Міністерство освіти, науки, молоді та спорту України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Педагогічний інститут
Кафедра математичних і природничих дисциплін початкової освіти

Ткачук О.М.

РІВНЯННЯ. НЕРІВНОСТІ.

(Методичні рекомендації для самостійної роботи студентів спеціальності «Початкова освіта»)

Івано-Франківськ
2014

Ткачук О.М.

РІВНЯННЯ. НЕРІВНОСТІ.

(Методичні рекомендації для самостійної роботи студентів спеціальності «Початкова освіта»)

ББК 74.262.21
Т-24

Ткачук О.М. РІВНЯННЯ. НЕРІВНОСТІ. (Методичні рекомендації для самостійної роботи студентів спеціальності «Початкова освіта») / Івано-Франківськ: Видавництво DPI , 2014. – 63 с.

Рецензенти: Козак М.В., доцент Тернопільського педагогічного університету; Кульчицька Н.В., доцент Прикарпатського університету

Рекомендовано до друку Вченою Радою Педагогічного інституту Прикарпатського університету імені Василя Стефаника (протокол №5 від 11.03.2014)

Математичний курс початкової школи закладає основу для виховання в учнів самостійного мислення, вміння розуміти і встановлювати найпростіші причинно - наслідкові зв'язки і відношення між математичними об'єктами, розвиває у них логічне мислення, математичні здібності. Тому вчителю початкових класів потрібно не тільки досконало володіти методичною майстерністю, а й глибоким розумінням математичних понять, поняттями натурального числа, величини. Вчитель-класовод повинен знати визначення арифметичних дій над числами, їх властивості, уміти виконувати і пояснювати усні та письмові обчислення і багато іншого математичного матеріалу. Метою цього курсу є забезпечення майбутнього вчителя початкових класів математичною компетентністю, пов'язаною з алгебраїчним матеріалом і необхідною йому для грамотного, творчого навчання і виховання молодших школярів, для подальшої роботи з поглиблення і розширення математичних знань. Особливістю даного курсу є те, що він орієнтований на застосування широкого комплексу різних знань. Програмою курсу передбачено читання лекцій, проведення практичних занять, виконання рефератів, контрольних робіт. З метою більш глибокого вивчення і засвоєння програми організована самостійна робота студентів. Програмою передбачена звітність у вигляді контрольних робіт.

Майбутній вчитель початкових класів повинен отримати досить глибокі знання з усіх розділів курсу математики. Тому даний курс математики на стаціонарі і заочному відділенні факультету покликаний поглибити знання вчителя про тих поняттях, на яких будується математика початкової школи, познайомити з походженням і розвитком основних понять початкової математики, розвинути мислення і логічну грамотність вчителя. З вищевикладеного випливає, що основні завдання вивчення математики такі:

1)дати студентам необхідні математичні знання , на основі яких будується алгебраїчний матеріал початкового курс математики;

2) розкрити студентам значення математики, поглибити уявлення про роль і місце математики у вивченні навколишнього світу;

3) дати студентам підготовку для подальшої самостійної роботи з поглиблення і розширення математичних знань , математичних методів.

Результати освоєння дисципліни затребувані в наступних видах професійної діяльності: навчально-виховної, науково-методичної. Дисципліна орієнтує на такі види професійної діяльності вчителя початкових класів:

- в області навчально -виховної діяльності:

- здійснення процесу навчання відповідно з освітньою програмою;

- планування і проведення навчальних занять з урахуванням специфіки тем і розділів програми і згідно з навчальним планом;

- використання сучасних науково обгрунтованих прийомів, методів і засобів навчання;

- використання технічних засобів навчання, інформаційних та комп'ютерних технологій;

- застосування сучасних засобів оцінки результатів навчання;

б) в галузі науково-методичної діяльності:

- виконання науково-методичної роботи, участь у роботі наукових гуртків та факультативів;

- аналіз власної діяльності з метою її вдосконалення і підвищення своєї компетентності.

Коротко розглянемо такі теоретичні питання:

1. Поняття про числовий вираз. Означення числового виразу. Значення числового виразу.

2.Числова рівність і нерівність.

3. Істинні і хибні числові рівності та нерівності.

4. Властивості істинних числових рівностей.

5. Властивості істинних числових нерівностей.

6. Вирази із змінною.

7. Область визначення виразів із змінною.

8. Тотожно рівні вирази із змінною.

9. Рівняння з однією змінною.

10. Область визначення рівняння з однією змінною.

11. Поняття про корінь рівняння. Рівносильні рівняння.

12. Основні теореми про рівносильність рівнянь.

13. Розв'язування рівнянь з однією змінною.

14. Поняття про рівняння з двома змінними.

15. Розв'язування рівнянь з двома змінними.

16. Нерівність із змінною. Строгі і нестрогі нерівності.

17. Теореми про рівносильні нерівності.

18. Розв'язування нерівностей з однією змінною.

19. Системи нерівностей. Розв'язування системи нерівностей.

20. Сукупності нерівностей. Розв'язування сукупності нерівностей.

Короткі теоретичні відомості.

Числові вирази.

Означення. *1) Кожне дійсне число є числовим виразом. Такі вирази називають елементарними і позначають великими буквами: A, B, C, і т.д. 2) Якщо A і B – числові вирази, то A+B, A-B, A·B, A:B також числові вирази. В числових виразах можуть бути дужки для зміни порядку дій. Інших числових виразів, крім зазначених вище в п. 1) і 2), немає.*

Якщо в числовому виразі *A* виконати всі зазначені дії (якщо це можливо), то дістанемо дійсне число, яке називають *значенням числового виразу* і позначають $\sigma(A)$. Слід зауважити, що не кожний числовий вираз має числове значення. Якщо у виразі є операції, які неможливо виконати (наприклад, ділення на 0 або добування квадратного кореня із від'ємного числа), то для такого виразу не існує числового значення.

Для спрощення запису виразів приймається:

1) елементарні вирази не брати дужки: 120+36, 75:5;

2) не застосовувати дужки, якщо треба додати і (або) відняти кілька елементарних виразів, причому вказані дії слід виконувати по порядку зліва направо: 23+13-4+5-6;

3) не застосовувати дужки, якщо треба помножити і (або) поділити кілька елементарних виразів, причому дії слід виконувати у вказаному порядку зліва направо: 12:4:3·5;

4) при відсутності дужок спочатку треба виконати дії множення і ділення, а потім додавання і віднімання у вказаному порядку зліва направо.

Порядок виконання операцій при обчисленні значень числового виразу такий:

а) якщо числовий вираз не містить дужок, то треба поділити його на частини, відокремлені одна від одної знаками + та – і обчислити значення кожної такої частини, виконуючи дії множення і ділення в такому порядку, як вони записані у виразі зліва направо. Після цього, замінивши кожну частину її обчисленим числовим значенням, знайти значення виразу, виконавши операції додавання і віднімання зліва направо ділення в такому порядку, як вони записані у виразі;

б) якщо числовий вираз містить дужки, то треба відокремити частини виразу між лівою і правою дужками, що не містять інших дужок, обчислити їх значення за правилом, описаним в п.а) і замінити кожну таку частину її числовим значенням, відкинувши дужки, які її охоплюють.

Числові рівності.

Означення. *Два числові вирази, з'єднані знаком «дорівнює», називаються числовою рівністю.*

З точки зору математичної логіки числова рівність є висловленням, тому вона може бути істинною або хибною. Наприклад, числова рівність 16+4 = 40:2 є істинною, а рівність 15-4 = 15:3 – хибна.

Розглянемо основні властивості істинних числових рівностей. Нехай задано числові вирази t, t_1, t_2, t_3. Якщо їх значення співпадають, то вони мають такі властивості:

1) рефлективність: $(\forall t)(t = t)$;

2) симетричність: $(\forall\, t_1, t_2)(t_1 = t_2 \implies t_2 = t_1)$;

3) транзитивність: $(\forall\, t_1, t_2, t_3)(t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \implies t_1 = t_3)$.

З цього випливає, що відношення рівності на множині числових виразів є відношенням еквівалентності. Воно розбиває множину всіх числових виразів на класи еквівалентності так, що будь-які два вирази одного класу рівні між собою і представляють одне число, а будь-які два числові вирази різних класів не рівні між собою і представляють різні числа. Наприклад, вирази 3·5-3, 2·6, 24:4+6 належать до одного класу еквівалентності, бо вони всі представляють одне число 12, а вирази 8+3, 12:6+7, 2·9:3 належать різним класам, вони попарно не рівні і представляють різні числа.

Теореми про властивості істинних числових рівностей.

Позначимо буквами a, b, c, d, m дійсні числа.

Теорема 1. *Якщо до обох частин рівності додати одне й те ж дійсне число, то отримаємо істинну числову рівність:*

$$(\forall a, b, m)(a = b \implies a + m = b + m).$$

Теорема 2. *Якщо від обох частин рівності відняти одне й те ж дійсне число, то отримаємо істинну числову рівність:*

$$(\forall a, b, m)(a + m = b + m \implies a = b).$$

Теорема 3. *Дві числові рівності можна почленно додати. Отримаємо істинну числову рівність:*

$$(\forall a, b, c, d\,)(a = b\ \wedge c = d \Rightarrow a + c = b + d).$$

Теорема 4. *Якщо обидві частини рівності помножити на одне і те ж число, відмінне від нуля, то отримаємо істинну числову рівність:*

$$(\forall a, b, m\,)(a = b\ \Rightarrow a \cdot m = b \cdot m).$$

Теорема 5. *Якщо обидві частини рівності поділити на одне і те ж число, відмінне від нуля, то отримаємо істинну числову рівність:.*

$$(\forall a, b, m\,)(a \cdot m = b \cdot m\ \wedge m \neq 0\ \Rightarrow a = b).$$

Теорема 6. *Якщо дві числові рівності почленно помножити, то отримаємо істинну числову рівність:*

$$(\forall a, b, c, d\,)(a = b \wedge c = d\ \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d).$$

Числові нерівності.

Означення. *Два числові вирази* t_1, t_2*, з'єднані знаком < (менше) або знаком > (більше), називаються числовою нерівністю.* Наприклад, 2<7, 5>9, 3+6<9, 16:8+3<21:7+5 – числові нерівності. Оскільки вони, як і числові рівності, є висловленнями, вони можуть бути істинними або хибними. Із на ведених прикладів істинними є нерівності 2<7, 16:8+3<21:7+5, а нерівності 5>9, 3+6 <9 є хибними. Нерівності a>b і c>d (або a<b і c<d) називають *нерівностями одного знаку (змісту)*, а нерівності a>b і c<d (або a<b і c>d) називають *нерівностями протилежного знаку (змісту).*

Основні властивості істинних числових нерівностей:

1) антирефлексивність: $(\forall t)\overline{(t < t)}$; $(\forall t)\overline{(t > t)}$;

2) антисиметричність: $(\forall\, t_1, t_2)(\, t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; \overline{t_2 < t_1});$ $(\forall\, t_1, t_2)(\, t_1 < t_2 \;\Rightarrow\; \overline{t_2 > t_1});$

3) транзитивність: $(\forall\, t_1, t_2\,, t_3)(\, t_1 < t_2 \wedge t_2 \, < t_3 \Rightarrow\; t_1 < t_3\,);$

$$(\forall\, t_1, t_2\,, t_3)(\, t_1 > t_2 \wedge t_2 \, > t_3 \Rightarrow\; t_1 > t_3\,).$$

Отже, числові нерівності володіють властивостями строгого порядку, тому що вони антирефлексивні, антисиметричні і транзитивні. Слід відмітити ще й такі властивості істинних числових нерівностей:

4) для будь-яких двох числових виразів t_1, t_2 має місце тільки одне із співвідношень: $t_1 < t_2\,,\; t_1 > t_2\,,\; t_1 = t_2\,,$ тобто $(\forall\, t_1, t_2\,)(\, t_1 < t_2 \vee t_1 \, > t_2 \vee t_1 = t_2\,)$. Якщо $t_2 = 0,$ то $(\forall\, t_1)(\, t_1 < 0 \vee t_1 \, > 0 \vee t_1 = 0\,);$

5) для будь-яких числових виразів t_1, t_2 вираз t_1 більший за вираз t_2 тоді і тільки тоді, коли різниця $t_1 - t_2$ є додатна: $(\forall\, t_1, t_2\,)(\, t_1 \, > t_2 \Leftrightarrow\; t_1 - t_2 \, > 0)$.

Наступні **властивості істинних числових нерівностей** представлені у вигляді теорем.

Теорема 1. *Для будь-яких числових виразів a і b виконується правило: якщо $a > b$, то $b < a$: $(\forall a, b)(a > b \Rightarrow b < a)$. При зміні знаків отримаєм: якщо $a < b$, то $b > a$: $(\forall a, b)(a < b \Rightarrow b > a)$.*

Теорема 2. *Якщо до обох частин нерівностей додати одне і те ж дійсне число, то одержимо істинну нерівність того ж знаку, що й задана: $(\forall a, b, c)(a > b \Rightarrow a + c > b + c)$; або $(\forall a, b, c)(a < b \Rightarrow a + c < b + c)$*

Наслідок. Будь-який член нерівності можна переносити з однієї частини нерівності в другу, змінивши знак на протилежний:

$$a > b + c \Rightarrow a - c > b$$

$$a < b + c \Rightarrow a - c < b.$$

Теорема 3. *Дві нерівності одного знаку можна почленно додавати:*

$$(\forall a, b, c, d)(a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d)$$

$$(\forall a, b, c, d)(a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d).$$

Теорема 4. *Нерівності протилежного змісту можна почленно віднімати, зберігаючи знак нерівності, від якої віднімамали:*

$$(\forall a, b, c, d)(a > b \wedge c < d \Rightarrow a - c > b - d)$$

$(\forall a, b, c, d)(a < b \wedge c > d \Rightarrow a - c < b - d)$.

Теорема 5. *Якщо дві частини нерівності помножити на одне і те ж додатне число, то одержимо числову нерівність того ж знаку, що й задана. Якщо обидві частини нерівності помножити на одне й те ж від'ємне число, то одержимо істинну числову нерівність протилежного знаку:*

$$(\forall a, b, c)(a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc)$$

$$(\forall a, b, c)(a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bd).$$

Так як числові нерівності є висловленнями,то над ними можна виконувати операції математичної логіки – кон'юнкцію, диз'юнкцію, імплікацію і т.д. ***Кон'юнкцією*** *двох числових нерівностей називають висловлення, яке утворене із даних нерівностей за допомогою сполучника «і».* Висловлення $a > b$ і $a < c$ є кон'юнкцією нерівностей і записується у вигляді подвійної нерівності $c > a > b$.

Якщо відомо, що $a > b$ або $a = b$, то це буде диз'юнкція двох висловлень і записується так: $a \geq b$. Нерівності виду $a \geq b$ $(c \leq d)$ називають нестрогими, на відміну від нерівностей $a > b$ $(c < d)$, які називають строгими нерівностями або просто нерівностями. Слід зауважити, що запис $a \neq b$ рівносильний диз'юнкції нерівностей $a > b$ або $a < b$.

Вирази із змінною.

Під змінною розуміють букву або будь-яке інше символічне позначення, відмінне від цифри, яка набуває конкретних значень з певної множини *M*, причому елементи цієї множини називають значеннями змінної. Множина значень змінної, при яких вираз є визначеним і має зміст, називається областю визначення виразу і позначається через *X*. Якщо всі значення, які набуває змінна у виразі, є тільки числами, то така змінна називається числовою. Якщо областю значень змінної є множина R, то змінну називають дійсною. Вирази із змінною позначаються буквами латинського або грецького алфавіту (великими і малими), біля яких в дужках записують змінну. Наприклад, $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$, $A(x)$.

Означення. *Два вирази $f(x)$ і $\varphi(x)$ з однією змінною x, визначені на множині X, називають тотожно рівними, якщо їх області визначення збігаються, і для будь-якого числа $a \in X$ значення виразів при $x=a$ рівні між собою, тобто $f(x) = \varphi(x)$.*

Означення. *Два вирази із змінною $f(x)$ і $\varphi(x)$, сполучені знаком рівності «=», називають рівністю і записують $f(x)=\varphi(x)$. Якщо вирази $f(x)$ і $\varphi(x)$ тотожно рівні, то це записують $f(x)\equiv \varphi(x)$ і називають тотожністю.*

На основі властивостей арифметичних дій над дійсними числами та формул, які їх пов'язують, можна встановити тотожність заданих виразів на основі тотожних перетворень. Під останніми розуміють перехід від заданого виразу до більш простого в результаті допустимих спрощень, в результаті чого отримується вираз, тотожно рівний заданому.

Рівняння з однією змінною.

В даному курсі рівняння розглядаються на основі поняття предикату.

Означення. *Нехай задано два вирази $f(x)$ і $\varphi(x)$ із однією змінною x на спільній області визначення X. Одномісний предикат $f(x)=\varphi(x)$, $x\in X$, заданий на множині X, називають рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x).*

Множина *X* називається областю допустимих значень невідомого *x* або *ОДЗ* рівняння. Отже, *ОДЗ* рівняння – це така множина *X*, з якої дозволяється підставляти у рівняння будь-який об'єкт замість змінних, і при цьому рівняння буде визначеним і буде мати зміст. Вирази із змінною називають частинами рівняння. Вираз *f(x)* називається лівою частиною рівняння, а вираз *φ(x)* – правою частиною.

Означення. *Кожний елемент a*$\in$ X*, для якого предикат f(x)=φ(x) перетворюється в істинне висловлення f(a)=φ(a), називається коренем (розв'язком) рівняння*. Отже, сукупність усіх розв'язків рівняння утворює його множину істинності *T*. Якщо множина *T* порожня *(T=*$\emptyset$*)*, то говорять, що рівняння не має розв'язків в *X*. Якщо *T=X*, то говорять, що рівняння є тотожністю на множині *X*. Про кожний розв'язок рівняння говорять, що він задовольняє рівняння.

Розв'язати рівняння – означає знайти значення змінної *x*, при підстановці яких у рівняння одержується істинна числова рівність. Якщо рівняння розглядати як предикат, то розв'язати рівняння – означає знайти множину істинності *T* цього предикату. Звідси випливає, що множина істинності *T* предикату *f(x)=φ(x)* – це множина розв'язків (коренів) даного рівняння *f(x)=φ(x)*.

В процесі розв'язування рівняння відбувається його постійне спрощення за певними правилами. Правила переходу від даного рівняння до нового більш простого рівняння базуються на понятті рівносильності рівнянь.

Нехай задано два рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ *і* $F_1(x) = F_2(x)$ з однією змінною x, визначені на числовій можині X$\subset$R з множинами розв'язків T_1і T_2 відповідно. Рівняння $F_1(x) = F_2(x)$ буде логічним наслідком з рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{T}_1\subset \mathrm{T}_2$. Якщо $F_1(x) = F_2(x)$ логічно випливає з $f_1(x) = f_2(x)$, то це позначається так: $f_1(x) = f_2(x) \vDash F_1(x) = F_2(x)$. Це означає, що кожний корінь рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ задовільняє рівняння $F_1(x) = F_2(x)$. Бувають випадки, коли одночасно перше рівняння логічно слідує з другого рівняння, а друге рівняння логічно слідує з першого:

$f_1(x) = f_2(x) \vDash F_1(x) = F_2(x)$ і $F_1(x) = F_2(x) \vDash f_1(x) = f_2(x)$. Це можливо тоді і тільки тоді, коли $T_1 \subset T_2 \wedge T_2 \subset T_1$, тобто, коли $T_1 = T_2$.

Означення. *Два рівняння* $f_1(x) = f_2(x)$ *і* $F_1(x) = F_2(x)$ *називаються рівносильними або еквівалентними на числовій множині X, якщо їх множини істинності співпадають, тобто якщо* $T_1 = T_2$. Можна сказати, що два рівняння називають рівносильними (еквівалентними), якщо кожний розв'язок першого рівняння є також розв'язком другого рівняння і навпаки, кожний розв'язок другого рівняння є також розв'язком першого рівняння.

Щоб виконувати спрощення рівняння, треба знати, які перетворення можна виконувати, щоб отримане рівняння було рівносильним даному. Для цього слід використовувати теореми про рівносильність рівнянь.

Теорема 1. *Якщо до обох частин рівняння* $f_1(x) = f_2(x)$, $x \in X$ *додати один і той самий алгебраїчний вираз* $F(x)$, *який має значення при всіх* $x \in X$, *то дістанемо рівняння* $f_1(x) + F(x) = f_2(x) + F(x)$, $x \in X$, *рівносильне даному рівнянню у множині X.*

Теорема 2. *Якщо обидві частини рівняння* $f_1(x) = f_2(x)$, $x \in X$ *помножити на алгебраїчний вираз* $F(x)$, *який визначений і не дорівнює нулю ні при одному значенню* $x \in X$, *то дістанемо рівняння* $f_1(x) \cdot F(x) = f_2(x) \cdot F(x)$, $x \in X$, *рівносильне даному рівнянню у множині X.*

Теорема 3. *Нехай маємо рівняння f(x)=0,* $x \in X$. *Якщо вираз f(x) можна подати у вигляді добутків виразів* $f_1(x)$, $f_2(x), \dots, f_n(x)$, *область визначення кожного з яких збігається з множиною X, то множина розв'язків рівняння f(x)=0 є об'єднанням множин розв'язків рівнянь* $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$.

Наслідки.

1. Якщо до обох частин рівняння додати або відняти одне й те ж число, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

2. Якщо в рівнянні перенести доданок (член рівняння) з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

3. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те ж число,відмінне від нуля, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Розв’язувати рівняння з однією змінною можна ґрунтуючись на різних теоретичних підходах. Ми розглянемо такі способи розв’язування найпростіших рівнянь: 1) за теоремами про рівносильність рівнянь, 2) на основі взаємозв’язку між компонентами та результатом арифметичних дій.

Поняття рівносильності рівнянь відіграє важливу роль при знаходженні коренів рівняння, тобто при розв’язуванні рівнянь. Звичайно, щоб розв’язати рівняння його заміняють рівносильним йому простішим рівнянням, потім знову цей процес повторюється і так триває до тих пір, поки не прийдемо до рівняння виду x=a або до диз’юнкції рівнянь такого виду, які фактично і є шуканими коренями рівняння.

У рівняннях

$2x + 5 = 318 - x,$ *(а)*

$x - \frac{5}{x} = -3x + 19,$ *(б)*

$\frac{x-4}{2x+1} = \frac{x-9}{x}$ *(в)*

ліва і права частина є раціональні вирази. Такі рівняння називають раціональними рівняннями. Раціональні рівняння, у яких у яких ліва і права частина є цілі вирази, називаються цілими, а якщо ліва або (і) права частина є дробові вирази, то рівняння називається дробовим. Отже, рівняння *(а)* є цілим, а *(б)* і *(в)* – дробові рівняння.

Розв'язуючи дробові рівняння за теоремами про рівносильність рівнянь, можна дотримуватись таких рекомендацій:

1) знайти ОДЗ рівняння;

2) знайти спільний знаменник дробів, які входять у рівняння;

3) помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник;

4) виконати усі можливі скорочення в обох частинах рівняння і звести подібні члени;

5) розв'язати утворене ціле рівняння, використовуючи теореми про рівносильність рівнянь;

6) виключити із отриманих коренів рівняння ті, які не входять в ОДЗ рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{6}{x+2}+\frac{x+2}{2-x}-\frac{x^2}{4-x^2}=0.$

Перш за все знаходимо ОДЗ рівняння. ОДЗ складається із всіх дійсних чисел, крім тих, які перетворюють знаменники даного рівняння в 0, тобто крім чисел 2 та -2. Отже, *X*=R крім x=±2.

Тепер звільнимося від знаменника, грунтуючись на теоремі 2. Помножимо обидві частини цього рівняння на вираз $4-x^2$, тому що всюди на ОДЗ цей вираз має смисл і не перетворюється на 0 при всіх $x \in X$. Одержимо рівняння $12-6x+x^2+4x+4-x^2=0$, яке є рівносильним даному на множині *X.* Наступний крок – зводимо подібні члени і переносимо всі члени рівняння, які не містять х, в праву частину рівняння. Одержимо рівносильне рівняння такого виду: $12x=16$, яке має єдиний корінь *x=8*. Цей розв'язок буде правильним, оскільки він входить в ОДЗ вихідного рівняння.

Деякі рівняння доцільно розв'язувати на основі взаємозв'язку між компонентами і результатом дії. Саме так розв'язують рівняння учні в початковій школі. Щоб використовувати такий метод розв'язку, треба пам'ятати правила знаходження невідомих компонентів дій додавання (доданок), віднімання (зменшуване, від'ємник), множення (множник) і ділення (ділене, дільник). Використовуючи ці правила, можна розв'язати деякі види рівнянь.

Приклад. Розв'язати рівняння $4 \cdot \left(\frac{2x+3}{5} + 1\right) = 16$. Структура цього рівняння така: $4 \cdot \square = 16$.

У цьому рівнянні невідома величина міститься в другому множнику, який позначено у виді віконця, а перший множник (4) і добуток (16) – відомі величини. Використавши правило знаходження невідомого множника і виконавши дію 16:4=4, знаходимо: $\frac{2x+3}{5} + 1$=4. Тепер структура рівняння має вид: $\square + 1 = 4$. Отже, невідома величина знаходиться в доданку, тому наступна дія 4-1=3 визначає, що $\frac{2x+3}{5} = 3$. Оскільки риска дробу заміняє дію ділення, то невідома величина тепер міститься в діленому, а, отже, структура рівняння тепер така: 5 $\square : 5 = 3$. Знаходимо невідоме ділене, для чого множимо дільник (5) на частку (3): $5 \cdot 3 = 15$. Ми отримали рівняння $2x$+3=15. Переносимо 3 в праву частину рівняння з протилежним знаком: $2x$=15-3, або $2x$=12, звідки отримаємо розв'язок x=6.

Фактично, розв'язок рівняння цим способом можна здійснювати і записувати по діях:

1) 16 : 4 = 4;

2) 4 – 1 = 3;

3) $5 \cdot 3 = 15$;

4) 15 – 3 =12;

5) 12 : 2 = 6.

Такий метод розв'язування можна використовувати, коли невідома величина міститься тільки в одній частині рівняння і тільки один раз.

Розв'язування квадратних рівнянь.

Означення. Квадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b, c – числові коефіцієнти, причому $a \neq 0$. Коефіцієнт c називають вільним членом квадратного рівняння.

Зрозуміло, що квадратне рівняння є рівнянням другого степеня, тому що найвища степінь змінної x в цьому рівняння рівна 2 – це показник степеня змінної x біля коефіцієнта a. Якщо в квадратному рівнянні задано всі три коефіцієнти a, b, c, то квадратне рівняння називається повним. Якщо хоча б один коефіцієнт рівний нулю, то квадратне рівняння називається неповним.

Неповне квадратне рівняння виду $ax^2 + bx = 0$ **завжди** має два дійсні корені. Для їх заходження треба перетворити ліву частину і використати теорему 3 про рівносильність рівнянь. Отримаємо:

$$ax^2 + bx = 0;$$

$$x(ax + b) = 0;$$

$x_1 = 0$ або

$ax + b = 0$

$ax = -b$

$x_2 = -\frac{b}{a}$.

Для розв'язування неповного квадратного рівняння виду $ax^2 + c = 0$ треба перенести вільний член в праву частину рівняння, поділити рівняння на коефіцієнт a і добути квадратний корінь з отриманого числа, якщо число додатне:

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} .$$

Приклад. Розв’язати неповне квадратне рівняння $-2x^2 + 8 = 0$. Перенесемо вільний член в праву частину і поділимо обидві частини рівняння на -2:

$$-2x^2 = -8$$

$$x^2 = 4\,.$$

Добувши квадратний корінь із числа 4, отримаємо два дійсні корені квадратного рівняння: $x_1 = 2$ та $x_2 = -2$.

Приклад. Розв’язати неповне квадратне рівняння $3x^2 + 9x = 0$. В лівій частині рівняння виносимо за дужки x і прирівнюємо до 0 кожний множник.

$$3x(x + 9) = 0;$$

$$3x = 0;$$

$$x_1 = 0;$$

$$x + 9 = 0;$$

$$x_2 = -9.$$

Ми отримали два дійсних корені $x_1 = 0$ та $x_2 = -9$.

Повне квадратне рівняння має вид $ax^2 + bx + c = 0$. Воно може мати два різних дійсних корені, може мати два рівні дійсні корені або не мати жодного дійсного кореня. Це залежить від дискримінанту квадратного рівняння.

Означення. *Дискримінантом квадратного рівняння* $ax^2 + bx + c = 0$ *називається вираз* $b^2 - 4ac$ *і позначається буквою D.*

Розглянемо випадки розв’язків квадратного рівняння залежно від значення дискримінанту D.

1. Дискримінант **D>0.**

В цьому випадку із дискримінанту можна отримати два значення квадратного кореня, і відповідно, отримати **два різних дійсних корені** x_1 та x_2:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Останні дві формули називають **формулами коренів квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Дискримінант **D=0.**

В цьому випадку $\sqrt{D} = 0$, і ми отримаємо два рівних дійсних корені $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

3. Дискримінант **D<0.**

В цьому випадку для знаходження коренів квадратного рівняння треба добути квадратний корінь із від'ємного числа, що в множині R зробити неможливо. Відповідно до цього, рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не буде мати дійсних коренів.

Алгоритм розв'язку квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

1) визначити вид квадратного рівняння – повне чи неповне;

2) якщо рівняння неповне – розв'язати його згідно розглянутих вище способів;

3) якщо квадратне рівняння повне - обчислити його дискримінант за формулою $D = b^2 - 4ac$;

4) якщо $D \geq 0$, то за допомогою формули коренів квадратного рівняння знайти їх значення;

5) якщо $D < 0$, то записати, що квадратне рівняння не має коренів.

Приклад. Розв'язати рівняння $25 = 26x - x^2$.

Запишемо дане рівняння у формі, яку має квадратне рівняння, тобто по степенях спадання змінної. Для цього перенесемо члени з правої частини в ліву і прирівняємо до 0. Отримаємо таке квадратне рівняння: $x^2 - 26x + 25 = 0$. Обчислюємо його дискримінант: $D = b^2 - 4ac = 26^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 676 - 100 = 576$. Оскільки D>0**,** то буде два різних дійсних корені, які можна обчислити за формулами коренів квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Отже,

$$x_1 = \frac{26 + \sqrt{576}}{2}; x_2 = \frac{26 - \sqrt{576}}{2}.$$

Так як $\sqrt{576}$ = ± 24, то $x_1 = \frac{26+24}{2}; x_2 = \frac{26-24}{2}$; або $x_1 = 25; x_2 = 1$.

Поняття про систему рівнянь з двома змінними.

Означення. *Нехай задано два рівняння з двома змінними x і y, визначеними на множині X:*

$f_1(x,y) = f_2(x,y), \quad x, y \in X \quad$ *та* $\; F_1(x,y) = F_2(x,y), \; x, y \in X.$

Кон'юнкцію цих рівнянь називають системою рівнянь з двома змінними і позначають за допомогою фігурної дужки:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = f_2(x,y), \; x, y \in X, \\ F_1(x,y) = F_2(x,y), \; x, y \in X. \end{cases}$$

Розв'язати систему рівнянь – означає знайти всі пари чисел *(a,b)*, при підстановці яких замість відповідних змінних *(x=a; y=b)* в кожне рівняння воно буде перетворюватися в істинну числову рівність. Отже, розв'язком системи рівнянь є пара чисел *(a, b)*, при підстановці яких відповідно замість *x* та *y* обидва рівняння системи стануть істинними числовими рівностями:

$$\begin{cases} f_1(a,b) = f_2(a,b), & a,b \in X, \\ F_1(a,b) = F_2(a,b), & a,b \in X. \end{cases}$$

Іншими словами, розв'язати систему рівнянь означає знайти множину розв'язків системи. Оскільки система рівнянь є кон'юнкцією двох предикатів, то нам треба знайти множину істинності кон'юнкції двох предикатів, тобто переріз множин істинності кожного предикату зокрема.

Способи розв'язування системи рівнянь. Систему рівнянь з двома невідомими можна розв'язувати різними способами. Ми розглянемо тільки 3 способи:

1) спосіб підстановки;

2) спосіб алгебраїчного додавання;

3) графічний спосіб.

Спосіб підстановки. Це найбільш універсальний спосіб розв'язування системи рівнянь, який можна застосовувати відразу до заданої системи без перетворення рівнянь, які входять до неї. Суть методу полягає в тому, Щоб виключити з одного із рівнянь одну змінну, і отримати, фактично, рівняння з однією змінною. Для цього в одному рівнянні системи ми виражаємо одну змінну через другу, тобто, наприклад, замість рівняння $f_1(x,y) = f_2(x,y),\ \ x,y \in X,$ ми дістаємо рівняння $x= \varphi(y)$. Підставивши в друге рівняння всюди замість x отриманий вираз $\varphi(y)$, ми отримаємо рівняння з одним невідомим y, яке можна розв'язати. Отримане значення у треба підставити в рівняння $x= \varphi(y)$ або в будь-яке рівняння системи для обчислення значення другого невідомої x. В результаті отримуємо розв'язок системи, який можна записати у вигляді кортежу $(a,\ b)$ або у вигляді системи

$$\begin{cases} \mathrm{x} = a \\ \mathrm{y} = b. \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати способом підстановки систему рівнянь

$$\begin{cases} 3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 9 \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} - 8 = 0\,. \end{cases}$$

Розв'язування. Оскільки в другому рівнянні системи x не має коефіцієнту і є в першій степені, то доцільно саме з другого рівняння виразити x через y. Для цього треба друге рівняння розв'язати відносно x, тому всі члени другого рівняння, крім x, переносимо в праву частину з протилежними знаками. Отримаємо: $x = 8 - y$. Тепер підставляємо в перше рівняння системи замість x отриманий вираз $8 - y$ і отримаємо рівняння відносно одного невідомого y:

$3(8 - y) - 2y = 9.$

Розкриємо дужки, перенесемо вільні члени в праву частину і отримаємо:

$24 - 3y - 2y = 9$

$-5y = -24 + 9$

$-5y = -15$

$5y = 15$

$y = 15 : 5$

$y=3.$

Отриманий розв'язок для змінної у підставляємо у рівняння $x = 8 - y$ і отримаємо значення для x:

$x = 8 - 3$

$x = 5.$

Робимо перевірку правильності розв'язку. Для цього у задану систему підставляємо отримані значення невідомих: $x = 5$ та $y = 3$:

$$\begin{cases} 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9 \\ 5 + 3 - 8 = 0. \end{cases}$$

Виконавши вказані обчислення, отримаємо істинну числову рівність:

$$\begin{cases} 9 = 9 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Отже, система рівнянь розв'язана правильно, а розв'язок її $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3. \end{cases}$

Суть другого способу – алгебраїчного додавання - полягає в тому, що при додаванні рівнянь системи, які містять біля однієї з невідомих рівні коефіцієнти з протилежними знаками ми отримаємо коефіцієнт, рівний 0, тобто цієї невідомої величини в рівняння не буде. Ми отримуємо рівняння з однією невідомою величиною, яке можна розв’язати і знайти її значення. Для знаходження другої невідомої величини можна використати будь-яке рівняння системи.

Щоб застосувати спосіб алгебраїчного додавання і отримати біля однієї з невідомих у різних рівняннях системи коефіцієнти, рівні за величиною і протилежні за знаком, можна домножити рівняння на потрібні коефіцієнти, які визначаються в кожному конкретному випадку.

Приклад. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases}$$

способом алгебраїчного додавання.

Розв’язування. Оскільки біля кожної з невідомих коефіцієнти різні по величині, то вже це свідчить на необхідність під коректувати дану систему, щоб можна було застосувати цей спосіб розв’язування. Так як біля *y* коефіцієнти мають протилежні знаки (-2 в першому рівнянні та +1 у другому), то для отримання рівних по величині коефіцієнтів біля *y* достатньо друге рівняння системи помножити на 2. Отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 2x + 2y - 16 = 0. \end{cases}$$

Перенесемо вільний член в другому рівнянні в праву частину і додамо друге рівняння до першого по частинах:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 2x + 2y = 16; \end{cases}$$

А після додавання отримаємо рівняння $3x - 2y + 2x + 2y = 9 + 16$. Після зведення подібних членів невідомої *y* в рівнянні не буде, бо біля неї коефіцієнт рівний *0* $(2y - 2y = 0)$. Отже, ми отримали рівняння $3x + 2x = 25$, яке містить одну невідому величину x. Розв'язок цього рівняння дає її значення $x = 5$.Для отримання значення y треба замість x підставити його значення в будь-яке рівняння системи, яке містить y. Використаємо перше рівняння $3x - 2y = 9$. Тоді

$$3 \cdot 5 - 2y = 9;$$

$$15 - 2y = 9;$$

$$-2y = 9 - 15;$$

$$-2y = -6;$$

$$2y = 6;$$

$$y = 3.$$

Отже, розв'язок заданої системи рівнянь можна записати у вигляді кортежу (5; 3) або у вигляді системи $\begin{cases} x = 5; \\ y = 3. \end{cases}$

На цьому прикладі показаний очевидний факт, що розв'язок не залежить від способу розв'язування.

Розв'язування задач за допомогою складання рівнянь і системи рівнянь.

Навчити учнів розв'язувати задачі за допомогою складання рівнянь – одне із важливих завдань вчителя математики, оскільки такі вміння і навики потрібні на різних уроках, найчастіше на уроках фізики, хімії, географії, біології. Тому складати рівняння для знаходження розв'язку задач учні починають вже в початковій школі. Очевидно, що вчителі-класоводи самі повинні досконало володіти такими вміннями.

З текстових задач в школі найчастіше зустрічаються такі види:

1) задачі про абстрактні числа або про величини одного роду; 2) задачі з величинами різними роду. Розглянемо коротко способи складання рівнянь або стистем рівнянь для кожного виду задач.

1. Задачі про абстрактні числа або про величини одного роду. Найпростішими задачами такого виду є задачі на знаходження чисел за їх сумою (або різницею) і кратним відношенням. Всі задачі цього виду зводяться до розв'язування простого рівняння або системи рівнянь виду

$$\begin{cases} x \pm y = a; \\ \dfrac{x}{y} = b. \end{cases}$$

Задача 1. *Фермер вивіз на елеватор пшениці втричі більше, ніж жита, всього 360 т. Скільки окремо жита і пшениці вивіз фермер на елеватор?*

Розв'язування. Позначимо масу жита, яку вивіз фермер, через *x*. Оскільки за умовою задачі пшениці він вивіз втричі більше, то маса пшениці становить *3x*. Разом пшениці і жита вин вивіз 360 тон. Отже, можна скласти таке просте рівняння: $x+3x = 360$. Його розв'язок такий:

$4x = 360$

$x=360:4$

$x=90.$

Через *x* позначене жито, яке вивіз фермер на елеватор. Пшениці вивезено втричі більше, тобто 90·3=270.

Відповідь. Фермер вивіз на елеватор 270 тон пшениці і 90 тон жита.

Перевірка: 270 + 90 = 360 (т).

Задача 2. *Різниця двох чисел рівна 30. Знайти ці числа, якщо половина першого числа у 5 разів більша від четвертини другого числа.*

Розв'язування.   Можна скласти рівняння або систему рівнянь.

а) Розв’язування за допомогою складання рівняння. Позначимо перше число через *x*, тоді друге число буде рівне *x – 30*. Співвідношення цих чисел за умовою задачі дає нам таке рівняння:

$$\frac{x}{2} = 5 \cdot \frac{x-30}{4}.$$

Для знаходження розв’язку помножимо обидві частини рівняння на 4. Отримаємо:

$$\frac{x}{2} \cdot 4 = 5 \cdot \frac{x-30}{4} \cdot 4;$$

$$2x = 5 \cdot (x-30);$$

$$2x = 5x - 150;$$

$$2x - 5x = -150;$$

$$-3x = -150;$$

$$3x = 150;$$

$$x = 150:3;$$

$$x = 50.$$

Ми знайшли перше число. Друге число рівне *x* – 30, тобто 50 – 30 = 20.

Відповідь. Перше число 50, друге число 20.

Перевірку правильності розв’язку зробіть самостійно.

б) Складемо систему рівнянь для розв’язування цієї самої задачі. Позначимо через *x* перше число, через *y* – друге число. За умовою задачі їх різниця рівна *30*, тому перше рівняння системи таке: *x – y = 30*. Аналізуємо задачу далі. Половина першого числа рівна $\frac{x}{2}$, а четверта частина другого числа рівна $\frac{y}{4}$. Отримаємо друге рівняння системи: $\frac{x}{2} = 5 \cdot \frac{y}{4}$. Отже, ми отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ \dfrac{x}{2} = 5 \cdot \dfrac{y}{4}. \end{cases}$$

Розв’яжемо її методом підстановки. Для цього визначимо з першого рівняння x і підставимо в друге рівняння:

$$x = y + 30;$$

$$\frac{y + 30}{2} = 5 \cdot \frac{y}{4}.$$

Щоб позбутися знаменника, помножимо обидві частини рівняння на 4:

$$2(y + 30) = 5y;$$

$$2y + 60 = 5y;$$

$$3y = 60;$$

$$y = 20.$$

Для знаходження значення x використаємо формулу $x = y + 30$ і отримаємо: $x = 50$.

Відповідь. $\begin{cases} x = 50 \\ y = 20. \end{cases}$

Наступним видом задач з величинами одного роду є задачі на знаходження чисел за їх сумами і різницями. Для їх розв’язування складають систему рівнянь виду $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b. \end{cases}$ Для прикладу розв’яжемо таку задачу.

Задача. *У двох мішках 90 кг цукру. В першому мішку на 10 кг цукру більше, ніж у другому. Скільки кілограмів цукру в кожному мішку?*

Розв’язування. Нехай в першому мішку було *x* кг цукру, тоді в другому мішку цукру було *y* кг. У двох мішках разом було 90 кг, тому перше рівняння буде таким: *x + y = 90*. Відомо, що в першому мішку на 10 кг цукру більше, тому друге рівняння має вид: *x – y = 10*. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ x - y = 10. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом алгебраїчного додавання. Додавши друге рівняння до першого, отримаємо:

$$x + y + x - y = 90 + 10,$$

$$2x = 100;$$

$$x = 50.$$

Першого рівняння знаходимо значення у: у = 90 – х, або у = 90 – 50; у = 40.

Відповідь. $\begin{cases} x = 50 \\ y = 40. \end{cases}$

Цю задачу можна розв'язати складанням не системи рівнянь, а звичайного рівняння. Позначимо через x кількість цукру в першому мішку, тоді в другому мішку цукру буде $x – 10$ кг. Разом в двох мішках є 90 кг цукру. Складаємо рівняння:

$$x + (x – 10) = 90.$$

Розкриваємо дужки, зводимо подібні члени, переносимо відомі члени в праву частину рівняння:

$$x + x – 10 = 90;$$

$$2x = 90 + 10;$$

$$2x = 100;$$

$$x = 50.$$

Це маса цукру в першому мішку. В другому мішку на 10 кг цукру менше, тобто $50 – 10 = 40$ кг.

Відповідь. В першому мішку 50 кілограмів цукру, а в другому – 40 кілограмів.

2. Задачі з величинами різного роду.

В задачах цього виду переважно мова йде про трійки величин, пов'язаних між собою різними залежностями, наприклад, час – відстань – швидкість; ціна – вартість – кількість і т.д. Розглянемо таку задачу.

Задача. *Фермер мав засіяти поле площею 280 га до певного строку, але засівав щодня на 7 га більше, ніж запланував, і тому закінчив сівбу на 2 дні раніше строку. За скільки днів фермер фактично засіяв поле?*

Розв'язування. В залежності від того, яку величину ми позначимо через *x*, у нас будуть виходити різні рівняння. Розглянемо одне із них. Позначимо через *x* кількість днів, які фактично тривала сівба. Тоді за планом на сівбу фермер планував витратити *x + 2* дні. Щодня фактично фермер засівав по $\frac{280}{x}$ га, а планував засівати по $\frac{280}{x+2}$ га. В умові сказано, що різниця між цими величинами становить 7 га. Ми отримали рівняння: $\frac{280}{x} - \frac{280}{x+2} = 7.$ Для його розв'язання перенесемо 7 в ліву частину і зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{280}{x} - \frac{280}{x+2} - 7 = 0\ ;$$

$$\frac{280(x+2) - 280x - 7x(x+2)}{x(x+2)} = 0;$$

$$560 - 7x^2 - 14x = 0;$$
$$x^2 + 2x - 80 = 0.$$

Розв'язком цього квадратного рівняння є два числа: $x_1 = 8$; x_2 = -10. Від'ємне значення *x* не задовольняє умову задачі, тому єдиний розв'язок *x =8.*

Відповідь. Фермер засіяв поле за 8 днів.

Слід відмінити, що складене рівняння є не єдиним можливим рівнянням для розв'язку такої задачі. В залежності від того, яку величину ми виберемо за невідому і позначимо її через x, ми отримаємо різні рівняння або систему рівнянь. Очевидно, що незалежно від вибраного рівняння відповідь має бути однакова. Для прикладу розв'яжемо останню задачу за допомогою системи рівнянь.

Позначимо через *x* кількість днів, які фактично затрачено на сівбу, і при цьому фермер фактично засівав по *y* гектарів щодня. Згідно плану він мав потратити на сівбу *x+2* дні і засівати щодня по *y-7* гектарів. Площа посіву незмінна – *280* га. Тому можна скласти таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x \cdot y = 280 \\ (x+2)(y-7) = 280. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему способом підстановки. З першого рівняння можна визначити у і підставити в друге рівняння: $y = \frac{280}{x}$, і отримаємо

$(x+2)\left(\frac{280}{x} - 7\right) = 280$, розв'язком якого є два числа: $x_1 = 8;\ x_2 = -10.$

Очевидно, що розв'язком задачі є тільки перший корінь.

Нерівності.

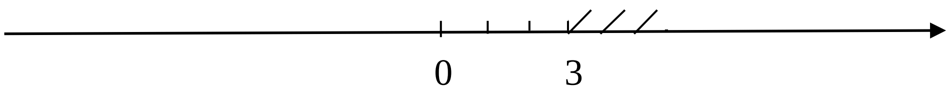
Означення. *Нехай f(x) та φ(x) – вирази із змінною, визначені на множині X. Тоді одномісний предикат виду f(x) > φ(x) або f(x) <φ(x), x∈X, називається* ***нерівністю*** *з однією змінною x.*

Нерівності, як і рівняння, означаються як одномісний предикат, тому всі поняття і властивості, визначені для рівнянь, стосуються і нерівностей. Для однозначності будемо розглядати нерівності виду *f(x) > φ(x)*, але всі поняття і властивості поширюються також і на нерівності виду *f(x) <φ(x)*.

З кожною нерівністю *f(x) > φ(x)* пов'язані дві множини: це множина *X* – множина допустимих значень змінної x, та множина *T* – множина розв'язків нерівності, причому *T*⊆ *X*.

Означення. *Областю допустимих значень (ОДЗ) нерівності $f(x) > \varphi(x)$ називається множина всіх тих значень змінної x, при яких вирази $f(x)$ та $\varphi(x)$ визначені і мають смисл, тобто приймають дійсні значення.* Значить, ОДЗ нерівності є переріз ОДЗ виразів $f(x)$ та $\varphi(x)$.

Множиною розв'язків нерівності, як правило, є не окремі числа, а числовий проміжок. **Розв'язати нерівність** – *означає знайти такі значення змінної x, при підстановці яких в нерівність замість змінної нерівність перетворюється в істинну числову нерівність.* Множина всіх таких значень змінної утворює множину $T \subseteq X$. Це значить, що жодне значення змінної x, яке не належить ОДЗ, не може бути розв'язком нерівності. Наприклад, ОДЗ нерівності $5x>x+12$ є множина всіх дійсних чисел, тобто $X=(-\infty,+\infty)$. Інша форма запису $X=\{x|x \in R, -\infty < x < +\infty\}$. Множина розв'язків заданої нерівності $x>3$, або $T=\{x|x \in R, x > 3\}$. Множину розв'язків нерівності зображають на числовій прямій.



Нерівності виду $f(x) > \varphi(x)$ або $f(x) < \varphi(x)$ називають **строгими нерівностями**. Крім них розглядають ще й нерівності виду $f(x) \geq \varphi(x)$, задані на множині X, які є диз'юнкцією нерівності $f(x) > \varphi(x)$ і рівності $f(x) = \varphi(x)$, яка є рівнянням. Такі нерівності називають **нестрогими**, а їх розв'язками є об'єднання множини розв'язків нерівності та рівняння.

Рівносильні нерівності.

Поняття логічного слідування і рівносильності зберігається і для нерівностей.

Означення. *Нехай задано дві нерівності* $f_1(x) > f_2(x)$ *і* $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$, *визначені на множині X⊂ R з множинами розв'язків* T_1 і T_2 *відповідно. Ці дві нерівності будуть рівносильні на множині X, якщо множини їх розв'язків співпадають, тобто коли* $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_2$.

Поняття рівносильних нерівностей має важливе значення при розв'язуванні нерівностей при заміні даних нерівностей іншими. Така заміна грунтується на теоремах про рівносильності нерівності.

Теореми про рівносильності нерівності.

Нехай задано нерівність $f_1(x) > f_2(x)$, $x \in X$, де x – ОДЗ нерівності.

Теорема 1. *Якщо до обох частин нерівності* $f_1(x) > f_2(x)$, $x \in X$, *додати алгебраїчний вираз F(x), який визначений на всій множині X, то одержимо нерівність* $f_1(x) + F(\mathrm{x}) > f_2(x) + F(\mathrm{x})$, *рівносильну заданій.*

Наслідок 1. Якщо до обох частин нерівності $f_1(x) > f_2(x)$, $x \in X$, додати те саме число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Наслідок 2.Члени нерівності можна переносити з однієї частини нерівності в другу, змінивши знак на протилежний.

Теорема 2. *Якщо алгебраїчний вираз F(x) додатній, не рівний 0 і визначений при всіх значеннях* $x \in X$, *то нерівності* $f_1(x) > f_2(x)$ *та* $f_1(x) \cdot F(\mathrm{x}) > f_2(x) \cdot F(\mathrm{x})$ *рівносильні.*

Теорема 3. *Якщо обидві частини нерівності* $f_1(x) > f_2(x)$, $x \in X$, *помножити на алгебраїчний вираз F(x), не рівний 0, від'ємний і визначений при всіх значеннях* $x \in X$, *то нерівності* $f_1(x) > f_2(x)$ *та* $f_1(x) \cdot F(\mathrm{x}) < f_2(x) \cdot F(\mathrm{x})$ *рівносильні.*

Наслідок 1. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Наслідок 2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Наслідок 3. Якщо змінити знаки в обох частинах нерівності і знак самої нерівності на протилежні, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Розв'язування нерівностей 1-го степеня з однією змінною.

Основним загальним методом розв'язування нерівностей є метод рівносильних перетворень, тобто таких перетворень, за допомогою яких із нерівності отримують більш просту, рівносильну нерівність. Розглянемо розв'язування нерівностей 1-ого степеня з однією змінною, яку в загальному випадку можна записати так: $a_1x + b_1 > a_2x + b_2$. Коефіцієнти a_1, a_2, b_1, b_2 це сталі дійсні числа, деякі з них можуть бути рівні 0. Щоб розв'язати останню нерівність, треба в лівій частині нерівності зібрати всі доданки, які містять x, а в правій – всі коефіцієнти без x: $a_1x - a_2x > b_2 - b_1$, або $x(a_1 - a_2) > b_2 - b_1$. Позначимо $a_1 - a_2 = a$; $b_2 - b_1 = b$, і отримаємо нерівність першого степеня виду $\boldsymbol{ax} > b$**.** В залежності від знаків коефіцієнтів цієї нерівності можуть бути такі розв'язки нерівності $ax > b$:

1) $a > 0, b > 0$.

За теоремами про рівносильні нерівності, при діленні додатного числа a на додатне число b отримаємо розв'язок нерівності: $x > \frac{b}{a}$. Отже, у цьому випадку множина істинності предикату $T = \left(\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

2) $a < 0, b > 0$.

В цьому випадку коефіцієнт b треба поділити на від'ємне число $-a$, тому нерівність змінить знак на протилежний, і розв'язок нерівності буде $x < -\frac{b}{a}$, тобто $T = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$.

3) $a > 0, b < 0$.

В цьому випадку для знаходження розв'язку нерівності треба поділити від'ємне число b на додатне число a, тому нерівність не змінить знак. Отже, розв'язок нерівності має вид: $x > -\frac{b}{a}$, або $T = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

4) $a < 0, b < 0$.

При таких значеннях коефіцієнтів треба знайти частку від ділення двох від'ємних чисел, яка буде додатною, але знак нерівності зміниться на протилежний: $x < \frac{b}{a}$, тобто $T = \left(-\infty, \frac{b}{a}\right)$.

5) $a = 0, b \neq 0$.

В цьому випадку нерівність не має розв'язку, тобто $T = \emptyset$.

6) $a \neq 0, b = 0$.

Якщо коефіцієнт $b = 0$, то розв'язок нерівності $ax > b$ визначається знаком коефіцієнту a: при додатному a розв'язком буде будь-яке додатне дійсне число, тобто $T = (0, +\infty)$, а при від'ємному a розв'язком нерівності є всі від'ємні дійсні числа, тому $T = (-\infty, 0)$.

Розв'язування квадратних нерівностей.

Графіком квадратної функції $y = ax^2 + bx + c$, як відомо із шкільного курсу математики, є парабола. Розміщення параболи на декартовій площині дає можливість розв'язати нерівність. Розглянемо різні випадки розміщення параболи, які визначаються коефіцієнтами a, b, c.

1) Коефіцієнт $\boldsymbol{a>0}$.

Вітки параболи напрямлені вгору. Якщо дискримінант додатній, то парабола перетинає вісь абсцис в двох різних точках (які є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$), і розв'язок можна записати у вигляді одного суцільного проміжку або двох нескінченних проміжків в залежності від знаку нерівності. Якщо дискримінант дорівнює нулю, то існує розв'язок тільки нестрогої нерівності, який визначається коренем рівняння. Якщо дискримінант від'ємний, то розв'язком нерівності $f(x) > 0$ множина всіх дійсних чисел R, а нерівність $f(x) < 0$ немає розв'язку.

2) Коефіцієнт ***a<0.***

Вітки параболи напрямлені вниз. Якщо дискримінант додатній, то парабола перетинає вісь абсцис в двох різних точках (які є коренями рівняння $ax^2 + bx + c = 0$), і розв'язок можна записати у вигляді одного суцільного проміжку або двох нескінченних проміжків в залежності від знаку нерівності. Якщо дискримінант дорівнює нулю, то існує розв'язок тільки нестрогої нерівності, який визначається розв'язком рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Якщо дискримінант від'ємний, то розв'язком нерівності $f(x) < 0$ є множина всіх дійсних чисел R, а нерівність $f(x) > 0$ немає розв'язку.

Отже, для розв'язування квадратної нерівності можна використати такий алгоритм:

1) перенести всі члени нерівності в ліву частину і звести подібні члени;

2) визначити знак коефіцієнту *a* і, відповідно, напрям віток параболи;

3) прирівняти квадратний тричлен до 0 і знайти корені отриманого квадратного рівняння, які є точками перетину параболи з віссю абсцис;

4) в залежності від знаку нерівності і напряму віток параболи знайти значення *x*, які є розв'язками нерівності.

Приклад. Розв'язати нерівність $2x^2 - 3x - 13 < -2x - 3$.

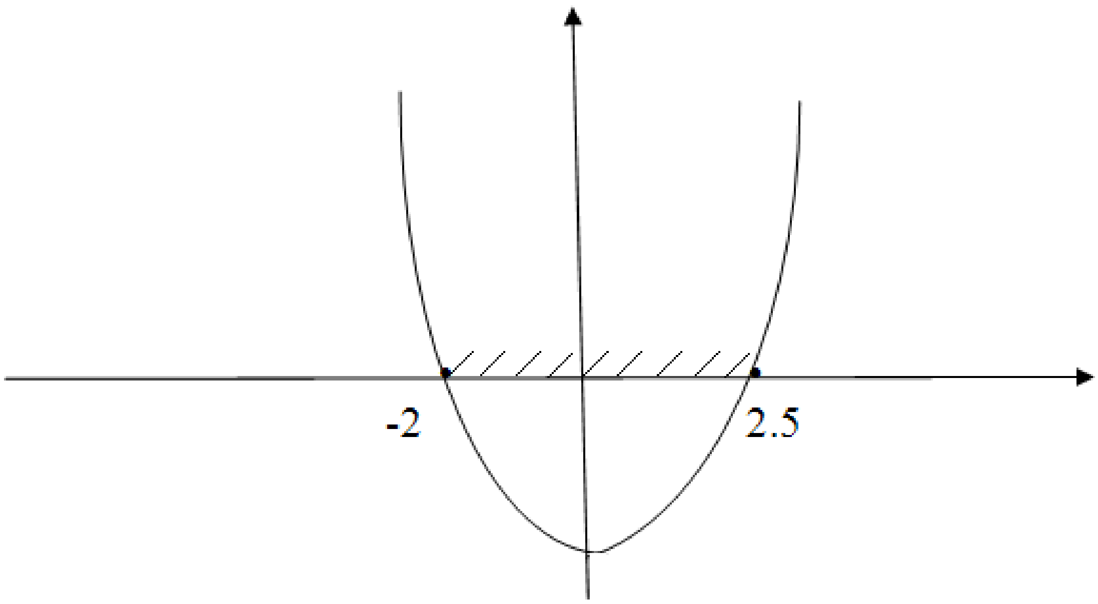
Розв'язування. Переносимо в ліву частину всі члени нерівності і зведемо подібні члени. Отримаємо:

$$2x^2 - 3x - 13 + 2x + 3 < 0;$$

$$2x^2 - x - 10 < 0.$$

Коефіцієнт *a* додатній (*a*=2), тому вітки параболи напрямлені вгору. Прирівняємо квадратний тричлен $2x^2 - x - 10$ до нуля і знайдемо корені квадратного рівняння $2x^2 - x - 10 = 0$. Дискримінант дорівнює $D = b^2 - 4ac = 1^2$-4·2·(-10)=81. Отже, $\sqrt{D} = \sqrt{81} = \pm 9$. Тому корені рівняння такі: $x_1 = \frac{1+9}{4} = 2.5$; $x_1 = \frac{1-9}{4} = -2$.

Знаючи корені рівняння (точки перетину з віссю x) та напрям віток параболи, можна схематично накреслити графік параболи:



Даний тричлен буде від'ємний (< 0) при всіх значеннях x, які знаходяться на проміжку (-2; 2.5). Отже, розв'язок нерівності: $x \in (-2; 2.5)$.

Системи нерівностей з однією змінною.

Оскільки нерівності x однією змінною є одномісними предикатами, то над ними можна виконувати логічні операції.

Означення. *Кон'юнкція нерівностей з однією змінною* $f_1(x) > f_2(x)$ *і* $F_1(x) > F_2(x)$, *визначених на множині X, називається системою нерівностей з однією змінною x і записується за допомогою фігурної дужки:*

$$\begin{cases} f_1(x) > f_2(x) \\ F_1(x) > F_2(x). \end{cases}$$

Розв'язати систему нерівностей – означає знайти значення змінної, які задовольняють кожну нерівність системи. Тому множина розв'язків системи – це переріз множин розв'язків нерівностей, які входять до неї. Особливість розв'язування системи нерівностей полягає в тому, що кожна нерівність розв'язується незалежно від інших, а суть системи полягає тільки у виборі спільного розв'язку для всіх заданих нерівностей, яких може бути 2, 3, 4, і т.д.

Приклад. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 2x+3>5 \\ 7x-12<2. \end{cases}$

Розв'язуємо кожну нерівність окремо і отримуємо результат: $\begin{cases} x>1 \\ x<2. \end{cases}$

Якщо позначити через T_1 множину розв'язків першої нерівності, через T_2 - множину розв'язків другої нерівності, то множина розв'язків системи нерівностей $T = T_1 \cap T_2$. Для даної системи $T_1 = (1, +\infty)$, а $T_2 = (-\infty, 2)$. Розв'язком системи нерівностей є переріз множин розв'язків кожної нерівності, тому $T = (1, 2)$, або $1 < x < 2$. Слід зауважити, що розв'язком системи нерівностей можуть будь-які числові проміжки, окремі числа або порожня множина.

Приклад. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 2x-5 \geq 2(3x-1)-9 \\ 3x+5 \geq x+8. \end{cases}$

Виконавши всі спрощення на основі теорем про рівносильні нерівності, отримаємо таку систему нерівностей: $\begin{cases} -4x \geq -6 \\ 2x \geq 3 \end{cases}$ або $\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{3}{2.} \end{cases}$

Тому розв'язком системи нерівностей є єдине число $x = \frac{3}{2}$.

Сукупності нерівностей і їх розв'язування.

Ми розглянули кон'юнкцію нерівностей, яка називається системою нерівностей. Тепер розглянемо диз'юнкцію нерівностей, яка фактично є диз'юнкцією предикатів (оскільки нерівність означається як одномісний предикат). Відповідно до теорії предикатів множина істинності диз'юнкції предикатів є об'єднанням множин істинності кожного предикату, який входить в сукупність.

Означення. *Диз'юнкція нерівностей з однією змінною* $f_1(x) > f_2(x)$ *і* $F_1(x) > F_2(x)$, *визначених на множині X, називається сукупністю нерівностей з однією змінною x і записується за допомогою квадратної дужки:*

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) > f_2(x) \\ F_1(x) > F_2(x). \end{array}\right.$$

Розв'язати сукупність нерівностей – означає знайти значення змінної, які задовольняють хоча б одну нерівність сукупності. Тому множина розв'язків сукупності нерівностей є об'єднанням множин розв'язків кожної нерівності зокрема. Якщо позначити через T_1 множину розв'язків першої нерівності, через T_2 - множину розв'язків другої нерівності, то множина розв'язків системи нерівностей $T = T_1 \cup T_2$. В сукупність нерівностей, як і в їх систему, може входити не тільки дві, а будь-яка кількість нерівностей, кожна із яких розв'язується незалежно від інших і відповідно, шукається об'єднання (для сукупності) або переріз (для системи) відповідного числа множин істинності (розв'язків) кожної нерівності.

Окремо слід розглянути розв'язування нерівностей виду $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ (або $f(x) \cdot \varphi(x) > 0$) та $\frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0$ (або $f(x) \cdot \varphi(x) < 0$) .

Розв’язування нерівності $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ $(f(x)\cdot\varphi(x) > 0)$ зводиться до відшукання розв’язку сукупності таких систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ \varphi(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв’язування нерівності $\frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0$ $(f(x)\cdot\varphi(x) < 0)$ зводиться до відшукання розв’язку сукупності таких систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Та виконання операцій перерізу множин істинності (для системи) і об’єднання множин істинності (для сукупності) нерівностей.

Практичні завдання.

I. Розв’язати рівняння.

1. $\frac{18}{x-3{,}6} = 1{,}2$

2. $(8x-1)(2x-3)-(4x-1)^2 = 38$

3. $(x-4)(x+4) = 7$

4. $x^2 = 10-3x$

5. $1{,}4(y+5) = 7+1{,}4y$

6. $x^4 - x^2 = \frac{(1+2x^2)(2x^2-1)}{4}$

7. $0{,}4(7x-2)-1{,}6+1{,}7x = 1$

8. $-1{,}5x-9 = 0$

9. $(6-x)(x+6)-(x-11)x = 36$

10. $1{,}3x = 54 + x$

11. $0{,}8x + 14 = 2 - 1{,}6x$

12. $9x^2 - \frac{(12x - 11)(3x + 8)}{4} = 1$

13. $0{,}15x + 6 = 51$

14. $-0{,}7x + 2 = 65$

15. $\frac{1 - 3y}{11} - \frac{3 - y}{5} = 0$

16. $7 = 6 - 0{,}2x$

17. $15 - p = \frac{1}{3}p - 1$

18. $\frac{(y+1)^2}{12} - \frac{1 - y^2}{24} = 4$

19. $1\frac{1}{3}x + 4 = \frac{2}{3}x + 1$

20. $0{,}5z + 11 = 4 - 3z$

21. $\frac{1}{6}y^3 - y = 0$

22. $1{,}2n + 1 = 1 - n$

23. $1{,}7 - 0.3m = 2 = 1{,}7m$

24. $x = -x$

25. $v - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - 1{,}2v$

26. $\frac{1}{6}y - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}y$

27. $0{,}3(0{,}8 - y) = 3{,}2 + y$

28. $\frac{2}{9}y = 1\frac{2}{3}$

29. $2{,}5 - 0{,}2b = 4{,}1 - 0{,}5b$

30. $(y + 4) - (y + 1) = 6y$

31. $6x - (8x - 12) = 16{,}8$

32. $20x = 19 - (3x + 12x)$

33. $12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$

34. $1{,}6x - (x - 2{,}8) = (0{,}2x + 1{,}5) - 0{,}7$

35. $(0{,}5x + 1{,}2) - (3{,}6 - 4{,}5x) = (4{,}8 - 0{,}3x) + (10{,}5x + 0{,}6)$

36. $0{,}6 + (0{,}5y - 1) = y + 0{,}5$

37. $5(2y - 4) = 2(4{,}5y - 12)$

38. $0{,}6y - 1{,}5 = 0{,}3(y - 4)$

39. $0{,}5(4 - 2b) = b - 1{,}8$

40. $15(x + 2) - 30 = 12x$

41. $6(1 + 5x) = 5(1 + 6x)$

42. $3(2{,}5 - 2x) = 13{,}5 - 14x$

43. При яких значеннях параметра a рівняння $ax^2 - 3x + 1 = 0$ має єдиний корінь ?

44. Скільки коренів має рівняння $ax^2 - (a + 2)x - 3 = 0$ у залежності від значення параметра a ?

45. При яких значеннях параметра a рівняння $ax^2 - ax + 6 = 0$ має два цілих додатних корені ?

46. $\frac{x}{x-2} - \frac{8}{x+5} = \frac{14}{x^2 + 3x - 10}$

47. $\frac{3x+15}{x} - \frac{4x+20}{1-x} = \frac{25-x^2}{x^2 - x}$

48. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{8}{x^2 - 4x}$

49. $\frac{14x^2}{16-x^2} + \frac{11}{x-4} = \frac{49}{x \quad +4}$

50. $\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{1}{3x - x^2} = \frac{3}{2x+6}$

51. $\frac{3}{(2-y)^2} - \frac{3}{(y+2)^2} = \frac{14}{y^2 - 4}$

52. $\frac{2}{4-x^2} - \frac{1}{2x-4} - \frac{7}{2x(x+2)} = 0$

53. $\frac{3}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} = -\frac{4}{(x+1)^2}$

54. $\frac{10}{x^2 - 4} - \frac{3}{2x-4} = \frac{1}{2}$

55. $x - \frac{x^2 - 17}{x \quad - 3} = \frac{5}{x}$

II. На підставі залежності між компонентами і результатом арифметичної дії знайти невідому величину:

1. $1225:\frac{(13x-30)\cdot 4}{12}-10)=7$

2. $((\frac{(120+x)\cdot 40}{2}+200):131):20=1$

3. $((x-63145)\cdot 275-8647):6757=229$

4. $125125:((1001-\frac{1100x-160}{24})\cdot 55)=25$

5. $66\frac{3}{5}:(5+3\frac{1}{5}:\frac{(\frac{4}{5}-\frac{2}{15}\cdot x)}{0,5})-7\frac{3}{20}=\frac{1}{4}$

6. $(2\frac{4}{7}+\frac{73}{105}):((2\frac{3}{4}x+4\frac{1}{2}):21\frac{3}{7})-1\frac{1}{8}=5\frac{7}{8}$

7. $2-\left(\frac{5\frac{5}{6}}{9\frac{7}{30}-\frac{19}{99}x\cdot\frac{1}{18}}-7{,}24\right):2{,}4=0{,}85$

8. $\left(\left(6\frac{3}{7}-\frac{\frac{3}{4}x-2}{\frac{7}{20}}\right)\cdot 2\frac{4}{5}-1\frac{3}{4}\right):\frac{1}{20}=165$

9. $\left(6\frac{1}{5}+\frac{57}{16}:\left(2\frac{3}{4}:\left(3\frac{1}{2}x-45\right)-\frac{7}{24}\right)\right)\cdot\frac{3}{38}=1\frac{1}{5}$

10. $10{,}56:\left(0{,}15+15{,}2:\frac{0{,}572-\frac{5x}{6}}{0{,}0045}\right)-9{,}225=0{,}375$

11. $\left(3\frac{1}{4}-\frac{\left(6\frac{9}{16}-2\frac{1}{2}\cdot x\right)\cdot\frac{53}{100}}{\frac{3}{4}}\right):6\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$

12. $\frac{1-\left(0{,}3125-2\frac{7}{24}:12\frac{2}{9}\right)\cdot 0{,}8}{(x-0{,}416):6{,}05-1{,}98}=9$

13. $0{,}45:\left(\frac{3{,}3\cdot(1{,}75x-0{,}85}{0{,}045}+2{,}4\right)=0{,}05$

14. $\left(3{,}25-\dfrac{(6{,}5625-2{,}5x)\cdot 0{,}6}{\frac{3}{4}}\right):6\dfrac{2}{3}+0{,}9=1{,}2$

15. $109{,}2:\left(5{,}36+2{,}5\cdot\dfrac{(0{,}84-1{,}68x)\cdot 3}{0{,}5}\right)-1{,}7=8{,}8$

16. $0{,}24:\left(\dfrac{(0{,}5x-1{,}8)\cdot 0{,}1}{0{,}025}+1{,}2\right)=0{,}02$

17. $30-13\dfrac{3}{5}:\left(\dfrac{9}{11}-\dfrac{3}{5}\cdot x\right)\cdot\dfrac{27}{44}=19\dfrac{4}{5}$

18. $1\dfrac{7}{10}:\left(1\dfrac{2}{3}\cdot x-3\dfrac{3}{4}\right):\dfrac{8}{85}=1\dfrac{5}{12}$

19. $\left(1-\left(\left(100-\dfrac{0{,}625}{0{,}105-x}\right)\cdot 0{,}00001\right)\right)\cdot 100+0{,}0375=100$

20. $\left(2{,}37-\left(40{,}2-\dfrac{0{,}0016}{0{,}0075+x}\right)\cdot 0{,}059\right):0{,}125=0{,}08$

21. $\left(0{,}72-\left(10-\dfrac{9{,}99999}{1{,}1-x}\right)\cdot 0{,}625\right):0{,}225=0{,}7$

22. $(74\cdot 33:6-x:5)\cdot 29-3120=2680$;

23. $((5x+178)\cdot 15+90):45=180$;

24. $200:(((7+\dfrac{154}{x})+132)\cdot 5-630)=2$;

25. $((\dfrac{(120+x)\cdot 40}{2}+200):131):20=1$;

26. $315:(36-(\dfrac{(115+29)\cdot 3}{5x-198}+15))=21$;

27. $(\dfrac{1000000-7x}{8}\cdot 5+529210)\cdot 10-9999999=1$;

28. $200-18:(372:3x-1)-28=166$;

29. $1000-3\cdot(\dfrac{750}{3x}-1):7-809=170$;

30. $(7x+222171:(100000-97843)):33=64$;

31. $564-(48\cdot(1683-(197+7x)):1516)=540$.

32. $208:\left(112-\dfrac{(200-3x)\cdot 4}{23}\right)=2$

33. $315:\left(36-\left(\frac{(115+29)\cdot 3}{5x-198}+15\right)\right)=21$

34. $200-18:(372:3x-1)-28=166$

35. $1000-3\cdot\left(\frac{750}{3x}-1\right):7-809=170$

36. $\left(300:\frac{(25x+175)\cdot 6}{8}+38\right):20=1$

III. На основі взаємозв′язку між компонентами та результатом дії знайти *x*:

1. (8 год.18 хв. + 10 год. 20 хв. + *x*) : (50 хв. 12 сек. – 48 хв. 36 сек.) = 900

2. (1 дм 8 см ·((4 м 615 мм -*x*·8) : 2 дм41 мм) – 1 м 2 дм) : 1 м 5 дм = 1

3. 49 т 4 ц : 913 т : (944 : *x* – (6 кг 125 г ·6) : (1 кг –260 г))) = 38

4. 1 км – 31 км 518 м : *x* + 571 км 154 м :809 =1 км 500м

5. 7 га 13 70 кв.м : 234·*x* + 6 а 95 кв.м · 90 – 28 га 84 кв.м : 28 = 11 га 38 а 52 кв.м

6. 2 куб м 786 куб.дм – *x*:1235 + 408 куб.дм ·2700 =1103куб.м600куб.дм

7. ((12 куб.м 960 куб.дм : 160 куб. дм – 15 куб. дм : *x*) · 10 + 49) : 101 = 9

8. (((19 кв.м ·25 – *x*) : 1000) + 17 кв. м 97 кв.дм ·5 кв.см· 8000 – 3 кв.дм 96 кв.см) : 623 = 14 кв.дм 48 кв.см

9. (195 км 139 м : 457 +*x* · 383 + (1000 км 24 м –- 327 км 256 м) : 96 · 125) : 30 км = 29 км 227 м.

10. 564кг – (48 · (1683кг – (197кг + 7*x*)) : 1516) = 540 кг.

IV. Розв'язати системи рівнянь.

1. $\begin{cases} 2x+4y=5(x-y) \\ x^2-y^2=6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x+y+3=2x-y \\ x^2-y \ \ =2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y-2=0 \\ 3x-2y-9=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-y=5 \\ 3x-2=y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+2y=10 \\ x-y=-1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} ax+y=c \\ x+b=m \end{cases}$

8. $\begin{cases} (x-2)(y+3)=160 \\ y-x=1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{3}y=-3 \\ 6{,}2x+0{,}1y=39 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12} \\ x+y=10 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2(3x-2y)+1=7x \\ 12(x+y)-15=7x+10y \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{2m}{5}+\dfrac{n}{3}=1 \\ \dfrac{m}{10}-\dfrac{7n}{6}=4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x-y=11 \\ 6x-2y=13 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5y+8(x-3y)=7x-12 \\ 9x+3(x-9y)=11y+46 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 7x-\dfrac{3y}{5}=-4 \\ x+\dfrac{2y}{5}=-3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -2(a-b)+16=3(b+7) \\ 6a-(a-5)=-8-(b+1) \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2-2y=7 \\ x=3y+2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2+xy-y^2=11 \\ x-2y=1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=-8 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2-y^2=8 \\ x-y=4 \end{cases}$

V. Задачі з цілими числами (розв’язати за допомогою складання рівнянь).

1. Сума цифр двохзначного числа дорівнює 6. Якщо до цього числа додати 18, то отримаємо число, записане в зворотньому порядку. Знайдіть це число.

2. Якщо деяке двохзначне число помножити на суму його цифр, то отримуємо 405. Якщо число, написане в зворотньому порядку, помножити на суму його цифр, то отримуємо 486. Знайдіть це число.

3. Сума двох чисел дорівнює 15, а їх середнє арифметичне на 25% більше середнього геометричного. Знайдіть ці числа.

4. Різниця двох чисел дорівнює 48, різниця між середнім арифметичним і середнім геометричним цих чисел 18. Знайдіть ці числа.

5. Середнє геометричне двох чисел на 12 більше меншого з чисел, а їхнє середнє арифметичне на 24 менше більшого із чисел. Знайдіть ці числа.

6. Знайдіть три числа, із яких друге більше за перше на стільки, на скільки третє більше другого, якщо відомо, що добуток двох менших чисел дорівнює 85, а добуток двох більших дорівнює 115

7. Знайдіть двохзначне число, знаючи, що число його одиниць на 2 більше числа десятків і що добуток шуканого числа на суму його цифр рівний 144.

8. Добуток цифр двохзначного числа в 2 рази більше суми його цифр. Якщо від шуканого числа відняти 27, то отримаємо число, записане в зворотньому порядку. Знайдіть це число.

9. Добуток цифр двохзначного числа в 3 рази менше від самого числа. Якщо до нього додати 18, то отримаємо число, записане в зворотньому порядку. Знайдіть це число.

10. Сума квадратів цифр двохзначного числа дорівнює 13. Якщо від нього відняти 9, то отримаємо число, записане в зворотньому порядку. Знайдіть це число.

11. Три натуральних числа утворюють геометричну прогресію. Знайти ці числа, якщо їхня сума дорівнює 38.

VI. Розв'язати нерівності:

1. $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<0$.
2. $x-\frac{x-1}{2}+\frac{x+3}{4}>2$
3. *0,3/(x-x²-1)<0* $0{,}3/(x-x^2-1)<0$
4. $6<\frac{2}{7}(x+4)$.
5. $3/(x-2)<1$.
6. $1/(x-1)\le 2$.
7. $x^2+2x-48<0$
8. $(x^2-5x+4)/(x^2-4)\le 1$.
9. $(x+1)/(x-1)\ge (x+5)/(x+1)$.
10. $\frac{4x-2}{3}+\frac{5+x}{4}<3-\frac{1-x}{2}$
11. $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<0$

12. $\frac{7x-6}{3x-4}<2$; $\quad x^2+11x+14\le 2x^2+3x+5$
13. $\frac{2x-1}{x-4}<\frac{1}{2}$; $\quad 2x^2+6x-6\ge 3x^2-2x+6$
14. $\frac{x-1}{x-4}>3$; $\quad 2x^2+6x-6\ge 3x^2-2x+6$
15. $\frac{12-x}{x-5}>-3$; $\quad 2x^2+x+17\ge 3x^2+4x+7$
16. $\frac{9x+12}{x+5}\le 4$; $\quad x^2-2x+8<2x^2-3x+2$
17. $\frac{2x+7}{3x+6}>6$; $\quad x^2-5x+11\ge 2x^2-7x+3$

18. $\frac{12x-15}{3x-24} \le -3;$ $2x^2-5x+9<3x^2-4x+3$

19. $\frac{2x-16}{4x-7} > -8;$ $2x^2-x+17 \ge 3x^2-3x+2$

20. $\frac{18x-7}{4+3x} \le 3;$ $x^2-7x+17<2x^2-3x+5$

VII. Розв'язати задачі алгебраїчним методом.

1. Дві бригади зібрали разом 1456 ц жита. Перша бригада зібрала жито з 46 га, друга – з 35 га. Скільки центнерів жита в середньому збирала кожна бригада з одного гектара, якщо перша бригада збирала в середньому з одного гектара на 7 ц більше, ніж друга?

2. На годівлю 15 корів і 8 коней відпускається в середньому 162 кг сіна на день. Скільки сіна видавали щоденно кожному коню і кожній корові, якщо відомо, що на кожний день 5 коням видається на 3 кг більше, ніж 7 коровам?

3. На платформу були навантажені дубові та соснові колоди, всього 300 колод. Відомо, що всі дубові колоди важили на 1 т менше, ніж соснові. Визначити, скільки було соснових і дубових колод, якщо дубова важила 46 кг, а соснова – 28 кг.

4. Два майстри одержали за роботу 117 грн. Скільки одержав за день кожен з них, якщо відомо, що перший майстер працював 15 днів, а другий – 14 днів, і перший з них одержував за 4 дні на 11 грн. більше, ніж другий за 3 дні?

5. На 10 грн. купили 8 кг груш першого сорту і 20 кг груш другого сорту. Яка вартість одного кілограма груш кожного сорту, якщо 5 кг груш першого сорту на 40 коп. дорожчі, ніж 7 кг другого сорту?

6. На середині шляху між станціями А і В потяг було затримано на 10 хв. Щоб прибути до станції В за розкладом машиністу довелося збільшити початкову швидкість на 12 км/год. Знайти початкову швидкість потяга, якщо відстань між станціями дорівнює 120 км.

7. Члени шкільного гуртка натуралістів відправилися на катері для збирання лікарських рослин. Пропливши за течією 35 км, вони зробили

зупинку на 3 год, після чого повернулися назад. Знайти швидкість катера в стоячій воді, якщо вся подорож тривала 7 год, а швидкість течії річки 3 км/год.

8. Швидкий потяг пройшов 400 км на одну годину швидше товарного. Яка середня швидкість кожного потяга, якщо швидкість товарного потяга на 20 км/год менша, ніж швидкого?

9. Колоні автомашин було дане завдання перевести із складу в річковий порт 60 т вантажу. У зв'язку з несприятливими погодними умовами на кожну автомашину довелося вантажити на 0,5 т менше, ніж передбачалося, а тому колону збільшили на 4 автомашини. Скільки автомашин було спочатку в колоні?

10. Одна ланка зібрала з своєї ділянки 875 ц пшениці, а друга з ділянки, меншої на 2 га, – 920 ц пшениці. Знайти врожайність пшениці в кожній ланці, якщо відомо, що з одного гектара в другій ланці зібрали на 5 ц більше, ніж у першій.

11. Два землекопи одержали за копання канави 250 грн. Один землекоп викопав 20 *м* канави, а другий — 30 *м.* Скільки грошей повинен одержати кожний землекоп?

12. За 10 днів квітня завод випустив 400 машин. Скільки машин завод випустить за останні 16 робочих днів цього місяця, якщо він випускатиме за день на 10 машин більше від попереднього?

13. На одному возі доставили 10 ящиків цвяхів, а на другому —8 таких самих ящиків цвяхів. Скільки вантажу доставили на обох возах, якщо на першому возі доставлено 300 *кг* цвяхів?

14. На 2 вози навантажили 900 *кг* картоплі. На перший віз навантажили 10 мішків, а на другий — 8 мішків. Скільки кілограмів картоплі навантажили на другий віз, якщо всі мішки з картоплею були однакової ваги?

15. Дві друкарки заробили разом 600 грн. Одна працювала 5 днів, а друга — 7 днів. На скільки гривень друга друкарка повинна одержати більше, ніж перша?

16. Два теслярі одержали разом за роботу 260 грн. Один працював 3 дні по 8 годин, а другий — 4 дні по 7 годин на день. Скільки грошей повинен одержати кожний тесляр?

17. Три хлопчики поділили між собою 80 горіхів так, що першому припала одна частина, другому — три таких частини, а третьому — в два рази більше, ніж другому. Скільки горіхів одержав кожний хлопчик?

18. Між трьома дитячими будинками поділили 280 *м* матерії так, що другому припало в 2 рази більше, ніж першому, а третьому — в 4 рази більше, ніж першому. Скільки метрів матерії одержав кожний дитячий будинок?

19. За 3 дні льотчик пролетів 2700 *км.* Першого дня він пролетів у два рази меншу віддаль, ніж другого, а третього дня — в 3 рази більшу віддаль, ніж другого. Скільки кілометрів льотчик пролетів другого дня?

20. За 3 роки завод випустив 18000 вагонів. За перший рік завод випустив вагонів у 3 рази менше, ніж за другий, і в 5 раз менше, ніж за третій. Скільки вагонів завод випустив за третій рік?

21. У трьох кусках 90 *м* матерії. У другому куску на 1 *м* більше, ніж у першому, а в третьому на 2 *м* більше, ніж у першому. Скільки метрів матерії в кожному куску?

22. За три дні пароплав пройшов 1560 *км.* Другого дня він пройшов на 40 *км* менше, ніж першого, а третього дня — на 20 *км* більше, ніж другого. Скільки кілометрів пройшов пароплав за кожний з цих трьох днів?

23. У трьох ящиках 68 *кг* цукерок; у другому ящику — на 3 *кг* більше, ніж у першому, а в третьому — на 5 *кг* більше, ніж у першому. Скільки кілограмів цукерок у кожному ящику?

24. За 3 роки в одному місті збудовано 690 будинків. За другий рік збудовано на 30 будинків більше, ніж за перший, і на 60 будинків менше, ніж за третій рік. Скільки будинків збудовано за третій рік?

25. Перший рибалка повинен проплити на човні до місця зустрічі 35 км, а другий - на $31\frac{3}{7}$ % менше. Щоб прибути до місця зустрічі одночасно з другим, перший виходить на 30 хв раніше другого і робить в середньому

на 2 км в год більше, ніж другий. Знайдіть швидкість, з якою рухався кожен рибалка і скільки часу кожен був в дорозі.

26. Два велосипедиста виїхали одночасно назустріч один одному із пунктів А та В, відстань між якими 28 км. Через годину їзди вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рухатися з тією ж швидкістю. Перший прибув в пункт В на 35 хв раніше чим другий в пункт А. Яка швидкість кожного велосипедиста?

27. Із А в В через рівні проміжки часу відправляються три автомобіля. В пункт В вони прибувають одночасно, потім виїжджають в пункт С, розміщений на відстані 120 км від пункту В. Перший автомобіль прибуває в пункт С через годину після другого, а третій автомобіль, прибувши в пункт С, одразу повертає назад і в 40 км від С зустрічає перший автомобіль. Знайдіть швидкість першого автомобіля.

28. Пішоход пройшов першу половину шляху зі швидкістю 4 км/год. З якою швидкістю він повинен рухатись другу половину шляху, щоб йогосередня швидкість на всьому шляху дорівнювала 5 км/год?

29. Кожна з п’яти труб незалежно наповнює басейн водою. Перша,друга і третя труби, працюючи разом, наповнять басейн за 6 годин;перша, третя, четверта і п’ята – за 3 години; друга, четверта і п’ята – за 4години. За скільки годин наповнить басейн друга труба ?

30. Кожна з трьох труб незалежно наповнює басейн водою. Якщопрацюватимуть перша і друга труби, басейн наповниться за дві години,якщо перша і третя, то за три години, а якщо друга і третя, то за чотири години. За який час басейн буде заповнений, якщо працюватиме тільки третя труба ?

31. Спочатку нафта подорожчала на 10% , а потім подешевшала на 15 % . На скільки відсотків подешевшала нафта після двох змін цін ?

32. Спочатку стартову ціну товару зменшили на 10 % і по такій ціні було продано 40 % всього товару. Потім наявну ціну збільшили на 18 % і по такій ціні продали решту товару. Чи варто було змінювати ціни ? Можливо, краще було продати увесь товар за стартовою ціною ?

33. Сума трьох чисел дорівнює S. Друге число на а одиниць більше від першого, але на b одиниць менше, ніж третє. Знайти ці числа.

34. Турист проїхав 280 км різними видами транспорту. На автомобілі він проїхав на 180 км більше, ніж на пароплаві, а на автомобілі і на пароплаві разом на 240 км більше, ніж на велосипеді. Яку віддаль проїхав турист кожним видом транспорту?

35. На складі підручників з математики було в 4 рази більше, ніж з географії, а з історії в 2 рази менше, ніж з географії. Підручників з історії було на 30450 менше, ніж з математики. Скільки підручників з математики відправлено із складу в школи, якщо після відправки їх залишилося на 28620 менше, ніж відправлено?

VIII. Розвязати системи нерівностей.

1. $\begin{cases} 2x-3>4x+2 \\ 3(x-1)>2(4-x). \end{cases}$

2. $\begin{cases} -3(2x-4)+5>3(x+7) \\ -1.6(5x+8)<4(2.5-2x). \end{cases}$

3. $\begin{cases} -5x-6<2(-x-3)+4x \\ 3x-2(x+8)<2+3x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-(2x+22)<5(3x-1)-8 \\ 2x-6(1-x)+5<7x-2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2(4x-3)+1>4x-2(3-2x) \\ 2(3x+(7x-4))<9+3(x+(2x-5)). \end{cases}$

6. $\begin{cases} 9+2(3x+1)-5<6-2(3-2(x-1)) \\ 3+(2x-(4x+2))<7+6(3x\pm 4(2-x)). \end{cases}$

7. $\begin{cases} 9(2x-1)+4(-x-2)>-(8x-2)+2(5-2x) \\ 3(5x-(2x-4))<16-2(7+6(2x-5)). \end{cases}$

8. $\begin{cases} -5x+3(4x-3)+1>24x-7(12-4x)+36 \\ 28x-9(2-x)+15\big(x+(5x-2)\big)<1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 25\big((3x-3)+4(x-5)\big)>2x+23(x-(14x+7)) \\ 4x+12>32-6(2x-(10x-4)). \end{cases}$

10. $\begin{cases} 18(-2x-1)+17>4(x-8(2+7x)) \\ 5x-6<29-4(x+7(6x-2)). \end{cases}$

Завдання для індивідуального виконання.

В-1

1. Розв’язати рівняння:

$$\frac{x+10}{x(x-1)}-1=-\frac{1}{4}$$

2. Розв’язати нерівність:

$$(2x-3)(5x+1)\le 2x+\frac{2}{5}$$

3. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x-y=17 \\ y+6x=23 \end{cases} \text{c}$$

4. Розв’язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(0.3x-1)<0.8(x+0.4) \\ 0.3(2-x)<5(x+1) \end{cases}$$

В-2

1. Розв’язати рівняння:

$$\frac{2x}{2x+3}+\frac{5}{3-2x}+\frac{4x^2+10}{4x^2-9}=-7$$

2. Розв’язати нерівність:

$$(3x-1)(x+3)\ge x(1+6x)$$

3. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x-10y=11 \\ 5y+7x=19 \end{cases}$$

4. Розв’язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2.5x-0.12\ge 0.6x+0.07 \\ 1-2x>(-x-4)\cdot\frac{1}{3} \end{cases}$$

В-3

1. Розв’язати рівняння:

$$\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}-\frac{2}{1-x^2}=-\frac{4}{3}$$

2. Розв’язати нерівність:

$$(x+1)(x-1)\le 2(5x-10\frac{1}{2})$$

3. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x = y + 50 \\ -3.4x + 2.6y = 14 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3(x-2)(x+2) - 3x^2 < x - \dfrac{x+5.4}{8} \\ \dfrac{1}{5}(5x-4) > 4 - 5x + \dfrac{4-x}{3} \end{cases}$$

В-4

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{3(x^2 - 2x + 1)}{1 - x} = 7.5$$

2. Розв'язати нерівність:

$$-x(x+7) > (x-2)(x+2)$$

3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8x - 4y = 6 \\ 13x + 6y = -1 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} (x-4)(5x-1) - 5x^2 > x + 1 \\ 3x - 0.4) < (2x - 0.6) \cdot \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8}x \end{cases}$$

В-5

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{2x^2}{x-2} = \frac{-7x+6}{2-x}$$

2. Розв'язати нерівність:

$$(x+4)^2 < 3x + 40$$

3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3} - \dfrac{x-2y}{2} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2x+y}{2} - \dfrac{x+2y}{3} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

4. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x + 1.4 < \dfrac{3x-7}{5} \\ 2x > 3 - \dfrac{2x}{5} \end{cases}$$

В-6

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{2y+3}{2y-1}=\frac{y-5}{y+3}$$

2. Розв'язати нерівність:

$$3x(2x+3)>2x(x+4.5)+2$$

3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y+x^2=5x \\ 2y+5=x \end{cases}$$

4. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 6x(x-1)-3x(2x-1)<x \\ 0.5x-3.7<0.2x-0.7 \end{cases}$$

В-7

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{2x-1}{x+7}=\frac{3x+4}{x-1}$$

2. Розв'язати нерівність:

$$(2x-3)^2>11x-19$$

3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x-y+1}{2}+\frac{x+y-1}{5}=7 \\ \frac{x-y+1}{3}+\frac{x+y-1}{4}=-3 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 1+\frac{1+x}{3}>\frac{2x-1}{6}-2 \\ 3x-\frac{x}{4}>4 \end{cases}$$

В-8

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^2-4x}$$

2. Розв'язати нерівність:

$$\frac{x(x+1)}{3}-2\geq\frac{8+x}{4}$$

3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 5(x - y) \\ x^2 - y^2 = 6 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(6x + 4) - \frac{1}{6}(12x - 5) \le 4 - 6x \\ \frac{1 - 2x}{4} - 2 < \frac{1 - 5x}{8} \end{cases}$$

В-9

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{2x - 5}{x + 5} - 4 = 0$$

2. Розв'язати нерівність:

$$\frac{x^2 + x}{2} < \frac{8x - 7}{3}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x^2 + y = 6 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} 0.7x - 3(0.2x + 1) \le 0.5x + 1 \\ 0.3(1 - x) + 0.8x \ge x + 5.3 \end{cases}$$

В-10

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{10}{2x - 3} = x - 1$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$\frac{4x^2 - 1}{3} < x(10x - 9)$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y + 8 = xy \\ y - 2x = 0 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(3x - 2) + \frac{1}{6}(12x + 1) > 0 \\ \frac{1}{7}(14x - 21) + \frac{2}{9}(9x - 6) < 0 \end{cases}$$

В-11

1. Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{x^2+4x}{x+2}=\frac{2x}{3}$$

2. Розв’яжіть нерівність:

$$\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{5}x>\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{4}$$

3. Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x+y=8 \end{cases}$$

4. Розв’яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} 0.2(5x-1)+\frac{1}{3}(3x+1)<x+5.8 \\ 8x-7-\frac{1}{6}(6x-2)>x \end{cases}$$

В-12

1. Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{8x-5}{x}=\frac{9x}{x+2}$$

2. Розв’яжіть нерівність:

$$0.7x^2\le 1.3x+2$$

3. Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2-xy+y^2=13 \end{cases}$$

4. Розв’яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3(y-1)-4(y+8)<5(y+5) \\ 1.2(1+5y)-0.2<5(1-3y)-3y \end{cases}$$

В-13

1. Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=1$$

2. Розв’яжіть нерівність:

$$7>0.4x+0.2x^2$$

3. Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2+3xy=1 \\ 3y+x=0 \end{cases}$$

4. Розв’яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} 15(y-4)-14(y-3)<y(y-9)-y^2 \\ \dfrac{5-y}{3}-y>14-\dfrac{2-y}{6} \end{cases}$$

В-14

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{2x-2}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=5$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$x^2-2x+2.91<0$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2+5x-3y=-12 \\ 2y-7x=8 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} (2y-1)(3y+2)-6y(y-4)<48 \\ \dfrac{y-1}{8}-\dfrac{6y+1}{4}-1<0 \end{cases}$$

В-15

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{4}{9x^2-1}-\frac{4}{3x+1}=\frac{5}{1-3x}$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$0.2x^2-10x+125>0$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2-6x+y=0 \\ 2x-\dfrac{1}{2}y=1 \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{5y-1}{6}-\dfrac{2y-1}{2}>0 \\ 1-\dfrac{y+4}{3}<0 \end{cases}$$

В-16

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{3}{x}+\frac{4}{x-1}=\frac{5-x}{x^2-x}$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$x^2-9x+16<-4$$

3. Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$$

4. Розв’яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} (y+6)(5-y) + y(y-1) > 0 \\ 0.3y(10y+20) - 3y^2 + 30 > 0 \end{cases}$$

В-17

1. Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{4}{x+3} - \frac{5}{3-x} = \frac{1}{x-3} - 1$$

2. Розв’яжіть нерівність:

$$x^2 + 9x < -2x - 12$$

3. Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y - xy = 14 \\ x + 2y + xy = -7 \end{cases}$$

4. Розв’яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(3x - \frac{1}{2}) + x > 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - 10x) \\ 15x^2 - (5x-2)(3x+1) < 7x - 8 \end{cases}$$

В-18

1. Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{3x-2}{x} - \frac{1}{x-2} = \frac{3x+4}{x^2 - 2x}$$

2. Розв’яжіть нерівність:

$$x^2 - 4 > 6x + 7$$

3. Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 11x - 9y - 37 = 0 \\ x - 1 - 2y = 0 \end{cases}$$

4. Розв’яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2(3x-1) - \frac{1}{2}(4x+1) \le \frac{2}{3}(x-3) + \frac{1}{3} \\ (3x+1)(x-1) - 3x^2 > 6x + 7 \end{cases}$$

В-19

1. Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{10}{x^2-x}+\frac{1}{x-x^2}=\frac{1}{1+x}$$

2. Розв’яжіть нерівність:

$$x^2-30x+7<7x-20$$

3. Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}16x-4y=5\\3x-y=2\end{cases}$$

4. Розв’яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases}0.01(1-3x)>0.02x+3.01\\\frac{3x-1}{2}-\frac{x-1}{4}>0\end{cases}$$

В-20

1. Розв’яжіть рівняння:

$$1+\frac{45}{x^2-8x+16}=\frac{14}{x-4}$$

2. Розв’язати нерівність:

$$\frac{x(x-3)}{6}\le\frac{x}{2}$$

3. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}6(y-x)-50=y\\y-xy=24\end{cases}$$

4. Розв’язати систему нерівностей:

$$\begin{cases}0.6(x-1)-0.2(3x+1)<5x-4\\\frac{x-1}{4}-1>\frac{x+1}{3}+8\end{cases}$$

В-21

1. Розв’язати рівняння:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^2-4x}$$

2. Розв’язати нерівність:

$$\frac{x(x+1)}{3}-2\ge\frac{8+x}{4}$$

3. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x+4y=5(x-y)\\x^2-y^2=6\end{cases}$$

4. Розв’язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(6x+4)-\frac{1}{6}(12x-5)\leq 4-6x \\ \frac{1-2x}{4}-2<\frac{1-5x}{8} \end{cases}$$

Література.

1. Боровик В.Н., Вивальнюк Л.М. і ін. Математика. Посібник для педінститутів. К., «Вища школа», 1980. – 342 с.
2. Математика: Навчальний посібник для педвузів / Затула Н.І., Зуб А.М., Коберник Г.І., Нещадим А.Ф. – К.: Кондор, 2006. – 560 с.
3. Веб-ресурс «Світ математики»: http://mathworld.ru/