УДК 628.477.5

МЕТОД ОЦЕНКИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БАНКОВ НА ОСНОВЕ ДИНАМИКИ ЕГО ДЕПОЗИТОВ

РУСИН Р.С.

Ивано-Франковск

Для коммерческих банков важнейшим источником аккумулирования средств являются депозиты. Суммарные объемы привлекаемых депозитов по своей природе носят вероятностный характер и наиболее адекватными для их анализа оказываются стохастические модели.

Деятельность коммерческого банка сопряжена, как правило, с риском и неопределенностью [1, 4, 7], для моделирования которых обычно привлекаются методы теории вероятностей и математической статистики [3, 5, 6]. В качестве иллюстрации применения теоретико-вероятностных представлений для описания неопределенности динамики финансовых потоков банка предлагается простейшая стохастическая модель депозита (вклада), основанная на математических схемах теории надежности и теории массового обслуживания, получивших широкое распространение при изучении функционирования сложных систем различной природы [2].

Рассмотрим следующую модель поведения *реального вкладчика,* т.е. вкладчика, на счете которого к моменту времени t_0 уже лежит вклад величиной $x_0 > 0$. Обозначим $\tilde{k}_-(t_0,t)$ случайное число появлений за интервал времени $[t_0,t]$, $t \ge t_0$ обстоятельств, влекущих ликвидацию (закрытие) счета. Для упрощения модели предполагается, что вкладчик может лишь один раз открыть и закрыть свой счет на промежутке времени $[t_0,t]$. Пусть введенная дискретная случайная величина $\tilde{k}_-(t_0,t)$ представляет собой приращение стохастического процесса Пуассона $\tilde{k}_-(t_0,t) = \tilde{k}_-(t) - \tilde{k}_-(t_0)$. Тогда распределение этой случайной величины задается формулой

$$f(k;\tilde{k}_-(t_0,t)) = P\{\tilde{k}_-(t_0,t) = k\} = \frac{[\lambda_-(t-t_0)]^k}{k!}\exp[\lambda_-(t-t_0)], \qquad (1)$$

где λ_- есть параметр интенсивности соответствующего пуассоновского процесса. Факт принадлежности случайной величины $\tilde{k}_-(t_0,t)$ к классу случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметром $\lambda_-(t-t_0)$, будем обозначать $\tilde{k}_-(t_0,t)\in Pn(\lambda_-(t-t_0))$

Из (1) следует, что вероятность $p_-(t_0,t)$ ликвидации к моменту времени t рассматриваемого счета определяется формулой

$$p_-(t_0,t)=P\{\tilde{k}_-(t_0,t)>0\}=1-\exp[\lambda_-(t-t_0)], \tag{2}$$

а вероятность $q_-(t_0,t)$ "выживания" счета до момента времени t - формулой

$$q_-(t_0,t)=P\{\tilde{k}_-(t_0,t)=0\}=\exp[\lambda_-(t-t_0)]. \tag{3}$$

Сам же случайный момент времени $\tilde{\tau}_-\ge t_0$, в который происходит ликвидация счета, существующего на момент времени t_0, имеет, как известно [2], функцию распределения

$$F(\tau;\tilde{\tau}_-)=1-\exp[\lambda_-(\tau-t_0)],\ \ \tau\ge t_0 \tag{4}$$

и плотность

$$f(\tau;\tilde{\tau}_-)=\lambda_-\exp[\lambda_-(\tau-t_0)],\ \ \tau\ge t_0. \tag{5}$$

Иными словами, случайная величина $\tilde{\tau}_- - t_0$ принадлежит классу экспоненциально распределенных случайных величин: $\tilde{\tau}_- - t_0\in Ep(\lambda_-)$. Математическое ожидание и дисперсия случайного момента времени $\tilde{\tau}_-$ равны $t_0+\lambda_-^{-1}$ и λ_-^{-2} соответственно.

Заметим, что в то время как сам пуассоновский поток $\tilde{k}_-(t)$ возникновений обстоятельств, влекущих ликвидацию счета вкладчиком, является в рамках нашей модели ненаблюдаемым, вероятность $q_-(t_0,t)$ сохранения счета и ожидаемая продолжительность $\lambda_-^{-1}=M\tilde{\tau}_- - t_0$ существования счета могут быть оценены, в принципе, по наблюдаемым статистическим данным. Имея же статистические оценки $\bar{\tau}_- - t_0$ и $\bar{q}_-(t_0,t)$ для величин $M\tilde{\tau}_- - t_0$ и $q_-(t_0,t)$, легко получить, используя так называемый «метод моментов», оценки $\bar{\lambda}_-=(\bar{\tau}_- - t_0)^{-1}$ и $\bar{\lambda}_-=-(\bar{\tau}_- - t_0)\ln\bar{q}_-(t_0,t)$ для параметра λ_- ненаблюдаемого пуассоновского процесса. Оцениваемый таким образом параметр λ_- имеет смысл ожидаемого числа появлений в единицу времени обстоятельств, влекущих закрытие счета.

Обозначим $\tilde{n}(t_0,t)$ случайное число операций (начислений и списаний), проводимых вкладчиком к моменту времени t без закрытия счета, и положим, что это случайное число есть приращение пуассоновского процесса $\tilde{n}(t)$ с интенсивностью λ: $\tilde{n}(t_0,t)=\tilde{n}(t)-\tilde{n}(t_0)\in Pn(\lambda(t-t_0))$. Тогда математическое ожидание $M\tilde{n}(t_0,t)=\lambda(t-t_0)$ случайной величины $\tilde{n}(t_0,t)$ указывает среднее число операций со счетом, проводимых вкладчиком за промежуток времени $[t_0,t]$, и может быть оценено по наблюдаемым статистическим данным.

Введем еще один компонент нашей модели поведения вкладчика случайный коэффициент $\tilde{\alpha}\in[0,+\infty)$ изменения величины вклада после проведения вкладчиком одной операции: если после операции, проведенной в момент времени t_{n-1}, остаток на счете равен $x(t_{n-1})$, то после непосредственно следующей операции, проводимой в момент времени t_n, на счете остается вклад случайной величины $\tilde{x}(t_n)=x(t_{n-1})\tilde{\alpha}$. Предположим, что случайная величина $\tilde{\alpha}$ имеет логарифмически нормальное распределение ($\tilde{\alpha}\in Ln(\mu_\alpha,\sigma_\alpha^2)$) с математическим ожиданием μ_α и с дисперсией σ_α^2, то есть предположим, что логарифм этой случайной величины имеет нормальное распределение с математическим ожиданием μ и с дисперсией σ^2 ($\ln\tilde{\alpha}\in N(\mu,\sigma^2)$). Плотность распределения

$$f(\alpha;\tilde{\alpha})=\frac{1}{\sigma\alpha\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\ \alpha>0 \tag{6}$$

случайной величины $\tilde{\alpha}$ позволяет найти ее математическое ожидание

$$\mu_\alpha=M\tilde{\alpha}=\int_0^{+\infty}\alpha\ f(\alpha;\tilde{\alpha})d\alpha=\exp\left[\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right] \tag{7}$$

второй начальный момент

$$M\tilde{\alpha}^2=\int_0^{+\infty}\alpha^2\ f(\alpha;\tilde{\alpha})d\alpha=\mu_\alpha+\sigma_\alpha^2=\exp\left[2\mu+2\sigma^2\right] \tag{8}$$

и дисперсию

$$\sigma_\alpha^2=D\tilde{\alpha}^2=M\tilde{\alpha}^2-(M\tilde{\alpha})^2=\exp\left[2\mu+2\sigma^2\right]-\exp\left[2\mu+\sigma^2\right].$$

Для характеризации центра распределения логарифмически нормальной случайной величины $\tilde{\alpha}$ можно использовать, наряду с уже вычисленным математическим ожиданием $M\tilde{\alpha}$, моду (локальный максимум плотности $f(\alpha;\tilde{\alpha})$) $\mathrm{mod}\,\tilde{\alpha}=\exp(\mu-\sigma)$ и медиану $med\,\tilde{\alpha}=\exp(\mu)$, определяемую как корень уравнения $F(med\,\tilde{\alpha};\tilde{\alpha})=1/2$, где слева стоит функция распределения случайной величины $\tilde{\alpha}$, выражаемая через стандартную нормальную функцию распределения

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \qquad (10)$$

формулой

$$F(\alpha;\tilde{\alpha}) = \Phi\left(\frac{\ln\alpha - \mu}{\sigma}\right). \qquad (11)$$

Найдем теперь случайный коэффициент $\tilde{\alpha}(n)$ изменения величины вклада на счете после n операций, предполагаемых взаимно независимыми. Эту случайную величину можно представить как произведение $\tilde{\alpha}(n) = \tilde{\alpha}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{\alpha}_n$ одинаково распределенных независимых случайных величин $\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu_\alpha,\sigma_\alpha^2)$, $\ln\tilde{\alpha}_i \in N(\mu,\sigma^2)$. Очевидно, что случайный коэффициент $\tilde{\alpha}(n)$ имеет логарифмически нормальное распределение: $\tilde{\alpha}(n) \in Ln(n\mu, n\sigma^2)$. Отсюда получаем выражения

$$M\tilde{\alpha}(n) = \exp\left[n\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] = \mu_\alpha^n, \qquad (12)$$

$$M\tilde{\alpha}^2(n) == \exp\left[2n(\mu+\sigma^2)\right] = \left(M\tilde{\alpha}^2\right)^n = (\mu_\alpha + \sigma_\alpha^2)^n, \qquad (13)$$

$$D\tilde{\alpha}(n) = \exp\left[2n(\mu+\sigma^2)\right] - \exp\left[n(\mu+\sigma^2)\right] = (\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2)^n - \mu_\alpha^{2n} \qquad (14)$$

для математического ожидания, второго начального момента и дисперсии случайной величины $\tilde{\alpha}(n)$ соответственно.

Заметим, что ситуация, когда операции начисления и списания не проводились, может быть формально описана вырожденной случайной величиной $\tilde{\alpha}(0)$, принимающей с вероятностью единица значение $\tilde{\alpha}(0) = 1$. Эта случайная величина, определяемая функцией распределения

$$F(\alpha;\tilde{\alpha}(0)) = \begin{cases} 0, & \alpha \le 1, \\ 1, & \alpha > 1, \end{cases} \qquad (15)$$

имеет математическое ожидание $M\tilde{\alpha}(0) = 1$ и нулевую дисперсию.

Предполагая, что к моменту времени t счет не ликвидирован, введем случайную величину $\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$, представляющую собой случайный коэффициент изменения величины начального вклада x_0 к моменту времени t (после случайного числа $\tilde{n}(t_0,t)$ операций с депозитом). Используя формулу полной вероятности, функцию распределения $F\left(\alpha;\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))\right)$ случайной величины $\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$ можно представить как дискретную смесь

$$F\left(\alpha;\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))\right)=\sum_{n=0}^{\infty}F\left(\alpha;\tilde{\alpha}(n)\right)P\{\tilde{n}(t_0,t)=n\}=$$
$$=\exp[-\lambda(t-t_0)]\sum_{n=0}^{\infty}F\left(\alpha;\tilde{\alpha}(n)\right)\frac{[\lambda(t-t_0)]^n}{n!} \qquad (16)$$

функций распределения непрерывных случайных величин $\tilde{\alpha}(1),...,\tilde{\alpha}(n)$ и вырожденной случайной величины $\tilde{\alpha}(0)$. Весовые коэффициенты этой смеси задаются распределением дискретной случайной величины $\tilde{n}(t_0,t)$.

Так как $\tilde{\alpha}(n)\in Ln(n\mu,n\sigma^2)$, то (16) можно преобразовать в формулу

$$F\left(\alpha;\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))\right)=F\left(\alpha;\tilde{\alpha}(0)\right)\exp[-\lambda(t-t_0]+$$
$$+\exp[-\lambda(t-t_0)]\sum_{n=0}^{\infty}\Phi\left(\frac{\ln\alpha-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\frac{[\lambda(t-t_0)]^n}{n!} \qquad (17)$$

дающую явное выражение для функции распределения случайной величины $\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$.

Для нахождения математического ожидания $M\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$ проведем ряд простых преобразований, учитывающих соотношение (16):

$$M\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t)=\int_0^{\infty}\alpha dF\left(\alpha;\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))\right)=\exp[-\lambda(t-t_0)]\cdot\exp[-\lambda(t-t_0)\mu_\alpha]. \qquad (18)$$

Отсюда получаем выражение

$$M\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t)=\exp[\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha-1)] \qquad (19)$$

математического ожидания случайного коэффициента изменения величины депозита на промежутке времени $[t_0,t]$ через математическое ожидание μ_α коэффициента изменения депозита при одной операции и параметр интенсивности λ пуассоновского потока $\tilde{n}(t)$ таких операций. Проведя преобразования

$$M\tilde{\alpha}^2(\tilde{n}(t_0,t)=\exp[-\lambda(t-t_0)]\cdot\exp[-\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2)], \qquad (20)$$

аналогичные преобразованиям (18), получаем выражение

$$M\tilde{\alpha}^2(\tilde{n}(t_0,t)=\exp[\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)] \qquad (21)$$

второго начального момента случайного коэффициента $\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t))$ через математическое ожидание μ_α и дисперсию σ_α^2 случайного коэффициента $\tilde{\alpha}$ изменения величины депозита при одной операции и через параметр интенсивности λ пуассоновского потока $\tilde{n}(t)$ таких операций. Из (19) и (21) находим выражение

$$D\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0,t)=\exp[-\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha^2+\sigma_\alpha^2-1)]-\exp[2\lambda(t-t_0)(\mu_\alpha-1)] \qquad (22)$$

дисперсии случайного коэффициента изменения депозита за промежуток времени $[t_0, t]$ через математическое ожидание μ_α и дисперсию σ_α^2 случайного коэффициента $\tilde{\alpha}$ и через интенсивность λ соответствующего пуассоновского процесса.

До сих пор предполагалось, что рассматриваемый счет не будет ликвидирован к моменту времени t. Для учета возможности закрытия счета к моменту времени t введем коэффициент $\tilde{\alpha}(t_0, t)$ изменения начального вклада x_0 за промежуток времени $[t_0, t]$ при помощи следующих соотношений: $\tilde{\alpha}(t_0, t) = \tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0, t))$ с вероятностью $q_-(t_0, t)$; $\tilde{\alpha}(t_0, t) = 0$ с вероятностью $p_-(t_0, t) = 1 - q_-(t_0, t)$. Иными словами, случайная величина $\tilde{\alpha}(t_0, t)$ есть смесь случайной величины $\tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0, t))$ и вырожденной случайной величины $\tilde{\alpha}_0$, определяемая "весами" $p_-(t_0, t)$ и $q_-(t_0, t)$. Функция распределения случайного коэффициента $\tilde{\alpha}(t_0, t)$ задается формулой

$$F\big(\alpha; \tilde{\alpha}(t_0, t)\big) = q_-(t_0, t) F(\alpha; \tilde{\alpha}(\tilde{n}(t_0, t))) + p_-(t_0, t) F(\alpha; \tilde{\alpha}_0) \tag{23}$$

где $F(\alpha; \tilde{\alpha}_0)$ есть функция распределения вырожденной случайной величины $\tilde{\alpha}_0$:
$F(\alpha; \tilde{\alpha}_0) = 0$, когда $\alpha \le 0$; $F(\alpha; \tilde{\alpha}_0) = 1$, когда $\alpha > 0$. Из (23) получаем выражение

$$M\tilde{\alpha}(t_0, t) = \exp[(t - t_0)[\lambda(\mu_\alpha - 1) - \lambda_-]] \tag{24}$$

математического ожидания случайного коэффициента $\tilde{\alpha}(t_0, t)$ через математическое ожидание μ_α случайного коэффициента $\tilde{\alpha}$ и параметры интенсивности λ, λ_- соответствующих пуассоновских процессов. Аналогичные вычисления дают выражение

$$M\tilde{\alpha}^2(t_0, t) = \exp[(t - t_0)[\lambda(\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 - 1) - \lambda_-]] \tag{25}$$

для второго начального момента случайной величины $\tilde{\alpha}(t_0, t)$. Из (24), (25) получаем выражение

$$D\tilde{\alpha}(t_0, t) = \exp[(t - t_0)[\lambda(\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 - 1) - \lambda_-]] - \exp[2(t - t_0)[\lambda(\mu_\alpha - 1) - \lambda_-]] \tag{26}$$

дисперсии случайного коэффициента $\tilde{\alpha}(t_0, t)$ через математическое ожидание μ_α и дисперсию σ_α^2 случайного коэффициента $\tilde{\alpha}$ и параметры интенсивности λ, λ_- соответствующих пуассоновских процессов.

Итак, получена функция распределения (23) и вычислены математическое ожидание (24) и дисперсия (26) случайного коэффициента $\tilde{\alpha}(t_0, t)$ изменения начального вклада x_0 за промежуток времени $[t_0, t]$ с учетом двух вариантов хода событий, первый из которых состоит в сохранении счета к моменту времени $t > t_0$, а второй - в ликвидации счета к этому моменту времени. Теперь можно приступить к основной задаче, связанной с изучаемой стохастической моделью поведения вкладчика, - к задаче оценки величины вклада в момент времени t при условии, что в момент времени $t_0 < t$ на счете лежал вклад величиной x_0.

Поскольку величина вклада, лежащего на счете к моменту времени t, есть случайная величина $\tilde{x}_0(t_0,t) = x_0\tilde{\alpha}(t_0,t)$, постольку ее оценкой может служить какая-нибудь характеристика "центра" распределения этой случайной величины. Например, в качестве прогноза величины вклада на момент времени t (по информации о его величине x_0 в момент времени t_0) можно использовать математическое ожидание

$$\mu_0(t_0,t) = M\tilde{x}_0(t_0,t) = x_0 M\tilde{\alpha}(t_0,t) = x_0 \exp[(t-t_0)[\lambda(\mu_\alpha - 1) - \lambda_-]]. \qquad (27)$$

Здесь $\mu_0 = M\tilde{\alpha}$ - математическое ожидание коэффициента изменения величины вклада при одной операции, λ - интенсивность потока операций с данным счетом, λ_- - интенсивность потока обстоятельств, вызывающих закрытие счета. Если величина вклада на момент времени t оценивается математическим ожиданием $\mu_0(t_0,t)$, то точность такой оценки имеет смысл измерять при помощи стандартного отклонения $\sigma_0(t_0,t)$, связанного с дисперсией случайной величины $\tilde{x}_0(t_0,t)$ формулой

$$\begin{aligned} \sigma_0^2(t_0,t) &= D\tilde{x}_0(t_0,t) = x_0^2 D\tilde{\alpha}(t_0,t) = \\ &= x_0^2\left(\exp[(t-t_0)[\lambda(\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 - 1) - \lambda_-]] - \exp[2(t-t_0)[\lambda(\mu_\alpha - 1) - \lambda_-]]\right), \end{aligned} \qquad (28)$$

где σ_α^2 - дисперсия случайного коэффициента изменения величины вклада при одной операции. Если же величине вклада на момент времени t дается интервальная оценка вида $[x_-, x_+]$, то вероятность того, что случайная величина вклада $\tilde{x}_0(t_0,t)$ попадает в указанный интервал, определяется формулой

$$P\{x_- \le \tilde{x}_0(t_0,t) \le x_+\} = P\left\{\frac{x_-}{x_0} \le \tilde{\alpha}(t_0,t) \le \frac{x_+}{x_0}\right\} = F\left(\frac{x_+}{x_0};\tilde{\alpha}(t_0,t)\right) - F\left(\frac{x_-}{x_0};\tilde{\alpha}(t_0,t)\right), \qquad (29)$$

где $F(\alpha;\tilde{\alpha}(t_0,t))$ есть функция распределения (23) случайной величины $\tilde{\alpha}(t_0,t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Берлин С. И.** Теория финансов / С. И. Берлин. – М.: Изд–во Приор, 2000. –256 с.

2. **Вітлінський В.В.** Моделювання економіки: навч. посіб. / В.В Вітлінський. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.

3. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2004. – 479 с.

4. **Кириченко О.** Банківський менеджмент / О. Кириченко, І. Гіленко, А. Ятченко,– К.: Основи, 1999.– 672 с.

5. **Конюховский П. В.** Микроэкономическое моделирование банковской деятельности / П. В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2001.– 224 с.

6. **Клебанова Т. С.** Методы прогнозирования: учеб. пособие / Т.С. Клебанова , В.В. Иванов, Н.А. Дубровина – Харьков: ХГЭУ, 2002. – 372 с.

7. Финансы: учебник для вузов / под ред. М. В. Романовского, О. В. Врублевской, Б. М. Сабанти. – М.: Изд–во «Перспектива»; Изд–во «Юрайт», 2000.– 520 с.