів, скільки є параметрів розподілу, й утворити систему рівнянь типу (5).

Зауваження. Метод моментів має характер деякої невизначеності, оскільки замість системи (5) можна було одержати іншу систему, використовуючи, наприклад, лише початкові моменти

$$\begin{cases} \nu_1 = \alpha_1, \\ \nu_2 = \alpha_2. \end{cases}$$

Приклад 1. Генеральна сукупність розподілена за нормальним законом $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$. Оцінити параметри розподілу методом моментів.

$\triangleleft$ Оскільки невідомими є два параметри a і σ, то скористаємось системою (5). Відомо, що $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$, а тому

$$\begin{cases} a = \overline{x}, \\ \sigma^2 = S^2. \end{cases}$$

Отже, точковою оцінкою параметра a є вибіркове середнє $\overline{x}$, а параметра σ – вибіркове середнє квадратичне відхилення. $\triangleright$

Приклад 2. Генеральна сукупність розподілена за законом Релея, щільність розподілу якого визначається формулою

$$\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ p_\xi(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x > 0. \end{cases}$$

Методом моментів знайти точкову оцінку параметра θ.

$\triangleleft$ Скористаємось рівнянням (4). Знайдемо математичне сподівання теоретичного розподілу

$$M\xi = \int\limits_0^{+\infty} x \cdot \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = \sqrt{2\theta} t, \ dx = \sqrt{2\theta} dt, \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & +\infty \\ \hline t & 0 & +\infty \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_0^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2} \sqrt{2\theta} dt =$$

$$= -\sqrt{2\theta} \int\limits_0^{+\infty} t de^{-t^2} = -\sqrt{2\theta} \left(te^{-t^2} \Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) =$$

$$= \left| \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right| = \sqrt{2\theta} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}.$$

Отже, рівняння (4) набуває вигляду

$$\sqrt{\frac{\pi\theta}{2}} = \overline{x}, \qquad \text{а тому} \qquad \theta = \frac{2}{\pi}\overline{x}^2.$$

Якщо розглянути рівняння $\nu_2 = \alpha_2$, де

$$\nu_2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx = -\int_0^{+\infty} x^2 de^{-\frac{x^2}{2\theta}} = -\left(x^2 de^{-\frac{x^2}{2\theta}} \Big|_0^{+\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{+\infty} 2xe^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx \right) = -2\theta \int_0^{+\infty} de^{-\frac{x^2}{2\theta}} = -2\theta e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \Big|_0^{+\infty} = 2\theta,$$

то одержимо, що $\theta = \dfrac{\alpha_2}{2}$.

Крім цих оцінок можна знайти ще одну оцінку, якщо скористатись рівнянням

$$\mu_2 = m_2,$$

де $m_2 = S^2$, а $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 2\theta - \dfrac{\pi\theta}{2}$, тобто рівнянням

$$2\theta - \frac{\pi\theta}{2} = S^2, \quad \text{звідки} \quad \theta = \frac{2S^2}{4-\pi}. \ \triangleright$$

Цей приклад підтверджує невизначеність методу моментів.

Приклад 3. Генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона з параметром λ. Знайти точкову оцінку цього параметра за допомогою методу моментів.

$\triangleleft$ Оскільки маємо один параметр, то скористаємось рівнянням (4). Відомо, що $M\xi = \lambda$, а тому рівняння (4) набуває вигляду $\lambda = \overline{x}$.

Отже, точковою оцінкою параметра λ розподілу Пуассона є середнє вибіркове.

Зокрема, якщо вибірка задана статистичним розподілом

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

,

то

$$\lambda = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{1}{200}(0 \cdot 132 + 1 \cdot 43 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2) = 0,2. \ \triangleright$$

Приклад 4. Генеральна сукупність ξ розподілена рівномірно на відрізку $[a; b]$, $a < b$. Знайти за допомогою методу моментів точкові оцінки параметрів.

$\lhd$ Маємо два параметри a і b. Оцінимо їх, скориставшись системою рівнянь (5). Оскільки $M\xi = \dfrac{a+b}{2}$, $D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, то система (5) має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \overline{x}, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = S^2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a+b = 2\overline{x}, \\ b-a = 2\sqrt{3}S. \end{cases}$$

Отже, $a = \overline{x} - \sqrt{3}S$, $b = \overline{x} + \sqrt{3}S$. $\rhd$

3.2.2. Метод максимальної правдоподібності. Одним з найважливіших методів знаходження точкових оцінок параметрів розподілу за даними вибірки є метод максимальної правдоподібності, запропонований у 1912 р. англійським статистиком Р. Фішером. Він полягає у відшуканні максимуму деякої спеціальної функції оцінюваних параметрів.

Нехай для оцінки параметра γ випадкової величини ξ з генеральної сукупності зі щільністю розподілу ймовірностей $p_\xi(x, \gamma)$, $x \in \mathbb{R}$, зроблено вибірку $x_1, \ldots, x_n$. Результати вибірки розглядатимемо як реалізацію n-вимірної випадкової величини $(\xi_1; \ldots; \xi_n)$. **Функцією правдоподібності** цієї випадкової величини називається функція аргументів $x_1, \ldots, x_n$ і γ вигляду

$$L(x_1, \ldots, x_n; \gamma) = p_\xi(x_1, \gamma) \ldots p_\xi(x_n, \gamma), \tag{6}$$

де $x_1, \ldots, x_n$ – вибірка з генеральної сукупності ξ.

Якщо генеральна сукупність ξ має дискретний розподіл з можливими значеннями $x_1, \ldots, x_n$, відома структура закону розподілу цієї випадкової величини, але невідомий параметр γ, яким цей закон описується, то

$$L(x_1, \ldots, x_n; \gamma) = P(x_1, \gamma) \ldots P(x_n, \gamma), \tag{7}$$

де $P(x_i, \gamma)$ – ймовірність того, що випадкова величина ξ набула значення x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Оцінкою максимальної правдоподібності параметра γ називають таке його значення $\tilde{\gamma}$, при якому функція правдоподібності досягає максимуму.

Оскільки функції L і $\ln L$ досягають максимумуму при одному й тому самому значенні γ, то замість функції L досліджують на максимум функцію $\ln L$.

Логарифмічною функцією правдоподібності називають функцію

$$l(\gamma) = \ln L(x_1, \dots, x_n; \gamma).$$

Точку максимуму функції l шукаємо так:

1) знаходимо критичні точки з рівняння

$$\frac{dl(\gamma)}{d\gamma} = 0, \tag{8}$$

яке називають **рівнянням правдоподібності**;

2) знаходимо другу похідну $\dfrac{d^2 l(\gamma)}{d\gamma^2}$ і обчислюємо її значення в точках $\gamma = \tilde{\gamma}$ – розв'язках рівняння (8).

Якщо $\dfrac{d^2 l(\tilde{\gamma})}{d\gamma^2} < 0$, то $\tilde{\gamma}$ є точкою максимуму. Тому її приймаємо за оцінку максимальної правдоподібності параметра γ.

У випадку, коли треба оцінити не один параметр γ, а декілька $(\gamma_1; \dots; \gamma_k)$, оцінки максимальної правдоподібності для цих параметрів знаходять з системи

$$\frac{\partial l(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}{\partial \gamma_i} = 0, \;\; i \in \{1, \dots, k\}. \tag{9}$$

Приклад 5. Для нормально розподіленої випадкової величин $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$ оцінити за допомогою методу максимальної правдоподібності параметри a і σ, якщо відомі результати вибірки $x_1, \dots, x_n$.

$\lhd$ Для випадкової величини ξ функція

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \;\; x \in \mathbb{R},$$

є щільністю розподілу з параметрами a і σ. Згідно з формулою (6)

$$L(x_1, \ldots, x_n; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma^2}} \ldots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_n-a)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}.$$

Тоді

$$l(a, \sigma) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2.$$

Диференціюючи цю функцію по a і σ, матимемо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial a} = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=i}^{n}(x_i - a), \\ \dfrac{\partial l}{\partial \sigma} = -\dfrac{n}{\sigma} + \dfrac{1}{\sigma^3}\displaystyle\sum_{i=i}^{n}(x_i - a)^2. \end{cases}$$

Тоді система (9) після спрощень набуде вигляду

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - na = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=i}^{n}(x_i - a)^2 - n\sigma^2 = 0. \end{cases}$$

З цих рівнянь правдоподібності знаходимо, що

$$\tilde{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{або} \quad \tilde{a} = \overline{x},$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \quad \text{або} \quad \tilde{\sigma}^2 = S^2.$$

Можна перервірити, що в точці $(\tilde{a}; \tilde{\sigma})$ функція l досягає максимуму. Отже, оцінкою максимальної правдоподібності для параметра a є вибіркове середнє $\overline{x}$, а для параметра σ – вибіркове середнє квадратичне відхилення S. $\triangleright$

Приклад 6. Випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона. За результатами вибірки $x_1, \ldots x_n$ оцінити невідомий параметр λ.

$\triangleleft$ Оскільки дискретна випадкова величина ξ має розподіл Пуассона

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \ k \in \{0, 1, \ldots\},$$

то функція правдоподібності така

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \ldots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}}{x_1! x_2! \ldots x_n!} e^{-n\lambda}.$$

Перейдемо до логарифмічної функції правдоподібності

$$l(\lambda) = -n\lambda + \ln \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln (x_i!).$$

Диференціюючи цю рівність по λ, одержимо

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Отже, рівняння правдоподібності має вигляд

$$-n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \text{тобто} \quad \tilde{\lambda} = \overline{x}. \ \triangleright$$

Приклад 7. Нехай випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ. За результатами вибірки $x_1, \ldots x_n$ методом максимальної правдоподібності оцінити невідомий параметр λ.

$\triangleleft$ Щільністю розподілу ймовірностей заданої випадкової величини є функція

$$p(x, \lambda) = p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Тому функція правдоподібності має вигляд

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1} \ldots \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Тоді логарифмічною функцією правдоподібності буде функція

$$l(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Запишемо рівняння правдоподібності

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

звідки отримуємо, що $\lambda = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \dfrac{1}{\overline{x}}$.

Очевидно, що

$$\frac{d^2 l(\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0,$$

а це означає, що вказане λ є точкою максимуму функції l.

Раніше було доведено, що $M\xi = \dfrac{1}{\lambda}$. Оскільки

$$M\left(\frac{1}{\lambda}\right) = M\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i = \frac{1}{n}\frac{1}{\lambda}n = \frac{1}{\lambda},$$

то одержана оцінка є незсуненою. $\triangleright$

Зауваження 1) При виконанні умов регулярності [4] оцінки максимальної правдоподібності є незсуненими й ефективними.

2) Крім описаних вище методів отримання оцінок параметрів розподілу існують інші методи, наприклад, метод найменших квадратів, метод найменших абсолютних відхилень і метод найменшого максимального абсолютного відхилення.

3.3. Інтервальні оцінки параметрів розподілу

Розглянуті у попередніх пунктах точкові оцінки параметрів розподілу можна прийняти як початкові результати обробки спостережень. Недолік їх у тому, що невідомо, з якою точністю вони відтворюють оцінюваний параметр. У випадку великого числа спостережень згідно з незсуненістю, спроможністю й ефективністю одержана точність є достатньою для практичних висновків. Якщо ж обсяг вибірки невеликий, то питання точності є істотним.

У зв'язку з цим у математичній статистиці знаходять не точкову оцінку, а інтервальну, тобто будують інтервал, який із наперед заданою ймовірністю накриває невідоме значення параметра. З поняттям надійних меж і надійного інтервалу ми зустрічалися раніше при оцінці невідомої ймовірності через частоту.

Нехай γ – невідомий параметр розподілу. За відомою вибіркою знаходимо за певними правилами функції $\gamma_1(x_1, \ldots, x_n)$ і $\gamma_2(x_1, \ldots, x_n)$ так, щоб виконувалась нерівність $P\{\gamma \in (\gamma_1; \gamma_2)\} \geq$ $\geq \beta$. При цьому γ_1 і γ_2 називають **надійними межами**, інтервал $(\gamma_1; \gamma_2)$ – **надійним інтервалом** для параметра γ, а число $\beta \in (0; 1)$ – **надійністю** (**надійним рівнем**) зробленої оцінки.

Оскільки γ_1 і γ_2 знаходяться за вибіркою, то вони є функціями випадкових величин $x_1, \ldots, x_n$, а отже, і самі є випадковими величинами. Звідси випливає, що інтервал $(\gamma_1; \gamma_2)$ також є випадковим. Він може накривати параметр γ (певне число) або ні. Саме так і треба розуміти подію $\{\gamma \in (\gamma_1; \gamma_2)\}$, зміст якої в тому, що надійний інтервал накриває число γ.

Обчислення починаємо з того, що задаємо рівень надійності β, як правило, це або 0,95, або 0,99, або 0,999. Тому ймовірність того, що параметр γ не попав у надійний інтервал $(\gamma_1; \gamma_2)$, не перевищує відповідно 0,05; 0,01 або 0,001. Якщо вважати, що всі події, ймовірності яких менші 0,05 (0,01 або 0,001), практично неможливі, то практично вірогідним є накривання параметра γ надійним інтервалом $(\gamma_1; \gamma_2)$. Тому середина надійного інтервалу $\dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ визначатиме значення параметра γ з точністю $\dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$ і є практично вірогідною оцінкою.

Згідно з центральною граничною теоремою найчастіше зустрічаються нормально розподілені випадкові величини, тому будемо знаходити надійні інтервали для параметрів нормального розподілу: математичного сподівання $M\xi = a$ і середнього квадратичного відхилення $\sigma_\xi = \sigma$.

Зауваження. Часто замість співвідношення $P\{\gamma \in (\gamma_1; \gamma_2)\} \geq \beta$ розглядають такі: $P\{\gamma \in (\gamma_1; \gamma_2)\} = \beta$ або $P\{\gamma \in [\gamma_1; \gamma_2]\} = \beta$.

3.3.1. Надійні межі для математичного сподівання. Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – вибірка з генеральної сукупності, розподіленої за довільним законом з математичним сподіванням $M\xi = a$ і дисперсією $D\xi = \sigma^2$. Тоді, як відомо, $x_1, \ldots, x_n$ є попарно незалежними, однаково розподіленими випадковими величинами, що мають математичне сподівання a і дисперсію σ^2. Тому згідно з центральною граничною теоремою у формі Ліндеберга-Леві

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

або

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{|\overline{x} - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x\right\} = 2\Phi(x), \;\; x \in \mathbb{R},$$

де Φ – функція Лапласа.

Отже, при великих значеннях n правильна наближена рівність

$$P\left\{|\overline{x} - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x\right\} =$$

$$= P\left\{\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x < a < \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x\right\} \approx 2\Phi(x), \ \ x \in \mathbb{R}, \qquad (10)$$

тобто при надійному рівні $\beta = 2\Phi(x)$ надійним інтервалом для математичного сподівання a є проміжок

$$\left(\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\beta; \ \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\beta\right), \qquad (11)$$

де x_β – корінь рівняння $\Phi(x) = \dfrac{\beta}{2}$.

Якщо генеральна (теоретична) дисперсія σ^2 відома, то задача знаходження надійного інтервалу розв'язана.

У випадку, коли дисперсія σ^2 невідома, то її замінюють незсуненою оцінкою S_1^2. Тоді надійний інтервал матиме вигляд

$$\left(\overline{x} - \frac{S_1}{\sqrt{n}}x_\beta; \ \overline{x} + \frac{S_1}{\sqrt{n}}x_\beta\right). \qquad (12)$$

Цей інтервал при невеликому обсязі вибірки ($n < 30$) не заслуговує значної довіри, бо рівність (10) є наближеною, і крім того, ми замінили σ на S_1.

Приклад 8. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання a, якщо надійний рівень $\beta = 0,95$, генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma = 3$, вибіркове середнє $\overline{x} = 4,1$, обсяг $n = 36$.

$\triangleleft$ Із співвідношення $2\Phi(x) = 0,95$ одержуємо, що $\Phi(x) = 0,475$. З таблиці 2 знаходимо, що $x_\beta = 1,96$. Тоді $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\beta = \dfrac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0,98$, а тому надійний інтервал має вигляд

$$(4,1 - 0,98; 4,1 + 0,98) \quad \text{або} \quad (3,12; 5,08).$$

Зауважимо, що було б неправильним написати $P\{3,12 < a < 5,08\} = 0,95$. Справді, оскільки a – стала величина, вона або лежить у зазначеному інтервалі і тоді ймовірність дорівнює одиниці, або не лежить і тоді ймовірність дорівнює нулю. Іншими словами, надійний рівень β не слід пов'язувати з оцінюваним параметром a. Він пов'язаний лише з межами надійного інтервалу, які, взагалі кажучи, змінюються від вибірки до вибірки. Надійний рівень 0,95 вказує на те, що коли проведено досить велику кількість вибірок, то приблизно у 95% випадків одержані інтервали будуть накривати параметр a, і лише у 5% випадків значення a може лежати за межами такого інтервалу. $\triangleright$

Розглянемо задачу побудови інтервальної оцінки для математичного сподівання a за умови, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$.

Якщо дисперсія σ^2 відома, то надійний інтервал для математичного сподівання нормального закону має вигляд (11), оскільки цей факт є правильним для довільного закону розподілу генеральної сукупності. Оцінку

$$|\overline{x} - a| < x_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

називають **класичною,** а число

$$\delta = x_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{13}$$

точністю оцінки.

Очевидно, що при збільшенні обсягу вибірки число δ зменшується, тоді точність оцінки збільшується. Збільшення надійного рівня $\beta = 2\Phi(x_\beta)$ викликає збільшення x_β, бо Φ є зростаючою функцією, а отже, і збільшення δ. Це означає при збільшенні рівня надійності класичної оцінки зменшується її точність.

У випадку, коли задано точність δ і надійність β, мінімальний обсяг повторної вибірки, який забезпечує цю точність, знаходимо з (13)

$$n = x_\beta^2 \frac{\sigma^2}{\delta^2}. \tag{14}$$

Приклад 9. Знайти мінімальний обсяг вибірки, при якому з надійністю 0,975 точність оцінки δ математичного сподівання a генеральної сукупності ξ за вибірковим середнім дорівнюватиме 0,2, якщо відоме середнє квадратичне відхилення $\sigma = 1,2$ нормально розподіленої генеральної сукупності.

◁ Скористаємось формулою (14). Згідно з умовою $\beta = 0,975$, тому $2\Phi(x_\beta) = 0,975$. Отже, $\Phi(x_\beta) = 0,4875$. За таблицею 2 значень функції Лапласа знаходимо $x_\beta = 2,24$. Тоді $n = (2,24)^2 \cdot (1,2)^2 : (0,2)^2 = 181$. ▷

Нехай генеральна сукупність ξ розподілена за нормальним законом $\xi \sim \mathcal{N}(a,\, \sigma)$, але σ^2 невідоме. Для побудови надійного інтервалу в цьому випадку розглянемо випадкову величину

$$t = \sqrt{n}\frac{\overline{x} - a}{S_1}. \tag{15}$$

Відомо [1], що задана випадкова величина розподілена за законом Стьюдента, щільність розподілу якого має вигляд

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \;\; x \in \mathbb{R},$$

де Γ – гамма-функція Ейлера.

Для розподілу Стьюдента складено таблицю 5. Ця таблиця побудована так, що для деяких значень надійного рівня β й обсягу вибірки n наведено такі значення $t_\beta = t(\beta, n)$, що

$$P\{|t| < t_\beta\} = \beta. \tag{16}$$

При надійному рівні β з (16) одержуємо

$$P\left\{\frac{|\overline{x} - a|}{S_1}\sqrt{n} < t_\beta\right\} = \beta \;\text{ або }\; P\left\{|\overline{x} - a| < \frac{S_1}{\sqrt{n}}t_\beta\right\} = \beta.$$

Звідси дістаємо такий надійний інтервал для математичного сподівання a при надійному рівні β

$$\left(\overline{x} - \frac{S_1}{\sqrt{n}}t_\beta;\; \overline{x} + \frac{S_1}{\sqrt{n}}t_\beta\right). \tag{17}$$

Можна довести, що при $n \geq 30$ розподіл Стьюдента практично не відрізняється від нормального з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$, тому в цьому випадку можна користуватись надійним інтервалом (12).

Приклад 10. Генеральна сукупність ξ розподілена нормально. За вибіркою обсягом $n = 16$ знайдено вибіркове середнє $\overline{x} = 20,2$ і незсунену вибіркову дисперсію $S_1^2 = (0,8)^2$. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання з надійністю $\beta = 0,95$.

$\triangleleft$ Знайдемо надійні інтервали за формулами (17) і (12). Скориставшись таблицею 5 розподілу Стьюдента для $\beta = 0,95$ і $n = 16$, знаходимо $t_\beta = 2,13$. Тоді надійні межі такі:

$$\overline{x} - \frac{S_1}{\sqrt{n}} t_\beta = 20,2 - 2,13 \cdot \frac{0,8}{16} = 19,774,$$

$$\overline{x} + \frac{S_1}{\sqrt{n}} t_\beta = 20,2 + 2,13 \cdot \frac{0,8}{16} = 20,626.$$

Отже, надійним інтервалом є інтервал $(19,774; 20,626)$.

Із співвідношення $2\Phi(x) = 0,95$ одержуємо, що $x_\beta = 1,96$. Тому надійні межі у цьому випадку мають вигляд:

$$\overline{x} - \frac{S_1}{\sqrt{n}} x_\beta = 20,2 - 1,96 \cdot \frac{0,8}{16} = 20,102,$$

$$\overline{x} + \frac{S_1}{\sqrt{n}} x_\beta = 20,2 + 1,96 \cdot \frac{0,8}{16} = 20,298.$$

Отже, надійним інтервалом у цьому випадку є інтервал $(20,102; 20,298)$.

Очевидно, що знайдені надійні інтервали різні і перший з них є кращим (точнішим). $\triangleright$

Приклад 11. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання генеральної сукупності ξ використовуючи: 1) нормальний розподіл; 2) розподіл Стьюдента, якщо $n = 100$, $S_1 = 1$, $\beta = 0,95$, $\overline{x} = 10$.

$\triangleleft$ 1) Надійний інтервал у цьому випадку має вигляд

$$(10 - 1,96 \frac{1}{\sqrt{100}}; \, 10 + 1,96 \frac{1}{\sqrt{100}} = (9,804; 10,196),$$

оскільки з рівності $2\Phi(x) = 0,95$ за таблицею 2 для функції Φ знаходимо, що $x_\beta = 1,96$.

2) З таблиці 5 розподілу Стьюдента одержуємо, що $t_\beta = t(0,95; 100) = 1,98$, тому надійний інтервал має вигляд

$$(10 - 1,98 \frac{1}{\sqrt{100}}; \, 10 + 1,98 \frac{1}{\sqrt{100}} = (9,802; 10,198).$$

Як бачимо, в цьому випадку надійні інтервали за нормальним розподілом і розподілом Стьюдента практично збігаються. $\triangleright$

3.3.2. Надійні межі для середнього квадратичного відхилення при нормальному законі розподілу генеральної сукупності. Нехай генеральна сукупність ξ розподілена нормально, тобто $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$. При надійному рівні γ за результатами вибірки $x_1, \ldots, x_n$ треба оцінити теоретичне середнє квадратичне відхилення σ через вибіркове середнє квадратичне відхилення S_1.

Доводиться [13], що при $q < 1$ надійний інтервал для оцінки параметра σ має вигляд

$$(S_1(1-q);\ S_1(1+q)), \tag{18}$$

де $q = q(\gamma, n)$ визначається з таблиці 7 за надійним рівнем γ й обсягом вибірки n. Якщо ж $q \geq 1$, то надійний інтервал для оцінки параметра σ такий

$$(0;\ S_1(1+q)). \tag{19}$$

Приклад 12. Для знаходження середньої маси бичків на тваринницькій фермі було відібрано 170 бичків. Треба знайти можливу межу похибки середньої маси бичка з ймовірністю $0,9973$, якщо вибіркова дисперсія $S^2 = 40$. Крім того, необхідно знайти надійний інтервал для σ з імовірністю $\gamma = 0,99$.

$\triangleleft$ З рівності $2\Phi(x) = 0,9973$ за таблицею 2 для функції Лапласа знаходимо, що $x_\beta = 3$. Тоді

$$x_\beta \frac{S_1}{\sqrt{n}} = x_\beta \frac{S}{\sqrt{n-1}} = 3\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{169}} = 0,4865 \cdot 3 = 1,4595,$$

а тому надійний інтервал для a

$$(\overline{x} - 1,4595;\ \overline{x} + 1,4595).$$

Для визначення надійного інтервалу, що покриває σ, для $n = 170$ і $\gamma = 0,99$ з таблиці 7 для $q = q(\gamma, n)$ знаходимо $q = 0,15$. Оскільки

$$S_1 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} S = \frac{\sqrt{170}}{\sqrt{169}}\sqrt{40} = 6,34,$$

то надійний інтервал для σ має вигляд

$$(6,34(1-0,15);\ 6,34(1+0,15)) \quad \text{або} \quad (5,39;\ 7,29).\ \triangleright$$

Приклад 13. Генеральна сукупність розподілена за нормальним законом. За вибіркою обсягом $n = 10$ обчислено вибіркове середнє квадратичне відхилення $S_1 = 0,2$. Знайти надійний інтервал, який накриває параметр σ з надійністю $\gamma = 0,99$.

$\triangleleft$ З таблиці 7 знаходимо, що $q = q(0,99, 10) = 1,08$, а тому надійний інтервал для параметра σ має вигляд

$$(0;\ 0,2\cdot(1+1,08)) = (0;\ 0,416).\ \triangleright$$

3.3.3. Надійний інтервал для ймовірності події. Як правило ми не знаємо ймовірність події A, яка нас цікавить. Для її знаходження проводять експерименти. У випадку схеми Бернуллі повторення незалежних дослідів за точкову оцінку ймовірності p беруть частоту $w = \dfrac{\mu}{n}$, де n – число дослідів, μ – число успіхів, тобто число появ події A в цих дослідах. Розглянемо цей факт, зв'язавши його зі статистичним матеріалом. Нехай є n випадкових величин ξ_k, $k \in \{1,\ldots,n\}$, де $\xi_k = 1$, коли в досліді з номером k настала подія A, і $\xi_k = 0$, якщо в цьому досліді не настала подія A. Оскільки досліди проводяться незалежно, то випадкові величини ξ_k, $k \in \{1,\ldots,n\}$, незалежні, однаково розподілені, а їхні закони розподілу такі:

ξ_k	0	1
p	q	p

$$k \in \{1,\ldots,n\}, \quad q = 1-p.$$

Очевидно, що частота події в n дослідах записується через випадкові величини ξ_k, $k \in \{1,\ldots,n\}$, а саме $w = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$.

У пункті 3.1 встановлено, що w є незсуненою оцінкою p і $Mw = p$, $Dw = \dfrac{pq}{n}$.

Оскільки $Mw = p$, то можна скористатися міркуваннями з підпункту 3.3.1, але в цьому випадку задача спрощується через те, що випадкова величина є дискретною, і її математичне сподівання і дисперсія зв'язані між собою, бо $pq = p(1-q)$.

Якщо n велике, то випадкова величина w розподілена майже за нормальним законом з математичним сподіванням $a = p$ і дисперсією $\sigma^2 = \dfrac{pq}{n}$. Цим припущенням можна користуватися, коли pn і qn більші чотирьох.

Як і в підпункті 3.3.1, за заданим рівнем надійності β знаходимо число x_β з рівняння $2\Phi(x_\beta) = \beta$ таке, що

$$P\{|w-p| < \sigma x_\beta\} \approx \beta,$$

тобто з надійністю β справджується нерівність

$$|w-p| < \sigma x_\beta \quad \text{або} \quad |w-p| < \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} x_\beta,$$

що еквівалентно нерівності

$$(w-p)^2 < \frac{p(1-p)}{n} x_\beta^2.$$

З останньої нерівності, користуючись знайденим з досліду числовим значенням w, знаходимо надійний інтервал для ймовірності p. При цьому обчислення зводяться до розв'язування нерівності

$$\left(1 + \frac{x_\beta^2}{n}\right) p^2 - \left(2w + \frac{x_\beta^2}{n}\right) p + w^2 < 0.$$

Оскільки коефіцієнт при p^2 додатний, то розв'язком цієї нерівності є інтервал $(p_1; p_2)$, де

$$p_1 = \frac{n}{x_\beta^2 + n}\left(w + \frac{x_\beta^2}{2n} - x_\beta\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{x_\beta}{2n}\right)^2}\right), \qquad (20)$$

$$p_2 = \frac{n}{x_\beta^2 + n}\left(w + \frac{x_\beta^2}{2n} + x_\beta\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{x_\beta}{2n}\right)^2}\right), \qquad (21)$$

Отже, інтервал $(p_1; p_2)$ є надійним інтервалом для ймовірності p з надійністю β.

Приклад 14. Подія A в серії зі 100 дослідів настала 78 разів. Знайти надійний інтервал для ймовірності p події A з надійністю $\beta = 0,9$.

$\lhd$ Частота появи події A $w = \dfrac{78}{100} = 0,78$. Оскільки $np \approx pw = 78$, $nq = n(1-q) \approx p(1-w) = 22$, то np і nq набагато більші чотирьох. Тому скористаємось одержаним вище надійним інтервалом. З таблиці 2 для функції Φ знаходимо для $\beta = 0,9$ число $x_\beta = 1,643$. Тоді

$$p_1 = \frac{100}{1,643^2 + 100}\left(0,78 + \frac{1,643^2}{200} - 1,643\sqrt{\frac{0,78\cdot 0,22}{100} + \left(\frac{1,643}{200}\right)^2}\right) \approx$$

$$\approx 0,705,$$

$$p_2 = \frac{100}{1,643^2 + 100}\left(0,78 + \frac{1,643^2}{200} + 1,643\sqrt{\frac{0,78\cdot 0,22}{100} + \left(\frac{1,643}{200}\right)^2}\right) \approx$$

$$\approx 0,840.$$

Отже, надійним інтервалом для ймовірності p події A з надійністю $\beta = 0,9$ є інтервал (0,705; 0,840). $\rhd$

З формул для p_1 і p_2 при великому n одержуємо наближені формули

$$p_1 \approx w - x_\beta\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}, \qquad p_2 \approx w + x_\beta\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}. \tag{22}$$

Приклад 15. Подія A в серії з 200 незалежних дослідів настала 70 разів. Знайти надійний інтервал для ймовірності p події A з надійністю $\beta = 0,85$.

$\lhd$ Маємо $w = \dfrac{70}{200} = 0,35$. З таблиці 2 при $\beta = 0,85$ знаходимо, що $x_\beta = 1,439$. Оскільки

$$x_\beta\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} = 1,439\sqrt{\frac{0,35\cdot 0,65}{200}} \approx 0,048,$$

то наближений надійний інтервал $(0,35 - 0,048; 0,35 + 0,048)$ або (0,302; 0,398).

Якщо скористатись точними формулами (20), (21) для обчислення p_1 і p_2, то одержимо надійний інтервал (0,304; 0,396), який майже не відрізняється від попереднього. $\triangleright$

Якщо треба знайти мінімальний обсяг вибірки при якому $|p - w| < \varepsilon$, то можна скористатися тим, що з ймовірністю β для великих n має місце нерівність

$$|p - w| < x_\beta \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}},$$

а тому

$$x_\beta \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} < \varepsilon, \tag{23}$$

звідки й знаходимо n.

У випадку, коли число дослідів мале, для знаходження надійного інтервалу для ймовірності p треба користуватися біномним розподілом [15].

Вправи

1. Знайти методами моментів і максимальної правдоподібності за вибіркою $x_1, \ldots, x_n$ точкову оцінку параметра p біномного розподілу

$$P_N(x_i) = C_N^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{N-x_i},$$

де x_i – число появ події у i-му випробуванні, $i \in \{1, \ldots, n\}$, N – кількість випробувань у одному досліді.

2. Випадкова величина μ підпорядкована біномному закону розподілу з невідомим параметром p. У результаті проведення 20 дослідів по 5 випробувань у кожному отримана вибірка

x_i	0	1	2	3	4
n_i	4	6	5	2	3

.

Знайти методами моментів і максимальної правдоподібності за вибіркою точкову оцінку параметра p.

3. Випадкова величина ξ – кількість зривів поставок споживачам фірмами, які виробляють однорідну продукцію. За певний період проконтрольовано 10 фірм, у яких кількість зривів поставок відповідно: 6, 1, 3, 4, 1, 3, 5, 4, 0, 2. Важаючи, що ξ розподілена за законом Пуассона з параметром λ, оцінити цей параметр.

4. Методом максимальної правдоподібності оцінити параметр α випадкової величини ξ, розподіленої за законом Максвелла.

5. Знайти надійні межі для математичного сподівання з надійністю $\beta = 0,95$ і надійні межі для середнього квадратичного відхилення з надійністю $\gamma = 0,99$ за заданими розподілу вибірки:

x_i	65	70	75	80	85
n_i	2	5	25	15	3

.

6. Відомі результати двадцяти двох вимірювань деякої величини: 3,1; 3,3; 2,9; 3,0; 3,1; 3,2; 2,8; 2,7; 3,1; 3,2; 2,9; 3,0; 2,9; 3,1; 2,8; 2,9; 3,2; 3,3; 2,9; 3,1; 3,2; 3,0. За розподілом Стьюдента знайти надійний інтервал для значення вимірюваної величини a з надійним рівнем $\beta = 0,99$.

7. При перевірці 180 одиниць товару з великої партії виявилось 12 бракованих. Знайти 92%-ий надійний інтервал для частки бракованих одиниць у всій партії та оцінити мінімальний обсяг вибірки, щоб з імовірністю 0,92 можна було стверджувати, що частка браку в усій партії відрізняється від частки появи браку у вибірці не більше, ніж на 2% ?

8. Розглядається вибірка обсягу $n = 40$ з нормально розподіленої сукупності. Вибіркове середнє дорівнює 25, а виправлена вибіркова дисперсія – 3,7. Знайти 90%-ий надійний інтервал для математичного сподівання та 95%-ий надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення.

9. Для визначення середньої суми вкладів у банку, який має 2200 вкладників, проведено вибіркове дослідження 111 вкладників, результати якого подано в таблиці

Сума вкладу, тис. грн.	[10;30)	[30;50)	[50;70)	[70;90)	[90;110)	[110;130]
Число вклад.	1	3	10	30	60	7

.

Користуючись цими даними, знайти надійні межі для генерального середнього, які можна було б гарантувати з імовірністю 0,96.

10. При формуванні портфеля поставок для фірми довільним чином був здійснений відбір 100 постачальників, які здійснювали поставки сировини у минулому році. Для відсотка постачальників, які несвоєчасно постачали сировину, необхідно визначити надійні межі, які можна було б гарантувати з ймовірністю $\beta = 0,997$, якщо у вибірці опинилось 25 таких постачальників.

11. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл

$$p_\xi(x,\theta) = \begin{cases} 0, & x \notin [-\theta;\theta], \\ \dfrac{1}{2\theta}, & x \in [-\theta;\theta]. \end{cases}$$

За результатами вибірки $x_1, \ldots, x_n$ методом моментів оцінити невідомий параметр θ.

12. Генеральна сукупність ξ розподілена зі щільністю $p_\xi(x,\theta) = K(\theta)x^2 e^{-\frac{x^3}{\theta^3}}$, $x \geq 0$, $\theta > 0$. Знайти функцію $K(\theta)$ і оцінку параметра θ методом моментів і методом максимальної правдоподібності за результатами вибірки $x_1, \ldots, x_n$.

13. Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – вибірка з генеральної сукупності ξ, щільність якої

$$p_\xi(x,\beta,m) = \frac{\beta^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0, \quad \beta > 0, \quad m > 0.$$

Знайти оцінку невідомих параметрів β і m за допомогою методів моментів. Обчислення провести для випадку, коли $n = 10$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,4$, $x_3 = 0,5$, $x_4 = 0,7$, $x_5 = 0,6$, $x_6 = 0,1$, $x_7 = 0,05$, $x_8 = 0,8$, $x_9 = 0,15$, $x_{10} = 0,1$.

14. Методом максимальної правдоподібності за вибіркою $x_1, \ldots, x_n$ з генеральної сукупності знайти оцінку невідомого параметра λ розподілу Паскаля

$$P\{x_k = m\} = \frac{\lambda^m}{(\lambda+1)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \lambda > 0.$$

15. З конвеєра надходять електричні лампи. Яким має бути мінімальний розмір партії електроламп для того, щоб з надійністю 0,99 точність оцінки математичного сподівання випадкової величини ξ, яка характеризує тривалість горіння лампи, за вибірковим середнім становила $\delta = 1$ год., якщо відоме середнє квадратичне відхилення $\sigma_\xi = 3$ год.? Вважається, що випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу.

Відповіді

1. $\tilde{p} = \dfrac{1}{Nn}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. **2.** 0,34. **3.** 2,9. **4.** $\tilde{\alpha} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.
5. (74,98; 77,42), (3,08; 5,71). **6.** $\overline{x} = 3,0318$; $S_1^2 = 0,0303$; (2,9268; 3,1368).
7. (0,034; 0,101), $n = 482$ (скористатися формулами (22), (23))

$$P\{|p^* - p| < \varepsilon\} \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p^* q^*}}\right),$$ де $p^* = \mu/n$ – частота, $q^* = 1 - p^*$).

8. (24,5; 25,5); (1,46; 2,38). **9.** (86,37; 93,450). **10.** (11,98%; 38,05%) (використати надійні межі для ймовірності p). **11.** Оскільки $M\xi = 0$, то скористатися тим, що $M\xi^2 = \alpha_2$. $\tilde{\theta} = \sqrt{3\alpha_2}$ або $\tilde{\theta} = \sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

12. $K(\theta) = \dfrac{3}{\theta^3}, \theta = \dfrac{\overline{x}}{\Gamma(4/3)}, \tilde{\theta} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3}$. **13.** $\beta = \dfrac{\overline{x}}{\alpha_2 - \overline{x}^2}, m = \dfrac{\overline{x}^2}{\alpha_2 - \overline{x}^2}$, де $\alpha_2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$. У числовому прикладі $\beta = 4,79$, $m = 1,678$. **14.** $\lambda = \bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. **15.** 24.

4. Перевірка статистичних гіпотез

4.1. Поняття статистичної гіпотези. Загальна постановка задачі перевірки гіпотези.

У природознавстві, техніці, економіці для з'ясування того чи іншого випадкового факту часто висувають деяке припущення (гіпотезу), яке можна перевірити статистично, тобто використовуючи результати вибірки. **Статистичною** називають **гіпотезу**, яка стосується або вигляду, або окремих параметрів розподілу випадкової величини. Наприклад, статистичною є гіпотеза про те, що випадкова величина ξ – продуктивність праці робітників, які виконують однакову роботу в однакових умовах, має нормальний розподіл. Статистичною буде також гіпотеза про те, що середні розміри деталей, які виробляються на однотипних паралельно працюючих верстатах, однакові.

Статистична гіпотеза називається **простою**, якщо вона однозначно визначає розподіл випадкової величини ξ, у протилежному випадку гіпотеза називається **складною**. Наприклад, простою гіпотезою є припущення, що випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом $\xi \sim \mathcal{N}(0,\,1)$. Якщо висувається припущення, що випадкова величина ξ має нормальний розподіл з дисперсією, що дорівнює одиниці, а математичне сподівання – число з відрізка $[a;b]$, то це складна гіпотеза. Другим прикладом складної гіпотези є припущення про те, що неперервна випадкова величина ξ з ймовірністю p набуває значення з інтервалу $(1;5)$, бо у цьому випадку розподіл випадкової величини ξ може бути довільним з класу неперервних розподілів.

Якщо розподіл випадкової величини ξ відомий і за вибіркою спостережень треба перевірити гіпотезу про значення параметрів цього розподілу, то такі гіпотези називаються **параметричними**. Висунуту гіпотезу називають **нульовою (основною)** і позначають H_0. Гіпотезу H_1, яка суперечить H_0, називають **альтернативною (конкуруючою)**. Розглянемо, наприклад, біномно розподілену випадкову величину, що набуває значень $0, 1, \ldots, n$, де n

– відоме. Розподілом ξ може бути будь-який розподіл

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0, 1, \dots, n\},\ 0 < p < 1.$$

Вибір з усієї сукупності одного з розподілів, наприклад,

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\},$$

– це вибір нульової (основної) гіпотези щодо розподілу випадкової величини ξ. Після того, як основну гіпотезу вибрано (у розглядуваному випадку це гіпотеза: ξ має біномний розподіл $P_n(k)$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ з $p = 1/2$), інші гіпотези стають конкуруючими відносно H_0 (сукупністю конкуруючих гіпотез є H_θ, $\theta \in (0; 1/2) \cup (1/2; 1)$, тобто розподілом ξ є біномний розподіл $P_n(k)$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $p = \theta \in (0; 1/2) \cup (1/2; 1)$).

Зазначимо, що математична статистика не дає жодних рекомендацій щодо вибору нульової гіпотези H_0, він повністю визначається дослідником і залежить від поставленої задачі.

Запропонована гіпотеза може бути правильною або ні, тому виникає необхідність її перевірки. Оскільки перевірку здійснюють статистичними методами на основі вибірки, яка складається з n незалежних випадкових спостережень x_1, …, x_n над випадковою величиною ξ (генеральною сукупністю), то цю перевірку називають **статистичною**. Крім того, перевірка статистичних гіпотез здійснюється на основі вибіркових даних, тобто обмеженого числа спостережень, тому висновки щодо нульової гіпотези H_0 мають імовірнісний характер. Іншими словами, такий висновок супроводжується деякою, можливо, й дуже малою, ймовірністю помилки як в один, так і в другий бік.

Наприклад, у деякій невеликій частині випадків α нульова гіпотеза H_0 може бути відхиленою, тоді як насправді для генеральної сукупності вона є правильною. Таку помилку називають **помилкою 1-го роду**, а її ймовірність – **рівнем значущості** і позначають α.

Навпаки, у деякій частині випадків β нульова гіпотеза H_0 приймається, тоді як насправді для генеральної сукупності вона помилкова, а правильна альтернативна гіпотеза H_1. Таку помилку називають **помилкою 2-го роду.** Ймовірність помилки 2-го роду позначають через β. Ймовірність $1-\beta$ називають **потужністю критерію**.

При фіксованому обсязі вибірки можна вибрати на свій розсуд величину ймовірності тільки однієї з помилок α або β. Оскільки ці помилки конкурують одна з одною, то неможливо їх зробити як завгодно малими одночасно. Прийнято задавати ймовірність помилки 1-го роду α – рівень значущості. Як правило, користуються деякими стандартними значеннями рівня значущості α: $0,1$; $0,05$; $0,025$; $0,01$; $0,005$; $0,0001$. Тоді, очевидно, серед двох критеріїв, які характеризуються однією й тією самою ймовірністю α (відхилити правильну гіпотезу H_0), треба прийняти той, якому відповідає менша помилка 2-го роду β, тобто більша потужність. Зменшення ймовірностей обох помилок α і β одночасно можна домогтися за допомогою збільшення обсягу вибірки. Правильний висновок відносно нульової гіпотези H_0 також може бути двох видів: 1) буде прийнята нульова гіпотеза H_0, коли в генеральній сукупності правильна нульова гіпотеза H_0, ймовірність такого висновку $1-\alpha$; 2) нульова гіпотеза H_0 буде відхиленою на користь альтернативної H_1, коли в генеральній сукупності насправді правильна альтернативна гіпотеза H_1, ймовірність такого висновку $1-\beta$ – **потужність критерію**.

Перевірка статистичних гіпотез здійснюється з допомогою **статистичного критерію (статистики)** K, який є функцією від результатів спостережень. Він дозволяє визначити міру розбіжності результатів вибірки з гіпотезою H_0.

Статистичний критерій, як і будь-яка функція від результатів спостережень, є випадковою величиною і в припущенні правильності нульової гіпотези H_0 підпорядкований деякому добре вивченому (і затабульованому) теоретичному закону розподілу зі щільністю p_K.

Вибір критерію для перевірки статистичної гіпотези здійснюється на основі різних принципів. Найчастіше для цього користуються **принципом відношення правдоподібності**, який дозволяє побудувати критерій, найпотужніший серед усіх можливих критеріїв. Зміст його полягає у виборі такого критерію K з відомою щільностю p_K за умови правильності гіпотези H_0, щоб при заданому рівні значущості α можна було знайти **критичну точку** $k_{кр.}$ розподілу p_K, яка ділить область значень критерію на дві частини: область тих значень критерію, при яких H_0 приймається, і область тих значень критерію, при яких H_0 відхиляється. Перша з цих областей називається **областю прийняття гіпотези** (або **областю допустимих значень**), а друга – **критичною областю**.

Якщо такий критерій K вибрано, і відома щільність цього розподілу, то задача перевірки статистичної гіпотези зводиться до того, щоб при заданому рівні значущості α знайти за вибірковими даними **спостережуване значення критерію** $k_{сп.}$ і визначити, в яку з областей – область прийняття гіпотези H_0 чи критичну область – воно потрапляє.

Перевірка кожного типу статистичної гіпотези здійснюється з допомогою відповідного критерію, який є найпотужнішим в кожному конкретному випадку. Наприклад, перевірку закону розподілу випадкової величини можна робити за допомогою критерію згоди Пірсона χ^2, перевірку гіпотези про рівність невідомих значень дисперсій двох генеральних сукупностей – за допомогою критерію Фішера F, гіпотеза про невідомі значення параметрів генеральних сукупностей перевіряється за допомогою критерію U-нормально розподіленої випадкової величини і критерію t-Стьюдента і т.п.

Розрізняють **однобічну** (правобічну або лівобічну) і **двобічну критичні області.**

Якщо конкуруюча гіпотеза – правобічна, наприклад, $H_1 : \theta >$ $> \theta_0$, то і критична область – **правобічна** (рис. 1). При правобічній конкуруючій гіпотезі критична точка $k_{кр.}$ набуває додатних значень.

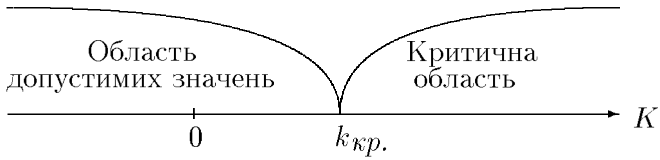


Рис. 1

Якщо конкуруюча гіпотеза – лівобічна, наприклад, $H_1 : \theta < \theta_0$, то й критична область – **лівобічна** (рис. 2), а $k_{кр.} < 0$.

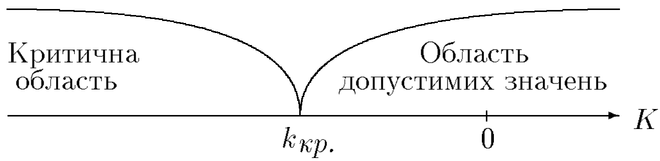


Рис. 2

Якщо конкуруюча гіпотеза – двобічна, наприклад, $H_1 : \theta \neq \neq \theta_0$, то і критична область – **двобічна** (рис. 3). При двобічній конкуруючій гіпотезі визначаються дві критичні точки $k_{кр.л.}$ і $k_{кр.п.}$.

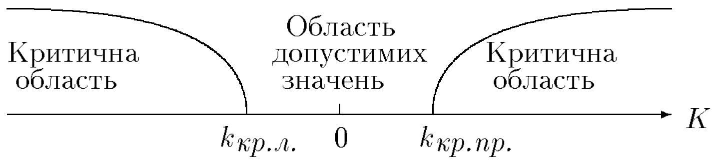


Рис. 3

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез:
– якщо спостережуване значення критерію $k_{сп.}$ належить області допустимих значень, то нульова гіпотеза приймається;
– якщо спостережуване значення критерію $k_{сп.}$ належить критичній області, то нульова гіпотеза відхиляється на користь конкуруючої H_1.

Опишемо алгоритм перевірки статистичних гіпотез:

1) сформулювати нульову H_0 й альтернативну H_1 гіпотези;

2) вибрати рівень значущості α;

3) у відповідності з виглядом пропонованої нульової гіпотези H_0 вибрати статистичний критерій для її перевірки, тобто спеціально підібрану випадкову величину K, точний або наближений розподіл якої відомий наперед;

4) за таблицями розподілу випадкової величини K, вибраної за статистичний критерій, знайти критичне значення $k_{кр.}$ (критичну точку або дві точки);

5) на основі вибіркових даних за спеціальним алгоритмом обчислити спостережуване значення критерію $k_{сп.}$;

6) за виглядом альтернативної гіпотези H_1 визначити тип критичної області;

7) знайти, в яку область (допустимих значень або критичну) попадає спостережуване значення критерію $k_{сп.}$, і в залежності від цього зробити висновок щодо нульової гіпотези H_0.

Слід зауважити, що навіть у випадку, коли нульову гіпотезу H_0 не слід відхиляти, це не означає, що зроблене припущення відносно генеральної сукупності є єдино правильним; просто йому не суперечать наявні вибіркові дані, хоча такою властивістю поряд із запропонованою можуть володіти й інші гіпотези.

Можна тлумачити результати перевірки нульової гіпотези так:

– якщо за результатами перевірки нульову гіпотезу H_0 приймають, це означає, що наявні вибіркові дані не дозволяють з достатньою впевненістю відхилити нульову гіпотезу H_0, ймовірність нульової гіпотези більша за α, а конкуруючої H_1 – менша за $1-\alpha$;

– якщо за результатами перевірки нульова гіпотеза H_0 відхиляється на користь конкуруючої H_1, то наявні вибіркові дані не дозволяють з достатньою впевненістю прийняти нульову гіпотезу H_0, ймовірність нульової гіпотези H_0 менша за α, а конкуруючої H_1 – більша за $1-\alpha$.

4.1.1. Статистична перевірка гіпотези про дисперсію.

I. Нехай генеральна сукупність розподілена нормально, причому її дисперсія хоча і невідома, але за певними даними можна вважати, що вона дорівнює деякому значенню σ_0^2. Із генеральної сукупності здійснена вибірка обсягу n і знайдено незсунену вибіркову дисперсію S_1^2. Задача полягає в тому, щоб за незсуненою вибірковою дисперсією S_1^2 при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про те, що дисперсія цієї генеральної сукупності дорівнює значенню σ_0^2, тобто гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$. Для неї можливі три альтернативні гіпотези: 1) $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$; 2) $H_2 : \sigma^2 > \sigma_0^2$; 3) $H_3 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.

За критерій перевірки нульової гіпотези візьмемо випадкову величину

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_0^2},$$

яка має розподіл χ^2 з $k = n - 1$ ступенями свободи [1]. При цьому

$$\chi^2_{сп.} = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_0^2}$$

Критичну область будуємо у залежності від вигляду альтернативної гіпотези.

1) При альтернативній гіпотезі H_1 знаходимо двобічну критичну область так, щоб

$$P\{\chi^2 < \chi^2_{кр.л.}\} = \frac{\alpha}{2}, \qquad P\{\chi^2 > \chi^2_{кр.пр.}\} = \frac{\alpha}{2}.$$

Оскільки у таблиці 10 критичних точок розподілу χ^2 вказані лише праві критичні точки, то, враховуючи рівність

$$P\{\chi^2 > \chi^2_{кр.л.}\} = 1 - P\{\chi^2 < \chi^2_{кр.л.}\} = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

отримуємо з таблиці 10, що

$$\chi^2_{кр.пр.} = \chi^2(\frac{\alpha}{2}, k), \qquad \chi^2_{кр.л.} = \chi^2(1 - \frac{\alpha}{2}, k).$$

Якщо $\chi^2_{сп.} \in (\chi^2_{кр.л.};\ \chi^2_{кр.пр.})$, то нульову гіпотезу приймаємо, а у протилежному випадку – відхиляємо.

2) При альтернативній гіпотезі H_2 будуємо правобічну критичну область так, щоб $P\{\chi^2 > \chi^2_{кр.}\} = \alpha$. З таблиці 10 знаходимо $\chi^2_{кр.} = \chi^2(\alpha, k)$. Якщо $\chi^2_{сп.} < \chi^2_{кр.}$, то нульову гіпотезу приймаємо, а у протилежному випадку – відхиляємо.

3) При альтернативній гіпотезі H_3 будуємо лівобічну критичну область так, щоб $P\{\chi^2 < \chi^2_{кр.}\} = \alpha$. З таблиці 10 знаходимо $\chi^2_{кр.} = \chi^2(1 - \alpha, k)$. Якщо $\chi^2_{сп.} > \chi^2_{кр.}$, то нульову гіпотезу приймаємо, а у протилежному випадку – відхиляємо.

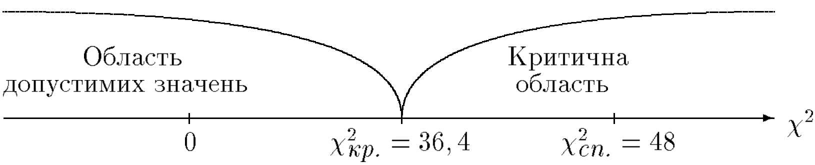
Зауваження. Якщо число ступенів свободи $k > 30$, то критичну точку $\chi^2(\alpha, k)$ можна знайти з рівняння Уілсона-Гільферті

$$\chi^2(\alpha, k) = k\left(1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right)^3,$$

де $\Phi(z_\alpha) = \dfrac{1 - 2\alpha}{2}$.

Приклад 1. Точність роботи верстата-автомата перевіряється за дисперсією підконтрольного розміру виробів, яка не повинна перевищувати 0,1. За вибіркою з 25 випадково відібраних виробів отримана незсунена вибіркова дисперсія $S_1^2 = 0,2$. Необхідно за рівнем значущості 0,05 перевірити, чи забезпечує цей верстат необхідну точність.

◁ Розглянемо $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,1$, а $H_1 : \sigma^2 > 0,1$. Отже, критична область є правобічною. З таблиці 10 знаходимо $\chi^2_{кр.} = \chi^2(0,05, 24) = 36,4$. Крім того, $\chi^2_{сп.} = \dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{24 \cdot 0,2}{0,1} = 48$.



Оскільки $\chi^2_{сп.} > \chi^2_{кр.}$, то нульову гіпотезу відхиляємо, тобто верстат не забезпечує необхідну точність. ▷

II. Нехай генеральні сукупності ξ і η розподілені нормально. За незалежними вибірками з цих генеральних сукупностей відповідно з обсягами n_ξ і n_η знайдено незсунені вибіркові дисперсії S_ξ^2

і S^2_η. Задача полягає в тому, щоб за вибірковими дисперсіями S^2_ξ і S^2_η при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про те, що дисперсії цих генеральних сукупностей однакові, тобто гіпотезу $H_0 : \sigma^2_\xi = \sigma^2_\eta$.

За критерій перевірки нульової гіпотези візьмемо випадкову величину

$$F = \frac{S^2_{б.}}{S^2_{м.}},$$

де $S^2_{б.}$ і $S^2_{м.}$ – відповідно більша й менша незсунені вибіркові дисперсії.

Випадкова величина F за умови правильності H_0 має розподіл Фішера-Снедекора зі ступенями свободи $k_1 = n_1 - 1$ і $k_2 = n_2 - 1$, де n_1 – обсяг вибірки, якій відповідає $S^2_{б.}$, а n_2 – обсяг вибірки, якій відповідає $S^2_{м.}$, При цьому

$$f_{сп.} = \frac{S^2_{б.}}{S^2_{м.}}.$$

Критичну область будуємо у залежності від вигляду альтернативної гіпотези.

1) Якщо $H_1 : \sigma^2_\xi > \sigma^2_\eta$, то знаходимо правобічну область так, щоб $P\{F > f_{кр.}\} = \alpha$. З таблиці 12 критичних точок розподілу Фішера-Снедекора знаходимо $f_{кр.} = f(\alpha, k_1, k_2)$. Якщо $f_{сп.} < f_{кр.}$, то нульову гіпотезу приймаємо (тобто вибіркові дисперсії відрізняються несуттєво), а у протилежному випадку – H_0 відхиляємо (вибіркові дисперсії відрізняються суттєво).

2) Якщо $H_1 : \sigma^2_\xi \neq \sigma^2_\eta$, то будуємо двобічну область так, щоб

$$P\{F > f_{кр.пр.}\} = \frac{\alpha}{2}, \qquad P\{F < f_{кр.л.}\} = \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

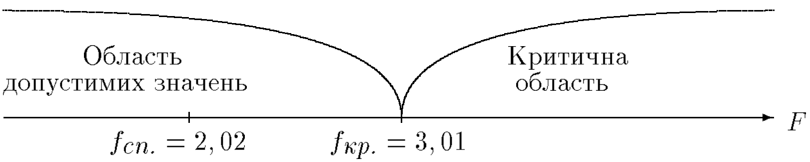
З таблиці 12 критичних точок розподілу Фішера-Снедекора знаходимо $f_{кр.пр.} = f(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2)$. Критичну точку $f_{кр.л.}$ за цією таблицею знайти неможливо. Обмежемося випадком, коли $f_{кр.л.}$ і не потрібно шукати, оскільки маємо попадання критерію F у двобічну критичну область з імовірністю, що дорівнює рівню значущості

α. Тому, якщо $f_{кр.} = f(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2)$, то виконується (1), тобто ймовірність того, що критерій F попав у двобічну критичну область, дорівнює α, оскільки ці події несумісні.

Отже, якщо $f_{сп.} \geq f(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2)$, то нульову гіпотезу слід відхилити, а у протилежному випадку – можна прийняти.

Приклад 2. За двома незалежними вибірками обсягів $n_\xi = 8$ та $n_\eta = 12$ з нормальних генеральних сукупностей знайдено незсунені вибіркові дисперсії $S^2_\xi = 1,25$ і $S^2_\eta = 0,62$. Необхідно за рівнем значущості 0,05 перевірити нульову гіпотезу $H_0 : \sigma^2_\xi = \sigma^2_\eta$, якщо альтернативною є гіпотеза $H_1 : \sigma^2_\xi > \sigma^2_\eta$.

$\triangleleft$ Спостережуване значення критерію $f_{сп.} = \dfrac{S^2_{б.}}{S^2_{м.}} = \dfrac{1,25}{0,62} \approx 2,02$. Згідно з умовою задачі критична область однобічна. За рівнем значущості $\alpha = 0,05$ та числами ступенів свободи $k_1 = 8 - 1 = 7$ і $k_2 = 12 - 1 = 11$ з таблиці 12 знаходимо $f_{кр.} = 3,01$.



Оскільки $f_{сп.} < f_{кр.}$, то нульову гіпотезу приймаємо. $\triangleright$

4.1.2. Статистична перевірка гіпотез про математичне сподівання. I. Розглянемо випадкову величину ξ, розподілену за нормальним законом, математичне сподівання a якої нам невідоме, але є підстави вважати, що воно дорівнює a_0. Тому нульовою гіпотезою є $H_0 : a = a_0$. Для неї можливі три альтернативні гіпотези: 1) $H_1 : a \neq a_0$; 2) $H_2 : a > a_0$; 3) $H_3 : a < a_0$.

Нехай випадкова величина $\overline{x}$ – вибіркове середнє розподілена за нормальним законом з $M\overline{x} = a$ і $D\overline{x} = \dfrac{\sigma^2_\xi}{n}$, де n – обсяг вибірки. Тоді випадкова величина $\overline{x}^0 = \dfrac{\overline{x} - a}{\sigma_\xi}\sqrt{n}$ має нормальний розподіл $\mathcal{N}(0, 1)$.

а) Припустимо, що дисперсія D_ξ генеральної сукупності відома і дорівнює σ^2.

За критерій перевірки гіпотези H_0 про нормальний розподіл візьмемо випадкову величину U:

$$U = \frac{(\overline{x} - a_0)}{\sigma}\sqrt{n}.$$

Ця величина нормально розподілена і у випадку правильності нульової гіпотези має математичне сподівання 0 і середнє квадратичне відхилення 1.

1) Для перевірки нульової гіпотези H_0 при альтернативній гіпотезі H_1 із рівнем значущості α треба обчислити $u_{сп.}$:

$$u_{сп.} = \frac{(\overline{x} - a_0)}{\sigma}\sqrt{n}$$

і з таблиці 2 значень функції Лапласа Φ знайти $u_{кр.}$ з рівняння

$$\Phi(u_{кр.}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Якщо $|u_{сп.}| < u_{кр.}$, то нульову гіпотезу приймаємо, а у протилежному випадку – відхиляємо.

2) Для того, щоб перевірити при заданому рівні значущості α нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_2 знаходимо $u_{кр.}$ з рівняння

$$\Phi(u_{кр.}) = \frac{1-2\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Якщо $u_{сп.} < u_{кр.}$, то H_0 приймаємо, а у випадку $u_{сп.} \geq u_{кр.}$ – відхиляємо.

3) У випадку альтернативної гіпотези H_3 $u_{кр.}$ знаходимо як і у попередньому випадку. Якщо $u_{сп.} > -u_{кр.}$, то нульову гіпотезу приймаємо, а у випадку $u_{сп.} \leq -u_{кр.}$ – відхиляємо.

Приклад 3. Згідно з технічним паспортом автомобільного двигуна витрати пального на 100 км шляху становлять 10 л. У результаті зміни конструкції двигуна очікується, що витрати пального зменшаться. Для перевірки проведено випробування 25 випадково відібраних автомобілів з модернізованим двигуном, причому вибіркове середнє витрат пального на 100 км шляху за результатами випробувань дорівнювало 9,3 л. Вважаючи, що вибірка витрат пального одержана з нормально розподіленої генеральної сукупності з математичним сподіванням a і дисперсією 4 л^2, перевірити гіпотезу, яка стверджує, що зміна конструкції двигуна не вплинула на витрати пального.

◁ Перевіримо гіпотезу про середнє (математичне сподівання) a нормально розподіленої випадкової величини ξ – генеральної сукупності.

Нульова гіпотеза $H_0 : a_0 = 10$; альтернативна гіпотеза $H_1 : a < 10$.

За статистистичний критерій візьмемо випадкову величину U, розподілену за нормальним законом. Тоді

$$u_{сп.} = \frac{\overline{x} - a_0}{\sigma}\sqrt{n},$$

тобто

$$u_{сп.} = \frac{9,3 - 10}{\sqrt{4}}\sqrt{25} = \frac{-0,7}{2} \cdot 5 = -1,75.$$

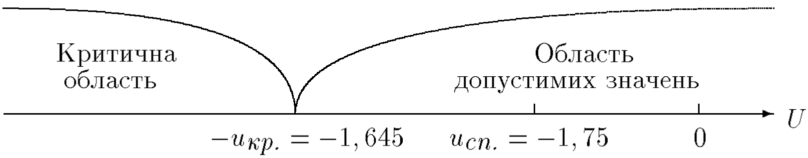
Нехай рівень значущості $\alpha = 0,05$.

Оскільки ми маємо лівобічну альтернативну гіпотезу, то

$$\Phi(u_{кр.}) = \frac{1 - 2\alpha}{2},$$

$$\Phi(u_{кр.}) = \frac{1 - 2 \cdot 0,05}{2} = \frac{1 - 0,1}{2} = \frac{0,9}{2} = 0,450$$

і тому $u_{кр.} = 1,645$.



Отже, $u_{сп.} < -u_{кр.}$, а це означає, що гіпотеза H_0 відхиляється, тобто зміна конструкції двигуна привела до зменшення витрат пального. ▷

б) Припустимо, що дисперсія D_ξ генеральної сукупності невідома.

За критерій T перевірки нульової гіпотези візьмемо випадкову величину

$$T = \frac{(\overline{x} - a_0)}{S_1}\sqrt{n},$$

де S_1 – незсунене вибіркове середнє квадратичне відхилення. Ця величина розподілена за законом Стьюдента з $k = n - 1$ ступенем свободи. Спостережуване значення критерію обчислюємо за формулою

$$t_{cn.} = \frac{(\overline{x} - a_0)}{S_1}\sqrt{n},$$

а $t_{кр.}$ знаходимо з таблиці 11 критичних точок розподілу Стьюдента (за відомими значеннями рівня значущості α і числа ступенів свободи k для двобічної чи однобічної критичних областей). Правила перевірки гіпотези H_0 при альтернативних гіпотезах H_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, збігаються з описаними вище.

Приклад 4. Технічна норма передбачає в середньому 40 с на виконання певної технологічної операції на конвейєрі по виробництву годинників. Від працюючих надійшли скарги, що вони насправді затрачають на цю операцію більше часу. Для перевірки цієї скарги проведено хронометричні вимірювання часу виконання цієї технологічної операції 16 робітниками, зайнятих на ній, і одержано середній час виконання операції $\overline{x} = 42$ с. Чи можна за наявними хронометричними даними при рівні значущості $\alpha = 0,01$ відхилити гіпотезу про те, що середній час виконання цієї операції відповідає нормі, якщо: а) незсунене вибіркове середнє квадратичне відхилення $S_1 = 3,5$ с; б) вибіркове середнє квадратичне відхилення $S = 3,5$ с ?

$\triangleleft$ а) Для розв'язування задачі необхідно перевірити гіпотезу про те, що невідоме генеральне середнє нормальної сукупності точно дорівнює певному числу, коли дисперсія генеральної сукупності невідома (вибірка мала, оскільки $n = 16$ менше, ніж 30).

Сформулюємо нульову й альтернативну гіпотези згідно з умовою задачі.

$H_0 : a = a_0 = 40$ – невідоме математичне сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності з невідомою дисперсією дорівнює передбачуваному числовому значенню $a_0 = 40$. В умовах задачі це означає, що час виконання технологічної операції відповідає нормі.

$H_1 : a > 40$ – невідоме математичне сподівання a нормально розподіленої випадкової величини з невідомою дисперсією більше від числового значення a_0, тобто час виконання технологічної операції більший за встановлену норму.

Оскільки конкуруюча гіпотеза правобічна, то і критична область правобічна.

Як критерій для порівняння невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої генеральної сукупності з невідомою дисперсією з числовим значенням a_0 використаємо випадкову величину T – критерій Стьюдента. Його спостережуване значення $t_{cn.}$ знаходимо за формулою

$$t_{cn.} = \frac{\overline{x} - a_0}{S_1}\sqrt{n},$$

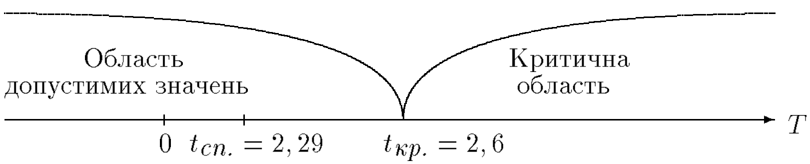
де $\overline{x}$ – вибіркове середнє; a_0 – числове значення генерального середнього; S_1 – незсунене середнє квадратичне відхилення; n – обсяг вибірки.

У нашому випадку

$$t_{cn.} = \frac{42 - 40}{3,5}\sqrt{16} \approx 2,2857.$$

Критичне значення $t_{кр.}$ знаходимо за допомогою таблиці 11 розподілу Стьюдента за рівнем значущості α і числом ступенів свободи k.

Згідно з умовою $\alpha = 0,01$, а число ступенів свободи k знайдемо за формулою $k = n-1$, де n – обсяг вибірки, тобто $k = 16-1 = 15$. З таблиці 11 одержуємо, що $t_{кр.}(0,01,\ 15) = 2,6$.



Оскільки $t_{cn.} < t_{кр.}$, то при заданому рівні значущості немає причин відхилити нульову гіпотезу H_0.

Отже, за даними хронометричними спостереженнями при рівні значущості $\alpha = 0,01$ не можна відхилити нульову гіпотезу про те що середній час виконання цієї операції відповідає нормі. Тому скарги робітників необгрунтовані.

б) Для розв'язування задачі необхідно перевірити гіпотезу про те, що невідоме теоретичне математичне сподівання дорівнює певному числу, коли дисперсія генеральної сукупності невідома.

Алгоритм розв'язуванння задачі такий, як і в першому випадку, але $t_{сп.}$ розраховується за формулою

$$t_{сп.} = \frac{\overline{x} - a_0}{S}\sqrt{n-1},$$

де $\overline{x}$ – вибіркове середнє, a_0 – числове значення генерального середнього; S – вибіркове середнє квадратичне відхилення; n – обсяг вибірки.

Тому

$$t_{сп.} = \frac{42 - 40}{3,5}\sqrt{16-1} = 2,2131.$$

Оскільки $t_{кр.} = t_{кр.}(0,01,\ 15) = 2,6$, то $t_{сп.} < t_{кр.}$. Звідси випливає, що при заданому рівні значущості немає підстав відхилити нульову гіпотезу, тобто скарги робітників необгрунтовані.

Отже, згідно з наявними хронометричними даними при рівні значущості $\alpha = 0,01$ не можна відхилити гіпотезу про те, що середній час виконання цієї операції відповідає нормі, тобто скарги робітників необгрунтовані. $\triangleright$

II. Нехай випадкові величини ξ і η (генеральні сукупності) розподілені за нормальними законами і за незалежними вибірками з генеральних сукупностей обсягів n_ξ і n_η відповідно обчислені вибіркові середні значення $\overline{x}$ і $\overline{y}$. Треба при заданому рівні значущості α перевірити за результатами вибірок нульову гіпотезу H_0: $M\xi = M\eta$.

Розглянемо випадкові величини $\overline{\xi}$ і $\overline{\eta}$ – вибіркові середні. Оскільки $M\overline{\xi} = M\xi$, $M\overline{\eta} = M\eta$, то нульову гіпотезу H_0 можна записати у вигляді $M\overline{\xi} = M\overline{\eta}$. Можливі альтернативні гіпотези: 1) $H_1 : M\xi \neq M\eta$; 2) $H_2 : M\xi > M\eta$; 3) $H_3 : M\xi < M\eta$. Випадкові величини $\overline{\xi}$ і $\overline{\eta}$ розподілені нормально з параметрами $M\xi$, $\dfrac{\sigma_\xi^2}{n_\xi}$ і $M\eta$, $\dfrac{\sigma_\eta^2}{n_\eta}$ відповідно. Вибірки незалежні, тому $\overline{\xi}$ і $\overline{\eta}$ також незалежні і випадкова величина $u = \overline{\xi} - \overline{\eta}$ розподілена нормально, причому

$$Du = D(\overline{\xi}) + D(\overline{\eta}) = \frac{\sigma_\xi^2}{n_\xi} + \frac{\sigma_\eta^2}{n_\eta},$$

$$\sigma_u = \sqrt{Du} = \sqrt{\frac{\sigma_\xi^2}{n_\xi} + \frac{\sigma_\eta^2}{n_\eta}}.$$

Якщо гіпотеза H_0 правильна, то

$$Mu = M\overline{\xi} - M\overline{\eta} = 0.$$

Тому нормована випадкова величина

$$u^0 = \frac{u - Mu}{\sigma_u} = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_\xi^2}{n_\xi} + \frac{\sigma_\eta^2}{n_\eta}}}$$

нормально розподілена з параметрами 0 і 1.

а) Якщо σ_ξ^2 і σ_η^2 відомі, то за критерій візьмемо випадкову величину U:

$$U = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_\xi^2}{n_\xi} + \frac{\sigma_\eta^2}{n_\eta}}},$$

яка розподілена за нормальним законом. При цьому $u_{сп.}$ знаходиться за формулою

$$u_{сп.} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_\xi^2}{n_\xi} + \frac{\sigma_\eta^2}{n_\eta}}},$$

а $u_{кр.}$ з рівняння

$$\Phi(u_{кр.}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

у випадку альтернативної гіпотези H_1 або з рівняння

$$\Phi(u_{кр.}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

у випадку альтернативних гіпотез H_2 і H_3.

Правила перевірки гіпотези H_0 при альтернативних гіпотезах H_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, збігаються з описаними вище.

Приклад 5. Економічний аналіз продуктивності праці підприємств деякої галузі дозволив висловити гіпотезу про наявність двох типів підприємств з різною середньою величиною продуктивності праці. Вибіркове обстеження 42 підприємств першої групи встановило середню продуктивність праці $\overline{x} = 119$ деталей. За даними вибіркового обстеження 35 підприємств другої групи – середня продуктивність праці $\overline{y} = 107$ деталей. Генеральні дисперсії відомі $D\xi = 126,91$(дет.^{2}); $D\eta = 136,1$(дет.^{2}). Вважаючи, що вибірки зроблено з нормально розподілених сукупностей ξ і η, при рівні значущості $\alpha = 0,05$, перевірити, чи випадково одержано різні середні показники продуктивності праці в групах або ж є два типи підприємств з різною середньою величиною продуктивності праці.

$\triangleleft$ Для розв'язування задачі необхідно порівняти два середніх значення нормально розподілених генеральних сукупностей, генеральні дисперсії яких відомі. Оскільки $n_\xi = 42$ і $n_\eta = 35$ більші за 30, то ми маємо справу з великими вибірками. З умови задачі випливає, що вибірки незалежні, бо вони зроблені з різних генеральних сукупностей.

Сформулюємо нульову і конкуруючі гіпотези.

$H_0 : M\xi = M\eta$ – підприємства обох груп належать до одного типу підприємств, тобто середня продуктивність праці в обох групах однакова.

$H_1 : M\xi \neq M\eta$ – підприємства обох груп відносяться до різного типу підприємств, тобто середня продуктивність праці в цих групах різна.

Висуваємо двобічну конкуруючу гіпотезу, бо з умови задачі не випливає, що треба досліджувати, у котрій з двох груп продуктивність праці більша.

Оскільки конкуруюча гіпотеза двобічна, то й критична область двобічна.

За критерій при порівнянні двох середніх генеральних сукупностей, дисперсії яких відомі, використаємо випадкову величину U, спостережуване значення $u_{сп.}$ якої обчислюється за формулою

$$u_{сп.} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{D\xi}{n_\xi} + \frac{D\eta}{n_\eta}}},$$

де $\overline{x}$ – вибіркове середнє генеральної сукупності ξ, $\overline{y}$ – вибіркове середнє генеральної сукупності η, $D\xi$ – генеральна дисперсія для ξ, $D\eta$ – генеральна дисперсія для η, n_ξ – обсяг вибірки для ξ, n_η – обсяг вибірки для η.

Тоді

$$u_{сп.} = \frac{119 - 107}{\sqrt{\dfrac{126,91}{42} + \dfrac{136,1}{35}}} = 4,5649.$$

Оскільки конкуруюча гіпотеза двобічна, то критичне значення треба знайти з таблиці функції Лапласа з рівності

$$\Phi(u_{кр.}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Згідно з умовою $\alpha = 0,05$, а тому $\Phi(u_{кр.}) = \dfrac{1-0,05}{2} = 0,475$. З таблиці 2 для функції Φ знаходимо $\Phi(1,96) = 0,475$, тобто $u_{кр.} = 1,96$.

Враховуючи, що конкуруюча гіпотеза двобічна, отримуємо, що

$$u_{кр.пр.} = 1,96; \qquad u_{кр.л.} = -1,96.$$

Очевидно, що $u_{сп.}$ попадає в критичну область, тому нульова гіпотеза відхиляється на користь конкуруючої. Це означає, що одержана відмінність середніх показників продуктивності праці в групах невипадкова, є два типи підприємств з різною середньою величиною продуктивності праці.

▷

б) Якщо генеральні дисперсії невідомі, але вони однакові, тобто $\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma^2$, то для оцінки σ^2 використаємо незсунені вибіркові дисперсії

$$S_\xi^2 = \frac{1}{n_\xi - 1}\sum_{i=1}^{n_\xi}(x_i - \overline{x})^2, \quad S_\eta^2 = \frac{1}{n_\eta - 1}\sum_{j=1}^{n_\eta}(y_j - \overline{y})^2.$$

Доведено [4], що найкращою оцінкою для σ^2 є

$$S^2 = \frac{(n_\xi - 1)S_\xi^2 + (n_\eta - 1)S_\eta^2}{n_\xi + n_\eta - 2}.$$

Якщо гіпотеза H_0 правильна, то випадкова величина $u = \overline{\xi} - \overline{\eta}$ розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 0 і дисперсією

$$Du = D(\overline{\xi}) + D(\overline{\eta}) = \frac{\sigma^2}{n_\xi} + \frac{\sigma^2}{n_\eta} = \frac{n_\xi + n_\eta}{n_\xi n_\eta}\sigma^2.$$

За критерій T візьмемо випадкову величину

$$T = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{(n_\xi - 1)S_\xi^2 + (n_\eta - 1)S_\eta^2}}\sqrt{\frac{n_\xi n_\eta(n_\xi + n_\eta - 2)}{n_\xi + n_\eta}},$$

яка розподілена за законом Стьюдента з $k = n_\xi + n_\eta - 2$ ступенями свободи. Спостережуване значення $t_{сп.}$ обчислюємо за формулою

$$t_{сп.} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n_\xi - 1)S_\xi^2 + (n_\eta - 1)S_\eta^2}}\sqrt{\frac{n_\xi n_\eta(n_\xi + n_\eta - 2)}{n_\xi + n_\eta}},$$

а $t_{кр.}$ знаходимо з таблиці 11 критичних точок розподілу Стьюдента. Правила перевірки нульової гіпотези H_0 при альтернативних гіпотезах H_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, аналогічні до описаних вище.

Приклад 6. Припускають, що застосування нового типу різця скоротить час обробки деякої деталі. Хронометраж часу обробки 9 деталей старим типом різців, дав такі результати: середній час обробки деталей $\overline{x} = 57$ хв., незсунена вибіркова дисперсія $S_\xi^2 = 186{,}2$ хв.^{2}. Середній час обробки 15 деталей новим типом різців, за даними хронометражних вимірювань $\overline{y} = 52$ хв., а незсунена вибіркова дисперсія $S_\eta^2 = 166{,}4$ хв.^{2}. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ треба з'ясувати, чи дозволило використання нового типу різців скоротити час обробки деталей.

$\triangleleft$ При розв'язування задачі необхідно порівняти два математичних сподівання нормально розподілених генеральних сукупностей, генеральні дисперсії яких невідомі, але припускається, що вони однакові (малі незалежні вибірки). У цій задачі мова йде про малі вибірки, оскільки $n_\xi = 9$, $n_\eta = 15$ менші за 30. Вибірки незалежні, оскільки з умови задачі видно, що вони зроблені з різних генеральних сукупностей, що не мають спільних елементів.

Сформулюємо нульову і конкуруючі гіпотези, згідно з умовою задачі.

$H_0 : M\xi = M\eta$ – середній час, затрачуваний на обробку деталі різцями нового і старого типів, однаковий, тобто використання нового типу різця не дозволяє зменшити час обробки деталі,

$H_1 : M\xi > M\eta$ – середній час, затрачуваний на обробку деталі різцями старого типу, більший, ніж нового, тобто використання нового типу різця дозволяє зменшити час обробки деталі.

Оскільки конкуруюча гіпотеза правобічна, то і критична область правобічна.

Почати перевірку гіпотези про рівність генеральних середніх двох нормально розподілених сукупностей з невідомими дисперсіями можна лише тоді, коли генеральні дисперсії однакові. У протилежному випадку ця задача теоретично нерозв'язна.

Тому перевіримо спочатку гіпотезу про рівність генеральних дисперсій нормальних сукупностей.

Сформулюємо нульову і конкуруючу гіпотези.

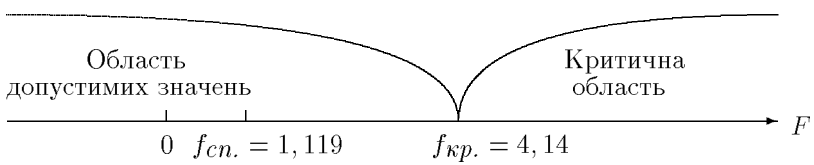
$H_0 : D\xi = D\eta$, $H_1 : D\xi > D\eta$. Беремо правобічну конкуруючу гіпотезу, оскільки незсунена вибіркова дисперсія для ξ значно більша, ніж незсунена вибіркова дисперсія для η. Конкуруюча гіпотеза правобічна, тому критична область правобічна.

Як критерій для порівнянні двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей використовуємо випадкову величину F – критерій Фішера-Снедекора. Його спостережуване значення розраховуємо за формулою

$$f_{сп.} = \frac{S^2_{б}}{S^2_{м}} = \frac{186,2}{166,4} = 1,119,$$

де $S^2_{б}$ –більша за величиною незсунена вибіркова дисперсія, а $S^2_{м}$ – менша за величиною незсунена вибіркова дисперсія.

З таблиці 12 знаходимо критичне значення $f_{кр.} = f(0,01,\ 8,\ 14) = 4,14$.



Оскільки $f_{сп.} < f_{кр.}$, то при заданому рівні значущості немає підстав відхилити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій.

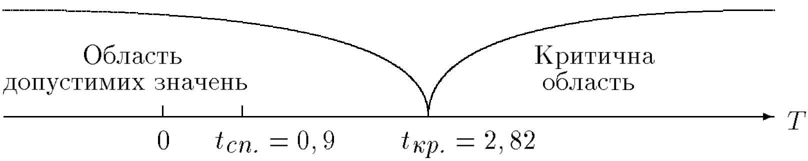
Отже, можна приступити до перевірки гіпотези про рівність генеральних середніх двох нормально розподілених сукупностей. Критерієм для перевірки цієї гіпотези служить випадкова величина T – критерій Стьюдента. Його спостережуване значення

$$t_{cn.} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n_\xi - 1)S_\xi^2 + (n_\eta - 1)S_\eta^2}} \sqrt{\frac{n_\xi n_\eta (n_\xi + n_\eta - 2)}{n_\xi + n_\eta}};$$

де $\overline{x}$ – вибіркове середнє для ξ, $\overline{y}$ – вибіркове середнє для η, S_ξ^2 – вибіркова дисперсія для ξ, S_η^2 – вибіркова дисперсія для η, n_ξ – обсяг вибірки для генеральної сукупності ξ, n_η – обсяг вибірки для генеральної сукупності η. Маємо

$$t_{cn.} = \frac{57 - 52}{(9-1)\cdot 186,2 + (15-1)\cdot 166,4} \sqrt{\frac{9 \cdot 15 \cdot (9 + 15 - 2)}{9 + 15}} = 0,94.$$

Точку $t_{кр.}$ знаходимо з таблиці 11 розподілу Стьюдента за рівнем значущості α і числом ступенів свободи k. Згідно з умовою $\alpha = 0,01$, а $k = n_\xi + n_\eta - 2 = 9 + 15 - 2 = 22$. Тоді $t_{кр.} = t(0,01, 22) = 2,82$.



Оскільки $t_{cn.} < t_{кр.}$, то при цьому рівні значущості немає підстав відхилити нульову гіпотезу, тобто середній час, затрачуваний на обробку деталі новим типом різців, мало відрізняється від середнього часу обробки деталі старим різцем. $\triangleright$

4.1.3. Статистична перевірка гіпотез про ймовірність. Раніше за допомогою інтегральної теореми Муавра-Лапласа ми одержали оцінку невідомої ймовірності p через її частоту $\dfrac{m}{n}$. Виникає запитання про надійність цієї оцінки. Нехай є підстави вважати, що невідома ймовірність p дорівнює p_0. Треба при рівні значущості α перевірити гіпотезу H_0: невідома ймовірність p дорівнює

p_0. Оскільки ймовірність p оцінюється через частоту, то необхідно з'ясувати суттєво, чи ні відрізняється спостережувана частота від ймовірності p_0.

Для гіпотези H_0 можливі три альтернативні гіпотези: 1) $H_1 : p \neq p_0$; 2) $H_2 : p > p_0$; 3) $H_1 : p < p_0$.

Розглянемо випадкову величину $u = \dfrac{m}{n}$. Для цієї величини при великих значеннях n закон розподілу близький до нормального з математичним сподіванням $a = p$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}$.

Нормована випадкова величина $\overline{u}$

$$\overline{u} = \frac{u-a}{\sigma} = \frac{\dfrac{m}{n} - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}} = \frac{\left(\dfrac{m}{n} - p\right)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$$

має математичне сподівання $M(\overline{u}) = 0$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(\overline{u}) = 1$. За критерій U перевірки нульової гіпотези візьмемо випадкову величину

$$U = \frac{\dfrac{m}{n} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0}}\sqrt{n}, \quad q_0 = 1 - p_0,$$

яка розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$.

Правила перевірки гіпотези H_0 при альтернативних гіпотезах H_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, збігаються з описаними вище.

Приклад 7. Партія виробів приймається, коли ймовірність того, що виріб відповідає стандарту, є не меншою 0,97. Серед випадково відібраних 200 виробів партії, що перевіряється, виявилося 193 стандартних. Чи можна при рівні значущості $\alpha = 0,02$ прийняти партію?

$\triangleleft$ Згідно з умовою задачі нульова гіпотеза $H_0 : p = p_0 = 0,97$, тобто невідома ймовірність генеральної сукупності $p = 0,97$, а це означає, що партію можна прийняти.

Альтернативною є гіпотеза $H_1 : p < 0,97$, тобто ймовірність деталі бути стандартною, менша ніж 0,97, і отже, партію прийняти не можна.

Альтернативна гіпотеза лівобічна, а тому і критична область лівобічна.

Для порівняння спостережуваної відносної частоти з ймовірністю генеральної сукупності за критерій візьмемо нормально розподілену випадкову величину U. Тоді $u_{сп.}$ обчислюється за формулою

$$u_{сп.} = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0}}\sqrt{n},$$

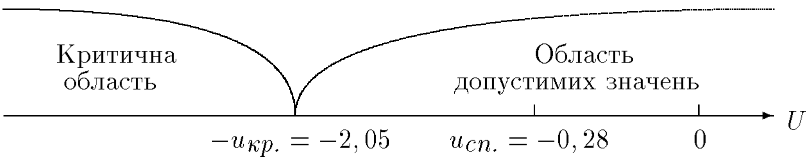
де $\frac{m}{n}$ – відносна частота настання події, p_0 – ймовірність генеральної сукупності ξ, $q_0 = 1 - p_0$, n – обсяг вибірки. Згідно з умовою задачі $m = 193$, $n = 200$, $p_0 = 0,97$, $q_0 = 1 - p_0 = 0,03$, $\alpha = 0,02$, а тому

$$u_{сп.} = \frac{\frac{193}{200} - 0,97}{\sqrt{0,97 \cdot 0,03}}\sqrt{200} \approx -0,2771.$$

Оскільки альтернативна гіпотеза лівобічна, то $u_{кр.}$ визначаємо з рівності (2)

$$\Phi(u_{кр.}) = \frac{1 - 2 \cdot 0,02}{2} = 0,48.$$

З таблиці 2 значень функції Лапласа знаходимо, що $\Phi(2,05) = 0,48$, а тому $u_{кр.} = 2,05$.



Отже, $u_{сп.} > -u_{кр.}$, а це означає, що немає підстав відхилити нульову гіпотезу, тобто партія приймається. $\triangleright$

Нехай у двох генеральних сукупностях проводяться послідовні незалежні випробування, при кожному з яких може настати або ні подія A. Позначимо невідому ймовірність появи події A у першій сукупності через p_1, а у другій – через p_2. Нехай з першої генеральної сукупності здійснена вибірка обсягом n_1, а з другої – обсягом n_2. При цьому у першому випадку подія A настала m_1 разів, а у другому випадку – m_2 разів. Треба за заданим рівнем значущості α перевірити гіпотезу про рівність ймовірностей p_1 і p_2, тобто $H_0 : p_1 = p_2 = p$.

За критерій перевірки нульової гіпотези візьмемо випадкову величину

$$U = \frac{\dfrac{\mu_1}{n_1} - \dfrac{\mu_2}{n_2}}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n_1} + \dfrac{p(1-p)}{n_2}}}, \tag{3}$$

де випадкова величина μ_i – число появ події A у i-й генеральній сукупності, $i \in \{1, 2\}$. Якщо гіпотеза H_0 правильна, то розподіл випадкової величини U наближається до нормального з параметрами 0 і 1.

У формулі (3) параметр p невідомий, тому замінимо його оцінкою, одержаною методом максимальної правдоподібності

$$\overline{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}.$$

Спостережуване значення $u_{cn.}$ розраховується за формулою

$$u_{cn.} = \frac{\dfrac{m_1}{n_1} - \dfrac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\dfrac{\overline{pq}}{n_1} + \dfrac{\overline{pq}}{n_2}}},$$

де $\dfrac{m_1}{n_1}$ – відносна частота настання події у 1-й вибірці; $\dfrac{m_2}{n_2}$ – відносна частота настання події у 2-й вибірці; $\overline{p}$ – середня частота настання події A, $\overline{q} = 1 - \overline{p}$ – середня частота ненастання події A, n_1 – обсяг 1-ої вибірки, n_2 – обсяг 2-ої вибірки.

Критичну область будуємо у залежності від вигляду альтернативної гіпотези, як і раніше.

Приклад 8. Два заводи виготовляють однотипні деталі. Для оцінки їхньої якості зроблено вибірки з продукції цих заводів і одержано такі результати:

Вибірки	Завод N 1	Завод N 2
Обсяг вибірки	n_1	n_2
Число бракованих дателаей	m_1	m_2

При рівні значущості $\alpha = 0,025$ з'ясувати, чи є істотною різниця в якості виготовлюваних цими заводами деталей.

⊲ Для розв'язування задачі необхідно порівняти дві ймовірності біномних розподілів.

Сформулюємо нульову і альтернативну гіпотези.

$H_0 : p_1 = p_2$ – ймовірність того, що деталь, виготовлена на заводі N 1, є бракованою, дорівнює ймовірності того, що деталь, виготовлена на заводі N 2, виявиться бракованою.

$H_1 : p_1 \neq p_2$ – ймовірність того, що деталь, виготовлена на заводі N 1, буде бракованою, не дорівнює ймовірності того, що деталь, виготовлена на заводі N 2, буде бракованою, тобто заводи виготовляють деталі різної якості. Оскільки згідно з умовою задачі не треба перевіряти, на якому заводі якість виготовлюваних деталей вища, розглядаємо двобічну альтернативну гіпотезу.

Як критерій для порівняння двох ймовірностей біномних розподілів використовуватимемо випадкову величину U, яка визначається формулою (3).

Згідно з умовою $m_1 = 20$; $n_1 = 200$; $m_2 = 15$; $n_2 = 300$; $\alpha = 0,025$. Тоді

$$\overline{p} = \frac{20+15}{200+300} = 0,07; \qquad \overline{q} = 1 - \overline{p} = 1 - 0,07 = 0,93;$$

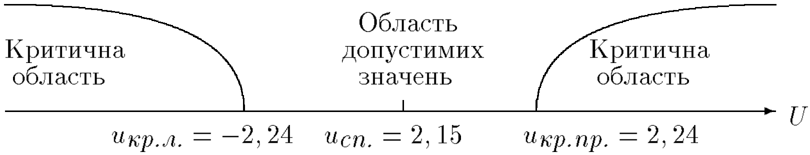
$$u_{сп.} = \frac{\dfrac{20}{200} - \dfrac{15}{300}}{\sqrt{\dfrac{0,07 \cdot 0,93}{200} + \dfrac{0,07 \cdot 0,93}{300}}} = 2,1467.$$

Оскільки альтернативна гіпотеза двобічна, критичне значення $u_{кр.}$ визначаємо з рівності

$$\Phi(u_{кр.}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Згідно з умовою $\alpha = 0,025$, а тому $\Phi(u_{кр.}) = \dfrac{1-0,025}{2} = 0,4875$. З таблиці 2 для функції Φ знаходимо, що $u_{кр.} = 2,24$.

Враховуючи, що альтернативна гіпотеза двобічна, знаходимо дві критичні точки $u_{кр.пр.} = 2,24$; $u_{кр.л.} = -2,24$.



Оскільки $u_{кр.л.} < u_{сп.} < u_{кр.пр.}$, то при заданому рівні значущості немає підстав відхилити нульову гіпотезу. Отже, заводи виготовляють деталі однакової якості. $\triangleright$

4.2. Критерій згоди Пірсона

Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – вибірка обсягу n з генеральної сукупності ξ з невідомою функцією розподілу F_ξ. За результатами вибірки знайдено емпіричну функцію розподілу F_n, яка за своїми властивостями наближається до певної відомої функції розподілу F деякої випадкової величини. Тому природно висунути нульову (основну) гіпотезу $H_0 : F_\xi = F$, тобто $x_1, \ldots, x_n$ є вибіркою з генеральної сукупності з функцією розподілу F. Треба за цією вибіркою або відхилити, або прийняти основну гіпотезу.

Порівняння емпіричної і теоретичної функцій розподілу здійснюється за допомогою певним чином підібраної випадкової величини, яку називають **критерієм згоди.** Є декілька критеріїв згоди: критерій χ^2 (Пірсона), критерій Колмогорова, критерій Романовського та інші. Зупинимось на критерії χ^2.

Раніше було доведено, що емпірична функція розподілу F_n у ймовірнісному розумінні мало відрізняється від теоретичної функції розподілу F_ξ, а саме: $F_n(x)$ *при кожному фіксованому значенні* $x \in \mathbb{R}$ *є спроможною і незсуненою оцінкою* $F_\xi(x)$, незалежно від того, чи справджується гіпотеза H_0 чи ні.

Тому введемо відхилення $d(F_n, F)$ значень емпіричної функції розподілу F_n від відомої теоретичної функції розподілу F так, щоб воно набувало малих значень, коли гіпотеза H_0 справджується і великих – коли не справджується. Відхилення $d(F_n, F)$ можна будувати різними способами.

Відхилення Пірсона будується так: множину значень X генеральної сукупності ділимо на скінченне число $r \geq 2$ попарно непетинних множин X_i, тобто

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i, \quad \text{де} \quad X_i \bigcap X_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

і покладаємо

$$d(F_n, F) = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i} \left(\frac{n_i}{n} - p_i \right)^2, \tag{4}$$

де n – обсяг вибірки, p_i – ймовірність, обчислена за розподілом F того, що значення з вибірки $x_1, \ldots, x_n$ потрапило до множини X_i, n_i – кількість значень з цієї вибірки, що потрапили до X_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$. Тоді $\frac{n_i}{n}$ – частота потрапляння вибіркового значення до множини X_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$.

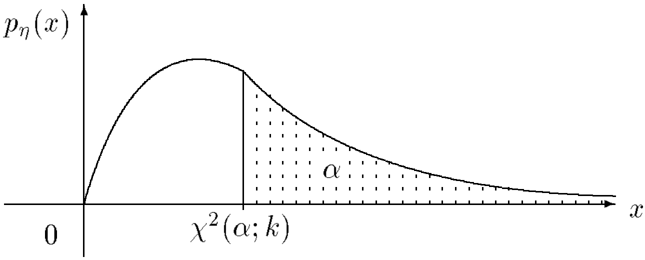
Згідно із законом великих чисел у формі Бернуллі частота є спроможною точковою оцінкою відповідної ймовірності. Крім того, вона є її незсуненою оцінкою. Отже, якщо теоретична функція розподілу F_ξ збігається з гіпотетичною функцією розподілу F, то відхилення $\frac{n_i}{n} - p_i$ мінімальне у порівнянні з відхиленням $\frac{n_i}{n} - \tilde{p}_i$, де $\tilde{p}_i$ – ймовірність, обчислена за будь-яким іншим розподілом $\tilde{F}$, відмінним від розподілу F, того, що значення з вибірки $x_1, \ldots, x_n$ потрапило до множини X_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$. Отже, відхилення $d(F_n, F)$ менше, ніж відхилення $d(F_n, \tilde{F})$. Тому при малому значенні $d(F_n, F)$ гіпотезу H_0 слід прийняти, якщо ж $d(F_n, F)$ набуло великого значення, то слід відхилити.

Межі, що відокремлюють великі значення відхилень $d(F_n, F)$ від малих, установлюються на підставі того факту, що для вибірки $x_1, \ldots, x_n$ з генеральної сукупності з функцією розподілу F_ξ при великих n розподіл випадкового відхилення $d(F_n, F_\xi)$ мало відрізняється від розподілу χ^2 з $r-1$ ступенями свободи.

Випадкова величина η має χ^2-розподіл з k ступенями свободи, якщо її щільність визначається формулою

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}}, & x > 0. \end{cases}$$

Задамо число $\alpha \in (0; 1)$ і верхню критичну точку розподілу Пірсона (χ^2-розподілу) $\chi^2_{кр.} = \chi^2(\alpha, k)$ шукаємо з рівняння $P\{\chi^2 > \chi^2_{кр.}\} = \alpha$, тобто $\int\limits_{\chi^2_{кр.}}^{+\infty} p_\eta(x) dx = \alpha$.



Критичні (верхні) точки розподілу Пірсона (χ^2-розподілу) наведено у таблиці 10.

Отже, нехай $x_1, \ldots, x_n$ –вибірка з генеральної сукупності з функцією розподілу F_ξ, $\chi^2(\alpha, r-1)$ – верхня критична точка χ^2-розподілу з $r-1$ ступенями свободи, $d(F_n, F)$ – відхилення Пірсона емпіричної функції розподілу від гіпотетичної F, побудоване за формулою (4), і основна гіпотеза $H_0 : F_\xi = F$. Якщо $d(F_n, F) >$ $> \chi^2(\alpha, r-1)$, то гіпотеза H_0 відхиляється, у протилежному випадку її слід прийняти. При цьому $P\{d(F_n, F) > \chi^2(\alpha, r-1)\} = = \alpha$, тобто якщо гіпотеза H_0 справджується, то ймовірність її відхилення дорівнює α. Тому α беруть малим. Як і раніше α називатимемо рівнем значущості.

Раніше при висуненні основної гіпотези H_0 ми вважали, що функція розподілу F визначена повністю, а отже, гіпотеза H_0 є простою. Нехай тепер функція F визначена з точністю до параметрів $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_l) \in \Theta$, де Θ – сукупність можливих значень параметрів, і судити про характер параметра θ можна лише за інформацією з вибірки $x_1, \ldots, x_n$. У цьому випадку основна гіпотеза $H_0 : F_\xi = F(\cdot, \theta)$ є складною. Тому спочатку за допомогою методу максимальної правдоподібності знаходимо точкову оцінку $\tilde{\theta}$ параметра θ і далі розглядаємо вже просту гіпотезу $H_0 : F_\xi = F(\cdot, \tilde{\theta})$. Р.Фішер установив [4], що коли гіпотеза H_0 справджується й оцінка $\tilde{\theta}$ знайдена за методом максимальної правдоподібності, то розподіл відхилення

$$d(F_n, F(\cdot, \tilde{\theta})) = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i(\tilde{\theta})} \left(\frac{n_i}{n} - p_i(\tilde{\theta})\right)^2, \tag{5}$$

при $n \to +\infty$ прямує до розподілу χ^2 з $r-l-1$ ступенями свободи, де l – кількість невідомих параметрів, $p_i(\tilde{\theta})$ – ймовірність потрапляння вибіркових значень $x_1, \ldots, x_n$ до множини X_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Тоді, якщо $d(F_n, F(\cdot, \tilde{\theta})) > \chi^2(\alpha, r-l-1)$, то гіпотезу H_0 відхиляємо, у протилежному випадку її приймаємо.

Зауваження. 1) Формули (4) і (5) можна записати відповідно у вигляді

$$\chi^2_{сп.} \equiv d(F_n, F) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}, \tag{6}$$

$$\chi^2_{сп.}(\tilde{\theta}) \equiv d(F_n, F(\cdot, \tilde{\theta})) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(n_i - n_i'(\tilde{\theta})\right)^2}{n_i'(\tilde{\theta})}, \tag{7}$$

де $n_i' = np_i$, $n_i'(\tilde{\theta}) = np_i(\tilde{\theta})$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, – відповідні теоретичні частоти.

2) Критерієм χ^2 можна користуватись, коли n достатньо велике й теоретичні частоти не менші, ніж 5. Якщо ж для деяких індексів $i \in \{1, \ldots, r\}$ теоретичні частоти менші п'яти, то відповідні множини X_i слід об'єднати з сусідніми X_j так, щоб для нового розбиття X_i', $i \in \{1, \ldots, r'\}$, де $r' < r$, теоретичні частоти були не менші, ніж 5. Якщо вибіркових значень мало і цього зробити не можна, то застосовувати критерій χ^2 не рекомендується.

3) Замість знаходження критичної області за таблицею 10 для заданого рівня значущості α і ступенів свободи k можна знаходити за таблицею 6 ймовірність $P\{\chi^2 \geq \chi^2_{cn.}\}$. Якщо $P\{\chi^2 \geq \chi^2{}_{cn.}\} >$ $> \alpha$, то гіпотеза H_0 приймається, а у протилежному випадку – ні.

Приклад 9. У 7 випадках з 10 фірма-конкурент компанії A діяла на ринку так, немобви їй наперед були відомі рішення, які приймала фірма A. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ визначити, чи це випадково, чи у фірмі A працює інформатор фірми-конкурента.

◁ Для того щоб відповісти на поставлене питання, необхідно перевірити статистичну гіпотезу про те, що заданий емпіричний розподіл числа дій фірми-конкурента збігається з дискретним рівномірним теоретичним розподілом.

Якщо кроки, які робить конкурент, випадкові, тобто у фірмі A немає інформатора, то число правильних і неправильних її дій повинно розподілятися порівну, тобто по 5 (10/2), а це є особливістю дискретного рівномірного розподілу.

Сформулюємо нульову і альтернативну гіпотези.

За H_0 візьмемо гіпотезу, що випадкова величина ξ розподілена рівномірно, тобто у компанії A немає інформатора, а за H_1 гіпотезу, що випадкова величина ξ не підпорядковується рівномірному закону. Це означає, що у компанії A працює інформатор її фірми-конкурента і тому розподіл її успішних рішень не є випадковим.

За критерій перевірки статистичної гіпотези H_0 візьмемо випадкову величину χ^2, тобто критерій Пірсона.

Складемо таблицю розподілу емпіричних і теоретичних частот

n_i	7	3
n'_i	5	5

.

Знайдемо

$$\chi^2{}_{cn.} = \frac{(7-5)^2}{5} + \frac{(3-5)^2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Число ступенів свободи $k = r - l - 1 = 2 - 0 - 1 = 1$. Тоді з таблиці 6 знаходимо, що для $k = 1$ і $\chi^2{}_{cn.} = 2$ ймовірність $P(\chi^2 \geq \chi^2{}_{cn.}) =$ $= 0,1574 = \beta$.

Оскільки $\beta = 0,1574 > 0,05 = \alpha$, то гіпотезу H_0 приймаємо.

Цей висновок можна було отримати й по-іншому. Для $\alpha = 0,05$ і $k = 1$ з таблиці 10 знаходимо, що ${\chi^2}_{кр.} = 3,84$. Оскільки ${\chi^2}_{сп.} = 1,6 < 3,84 = {\chi^2}_{кр.}$, то гіпотезу H_0 приймаємо.

Отже, у фірмі A не працює інформатор фірми-конкурента. ▷

Приклад 10. У таблиці наведено покази 500 навмання вибраних механічних годинників, виставлених у вітринах спеціалізованих магазинів

I_i	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$
n_i	41	34	54	39	49	45

I_i	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$	$[10;11)$	$[11;12]$
n_i	41	33	37	41	47	39

,

де $I_i = [i;\, i+1)$ – i–тий проміжок часу, n_i – кількість годинників, покази яких належать проміжку I_i, $i \in \{0, 1, \ldots, 11\}$.

Чи узгоджується з наведеними даними гіпотеза, що покази годинників рівномірно розподілені на відрізку [0; 12]?

◁ Цю таблицю можна розглядати як реалізацію деякої вибірки обсягом $n = 500$ з деякого неперервного на [0; 12] розподілу F_ξ. Розглянемо основну гіпотезу $H_0 : F_\xi$ – функція рівномірного на [0;12) розподілу при альтернативній гіпотезі $H_1 : F_\xi$ – не є функцією рівномірного на [0;12] розподілу. Тоді

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0;12], \\ \dfrac{1}{12}, & x \in [0;12]. \end{cases}$$

Для перевірки гіпотези H_0 скористаємось критерієм згоди χ^2. Зрозуміло, що $X = [0;\, 12)$ і $X_i = I_i$, $i \in \{0, 1, \ldots, 11\}$. Тоді

$$p_i \equiv P\{\xi \in [i;\, i+1)\} = \int\limits_i^{i+1} p_\xi(x)dx = \int\limits_i^{i+1} \frac{1}{12}dx = \frac{1}{12}, \; i \in \{0, 1, \ldots, 11\}.$$

Теоретичні частоти

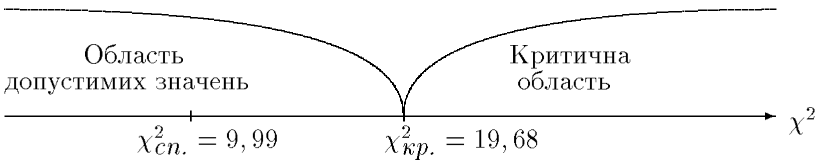
$$n_i^{'} \equiv np_i = 500 \cdot \frac{1}{12} \approx 41,7 > 5, \; i \in \{0, 1, \ldots, 11\}.$$

Тому критерій χ^2 можна застосовувати. Підрахуємо $\chi^2_{сп.}$ за формулою (6)

$$\chi^2_{сп.} \approx \frac{1}{41,7}\left((41 - 41,7)^2 + (34 - 41,7)^2 + \ldots + \right.$$

$$+(47-41,7)^2+(39-41,7)^2)\approx 9,99.$$

Оскільки рівень значущості не вказаний, то виберемо його самі, наприклад, $\alpha = 0,05$. З таблиці 10 знаходимо, що $\chi^2_{\textit{кр.}} = \chi^2(0,05,\ 12-1) = 19,68$.



Отже, гіпотезу H_0 можна прийняти, тобто можна вважати, що покази годинників рівномірно розподілені на відрізку [0; 12]. $\triangleright$

Приклад 11. У лікарні швидкої допомоги фіксувалась кількість викликів спеціалізованих бригад за годину. Спостереження проводились протягом 100 годин і дали такий статистичний розподіл випадкової величини ξ – числа викликів спеціалізованих бригад за годину:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	6	27	26	20	10	5	5	1

.

Визначити закон розподілу випадкової величини ξ і знайти його параметри.

$\triangleleft$ Знайдемо числові характеристики вибірки:

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(0\cdot 6 + 1\cdot 27 + 2\cdot 26 + 3\cdot 20 + 4\cdot 10 + 5\cdot 5 + 6\cdot 5 + 7\cdot 1) =$$

$$= \frac{1}{100}\cdot 241 = 2,41;$$

$$S^2 = \frac{1}{100}\sum_{i=0}^{7} x_i^2 n_i - \overline{x}^2 = \frac{1}{100}(0^2\cdot 6 + 1^2\cdot 27 + 2^2\cdot 26 + 3^2\cdot 20 + 4^2\cdot 10 +$$

$$+5^2\cdot 5 + 6^2\cdot 5 + 7^2\cdot 1) - (2,41)^2 = 8,25 - 5,81 = 2,44.$$

Нагадаємо, що для розподілу Пуассона з параметром $\lambda > 0$ $M\xi = D\xi = \lambda$ і $\tilde{\lambda} = \overline{x}$ є точковою оцінкою параметра λ, отриманої методом максимальної правдоподібності.

Оскільки $\overline{x}$ і S^2 достатньо близькі між собою, то можна висунути гіпотезу про розподіл випадкової величини ξ за законом Пуассона з параметром $\tilde{\lambda}$.

Обчислимо

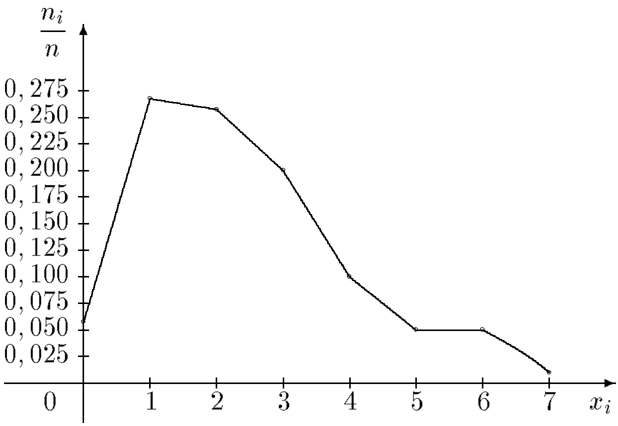
$$p_i(\tilde{\lambda}) \equiv P\{\xi = i\} = \frac{\tilde{\lambda}^i e^{-\tilde{\lambda}}}{i!} = \frac{2,41^i e^{-2,41}}{i!}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, 7\}.$$

Тоді з таблиці 3 одержуємо, що

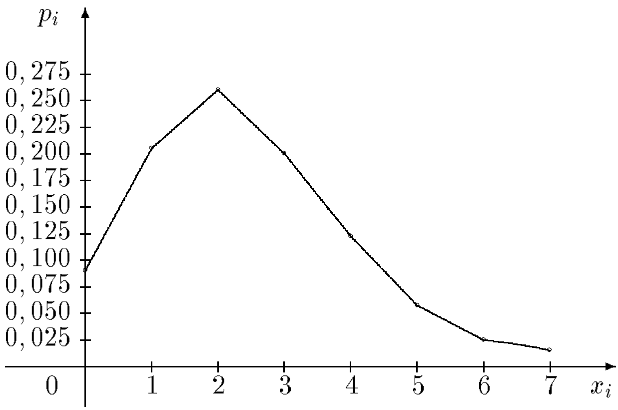
$$p_0(\tilde{\lambda}) \approx 0,090; \quad p_1(\tilde{\lambda}) \approx 0,217; \quad p_2(\tilde{\lambda}) \approx 0,261; \quad p_3(\tilde{\lambda}) \approx 0,210;,$$

$$p_4(\tilde{\lambda}) \approx 0,127; \quad p_5(\tilde{\lambda}) \approx 0,061; \quad p_6(\tilde{\lambda}) \approx 0,025; \quad p_7(\tilde{\lambda}) \approx 0,009.$$

Побудуємо полігон відносних частот вибірки і многокутник розподілу Пуассона з параметром $\tilde{\lambda}$ для заданих значень x_i, $i \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.



,



.

Бачимо, що вони майже подібні. Тому покладаємо $H_0 : F_\xi$ – функція розподілу закону Пуассона з параметром $\lambda = 2,41$, за альтернативну гіпотезу візьмемо $H_1 : F_\xi$ – не є функцією розподілу закону Пуассона з параметром $\lambda = 2,41$.

Для перевірки цієї гіпотези скористаємось критерієм χ^2 Пірсона.

Знайдемо теоретичні частоти $n_i^{'}(\tilde{\lambda}) = np_i(\tilde{\lambda})$, $i \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.

$$n_0^{'}(\tilde{\lambda}) \approx 9,0; \quad n_1^{'}(\tilde{\lambda}) \approx 21,7; \quad n_2^{'}(\tilde{\lambda}) \approx 26,1; \quad n_3^{'}(\tilde{\lambda}) \approx 21,0;$$

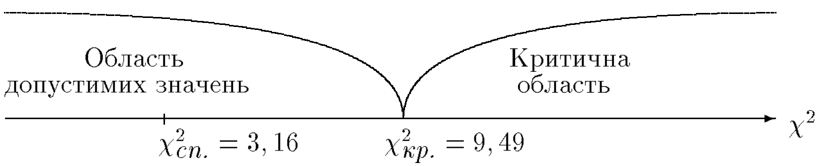
$$n_4^{'}(\tilde{\lambda}) \approx 12,7; \quad n_5^{'}(\tilde{\lambda}) \approx 6,1; \quad n_6^{'}(\tilde{\lambda}) \approx 2,5; \quad n_7^{'}(\tilde{\lambda}) \approx 0,9.$$

Оскільки $n_6^{'} < 5$ і $n_7^{'} < 5$, тому останні три показники об'єднаємо й складемо таку допоміжну таблицю обчислень

i	x_i	n_i	p_i	$n_i' = np_i$	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	0	6	0,090	9,0	1,0000
2	1	27	0,217	21,7	1,2945
3	2	26	0,261	26,1	0,0004
4	3	20	0,210	21,0	0,0476
5	4	10	0,127	12,7	0,5740
6	5;6;7	11	0,095	9,5	0,2468
$\sum$		100	1	100	$3,1633$

.

За рівень значущості візьмемо $\alpha = 0,05$. Число ступенів свободи $k = r - l - 1 = 6 - 1 - 1 = 4$. З таблиці 10 для $\alpha = 0,05$ і $k = 4$ знаходимо, що $\chi^2_{кр.} = 9,49$.



Отже, $\chi^2{}_{сп.} < \chi^2_{кр.}$, а це означає, що немає підстав відхиляти гіпотезу про розподіл випадкової величини ξ за законом Пуассона. ▷

Нехай емпіричний розподіл (вибірку) задано у вигляді рівновіддалених варіант і відповідних їм частот:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_r
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_r

.

Процедура застосування критерію χ^2 для перевірки гіпотези H_0 : генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, складається з таких етапів.

1) Обчислюємо теоретичні (вирівнюючі) частоти за формулами:

$$n_i' = \frac{nh}{S}\varphi(v_i), \quad i \in \{1, \dots, r\},$$

де n – обсяг вибірки, h – різниця між двома сусідніми варіантами, S – вибіркове середнє квадратичне відхилення, $v_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{S}$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $\overline{x}$ – вибіркове середнє, $\varphi(v) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}$, $v \in \mathbb{R}$, – локальна функція Лапласа.

2) Знаходимо величину $\chi^2_{сп.}$ за формулою (6).

3) Обчислюємо число ступенів свободи $k = r - l - 1$, де r – число різних значень x_i, $l = 2$ – число невідомих параметрів розглядуваного закону розподілу.

4) Вибираємо рівень значущості α.

5) Знаходимо з таблиці 6 за k і χ^2 ймовірність $P(\chi^2 > \chi^2_{сп.})$; якщо ця ймовірність менша за взятий рівень значущості, то дані спостережень не узгоджуються з гіпотезою H_0, а якщо більша, то узгоджуються. Або ж знаходимо з таблиці 10 за k і α критичну точку $\chi^2_{кр.}$ і з'ясовуємо, чи потрапило $\chi^2_{сп.}$ у критичну область. Якщо так, то гіпотезу H_0 відхиляємо, у протилежному випадку – приймаємо.

Приклад 12. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з даними вибірки обсягу $n = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

.

$\triangleleft$ Знайдемо вибіркове середнє та вибіркову дисперсію, скориставшись методом умовних варіант.

x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$
5	15	-3	-45	135
7	26	-2	-52	104
9	25	-1	-25	25
11	30	0	0	0
13	26	1	26	26
15	21	2	42	84
17	24	3	72	216
19	20	4	80	320
21	13	5	65	325
$\sum$	200		163	1235

;

$x_{i_0} = 11$; $h = 2$; $\overline{u} = \dfrac{263}{200} = 0,815$; $\overline{x} = 11 + 2 \cdot 0,815 = 12,63$;
$S^2 = 4 \cdot (6,175 - 0,664) = 22,044$; $S = 4,695$.

Враховуючи, що $n = 200$, $h = 2$, $S = 4,695$, обчислимо теоретичні частоти

$$n_i' = \frac{nh}{S}\varphi(v_i) = \frac{200 \cdot 2}{4,695}\varphi(v_i) = 85,2\varphi(v_i), \quad i \in \{1, \ldots, 9\}.$$

Значення $\varphi(v_i)$, $i \in \{1, \ldots, 9\}$, знаходимо з таблиці 1. Складемо для цього розрахункову таблицю

i	x_i	n_i	$v_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{S}$	$\varphi(v_i)$	$n_i' = 85,2\varphi(v_i)$
1	5	15	$-1,62$	0,1074	9,1
2	7	26	$-1,20$	0,1942	16,5
3	9	25	$-0,77$	0,2966	25,3
4	11	30	$-0,35$	0,3752	32,0
5	13	26	0,08	0,3977	33,9
6	15	21	0,51	0,3503	29,8
7	17	24	0,93	0,2589	22,0
8	19	20	1,36	0,1582	13,5
9	21	13	1,78	0,0818	7,0

.

Для обчислення величини (6) розглянемо також відповідну таблицю

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	15	9,1	5,9	34,81	3, 8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	$-0,3$	0,09	0,0
4	30	32,0	$-2,0$	4,0	0,1
5	26	33,9	$-7,9$	62,41	1,8
6	21	29,8	$-8,8$	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,0	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
$\sum$					22, 2

.

Оскільки число ступенів свободи $k = r-3 = 9-3 = 6$, то за таблицею 6 при $k = 6$ і $\chi^2_{cn.} = 22$ знаходимо ймовірність $P(\chi^2 \geq \chi^2_{cn.}) = 0,0012$.

Знайдена ймовірність менша за рівень значущості $\alpha = 0,05$, а тому гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності ξ не узгоджується з даними вибірки і її треба відхилити. $\triangleright$

Нехай емпіричний розподіл задано у вигляді інтервального статистичного ряду

I_i	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$\ldots$	$[x_r; x_{r+1}]$
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_r

.

Процедура перевірки, чи узгоджуються дані емпіричного розподілу з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності ξ, складається з таких етапів.

1) Обчислюємо за методом умовних варіант вибіркове середнє $\overline{x}$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення S, причому за варіанти беремо відповідно середини проміжків

$$z_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i \in \{1, \ldots, r\}.$$

2) Нормуємо випадкову величину ξ, тобто переходимо до випадкової величини $\eta = \dfrac{\xi - \overline{x}}{S}$, причому за найменше значення η беремо $-\infty$, а за найбільше – $+\infty$.

3) Обчислюємо теоретичні ймовірності попадання величини η в проміжок $[y_i; y_{i+1})$:

$$p_i = \Phi(y_{i+1}) - \Phi(y_i),$$

де Φ – функція Лапласа, $i \in \{1, \dots, r\}$.

4) Знаходимо величину $\chi^2_{cn.}$ за формулою (6) та обчислюємо число ступенів свободи $k = r - 3$, де r – число проміжків вибірки.

5) Вибираємо рівень значущості α.

6) За даними k і $\chi^2_{cn.}$ знаходимо з таблиці 6 ймовірність $P(\chi^2 \geq \chi^2_{cn.})$, а далі чинимо так, як описано раніше у випадку статистичного ряду з рівновіддаленими варіантами.

Приклад 13. Використовуючи критерій Пірсона, з рівнем значущості $\alpha = 0,04$ з'ясувати, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності за даними вибірки обсягу $n = 100$.

I_i	$[3;8)$	$[8;13)$	$[13;18)$	$[18;23)$	$[23;28)$	$[28;33)$	$[33;88]$
n_i	6	8	15	40	16	8	7

.

◁ Знайдемо вибіркове середнє і вибіркове середнє квадратичне відхилення методом умовних варіант. З цією метою перейдемо від інтервального розподілу до розподілу рівновіддалених варіант, взявши за варіанти z_i середнє арифметичне кінців проміжку $z_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $i \in \{1, \dots, 7\}$. У результаті одержимо розподіл:

z_i	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,5
n_i	6	8	15	40	16	8	7

.

Провівши обчислення за методом умовних варіант, знайдемо, що

$$\overline{x} = 20,7; \quad S = 7,28.$$

Обчислимо теоретичні ймовірності p_i попадання нормально розподіленої випадкової величини ξ в інтервал $(x_i; x_{i+1})$:

$$P\{x_i < \xi < x_{i+1}\} = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}}{S}\right) = \Phi(y_{i+1}) - \Phi(y_i),$$

де Φ – функція Лапласа, $y_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{S}$, $i \in \{1, \dots, 7\}$.

Зауважимо, що за найменше значення y_1 беремо $-\infty$, а за найбільше – $+\infty$. Наприклад,

$$p_1 = P\{x_1 < \xi < x_2\} = \Phi(y_2) - \Phi(y_1) =$$
$$= \Phi\left(\frac{x_2 - \overline{x}}{S}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{8 - 20,7}{7,28}\right) + \Phi(+\infty) =$$
$$= \Phi(-1,74) + 0,5 = 0,5 - \Phi(1,74) = 0,5 - 0,4591 = 0,0409.$$

Аналогічно обчислюємо інші теоретичні ймовірності. Результати обчислень подамо у вигляді таблиці.

i	y_i	y_{i+1}	$\Phi(y_i)$	$\Phi(y_{i+1})$	$p_i = \Phi(y_{i+1}) - \Phi(y_i)$
1	$-\infty$	$-1,74$	0,5	$-0,4591$	0,0409
2	$-1,74$	$-1,06$	$-0,4591$	$-0,3554$	0,1037
3	$-1,06$	$-0,37$	$-0,3554$	$-0,1443$	0,2111
4	$-0,37$	0,32	$-0,1443$	0,1255	0,2698
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132
7	1,69	$+\infty$	0,4545	0,5	0,0455

.

Для обчислення теоретичних частот складемо допоміжну таблицю

i	p_i	n_i	$n'_i = np_i$
1	0,0409	6	4,09
2	0,1037	8	10,37
3	0,2111	15	21,11
4	0,2698	40	26,98
5	0,2158	16	21,58
6	0,1132	8	11,32
7	0,0455	7	4,55

.

Зазначимо, що $n'_7 < 5$, тому об'єднаємо два останні рядки і розглянемо відповідну розрахункову таблицю для обчислення величини (6)

i	p_i	n_i	$n'_i = np_i$	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	0,0409	6	4,09	1,91	3,648	0,89
2	0,1037	8	10,37	$-2,37$	5,617	0,54
3	0,2111	15	21,11	$-6,11$	37,332	1,77
4	0,2698	40	26,98	13,02	169,52	6,28
5	0,2158	16	21,58	$-5,58$	31,136	1,44
6;7	0,1587	15	15,87	0,87	0,7569	0,05
$\sum$	1	100				$10,97$

.

Обчислимо число ступенів свободи $k = r - 3 = 6 - 3 = 3$.

З таблиці 6 знаходимо для $k = 3$ і $\chi^2_{cn.} = 10,97$, що $\beta = P(\chi^2 \geq \geq \chi^2_{cn.}) = 0,0117$.

Оскільки $\beta = 0,117 < 0,04 = \alpha$, то гіпотеза H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності не узгоджується з даними вибірки. ▷

Вправи

1. Підприємство виготовляє однакові деталі двома способами. Першим способом виготовлено 10 деталей, де витрати сировини були такими: 1,4; 1,6; 1,2; 1,5; 1,4; 1,6; 1,5; 1,8; 1,1; 1,4. Другим способом виготовлено 6 деталей з витратами 1,8; 1,7; 1,9; 1,3; 1,6; 1,5. Припускаючи, що дисперсії витрат сировини однакові, при рівні значущості $\alpha = 0,02$ перевірити гіпотезу H_0: $a_1 = a_2$ при альтернативній гіпотезі H_1: $a_1 \neq a_2$.

2. За двома незалежними вибірками обсягів $n_1 = 9$ та $n_2 = 14$ з нормальних генеральних сукупностей знайдено незсунені вибіркові дисперсії $S^2_\xi = 12,5$ і $S^2_\eta = 11,2$. Перевірити нульову гіпотезу H_0: $\sigma^2_\xi = \sigma^2_\eta$ при альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2_\xi \neq \sigma^2_\eta$, якщо рівень значущості $\alpha = 0,02$.

3. Генеральна сукупність розподілена за нормальним законом з невідомою дисперсією. При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $a = a_0 = 7$ для альтернативної гіпотези H_1: $a \neq 7$ за результатами вибірки

x_i	3,3	3,9	4,5	5,1	5,7	6,3	6,9
n_i	2	8	35	43	22	15	5

.

4. Кондитерська фабрика, що випускає у продаж новий сорт шоколаду, провела опитування про смакові уподобання серед 400 покупців фірмового магазину і вияснила, що 220 з них надали перевагу новому сорту. При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу, що принаймні 52% споживачів нададуть перевагу новому сорту шоколаду.

5. У 2001 році річний обіг на 4 біржах у регіоні A становив $12 \cdot 10^4$ гр.од., а в регіоні B річний обіг на 5 біржах – $125 \cdot 10^3$ гр.од. Незсунена вибіркова дисперсія обігу в регіоні A дорівнює $3 \cdot 10^4$ (гр.од.)^2, а в регіоні B – $2 \cdot 10^4$ (гр.од.)^2. Чи можна при рівні значущості $\alpha = 0,05$ стверджувати, що середній обіг на біржах у регіоні A більший, ніж у регіоні B ?

6. Головний бухгалтер великої корпорації провів обстеження за минулорічними даними з метою з'ясування частки некоректних рахунків. З

2000 вибраних рахунків у 25 виявились некоректні проводки. Для зменшення частки помилок він запропонував нову систему. Через рік перевірив як працює нова система і вибрав для цього випадковим чином 3000 рахунків компанії. Серед них виявилося 30 некоректних. Чи можна стверджувати при рівні значущості $\alpha = 0,05$, що нова система дозволила зменшити частку некоректних проводок у рахунках?

7. Виробник деякої продукції стверджує, що 95% продукції, яку він випускає, не має дефектів. Випадкова вибірка 100 виробів показала, що 92 з них стандартні. Перевірити правильність твердження виробника при рівні значущості $\alpha = 0,05$.

8. За технічними умовами середня міцність на розрив тросу становить 2000 кг. У результаті випробування 20 частин тросу було встановлено, що середня міцність на розрив дорівнює 1955 кг при середній похибці 25 кг. Чи задовольняє при рівні значущості 0,05 вказаний зразок тросу технічні умови?

9. Партія виробів приймається, якщо середнє квадратичне відхилення підконтрольного розміру не перевищує 0,48 мм. Незсунене вибіркове середнє квадратичне відхилення, знайдене за вибіркою обсягом $n = 121$, дорівнює 0,55. Чи можна прийняти партію при рівні значущості 0,01?

10. Деяка партія деталей містить 15% браку. Для перевірки з партії випадковим чином відібрано 100 деталей, серед яких виявилось 10 бракованих. Вважаючи, що число бракованих деталей у партії має біномний розподіл, і використовуючи двосторонній критерій при рівні значущості $\alpha = 0,05$, перевірити гіпотезу про те, що в партії міститься 15% бракованих деталей.

11. Кількість бракованих деталей в партії не повинна перевищувати 5%. За результатами контролю 100 деталей виявлено 6 бракованих. Чи можна вважати, що процент браку перевищує допустимий при рівні значущості $\alpha = 0,01$?

12. Згідно з вибірковим обстеженням двох партій одержано такі результати:

N партії	Число виробів		Сума
	Браковані	Небраковані	
1	8	92	100
2	13	287	300
Сума	21	379	400

.

Чи можна вважати, що доля браку в обох партіях одна й та сама, якщо рівень значущості $\alpha = 0,05$?

13. Розглядаючи розподіл розміру чоловічого взуття, яке було продане магазином за зміну, як вибірку з генеральної сукупності, перевірити при рівні значущості 0,01 гіпотезу про те, що ця генеральна сукупність має нормальний розподіл. Дані про кількість проданого взуття наведено у таблиці

Розмір взуття	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар	1	2	3	5	10	13	9	6	1

.

14. Використовуючи критерій Пірсона з рівнем значущості $\alpha = 0,025$, перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності ξ, якщо відомі емпіричні n_i та теоретичні $n_i^{'}$ частоти:

n_i	5	10	20	25	14	3
$n_i^{'}$	6	14	28	18	8	3

;

15. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості $\alpha = 0,05$, встановити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності за даними вибірки:

I_i	$[6;16)$	$[16;26)$	$[26;36)$	$[36;46)$
n_i	8	7	16	35

,

I_i	$[46; 56)$	$[56; 66)$	$[66; 76)$	$[76; 86]$
n_i	15	8	6	5

;

Розмір взуття	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар	1	2	3	5	10	13	9	6	1

.

16. При обстеженні 757 екземплярів певної апаратури впродовж 10000 год. одержано такий статистичний ряд відмов:

$x_i = i$	0	1	2	3	4	5	≥ 6
n_i	427	235	72	21	1	1	0

.

При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити гіпотезу про те, що число відмов має розподіл Пуассона

$$p_i = P\{x_i = i\} = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

17. За спостереженнями, наведеними в таблиці

I_i	$[-4;0)$	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$
n_i	20	40	30	10

,

при рівні значущості $\alpha = 0,05$ за допомогою критерію χ^2 перевірити гіпотезу про те, що генеральна сукупність має нормальний розподіл.

Відповіді

1. $t_{кр.} = 2,58$, $t_{сп.} = -1,58$; H_0 приймається. **2.** $f_{сп.} = 1,12$; $f_{кр.}(0,01;8;13) = 4,3$; H_0 приймається. **3.** $u_{сп.} = -27,53$; $u_{кр.} = 2,58$; H_0 відхиляється. **4.** $u_{сп.} = 1,2$; $u_{кр.} = 2,33$, H_0 приймається. **5.** Ні. **6.** Ні. **7.** Твердження виробника можна вважати правильним. **8.** Ні. **9.** При рівні значущості 0,01 партію недоцільно приймати. **10.** $u_{сп.} = -1,4$; $u_{кр.} = 1,96$, H_0 приймається. **11.** Ні. **12.** $u_{сп.} = 1,48$; $u_{кр.} = 1,96$, H_0 приймається. **13.** Приймається. **14.** Не узгоджується. **15.** Не узгоджується. **16.** $\lambda = \overline{x} \approx 0,6$; $p_i = \dfrac{(0,6)^i}{i!}e^{-0,6}$, $i \in \mathbb{Z}_+$; $\chi^2_{сп.} = 3,316$; $\chi^2_{кр.} = 9,2$; гіпотеза приймається. **17.** $\overline{x} = 1,4$; $S_1^2 = 4,48$; $\chi^2_{сп.} = 1,66$; $\chi^2_{кр.} = 3,8$; гіпотеза приймається.

5. Кореляційний та регресійний аналізи

Розрізняють два типи взаємозв'язків між різними явищами та їхніми ознаками: **функціональний** або жорстко детермінований і **статистичний** або **стохастично детермінований**.

Функціональна залежність між змінними x і y означає, що кожному можливому значенню x поставлено у відповідність за певним правилом (законом) єдине значення y.

Якщо ми маємо випадкові величини, то строго функціональна залежність реалізується рідко, оскільки кожна з величин окремо або й обидві зазнають впливу випадкових факторів, причому серед них можуть бути й такі, що впливають на обидві досліджувані величини.

Наприклад, відомо, що врожайність залежить від кількості внесених добрив, але це не визначає однозначно врожайність. На неї впливає ще багато інших факторів, які й позбавляють зв'язок між розглядуваними величинами характеру функціональної залежності. Зв'язки такого типу називають **статистичними**.

Отже, залежність між двома змінними величинами називається **статистичною**, якщо кожному значенню однієї з них відповідає розподіл значень другої, але число цих значень не є сталим, а самі значення не відображають певної закономірності.

Розглядаючи сукупність значень змінної y як розподіл, що відповідає фіксованому значенню x, дамо чіткіше означення статистичного зв'язку.

Змінна величина y зв'язана з x **статистично**, якщо кожному значенню x відповідає розподіл y, який змінюється разом із змінною x, причому змінюються як варіанти, так і їхні частоти.

Часто доводиться вивчати залежність між однією випадковою величиною й умовним середнім значенням другої випадкової величини, яка називається **кореляційною**. Кореляційну залежність характеризують функцією регресії. Відомо, що функція

$$f_\xi(y) = M(\xi/y)$$

називається **функцією регресії ξ на η**, а функція

$$f_\eta(x) = M(\eta/x)$$

функцією регресії η на ξ. Згідно з формулою повного математичного сподівання

$$Mf_\xi(\eta) = M\xi; \quad Mf_\eta(\xi) = M\eta.$$

Функція регресії має важливе значення при статистичному аналізі залежностей між змінними і може бути використана для прогнозування значення однієї з випадкових величин, якщо відоме значення другої випадкової величини. Точність прогнозу визначається дисперсією умовного розподілу

$$D(\xi/y) = M(\xi^2/y) - M^2(\xi/y),$$

$$D(\eta/x) = M(\eta^2/x) - M^2(\eta/x),$$

тобто дисперсія обчислюється звичайним способом, тільки замість безумовного закону розподілу випадкової величини береться її умовний закон розподілу.

У статистичних дослідженнях замість умовних математичних сподівань використовують умовні середні значення.

Означення 1. Умовним середнім значенням $\overline{y}_x$ називають середнє арифметичне значень випадкової величини η, які відповідають значенню випадкової величини ξ, що дорівнює x.

Означення 2. Умовним середнім значенням $\overline{x}_y$ називають середнє арифметичне значень випадкової величини ξ, які відповідають значенню випадкової величини η, що дорівнює y.

Означення 3. Кореляційною залежністю η від ξ називають функціональну залежність умовного середнього $\overline{y}_x$ від x:

$$\overline{y}_x = f(x). \tag{1}$$

Рівняння (1) називають **рівнянням регресії η на ξ**, функцію f називають **регресією** η на ξ, а її графік – **кривою (лінією) регресії** η на ξ.

Аналогічно вводиться поняття кореляційної залежності ξ від η:

$$\overline{x}_y = g(y). \tag{2}$$

Рівняння (2) називають **рівнянням регресії** ξ на η, функцію g називають **регресією** ξ на η, а її графік – **кривою (лінією) регресії** ξ на η.

5.1. Лінійна кореляційна залежність і прямі регресії

Нехай ξ і η – випадкові величини, зв'язок між якими треба вивчити. У результаті n випробувань дістали n пар значень цих величин $(x_1; y_1)$, ..., $(x_n; y_n)$. Вибіркові середні та дисперсії позначимо відповідно $\overline{x}$, $\overline{y}$, S_x^2, S_y^2.

Часто для кількісної характеристики залежності між випадковими величинами використовують коефіцієнт кореляції

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M\xi M\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$

Відомо, що у випадку незалежних випадкових величин $\rho(\xi, \eta) = 0$, а коли між ξ і η існує лінійний зв'язок, то $|\rho(\xi, \eta)| = 1$. Отже, коли $|\rho| \approx 1$, то можна вважати, що між ξ і η існує залежність, близька до лінійної.

За точкову оцінку коефіцієнта кореляції $\rho = \rho(\xi, \eta)$ візьмемо вибірковий коефіцієнт кореляції r – коефіцієнт кореляції між розподілами вибірок x_1, ..., x_n і y_1, ..., y_n: при цьому кожній парі $(x_i; y_i)$, як і при побудові одновимірної функції розподілу вибірки, приписуємо ймовірність $\dfrac{1}{n}$. Згідно з означенням вибіркового коефіцієнта кореляції

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{S_x S_y} \qquad \text{або} \qquad r = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\ \overline{y}}{S_x S_y}, \tag{3}$$

де $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $S_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2$, $S_y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\overline{y}^2$.

Раніше було доведено, що пряма регресії η на ξ має вигляд

$$y-M\eta=\rho(\xi,\eta)\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x-M\xi),$$

а ξ на η –

$$x-M\xi=\rho(\xi,\eta)\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y-M\eta).$$

Оскільки за даними вибірок знайдено точкові оцінки $M\xi$, $M\eta$, σ_ξ, σ_η і $\rho(\xi,\eta)$, якими є відповідно $\overline{x}$, $\overline{y}$, S_x, S_y і r, то **рівняння вибіркової прямої регресії η на ξ** має вигляд

$$\overline{y}_x-\overline{y}=r\frac{S_y}{S_x}(x-\overline{x}),$$

а **вибіркової прямої регресії ξ на η** –

$$\overline{x}_y-\overline{x}=r\frac{S_x}{S_y}(y-\overline{y}).$$

Доведено, що вибірковий коефіцієнт кореляції, а отже, і вибіркові коефіцієнти регресії $r\frac{S_y}{S_x}$ і $r\frac{S_x}{S_y}$ є спроможними оцінками відповідних теоретичних параметрів. Звідси випливає, що вибірковий коефіцієнт кореляції характеризує силу лінійного кореляційного зв'язку між кількісними ознаками у вибірці, а саме, чим ближче $|r|$ до 1, тим зв'язок сильніший; чим ближче $|r|$ до 0, тим зв'язок слабкіший.

Рівняння прямих регресії доцільно знаходити лише в тому випадку, коли точки $(x_i;y_i)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, групуються навколо деякої прямої (це можна перевірити, наприклад, побудувавши ці точки в декартовій системі координат).

Приклад 1. Провести розрахунок кореляційних характеристик між зростом і вагою навмання взятого студента за даними таких спостережень

Зріст	165	171	182	165	183	180	183
Вага	72,9	48,4	66,3	64,1	62,7	76,0	72,8

Зріст	166	173	184	168	164	170	174	172
Вага	50,6	52,3	68,6	52,6	72,8	61,6	66,8	56,6

$\triangleleft$ Обчислимо вибіркові середні і вибіркові дисперсії:

$$\overline{x} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i = \frac{2620}{15} = 174,7, \qquad \overline{y} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} y_i = \frac{945}{15} = 63.$$

Для знаходження S_x і S_y обчисляємо відхилення від середніх, одноіменні відхилення піднесемо до квадрата, різнойменні – перемножимо. Отже,

$$\begin{array}{llll}
x_1 - \overline{x} = -9,7; & x_8 - \overline{x} = -8,7; & y_1 - \overline{y} = 9,9; & y_8 - \overline{y} = -12,4; \\
x_2 - \overline{x} = -3,7; & x_9 - \overline{x} = -1,7; & y_2 - \overline{y} = -14,6; & y_9 - \overline{y} = -10,7; \\
x_3 - \overline{x} = 7,3; & x_{10} - \overline{x} = 9,3; & y_3 - \overline{y} = 3,6; & y_{10} - \overline{y} = 5,6; \\
x_4 - \overline{x} = -9,7; & x_{11} - \overline{x} = -6,7; & y_4 - \overline{y} = 1,1; & y_{11} - \overline{y} = -10,4; \\
x_5 - \overline{x} = 8,3; & x_{12} - \overline{x} = -10,7; & y_5 - \overline{y} = -0,3; & y_{12} - \overline{y} = 9,8; \\
x_6 - \overline{x} = 5,3; & x_{13} - \overline{x} = -4,7; & y_6 - \overline{y} = 13; & y_{13} - \overline{y} = -1,4; \\
x_7 - \overline{x} = 8,3; & x_{14} - \overline{x} = -0,7; & y_7 - \overline{y} = 9,8; & y_{14} - \overline{y} = 3,8; \\
 & x_{15} - \overline{x} = -2,7; & & y_{15} - \overline{y} = -6,5,
\end{array}$$

а тому $\displaystyle\sum_{i=1}^{15}(x_i - \overline{x})^2 = 747,35; \quad \sum_{i=1}^{15}(y_i - \overline{y})^2 = 1153;$

$$S_x^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{747,35}{15} = 49,82; \quad S_x = \sqrt{49,82} = 7,06;$$

$$S_y^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{1153}{15} = 76,87; \quad S_y = \sqrt{76,87} = 8,77;$$

$$\overline{xy} - \overline{x}\;\overline{y} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{482}{15} = 32,13;$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\;\overline{y}}{S_x^2 S_y^2} = \frac{32,13}{7,06 \cdot 8,77} = 0,519.$$

Тоді

$$\overline{y}_x - 63 = 0,519 \cdot \frac{8,77}{7,06}(x - 174,7),$$

тобто рівняння прямої регресії η на ξ має вигляд:

$$\overline{y}_x = 0,645x - 49,7.$$

Аналогічно знаходимо рівняння прямої регресії ξ на η:

$$\overline{x}_y = 0,418y + 148,4. \ \triangleright$$

Якщо число випробувань n дуже велике, то для спрощення обчислень дані згрупуємо і застосуємо метод умовних варіант.

Нехай дані вже згруповано і виявилось, що пара чисел $(x_i; y_j)$ спостерігалась n_{ij}, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$, разів. Запишемо ці дані у вигляді кореляційної таблиці

$\eta \backslash \xi$	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	Σ
y_1	n_{11}	n_{21}	$\ldots$	n_{k1}	n_1
y_2	n_{12}	n_{22}	$\ldots$	n_{k2}	n_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_l	n_{1l}	n_{2l}	$\ldots$	n_{kl}	n_l
Σ	m_1	m_2	$\ldots$	m_k	n

.

Табл. 1.

У цій таблиці $m_i = \sum\limits_{j=1}^{l} n_{ij}$, $n_j = \sum\limits_{i=1}^{k} n_{ij}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = \sum\limits_{j=1}^{l} n_j = n$, n – число всіх спостережень. Формула (3) набуває вигляду

$$r = \frac{\sum\limits_{i,j} n_{ij} x_i y_j - n\overline{x}\ \overline{y}}{n S_x S_y}. \tag{4}$$

Нехай $x_{i+1} - x_i = h_1$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $y_{j+1} - y_j = h_2$, $j \in \{1, \ldots, l-1\}$ – кроки таблиці. Позначимо через i_0, j_0 – номери варіант, що лежать приблизно посередині варіаційних рядів, і введемо умовні варіанти $u_i = i - i_0$, $v_j = j - j_0$. Очевидно, що

$$x_i = x_{i_0} + u_i h_1, \quad i \in \{1, \ldots, k\}, \quad y_j = y_{i_0} + v_j h_2, \quad j \in \{1, \ldots, l\}.$$

Тоді формулу (4) перепишемо так

$$r = \frac{\sum\limits_{i,j} n_{ij} u_i v_j - n\overline{u}\,\overline{v}}{nS_x S_y}, \tag{5}$$

де

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i, \quad \overline{v} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} n_j v_j,$$

$$S_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^2 - \overline{u}^2, S_v^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} n_j v_j^2 - \overline{v}^2,$$

$$\overline{x} = x_{i_0} + \overline{u}h_1, \quad \overline{y} = y_{j_0} + \overline{v}h_2, \quad S_x^2 = h_1^2 S_u^2, \quad S_y^2 = h_2^2 S_v^2.$$

Приклад 2. У кореляційній таблиці наведені вибіркові значення випадкових величин ξ і η

ξ / η	10	12	14	16	18	20
10	9	4	1			
30	1	10	9	3		
50		2	6	14	6	
70			1	10	18	6

.

Знайти рівняння прямих регресій η на ξ та ξ на η.

$\triangleleft$ Складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах, взявши за умовні нулі $x_{i_0} = 16$ і $y_{j_0} = 50$; $i_0 = 4$, $j_0 = 3$.

u_i / v_j	-3	-2	-1	0	1	2	Σ
-2	9	4	1				14
-1	1	10	9	3			23
0		2	6	14	6		28
1			1	10	18	6	35
Σ	10	16	17	27	24	6	100

.

Знайдемо $\overline{u}$ і $\overline{v}$:

$$\overline{u} = \frac{(-3)\cdot 10 + (-2)\cdot 16 + (-1)\cdot 17 + 1\cdot 24 + 2\cdot 6}{100} = -0,43;$$

$$\overline{v} = \frac{(-2) \cdot 14 + (-1) \cdot 23 + 1 \cdot 35}{100} = \frac{-51 + 35}{100} = -0,16.$$

Обчислимо допоміжні величини $\overline{u^2}$ і $\overline{v^2}$:

$$\overline{u^2} = \frac{9 \cdot 10 + 4 \cdot 16 + 1 \cdot 17 + 1 \cdot 24 + 4 \cdot 6}{100} = \frac{219}{100} = 2,19;$$

$$\overline{v^2} = \frac{4 \cdot 14 + 1 \cdot 23 + 1 \cdot 35}{100} = \frac{114}{100} = 1,14.$$

Тоді

$$S_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} = \sqrt{2,19 - (-0,48)^2} = 1,42;$$

$$S_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2} = \sqrt{1,14 - (-0,16)^2} = 1,056.$$

Знайдемо $\sum\limits_{i,j} n_{ij} u_i v_j$:

$$\sum_{i,j} n_{ij} u_i v_j = (-3)(-2) \cdot 9 + (-2)(-2) \cdot 4 + +(-1)(-2) \cdot 1+$$

$$+(-3)(-1) \cdot 1 + (-2)(-1) \cdot 10 + (-1)(-1) \cdot 9 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 18+$$

$$+2 \cdot 1 \cdot 6 = 54 + 16 + 2 + 3 + 20 + 9 - 1 + 18 + 12 = 133.$$

Тоді

$$r = \frac{133 - 100 \cdot (-0,16)(-0,43)}{100 \cdot 1,056 \cdot 1,42} = \frac{126,12}{149,952} = 0,84;$$

$$\overline{x} = x_{i_0} + \overline{u} \cdot h_1 = 16 + 2(-0,43) = 16 - 0,86 = 15,14;$$

$$\overline{y} = y_{j_0} + \overline{v} \cdot h_2 = 50 + 20(-0,16) = 50 - 3,2 = 46,8;$$

$$S_x = h_1 S_u = 20 \cdot 2 \cdot 1,42 = 2,84, \quad S_y = h_2 S_v = 2 \cdot 1,056 = 21,12.$$

Отже, шукане рівняння прямої регресії η на ξ має вигляд

$$\overline{y}_x - 46,8 = 0,84 \cdot \frac{21,12}{2,84}(x - 15,14) \quad \text{або} \quad \overline{y}_x = 6,25x - 47,78.$$

Аналогічно знаходимо рівняння прямої регресії ξ на η:

$$\overline{x}_y - 15,14 = 0,84 \cdot \frac{2,84}{21,12}(y - 46,8) \quad \text{або} \quad \overline{x}_y = 0,113y + 9,85. \ \triangleright$$

5.2. Нелінійна кореляція

У попередньому пункті ми розглядали лінійну кореляцію, що відповідало тому випадку, коли обидві функції регресії f і g є лінійними функціями своїх аргументів, а лінії регресії – прямими.

Якщо ж принаймні одна з функцій регресії f або g нелінійна, то кореляція називається **нелінійною**. Найчастіше зустрічаються випадки параболічної $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$, гіперболічної $\overline{y}_x = \dfrac{a}{x} + b$ або показникової $\overline{y}_x = a^{bx}$ кореляцій.

Нехай дані спостережень згруповано і ми маємо таблицю 1 з попереднього пункту. За даними цієї таблиці складемо таблицю розподілу середніх величин $\overline{y}_{x_i}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, та $\overline{x}_{y_j}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$,

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
$\overline{y}_{x_i}$	$\overline{y}_{x_1}$	$\overline{y}_{x_2}$	$\ldots$	$\overline{y}_{x_k}$
Частота	m_1	m_2	$\ldots$	m_k

,

Табл. 2

y_j	y_1	y_2	$\ldots$	y_l
$\overline{x}_{y_j}$	$\overline{x}_{y_1}$	$\overline{x}_{y_2}$	$\ldots$	$\overline{x}_{y_l}$
Частота	n_1	n_2	$\ldots$	n_l

,

Табл. 3

де

$$\overline{y}_{x_i} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij}, \quad i \in \{1, \ldots, k\};$$

$$\overline{x}_{y_j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{k} x_i n_{ij}, \quad j \in \{1, \ldots, l\}.$$

Для характеристики сили нелінійного кореляційного зв'язку між випадковими величинами ξ і η використовують вибіркові кореляційні відношення $\rho_{y/x}$ і $\rho_{x/y}$, де

$$\rho_{y/x}=\frac{S_{\overline{y}_x}}{S_y}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(\overline{y}_{x_i}-\overline{y})^2 m_i}{\sum\limits_{j=1}^{l}(y_j-\overline{y})^2 n_j}}\,;\ \rho_{x/y}=\frac{S_{\overline{x}_y}}{S_x}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1}^{l}(\overline{x}_{y_j}-\overline{x})^2 n_j}{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2 m_i}}.$$

Оскільки $\rho_{y/x}$ і $\rho_{x/y}$ мають однакові властивості, то наведемо їх, наприклад, для $\rho_{y/x}$.

Властивість 1. $0 \le \rho_{y/x} \le 1$.

Властивість 2. *Якщо $\rho_{y/x}=0$, то кореляційної залежності між випадковими величинами ξ і η немає.*

Властивість 3. *$\rho_{y/x}=1$ тоді і тільки тоді, коли випадкові величини ξ і η зв'язані функціональною залежністю.*

Властивість 4. *$\rho_{y/x} \ge |r|$, де r – вибірковий коефіцієнт кореляції між випадковими величинами ξ і η.*

Властивість 5. *Якщо $\rho_{y/x}=|r|$, то точки $(x_i;\overline{y}_{x_i})$, $i \in \{1,\ldots,k\}$, лежать на прямій регресії, знайденій методом найменших квадратів, тобто маємо лінійну кореляційну залежність.*

Зауваження. Вибіркові відношення кореляції є мірою залежності між випадковими величинами. Проте вони не вказують на форму зв'язку між вибірковими даними, тобто за ними не можна судити, на скільки близько розташовані вибіркові дані до кривої певного вигляду (прямої, параболи, гіперболи, тощо).

Розглянемо спочатку випадок, коли графік розсіювання значень випадкових величин ξ і η близький до параболи

$$\overline{y}_x = ax^2+bx+c, \tag{6}$$

де a, b, c – невідомі параметри. Задача полягає в тому, щоб за результатами вибірки оцінити ці параметри. Для цього скористаємося методом найменших квадратів. При цьому істинним вважають значення η, яке для відповідного значення $\xi = x_i$ обчислюється за формулою $Y_i = ax_i^2 + bx_i + c$. Треба дослідити на мінімум функцію

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_{x_i})^2.$$

Прирівнявши до нуля частинні похідні від функції F по a, b, c, одержимо систему лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^2 \overline{y}_{x_i}, \\ a\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i \overline{y}_{x_i}, \\ a\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i + nc = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \overline{y}_{x_i}. \end{cases} \tag{7}$$

Розв'язавши цю систему будь-яким методом, знайдемо шукані значення параметрів вибіркового рівняння регресії

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c.$$

Приклад 3. Знайти вибіркове рівняння параболічної регресії $y = ax^2 + bx + c$ випадкової величини η на ξ за результатами вибірки

ξ	0	2	4	6	8	10
η	5	-1	0,5	1,5	4,5	8,5

.

◁ Для обчислення коефіцієнтів a, b, c складемо таблицю

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0	0	0	0	5	0	0
2	2	4	8	16	-1	-2	-4
3	4	16	64	256	0,5	2	8
4	6	36	216	1296	1,5	9	54
5	8	64	512	4096	4,5	36	288
6	10	100	1000	10000	8,5	85	850
$\sum$	30	220	1800	15664	19	130	1196

.

В останньому рядку таблиці записано суми значень у відповідних стовпчиках. Система (7) набуває вигляду

$$\begin{cases} 15664a + 1800b + 220c = 1196, \\ 1800a + 220b + 30c = 130, \\ 220a + 30b + 6c = 19. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему за допомогою методу Гаусса або методу Крамера, одержимо $a = \frac{1}{4}$, $\quad b = -2$, $\quad c = 4$.

Отже, шукане рівняння регресії має вигляд $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$. ▹

Приклад 4. Знайти вибіркове рівняння регресії

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$$

за даними кореляційної таблиці

$\eta \backslash \xi$	2	3	5	Σ
25	20	–	–	20
45	–	30	1	31
110	–	1	48	49
Σ	20	31	49	100

.

Оцінити силу кореляційного зв'язку за вибірковим кореляційним відношенням $\rho_{y/x}$.

◃ Знайдемо спочатку $\overline{y}_{x_i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$: $\overline{y}_{x_1} = \frac{1}{20} \cdot 20 \cdot 25 = 25$; $\overline{y}_{x_2} = \frac{1}{31}(30 \cdot 45 + 110 \cdot 1) = 47{,}1$; $\overline{y}_{x_3} = \frac{1}{49}(1 \cdot 45 + 110 \cdot 48) = 108{,}67$.

Тепер складемо розрахункові таблиці

i	x_i	m_i	$\overline{y}_{x_i}$	$m_i x_i$	$m_i x_i^2$
1	2	20	25	40	80
2	3	31	47,1	93	279
3	5	49	108,67	245	1225
Σ		100		378	1584

i	$m_i x_i^3$	$m_i x_i^4$	$m_i \overline{y}_{x_i}$	$m_i \overline{y}_{x_i} x_i$	$m_i \overline{y}_{x_i} x_i^2$
1	100	320	500	1000	2000
2	837	2511	1460	4380	13141
3	6125	30625	5325	26624	133121
Σ	7122	33456	7285	32004	148262

Підставивши знайдені числа останнього рядка в (7), дістанемо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів a, b, c:

$$\begin{cases} 33456a + 7122b + 1584c = 148262, \\ 7122a + 1584b + 378c = 32004, \\ 1584a + 378b + 100c = 7285. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо $a = 2,94$; $\quad b = 7,27$; $\quad c = -1,25$. Отже, рівняння лінії регресії має вигляд $\overline{y}_x = 2,94x^2 + 7,27x - 1,25$.

Тепер знайдемо $\rho_{y/x}$. Маємо

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} n_{ij} y_j = \frac{1}{100}(20 \cdot 25 + 31 \cdot 45 + 49 \cdot 110) = 72,85;$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (y_j - \overline{y})^2 n_j} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{100}(20(25 - 72,85)^2 + 31(45 - 72,85)^2 + 49(110 - 72,85)^2)} = 37,07;$$

$$S_{\overline{y}_x} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (\overline{y}_{x_i} - \overline{y})^2 m_i} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{100}(20(25 - 72,85)^2 + 31(47,1 - 72,85)^2 + 49(108,67 - 72,85)^2)} = 33,06.$$

Тоді

$$\rho_{y/x} = \frac{33,06}{37,07} = 0,89.$$

Оскільки $\rho_{y/x}$ близьке до одиниці, то зв'язок між η і ξ сильний, близький до функціонального. $\triangleright$

Якщо замість рівняння (6) взяти

$$\overline{y}_x = ax^2 + c,$$

то скориставшись методом найменших квадратів, для обчислення a і c одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^4 + c\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^2 \overline{y}_{x_i}, \\ a\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^2 + nc = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{y}_{x_i}. \end{cases}$$

При виборі формули гіперболічної залежності η від ξ у вигляді

$$\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b,$$

для знаходження коефіцієнтів a і b, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \frac{1}{x_i} + bn = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \overline{y}_{x_i}, \\ a\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \frac{1}{x_i^2} + b\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \frac{1}{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \frac{1}{x_i}\overline{y}_{x_i}. \end{cases} \tag{8}$$

У випадку гіперболічної регресії ξ на η рівняння гіперболи має вигляд

$$\overline{x}_y = \frac{c}{y} + d,$$

коефіцієнти c і d якого знаходяться з системи

$$\begin{cases} c\sum\limits_{j=1}^{l} n_j \frac{1}{y_j} + dn = \sum\limits_{j=1}^{l} n_j \overline{x}_{y_j}, \\ c\sum\limits_{j=1}^{l} n_j \frac{1}{y_j^2} + d\sum\limits_{j=1}^{l} n_j \frac{1}{y_j} = \sum\limits_{j=1}^{l} n_j \frac{1}{y_j}\overline{x}_{y_j}. \end{cases}$$

Приклад 5. Знайти вибіркове рівняння гіперболічної регресії η на ξ за результатами вибірки

ξ	2	4	6	8	10	12
η	3,48	3,23	3,12	3,08	2,96	2,94

.

◁ Складемо розрахункову таблицю

i	x_i	$\dfrac{1}{x_i}$	$\dfrac{1}{x_i^2}$	y_i	$\dfrac{y_i}{x_i}$
1	2	0,5	0,25	3,48	1,74
2	4	0,25	0,06	3,23	0,81
3	6	0,17	0,03	3,12	0,53
4	8	0,13	0,02	3,08	0,40
5	10	0,10	0,01	2,96	0,30
6	12	0,08	0,01	2,94	0,24
$\sum$	42	1,23	0,38	18,81	4,02

.

Система (8) набуває вигляду

$$\begin{cases} 0,38a + 1,23b = 4,02, \\ 1,23a + 6b = 18,81. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $a = 1,28$ $b = 2,87$. Отже, вибіркове рівняння регресії $y = \dfrac{1,28}{x} + 2,87$. ▷

5.3. Рангова кореляція

Якщо n об'єктів деякої сукупності N пронумеровані у відповідності зі зростанням або спаданням певної ознаки X, то кажуть, що об'єкти ранжовані за цією ознакою. Ранг X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, вказує місце, яке займає i-ий об'єкт серед інших n об'єктів, розміщених у відповідності з ознакою X. Якщо ми маємо два набори ранжованих даних, то можна спробувати встановити міру залежності між ними. Нехай за ознакою A елементи мають ранги X_1, …, X_n, а за ознакою B – Y_1, …, Y_n, де всі X_i та Y_i є елементами з множини чисел $\{1, \ldots, n\}$. Утворимо різниці $d_k = X_k - Y_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Вони є мірою зв'язку між ознаками A і B. Якщо всі $d_k = 0$, то відповідність між ознаками повна. У випадку, коли серед d_k є відмінні від нуля, то виникає необхідність оцінити ступінь залежності між ознаками. Для цього використовують коефіцієнти кореляції рангів Спірмена і Кендала.

Розглянемо спочатку коефіцієнт рангової кореляції Спірмена. Оскільки значення рангів X – числа з множини $\{1, \ldots, n\}$, то їхнє середнє значення $\overline{X} = \dfrac{n+1}{2}$. Таким самим є середнє значення для ознаки Y. Позначимо через x_k і y_k відповідно відхилення X_k від $\overline{X} = \dfrac{n+1}{2}$ і Y_k від $\overline{Y} = \dfrac{n+1}{2}$, тобто $x_k = X_k - \dfrac{n+1}{2}$, $y_k = Y_k - \dfrac{n+1}{2}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Розглянемо вибірковий коефіцієнт кореляції r для $(X_k; Y_k)$, $k \in \in \{1, \ldots, n\}$,

$$r = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})(Y_k - \overline{Y})}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2} \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (Y_k - \overline{Y})^2}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(X_k - \frac{n+1}{2}\right)\left(Y_k - \frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(X_k - \frac{n+1}{2}\right)^2} \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(Y_k - \frac{n+1}{2}\right)^2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2}}.$$

Число r_c, яке обчислюється за формулою

$$r_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2}}, \tag{9}$$

називають **вибірковим коефіцієнтом кореляції Спірмена**.

Запишемо r_c в іншому вигляді, обчисливши суми, які входять у формулу (9).

Маємо

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \frac{n+1}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k^2 - (n+1)X_k + \frac{(n+1)^2}{4}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - (n+1)\sum_{k=1}^{n} X_k + n\frac{(n+1)^2}{4} =$$

$$= (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - (n+1)(1+2+\ldots+n) + n\frac{(n+1)^2}{4} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{4} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4} = \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

Аналогічно

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

Знайдемо $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$. Для цього обчислимо $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k^2$:

$$\sum_{k=1}^{n} d_k^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_k - Y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 =$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{12} - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \frac{n(n^2-1)}{12} = \frac{n(n^2-1)}{6} - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n^2-1)}{6} - \sum_{k=1}^{n} d_k^2\right).$$

Підставивши обчислені суми в (9), одержимо

$$r_c = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n(n^2-1)}{6} - \sum\limits_{k=1}^{n} d_k^2\right)}{\frac{n(n^2-1)}{12}} = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{k=1}^{n} d_k^2.$$

Отже, вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена можна обчислювати за формулою

$$r_c = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{k=1}^{n} d_k^2. \tag{10}$$

Вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена змінюється в межах від -1 до 1. Зокрема, якщо всі $d_k = 0$, то $r_c = 1$. Отже, чим ближче r_c до 1, тим тісніший зв'язок між ознаками.

З'ясуємо значущість коефіцієнта Спірмена. Для цього розглянемо основну гіпотезу $H_0 : r_c = 0$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : r_c \neq 0$.

Спочатку шукають $t_{кр.} = t(\alpha,\, n-2)$ з таблиці 11, а потім значення

$$T_{кр.,c} = t_{кр.} \sqrt{\frac{1-r_c^2}{n-2}}.$$

Значення коефіцієнта r_c вважається істотним, якщо $|r_c| > T_{кр.,c}$.

Крім вибіркового коефіцієнта рангової кореляції Спірмена існують також інші показники сили зв'язку між рангами, наприклад, вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Кендела.

Нехай ранги елементів вибірки за ознакою A дорівнюють X_1, ..., X_n, а за ознакою B – Y_1, ..., Y_n. Припустимо, що праворуч від Y_1 є R_1 рангів, більших за Y_1; праворуч від Y_2 є R_2 рангів, більших за Y_2, і т.д., праворуч від Y_{n-1} є R_{n-1} рангів, більших за Y_{n-1}. Позначимо $R = R_1 + \ldots + R_{n-1}$.

Число r_k, яке обчислюється за формулою

$$r_k = \frac{4R}{n(n-1)} - 1, \tag{11}$$

називається **вибірковим коефіцієнтом рангової кореляції Кендела**. Доводиться, що $|r_k| \leq 1$, причому $r_k = 1$, якщо $X_i = Y_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

З'ясуємо тепер значущість коефіцієнта Кендала. Для цього розглянемо основну гіпотезу $H_0 : r_k = 0$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : r_k \neq 0$.

Спочатку шукають $u_{кр.} = u((1-\alpha)/2)$ (тобто розв'язок рівняння $\Phi(u_{кр.}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$) з таблиці 2, а потім значення

$$T_{кр.,k} = u_{кр.}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}.$$

Значення коефіцієнта r_k вважається істотним, якщо $|r_k| > T_{кр.,k}$.

Приклад 6. Обчислити коефіцієнт рангової кореляції Спірмена для вибірки

X	68,8	63,3	75,7	67,2	71,3
Y	167,0	113,3	159,9	153,6	150,8

X	72,8	76,5	63,5	69,9	71,4
Y	181,2	173,1	115,4	125,6	166,2

.

◃ Знайдемо ранги елементів вибірки. Попередньо перепишемо вибірку, впорядкувавши її елементи за верхнім рядком (тобто за значеннями X_i):

X	63,3	63,5	67,2	68,8	69,9
Y	113,3	115,4	153,6	167,0	125,6

X	71,3	71,4	72,8	75,7	76,5
Y	150,8	166,2	181,2	159,9	173,1

.

Знайдемо ранги для значень Y_i. Варіаційний ряд для Y_i має вигляд

i	1	2	3	4	5
Y	113,3	115,4	125,6	150,8	153,6

i	6	7	8	9	10
Y	159,9	166,2	167,0	173,1	181,2

.

Отже, впорядкованій за елементами X_i вибірці відповідає така послідовність парних рангів і їх різниць:

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_i	1	2	5	8	3	4	7	10	6	9
$X_i - Y_i$	0	0	-2	-4	2	2	0	-2	3	1

.

Оскільки $\sum_{i=1}^{10}(X_i - Y_i)^2 = (-2)^2 + (-4)^2 + 2^2 + 2^2 + (-2)^2 + 3^2 + 1 =$ $= 4 + 16 + 4 + 4 + 4 + 9 + 1 = 42$, то згідно з формулою (10)

$$r_c = 1 - \frac{6 \cdot 42}{10(10^2 - 1)} \approx 0,745.$$

Перевіримо значущість одержаного результату при рівні значущості $\alpha = 0,01$.

$$t_{кр.} = t(0,01,\, 10-2) = 3,36; \qquad T_{кр.,c} = 3,36\sqrt{\frac{1-(0,745)^2}{10-2}} \approx 0,792.$$

Оскільки $T_{кр.,c} > r_c$, то немає підстав відхиляти гіпотезу H_0. Ранговий кореляційний зв'язок між ознаками X і Y незначущий. $\triangleright$

Приклад 7. Економісти двох заводів оцінили вплив одинадцяти факторів на технологічний процес і отримали дві послідовності рангів:

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Y_i	1	2	3	5	4	9	8	11	6	7	10

.

Знайти вибіркові коефіцієнти рангової кореляції Спірмена і Кендела. Перевірити значущість рангової кореляції при $\alpha = 0,10$.

$\triangleleft$ Обчислимо вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена. Маємо: $d_1 = 1 - 1 = 0$, $d_2 = 2 - 2 = 0$, $d_3 = 3 - 3 = 0$, $d_4 = 4 - 5 = -1$, $d_5 = 5 - 4 = 1$, $d_6 = 6 - 9 = -3$, $d_7 = 7 - 8 = -1$, $d_8 = 8 - 11 = -3$, $d_9 = 9 - 6 = 3$, $d_{10} = 10 - 7 = 3$, $d_{11} = 11 - 10 = 1$, $\sum_{i=1}^{11} 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 +$ $+1^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 1 + 1 + 9 + 1 + 9 + 9 + 9 + 1 = 40$.

Згідно з формулою (11)

$$r_c = 1 - \frac{6}{11^3 - 11} \cdot 40 = 1 - 0,18 = 0,82.$$

Візьмемо за рівень значущості $\alpha = 0,10$. Тоді

$$t_{кр.} = t(0,1,\, 11-2) = 1,83, \qquad T_{кр.,c} = 1,83\sqrt{\frac{1-(0,82)^2}{11-2}} \approx 0,35.$$

Оскільки $r_c > T_{кр.,c}$, то рангова кореляція значуща.

Обчислимо вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Кендала. Маємо $R_1 = 10$, $R_2 = 9$, $R_3 = 8$, $R_4 = 6$, $R_5 = 6$, $R_6 = 2$, $R_7 = 2$, $R_8 = 0$, $R_9 = 2$, $R_{10} = 1$. Сума рангів $R = 10 + 9 + 8 + 6 + 6 + 2 + 2 + 0 + 2 + 1 = 46$.

Тому

$$r_k = \frac{4 \cdot 46}{11 \cdot 10} - 1 = 1,67 - 1 = 0,67.$$

З'ясуємо тепер значущість коефіцієнта рангової кореляції Кендала. Візьмемо за рівень значущості $\alpha = 0,10$. Тоді

$$\Phi(u_{кр.}) = \frac{1 - 0,10}{2} = 0,45, \quad \text{а тому} \quad u_{кр.} = 1,645;$$

$$T_{кр.,k} = 1,645\sqrt{\frac{2(2 \cdot 11 + 5)}{9 \cdot 11(11 - 1)}} \approx 0,38.$$

Оскільки $r_k > T_{кр.,k}$, то рангова кореляція значуща. $\triangleright$

Вправи

1. Знайти вибіркове рівняння прямих ліній регресії η на ξ і ξ на η за даними кореляційної таблиці:

η \ ξ	10	15	20	25	30	35
15	3	3				
18	1	5	4			
21		2	8	35	4	
24			5	10	5	1
27				4	5	5

.

2. Знайти вибіркове рівняння регресії $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ і вибіркове кореляційне відношення $\rho_{y/x}$ за даними кореляційної таблиці:

η \ ξ	0	4	5
1	50	5	1
35		44	
50		5	45

.

3. У таблиці наведено вибіркові дані про кількість випущених виробів ξ і повних витрат η на 20 однотипних підприємствах

η / η	3	4	5	7	8	10	12	13	14	19	20	24
2										1	1	1
4	1	1			2			1	1			
9	2			1		1	1					
18			1		1							

.

Знайти рівняння регресії $\overline{y}_x = a/x + b$ і обчислити кореляційне відношення $\rho_{y/x}$.

4. Три арбітри оцінили майстерність 10 спортсменів. У результаті були отримані три послідовності рангів (у першому рядку наведені ранги першого арбітра, у другому рядку – другого арбітра й у третьому рядку – третього арбітра):

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_i	3	10	7	2	8	5	6	9	1	4
Z_i	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8

.

Визначити пару арбітрів, оцінки яких найбільше узгоджуються, використовуючи коефіцієнти рангової кореляції Спірмена і Кендала.

5. За вибіркою обсягу $n = 42$ обчислено вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена $r_c = 0,6$ між двома послідовностями рангів. При рівні значущості $\alpha = 0,02$ перевірити, чи вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена є значущим.

6. Група з 10 студентів проранжована за їхніми здібностями до математики та інформатики

Математика	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Інформатика	8	9	3	7	4	1	5	2	6	10

.

За допомогою коефіцієнта кореляції Спірмена визначити ступінь зв'язку між здібностями до математики та інформатики. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити, чи є коефіцієнт рангової кореляції Спірмена значущим.

7. Спорстмени, ранги яких були за зростом відповідно $1, 2, \ldots, 10$, зайняли на змаганнях з бігу такі місця: 6, 5, 1, 4, 2, 7, 8, 10, 3, 9. Знайти коефіцієнт рангокої кореляції Кендала між зростом і швидкістю бігу.

8. Вимірювання довжини голови (X) і довжини грудного плавника (Y) у 16 окунів дали результати (у мм):

X	66	61	67	73	51	59	48	47
Y	38	31	36	43	29	33	28	25

X	58	44	41	54	52	47	51	45
Y	36	26	21	30	20	27	28	26

.

Знайти коефіцієнт рангокої кореляції Спірмена і перевірити значущість одержаного результату при $\alpha = 0.05$.

Відповіді

1. $\overline{y}_x = 0,41x + 12,04$; $\overline{x}_y = 1,37y - 6,09$.
2. $\overline{y}_x = 1,53x^2 + 1,95x + 1$; $\rho_{y/x} = 0,99$.
3. $\overline{y}_x = 16,6146/x + 9,6502$; $\rho_{y/x} = 0,7372$.
4. Згідно із значеннями вибіркових коефіцієнтів рангової кореляції Спірмена найбільш узгоджуються оцінки першого і третього арбітрів, а Кендала – першого і третього, а також другого і третього арбітрів.
5. Вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена є значущим.
6. $r_c = -0,103$; ранговий кореляційний зв'язок незначущий. **7.** $r_k = \dfrac{1}{3}$.
8. $r_c = 0,86$; ранговий кореляційний зв'язок значущий.

Література

1. Гихман И. И. Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – К. : Вища шк. Головное изд-во, 1988. – 439 с.

2. Колемаев В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : Учебн. пособие для эконом. спец. вузов / В. А. Колемаев, О. В. Староверов, В. Б. Турундаевский. – М. : Высш. шк., 1991. – 400 с.

3. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей / З.Г. Шефтель. – К. : Вища шк., 1994. – 192 с.

4. Турчин В. М. Математична статистика. Навч. посібник / В. М. Турчин. – К. : Видавничий центр "Академія", 1999. – 240 с.

5. Ниворожкина И. А. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов : Руководство для решения задач / И. А. Ниворожкина, И. В. Житников. – Ростов н/Д : Феникс, 1999. – 320 с.

6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. школа, 1999. – 479 с.

7. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. школа, 1998. – 400 с.

8. Мацкевич И. П. Высшая математика : Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид. – Мн. : Вышэйш. школа, 1993. – 269 с.

9. Мацкевич И. П., Сборник задач и упражнений по высшей математике: Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид, Г. М. Булдык. – Мн. : Вышэйш. школа, 1996. – 318 с.

10. Бугір М. К. Посібник з теорії ймовірностей та математичної статистики / М. К. Бугір. – Тернопіль : Підручники і посібники, 1998. – 176 с.

11. Барковський В. В. Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика / В. В. Барковський, Н. В. Барковська,

О. К. Лопатін. – К. : Національна академія управління, 1999. – 447 с.

12. Математика для економістів : теорія та застосування. Теорія ймовірностей та математична статистика : Підручник. – 2-е вид., виправлене / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, В. С. Дронь, О. С. Кондур. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 216 с.

13. Конет І. М. Теорія ймовірностей та математична статистика / І. М. Конет. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець- Подільський державний педагогічний університет, інформаційно-видавничий відділ, 1999. – 214 с.

14. Черняк О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика : Збірник задач: Навч. посібник / О. І. Черняк, О. М. Обушна, А. В. Ставицький. – К. : Т-во "Знання", КОО, 2002. – 199 с.

15. Ивашев-Мусатов О. С. Теория верочтностей и математичкская статистика / О. С. Ивашев-Мусатов. – М. : Наука, 1979. – 256 с.

Таблиці

Таблиця 1. Значення функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018

Таблиця 2. Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz,\ x \in \mathbb{R}$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.32	0.1255	0.64	0.2389	0.96	0.3315
0.01	0.0040	0.33	0.1293	0.65	0.2422	0.97	0.3340
0.02	0.0080	0.34	0.1331	0.66	0.2454	0.98	0.3365
0.03	0.0120	0.35	0.1368	0.67	0.2486	0.99	0.3389
0.04	0.0160	0.36	0.1406	0.68	0.2517	1.00	0.3413
0.05	0.0199	0.37	0.1443	0.69	0.2549	1.01	0.3438
0.06	0.0239	0.38	0.1480	0.70	0.2580	1.02	0.3461
0.07	0.0279	0.39	0.1517	0.71	0.2611	1.03	0.3485
0.08	0.0319	0.40	0.1554	0.72	0.2642	1.04	0.3508
0.09	0.0359	0.41	0.1591	0.73	0.2673	1.05	0.3531
0.10	0.0398	0.42	0.1628	0.74	0.2704	1.06	0.3554
0.11	0.0438	0.43	0.1664	0.75	0.2734	1.07	0.3577
0.12	0.0478	0.44	0.1700	0.76	0.2764	1.08	0.3599
0.13	0.0517	0.45	0.1736	0.77	0.2794	1.09	0.3621
0.14	0.0557	0.46	0.1772	0.78	0.2823	1.10	0.3643
0.15	0.0596	0.47	0.1808	0.79	0.2852	1.11	0.3665
0.16	0.0636	0.48	0.1844	0.80	0.2881	1.12	0.3686
0.17	0.0675	0.49	0.1879	0.81	0.2910	1.13	0.3708
0.18	0.0714	0.50	0.1915	0.82	0.2939	1.14	0.3729
0.19	0.0753	0.51	0.1950	0.83	0.2967	1.15	0.3749
0.20	0.0793	0.52	0.1985	0.84	0.2995	1.16	0.3770
0.21	0.0832	0.53	0.2019	0.85	0.3023	1.17	0.3790
0.22	0.0871	0.54	0.2054	0.86	0.3051	1.18	0.3810
0.23	0.0910	0.55	0.2088	0.87	0.3078	1.19	0.3830
0.24	0.0948	0.56	0.2123	0.88	0.3106	1.20	0.3849
0.25	0.0987	0.57	0.2157	0.89	0.3133	1.21	0.3869
0.26	0.1026	0.58	0.2190	0.90	0.3159	1.22	0.3888
0.27	0.1064	0.59	0.2224	0.91	0.3186	1.23	0.3907
0.28	0.1103	0.60	0.2257	0.92	0.3212	1.24	0.3925
0.29	0.1141	0.61	0.2291	0.93	0.3238	1.25	0.3944
0.30	0.1179	0.62	0.2324	0.94	0.3264		
0.31	0.1217	0.63	0.2357	0.95	0.3289		

Продовження таблиці 2.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.26	0.3962	1.59	0.4441	1.92	0.4726	2.50	0.4938
1.27	0.3980	1.60	0.4452	1.93	0.4732	2.52	0.4941
1.28	0.3997	1.61	0.4463	1.94	0.4738	2.54	0.4945
1.29	0.4015	1.62	0.4474	1.95	0.4744	2.56	0.4948
1.30	0.4032	1.63	0.4484	1.96	0.4750	2.58	0.4951
1.31	0.4049	1.64	0.4495	1.97	0.4756	2.60	0.4953
1.32	0.4066	1.65	0.4505	1.98	0.4761	2.62	0.4956
1.33	0.4082	1.66	0.4515	1.99	0.4767	2.64	0.4959
1.34	0.4099	1.67	0.4525	2.00	0.4772	2.66	0.4961
1.35	0.4115	1.68	0.4535	2.02	0.4783	2.68	0.4963
1.36	0.4131	1.69	0.4545	2.04	0.4793	2.70	0.4965
1.37	0.4147	1.70	0.4554	2.06	0.4803	2.72	0.4967
1.38	0.4162	1.71	0.4564	2.08	0.4812	2.74	0.4969
1.39	0.4177	1.72	0.4573	2.10	0.4821	2.76	0.4971
1.40	0.4192	1.73	0.4582	2.12	0.4830	2.78	0.4973
1.41	0.4207	1.74	0.4591	2.14	0.4838	2.80	0.4974
1.42	0.4222	1.75	0.4599	2.16	0.4846	2.82	0.4976
1.43	0.4236	1.76	0.4608	2.18	0.4854	2.84	0.4977
1.44	0.4251	1.77	0.4616	2.20	0.4861	2.86	0.4979
1.45	0.4265	1.78	0.4625	2.22	0.4868	2.88	0.4980
1.46	0.4279	1.79	0.4633	2.24	0.4875	2.90	0.4981
1.47	0.4292	1.80	0.4641	2.26	0.4881	2.92	0.4982
1.48	0.4306	1.81	0.4649	2.28	0.4887	2.94	0.4984
1.49	0.4319	1.82	0.4656	2.30	0.4893	2.96	0.4985
1.50	0.4332	1.83	0.4664	2.32	0.4898	2.98	0.4986
1.51	0.4345	1.84	0.4671	2.34	0.4904	3.00	0.498650
1.52	0.4357	1.85	0.4678	2.36	0.4909	3.20	0.499313
1.53	0.4370	1.86	0.4686	2.38	0.4913	3.40	0.499663
1.54	0.4382	1.87	0.4693	2.40	0.4918	3.60	0.499841
1.55	0.4394	1.88	0.4699	2.42	0.4922	3.80	0.499928
1.56	0.4406	1.89	0.4706	2.44	0.4927	4.00	0.499968
1.57	0.4418	1.90	0.4713	2.46	0.4931	4.50	0.499997
1.58	0.4429	1.91	0.4719	2.48	0.4934	5.00	0.500000

Таблиця 3. Таблиця розподілу Пуассона $P(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k \geq 0$

k \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812
1	0.090484	0.163746	0.222245	0.268128	0.303265	0.329287
2	0.004524	0.016375	0.033337	0.053626	0.075816	0.098786
3	0.000151	0.001092	0.003334	0.007150	0.012636	0.019757
4	0.000004	0.000055	0.000250	0.000715	0.001580	0.002964
5	0.000000	0.000002	0.000015	0.000057	0.000158	0.000356
6	0.000000	0.000000	0.000001	0.000004	0.000013	0.000036
7	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000003

k \ λ	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
0	0.496585	0.449329	0.406570	0.367879	0.135335	0.049787
1	0.347610	0.359463	0.365913	0.367879	0.270671	0.149361
2	0.121663	0.143785	0.164661	0.183940	0.270671	0.224042
3	0.028388	0.038343	0.049398	0.061313	0.180447	0.224042
4	0.004968	0.007669	0.011115	0.015328	0.090224	0.168031
5	0.000696	0.001227	0.002001	0.003066	0.036089	0.100819
6	0.000081	0.000164	0.000300	0.000511	0.012030	0.050409
7	0.000008	0.000019	0.000039	0.000073	0.003437	0.021604
8	0.000001	0.000002	0.000004	0.000009	0.000859	0.008102
9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000191	0.002701
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000038	0.000810
11	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000007	0.000221
12	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000055
13	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000013
14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003
15	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001

Продовження таблиці 3

k \ λ	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	0.018316	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123
1	0.073263	0.033690	0.014873	0.006383	0.002684	0.001111
2	0.146525	0.084224	0.044618	0.022341	0.010735	0.004998
3	0.195367	0.140374	0.089235	0.052129	0.028626	0.014994
4	0.195367	0.175467	0.133853	0.091226	0.057252	0.033737
5	0.156293	0.175467	0.160623	0.127717	0.091604	0.060727
6	0.104196	0.146223	0.160623	0.149003	0.122138	0.091090
7	0.059540	0.104445	0.137677	0.149003	0.139587	0.117116
8	0.029770	0.065278	0.103258	0.130377	0.139587	0.131756
9	0.013231	0.036266	0.068838	0.101405	0.124077	0.131756
10	0.005292	0.018133	0.041303	0.070983	0.099262	0.118580
11	0.001925	0.008242	0.022529	0.045171	0.072190	0.097020
12	0.000642	0.003434	0.011264	0.026350	0.048127	0.072765
13	0.000197	0.001321	0.005199	0.014188	0.029616	0.050376
14	0.000056	0.000472	0.002228	0.007094	0.016924	0.032384
15	0.000015	0.000157	0.000891	0.003311	0.009026	0.019431
16	0.000004	0.000049	0.000334	0.001448	0.004513	0.010930
17	0.000001	0.000014	0.000118	0.000596	0.002124	0.005786
18	0.000000	0.000004	0.000039	0.000232	0.000944	0.002893
19	0.000000	0.000001	0.000012	0.000085	0.000397	0.001370
20	0.000000	0.000000	0.000004	0.000030	0.000159	0.000617
21	0.000000	0.000000	0.000001	0.000010	0.000061	0.000264
22	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000022	0.000108
23	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000008	0.000042
24	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000016
25	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000006
26	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000002
27	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001

Таблиця 4. Розподіл Пуассона. Таблиця значень $\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $m \geq 0$

m \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.095163	0.181269	0.259182	0.329680	0.393469
2	0.004679	0.017523	0.036936	0.061552	0.090204
3	0.000155	0.001148	0.003599	0.007926	0.014388
4	0.000004	0.000057	0.000266	0.000776	0.001752
5	0.000000	0.000002	0.000016	0.000061	0.000172

m \ λ	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.451188	0.503415	0.550671	0.593430	0.632121
2	0.121901	0.155805	0.191208	0.227518	0.264241
3	0.023115	0.034142	0.047423	0.062857	0.080301
4	0.003358	0.005753	0.009080	0.013459	0.018988
5	0.000394	0.000786	0.001411	0.002344	0.003660
6	0.000039	0.000090	0.000184	0.000343	0.000594

m \ λ	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.698806	0.753403	0.798103	0.834701	0.864665
2	0.337373	0.408167	0.475069	0.537163	0.593994
3	0.120513	0.166502	0.216642	0.269379	0.323324
4	0.033769	0.053725	0.078813	0.108708	0.142877
5	0.007746	0.014253	0.023682	0.036407	0.052653
6	0.001500	0.003201	0.006040	0.010378	0.016564
7	0.000251	0.000622	0.001336	0.002569	0.004534
8	0.000037	0.000107	0.000260	0.000562	0.001097
9	0.000005	0.000016	0.000045	0.000110	0.000237

λ / m	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	4.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.889197	0.909282	0.925726	0.939190	0.950213	0.981684
2	0.645430	0.691559	0.732615	0.768922	0.800852	0.908422
3	0.377286	0.430291	0.481570	0.530546	0.576810	0.761897
4	0.180648	0.221277	0.263998	0.308063	0.352768	0.566530
5	0.072496	0.095869	0.122577	0.152324	0.184737	0.371163
6	0.024910	0.035673	0.049037	0.065110	0.083918	0.214870
7	0.007461	0.011594	0.017170	0.024411	0.033509	0.110674
8	0.001978	0.003339	0.005334	0.008131	0.011905	0.051134
9	0.000470	0.000862	0.001487	0.002433	0.003803	0.021363
10	0.000101	0.000202	0.000376	0.000660	0.001102	0.008132
11	0.000020	0.000043	0.000087	0.000164	0.000292	0.002840
12	0.000004	0.000008	0.000018	0.000037	0.000071	0.000915

λ / m	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.993262	0.997521	0.999088	0.999665	0.999877	0.999955
2	0.959572	0.982649	0.992705	0.996981	0.998766	0.999501
3	0.875348	0.938031	0.970364	0.986246	0.993768	0.997231
4	0.734974	0.848796	0.918235	0.957620	0.978774	0.989664
5	0.559507	0.714943	0.827008	0.900368	0.945036	0.970747
6	0.384039	0.554320	0.699292	0.808764	0.884309	0.932914
7	0.237817	0.393697	0.550289	0.686626	0.793219	0.869859
8	0.133372	0.256020	0.401286	0.547039	0.676103	0.779779
9	0.068094	0.152763	0.270909	0.407453	0.544347	0.667180
10	0.031828	0.083924	0.169504	0.283376	0.412592	0.542070
11	0.013695	0.042621	0.098521	0.184114	0.294012	0.416960
12	0.005453	0.020092	0.053350	0.111924	0.196992	0.303224
13	0.002019	0.008827	0.027000	0.063797	0.124227	0.208444
14	0.000698	0.003628	0.012811	0.034181	0.073851	0.135536

Продовження таблиці 4

λ / m	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
15	0.000226	0.001400	0.005717	0.017257	0.041466	0.083458
16	0.000069	0.000509	0.002407	0.008231	0.022036	0.048740
17	0.000020	0.000175	0.000958	0.003718	0.011106	0.027042
18	0.000005	0.000057	0.000362	0.001594	0.005320	0.014278
19	0.000001	0.000018	0.000130	0.000650	0.002426	0.007187
20	0.000000	0.000005	0.000044	0.000253	0.001056	0.003454
21	0.000000	0.000001	0.000014	0.000094	0.000439	0.001588
22	0.000000	0.000000	0.000005	0.000033	0.000175	0.000700

Таблиця 5. Розподіл Стьюдента.
Таблиця значень $t_\beta = t(\beta, n)$

β / n	0.95	0.99	0.995	β / n	0.95	0.99	0.995
5	2.78	4.60	8.61	20	2.093	2.861	3.883
6	2.47	4.03	6.86	25	2.064	2.797	3.745
7	2.45	3.71	5.96	30	2.045	2.756	3.659
8	2.37	3.50	5.41	35	2.032	2.729	3.600
9	2.31	3.36	5.04	40	2.023	2.708	3.558
10	2.26	3.25	4.78	45	2.016	2.692	3.527
11	2.23	3.17	4.59	50	2.009	2.679	3.502
12	2.20	3.11	4.44	60	2.001	2.662	3.464
13	2.18	3.06	4.32	70	1.996	2.649	3.439
14	2.16	3.01	4.22	80	1.991	2.640	3.418
15	2.15	2.98	4.14	90	1.987	2.633	3.403
16	2.13	2.95	4.07	100	1.984	2.627	3.392
17	2.12	2.92	4.02	120	1.980	2.617	3.374
18	2.11	2.90	3.97	∞	1.960	2.576	3.291
19	2.10	2.88	3.92				

Таблиця 6. Таблиця значень $P(\chi^2 > \chi^2_{cn.})$

$\chi^2_{cn.}$ \ k	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.3173	0.6065	0.8013	0.9098	0.9626	0.9856	0.9948	0.9982
2	0.1573	0.3679	0.5724	0.7358	0.8491	0.9197	0.9598	0.9810
3	0.0833	0.2231	0.3916	0.5578	0.7000	0.8088	0.8850	0.9344
4	0.0455	0.1353	0.2615	0.4060	0.5494	0.6767	0.7798	0.8571
5	0.0253	0.0821	0.1718	0.2873	0.4159	0.5438	0.6600	0.7576
6	0.0143	0.0498	0.1116	0.1991	0.3062	0.4232	0.5397	0.6472
7	0.0082	0.0302	0.0719	0.1359	0.2206	0.3208	0.4289	0.5366
8	0.0047	0.0183	0.0460	0.0916	0.1562	0.2381	0.3326	0.4335
9	0.0027	0.0111	0.0293	0.0611	0.1091	0.1736	0.2527	0.3423
10	0.0016	0.0067	0.0186	0.0404	0.0752	0.1247	0.1886	0.2650
11	0.0009	0.0041	0.0117	0.0266	0.0514	0.0884	0.1386	0.2017
12	0.0005	0.0025	0.0074	0.0174	0.0348	0.0620	0.1006	0.1512
13	0.0003	0.0015	0.0046	0.0113	0.0234	0.0430	0.0721	0.1118
14	0.0002	0.0009	0.0029	0.0073	0.0156	0.0296	0.0512	0.0818
15	0.0001	0.0006	0.0018	0.0047	0.0104	0.0203	0.0360	0.0591
16	0.0001	0.0003	0.0011	0.0030	0.0068	0.0138	0.0251	0.0424
17	0.0000	0.0002	0.0007	0.0019	0.0045	0.0093	0.0174	0.0301
18	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0029	0.0062	0.0120	0.0212
19	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0019	0.0042	0.0082	0.0149
20	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005	0.0012	0.0028	0.0056	0.0103
21	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0018	0.0038	0.0071
22	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0012	0.0025	0.0049
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0017	0.0034
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0011	0.0023
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016
26	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0011
27	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0007
28	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005
29	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002

Таблиця 7. Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0.95	0.99	0.995	n \ γ	0.95	0.99	0.995
5	1.37	2.67	5.64	20	0.37	0.58	0.88
6	1.09	2.01	3.88	25	0.32	0.49	0.73
7	0.92	1.62	2.98	30	0.28	0.43	0.63
8	0.80	1.38	2.42	35	0.26	0.38	0.56
9	0.71	1.20	2.06	40	0.24	0.35	0.50
10	0.65	1.08	1.80	45	0.22	0.32	0.46
11	0.59	0.98	1.60	50	0.21	0.30	0.43
12	0.55	0.90	1.45	60	0.188	0.269	0.38
13	0.52	0.83	1.33	70	0.174	0.245	0.340
14	0.48	0.78	1.23	80	0.161	0.226	0.310
15	0.46	0.73	1.15	90	0.151	0.211	0.290
16	0.44	0.70	1.07	100	0.143	0.198	0.270
17	0.42	0.66	1.01	150	0.115	0.160	0.221
18	0.40	0.63	0.96	200	0.099	0.136	0.185
19	0.39	0.60	0.92	250	0.089	0.120	0.162

Таблиця 8. Таблиця значень функції $y = \ln(x)$

x	$\ln(x)$	x	$\ln(x)$	x	$\ln(x)$	x	$\ln(x)$	x	$\ln(x)$	x	$\ln(x)$
1.0	0.0000	2.5	0.9163	4.0	1.3863	5.5	1.7047	7.0	1.9459	8.5	2.1401
1.1	0.0953	2.6	0.9555	4.1	1.4110	5.6	1.7228	7.1	1.9601	8.6	2.1518
1.2	0.1823	2.7	0.9933	4.2	1.4351	5.7	1.7405	7.2	1.9741	8.7	2.1633
1.3	0.2624	2.8	1.0296	4.3	1.4586	5.8	1.7579	7.3	1.9879	8.8	2.1748
1.4	0.3365	2.9	1.0647	4.4	1.4816	5.9	1.7750	7.4	2.0015	8.9	2.1861
1.5	0.4055	3.0	1.0986	4.5	1.5041	6.0	1.7918	7.5	2.0149	9.0	2.1972
1.6	0.4700	3.1	1.1314	4.6	1.5261	6.1	1.8083	7.6	2.0281	9.1	2.2083
1.7	0.5306	3.2	1.1632	4.7	1.5476	6.2	1.8245	7.7	2.0412	9.2	2.2192
1.8	0.5878	3.3	1.1939	4.8	1.5686	6.3	1.8405	7.8	2.0541	9.3	2.2300
1.9	0.6419	3.4	1.2238	4.9	1.5892	6.4	1.8563	7.9	2.0669	9.4	2.2407
2.0	0.6931	3.5	1.2528	5.0	1.6094	6.5	1.8718	8.0	2.0794	9.5	2.2513
2.1	0.7419	3.6	1.2809	5.1	1.6292	6.6	1.8871	8.1	2.0919	9.6	2.2618
2.2	0.7885	3.7	1.3083	5.2	1.6487	6.7	1.9021	8.2	2.1041	9.7	2.2721
2.3	0.8329	3.8	1.3350	5.3	1.6677	6.8	1.9169	8.3	2.1163	9.8	2.2824
2.4	0.8755	3.9	1.3610	5.4	1.6864	6.9	1.9315	8.4	2.1282	9.9	2.2925

Таблиця 9. Експоненціальні функції

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000	1.90	6.6859	0.1496	4.9	134.2898	0.0074
0.05	1.0513	0.9512	2.00	7.3891	0.1353	5.0	148.4132	0.0067
0.10	1.1052	0.9048	2.2	9.0250	0.1108	5.1	164.0219	0.0061
0.15	1.1618	0.8607	2.3	9.9742	0.1003	5.2	181.2722	0.0055
0.20	1.2214	0.8187	2.4	11.0232	0.0907	5.3	200.3368	0.0050
0.25	1.2840	0.7788	2.5	12.1825	0.0821	5.4	221.4064	0.0045
0.30	1.3499	0.7408	2.6	13.4637	0.0743	5.5	244.6919	0.0041
0.35	1.4191	0.7047	2.7	14.8797	0.0672	5.6	270.4264	0.0037
0.40	1.4918	0.6703	2.8	16.4446	0.0608	5.7	298.8674	0.0033
0.45	1.5683	0.6376	2.9	18.1741	0.0550	5.8	330.2996	0.0030
0.50	1.6487	0.6065	3.0	20.0855	0.0498	5.9	365.0375	0.0027
0.55	1.7333	0.5769	3.1	22.1980	0.0450	6.0	403.4288	0.0025
0.60	1.8221	0.5488	3.2	24.5325	0.0408	6.1	445.8578	0.0022
0.65	1.9155	0.5220	3.3	27.1126	0.0369	6.2	492.7490	0.0020
0.70	2.0138	0.4966	3.4	29.9641	0.0334	6.3	544.5719	0.0018
0.75	2.1170	0.4724	3.5	33.1155	0.0302	6.4	601.8450	0.0017
0.80	2.2255	0.4493	3.6	36.5982	0.0273	6.5	665.1416	0.0015
0.85	2.3396	0.4274	3.7	40.4473	0.0247	6.6	735.0952	0.0014
0.90	2.4596	0.4066	3.8	44.7012	0.0224	6.7	812.4058	0.0012
0.95	2.5857	0.3867	3.9	49.4024	0.0202	6.8	897.8473	0.0011
1.00	2.7183	0.3679	4.0	54.5982	0.0183	6.9	992.2747	0.0010
1.10	3.0042	0.3329	4.1	60.3403	0.0166	7.0	1096.6332	0.0009
1.20	3.3201	0.3012	4.2	66.6863	0.0150	7.25	1408.1048	0.0007
1.30	3.6693	0.2725	4.3	73.6998	0.0136	7.5	1808.0424	0.0006
1.40	4.0552	0.2466	4.4	81.4509	0.0123	7.75	2321.5724	0.0004
1.50	4.4817	0.2231	4.5	90.0171	0.0111	8.0	2980.9580	0.0003
1.60	4.9530	0.2019	4.6	99.4843	0.0101	8.5	4914.7688	0.0002
1.70	5.4739	0.1827	4.7	109.9472	0.0091	9.0	8103.0839	0.0001
1.80	6.0496	0.1653	4.8	121.5104	0.0082	10.0	22026.4658	0.0000

Таблиця 10. Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6.63489	5.02390	3.84146	0.00393	0.00098	0.00016
2	9.21035	7.37778	5.99148	0.10259	0.05064	0.02010
3	11.34488	9.34840	7.81472	0.35185	0.21579	0.11483
4	13.27670	11.14326	9.48773	0.71072	0.48442	0.29711
5	15.08632	12.83249	11.07048	1.14548	0.83121	0.55430
6	16.81187	14.44935	12.59158	1.63538	1.23734	0.87208
7	18.47532	16.01277	14.06713	2.16735	1.68986	1.23903
8	20.09016	17.53454	15.50731	2.73263	2.17972	1.64651
9	21.66605	19.02278	16.91896	3.32512	2.70039	2.08789
10	23.20929	20.48320	18.30703	3.94030	3.24696	2.55820
11	24.72502	21.92002	19.67515	4.57481	3.81574	3.05350
12	26.21696	23.33666	21.02606	5.22603	4.40378	3.57055
13	27.68818	24.73558	22.36203	5.89186	5.00874	4.10690
14	29.14116	26.11893	23.68478	6.57063	5.62872	4.66042
15	30.57795	27.48836	24.99580	7.26093	6.26212	5.22936
16	31.99986	28.84532	26.29622	7.96164	6.90766	5.81220
17	33.40872	30.19098	27.58710	8.67175	7.56418	6.40774
18	34.80524	31.52641	28.86932	9.39045	8.23074	7.01490
19	36.19077	32.85234	30.14351	10.11701	8.90651	7.63270
20	37.56627	34.16958	31.41042	10.85080	9.59077	8.26037
21	38.93223	35.47886	32.67056	11.59132	10.28291	8.89717
22	40.28945	36.78068	33.92446	12.33801	10.98233	9.54249
23	41.63833	38.07561	35.17246	13.09051	11.68853	10.19569
24	42.97978	39.36406	36.41503	13.84842	12.40115	10.85635
25	44.31401	40.64650	37.65249	14.61140	13.11971	11.52395
26	45.64164	41.92314	38.88513	15.37916	13.84388	12.19818
27	46.96284	43.19452	40.11327	16.15139	14.57337	12.87847
28	48.27817	44.46079	41.33715	16.92788	15.30785	13.56467
29	49.58783	45.72228	42.55695	17.70838	16.04705	14.25641
30	50.89218	46.97922	43.77295	18.49267	16.79076	14.95346

Таблиця 11. Критичні точки розподілу Стьюдента

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0.1	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6.31	12.71	31.82	63.66	318.29	636.58
2	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Таблиця 12. Критичні точки розподілу F Фішера-Снедекора
k_1 – число ступенів свободи більшої дисперсії,
k_2 – число ступенів свободи меншої дисперсії
Рівень значущості $\alpha = 0.01$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.63	2.56
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.51	2.45
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.45	2.39
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.43	2.37

Продовження таблиці 12

Рівень значущості $\alpha = 0.001$

k_1 / k_2	14	16	18	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	6143	6170	6191	6209	6260	6286	6302	6313	6321	6326	6331	6334
2	99.43	99.44	99.44	99.45	99.47	99.48	99.48	99.48	99.48	99.48	99.49	99.49
3	26.92	26.83	26.75	26.69	26.50	26.41	26.35	26.32	26.29	26.27	26.25	26.24
4	14.25	14.15	14.08	14.02	13.84	13.75	13.69	13.65	13.63	13.61	13.59	13.58
5	9.77	9.68	9.61	9.55	9.38	9.29	9.24	9.20	9.18	9.16	9.14	9.13
6	7.60	7.52	7.45	7.40	7.23	7.14	7.09	7.06	7.03	7.01	7.00	6.99
7	6.36	6.28	6.21	6.16	5.99	5.91	5.86	5.82	5.80	5.78	5.77	5.75
8	5.56	5.48	5.41	5.36	5.20	5.12	5.07	5.03	5.01	4.99	4.97	4.96
9	5.01	4.92	4.86	4.81	4.65	4.57	4.52	4.48	4.46	4.44	4.43	4.41
10	4.60	4.52	4.46	4.41	4.25	4.17	4.12	4.08	4.06	4.04	4.03	4.01
11	4.29	4.21	4.15	4.10	3.94	3.86	3.81	3.78	3.75	3.73	3.72	3.71
12	4.05	3.97	3.91	3.86	3.70	3.62	3.57	3.54	3.51	3.49	3.48	3.47
13	3.86	3.78	3.72	3.66	3.51	3.43	3.38	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27
14	3.70	3.62	3.56	3.51	3.35	3.27	3.22	3.18	3.16	3.14	3.12	3.11
15	3.56	3.49	3.42	3.37	3.21	3.13	3.08	3.05	3.02	3.00	2.99	2.98
16	3.45	3.37	3.31	3.26	3.10	3.02	2.97	2.93	2.91	2.89	2.87	2.86
17	3.35	3.27	3.21	3.16	3.00	2.92	2.87	2.83	2.81	2.79	2.78	2.76
18	3.27	3.19	3.13	3.08	2.92	2.84	2.78	2.75	2.72	2.70	2.69	2.68
19	3.19	3.12	3.05	3.00	2.84	2.76	2.71	2.67	2.65	2.63	2.61	2.60
20	3.13	3.05	2.99	2.94	2.78	2.69	2.64	2.61	2.58	2.56	2.55	2.54
22	3.02	2.94	2.88	2.83	2.67	2.58	2.53	2.50	2.47	2.45	2.43	2.42
24	2.93	2.85	2.79	2.74	2.58	2.49	2.44	2.40	2.38	2.36	2.34	2.33
26	2.86	2.78	2.72	2.66	2.50	2.42	2.36	2.33	2.30	2.28	2.26	2.25
28	2.79	2.72	2.65	2.60	2.44	2.35	2.30	2.26	2.24	2.22	2.20	2.19
30	2.74	2.66	2.60	2.55	2.39	2.30	2.25	2.21	2.18	2.16	2.14	2.13
40	2.56	2.48	2.42	2.37	2.20	2.11	2.06	2.02	1.99	1.97	1.95	1.94
50	2.46	2.38	2.32	2.27	2.10	2.01	1.95	1.91	1.88	1.86	1.84	1.82
60	2.39	2.31	2.25	2.20	2.03	1.94	1.88	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75
70	2.35	2.27	2.20	2.15	1.98	1.89	1.83	1.78	1.75	1.73	1.71	1.70
80	2.31	2.23	2.17	2.12	1.94	1.85	1.79	1.75	1.71	1.69	1.67	1.65
90	2.29	2.21	2.14	2.09	1.92	1.82	1.76	1.72	1.68	1.66	1.64	1.62
100	2.27	2.19	2.12	2.07	1.89	1.80	1.74	1.69	1.66	1.63	1.61	1.60

Продовження таблиці 12

Рівень значущості $\alpha = 0.05$

k_1 k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.90	1.86
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85

Продовження таблиці 12

Рівень значущості $\alpha = 0.05$

k_2 \ k_1	14	16	18	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	245	246	247	248	250	251	252	252	252	253	253	253
2	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.48	19.48	19.48	19.48	19.48	19.49
3	8.71	8.69	8.67	8.66	8.62	8.59	8.58	8.57	8.57	8.56	8.56	8.55
4	5.87	5.84	5.82	5.80	5.75	5.72	5.70	5.69	5.68	5.67	5.67	5.66
5	4.64	4.60	4.58	4.56	4.50	4.46	4.44	4.43	4.42	4.41	4.41	4.41
6	3.96	3.92	3.90	3.87	3.81	3.77	3.75	3.74	3.73	3.72	3.72	3.71
7	3.53	3.49	3.47	3.44	3.38	3.34	3.32	3.30	3.29	3.29	3.28	3.27
8	3.24	3.20	3.17	3.15	3.08	3.04	3.02	3.01	2.99	2.99	2.98	2.97
9	3.03	2.99	2.96	2.94	2.86	2.83	2.80	2.79	2.78	2.77	2.76	2.76
10	2.86	2.83	2.80	2.77	2.70	2.66	2.64	2.62	2.61	2.60	2.59	2.59
11	2.74	2.70	2.67	2.65	2.57	2.53	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.46
12	2.64	2.60	2.57	2.54	2.47	2.43	2.40	2.38	2.37	2.36	2.36	2.35
13	2.55	2.51	2.48	2.46	2.38	2.34	2.31	2.30	2.28	2.27	2.27	2.26
14	2.48	2.44	2.41	2.39	2.31	2.27	2.24	2.22	2.21	2.20	2.19	2.19
15	2.42	2.38	2.35	2.33	2.25	2.20	2.18	2.16	2.15	2.14	2.13	2.12
16	2.37	2.33	2.30	2.28	2.19	2.15	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.07
17	2.33	2.29	2.26	2.23	2.15	2.10	2.08	2.06	2.05	2.03	2.03	2.02
18	2.29	2.25	2.22	2.19	2.11	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.98	1.98
19	2.26	2.21	2.18	2.16	2.07	2.03	2.00	1.98	1.97	1.96	1.95	1.94
20	2.22	2.18	2.15	2.12	2.04	1.99	1.97	1.95	1.93	1.92	1.91	1.91
22	2.17	2.13	2.10	2.07	1.98	1.94	1.91	1.89	1.88	1.86	1.86	1.85
24	2.13	2.09	2.05	2.03	1.94	1.89	1.86	1.84	1.83	1.82	1.81	1.80
26	2.09	2.05	2.02	1.99	1.90	1.85	1.82	1.80	1.79	1.78	1.77	1.76
28	2.06	2.02	1.99	1.96	1.87	1.82	1.79	1.77	1.75	1.74	1.73	1.73
30	2.04	1.99	1.96	1.93	1.84	1.79	1.76	1.74	1.72	1.71	1.70	1.70
40	1.95	1.90	1.87	1.84	1.74	1.69	1.66	1.64	1.62	1.61	1.60	1.59
50	1.89	1.85	1.81	1.78	1.69	1.63	1.60	1.58	1.56	1.54	1.53	1.52
60	1.86	1.82	1.78	1.75	1.65	1.59	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48
70	1.84	1.79	1.75	1.72	1.62	1.57	1.53	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45
80	1.82	1.77	1.73	1.70	1.60	1.54	1.51	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43
90	1.80	1.76	1.72	1.69	1.59	1.53	1.49	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41
100	1.79	1.75	1.71	1.68	1.57	1.52	1.48	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39

Таблиця 13. Біномний розподіл. Таблиця значень $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

n	k	p = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5		
10	0	0.34868	0.10737	0.02825	0.00605	0.00098	10	10
	1	0.38742	0.26844	0.12106	0.04031	0.00977	9	
	2	0.19371	0.30199	0.23347	0.12093	0.04395	8	
	3	0.05740	0.20133	0.26683	0.21499	0.11719	7	
	4	0.01116	0.08808	0.20012	0.25082	0.20508	6	
	5	0.00149	0.02642	0.10292	0.20066	0.24609	5	
	6	0.00014	0.00551	0.03676	0.11148	0.20508	4	
	7	0.00001	0.00079	0.00900	0.04247	0.11719	3	
	8	0.00000	0.00007	0.00145	0.01062	0.04395	2	
	9	0.00000	0.00000	0.00014	0.00157	0.00977	1	
	10	0.00000	0.00000	0.00001	0.00010	0.00098	0	
15	0	0.20589	0.03518	0.00475	0.00047	0.00003	15	15
	1	0.34315	0.13194	0.03052	0.00470	0.00046	14	
	2	0.26690	0.23090	0.09156	0.02194	0.00320	13	
	3	0.12851	0.25014	0.17004	0.06339	0.01389	12	
	4	0.04284	0.18760	0.21862	0.12678	0.04166	11	
	5	0.01047	0.10318	0.20613	0.18594	0.09164	10	
	6	0.00194	0.04299	0.14724	0.20660	0.15274	9	
	7	0.00028	0.01382	0.08113	0.17708	0.19638	8	
	8	0.00003	0.00345	0.03477	0.11806	0.19638	7	
	9	0.00000	0.00067	0.01159	0.06121	0.15274	6	
	10	0.00000	0.00010	0.00298	0.02449	0.09164	5	
	11	0.00000	0.00001	0.00058	0.00742	0.04166	4	
	12	0.00000	0.00000	0.00008	0.00165	0.01389	3	
	13	0.00000	0.00000	0.00001	0.00025	0.00320	2	
	14	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00046	1	
	15	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003	0	
		0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	k	n
		p						

n	k	p 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5		
20	0	0.12158	0.01153	0.00080	0.00004	0.00000	20	20
	1	0.27017	0.05765	0.00684	0.00049	0.00002	19	
	2	0.28518	0.13691	0.02785	0.00309	0.00018	18	
	3	0.19012	0.20536	0.07160	0.01235	0.00109	17	
	4	0.08978	0.21820	0.13042	0.03499	0.00462	16	
	5	0.03192	0.17456	0.17886	0.07465	0.01479	15	
	6	0.00887	0.10910	0.19164	0.12441	0.03696	14	
	7	0.00197	0.05455	0.16426	0.16588	0.07393	13	
	8	0.00036	0.02216	0.11440	0.17971	0.12013	12	
	9	0.00005	0.00739	0.06537	0.15974	0.16018	11	
	10	0.00001	0.00203	0.03082	0.11714	0.17620	10	
	11	0.00000	0.00046	0.01201	0.07099	0.16018	9	
	12	0.00000	0.00009	0.00386	0.03550	0.12013	8	
	13	0.00000	0.00001	0.00102	0.01456	0.07393	7	
	14	0.00000	0.00000	0.00022	0.00485	0.03696	6	
	15	0.00000	0.00000	0.00004	0.00129	0.01479	5	
	16	0.00000	0.00000	0.00001	0.00027	0.00462	4	
	17	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00109	3	
	18	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00018	2	
	19	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	1	
	20	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0	
		0.9	0.8	0.7	0.6	0.5 p	k	n

Предметний покажчик

Зміст

Математична статистика

Навчальне видання

ЛАВРЕНЧУК Володимир Петрович,
ГОТИНЧАН Тетяна Іванівна,
КОНДУР Оксана Созонтівна,
ДРОНЬ Віталій Сильвестрович

ВИЩА МАТЕМАТИКА. КУРС ЛЕКЦІЙ

У трьох частинах

Частина II

Теорія ймовірностей та математична статистика

Навчальний посібник

Головний редактор *Василь ГОЛОВЧАК*
Літературне редагування *Ольга МАКСИМОНЬКО*
Комп'ютерна верстка *Тетяна ГОТИНЧАН*

Підп. до друку 4. 5. 2011 р.
Формат 60х84/16. Папір офсет. Гарнітура "Times New Roman".
Друк на ризографі. Вид. арк. 16.
Наклад 300 прим. Зам. № 46.

ISBN 978-966-640-301-2

Видавець
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
76000, м. Івано-Франківськ,
вул. С. Бандери, 1, тел.: 71-56-22
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру від 12.12.2006, серія ДК 2718