

**Державний вищий навчальний заклад
«Прикарпатський національний університет»
імені Василя Стефаника**

**Інститут природничих наук
Кафедра лісознавства**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
з “Біометрії”**

**для студентів II курсу
напряму підготовки 6.090103
“Лісове і садово-паркове господарство”**

**Івано-Франківськ
«Територія друку»
2013**

УДК 57.087.1 (075.8)

ББК 28.0 (я73)

В 54

Методичні вказівки склали:

доцент кафедри лісознавства Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, кандидат сільськогосподарських наук, доцент **Вітер Р.М.**;

доцент кафедри лісознавства Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, кандидат сільськогосподарських наук, старший науковий співробітник **Шпарик Ю.С.**

Рецензенти:

завідувач кафедри статистики і вищої математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент **Осипчук М.М.**

доцент кафедри лісознавства Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, кандидат сільськогосподарських наук, старший науковий співробітник **Бродович Р.І.**

Методичні вказівки схвалені на засіданні
кафедри лісознавства Інституту природничих наук
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
(протокол № 1 від 28 серпня 2013 року).

Затверджено до друку і рекомендовано до використання у навчальному
процесі Вченою радою Інституту природничих наук
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
(протокол № 2 від 22 жовтня 2013 року).

Вітер Р.М.

Методичні вказівки до практичних занять з “Біометрії” для студентів II курсу напряму підготовки 6.090103 “Лісове і садово-паркове господарство” / Р.М. Вітер, Ю.С. Шпарик. – Івано-Франківськ : Територія друку, 2013. – 38 с.

ISBN

УДК 57.087.1 (075.8)

ББК 28.0 (я73)

© Вітер Р.М., Шпарик Ю.С., 2013

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. Групування результатів спостережень. Обчислення статистичних показників великої вибірки.....	6
1.1. Групування результатів спостережень.....	6
1.1.1. Побудова таблиці розподілу чисельностей.....	6
1.1.2. Побудова варіаційних рядів.....	9
1.1.3. Графічне зображення варіаційних рядів.....	11
1.2. Обчислення статистичних показників великої вибірки.....	13
1.3. Оцінка результатів спостережень.....	17
1.3.1. Обчислення основних помилок вибірових показників.....	17
1.3.2. Точкова оцінка вибірових показників.....	18
1.3.3. Інтервальна оцінка вибірових показників.....	18
1.3.4. Встановлення достатньої кількості спостережень.....	20
1.3.5. Встановлення значимості середнього значення.....	20
2. Кореляційний і регресійний аналіз.....	22
2.1. Кореляційний аналіз.....	22
2.1.1. Обчислення показників зв'язку для малої вибірки і їх оцінка... ..	22
2.1.2. Обчислення показників зв'язку для великої вибірки та їх оцінка.....	26
2.2. Регресійний аналіз.....	29
2.2.1. Обчислення коефіцієнтів регресії прямої способом найменших квадратів.....	29
2.2.2. Оцінка адекватності і точності вирівнювання рівняння регресії.....	31
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....	34
ДОДАТКИ	
Додаток 1. Результати замірів діаметрів і висот дерев у ялицевому насадженні.....	35
Додаток 2. Критичні значення коефіцієнтів для перевірки належності крайніх варіант до одного ряду розподілу (згруповані значення).....	36
Додаток 3. Форма кривої розподілу за асиметрією та ексцесом.....	36
Додаток 4. Критерії оцінки кривої розподілу за асиметрією та ексцесом.....	37
Додаток 5. Значення t-критерію Ст'юдента (двостороннє обмеження).....	37
Додаток 6. Критичні значення коефіцієнта рангової кореляції Спірмена.....	38

ВСТУП

Розрахункові роботи з курсу “Біометрія” виконуються відповідно до навчального плану підготовки студентів освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр за напрямом підготовки 6.090103 “Лісове і садово-паркове господарство”. Розрахункові роботи проводяться протягом IV семестру для студентів II курсу.

Методичні вказівки складено на основі навчальної програми з дисципліни “Біометрія” і включають дві розрахункові роботи.

Метою розрахункових робіт з курсу “Біометрія” є закріплення та поглиблення теоретичних знань, отриманих студентами на лекціях; одержання практичних навичок та вмінь щодо групування результатів спостережень і визначення статистичних показників великої вибірки, проведення кореляційного та регресійного аналізу.

В результаті виконання розрахункових робіт студенти повинні **знати:**

- поняття про вибірку сукупність та варіаційні ряди;
- порядок побудови варіаційних рядів;
- статистичні показники та формули для їх визначення;
- суть статистичних порівнянь;
- поняття про кореляційний зв'язок між ознаками;
- показники простої кореляції та їх застосування;
- поняття регресії та основні завдання регресійного аналізу;
- статистичний зміст коефіцієнтів регресії та способи їх обчислення;

а також **вміти:**

- групувати результати спостережень лісівничих і лісотаксаційних досліджень;
- обчислювати та аналізувати статистичні показники великої вибірки;
- визначати основні помилки вибірових показників, давати їх точкову та інтервальну оцінку;
- встановлювати достатню кількість спостережень;
- встановлювати достовірність статистичних показників за параметричними критеріями;
- визначати та аналізувати показники кореляційного зв'язку для малої і великої вибірок;
- обчислювати коефіцієнти регресії прямої та давати їх оцінку;
- визначати помилку рівняння регресії;
- проводити оцінку адекватності і точності вирівнювання рівняння регресії.

Порядок виконання та оформлення розрахункових робіт.

Розрахункові роботи з біометрії виконуються студентами згідно з індивідуальними завданнями на практичних заняттях. Розрахункова робота повинна містити: мету і завдання роботи; короткі теоретичні відомості відповідно до теми роботи; таблиці із занесеними в них результатами розрахунків; графіки; висновки. Результати розрахунків викладач підписує кожному студенту, який виконав роботу.

1. ГРУПУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ. ОБЧИСЛЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ВЕЛИКОЇ ВИБІРКИ

Мета роботи: виконати статистичний аналіз результатів спостережень вибіркоvim методом.

Завдання:

1. Опанувати основні терміни і визначення.
2. Виконати групування результатів вимірів діаметрів і висот дерев.
3. Обчислити та проаналізувати статистичні показники великої вибірки діаметрів і висот.
4. Дати оцінку вибірових показників.

1.1. Групування результатів спостережень

1.1.1. Побудова таблиці розподілу чисельностей

Вихідними даними є результати замірів діаметрів і висот дерев, які здійснені у деревостанах різних порід (дод. 1).

Порядок побудови таблиці розподілу частот:

1. Із результатів замірів вибирають максимальне і мінімальне значення діаметрів і висот:

$$D_{\max} = X_{\max} = 34,2 \text{ см};$$

$$H_{\max} = Y_{\max} = 25,1 \text{ м};$$

$$D_{\min} = X_{\min} = 11,3 \text{ см};$$

$$H_{\min} = Y_{\min} = 12,4 \text{ м}.$$

2. Встановлюють попередню наближену кількість класів за формулою Стерджеса:

$$k = 1 + 3,322 \lg N = 1 + 3,322 \lg 212 = 8,73 \approx 9,$$

де: N – обсяг вибірки.

3. Визначають величини інтервалів рядів розподілу. У лісівничих і лісотаксаційних дослідженнях інтервали рядів розподілу за діаметрами або висотами прийнято називати ступенями товщини чи висоти. Використовуються ступені товщини чи висоти, рівні 1, 2, 4 см або м. Групування здійснюють на підставі обчислених величин інтервалів:

- для ряду розподілу за діаметром:

$$i_x = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k} = \frac{34,2 - 11,3}{9} = 2,54 \approx 2 \text{ см};$$

- для ряду розподілу за висотою:

$$i_y = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{k} = \frac{25,1 - 12,4}{9} = 1,41 \approx 1 \text{ м}.$$

4. Встановлюють остаточну кількість інтервалів:

- для ряду розподілу за діаметром:

$$k_x = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{i_x} = \frac{34,2 - 11,3}{2} = 11,4 \approx 12;$$

- для ряду розподілу за висотою:

$$k_y = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{i_y} = \frac{25,1 - 12,4}{1} = 12,7 \approx 13.$$

На основі величини інтервалу встановлюють середину класу, його ліву (нижню) і праву (верхню) межі:

i = 1			i = 2			i = 4		
	0	– 0,5		0	– 1,0		0	– 2,0
0,6	– 1	– 1,5	1,1	– 2	– 3,0	2,1	– 4	– 6,0
1,6	– 2	– 2,5	3,1	– 4	– 5,0	6,1	– 8	– 10,0
2,6	– 3	– 3,5	5,1	– 6	– 7,0	10,1	– 12	– 14,0
3,6	– 4	– 4,5	7,1	– 8	– 9,0	14,1	– 16	– 18,0
4,6	– 5	– 5,5	9,1	– 10	– 11,0	18,1	– 20	– 22,0
...	– ...	–	– ...	–	– ...	– ...
ліва	середина	права	ліва	середина	права	ліва	середина	права
межа	класу	межа	межа	класу	межа	межа	класу	межа

Межі інтервалів слід встановлювати з точністю, яка відповідає точності вимірювання досліджуваної величини. Для цього від центру класу спочатку віднімається, а потім додається половина величини інтервалу.

Після встановлення меж класів варіанти за своїм значенням потрапляють до певного класу. Наприклад:

- якщо $i = 1$, а числове значення рівне 4,3, то воно потрапляє до інтервалу із серединою 4;

- якщо $i = 2$, а числове значення рівне 8,6 – до інтервалу із серединою 8;

- якщо $i = 4$, а числове значення рівне 21,5 – до інтервалу із серединою 20 і т.д.

5. За мінімальними значеннями двох числових рядів визначають початкові і кінцеві класи:

- для ряду розподілу діаметрів:

$$X_{\min} = 11,3 \text{ – початковий клас } 12; \quad X_{\max} = 34,2 \text{ – кінцевий клас } 34;$$

- для ряду розподілу висот:

$$Y_{\min} = 12,4 \text{ – початковий клас } 12; \quad Y_{\max} = 25,1 \text{ – кінцевий клас } 25.$$

6. Будують таблицю розподілу частот.

До таблиці розподілу чисельностей (за діаметром і висотою) заносяться всі 212 дерев із завдання у відповідні комірки (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Розподіл частот за двома ознаками

h d		11,6- 12,5	12,6- 13,5	13,6- 14,5	14,6- 15,5	15,6- 16,5	16,6- 17,5	17,6- 18,5	18,6- 19,5	19,6- 20,5	20,6- 21,5	21,6- 22,5	22,6- 23,5	23,6- 24,5	24,6- 25,5		
		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Σ	\bar{Y}_x
11,1-13,0	12	2	1			1										4	13,2
13,1-15,0	14		5	1	1	1		1								9	14,2
15,1-17,0	16			4	4	2	2	1	1	3						17	16,4
17,1-19,0	18			2	3	4	4	2	6	4	1					26	17,5
19,1-21,0	20				1	6	9	4	5	6						31	17,8
21,1-23,0	22						3	10	8	9	4	1				35	19,1
23,1-25,0	24								2	10	10	2	1			25	20,6
25,1-27,0	26										11	10	1			22	21,5
27,1-29,0	28										3	8	5	1		17	22,2
29,1-31,0	30											3	10	1		14	22,8
31,1-33,0	32											1	1	5	1	8	23,8
33,1-35,0	34													2	2	4	24,5
	Σ	2	6	7	9	14	18	18	22	32	29	25	18	9	3	212	
	\bar{X}_y	12,0	13,7	16,3	16,9	17,8	19,4	20,3	20,4	21,2	24,7	27,0	29,0	31,8	33,3		

Для цього може бути використана найзручніша для опрацювання система позначень у вигляді конверта.

Наприклад, дерево з діаметром 18,3 см і висотою 20,7 м потрапляє у комірку, в якій містяться дерева з діаметром від 17,1 до 19,0 см і висотою від 20,6 до 21,5 м і т.д.

Загальна сума варіант має дорівнювати обсягу вибірки ($N = 212$).

В останній колонці таблиці 1.1 записують середні діаметри за ступенями висоти, а в останньому рядку – середні висоти за ступенями товщини. Вони обчислюються як середньозважені величини:

$$14: \bar{X}_y = \frac{\sum n_{xy}x_i}{n_y} = \frac{1 \cdot 14 + 4 \cdot 16 + 2 \cdot 18}{7} = 16,3 \text{ см,}$$

$$12: \bar{Y}_x = \frac{\sum n_{xy}y_i}{n_x} = \frac{2 \cdot 12 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 16}{4} = 13,2 \text{ м.}$$

1.1.2. Побудова варіаційних рядів

Варіаційні ряди за діаметром і висотою виписують із таблиці 1.1 і заносять до таблиць 1.2 і 1.3.

З метою вивчення структури варіаційних рядів проводиться обчислення моди (M_o), медіани (M_e) і кватилів (Q_1, Q_2, Q_3). Для цього додатково знаходять сумарні частоти ($\sum n_i$) шляхом послідовного додавання частот у класах.

Таблиця 1.2

Обчислення структурних показників для ряду діаметрів

x_i	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	Σ
n_i	4	9	17	26	31	35	25	22	17	14	8	4	212
Σn_i	4	13	30	56	87	122	147	169	186	200	208	212	-

$$M_o = X_m + i \left(\frac{n_2 - n_1}{2n_2 - n_1 - n_3} \right) = 21,1 + 2 \frac{35 - 31}{2 \cdot 35 - 31 - 25} = 21,7 \text{ см}$$

де: X_m – нижня межа групування модального класу (класу з найбільшими частотами); i – величина інтервалу; n_1 – частоти класу, який розміщений у варіаційному ряді перед модальним; n_2 – частоти модального класу; n_3 – частоти класу, який розміщений у варіаційному ряді після модального.

$$M_e = X_m + i \frac{0,5N - \sum n_i}{n_e} = 21,1 + 2 \frac{0,5 \cdot 212 - 87}{35} = 22,2 \text{ см}$$

де: X_m – нижня межа групування медіанного класу (класу, в якому знаходиться варіанта з порядковим номером $0,5N$); i – величина інтервалу;

$\sum n_i$ – сума частот класів, які розміщені у варіаційному ряді перед медіанним; n_e – частоти медіанного класу.

$$Q_1 = X_m + i \frac{0,25N - \sum n_i}{n_e} = 17,1 + 2 \frac{0,25 \cdot 212 - 30}{26} = 18,9 \text{ см}$$

де: X_m – нижня межа групування класу, в якому знаходиться варіанта з порядковим номером $0,25N$; i – величина інтервалу; $\sum n_i$ – сума частот класів, які розміщені у варіаційному ряді перед класом із варіантою $0,25N$; n_e – частоти класу, в якому знаходиться варіанта $0,25N$.

Другий квартиль дорівнює медіані:

$$Q_2 = M_e = 22,2 \text{ см}$$

$$Q_3 = X_m + i \frac{0,75N - \sum n_i}{n_e} = 25,1 + 2 \frac{0,75 \cdot 212 - 147}{22} = 26,2 \text{ см}$$

де: X_m – нижня межа групування класу, в якому знаходиться варіанта з порядковим номером $0,75N$; i – величина інтервалу; $\sum n_i$ – сума частот класів, які розміщені у варіаційному ряді перед класом з варіантою $0,75N$; n_e – частоти класу з варіантою $0,75N$.

Таблиця 1.3

Обчислення структурних показників для ряду висот

y_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Σ
n_i	2	6	7	9	14	18	18	22	32	29	25	18	9	3	212
$\sum n_i$	2	8	15	24	38	56	74	96	128	157	182	200	209	212	-

$$M_o = Y_m + i \left(\frac{n_2 - n_1}{2n_2 - n_1 - n_3} \right) = 19,6 + 1 \frac{32 - 22}{2 \cdot 32 - 22 - 29} = 20,4 \text{ м}$$

$$M_e = Y_m + i \frac{0,5N - \sum n_i}{n_e} = 19,6 + 1 \frac{0,5 \cdot 212 - 96}{32} = 19,9 \text{ м}$$

$$Q_1 = Y_m + i \frac{0,25N - \sum n_i}{n_e} = 16,6 + 1 \frac{0,25 \cdot 212 - 38}{18} = 17,4 \text{ м}$$

$$Q_2 = M_e = 19,9 \text{ м}$$

$$Q_3 = Y_m + i \frac{0,75N - \sum n_i}{n_e} = 21,6 + 1 \frac{0,75 \cdot 212 - 157}{25} = 21,7 \text{ м}$$

1.1.3. Графічне зображення варіаційних рядів

Здійснюється з метою виявлення закономірностей зміни частот стосовно класів. Для побудови багатокутника і кумуляти для ряду діаметрів і висот проводять додаткові обчислення (табл. 1.4, 1.5).

Відносні частоти ($n_{i\%}$) обчислюють шляхом ділення кожної частоти на загальний обсяг вибірки, а сумарні відносні частоти ($\sum n_{i\%}$) – шляхом послідовного сумування отриманих відносних частот у класах.

Таблиця 1.4

Обчислення відносних частот і накопичених відносних частот для ряду діаметрів

x_i	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	Σ
$n_{i\%}$	1,9	4,2	8,0	12,3	14,6	16,5	11,8	10,4	8,0	6,6	3,8	1,9	100
$\sum n_{i\%}$	1,9	6,1	14,1	26,4	41,0	57,5	69,3	79,7	87,7	94,3	98,1	100	-

Таблиця 1.5

Обчислення відносних частот і накопичених відносних частот для ряду висот

y_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Σ
$n_{i\%}$	0,9	2,8	3,3	4,2	6,6	8,5	8,5	10,4	15,1	13,8	11,8	8,5	4,2	1,4	100
$\sum n_{i\%}$	0,9	3,7	7,0	11,2	17,8	26,3	34,8	45,2	60,3	74,1	85,9	94,4	98,6	100	-

Побудовані графіки наведено на рисунках 1.1-1.4.

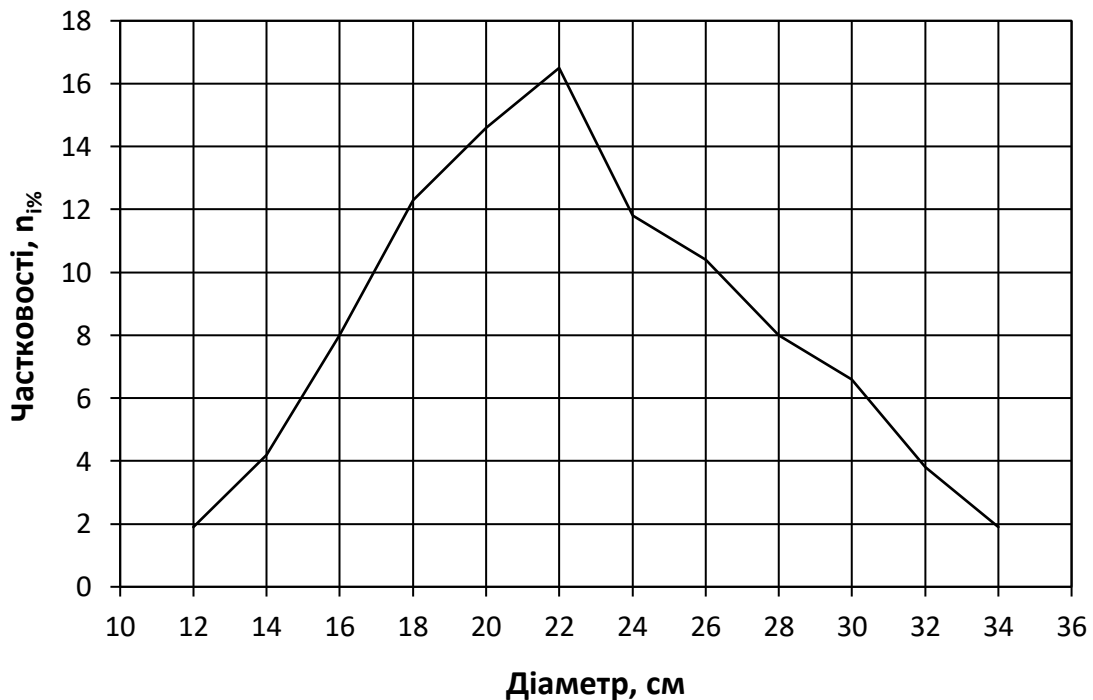


Рис. 1.1. Багатокутник ряду діаметрів

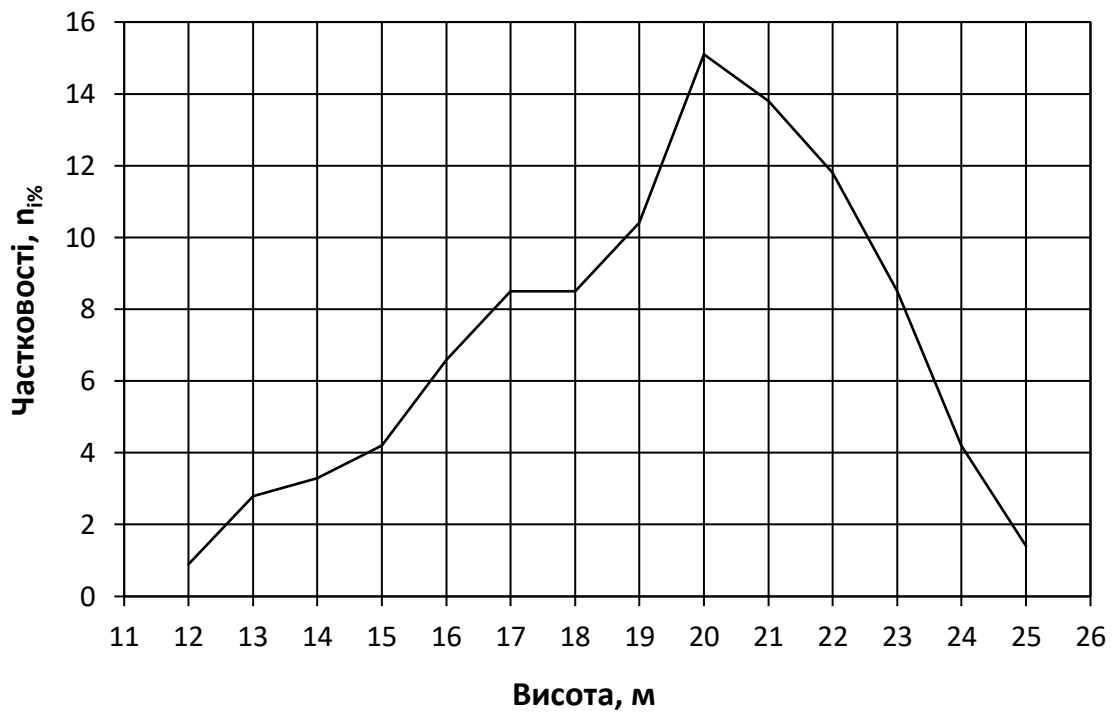


Рис. 1.2. Багатокутник ряду висот

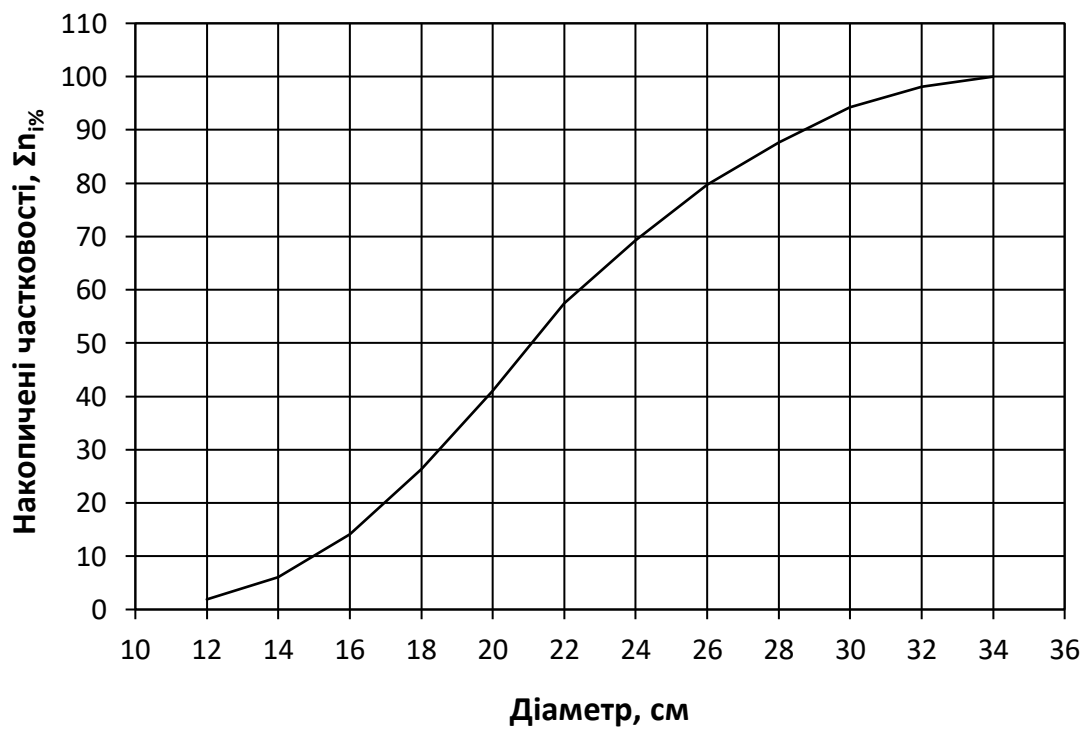


Рис. 1.3. Кумулята ряду діаметрів

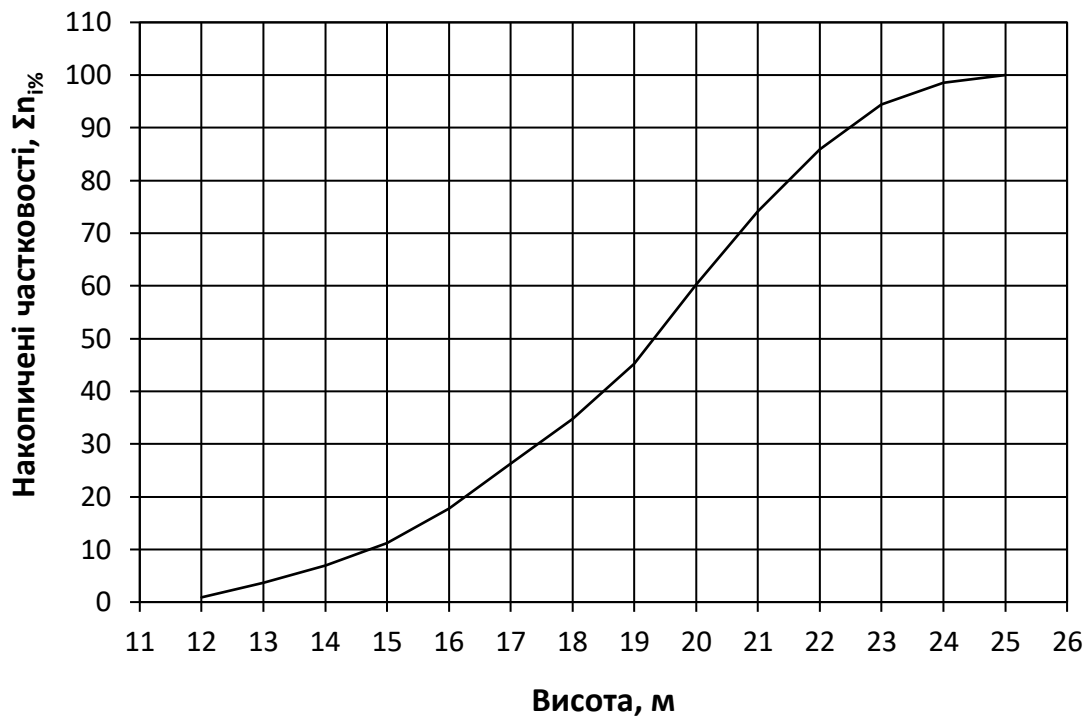


Рис. 1.4. Кумулята ряду висот

1.2. Обчислення статистичних показників великої вибірки

а) для ряду діаметрів

На основі варіаційного ряду діаметрів обчислюють суми і квадрати центральних відхилень (табл. 1.6).

Таблиця 1.6

Обчислення сум і квадратів центральних відхилень для ряду діаметрів

x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2 n_i$	$(x_i - \bar{X})^3 n_i$	$(x_i - \bar{X})^4 n_i$
12	4	48	-10,47	438,484	-4590,923	48066,967
14	9	126	-8,47	645,668	-5468,809	46320,811
16	17	272	-6,47	711,635	-4604,280	29789,694
18	26	468	-4,47	519,503	-2322,180	10380,145
20	31	620	-2,47	189,128	-467,146	1153,850
22	35	770	-0,47	7,732	-3,634	1,708
24	25	600	1,53	58,522	89,539	136,995
26	22	572	3,53	274,140	967,714	3416,029
28	17	476	5,53	519,875	2874,910	15898,254
30	14	420	7,53	793,813	5977,409	45009,889
32	8	256	9,53	726,567	6924,185	65987,487
34	4	1136	11,53	531,764	6131,234	70693,132
Σ	212	4764	-	5416,831	5508,019	336854,961

Далі визначають середнє значення:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{N} = \frac{4764}{212} = 22,47 \text{ см}$$

Обчислюють показники варіації:

- розмах варіації:

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 34,2 - 11,3 = 22,9 \text{ см}$$

- дисперсію:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 n_i}{N} = \frac{5416,831}{212} = 25,55 \text{ см}^2$$

- основне (стандартне) відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 n_i}{N}} = \sqrt{\frac{5416,831}{212}} = 5,05 \text{ см}$$

- коефіцієнт варіації:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} 100 = \frac{5,05}{22,47} 100 = 22,47 \%$$

Мінливість ознаки можна оцінити за такою шкалою:

$V < 10 \%$ – варіація незначна; $10 < V < 20 \%$ – варіація середня; $V > 20 \%$ – варіація значна.

Для перевірки належності крайніх варіант до однієї вибірки необхідно обчислити критерії відповідності:

- для варіант початкового класу

$$V_1 = \frac{\bar{X} - X_{\min}}{\sigma} = \frac{22,47 - 12}{5,05} = 2,07$$

- для варіант кінцевого класу

$$V_2 = \frac{X_{\max} - \bar{X}}{\sigma} = \frac{34 - 22,47}{5,05} = 2,28$$

де: X_{\min} , X_{\max} – початковий і кінцевий класи варіаційного ряду діаметрів, варіанти яких підлягають перевірці; \bar{X} – середня арифметична; σ – основне відхилення.

Встановлення належності крайніх варіант до однієї вибірки здійснюється шляхом співставлення фактичних значень критеріїв відповідності (V_1 , V_2) з критичним ($V_{5\%}$), яке беруть з додатку 2 за обсягом вибірки.

При $N = 212$ критичне значення $V_{5\%} = 3,61$. На підставі порівняння фактичних значень критеріїв із критичною межею можна зробити

висновок, що варіанти у початковому і кінцевому класах належать до однієї вибірки ($2,07 < 3,61$; $2,28 < 3,61$).

Визначають показники форми кривої розподілу:

- асиметрію:

$$A = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^3 n_i}{N\sigma^3} = \frac{5508,019}{212 \cdot (5,05)^3} = +0,202$$

- ексцес:

$$E = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^4 n_i}{N\sigma^4} - 3 = \frac{336854,961}{212 \cdot (5,05)^4} - 3 = -0,557$$

За знаком показників асиметрії та ексцесу роблять висновок про форму кривої розподілу (дод. 3).

За абсолютним значенням асиметрії та ексцесу за відповідною шкалою (дод. 4) аналізують інтенсивність зміщення кривої розподілу стосовно осі симетрії та її розтягнутість вздовж осі абсцис.

Обчислюють показник точності досліду:

$$p = \frac{V}{\sqrt{N}} = \frac{22,47}{\sqrt{212}} = 1,54 \%$$

Дослід вважається поставленим задовільно, якщо $p < 5\%$. У протилежному випадку слід збільшувати обсяг вибірки і знову проводити експеримент.

б) для ряду висот

На основі варіаційного ряду висот розраховують суми і квадрати центральних відхилень (табл. 1.7).

Обчислюють середнє значення:

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i n_i}{N} = \frac{4111}{212} = 19,39 \text{ м}$$

Визначають показники варіації:

- розмах варіації:

$$R = Y_{\max} - Y_{\min} = 25,1 - 12,4 = 12,7 \text{ м}$$

- дисперсію:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{Y})^2 n_i}{N} = \frac{1810,505}{212} = 8,54 \text{ м}$$

- основне (стандартне) відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{Y})^2 n_i}{N}} = \sqrt{\frac{1810,505}{212}} = 2,92 \text{ м}$$

- коефіцієнт варіації:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{Y}} 100 = \frac{2,92}{19,39} 100 = 15,06 \%$$

Таблиця 1.7

**Обчислення сум і квадратів центральних відхилень
для ряду висот**

y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{Y}$	$(y_i - \bar{Y})^2 n_i$	$(y_i - \bar{Y})^3 n_i$	$(y_i - \bar{Y})^4 n_i$
12	2	24	-7,39	109,224	-807,167	5964,963
13	6	78	-6,39	244,993	-1565,503	10003,562
14	7	98	-5,39	203,365	-1096,136	5908,172
15	9	135	-4,39	173,449	-761,441	3342,724
16	14	224	-3,39	160,889	-545,415	1848,957
17	18	306	-2,39	102,818	-245,734	587,306
18	18	324	-1,39	34,778	-48,341	67,194
19	22	418	-0,39	3,346	-1,305	0,509
20	32	640	0,61	11,907	7,263	4,431
21	29	609	1,61	75,171	121,025	194,850
22	25	550	2,61	170,302	444,490	1160,118
23	18	414	3,61	234,578	846,826	3057,041
24	9	216	4,61	191,269	881,750	4064,866
25	3	75	5,61	94,416	529,675	2971,479
Σ	212	4111	-	1810,505	-2240,013	39176,172

Здійснюють перевірку належності крайніх варіант до однієї вибірки:

$$V_1 = \frac{\bar{Y} - Y_{\min}}{\sigma} = \frac{19,39 - 12}{2,92} = 2,53$$

$$V_2 = \frac{Y_{\max} - \bar{Y}}{\sigma} = \frac{25 - 19,39}{2,92} = 1,92$$

При $N = 212$ критичне значення $V_{5\%} = 3,61$. На підставі порівняння фактичних значень критеріїв із критичною межею встановлено, що варіанти у початковому і кінцевому класах належать до однієї вибірки ($2,53 < 3,61$, $1,92 < 3,61$).

Встановлюють показники форми кривої розподілу:

- асиметрію:

$$A = \frac{\Sigma(y_i - \bar{Y})^3 n_i}{N\sigma^3} = \frac{-2240,013}{212 \cdot (2,92)^3} = -0,424$$

- ексцес:

$$E = \frac{\Sigma(y_i - \bar{Y})^4 n_i}{N\sigma^4} - 3 = \frac{39176,172}{212 \cdot (2,92)^4} - 3 = -0,458$$

Розраховують показник точності дослідів:

$$p = \frac{V}{\sqrt{N}} = \frac{15,06}{\sqrt{212}} = 1,03 \%$$

У таблиці 1.8 наведено результати обчислень статистичних показників для великих вибірок діаметрів і висот.

Таблиця 1.8

Статистичні показники вибірок діаметрів і висот

Статистичні показники	Значення	
	для ряду діаметрів	для ряду висот
1. Середнє значення (середнє арифметичне)	22,47 см	19,39 м
2. Показники варіації:		
мінімальне значення	11,3 см	12,4 м
максимальне значення	34,2 см	25,1 м
розмах варіації	22,9 см	12,7 м
дисперсія	25,55 см	8,54 м
основне (стандартне) відхилення	5,05 см	2,92 м
коефіцієнт варіації	22,47 %	15,06 %
3. Показники форми кривої розподілу:		
асиметрія	+0,202	-0,424
ексцес	-0,557	-0,458
4. Точність дослідів	1,54 %	1,03 %
5. Структурні показники варіаційного ряду		
мода	21,7 см	20,4 м
медіана	22,2 см	19,9 м
перший квартиль	18,9 см	17,4 м
другий квартиль	22,2 см	19,9 м
третій квартиль	26,2 см	21,7 м

1.3. Оцінка результатів спостережень

1.3.1. Обчислення основних помилок вибірових показників

Оцінка вибірових показників здійснюється за результатами обчислень рядів розподілу за висотою і діаметром (табл. 1.8). Для цього слід визначити основні помилки статистичних показників. *Основна помилка* – це величина, на яку вибіровий показник відхиляється від генерального. Їх обчислюють з тією точністю, з якою визначено вибіровий показник.

для ряду діаметрів

$$m_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{5,05}{\sqrt{212}} = 0,35 \text{ см}$$

$$m_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2N}} = \frac{25,55}{\sqrt{2 \cdot 212}} = 1,24 \text{ см}$$

$$m_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} = \frac{5,05}{\sqrt{2 \cdot 212}} = 0,24 \text{ см}$$

$$m_V = V \sqrt{\frac{0,5 + 0,0001V^2}{N}} =$$

$$= 22,47 \sqrt{\frac{0,5 + 0,0001(22,47)^2}{212}} = 1,14 \%$$

$$m_A = \sqrt{\frac{6}{N}} = \sqrt{\frac{6}{212}} = 0,168$$

$$m_E = \sqrt{\frac{24}{N}} = \sqrt{\frac{24}{212}} = 0,336$$

для ряду висот

$$m_{\bar{Y}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{2,92}{\sqrt{212}} = 0,20 \text{ м}$$

$$m_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2N}} = \frac{8,54}{\sqrt{2 \cdot 212}} = 0,41 \text{ м}$$

$$m_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} = \frac{2,92}{\sqrt{2 \cdot 212}} = 0,14 \text{ м}$$

$$m_V = V \sqrt{\frac{0,5 + 0,0001V^2}{N}} = 15,06 \times$$

$$\times \sqrt{\frac{0,5 + 0,0001(15,06)^2}{212}} = 0,75 \%$$

$$m_A = \sqrt{\frac{6}{N}} = \sqrt{\frac{6}{212}} = 0,168$$

$$m_E = \sqrt{\frac{24}{N}} = \sqrt{\frac{24}{212}} = 0,336$$

1.3.2. Точкова оцінка вибірових показників

Здійснюється на основі вибірових показників діаметрів і висот із використанням їх основних помилок.

$\bar{X} \pm m_{\bar{X}}$	$22,47 \pm 0,35$	$\bar{Y} \pm m_{\bar{Y}}$	$19,39 \pm 0,20$
$\sigma^2 \pm m_{\sigma^2}$	$22,55 \pm 1,24$	$\sigma^2 \pm m_{\sigma^2}$	$8,54 \pm 0,41$
$\sigma \pm m_{\sigma}$	$5,05 \pm 0,24$	$\sigma \pm m_{\sigma}$	$2,92 \pm 0,14$
$V \pm m_V$	$22,47 \pm 1,14$	$V \pm m_V$	$15,06 \pm 0,75$
$A \pm m_A$	$+0,202 \pm 0,168$	$A \pm m_A$	$-0,424 \pm 0,168$
$E \pm m_E$	$-0,557 \pm 0,336$	$E \pm m_E$	$-0,458 \pm 0,336$

1.3.3. Інтервальна оцінка вибірових показників

Побудова довірчого інтервалу здійснюється з використанням вибірових показників, їх основних помилок і довірчих коефіцієнтів. Ліву межу знаходять як різницю між вибіровим показником і добутком основної помилки на коефіцієнт, а праву – як їх суми.

а) оцінка середнього значення

	$\bar{X} \pm tm_{\bar{X}}$	$\bar{Y} \pm tm_{\bar{Y}}$
	$\bar{X} - tm_{\bar{X}} \div \bar{X} + tm_{\bar{X}}$	$\bar{Y} - tm_{\bar{Y}} \div \bar{Y} + tm_{\bar{Y}}$
68%:	(22,12 ÷ 22,82)	68%: (19,19 ÷ 19,59)
95%:	(21,78 ÷ 23,16)	95%: (19,00 ÷ 19,78)
99%:	(21,57 ÷ 23,37)	99%: (18,87 ÷ 19,91)
99,9%:	(21,32 ÷ 23,62)	99,9%: (18,73 ÷ 20,05)

б) оцінка стандартного відхилення

	$\sigma \pm tm_{\sigma}$	$\sigma \pm tm_{\sigma}$
	$\sigma - tm_{\sigma} \div \sigma + tm_{\sigma}$	$\sigma - tm_{\sigma} \div \sigma + tm_{\sigma}$
68%:	(4,81 ÷ 5,29)	68%: (2,78 ÷ 3,06)
95%:	(4,58 ÷ 5,52)	95%: (2,65 ÷ 3,19)
99%:	(4,43 ÷ 5,67)	99%: (2,56 ÷ 3,28)
99,9%:	(4,26 ÷ 5,84)	99,9%: (2,46 ÷ 3,38)

в) оцінка коефіцієнта варіації

	$V \pm tm_V$	$V \pm tm_V$
	$V - tm_V \div V + tm_V$	$V - tm_V \div V + tm_V$
68%:	(21,33 ÷ 23,61)	68%: (14,31 ÷ 15,81)
95%:	(20,24 ÷ 24,70)	95%: (13,59 ÷ 16,53)
99%:	(19,53 ÷ 25,41)	99%: (13,12 ÷ 17,00)
99,9%:	(18,72 ÷ 26,22)	99,9%: (12,59 ÷ 17,53)

г) оцінка асиметрії

	$A \pm tm_A$	$A \pm tm_A$
	$A - tm_A \div A + tm_A$	$A - tm_A \div A + tm_A$
68%:	(+0,034 ÷ +0,370)	68%: (-0,592 ÷ -0,256)
95%:	(-0,127 ÷ +0,531)	95%: (-0,753 ÷ -0,095)
99%:	(-0,231 ÷ +0,635)	99%: (-0,857 ÷ +0,009)
99,9%:	(-0,351 ÷ +0,755)	99,9%: (-0,977 ÷ +0,129)

д) оцінка ексцесу

	$E \pm tm_E$	$E \pm tm_E$
	$E - tm_E \div E + tm_E$	$E - tm_E \div E + tm_E$
68%:	(-0,893 ÷ -0,221)	68%: (-0,794 ÷ -0,122)
95%:	(-1,212 ÷ +0,101)	95%: (-1,116 ÷ +0,200)
99%:	(-1,424 ÷ +0,310)	99%: (-1,325 ÷ +0,409)
99,9%:	(-1,662 ÷ +0,548)	99,9%: (-1,563 ÷ +0,647)

1.3.4. Встановлення достатньої кількості спостережень

Достатня кількість спостережень визначається за формулою:

$$N = \frac{t^2 V^2}{p^2}$$

де: t – довірчий коефіцієнт; V – коефіцієнт варіації; p – точність дослід.

За наведеною формулою визначають, чи достатньою є вибірка обсягом 212 одиниць для отриманих показників варіації і точності дослід.

для ряду діаметрів	для ряду висот
68%: $N = \frac{(1,00)^2(22,47)^2}{(1,54)^2} = 213$ шт.	68%: $N = \frac{(1,00)^2(15,06)^2}{(1,03)^2} = 214$ шт.
95%: $N = \frac{(1,96)^2(22,47)^2}{(1,54)^2} = 818$ шт.	95%: $N = \frac{(1,96)^2(15,06)^2}{(1,03)^2} = 822$ шт.
99%: $N = \frac{(2,58)^2(22,47)^2}{(1,54)^2} = 1419$ шт.	99%: $N = \frac{(2,58)^2(15,06)^2}{(1,03)^2} = 1425$ шт.
99,9%: $N = \frac{(3,29)^2(22,47)^2}{(1,54)^2} = 2305$ шт.	99,9%: $N = \frac{(3,29)^2(15,06)^2}{(1,03)^2} = 2315$ шт.

1.3.5. Встановлення значимості середнього значення

Обчислення здійснюють із використанням t -критерію Ст'юдента для середнього діаметра і середньої висоти (табл. 1.8). Вважається, що якщо відношення вибіркового показника до основної помилки перевищує критичне значення t -критерію Ст'юдента на 5 %-му рівні значимості (1,96), то показник, який оцінюється, є достовірним.

для ряду діаметрів	для ряду висот
$t = \frac{\bar{X}}{m_{\bar{X}}} \geq 1,96$	$t = \frac{\bar{Y}}{m_{\bar{Y}}} \geq 1,96$
$t = \frac{22,47}{0,35} = 64,2 > 1,96$	$t = \frac{19,39}{0,20} = 97,0 > 1,96$

Висновки. Встановлено, що середній діаметр дорівнює 22,47 см, а середня висота дерев – 19,39 м. Навколо них групується решта значень.

Варіанти у початковому і кінцевому класах діаметрів і висот належать до однієї вибірки, що підтверджує порівняння фактичних значень критеріїв відповідності із критичним значенням ($2,07 < 3,61$; $2,28 < 3,61$).

За показниками варіації вибірка діаметрів є менш статистично однорідною, тому що для неї характерне вище значення коефіцієнта варіації, порівняно з вибіркою висот.

Показники форми кривої свідчать про наступне:

- для ряду діаметрів: асиметрія незначна, ексцес помірний, крива має правосторонню асиметрію і є туповершинною;

- для ряду висот: асиметрія помірна, ексцес незначний, крива має лівосторонню асиметрію і є туповершинною.

Точність дослідів для обох вибірок є досить високою ($p < 2\%$).

Структурні показники варіаційних рядів описують їх будову, а неспівпадання медіани і моди свідчать про відхилення фактичної кривої розподілу від нормальної.

Для існуючих значень мінливості і точності дослідів обсягу вибірки у 212 одиниць достатньо лише на 68 %-му рівні ймовірності. Для того, щоб характеризувати обсяг вибірки з ймовірністю 99,9 % потрібно в 11 разів збільшити обсяг вибірки.

Середній діаметр і середня висота є достовірними показниками, оскільки відношення середніх значень до їх основних помилок перевищують критичне значення t-критерію Ст'юдента на 5 % рівні значимості ($64,2 > 1,96$; $97,0 > 1,96$).

2. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ І РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Мета роботи: виконати кореляційний і регресійний аналіз результатів спостережень.

Завдання:

1. Опанувати основні терміни та визначення.
2. Обчислити показники кореляційного зв'язку для малої та великої вибірок діаметрів і висот, дати їх оцінку.
3. Визначити коефіцієнти лінійної регресії прямої способом найменших квадратів і встановити їх значимість.
4. Дати оцінку адекватності і точності вирівнювання рівняння регресії.

2.1. Кореляційний аналіз

2.1.1. Обчислення показників зв'язку для малої вибірки і їх оцінка

а) аналіз зв'язку за коефіцієнтом кореляції

Обчислюють коефіцієнт кореляції між діаметрами (x_i) і висотами (y_i) перших 20 дерев із вихідного завдання (дод. 1). Порядок обчислень наведено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Обчислення коефіцієнта простої лінійної кореляції Пірсона

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{X}$	$y_i - \bar{Y}$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$
1	12,9	16,3	-5,52	-2,66	30,470	7,076	14,683
2	16,0	14,6	-2,42	-4,36	5,856	19,010	10,551
3	17,8	20,1	-0,62	1,14	0,384	1,300	-0,707
4	24,2	22,7	5,78	3,74	33,408	13,988	21,617
5	19,6	18,7	1,18	-0,26	1,392	0,068	-0,307
6	17,5	19,0	-0,92	0,04	0,846	0,002	-0,037
7	16,8	18,8	-1,62	-0,16	2,624	0,026	0,259
8	16,1	19,9	-2,32	0,94	5,382	0,884	-2,181
9	17,4	20,3	-1,02	1,34	1,040	1,796	-1,367
10	16,6	19,6	-1,82	0,64	3,312	0,410	-1,165
11	19,1	20,4	0,68	1,44	0,462	2,074	0,979
12	13,5	17,6	-4,92	-1,36	24,206	1,850	6,691
13	11,3	12,9	-7,12	-6,06	50,694	36,724	43,147
14	25,1	21,4	6,68	2,44	44,622	5,954	16,299
15	13,1	15,9	-5,32	-3,06	28,302	9,364	16,279
16	26,4	22,2	7,98	3,24	63,680	10,498	25,855
17	16,7	19,6	-1,72	0,64	2,958	0,410	-1,101
18	13,9	14,4	-4,52	-4,56	20,430	20,794	20,611
19	30,7	22,4	12,28	3,44	150,798	11,834	42,243
20	23,7	22,5	5,28	3,54	27,878	12,532	18,691
Σ	368,4	379,3	0	0	498,744	156,594	231,040

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{368,4}{20} = 18,42 \text{ см}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{379,3}{20} = 18,96 \text{ м}$$

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{X})^2 \sum (y_i - \bar{Y})^2}} = \frac{231,040}{\sqrt{498,744 \cdot 156,594}} = 0,827$$

$$r^2 = (0,827)^2 \cdot 100\% = 68 \%$$

Далі здійснюють оцінку значимості коефіцієнта кореляції за Z-перетворенням Фішера:

$$z = 0,5 \ln \frac{1+r}{1-r} = 0,5 \ln \frac{1+0,827}{1-0,827} = 1,178$$

Основна помилка z-перетворення Фішера становить:

$$m_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} = \frac{1}{\sqrt{20-3}} = 0,242$$

Фактичне значення t-критерію Ст'юдента дорівнює:

$$t = \frac{z}{m_z} = \frac{1,178}{0,242} = 4,87$$

З додатку 5 за числом ступенів свободи $\nu = N - 2 = 20 - 2 = 18$ виписують критичне значення t-критерію Ст'юдента: $t_{5\%} = 2,10$.

Виходячи з того, що фактичне значення t-критерію Ст'юдента перевищує критичне ($4,87 > 2,10$), можна стверджувати, що обчислений коефіцієнт кореляції є значимим показником зв'язку між досліджуваними ознаками на рівні ймовірності 95 %.

б) аналіз зв'язку за кореляційним відношенням

Використовують ті ж 20 діаметрів і висот, що і в попередньому завданні. Спочатку формують класи (групи) за діаметром (6, 12 і т.д.). Наприклад, 12-й клас утворився тому, що є діаметри 11,3 та 12,9 см, які потрапляють до нього при групуванні. Записують висоти тих дерев, які потрапляють у визначені класи. Для кожного класу встановлюють групові середні (\bar{Y}_x) шляхом ділення сум варіант окремого класу на їх кількість. Обчислення здійснюють за відповідною схемою (табл. 2.2).

Середнє значення становить:

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{379,3}{20} = 18,96 \text{ м}$$

Загальна дисперсія дорівнює:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{Y})^2}{N-1} = \frac{156,57}{20-1} = 8,24 \text{ м}$$

Обчислення кореляційного відношення

x_i	y_i	n_i	\bar{Y}_x	$y_i - \bar{Y}$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$\bar{Y}_x - \bar{Y}$	$(\bar{Y}_x - \bar{Y})^2$	$(\bar{Y}_x - \bar{Y})^2 n_i$
12	16,3 12,9	2	14,6	-2,66 -6,06	7,08 36,72	-4,4	19,36	38,72
14	17,6 15,9 14,4	3	16,0	-1,36 -3,06 -4,56	1,85 9,36 20,79	-3,0	9,00	27,00
16	14,6 18,8 19,9 19,6 19,6	5	18,5	-4,36 -0,16 0,94 0,64 0,64	19,01 0,02 0,88 0,41 0,41	-0,5	0,25	1,25
18	20,1 19,0 20,3	3	19,8	1,14 0,04 1,34	1,30 0,00 1,80	0,8	0,64	1,92
20	18,7 20,4	2	19,6	-0,26 1,44	0,07 2,07	0,6	0,36	0,72
24	22,7 22,5	2	22,6	3,74 3,54	13,99 12,53	3,6	12,96	25,92
26	21,4 22,2	2	21,8	2,44 3,24	5,95 10,50	2,8	7,84	15,68
30	22,4	1	22,4	3,44	11,83	3,4	11,56	11,56
Σ	379,3	20	-	0	156,57	-	-	122,77

Дисперсія групових середніх дорівнює:

$$\sigma_{yx}^2 = \frac{\sum (\bar{Y}_x - \bar{Y})^2 n_i}{N - 1} = \frac{122,77}{20 - 1} = 6,46 \text{ м}$$

Кореляційне відношення становить:

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{\frac{6,46}{8,24}} = 0,885$$

Оцінка достовірності кореляційного відношення здійснюється з використанням основної помилки і t-критерію Ст'юдента.

Основна помилка кореляційного відношення рівна:

$$m_\eta = \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{N - 2}} = \sqrt{\frac{1 - (0,885)^2}{20 - 2}} = 0,110$$

$$\text{Критерій Ст'юдента: } t = \frac{\eta_{yx}}{m_\eta} = \frac{0,885}{0,110} = 8,04$$

За додатком 5 при $v = N - 2 = 20 - 2 = 18$, $t_{5\%} = 2,10$.

Оскільки фактичне значення t-критерію Ст'юдента перевищує критичне ($8,04 > 2,10$), можна стверджувати, що обчислене кореляційне відношення є значимим показником зв'язку між досліджуваними ознаками на рівні ймовірності 95 %.

в) аналіз зв'язку за коефіцієнтом рангової кореляції Спірмена

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена є непараметричним показником кореляційного зв'язку і застосовується при вивченні кількісних та якісних ознак, якщо наперед невідомі закон розподілу та форма зв'язку.

Використовують ті ж 20 діаметрів і висот, що й для обчислення коефіцієнта кореляції і кореляційного відношення. Варіанти за діаметром розміщують у порядку зростання і записують відповідні їм висоти. Значенням діаметрів і висот присвоюють відповідні порядкові номери, або ранги (X, Y). У випадку однакових значень знаходять середні арифметичні значення з їх порядкових номерів. Для обчислення коефіцієнта кореляції обчислюють квадрати різниць рангів (d_i^2). Порядок обчислень наведено в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Обчислення коефіцієнта рангової кореляції Спірмена

x_i	y_i	Ранги		d_i	d_i^2
		X	Y		
11,3	12,9	1	1	0	0
12,9	16,3	2	5	-3	9
13,1	15,9	3	4	-1	1
13,5	17,6	4	6	-2	4
13,9	14,4	5	2	3	9
16,0	14,6	6	3	3	9
16,1	19,9	7	12	-5	25
16,6	19,6	8	10,5	-2,5	6,25
16,7	19,6	9	10,5	-1,5	2,25
16,8	18,8	10	8	2	4
17,4	20,3	11	14	-3	9
17,5	19,0	12	9	3	9
17,8	20,1	13	13	0	0
19,1	20,4	14	15	-1	1
19,6	18,7	15	7	8	64
23,7	22,5	16	19	-3	9
24,2	22,7	17	20	-3	9
25,1	21,4	18	16	2	4
26,4	22,2	19	17	2	4
30,7	22,4	20	18	2	4
368,4	379,3	210	210	0	182,5

Здійснюють контроль обчислень:

$$\frac{N(N+1)}{2} = \sum X = \sum Y = \frac{20(20+1)}{2} = 210$$

Коефіцієнт кореляції дорівнює:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{N^3 - N} = 1 - \frac{6 \cdot 182,5}{20^3 - 20} = 0,863$$

Оцінку значимості коефіцієнта рангової кореляції проводять шляхом порівняння його фактичного і критичного значення. У додатку 6 наведено критичні значення коефіцієнта кореляції (r_{st}) залежно від обсягу вибірки на рівнях значимості 5 % і 1 %. Якщо $r_s \geq r_{st}$, коефіцієнт кореляції вважається значимим показником зв'язку, а якщо $r_s < r_{st}$ – незначимим.

За таблицею критичних значень (дод. 6) при $N = 20$, $r_{5\%} = 0,534$.

Оскільки фактичне значення коефіцієнта рангової кореляції Спірмена перевищує критичне значення ($0,863 > 0,534$), кореляційний зв'язок між діаметрами і висотами дерев ялиці є значимим на рівні ймовірності 95 %.

2.1.2. Обчислення показників зв'язку для великої вибірки та їх оцінка

а) обчислення коефіцієнта кореляції і кореляційного відношення способом умовних середніх

Обчислення здійснюються з використанням результатів таблиці 1.1. Починають його із встановлення середніх залежної і незалежної ознаки (табл. 2.4, 2.5).

Таблиця 2.4

Обчислення умовних середніх залежної ознаки

x_i	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	Σ
n_i	4	9	17	26	31	35	25	22	17	14	8	4	212
\bar{Y}_x	13,2	14,2	16,4	17,5	17,8	19,1	20,6	21,5	22,2	22,8	23,8	24,5	-
$\bar{Y}_x n_i$	52,8	127,8	278,8	455,0	551,8	668,5	515,0	473,0	377,4	319,2	190,4	98,0	4107,7

$$\bar{Y}_{ум} = \frac{\sum \bar{Y}_x n_i}{N} = \frac{4107,7}{212} = 19,4 \text{ м}$$

Таблиця 2.5

Обчислення умовних середніх незалежної ознаки

y_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Σ
n_i	2	6	7	9	14	18	18	22	32	29	25	18	9	3	212
\bar{X}_y	12,0	13,7	16,3	16,9	17,8	19,4	20,3	20,4	21,2	24,7	27,0	29,0	31,8	33,3	-
$\bar{X}_y n_i$	24,0	82,2	114,1	152,1	249,2	349,2	365,4	448,8	678,4	716,3	675,0	522,0	286,2	99,9	4762,8

$$\bar{X}_{y_{\text{ум}}} = \frac{\sum \bar{X}_y n_i}{N} = \frac{4762,8}{212} = 22,5 \text{ см}$$

У таблиці 2.6 наведено схему обчислень для визначення показників зв'язку.

Таблиця 2.6

Обчислення для встановлення показників кореляційного зв'язку

x_i	\bar{Y}_x	n_i	$\frac{x_i - \bar{X}_{y_{\text{ум}}}}{i_x}$	$\frac{\bar{Y}_x - \bar{Y}_{y_{\text{ум}}}}{i_y}$	$\frac{x_i - \bar{X}_{y_{\text{ум}}}}{i_x} \cdot \frac{\bar{Y}_x - \bar{Y}_{y_{\text{ум}}}}{i_y} \cdot n_i$	$(\bar{Y}_x - \bar{Y}_{y_{\text{ум}}})^2 \cdot n_i$
12	13,2	4	-5,25	-6,2	130,20	153,76
14	14,2	9	-4,25	-5,2	198,90	243,36
16	16,4	17	-3,25	-3,0	165,75	153,00
18	17,5	26	-2,25	-1,9	111,15	93,86
20	17,8	31	-1,25	-1,6	62,00	79,36
22	19,1	35	-0,25	-0,3	2,62	3,15
24	20,6	25	0,75	1,2	22,50	36,00
26	21,5	22	1,75	2,1	80,85	97,02
28	22,2	17	2,75	2,8	130,90	133,28
30	22,8	14	3,75	3,4	178,50	161,84
32	23,8	8	4,75	4,4	167,20	154,88
34	24,5	4	5,75	5,1	117,30	104,04
-	233,6	212	-	-	1367,88	1413,55

Необхідно визначити неіменні стандартні відхилення для варіаційних рядів діаметрів і висот. Для обчислень використовують основні відхилення для ряду діаметрів (σ_d) і ряду висот (σ_h), які можна взяти з таблиці 1.8, а також відповідні величини інтервалів (i_d , i_h).

Неіменне стандартне відхилення становить:

- для ряду діаметрів:

$$\sigma_{1d} = \frac{\sigma_d}{i_d} = \frac{5,05}{2} = 2,52$$

- для ряду висот:

$$\sigma_{1h} = \frac{\sigma_h}{i_h} = \frac{2,92}{1} = 2,92$$

Далі обчислюють коефіцієнт кореляції, кореляційне відношення, коефіцієнти детермінації та міру криволінійності.

Коефіцієнт кореляції – це числовий показник простої лінійної кореляції, який описує напрям і тісноту зв'язку між досліджуваними величинами і є відношенням факторів, спільних для обох випадкових величин, до загальної кількості факторів.

Коефіцієнт кореляції рівний:

$$r = \frac{\sum \left(\frac{x_i - \bar{X}_{ум}}{i_x} \cdot \frac{Y_x - \bar{Y}_{ум}}{i_y} \cdot n_i \right)}{N \cdot \sigma_{1d} \cdot \sigma_{1h}} = \frac{1367,88}{212 \cdot 2,52 \cdot 2,92} = 0,877$$

Напрямок зв'язку встановлюють за знаком коефіцієнта кореляції: + r – зв'язок прямий; - r – зв'язок зворотний.

Тісноту зв'язку можна встановити за абсолютним значенням коефіцієнта кореляції відповідно до такої шкали:

характер зв'язку за тісністю значення коефіцієнта кореляції, r	слабкий	помірний	значний	високий	дуже високий
	0,11-0,30	0,31-0,50	0,51-0,70	0,71-0,90	0,91-1,00

Кореляційне відношення – це числовий показник, який описує тісноту зв'язку при будь-якій формі залежності і показує, яку частину загальної дисперсії (варіації) результуючої ознаки становить дисперсія часткових середніх цієї ознаки.

Кореляційне відношення становить:

$$\eta = \frac{1}{\sigma_h} \sqrt{\frac{\sum (\bar{Y}_x - \bar{Y}_{ум})^2 \cdot n_i}{N}} = \frac{1}{2,92} \sqrt{\frac{1413,55}{212}} = 0,883$$

Для встановлення ступеня тісноти зв'язку використовують ту ж шкалу, що й для коефіцієнта кореляції.

Коефіцієнт детермінації – це числовий показник, який вказує на відносну частку змін залежної ознаки під впливом незалежної.

Коефіцієнти детермінації дорівнюють:

$$r^2 = (0,877)^2 = 0,769 \text{ (76,9 \%)} \quad \eta^2 = (0,883)^2 = 0,780 \text{ (78,0 \%)}$$

Крім встановлення напрямку і тісноти зв'язку, важливо знати його форму. Одним із критеріїв оцінки форми зв'язку є міра криволінійності.

Міра криволінійності – це числовий показник форми зв'язку, який вказує на прямо- або криволінійний характер залежності між ознаками.

Міра криволінійності становить:

$$K = \eta^2 - r^2 = 0,780 - 0,769 = 0,011$$

Визначають основні помилки показників зв'язку:

- коефіцієнта кореляції:

$$m_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{N}} = \frac{1 - 0,769}{\sqrt{212}} = 0,016$$

- кореляційного відношення:

$$m_{\eta} = \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{N}} = \frac{1 - 0,780}{\sqrt{212}} = 0,015$$

- міри криволінійності:

$$m_K = \frac{2}{\sqrt{N}} \sqrt{K - K^2(2 - \eta^2 - r^2)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{212}} \sqrt{0,011 - (0,011)^2(2 - 0,780 - 0,769)} = 0,014$$

Значимість коефіцієнта кореляції і кореляційного відношення встановлюють шляхом порівняння фактичних і критичних значень t-критерію Ст'юдента.

Фактичне значення t-критерію Ст'юдента дорівнює:

$$t = \frac{r}{m_r} = \frac{0,877}{0,016} = 54,81 \qquad t = \frac{\eta}{m_{\eta}} = \frac{0,883}{0,015} = 58,87$$

За додатком 5 при $\nu = N - 2 = 212 - 2 = 210$ критичне значення t-критерію Ст'юдента становить: $t_{5\%} = 1,96$. Оскільки фактичні значення t-критерію перевищують критичні ($54,81 > 1,96$; $58,87 > 1,96$) обчислені коефіцієнт кореляції та кореляційне відношення є значимими показниками зв'язку на рівні ймовірності 95 %.

Проводиться інтервальна оцінка показників зв'язку:

	а) коефіцієнта кореляції	б) кореляційного відношення
	$r - tm_r \div r + tm_r$	$\eta - tm_{\eta} \div \eta + tm_{\eta}$
68%	0,861 ÷ 0,893	0,868 ÷ 0,898
95%	0,846 ÷ 0,908	0,854 ÷ 0,912
99%	0,836 ÷ 0,918	0,844 ÷ 0,922
99,9%	0,824 ÷ 0,930	0,834 ÷ 0,932

2.2. Регресійний аналіз

2.2.1. Обчислення коефіцієнтів регресії прямої способом найменших квадратів

При проведенні кореляційного аналізу виявлено високий і прямо-лінійний зв'язок між діаметрами і висотами дерев у ялицевому насадженні, що дозволяє встановити рівняння регресії. Порядок обчислень для визначення коефіцієнтів регресії прямої наведено у таблиці 2.7.

Розрахунки проводяться на основі ряду регресії між діаметрами (x_i) і висотами (y_i) великої вибірки (табл. 1.1).

Обчислення для встановлення коефіцієнтів регресії прямої

№	x_i	y_i	n_i	x_i^2	$y_i x_i$	\tilde{y}_i	$y_i - \tilde{y}_i$	$(y_i - \tilde{y}_i)^2$
1	12	13,2	4	144	158,4	13,9	-0,7	0,49
2	14	14,2	9	196	198,8	14,9	-0,7	0,49
3	16	16,4	17	256	262,4	15,9	0,5	0,25
4	18	17,5	26	324	315,0	16,9	0,6	0,36
5	20	17,8	31	400	356,0	17,9	-0,1	0,01
6	22	19,1	35	484	420,2	19,0	0,1	0,01
7	24	20,6	25	576	494,4	20,0	0,6	0,36
8	26	21,5	22	676	559,0	21,0	0,5	0,25
9	28	22,2	17	784	621,6	22,0	0,2	0,04
10	30	22,8	14	900	684,0	23,0	-0,2	0,04
11	32	23,8	8	1024	761,6	24,0	-0,2	0,04
12	34	24,5	4	1156	833,0	25,1	-0,6	0,36
N = 12	276	233,6	212	6920	5664,4	233,6	0,0	2,70

Обчислюють визначники:

$$D = \begin{vmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 276 \\ 276 & 6920 \end{vmatrix} = 12 \cdot 6920 - 276 \cdot 276 = 6864$$

$$A = \begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum y_i x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 233,6 & 276 \\ 5664,4 & 6920 \end{vmatrix} = 233,6 \cdot 6920 - 5664,4 \cdot 276 = 53137,6$$

$$B = \begin{vmatrix} N & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i x_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 233,6 \\ 276 & 5664,4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 5664,4 - 276 \cdot 233,6 = 3499,2$$

Визначають коефіцієнти регресії:

$$a = \frac{A}{D} = \frac{53137,6}{6864} = 7,7415 \quad b = \frac{B}{D} = \frac{3499,2}{6864} = 0,5098$$

За отриманими коефіцієнтами записують рівняння прямої, яке відображає кореляційну залежність між ознаками:

$$\tilde{y}_i = 7,7415 + 0,5098x$$

Підставляючи у рівняння відомі значення факторної ознаки (x_i) і розв'язуючи його, знаходять теоретичні значення залежної ознаки (\tilde{y}_i).

Наприклад:

$$\tilde{y}_{12} = 7,7415 + 0,5098 \cdot 12 = 13,9 \text{ м і т.д.}$$

Якщо коефіцієнти обчислені правильно, то $\sum y_i = \sum \tilde{y}_i$, а $\sum (y_i - \tilde{y}) = 0$.
Обчислюють основну помилку рівняння регресії:

$$m_{yx} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \tilde{y}_i)^2}{n - f}} = \sqrt{\frac{2,70}{12 - 2}} = 0,52 \text{ м}$$

Значимість коефіцієнтів регресії перевіряється за допомогою t-критерію Ст'юдента. Фактичні значення t-критерію визначають за наступними формулами:

$$\text{a: } t = \frac{a}{m_{yx} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{\bar{X}}{\sigma_x}\right)^2}} = \frac{7,7415}{0,52 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \left(\frac{22,47}{5,05}\right)^2}} = 11,31$$

$$\text{b: } t = \frac{b\sigma_x \sqrt{n-1}}{m_{yx}} = \frac{0,5098 \cdot 5,05 \sqrt{12-1}}{0,52} = 16,42$$

З додатку 5 за числом ступенів свободи $\nu = n - f = 12 - 2 = 10$ виписують критичне значення t-критерію Ст'юдента: $t_{5\%} = 2,23$.

Оскільки фактичні значення t-критерію Ст'юдента перевищують критичне значення ($11,31 > 2,23$; $16,42 > 2,23$), можна зробити висновок, що обчислені коефіцієнти регресії прямої є значимими на рівні ймовірності 95 %.

2.2.2. Оцінка адекватності і точності вирівнювання рівняння регресії

Рівняння регресії підлягає додатковій оцінці адекватності і точності вирівнювання. Як показник інтенсивності зв'язку використовують коефіцієнт детермінації (В). Чим ближче він наближається до одиниці, тим краще обране рівняння регресії апроксимує залежність між ознаками і навпаки.

Оцінка точності вирівнювання проводиться за величиною коефіцієнта згладжування (Θ). Коефіцієнта згладжування є коренем квадратним коефіцієнта детермінації. Вважається, що при його значенні більше за 0,95 обране рівняння регресії з достатньою точністю описує залежність. У протилежному випадку співпадання між фактичними і теоретичними значеннями недостатнє і необхідно здійснювати додаткові експериментальні дослідження.

Для перевірки адекватності обраного емпіричного рівняння регресії встановлюють середню помилку апроксимації (\bar{m}). Якщо $\bar{m} \leq 0,15$, то рівняння регресії є адекватним для досліджуваної залежності.

Спочатку необхідно обчислити середнє значення:

$$\bar{Y} = \frac{\sum \tilde{y}_i}{n} = \frac{233,6}{12} = 19,47 \text{ м}$$

Далі виконують розрахунки за схемою, що наведена в таблиці 2.8.

Таблиця 2.8

Обчислення для встановлення коефіцієнта детермінації та коефіцієнта згладжування

№	x_i	y_i	\tilde{y}_i	\bar{Y}	$(y_i - \bar{Y})^2$	$(\tilde{y}_i - \bar{Y})^2$	$(y_i - \tilde{y}_i)^2$	$\frac{ y_i - \tilde{y}_i }{y_i}$
1	12	13,2	13,9	19,47	39,31	31,02	0,49	0,053
2	14	14,2	14,9	19,47	27,77	20,88	0,49	0,049
3	16	16,4	15,9	19,47	9,42	12,74	0,25	0,030
4	18	17,5	16,9	19,47	3,88	6,60	0,36	0,034
5	20	17,8	17,9	19,47	2,79	2,46	0,01	0,006
6	22	19,1	19,0	19,47	0,14	0,22	0,01	0,005
7	24	20,6	20,0	19,47	1,28	0,28	0,36	0,029
8	26	21,5	21,0	19,47	4,12	2,34	0,25	0,023
9	28	22,2	22,0	19,47	7,45	6,40	0,04	0,009
10	30	22,8	23,0	19,47	11,09	12,46	0,04	0,009
11	32	23,8	24,0	19,47	18,75	20,52	0,04	0,008
12	34	24,5	25,1	19,47	25,30	31,70	0,36	0,024
Σ	276	233,6	233,6	-	151,30	147,62	2,70	0,279

Розраховують коефіцієнт детермінації:

$$B = \frac{\sum (\tilde{y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (y_i - \bar{Y})^2} = \frac{147,62}{151,30} = 0,976$$

Визначають коефіцієнт згладжування:

$$\Theta = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{Y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{2,70}{151,30}} = 0,991$$

Встановлюють середню помилку апроксимації:

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum \frac{|y_i - \tilde{y}_i|}{y_i} = \frac{1}{12} \cdot 0,279 = 0,02$$

Отже, близьке до одиниці значення коефіцієнта детермінації і більше за 0,95 значення коефіцієнта згладжування вказують на те, що кореляційна залежність між діаметрами і висотами з достатньою точністю описується встановленим рівнянням регресії.

Висновки. Коефіцієнт кореляції малої вибірки є значимим ($4,87 > 2,10$). Зв'язок між діаметрами і висотами прямий за напрямом і високий за тісністю. Така залежність простежується у 68 % спостережень.

Кореляційне відношення зв'язку між діаметрами і висотами малої вибірки значиме ($8,04 > 2,10$) і вказує на високий кореляційний зв'язок між цими ознаками.

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена значимий ($0,863 > 0,377$). Він свідчить про наявність прямого і високого зв'язку між діаметрами та висотами дерев.

Показники кореляційного зв'язку між діаметрами і висотами у великій вибірці значимі. Вони вказують на пряму і прямолінійну залежність між ознаками. Наявність такої залежності підтверджується у 78 % всіх спостережень. На рівні ймовірності 95 % кореляційне відношення може коливатися у межах від 0,854 до 0,912.

Коефіцієнти регресії прямої значимі ($11,31 > 2,23$; $16,42 > 2,23$).

Результати обчислень свідчать, що рівняння прямої достатньо точно описує залежність між діаметрами і висотами у ялицевому насадженні, оскільки коефіцієнт детермінації близький до одиниці, а коефіцієнт згладжування більший за 0,95. Середня помилка апроксимації менша за 0,15, тому обране рівняння можна вважати адекватним для цієї залежності.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1968. – 474 с.
2. Глазов Н.М. Статистический метод в таксации и лесоустройстве / Н.М. Глазов. – М.: Лесн. пром-сть, 1976. – 143 с.
3. Горошко М.П. Аналіз зв'язку при лісівничих та лісотаксаційних дослідженнях. Навч. вид. / М.П. Горошко, С.І. Миклуш. – Львів: УкрДЛТУ, 1994. – 26 с.
4. Горошко М.П. Біометрія: Навчальний посібник / М.П. Горошко, С.І. Миклуш, П.Г. Хомюк. – Львів: Камула, 2004. – 236 с.
5. Горошко М.П. Практикум з лісової біометрії / М.П. Горошко, С.І. Миклуш, П.Г. Хомюк. – Львів: УкрДЛТУ, 1999. – 108 с.
6. Дворецкий М.Л. Пособие по вариационной статистике / М.Л. Дворецкий. – М.: Лесн. пром-сть, 1971. – 104 с.
7. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта: (С основами статистической обработки результатов исследований). – Изд. 4-е, перераб. и доп. / Б.А. Доспехов. – М.: Колос, 1979. – 416 с.
8. Лакин Г.Ф. Биометрия: Учебное пособие для биологических специальностей вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. / Г.Ф. Лакин. – М.: Высшая школа, 1980. – 294 с.
9. Лукьянова Н.Ю. Статистический анализ данных с использованием компьютера. Учебное пособие / Н.Ю. Лукьянова. – Калининград: Изд-во КГУ, 2001. – 89 с.
10. Математическая статистика / В.М. Иванова, В.Н. Калинина, Л.А. Нешумова и др. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1981. – 371 с.
11. Митропольский А.К. Элементы математической статистики. Учебное пособие. / А.К. Митропольский. Л.: ЛЛТА, 1969. – 274 с.
12. Никитин К.Е. Методы и техника обработки лесоводственной информации / К.Е. Никитин, А.З. Швиденко. – М.: Лесн. пром-сть, 1978. – 272 с.
13. Опря А.Т. Математическая статистика / А.Т. Опря. – К.: Урожай, 1994. – 206 с.
14. Плохинский Н.А. Биометрия / Н.А. Плохинский. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. – 367 с.
15. Свалов Н.Н. Вариационная статистика. Учебное пособие для вузов / Н.Н. Свалов. – М.: Лесн. пром-сть, 1977. – 177 с.
16. Хомюк П.Г. Довідкові матеріали для занять з біометрії / П.Г. Хомюк. – Львів: УкрДЛТУ, 1999. – 106 с.

Результати замірів діаметрів і висот дерев у ялицевому насадженні

№	d, см	h, м	№	d, см	h, м	№	d, см	h, м	№	d, см	h, м	№	d, см	h, м
1	12,9	16,3	47	14,5	13,4	93	24,1	21,9	139	21,6	18,7	185	30,7	23,5
2	16,0	14,6	48	20,8	19,5	94	30,8	23,4	140	16,3	14,2	186	28,1	22,9
3	17,8	20,1	49	19,6	20,4	95	28,5	23,7	141	17,5	15,3	187	31,3	22,4
4	24,2	22,7	50	23,4	19,2	96	32,6	24,3	142	21,2	17,5	188	26,3	21,4
5	19,6	18,7	51	21,5	18,3	97	29,7	22,8	143	22,2	18,1	189	24,8	20,5
6	17,5	19,0	52	25,3	21,3	98	26,2	21,6	144	22,7	18,9	190	23,0	19,9
7	16,8	18,8	53	19,2	17,4	99	21,3	19,7	145	21,4	17,4	191	19,0	18,7
8	16,1	19,9	54	19,4	18,2	100	22,5	21,2	146	23,0	20,1	192	18,9	18,0
9	17,4	20,3	55	33,7	25,1	101	23,8	21,3	147	20,9	16,5	193	27,8	22,8
10	16,6	19,6	56	28,6	21,5	102	26,1	22,4	148	23,2	20,0	194	17,6	15,9
11	19,1	20,4	57	34,2	24,4	103	32,0	24,5	149	28,3	22,5	195	18,7	17,3
12	13,5	17,6	58	31,1	23,4	104	20,6	17,5	150	27,4	21,3	196	22,2	20,1
13	11,3	12,9	59	16,6	14,5	105	19,2	16,4	151	27,8	22,0	197	24,8	20,5
14	25,1	21,4	60	14,9	13,3	106	19,3	16,1	152	25,1	21,2	198	16,9	15,8
15	13,1	15,9	61	16,7	15,2	107	20,1	17,0	153	30,0	22,4	199	29,2	23,4
16	26,4	22,2	62	18,4	17,2	108	22,9	18,3	154	20,6	19,7	200	30,3	22,5
17	16,7	19,6	63	17,4	17,1	109	21,7	18,2	155	26,3	21,4	201	19,0	16,7
18	13,9	14,4	64	28,4	22,2	110	30,4	23,1	156	21,2	18,5	202	21,3	19,4
19	30,7	22,4	65	20,5	19,4	111	28,9	23,0	157	19,8	17,3	203	22,7	19,0
20	23,7	22,5	66	22,7	20,1	112	23,6	19,9	158	23,4	20,1	204	14,9	13,3
21	23,3	20,6	67	23,3	21,0	113	18,8	15,5	159	24,7	21,2	205	18,2	17,9
22	15,3	17,4	68	24,7	19,9	114	19,0	16,4	160	25,3	22,5	206	28,1	22,1
23	16,5	17,3	69	20,5	19,5	115	17,2	14,3	161	24,6	21,0	207	20,8	20,2
24	19,1	20,4	70	21,6	20,3	116	24,7	20,6	162	22,0	20,3	208	31,0	24,4
25	15,3	18,0	71	22,7	21,2	117	20,5	17,2	163	19,6	17,2	209	33,7	25,0
26	12,7	12,4	72	22,4	20,4	118	19,3	16,1	164	23,9	20,9	210	27,1	21,3
27	18,3	20,7	73	25,8	22,1	119	18,1	15,4	165	23,3	21,1	211	32,5	24,4
28	34,2	24,5	74	30,3	23,3	120	21,2	18,3	166	26,6	22,3	212	30,6	23,3
29	12,8	12,5	75	32,9	24,4	121	21,0	17,4	167	25,7	21,8			
30	17,1	19,4	76	31,0	23,5	122	25,8	21,2	168	24,4	20,7			
31	18,0	20,3	77	28,6	21,9	123	22,9	18,5	169	19,6	17,0			
32	18,2	20,2	78	17,1	14,5	124	20,3	16,9	170	19,9	18,2			
33	23,1	20,1	79	25,7	21,2	125	19,3	15,5	171	23,7	20,5			
34	17,4	19,5	80	20,5	18,4	126	19,1	16,3	172	21,2	18,5			
35	13,6	13,3	81	15,8	14,1	127	21,2	18,4	173	25,5	21,6			
36	14,7	15,4	82	16,0	15,4	128	21,6	18,8	174	26,1	22,9			
37	15,3	16,3	83	18,3	16,2	129	22,7	17,3	175	27,0	22,4			
38	23,7	20,0	84	17,0	15,5	130	22,9	19,5	176	19,4	18,3			
39	22,3	20,5	85	17,2	16,3	131	19,3	16,2	177	24,9	20,3			
40	17,7	19,5	86	27,1	21,7	132	21,1	18,5	178	23,8	21,1			
41	18,2	18,6	87	32,7	24,7	133	23,4	19,4	179	26,2	21,4			
42	22,2	22,0	88	30,8	23,2	134	27,7	22,3	180	25,3	20,9			
43	19,9	20,4	89	29,0	23,4	135	25,2	21,2	181	25,6	21,7			
44	21,7	20,9	90	31,2	24,5	136	26,6	21,5	182	27,5	22,3			
45	21,0	19,5	91	15,1	14,3	137	22,9	20,8	183	28,8	23,5			
46	14,6	13,4	92	22,7	19,2	138	23,0	19,3	184	29,7	23,4			

**Критичні значення коефіцієнтів для перевірки
належності крайніх варіант до одного ряду розподілу
(згруповані значення)**

N	V		N	V		N	V	
	5%	1%		5%	1%		5%	1%
5	1,92	1,97	21	2,80	3,11	80	3,33	3,70
6	2,07	2,16	22	2,82	3,13	90	3,37	3,74
7	2,18	2,31	23	2,84	3,16	100	3,40	3,77
8	2,27	2,43	24	2,86	3,18	120	3,46	3,83
9	2,35	2,53	25	2,88	3,20	150	3,53	3,90
10	2,41	2,62	26	2,90	3,22	200	3,61	3,98
11	2,47	2,69	27	2,91	3,24	300	3,73	4,09
12	2,52	2,75	28	2,93	3,26	400	3,80	4,17
13	2,56	2,81	29	2,94	3,28	500	3,87	4,24
14	2,60	2,86	30	2,96	3,29	600	3,92	4,28
15	2,64	2,90	35	3,02	3,36	700	3,96	4,32
16	2,67	2,94	40	3,08	3,42	800	3,99	4,35
17	2,70	2,98	45	3,12	3,48	900	4,02	4,35
18	2,73	3,02	50	3,16	3,52	1000	4,05	4,41
19	2,75	3,05	60	3,22	3,58	1500	4,14	4,50
20	2,78	3,08	70	3,28	3,64	2000	4,21	4,56

Форма кривої розподілу за асиметрією та ексцесом

	$A = 0$	$A < 0$	$A > 0$
$E = 0$	крива симетрична	крива має лівосторонню асиметрію	крива має правосторонню асиметрію
$E < 0$	крива туповершинна	крива має лівосторонню асиметрію і є туповершинною	крива має правосторонню асиметрію і є туповершинною
$E > 0$	крива гостровершинна	крива має лівосторонню асиметрію і є гостровершинною	крива має правосторонню асиметрію і є гостровершинною

Критерії оцінки кривої розподілу за асиметрією та ексцесом

Ступінь косості або крутості кривої розподілу	Асиметрія	Ексцес
Незначна	< 0,25	< 0,50
Помірна	0,25-0,50	0,50-1,00
Сильна	> 0,50	> 1,00

Значення t-критерію Ст'юдента (двостороннє обмеження)

v	P												v
	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,01	0,001	
1	0,128	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,70	63,65	636,6	1
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	9,925	31,59	2
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	5,841	12,94	3
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	4,604	8,610	4
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	4,032	6,859	5
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,707	5,959	6
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	3,499	5,405	7
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	3,355	5,041	8
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	3,250	4,781	9
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	3,169	4,587	10
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	3,106	4,437	11
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	3,055	4,318	12
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	3,012	4,221	13
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,977	4,140	14
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,947	4,073	15
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,921	4,015	16
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,898	3,965	17
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,878	3,922	18
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,861	3,883	19
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,845	3,850	20
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,831	3,819	21
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,819	3,792	22
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,807	3,767	23
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,797	3,745	24
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,787	3,725	25
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,779	3,707	26
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,771	3,690	27
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,763	3,674	28
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,756	3,659	29
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,750	3,646	30
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,704	3,551	40
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,660	3,460	60
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,617	3,373	120
>120	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,576	3,291	>120

Критичні значення коефіцієнта рангової кореляції Спірмена

N	Рівень ймовірності		N	Рівень ймовірності	
	0,99	0,95		0,99	0,95
4	1,000	-	16	0,425	0,601
5	0,900	1,000	18	0,399	0,564
6	0,829	0,943	20	0,377	0,534
7	0,714	0,893	22	0,359	0,508
8	0,643	0,833	24	0,343	0,485
9	0,600	0,783	26	0,329	0,465
10	0,564	0,746	28	0,317	0,448
12	0,506	0,712	30	0,306	0,432
14	0,456	0,645			