Міністерство освіти, науки, молоді і спорту України
Прикарпатський університет імені Василя Стефаника

Кафедра алгебри та геометрії

“Нескінченновимірна топологія” ─ конспект лекцій зі спецкурсу (для студентів спеціальності «Математика»).

Підготував доцент
Атаманюк Богдан Васильович

Затверджено протоколом засідання кафедри алгебри та геометрії № 2 від 17.10.2011 р.
Рецензенти: д.ф.-м.н. Загороднюк А.В., к.ф.-м.н. Никифорчин О.Р.

Івано-Франківськ
2011

Зміст

Лекція №1. Вступ. ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ І ВІДОБРАЖЕННЯ.

Цей розділ – короткий огляд деяких основних понять і теорем теорії множин загальної топології та функціонального аналізу. Наша мета – узгодити термінологію і поняття і скласти список фактів, що найчастіше використовуватимемо у розділах.

Порожню множину позначатимемо Ø. Символи $\bigcup$, $\bigcap$, $\setminus$ позначають теоретичні для множин операції об'єднання, перетину, різниці відповідно; символи $+$, $\cdot$, - резервують до випадку прсторів із заданими алгебраїчними структурами для позначення алгебраїчних дій над елементами і схожих дій над множинами. Символ $card\ A$ позначає потужність множини A. Символ $\{x\}$ позначає одноточкову множину, де $\{x_c\}_{c\in C}$ індексована система з множиною індексів C і $\{x_c : c \in C\}$ множина елементів цієї системи. Більше того, якщо W, що позначає умову або систему умов, містить точку $x \in X$, то ми записуємо $\{x \in X : W\}$ (або коротко $\{x \in X\}$) - множину всіх точок $x \in X$, що задовольняє умову, або систему умов, W.

N позначає множину всіх натуральних чисел.

Перетворення між довільними множинами будемо називати функціями. (Відображення – неперервні функції, які діють між топологічними просторами .)

Якщо $f : A \to B$ - функція, тоді область допустимих значень A відображення f позначають $dom(f)$ і образ $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ позначають $im(f)$. Множину B, взагалі більшу за образ, будемо називати носієм відображення f . Для кожного $C \subset B$, множина $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$ є прообразом множини C. Якщо $M \subset A$, тоді $f|_M$ позначає обмеження функції f на множині M . Для зручності можемо записувати як $f|M$.

Композицію функцій $f : A \to B$ і g: B $\to$G ми позначимо $g \circ f$ або коротко gf . Ми часто пишемо *gf(x)* замість *g(f(x)),* останній запис завжли має сенс. Композиції функцій та їх тотожну рівність зображуємо за допомогою комутативних діаграм.

Наступні два твердження широко використовуються у різних напрямах математики.

Твердження 1.1. (Лема Куратовського - Цорна). Якщо A - частково впорядкована множина така, що кожна лінійно впорядкована підмножина A_0 множини A є обмеженою зверху (тобто, існує елемент $a_0 \in A$ такий, що усі елементи з A_0 є меншими або рівними за a_0), тоді у даній множині A є максимальний елемент .

Твердження 1.2. (Принцип трансфінітної індукції). Якщо $W(\xi)$ - умова, така. що для порядкового числа $\xi < \xi_0$ виконується $W(1)$ і така, що як тільки $W(\xi)$ виконується для всіх $\xi < \theta(\theta < \xi_0)$, то $W(\theta)$ -також виконується, тоді умова $W(\xi)$ буде справджуватись для всіх $\xi < \xi_0$.

Сігма-алгеброю підмножин множини X є клас M підмножин множини X такий, що $X \in M$ і , якщо $A_n \in M$ для $n \in N$, тоді $\bigcup\limits_{n \in N} A_n$ і $A_1 \setminus A_2$ є елементами з M. Мірою простору є трійка (X, M, μ) , де X є множиною, M - сігма-алгебра її підмножин і μ - міра (тобто, $\mu : M \to [0;\infty], \mu(\bigcup\limits_{n \in N} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, якщо A_n не перетинаються (тобто диз'юнктні) і μ не дорівнює ∞. Якщо (X, M, μ) є мірою простору і Y топологічний простір, тоді функція $f : X \to Y$ називається вимірною, якщо $f^{-1}(U)$ $\in M$ для кожної відкритої множини $U \subset Y$. Дві вимірні функції $f, g : X \to Y$ називаються еквівалентними, якщо $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Топологічний простір – це пара *(X,$\mathfrak{I}$),* яка складається із множини X , та класу підмножин $\mathfrak{I}$ *(які називаються відкритими)* з множини X – такого, що задовольняються наступні умови:

(1) $\varnothing \in \mathfrak{I}$ і $X \in \mathfrak{I}$;

(2) $U,V \in \mathfrak{I} \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{I}$, тобто перетин скінченного числа відкритих множин буде множина відкрита;

(3) Якщо $U_c \in \mathfrak{I}\ \forall c \in C$, тоді $\bigcup U_c \in \mathfrak{I}$,тобто об'єднання будь-якого числа відкритих множин буде множина відкрита.

Клас $\mathfrak{I}$ називається топологією простору *(X,$\mathfrak{I}$),* елементи *класу* $\mathfrak{I}$ - відкритими множинами. Множина $B \subset X$ називається замкненою, якщо $X \setminus B$ – відкрита множина, тобто доповнення до замкненої $\in$ класу $\mathfrak{I}$. Для будь-якої множини $A \subset X$ ми позначаємо через clA замикання множини A, тобто найменшу замкнену множину, що містить A; внутрішність і границя множини A є множини відповідно $IntA = X \setminus cl(X \cap A), \partial A = clA \cap cl(X \setminus A)$.

Для зручності топологічний простір $(X,\mathfrak{I})$ позначатимемо просто через *X*.

Якщо $\mathfrak{I},\mathfrak{R}$ - дві топології однієї і тієї самої множини X і $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{R}$, то ми кажемо, що $\mathfrak{I}$ є слабшою, ніж $\mathfrak{R}$, або $\mathfrak{R}$ - сильніша, ніж $\mathfrak{I}$. В альтернативній термінології : $\mathfrak{R}$-грубіша і $\mathfrak{I}$ - тонша.

Клас $\mathfrak{R}$ називається базисом або базою для топології $\mathfrak{I}$, якщо кожні непорожні елементи з $\mathfrak{I}$ можуть бути представлені, як об'єднання елементів *класу* $\mathfrak{R}$. Існує багато різних баз для даної топології; одна із них - це весь клас $\mathfrak{I}$. Вага топологічного простору X, позначається через $wghtX$ -це є *infimum* потужностей всіх баз для простору *X*.

Клас $\wp \subset \mathfrak{I}$ називається передбазою для топології $\mathfrak{I}$, якщо існує база $\mathfrak{R}$ для топології $\mathfrak{I}$, що складається із скінченних перетинів елементів $\wp$.

Нехай $x \in X$. Множина $V \subset X$ називається околом точки *x*, якщо існує $U \in \mathfrak{I}$ така, що $x \in U \subset V$. Локальною базою для топології $\mathfrak{I}$ в точці *x* є множина *B(x)* відкритих околів точки *x* така, що для кожного околу *V* точки *x* існує $U \in B(x)$ з умовою, що $U \subset V$. Сімейство *B(x)* також називається базою околів точки *x*.

Найменша сігма - алгебра підмножин топологічного простору *X*, що містить всі відкриті множини, називається алгеброю Бореля, а його елементи називаються множинами Бореля. Множина Бореля, яка може бути представлена, як злічення об'єднання замкнених множин (відповідно представлена, як злічений перетин відкритих множин), називається множиною типу F_σ (відповідно - множиною типу G_δ).

Підмножина *A* топологічного простору $X = (X, \mathfrak{I})$ часто розглядатиметься, як топологічний простір з відносною топологією:

$$\mathfrak{I}\,|\,A = \{ U \bigcap A : U \in \mathfrak{I} \}$$

Нехай *X* і *Y* - топологічні простори. Функція $f : X \to Y$ є *неперервною* тоді і тільки тоді, коли $f^{-1}(V)$ є відкритою для кожної відкритої множини $V \subset Y$. Неперервну функцію ми будемо називати відображенням. З означення відносної топології $\mathfrak{I}\,|\,A = \{ U \bigcap A : U \in \mathfrak{I} \}$ випливає, що функція $f : X \to Y$ є неперервною тоді і тільки тоді, коли обмеження даної функції, тобто $f_1 : X \to f(X)$ таке, що $f_1(x) = f(x)$ для всіх $x \in X$, є неперервним.

Гомеоморфізмом між топологічними просторами X і Y називається взаємно - однозначна неперервна функція $f: X \longrightarrow Y$ така, що вона є епіморфізмом, тобто відображенням «на», і обернена функція f^{-1} є також неперервною. Простори X і Y називаються гомеоморфними, і позначають –ся через $X \approx Y$, якщо між ними існує гомеоморфізм. Відображення $f: X \to Y$ є гомеоморфним вкладенням (скорочено: вкладення), якщо відображення f - гомеоморфізм між просторами X та $f(X)$. Вкладення $f: X \to Y$ таке, що $f(X)$ - замкнена в Y [*f(X) – відкрите в Y*] називається замкненим [відкритим] вкладенням. Для будь-якого топологічного простору X, тотожне відображення на просторі X позначатимемо через id_X або через e_X. Якщо простір X - фіксований, то ми тоді пишемо e замість e_X. Нехай $A \subset X$. Ми позначаємо через $i_A: A \to X$ відображення включення $i_A(a) = a \; \forall \, a \in A$. Кожне відображення $r: X \to A$ таке, що $r \circ i_A = e_A$ називається ретракцією X на A.

Припустимо, що X, Y – топологічні простори і $X_1 \subset X, Y_1 \subset Y$. Відображення $f: X \to Y$ називається гомеоморфізмом між парами (X, X_1) і (Y, Y_1) за умови, якщо f — гомеоморфізм з X на Y і $f(X_1) = Y_1$. Пари (X, X_1) та (Y, Y_1) називаються гомеоморфними; ми позначаємо їх так: $(X, X_1) \approx (Y, Y_1)$, якщо існує гомеоморфізм між ними. Схожа термінологія та поняття буде використовуватися для трійок (тріад).

Підмножина A топологічного простору X називається всюди щільною, якщо $clA = X$; простір X називається сепарабельним, якщо в ньому існує всюди щільна зліченна підмножина .

Топологічний простір X називається зв'язним, якщо єдиними множинами в X, що є замкненими і відкритими одночасно, є сам простір X та $\emptyset$. Або так: простір X -зв'язний тоді і тільки тоді, коли його не можна подати у вигляді об'єднання двох відкрито - замкнутих множин (тобто відкритих і замкнутих одночасно). Максимальні зв'язні частини топологічного простору називаються компонентами. Простір X називається лінійно зв'язним, якщо кожні дві точки $x, y \in X$ можуть бути сполучені дугою, тобто якщо існує неперервна функція $f: [0;1] \to X$ така, що $f(0) = x$ і $f(1) = y$.

Нагадаємо наступні означення.

1. Топологічний простір X називається регулярним, якщо для кожної замкненої множини $A \subset X$ і для кожної точки $x \in X \setminus A$ існують відкриті неперетинні множини $U, V \subset X$ такі, що $x \in U$, і множина $A \subset V$.

2. Простір X – цілком регулярний (за альтернативною термінологією: простір Тихонова), якщо для кожної замкненої множини $A \subset X$ і для кожної точки $x \in X \setminus A$, існує неперервна дійснозначна функція f, яка визначена на X така, що $A \subset f^{-1}(0), x \in f^{-1}(1)$, тобто будь-яка замкнена множина функціонально відокремлена від точки ,взятої зі свого доповнення.

3. Простір X називається нормальним, якщо кожні дві діз'юнктні замкнені множини $A, B \subset X$ можна оточити околами, які не перетинаються (допускають діз' юнктні околи).

Лема Урисона. Якщо X – нормальний простір , A, B - замкнені підмножини в X , тоді існує неперервна дійсна функція f, яка розділяє дані дві множини: $0 \le f \le 1, A = f^{-1}(1), B = f^{-1}(0).$

Функція, що записана вище, називається функцією Урисона пари множин *(A, B).*

Теорема продовження Тітце - Урисона. Нехай X – нормальний простір, $A \subset X$ — замкнена множина і f — дійснозначна функція, визначена на *A*. Тоді існує неперервна дійснозначна функція F , визначена на X яка є продовженням f , тобто *F(a) = f(a)* для $a \in A$, що задовольняє умови:

$\inf F(X) = \inf f(A)$, $\sup F(X) = \sup f(A)$.

4.Топологічний простір X називається компактним, якщо для будь-якого сімейства відкритих множин $\{U_c\}_{c \in C}$, яке є покриттям простору X, тобто $\bigcup_{c \in C} U_c = X$ існує скінченне підпокриття $U_{C_1,} U_{C_2}, \ldots, U_{C_n}$ таке, що $\bigcup_{i=1}^{n} U_{C_i} = X$. (Підмножина A топологічного простору X називається компактною, якщо A — компактний простір з відносною топологією, індукованою із заданої на всьому просторі X .)

Для подальшого ми часто використовуватимемо наступні елементарні властивості компактних просторів:

1):всякий неперервний образ компактного простору (множини) є компактним;

2):взаємно-однозначне відображення з компактною областю допустимих значень буде вкладенням.

Компактифікацією повного регулярного топологічного простору X називається будь-яка пара (Y, r) така, що Y є компактним простором і r: $X \to Y$ - вкладення таке, що замикання $cl(rX) = Y$. Компактифікацію (Y, r) будемо часто позначати через Y.

Дві компактифікації $(Y_1, r_1), (Y_2, r_2)$ того самого простору X називаються еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм f з Y_1 на Y_2 такий, що $f(r_1(x)) = r_2(x)$ $\forall x \in X$.

Теорема 2.2 (Існування Стоун - Чехівської компактифікації). Кожний повний регулярний топологічний простір X допускає компактифікацію $\beta X = (Y, r)$, що має таку властивість: для будь-якої компактифікації (Y_1, r_1) з X існує відображення $g : Y \to Y_1$ таке, що $gr = r_1$. Компактифікація βX є єдиною з точністю до еквівалентності, і називається компактифікацією Стоуна-Чеха.

5. Топологічний простір X називається локально компактним, якщо кожна його точка має компактний окіл.

Припустимо, що X - локальний компактний простір, але який не є компактним. Тоді одноточковою компактифікацією простору X називається простір $Y = X \cup \{\infty\}$, де ∞ - довільна індивідуальна точка, що не належить до даного простору.

Множина $U \subset Y$ є відкритою, якщо кожна U є відкритою підмножиною в X в початковій топології X, або доповнення $Y \setminus U$ є компактною підмножиною в X.

Простір X називається сігма - компактним, якщо він може бути записаний у вигляді зліченного об’єднання своїх компактних підмножин.

Тепер ми зафіксуємо список символів для стандартних топологічних просторів.

$N =$ **множина** натуральних чисел, наділена дискретною топологією (кожна точка є відкритою).

$n = \{1, \ldots, n\}$ - n-точковий дискретний простір.

$R =$ дійсна пряма із звичайною топологією (породженою базою, що складається з усіх відкритих інтервалів).

$R^n =$евклідовий n-вимірний простір (з топологією декартового добутку).

Нехай $a, b \in R$ з умовою $a < b$. Тоді замкнені, відкриті і напіввідкриті інтервали будемо позначати:

$$[a,b] = \{t : a \le t \le b\}, (a,b) = \{t : a < t < b\}, (a,\infty) = \{t : t > a\},$$
$$[a,b) = \{t : a \le t < b\}, (a,b] = \{t : a < t \le b\}, [a,\infty) = \{t : t \ge a\}.$$

Тоді усі такі інтервали є підмножинами з R і мають топологію, що індукована на R.

Ми також будемо використовувати такі інтервали: $[a,\infty]$ $=[a,\infty)\bigcup\{\infty\}$ - ми взяли одноточкову компактифікацію простору $[a,\infty)$,

($a,\infty]=[a,\infty]\setminus\{a\}$ з умовою, що ця топологія індукована із простору $[a,\infty]$.

Ми позначаємо: $R^{+}=[0,\infty)$ - промінь.

Якщо ξ,η - порядкові числа, причому $\xi\le\eta$, то $[\xi,\eta]$ позначає множину всіх натуральних чисел υ таких, що знаходяться між ними: $\xi\le\upsilon\le\eta$ з топологією, породженою базисом множин $\{a:\xi'\le a<\eta'\}$, причому $\xi\le\xi'<\eta'\le\eta+1$.Ми маємо $[\xi,\eta)=[\xi,\eta]\setminus\{\eta\},[\xi]=[1,\xi)$.

Символи однакового вигляду будуть використані для позначення інтервалів на дійсній прямі і порядкових інтервалів (і будуть використані також для позначення прямолінійних відрізків у лінійних просторах). Це не приведе до протиріч тому. що значення символів буде ясне з контексту.

Лекція № 2. МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ ТА ПОВНІ МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ.

Метрикою на множині A називається невід'ємна функція *d(x, y)*, яка задана для $x, y\in A$ з наступними умовами:

(1) $d(x, x) = 0$ $\forall x\in A$

(2) $d(x, y) + d(y, z) < d(z, x)$ $\forall x,y,z\in A$

(3) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Коли умова (3) не накладається , то функція *d(x, y)* називається псевдо -метрикою.

Топологія $\Im$, базис якої складається з усіх метричних куль :

$$B(y,\varepsilon)=\{x\in A: d(x,y)<\varepsilon\}\ \forall y\in A,\varepsilon>0,$$

називається топологією, породженою метрикою d . Ми також говоримо, що метрика d є узгодженою метрикою з топологією $\Im$, або іншими словами , є метрикою для даного топологічного простору .

Топологічний простір X називається метризованим, якщо існує метрика, яка породжує топологію на X .

Нехай X - топологічний метричний простір, нехай d - метрика на X і нехай (x_n) - послідовність елементів з X . Ми говоримо, що (x_n)- збіжна послідовність до x_0, позначається так: $\lim_n x_n = x_0$, якщо послідовність відстаней $(d(x_n, x_0))$ є збіжною до нуля. Топологічні факти, що стосуються метричних просторів, можуть бути установлені у термінах послідовностей. Наприклад, якщо X, Y - метричні простори і $f : X \to Y$, то f є неперервним тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності (x_n) з точок простору X такої, що $\lim_n x_n = x_0$, ми одержуємо $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$.

Нехай d - метрика або псевдометрика на X. Послідовності (x_n) точок з X називається послідовністю Коші відносно d, якщо виконується умова:

(*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in N$ такий, що $d(x_n, x_k) < \varepsilon \ \forall n \geq k$.

Метрика (псевдометрика) d є повною , коли для кожної послідовності Коші (x_n), породженої метрикою d, $\exists x_0 \in X$ який є границею даної послідовності в метриці d.

Топологічний простір, що допускає метризацію повною метрикою, узгодженою з топологією, називається повно метризованим.

Твердження 3.1. Якщо X (повний) метризований топологічний простір, тоді існує(повна) метрика d для X така, що $d(x, y) \leq 1 \ \forall \ x, y \in X$.

Доведення: припустимо, ρ - довільна (повна) метрика для X. Нехай

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}.$$ Твердження доведено.

(Повним) метричним простором називається пара (X, d), тут X - деяка множина і d - метрика (повна) на X. В подальшому ми часто вживатимемо "метричний простір", як синонім до терміну " метризованого топологічного простору".

Нехай (X, d)- метричний простір, $A, B \subset X$, $x \in X$. Причому діаметр обчислюється за формулою:

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y), d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\},$$
$$diamA = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Спочатку ми означили число, що позначає відстань між точкою і множиною, потім – між двома множинами, потім – діаметр множини.

Нехай (X, d) і (X', d')- різні метричні простори. Тоді взаємно-однозначне відображення g називається ізометричним вкладенням (ізометрією), якщо $d(x, y) = d'(g(x), g(y)) \ \forall x, y \in X$ (більше того, $g(X) = X'$). Метричні простори (X, d) і (X', d') називається ізометрією, якщо існує ізоморфізм між X та X'.

Твердження 3.2 **(**Гаусдорфа). Для кожного метричного простору $X = (X, d)$ існує ізометричне вкладення g з X в деякий повний метричний простір Y такий, що $cl(g(X)) = Y$. Простір Y є єдиним з точністю до ізометрії.

Простір Y з вище наведеною властивістю називається поповненням X і позначається так: $complX$. Природньо припустити, що X - просто підмножина $complX$.

Твердження 3.3 (теорема Кантора про вкладені кулі). Якщо метричний простір (X, d) є повним і $\{A_n, n \in N\}$- вкладена послідовність замкнених підмножин з X така, що $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ і $\lim\limits_n diamA_n = 0,$ то перетин даної послідовності є одноточкова множина.

Теорема3.1 (Бера). Нехай X - повний метричний простір і нехай, для кожного $n \in N$, A_n - всюди щільна підмножина в X типу G_δ. Тоді перетин даної послідовності є всюди щільна множина в X .

Наслідок 3.1 (дуальний перефраз).Якщо X - повний метричний простір і $X = \bigcup\limits_{n \in N} B_n$, $\forall\, B_n$- замкнена, тоді принаймні (хоча би) одна з B_n має непорожню внутрішність.

Останнє твердження ми можемо традиційно виразити таким чином (такою сентенцією): кожний повний метричний простір має другу категорію Бера.

Метод доведення теорем існування, що грунтується на теоремі Бера зазвичай називається категорною технікою Бера.

Теорема 3.2 (Лаврентьєв).Нехай X, Y- повні метричні простори і нехай $A \subset X, B \subset Y$. Тоді кожний гомеоморфізм f між цими множинами може бути продовжений до гомеоморфізму f_1 між звичайними множинами A_1, B_1 типу G_δ з умовою $A \subset A_1 \subset X, B \subset B_1 \subset Y$.

Доведення 1) : Зауважимо, що кожна замкнена множина C метричного простору (X, d) має тип G_δ тому , що $C = \bigcap\limits_{n \in N} \{x : d(x, C) < 1/n\}$. Отже, якщо $K \subset L \subset X$ і кожне L- замкнене і типу G_δ відносно L або L типу G_δ і K - замкнене відносно L, то K має тип G_δ в X .

2): Припустимо, що X - довільний метричний простір, простір Y- повний метричний простір і g - відображеня з множини A з X в Y. Тоді $\forall x \in clA$ ми задаємо відхилення g від x такою формулою:

$$w(g,x)=\inf_{n\in N}\sup\{d(g(z),g(y)):z,y\in B(x,1/n)\},$$

де d є повною метрикою для Y. Ми зауважимо також, що:

$A_0=\{x\in clA: w(g,x)=0\}=\bigcap_{n\in N}\{x\in clA: w(g,x)<1/n\}$ містить A і має тип G_δ відносно clA. Тому, враховуючи 1°, A_0 має тип G_δ як підмножина з X. Більше того, використовуючи повноту Y, ми робимо висновок, що g продовжується єдиним чином (однозначно) до відображення $g_0: A_0\to Y$.

3) : тепер припустимо, що *X, Y, A, B* і f задовольняють умови теореми 3.2. Використовуючи крок 2) ми будуємо множини A_0, B_0 і відображення f_0, g_0 таким чином, що $A_0\supset A, B_0\supset B, A_0, B_0$ типу G_δ в X і Y відповідно, $f_0: A_0\to Y$ є продовженням f і $g_0: B\to Y$ є продовженням f^{-1}. Задаємо:

$$A_1=\{x\in f_0^{-1}(B): g_0 f_0(x)=x\}$$
$$B_1=f_0(A_1)=\{y\in g_0^{-1}(A_0): f_0 g_0(y)=y\},\ f_1=f_0|_{A_1}.$$

Дуже легко перевірити, що A_1, B_1, f_1 мають бажані властивості.

Теорема доведена.

Наслідок 3.2 (Серпінський).Нехай X - метричний простір. Тоді наступні умови є еквівалентними:

(a) *X – метризований повною метрикою.*

(b) *Існує вкладення f з X на повний метричний простір Y таке, що f(X) має тип* G_δ в *Y*;

(c) *для кожного вкладення f з X на повний метричний простір Y, f(X) має тип* G_δ в *Y*.

Простір (або підмножина простору), що задовольняє умову (c), називається абсолютним G_δ.

Доведення . імплікація (a) => (c) випливає з теореми 3.2 , що виконується для *X, Y, A = X, B = f(X)* і f .

(c) => (b) випливає з твердження 3.2.

(b) => (a). Припустимо, що *X* - підмножина типу G_δ повного метричного простору *Y* і *d* є повною метрикою для *Y* з умовою with $d \le 1$ (див. твердження 3.1). Припустимо, що X

= Y\ $\bigcup_{n\in N} A_n$, де кожна A_n є замкнутою в *Y*. Нехай $f_n(x) = 1/d(x, A_n)\ \forall x \in X, n \in N$.

Задамо метрику:

$$\rho(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mid f_n(x) - f_n(y) \mid \forall x, y \in X .$$

Тепер легко довести, що ρ є повною метрикою для простору *X*. ■

Нехай A- підмножина метричного простору *(X, d)* і нехай ε > 0. Множина M $\subset$X називається ε-сіткою для A, якщо *d(a, M)* < ε для кожного $a \in A$.

Твердження 3.4. Нехай *(X, d)* – повний метричний простір і *A* – замкнена підмножина простору *X*. Тоді *A* є компактом тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує у *X* скінченна ε- сіка для A. Зокрема , *X* є компактом тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε -сітка для *X* (*).

Підмножина метричного простору, що задовольняє умову (*) , називається тотально обмеженою.

Твердження 3.5. Метричний простір *X* є компактом тоді і тільки тоді, коли кожна послідовність точок даного простору містить збіжну підпослідовність.

З твердження 3.5 випливає, що кожна метрика для кожного метричного топологічного простору є повною.

Твердження 3.6. Компакт топологічного простору *X* є метризовним тоді і тільки тоді, коли $wght(X) \leq \aleph 0$.

Твердження 3.7. Кожний компактний метричний простір *X* допускає вкладення в гільбертів куб; більше того, якщо *X* є скінченно - вимірний компактний метричний простір, то *X* може бути гомеоморфно вкладений у скінченно - вимірний куб.

Ми не можемо означити поняття топологічної розмірності; для наших потреб другий вираз з твердженя 3.7 може бути прийнятий, як означення скінченно - вимірного компакту.

Ми завершуємо дану лекцію наступним нагадуванням добре відомої елементарної теореми про нерухому точку.

Твердження 3.8 (стискуючий принцип). Нехай *(X, q)* – повний метричний простір і нехай *f: X* $\rightarrow$ *X* - стискуюче відображення, тобто існує число $k \in (0;1)$ таке, що $\rho(f(x), f(y)) \leq k\rho(x, y)\ \forall x, y \in X$. Тоді існує єдина точка $x_0 \in X$ така, що $f(x_0) = x_0$.

Наслідок 3.3. Якщо X - банаховий простір і $f : X \to X$ - стискуюче відображення, тоді відображеня $F : X \to X$, задане формулою *F(x) = x+f(x)* є гомеоморфізмом простору X на себе.

Доведення. Зафіксуємо $y \in X$ і виберемо стискуюче відображеня $f_y : X \to X$ за формулою $f_y(x) = y - f(x)$. Нехай $G(y)$ буде нерухома точка для відображення $f_y(x)$. З твердження 3.8 $\Rightarrow$, що G ми вибрали добре (тобто добре визначено). Тепер ми можемо легко перевірити, що G - неперервне і $G-$ обернене відображення до відображення F .

Лекція № 3. ОПЕРАЦІЇ НА ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРАХ. Звертаємо особливу увагу на операції дискретного об'єднання , декартового добутку, редукованого декартового добутку (зокрема, конуси і склеювання), фактор-простору і границі прямої системи зліченної послідовності просторів з відкритими вкладенями.

1. Дискретні об'днання. Припустимо, що маємо індексовану систему $\{X_c\}_{c\in C}$ топологічних просторів. Ми використовуватимемо простори X_c, що попарно не перетинаються (діз'юнктні). Простір $Y = \bigoplus_{c\in C} X_c$ називається дискретним об'днанням просторів X_c, задається як $\bigcup_{c\in C} X_c$, з топологією , в якій множина $U \subset Y$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли $U \bigcap X_c$ є відкритою в X_c, для кожного $c \in C$.

Топологічний простір, що є дискретним об'днанням одноточкових просторів, - дискретний.

У випадку скінченного числа просторів ми використовуємо альтернативні символи: $X \oplus Y, X \oplus Y \oplus Z,\ldots$ для позначення дискретних об'днань.

Легко перевірити, що дискретні об'днання метризованих топологічних просторів – метризовані і дискретні об'днання локально компактних просторів є локально компактними. Компактність зберігається тільки у випадку дискретних об'днань скінченного числа просторів.

2. Декартові добутки. Маємо індексовану систему топологічних просторів $\{X_c\}_{c\in C}$. Декартовим добутком просторів X_c називається простір, чиїми елементами є усі системи $x = \{x_c\}_{c\in C}$, з топологією добутку, що породжена базисом, який складається з множин:

$$V(c_1,\ldots,c_k;U_{c_1},\ldots,U_{c_k}) = \{x = \{x_c\}_{c\in C} : x_{c_i} \in U_{c_i} \ \ \forall i = 1,\ldots,k\},$$

відповідаючого усім скінченним підмножинам $\{c_1,...,c_k\} \subset C$ і сімейству відкритих множин $U_{c_1} \subset X_{c_1},...,U_{c_k} \subset X_{c_k}$.Координатне відображення задається і позначається так: $p_{c_0}(\{x_c\}_{c\in C}) = x_{c_0}$. Якщо $\{X_c\}_{c\in C}$ і $\{Y_c\}_{c\in C}$ - дві системи просторів і $f_c : X_c \to Y_c$ - відображення, тоді $f = \underset{c\in C}{P} f_c$ називається декартовим добутком відображення f_c, який задається формулою $f(\{x_c\}_{c\in C}) = \{f_c(x_c)\}_{c\in C}$. Якщо X - топологічний простір і $g_c : X_c \to Y_c$ є відображенням, то $f = \underset{c\in C}{P} g_c : \underset{c\in C}{P} X_c \to \underset{c\in C}{P} Y_c$, де всі простори X_c є копіями одного і того самого X; і $g = \{g_c\}_{c\in C} : X \to \underset{c\in C}{P} Y_c$ задається як $g(x) = \{g_c(x)\}_{c\in C}$. З означення топології добутку $\Rightarrow$, що функції, задані вище, є неперервними.

У випадку, коли $Xc = X$ $\forall c \in C$, декартів добуток просторів X_c, позначається також через X^C.

У випадку, коли індексована множина C є скінченою і $C = \{1,2,...,n\}$, ми задаємо формулою:

$$\underset{c\in C}{P} X_c = X_1 \times ... \times X_n, \quad \underset{c\in C}{P} f_c = f_1 \times ... f_n,$$

$$\{g_c\}_{c\in C} = (g_1,...,g_n),\ X^C = X^n.$$

Для будь - якого топологічного простору X, ми позначаємо $\Delta : X \to X \times X$, через $\Delta(x) = (x,x)$. Δ називається діагональним відображенням і $\Delta(X)$, що є підмножиною $X \times X$, називається діагоналлю простору X.

Якщо X і Y - топологічні простори, $a \in X, b \in Y$, то:
$a \times : Y \to X \times Y, \times b : X \to X \times Y$ є відображеннями, що позначаються через $a \times (y) = (a,y), \times b(x) = (x,b)$.

Твердження 4.1 (Теорема Тихонова). Якщо $X_c, c \in C$, є компактними просторами , тоді добуток $\underset{c\in C}{P} X_c$ є компактним. Якщо $X_c, c \in C$ є (повними) метричними просторами і $card C \le \aleph_0$, тоді добуток $\underset{c\in C}{P} X_c$ є (повним) метричним простором.

Перше твердження – добре відома теорема Тихонова. Друге твердження – тривіальне: припустимо, що $C \subset N$ і $d_c \le 1$- (повна) метрика для X_c, ми перевіряємо що:

$$d(\{x_n\}_{n\in C}, \{y_n\}_{n\in C}) = \sum_{n\in C} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$$

є (повною) метрикою для добутку $\underset{c\in C}{P} X_c$. Твердження доведено.

3. Редукований декартів добуток. Припустимо, що M, X - топологічні простори і A - замкнена підмножина з M. Добуток з M і X, породжений множиною A, позначений $(M\times X)_A$, задається множиною: $(M\setminus A)\times X \cup A$ з умовою, що топологія, породжена базисом, який складається з усіх множин $U\times V$, де U - відкрита множина у $M\setminus A$ і V - відкрита множина в X ,і усі множини $p^{-1}(W), W$ - відкрита в M і $p:(M\times X)_A \to M$ задається формулою: $p(m,x) = m\ \forall (m,x)\in (M\setminus A)\times X,\ p(a) = a\ \forall a\in A$.

Інколи зручно взяти до уваги $(M\times X)_A$, як декартів добуток $M\times X$ з кожним ребром $\{a\}\times X$, для $a\in A$, вставлених в окремих точках і наділених відповідною топологією. Функція $f:(M\times X)_A \to Y$ представляється функцією $f:(M\times X)\to Y$, яка є константою для кожного ребра над точками множини A. Очевидно, що:

Твердження 4.2. Якщо *M, X, Y* є метричними просторами і A - замкнена підмножина з M, тоді неперервна функція $f: M\times X \to Y$ представляє неперервну функцію $f:(M\times X)_A \to Y$ тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності $((m_i, x_i))$ в $M\times X$, ми маємо:

(1) $$\lim_i m_i = a\in A \Rightarrow \lim_i f(m_i, x_i) = f(a, x_i).$$

Легко бачити, що якщо M і A- метричні простори, то $(M\times X)$ є метричним простором.

Ми задаємо конус і склейку топологічного простору X, як редукований декартів добуток:

$$coneX = ([0;1]\times X)_{\{0\}},\ suspX = (I\times X)_{\{-1;1\}}.$$

Зазвичай $coneX$ і $suspX$ беруться з фактор- топологією. Проте для наших потреб зручніше використовувати топологію редукованого добутку. В загальному ці дві топології не співпадають.

4. Фактор простори. Нехай X - топологічний простір і нехай r - відношення еквівалентності, задане на X. Позначимо через X/r множину всіх комножин $[x] = \{y\in X : yrx\}$. Нехай $\varphi: X\to X/r$ відображення-отожнення, тобто $\varphi(x) = [x]$. Позначимо:

$$J = \{U\subset X/r : \varphi^{-1}(U) \text{ є відкритою в } X\}.$$

Пара ($X/r, J_{_r}$), яку позначаємо коротко через X/r, називається фактор - простором простору X за відношенням r. Клас J завжди задовольняє аксіоми (1), (2) і (3) топології, що наведені в § 2, а також задовольняє аксіому відокремленості Гаусдорфа .

5. Пряма границя. Систему :

$$\sigma = (X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \ldots),$$

що складається з топологічних просторів X_n і відкритих вкладень $f_n : X_n \to X_{n+1}, \forall n \in N$, будемо називати прямою системою топологічних просторів. Для кожного $i < n$, ми задамо: $f_{in} = f_n \circ \ldots \circ f_i : X_i \to X_n$. Топологічний простір $X = \lim \sigma$, який називається границею системи σ (або точніше, прямою границею просторів X_n), задається як фактор- простір прямої суми $\bigoplus_{n\in N} X_n$ за відношенням: xry тоді і тільки тоді, коли існують $i, j, n \in N(n \geq \max(i, j))$ такі, що $x \in X_i, y \in X_j$ i $f_{in}(x) = f_{jn}(y)$.

Нехай φ - відображення ототожнення ,що відповідає відношенню r і нехай $\varphi_n = \varphi \mid x_n$. Тоді кожне φ_n є відкритим вкладенням з X_n в X і (3) одночасно вірно: $i < j, \varphi_i = \varphi_j f_{ij}$.

Можемо показати, що $\lim \sigma$ може характеризуватися, як найменший топологічний простір, для якого вкладення φ_n, що задовольняє умову (3), існують.

У подальшому ми будемо використовувати два факти стосовно гомеоморфізму прямих границь. Перший із них є очевидним.

Твердження 4.3. Якщо σ - пряма система (2), $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots$ і $g_n = f_{k_n k_{n+1}}$ $\forall n$, тоді $\lim\limits_{\to} \sigma \cong \lim\limits_{\to} \sigma'$, де $\sigma' = (X_{k_1} \xrightarrow{g_1} X_{k_2} \xrightarrow{g_2} \ldots)$.

Твердження 4.4. Припустимо, що $\Im$=($Y_1 \xrightarrow{g_1} Y_2 \xrightarrow{g_2} \ldots$) є прямою системою і $h_n : X_n \to Y_n, n \in N$ - відображення, визначені на просторах прямої системи (2) такі, що наступна діаграма комутативна: $g_n h_n = h_{n+1} f_n, \forall n$ і, більше того, $h_{n+1}(X_{n+1}) \supset g_n(Y_n)$. Тоді $\lim\limits_{\to} \sigma$ є гомеоморфним до прямої границі системи $\Im$.

Доведення. Дане твердження є очевидним тоді, коли h_n є гомеоморфізмом. Лема, яка подана нижче , редукує (зводить) загальне твердження до окремого спеціального випадку.

Лема 4.1. Якщо σ - пряма система (2) і для кожного n, U_n є відкритою підмножиною в X_n такою, що $U_{n+1} \supset f_n(X_n)$ і

$$\Im=(U_1 \xrightarrow{f_1|U_1} U_2 \xrightarrow{f_2|U_2} \ldots), \text{ тоді } \varinjlim \Im \cong \varinjlim \sigma.$$

Доведення леми є прямою перевіркою, що базується на основі означення прямої границі.

Лекція № 4. ПРОСТОРИ ВІДОБРАЖЕНЬ. ГОМОТОПІЇ ТА ІЗОТОПІЇ.

Припустимо, що X, Y - топологічні простори. Через $C(X,Y)$ позначимо множину усіх неперервних функцій з X на Y. $C(X,Y)$ ми будемо називати топологічним простором з компактно-відкритою топологією, що породжена передбазою, складеною із множин $\{f \in C(X,Y): f(K) \subset U\}$ для всіх компактних множин $K \subset X$ і для всіх відкритих множин $U \subset Y$.

Ми також застосовуватимемо альтернативне позначення: $C(X,Y)=Y^X$. Пізніше це буде зручно, тому що за природніми еквівалентностями:

$$(X \times Z)^X \equiv Y^X \times Z^X,\ (Y^X)^Z \equiv Y^{X\times Z},\ Y^{X\oplus Z} \equiv Y^X \times Y^Z,$$

що є дійсними за певними припущеннями для даних просторів.

Через $AuthX$ ми позначатимемо підпростір з $C(X,Y)$, що складається з усіх автогомеоморфізмів простору X, тобто гомеоморфізмів з X на X. Та сама множина, що наділена деякою сильнішою топологією за задану компактно-відкриту, позначається через $AuthX$.

Твердження 5.1. Якщо X - компактний простір і Y - (повний) метричний простір, тоді $C(X,Y)$ є (повним) метризованим. Допустима (повна) метрика для $C(X,Y)$ може бути задана формулою:

$$d(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\},$$

де d - довільна обмежена (повна) метрика для Y.

Означення 5.1. Нехай X і Y - топологічні простори і нехай A, B - підмножини X і Y відповідно. Гомотопія пари (X, A) на пару (Y, B) – це відображення $F: X \times [a,b] \to Y$ таке, що $F(A \times [a,b]) \subset B$, де $[a,b]$ - будь-який замкнений інтервал, можливо $b=\infty$. Якщо A - порожня множина, то дане відображення F називається гомотопією з X на Y, якщо також $A=\{x\}$ або $B=\{y\}$ - одноточкові множини, то ми пишемо (X,x) для $(X,\{x\})$ і (Y,y) для $(Y,\{y\})$. Гомотопія F задає параметричну сім'ю відображень $(f_t)_{a \le t \le b}$ через $f_t(x) = F(x,t)\ \forall x \in X,\ t \in [a,b]$. Ми часто ототожнюємо гомотопію F та сім'ю відображень $(f_t)_{a\le t\le b}$. Ми кажемо, що гомотопія F сполучає відображення f_a з відображенням f_b. Якщо $f:(X,A)\to(Y,B)$ і $g:(X,A)\to(Y,B)$ - відображення та якщо існує гомотопія з (X,A) на (Y,B), що сполучає f з g, то ми кажемо, що f і g є гомотопними у сенсі гомотопії пар, позначається: $f\sim g$.

Зрозуміло, що «бути гомотопією» є відношенням еквівалентності. Множина всіх гомотопічних відображень до цього відображення називається гомотопічним класом.

Означення 5.2. Нехай X - топологічний простір і нехай x - фіксована точка простору X (називається базовою точкою). Для $n=0,1,2,\ldots$ ми позначимо через $\pi_n(X,x)$ множину всіх гомотопічних класів відображення

$f:(I^n,\partial I^n)\to(X,x)$.

Зауважимо, що $\pi_0(X,x)$ може натурально співпадати з множиною усіх лінійно-зв'язних компонент простору X. Якщо X і Y - топологічні простори з базовими точками x і y відповідно, і якщо $\varphi:(X,x)\to(Y,y)$ є відображенням, то для $n=0,1,2,\ldots$ з індукується відображення:

$$\varphi_*:\pi_n(X,x)\to\pi_n(Y,y),$$

Яке задане наступним чином: якщо $a-$ будь-який гомотопічний клас із $\pi_n(X,x)$ і $f\in a$, тоді $\varphi_*(a)$ є гомотопічним класом відображення $\varphi\circ f$. Легко можна перевірити, що якщо $f_1\sim f_2$, то $\varphi f_1\sim\varphi f_2$, отже означенням φ_* є коректним. Ми говоримо, що φ_* є ізоморфізмом, якщо існує взаємно однозначне відображення «на».

Топологічний простір X називається стягуваним, якщо тотожнє відображення $id_X:X\to X$ є гомотопним до постійного відображення (і тому усі відображення у $C(X,Y)$ є гомотопними).

Гомотопія $F:X\times[a,b]\to X$ називається деформаційною ретракцією за умови, $f_a=id_X$ і $f_b\circ f_b=f_b$. Множина $Y=f_b(X)$ називається деформаційним ретрактом простору X. Гомотопія $F=(f_t)_{a\le t\le b}$ пари (X,A) на себе називається сильною деформаційною ретракцією X на A, якщо $f_i(x)=x\quad\forall x\in X, t\in[a,b]$ і $f_b\circ f_b=f_b$. Якщо існує сильна деформаційна ретракція a простору X на свою підмножину A, то ми говоримо, що A є сильним деформаційним ретрактом простору X.

Нехай A - непорожня підмножина топологічного простору X і нехай $m = 0,1,2,\ldots$. Ми пишемо $\pi_m(X,A)$=0, якщо кожне відображення $g:(I^m,\partial I^m)\to(X,A)$ є гомотопією в розумінні гомотопії із ($I^m,\partial I^m$) на (X,A) з відображенням g_1 таким, що $g_1(I^m)\subset A$. Пара (X,A) називається гомотопічно-тривівальною, якщо $\pi_m(X,A)$=0 для $m = 0,1,2,\ldots$

Зауважимо, що умова $\pi_0(X,A)$=0 означає просто, що кожна точка простору X може бути з'єднана дугою з точкою з множини A. Якщо $A=\{x\}$ - одноточкова множина, то $\pi_n(X,x_0)=0$ означає те, що множина $\pi_n(X,x_0)$ має рівно один елемент.

Твердження 5.1. Якщо A - сильний деформаційний ретракт топологічного простору X , то пара (X,A) - гомотопологічно тривіальна.

Твердження 5.2. Нехай A - непорожня підмножина топологічного простору X і нехай $i:A\to X$ позначає відображення вкладення. Якщо, для кожного $a\in A$ і для $m = 0,1,2,\ldots$, відображення вкладення $i_*:\pi_m(A,a)\to(X,a)$ є ізоморфізмом , то пара (X,A) є гомотопічно-тривіальною.

Доведення. З того, що $i_*(\pi_0(A,a))=\pi_0(X,a)$, для кожного $a\in A$,то кожна лінійно-зв'язна компонента простору X перетинає множину A. Отже, $\pi_0(X,a)$=0.

Тепер припустимо, що $n>0$. Нехай $g:(I^n,\partial I^n)\to(X,A)$ - відображення. Простежимо насамперед, що не втрачаючи загальності, ми можемо припустити, що:

(1) $g_{I_+^{n-1}} = const$, де $I_+^{n-1}=\{\xi=(\xi(i))\in I^n : \xi=1\}$,тут саме ξ(1)=1.

Дійсно, кожне відображення $g':(I^n,\partial I^n)\to(X,A)$ є гомотопне відображенню g з умовою (1) за допомогою гомотопії пар G'. G' можемо задати через $G'=g'\circ H$, де $H:I^n\times[0;1]\to I^n$ - деяка гомотопія, що задовольняє умови:

$$H|_{I^n\times\{0\}} = id_{I^n}$$
$$H(\partial I^n)\subset\partial I^n$$
$$H|_{I_+^{n-1}\times\{1\}} = \xi_0 = const$$

Нехай $\gamma = g|_{\partial I^n}$ і позначимо $J^n = cl(\partial I^n\setminus I^{n-1})$. З того, що ($J^n, J^n\cap I_+^{n-1}$) є гомеоморфізмом для пари $(I^{n-1},\partial I^{n-1})$ і так як γ, є константою на I^{n-1}, то відображення γ може бути розглянуто, як відображення пари $(I^{n-1},\partial I^{n-1})$ на (A,a),де

$a = g(\xi)$ для $\xi \in I^{n-1}$. Ми повинні показати, що γ задає клас постійних функцій в $\pi_{n-1}(X, a)$. Справді, формула:

$$\gamma_s(\xi) = \begin{cases} g(\xi), \xi = (\xi(i)) \in \partial I^n, \xi(1) \geq 1 - 2s \\ g(\xi - [1 - 2s - \xi(1)]e_1), \xi \in \partial I^n, \xi(1) < 1 - 2s \end{cases},$$

де $e_1 = (1,0,\ldots,0) \in I^n$ задає гомотопію $(\gamma_s)_{0 \leq s \leq 1}$ пари $(\partial I^n, I_+^{n-1})$ на пару (X, a) таку, що $\gamma_0' = \gamma$ і $\gamma_1' = a = const$.

Нехай множина $\Delta_n = I^n \times \{0\} \bigcup \partial I^n \times [0;1]$ і нехай $f : (\Delta_n, I^n \times \{1\}) \to (X, a)$ відображення, визначене формулою $f(\xi, 0) = g(\xi)$ для $\xi \in I^n$ і $f(\xi, s) = \gamma_s'(\xi)$ для $(\xi, s) \in \partial I^n \times [0;1]$. З того, що пара $(\Delta_n, \partial I^n \times \{1\})$ є гомеоморфізмом до пари $(I^n, \partial I^n)$ і з того, що f - стале на $\partial I^n \times \{1\}$, $\Rightarrow$ відображення f представляє елемент із $\pi_n(X, a)$. З гіпотези, що i_* - відображає $\pi_n(A, a)$ на $\pi_n(X, a)$ випливає, що існує гомотопія $F : \Delta_n \times [0;1] \to X$ пари $(\Delta_n, \partial I^n \times \{1\})$ в (X, a) таке, що $F|_{\Delta_n \times \{0\}} = f$ і $F(\Delta_n \times \{1\}) \subset A$. Далі зауважимо, що існує гомеоморфізм, скажемо, h з $I^n \times [0;1]$ на $\Delta_n \times [0;1]$ такий, що:

$$h(I^n \times \{0\}) = I^n \{0\} \times \{0\}; \quad h(I^n \times \{1\}) = I^n \times \{0\} \times \{1\}$$

а також

$$h(\partial I^n \times [0;1]) = I^n \times [0;1] \times \{0\} \cup \partial I^n \times \{1\} \times [0;1].$$

Відображення $G = F \circ h : I^n \times [0;1] \to X$ - гомотопія, що сполучає g з відображенням з I^n в A. Оскільки $f(\partial I^n \times [0;1]) \subset A$ і

$$F(\partial I^n \times [0;1] \times \{1\}) \subset F(\Delta_n \times \{1\}) \subset A, \text{то}$$

ми маємо $G(\partial I^n \times [0;1]) \subset A$. Це завершує доведення. ■

Означення 5.3. Ізотопією на топологічному просторі X ми називаємо гомотопію $F : X \times [a;b] \to X$ таку, що:

(2) $$\overline{F} \in Auth(X \times [a;b]),$$

де $\overline{F}(x,t) = (F(x,t), t)$ для $(x,t) \in X \times [a;b]$.

Існує ще інша термінологія: називаємо гомотопію, що задовольняє умову (2) зворотною ізотопією, поки під самою ізотопією маємо на увазі гомотопію F, що задовольняє слабшу умову:

$$F(\cdot,t)\in AuthX \text{ для кожного } t\in[a;b].$$

Лекція № 5. ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ І ОПУКЛІ МНОЖИНИ ЛІНІЙНИХ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ.

Як правило лінійним простором ми називаємо лінійний простір над полем R дійсних чисел. Позначаємо:

$$A+B=\{x+y: x\in A, y\in B\},\quad L\cdot A=\{tx: t\in L, x\in A\},$$
$$-A=\{-1\}\cdot A,\quad A-B=A+(-B).$$

У випадку одноточкових множин ми можемо скоротити це позначення: $x+A, L\cdot x, t\cdot A$.

Множина $U\subset X$ є поглинаюча тоді і тільки тоді, коли $R^+\cdot U=X$.

Для будь-яких $x,y\in X$ ми позначимо $(x+y)=x+(0;1)\cdot(y-x)$ - відкритий сегмент між x і y, $[x;y)=(x;y)\cup\{x\}$ і $[x,y]=[x,y)\cup\{y\}$, напіввідкритий і замкнений сегмент. Множина $x+R^+\cdot y$ називають променем, що виходить з точки x у напрямі y; якщо $y=0$, то промінь вироджений до одноточкової множини $\{x\}$.

Лінійна комбінація $t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n\ (t_i\in R, x_i\in X)$ називається опуклою, якщо $t_i\geq 0$ для $i=1,\ldots,n$ і $t_1+\ldots+t_n=1$. Маємо множину $A\subset X$. Символами:

$$spanA \text{ і } convA$$

позначають множину усіх лінійних комбінацій з елементів з A і множину опуклих лінійних комбінацій з елементів з A, відповідно. Дві множини називаються лінійною оболонкою і опуклою кулею з A.

Множина $A\subset X$ є опуклою тоді і тільки тоді, якщо $A=convA$. Це легко довести, що опуклість є еквівалентною до властивості: якщо $x,y\in A$,то звідси випливає $[x,y]\subset A$. Бачимо також, що якщо A - опукла, то $A+A=2\cdot A$.

Будь – яка функція $g: X\to R$, що задовольняє умови:

$$g(x+y)\leq g(x)+g(y),\quad g(tx)=tg(x) \text{ для } x,y\in X, t\in R^+$$

Називається напівлінійним функціоналом на X. Напівлінійний функціонал g є лінійним за умови, що $g(x+y)=g(x)+g(y)$ для всіх $x,y\in X$. Псевдонорма (або напівнорма) є напівлінійний функціонал g, що задовольняє умову: $g(tx)=|t|\cdot g(x)$ для $t\in R, x\in X$. Норма є псевдонормою, якщо вона зосереджена тільки в точці нуль. Для позначення норми і псевдонорми ми часто використовуємо символи: $\|\cdot\|, |\cdot|, |\cdot|_i$ і так далі.

Наступні зв‘язки між напівлінійним функціоналом і поглинаючими опуклими множинами легко доводяться.

Твердження 6.1. Якщо g - напівлінійний функціонал на X, тоді множина $U_g=\{x\in X: g(x)<1\}$ - поглинаюча і опукла; з іншого боку, якщо U є будь – яка поглинаюча і опукла підмножина з X, тоді функція:

(1) $$g_U(x)=\inf\{t>0: x\in t\cdot U\}$$

- напівлінійний функціонал. Більше того $g_{U_g}=g$ для кожного напівлінійного функціоналу g.

Функція (1) називається масштабним функціоналом множини U. Очевидно, що псевдонорма є масштабний функціонал поглинаючих опуклих множин, що симетричні відносно нуля.

Наступний результат Г. Гана і С. Банаха – одна із найважливіших фундаментальних теорем абстрактного функціонального аналізу.

Теорема 6.1. Припустимо, що X - лінійний простір, Y - лінійний підпростір з X і g - напівлінійний функціонал, що діє на X і f - лінійний функціонал, що діє на Y такі, що $f(x)\le g(x)$ для всіх $x\in Y$. Тоді функціонал f продовжується до лінійного функціонала F, заданого на всьому просторі X такого, що:

(2) $$F(x)\le g(x) \text{ для всіх } x\in X.$$

Ми будемо доводити цю теорему по кроках:

(1) Припустимо додатково, що корозмірність простору Y в X - одиниця, тобто існує $x_0\in X\setminus Y$ таке, що $X=Y+R\cdot x_0$. Очевидно, що якщо необхідне таке F існує, то F має вигляд: $F(y+tx_0)=f(y)+tc$ для $y\in Y, t\in R$, де c - константа. Умова (2) дає наступне обмеження на c:

(3) $$f(y)+tc\le g(y+tx_0) \text{ для всіх } y\in Y, t\in R.$$

З додатньої однорідності для g і f випливає, що достатньо мати умови (2) для $t=-1$ і для $t=1$. Це проте еквівалентне до наступної вимоги :

(4) $$f(y)-g(y-x_0)\le c\le g(y'+x_0)-f(y') \text{ для всіх } y, y'\in Y.$$

За означенням напівлінійного функціоналу і за лінійністю функціоналу та за умовою (2) нашої теореми ми маємо $f(y)-g(y-x_0)\le g(y'+x_0)-f(y')$ для всіх $y,y'\in Y$ і тому, наприклад, для числа $c=\sup\{f(y)-g(y-x_0):y\in Y\}$ задовольняється умова (4). Це завершує доведення теореми на цьому кроці .

2° Загальний випадок може бути зведений до випадку 1° із використанням принципу Кураторського – Цорна, або трансфінітної індукції.

Нехай X і Y - лінійні простори. Функція $T:X\to Y$ така, що $T(ax+bx')=aT(x)+bT(x')$ для всіх $x,x'\in X$, $a,b\in R$ називається **лінійним оператором**.

Лінійний топологічний простір є лінійний простір X , наділений топологією ,в якій лінійні операції $(x,y)\to x+y$ і $(t,x)\to tx$ є неперервними. Лінійні топологічні простори X і Y називаються **ізоморфними**, якщо існує лінійний оператор T з X на Y, що є гомеоморфізмом; оператор T називається **ізоморфізмом**.

Лінійний топологічний простір X називається **локально опуклим**, якщо існує базис околів нуля в X , що складається з опуклих множин.

Твердження 6.2. Якщо X - локальний опуклий лінійний топологічний простір і $0\ne x_0\in X$, то існує неперервний лінійний функціонал F, заданий на X такий, що $F(x_0)=1$.

Доведення: Візьмемо опуклий окіл U нуля в X і застосуємо теорему 6.1, що $Y=R\cdot x_0$, $f(tx_0)=t$ і $g=g_U$ - масштабний (калібровочний) функціонал множини U .

Нехай X - лінійний топологічний простір. Ми кажемо, що d є інваріантною метрикою для простору X , якщо d є метрикою на X ,узгодженою з топологією на X і $d(x,y)=d(x-y,0)$ для кожних $x,y\in X$. Пара (X,d) , яка складається із лінійного топологічного простору X і (повної) інваріантної метрики d для X називається **(повним) лінійним метричним простором**. Легко бачити, що якщо (X,d) є повним лінійним метричним простором і ρ - деяка довільно вибрана інваріантна метрика для X , то ρ - повна. Якщо (X,d) - лінійний метричний простір, тоді гаусдорфове поповнення на X відносно метрики d допускає природню структуру лінійного метричного простору $(\hat{X},\hat{d})$. Кожна інваріантна метрика для X однозначно продовжується до інваріантної метрики для $\hat{X}$. Отже, топологія і лінійна структура $\hat{X}$ не залежить від вибору окремої метрики, відносно якої дане поповнення виконується.

Іноді ми будемо використовувати назву “повний лінійний метричний простір”, як синонім до “повного метричного лінійного топологічного простору”. Це виправдовує факти, що якщо лінійний топологічний простір X є метризованим, то існує інваріантна метрика для X і якщо X - повний метризований, то існує повна інваріантна метрика для X.

Одним із фундаментальних фактів з приводу повних лінійних метричних просторів є наступна теорема:

Теорема 6.2 (Банаховий принцип відкритого відображення). Якщо X і Y - повні лінійні метричні простори і T - неперервний лінійний оператор з X на Y, то T є відкритим, тобто T відображає будь-яку відкриту підмножину з X на відкриту підмножину в Y.

Наступне є безпосереднім наслідком наведеної теореми.

Наслідок 6.1.Якщо X і Y - повні лінійні метричні простори і T - взаємно однозначний неперервний лінійний оператор з X на Y, то обернений $T^{-1}: Y \to X$ є неперервним лінійним оператором.■

Іншим наслідком теореми 6.2 є :

Наслідок 6.2.(Теорема про замкнені графіки). Якщо X, Y - повні лінійні метричні простори і $T: X \to Y$ є лінійний оператор такий, що графік $\{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ - замкнений у $X \times Y$, тоді T - неперервний.

Наступне застосування Банахового принципу відкритого відображення пов’язане з коефіцієнтами лінійного метричного простору. Припустимо, що (X, d) є лінійним метричним простором, тоді E - замкнений лінійний підпростір з X. Фактор-простір X / E - це лінійний метричний простір, чиї елементи є комножинами $[x] = x + E; [x] + [x'] = [x + x']$ і $t[x] = [tx]$; інваріантна метрика $\bar{d}$ для X / E задається формулою:

$$\bar{d}([x],[y]) = \inf \{d(x, y) : x \in [x], y \in [y]\}.$$

Топологія з X / E співпадає з фактор-топологією і тому вона не залежить від вибору окремої інваріантної метрики d для X. Легко бачити, що якщо X - повний метричний простір, то X / E також. Оператор:

$$[\cdot]: X \to X / E$$

називається **комножинним відображенням**.

Для будь-якого лінійного оператора $T: X \to Y$ ядром T (символ $\ker T$), називається множина $\{x \in X : T(x) = 0\}$.

Твердження 6.3. Якщо X і Y - повні метричні простори і T - лінійний оператор з X на Y, то простір Y є ізоморфним до фактор-простору $X / \ker T$.

Доведення. Очевидно, що оператор T є сталим на кожній комножині $x + \ker T$ і тому T задає лінійний оператор $\overline{T} : X / \ker T \xrightarrow[onto]{} Y$. З означення фактор-топології випливає, що $\overline{T}$ - неперервний. Отже, за наслідком 6.1, $\overline{T}$ є ізоморфізмом.

Під характером щільності лінійного метричного простору X ми маємо на увазі кардинальне число:

$$densX = \begin{cases} \dim X, \text{якщо } X - \text{скінченно} - \text{вимірний}, \\ wghtX, \text{якщо } X - \text{нескінченю} - \text{вимірний} \end{cases}.$$

Тут $\dim X$ ми позначаємо алгебраїчну розмірність лінійного простору X, тобто максимальну потужність системи лінійно-незалежних векторів лінійного простору X; $wghtX$ ми позначаємо топологічну вагу простору X, і (тому, що X є метризованим) $wghtX$ рівна мінімальній потужності всюди щільної підмножини простору X.

Припустимо, що X лінійний простір і $\|\cdot\|$ норма, задана на X. Тоді простір X, наділений метрикою $\|x - y\|$, називається нормованим лінійним простором. Повний нормований лінійний простір називається Банаховим простором.

Очевидно, що повний Гаусдорфовий простір, який є поповненням нормованого лінійного простору , буде Банаховим простором.

Лінійний простір T з нормованого лінійного простору $X = (X, \|\cdot\|)$ на нормований простір $Y = (Y, \|\cdot\|)$ такий, що $\|T(x)\| = \|x\|$ для всіх $x \in X$, називається ізометричним ізоморфізмом або лінійною ізометрією. Простори X і Y називаються ізометрично ізоморфними (лінійно ізометричні), якщо існує ізометричний ізоморфізм з X на Y.

Очевидно, що кожний нормований лінійний простір X є локально опуклим , бо кулі $\{x \in X : \|x\| < c\}$ для всіх $c > 0$ задають базу опуклих околів нуля в просторі X. Не кожний локально опуклий лінійний метричний простір є нормованим простором. Проте вірною є наступна теорема про вкладення.

Теорема 6.3. Для кожного локального опуклого лінійного метричного простору X, існує послідовність банахових просторів X_n, що $densX_n \le densX$ таких, що X є ізоморфним до лінійного підпростору добутку просторів $\underset{n\in N}{P} X_n$. Більше того, якщо X – нескінченно-вимірний, то ми маємо $dens \underset{n\in N}{P} X_n = densX$.

Доведення. З того, що X - локально опуклий і метризований простір, ми маємо, що існує зліченна база $(V_n)_{n\in N}$ опуклих околів точки нуля у X. Ми можемо припустити, що кожен V_n є симетричним відносно нуля, тому що інакше ми можемо замінити V_n на $V_n \cap (-V_n)$. Нехай для кожного $n \in N$ псевдонорма $|\cdot|_n$ є масштабним (калібровочним) функціоналом множини V_n і нехай Y_n - нормований простір, чиї вектори є комножинами $T_n(x) = \{y \in X : |y - x|_n = 0\}$ для $x \in X$. Псевдонорма $|\cdot|_n$ індукує норму на Y_n, яку позначатимемо тим же символом $|\cdot|_n$, нехай для кожного $n \in N$ задамо Банаховий простір, що є поповненням Y_n за нормою $|\cdot|_n$. Тоді комножинні операції T_n можна задати як неперервний лінійний оператор: $T_n : X \to X_n$. Тепер необхідне ізометричне вкладення $T_n : X \to \underset{n\in N}{P} X_n$ ми можемо задати формулою

$$T(x) = (T_1(x), T_2(x), ...).$$

Твердження 6.4. Нехай X - лінійний топологічний простір. Тоді наступні умови є еквівалентними:

1. X є ізоморфним до замкненого лінійного підпростору звичайного зліченного добутку Банахових просторів.
2. Існує послідовність $(|\cdot|_n)$ псевдонорм, задана на X така, що $|x|_1 \le |x|_2 \le ...$ і така, що $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x-y|_n /(1+|x-y|_n)$

є повною метрикою для простору X.

3. X є локально опуклий повний метричний простір.

Доведення. Нехай $X_n = (X_n, \|\cdot\|_n)$ для $n = 1,2,...$ – Банаховий простір. Нехай $Y = \underset{n\in N}{P} X_n$. Розглянемо наступну псевдонорму простору Y:

$|y|_n = \max(\|y(1)\|_1, ..., \|y(n)\|_n)$ для $y = (y(i)) \in Y$.

Бачимо, що формула:

$$d(y,y') = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |y'-y|_n /(1+|y'-y|_n)$$

задає повну метрику для Y. Отже, для кожного замкненого лінійного підпростору X з Y обмеження $d|_X$ є повною метрикою для X і тому псевдонорма $|\cdot|_n$, обмежена на X, задовольняє умову 2. Це доводить імплікацію з (1) в (2).

Імплікація з (1) в (3) є очевидною.

Імплікація з (3) в (1) випливає з теореми 6.3 і з того факту, що добуток простору Y є повним лінійним метричним простором, тому кожний лінійний підпростір в Y, що допускає повну інваріантну метрику, узгоджену з відносною топологією, є замкненим в просторі Y.

Лінійний топологічний простір X, що задовольняє одну з еквівалентних умов 1-3 твердження 6.4, називвається Фреше-простором.

Очевидним є те, що кожен Банаховий простір є Фреше-простором. Замкнений підпростір і фактор Банахового (Фреше) простору є Банаховий (Фреше) простір. Скінченний добуток Банахових просторів є Банаховим простором і зліченний добуток Фреше-просторів є також Фреше-простором.

Приклади (спеціальних лінійних топологічних просторів):

6.1. Простір R^n, добуток з n копій дійсної прямої, наділений топологією добутку.

Ми маємо згадати три факти, що мають відношення до простору R^n.

1.Кожний n-вимірний лінійний топологічний простір є ізоморфним до R^n.

2. Кожний лінійний функціонал на R^n є неперервний і по суті - це лінійна комбінація координатних функціоналів $(x_1,\ldots,x_n)\to x_i$. Тому кожний лінійний функціонал на довільному скінченно-вимірному лінійному просторі є неперервним.

3. Простір R^n є локально компактним;кожний локально компактний лінійний метричний простір є скінченно-вимірним.

Простір R^n, наділений нормою:

$\|(x_1,\ldots,x_n)\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$

називається евклідовим n-простором.

6.2. Зліченний добуток прямих R^n (топологія добутку). Цей простір позначається також через s, через ω або через R^∞. R^n - Фреше-простір; стандартна повна метрика для R^n задається формулою:

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\,|x(n)-y(n)|/(1+|x(n)-y(n)|).$$

6.3. Простір $C(K)$ всіх неперервних дійсно-значних функцій, заданих на топологічному просторі K. Топологія для $C(K)$ є компактно- відкритою. Простір $C(K)$ – локально - опуклий. У випадку, коли K є компактом, $C(K)$ – Банаховий простір і стандартна норма задається формулою:

$$\| x \| = \sup_{k \in K} |x(k)|.$$

Ми маємо:

Компактний топологічний простір K є метризованим тоді і тільки тоді, коли Банаховий простір $C(K)$ є сепарабельним.

6.4. Простір $CB(K)$ усіх обмежених неперервних дійснозначних функцій, заданих на топологічному просторі K з топологією рівномірної збіжності, тобто заданою нормою $\sup\{\ | x_k |, k \in K\ \}$.

У випадку, коли K є повний регулярний топологічний простір кожне обмежене відображення $f : K \to R$ рівномірно продовжується до Стоун-Чехівської компактифікації βK. Це індукує природній ізоморфізм між $CB(K)$ і $C(\beta K)$, що є ізометрією в супремум- нормі.

6.5. Простір $l_p(T)(0 \le p \le \infty)$. Ми задаємо $l_\infty(T) = CB(T)$, де T взято в дискретній топологі, тобто $l_\infty(T)$ є Банаховим простором усіх обмежених дійсно-значних функцій на T під супремум- нормою.

Для $(0 < p < \infty)$, $l_p(T)$ є повним лінійним метричним простором дійсно-значних функцій $x(\cdot)$, заданих на абстрактній множині T, такий що:

$$card\{t \in T : x(t) \ne 0\} \le \aleph$$

$$\| x \| = (\sum_{t \in T} | x(t)^p)^a < \infty$$

де $a = \min(1, 1/p)$. Метрика для $l_p(T)$ є такою: $d(x, y) = \| x - y \|$. Якщо $(1 \le p < \infty)$, тоді вище записане $\| \cdot \|$ є нормою і простір $l_p(T)$ є Банаховим простором. Для $p \in (0;1)$, простір $l_p(T)$ не є локально опуклим, хоча T є нескінченним.

Зокрема, кожен простір $l_p(T)$, визначений з точністю до ізометричного ізоморфізму кардинальним числом $cardT = \aleph$. Це мотивує альтернативне позначення $l_p(\aleph)$.

Для $T = N$, множин цілих додатніх чисел, ми використовуємо скорочене позначення $l_p = l_p(N)$.

6.6. Простір $c_0(T)$, що є замкненим лінійним підпростором $l_\infty(T)$, складається з усіх функцій $x: T \to R$ таких, що для всіх натуральних чисел $card\{t \in T : x(t) \geq 1/n\} < \aleph_0$. Ми пишемо, що $c_0(N) = c_0$.

Простір c_0 складається з усіх дійсно-значних послідовностей, що прямують до нуля.

6.7. Простір $L_p(T)(0 \leq p \leq \infty)$. Простір L_∞ є Банаховим простором усіх обмежених вимірних функцій $x:[0;1] \to R$ з нормою $\| x \| = ess \sup\limits_{t \in [0;1]} |x(t)|$.

Для $(0 < p < \infty)$ L_p - повний лінійний метричний простір усіх (класів еквівалентності) вимірних за Лебегом функцій $x:[0;1] \to R$ таких, що:

$\| x \| = (\int\limits_0^1 | x(t) |^p)^a < \infty$, де $a = \min(1, 1/p)$.

Метрикою для L_p є $\| x - y \|$. Якщо $(1 \leq p < \infty)$,то задана вище функція $\| \cdot \|$ є нормою і L_p є Банаховим простором. Для $p \in (0;1)$, простір L_p не є локально опуклим.

Лекція №6. БАНАХОВІ ПРОСТОРИ І НОРМОВАНІ ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ.

Припустимо, що $X = (X, \| \cdot \|)$ і $Y = (Y, \| \cdot \|)$ - нормовані лінійні простори. Нехай через $L(X,Y)$ позначимо лінійний простір усіх неперервних лінійних операторів $T: X \to Y$ (звичайна сума і множення на скаляр). Елементи $L(X,Y)$ є також називаються обмеженими лінійними операторами і елементи $L(X,R)$- обмеженими лінійними функціоналами. Ця термінологія мотивується наступними елементарними фактами: лінійний оператор $T: X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли :

(1) $\| T \| = \sup\{\| T(x) \| : \| x \| \leq 1\} < \infty$.

З (1) ми доводимо, що $\| T(x) \| \leq \| T \| \cdot \| x \|$ для всіх $x \in X$ і за лінійністю T, ми маємо (2):

$\| T(x) - T(x') \| \leq \| T \| \cdot \| x | - x' |$.

Легко бачити, що функція (1) є нормою лінійного простору $L(X,Y)$. З іншої сторони, ми оцінюємо простір $L(X,Y)$ як нормований лінійний простір з нормою (1). $L(X,Y)$ є Банаховим простором тоді і тільки тоді, коли Y є Банаховим простором. Звичайно, збіжність норми неперервного лінійного оператора $\Rightarrow$ поточкову збіжність: це означає, що якщо $T_n \in L(X,Y)$ і $\| T_n - T_1 \|$, тоді $\lim(T_n) - \lim(T_1)$ для всіх $x \in X$. Зворотне правильне у випадку, коли простір є скіченно-вимірним.

Використовуючи властивість (2), ми легко отримуємо:

Твердження 7.1. Якщо X – нормований лінійний простір, Y - Банаховий простір, $T_n \in L(X,Y)$ для $n \in N$, $\sup \| T_n \| < \infty$ і $\lim T_n(x)$ існує для кожного $x \in X$, де $clspanA = X$, тоді $\lim T_n(x) = T(x)$ існує для всіх $x \in X$ і $T \in L(X,Y)$.

Наступна властивість послідовності лінійних операторів часто називається « принципом рівномірної обмеженості Банаха-Штейнгауза ».

Теорема 7.1. Припустимо, що X – Банаховий простір і Y - нормований лінійний простір. Якщо для $T_n \in L(X,Y)$, для $n = 1,2,...$ і $\sup \| T_n(x) \| < \infty$ для кожного $x \in X$, то $\sup \| T_n \| < \infty$.

Доведення. Нехай $A_k = \{x \in X : \sup \| T(x) \| \le k\}$ для $k = 1,2,...$. Кожен A_k є замкненим і $\bigcup\limits_{k \in N} A_k = X$. Отже, за теоремою Бера існує таке $\varepsilon > 0, k_0 \in N, x_0 \in X$ таке, що $x_0 + \{x \in X : \| x \| \le \varepsilon\} \subset A_{k_0}$. Тому $\| T_n(x) \| \le \| T(x + x_0) \| + \| T_n(x_0) \| \le 2k_0$ для $\| x \| \le \varepsilon$ і для всіх $n \in N$. Отже, з однорідності оператора T_n ми маємо $\sup \| T_n \| < \infty$.

Тепер зауважимо про наступний простий наслідок з теореми 7.1:

Наслідок 7.1. Якщо X - Банаховий простір і Y – нормований лінійний простір, $T_n \in L(X,Y)$ і границя $\lim T_n(x) = T(x)$ існує для кожного $x \in X$, тоді T є лінійним неперервним оператором.

Теорема 7.2. Нехай X – Банаховий простір. Тоді X є ізоморфним до фактор-простору з простору $l_1(A)$, де $cardA = densX$.

Доведення. У випадку, коли X є скінченно-вимірним, то дана теорема є очевидною. Тому ми можемо припустити, що $densX = wghtX \ge \aleph_0$. Нехай $B = \{x \in X : \| x \| \le 1\}$ - замкнена одинична куля в X і нехай A –всюди щільна підмножина кулі B, така що $cardA = densX$. Задамо лінійний оператор $T : l_1(A) \to X$ формулою:

(3) $$T(y) = \sum\{y(a) \cdot a : a \in A\} \text{ для } y = (y(a)) \in l_1(A) \quad .$$

З того, що . $\sum\limits_{a \in A} | y(a) | < \infty$ для $y \in l_1(A)$ і $\| a \| \le 1$ для $a \in A$ ми робимо висновок, що $\| T \| \le 1$ і, зокрема, що T - неперервний лінійний оператор.

Ми повинні показати , що:

(4) $$T\ (l_1(A)) \supset B .$$

Накінець припустимо, що $x \in B$. Виберемо точку $a_0 \in A$ таку, що $\| x - a_0 \| < 2^{-1}$. Припустимо, що ми маємо різні точки $a_0, \ldots, a_{n-1}$ в A так ,що $\left\| x - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-1} a_i \right\| < 2^{-n}$. Отже, точка $z = 2^n \left(x - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-1} a_i \right)$ є також в *B*. З того,що A всюди щільна в B, ⇒існує точка a_n така, що $\| z - a_n \| < 1/2$. Отже, $\| x - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-1} a_i \| < 2^{-n-1}$. Це дає індуктивну конструкцію послідовності (a_n), що складається з різних точок A такої, що:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-1} a_i \ .$$

Це означає, що $x = T(y)$, де $y \in l_1(A)$ - точка, визначена з умови $y(a_i) = 2^{-i}$ для $i = 0,1,\ldots, y(a) = 0$, для $a \in A \setminus \{a_0, a_1, \ldots\}$, що задана в (4). З однорідності оператора T з (4), ми отримуємо, що $T\,(l_1(A)) = X$. Отже, за твердженням 6.3, X є ізоморфним до $l_1(A) \setminus \ker T$.

У останньому доведенні ми мали справу з рядом елементів лінійного метричного простору. Сума таких рядів (якщо існує) є границею його часткових сум. Якщо $\{x_s\}_{s \in S}$ – система елементів Банахового простору така, що $\sum_{s \in T} \| x_s \| < \infty$, то $x_s = 0$ для всіх, окрім скінченного числа значень і за повнотою простору X, кожний ряд, що містить усі ненульові елементи системи $\{x_s\}_{s \in S}$ є збіжним і його сума не залежить від вибору елементів. Ця сума позначається: $\sum_{s \in S} x_s$.

Тепер ми обговоримо деякі факти, пов'язні з неперервними лінійними функціоналами, задані на нормованих лінійних просторах. Для кожного нормованого лінійного простору $X = (X, \| \cdot \|)$ ми позначаємо через X^* -простір усіх лінійних неперервних функціоналів простору X . Простір X^* називається спряженим до X , його елементи зазвичай позначають через $f, g. f_n, \ldots$З того, що R - дійсна пряма, що є повною, простір X^* є Банаховим простором із спряженою нормою:

(5) $$\| f \| = \sup\{\| f(x) \| : \| x \| \le 1\}.$$

Теорема 6.1, застосована до нормованих лінійних просторів наступну теорему:

Теорема 7.3. (теорема продовження Гана-Банаха). Нехай X - нормований лінійний простір і Y - лінійний підпростір X . Тоді кожен лінійний функціонал $f \in Y^*$ допускає продовження таке, що $\bar{f} \in Y^*$, $\| \bar{f} \| = \| f \|$.

Доведення. Застосуємо теорему 6.1 з напівлінійним функціоналом $g(x) = \| f \| \| x \|$.

Наслідок 7.2. Якщо X - нормований лінійний простір, тоді існує $f \in Y^*$ таке, що $\| f \| = 1$ і $f(x_0) = \|x_0\|$.

Наслідок 7.3. Якщо X – нормований лінійний простір, Y - підпростір X і $x_0 \in X \setminus Y$, тоді існує $f \in X^*$, такий що $f(x_0) = 1$ і $f(y) = 0$ для кожного $y \in Y$.

Доведення. Задамо $g : Y + R \cdot x_0 \to X$ формулою $g(y + tx_0) = t$ для $t \in R, y \in Y$. З того, що $x_0 \notin clY = Y$, ми стверджуємо, що g – неперервний лінійний функціонал. Нехай $f \in X^*$ – продовження g.Наслідок доведено.

Припустимо, що X - нормований лінійний простір. Кожне $x \in X$ задає функціонал $F : X^* \to R$, заданий формулою $F(x^*) = x^*(x)$. Ми позначимо $F = \wp(x)$. Отже, $\wp$ є лінійним оператором з X на другий спряжений , що зазвичай називається канонічним вкладенням з X в X^{**}.

Банаховий простір X називається рефлексивним, якщо його канонічний образ $\wp(X)$ заповнює весь X^{**}.

Легко довести, що X є рефлексивним тоді і тільки тоді, коли X^* є рефлексивним.

Твердження 7.2. Якщо X – рефлексивний Банаховий простір і Y – замкнений підпростір X, тоді Y також є рефлексивним.

Доведення. Нехай $i : X \to Y$ – вкладення. Тоді $i^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ є взаємно-однозначним.

(Дійсний) Гільбертів простір є такий Банаховий простір X, чия норма має форму $\| x \| = (x, x)^{1/2}$, де $\langle x, x \rangle$ є скалярним добутком, тобто $X \times X \to R$ такий, що:

(1) $(x, y) = (y, x)$ для всіх $x, y \in X$.

(2) $(\cdot, y)$ є лінійним функціоналом на X для кожного фіксованого $y \in X$

(3) (x, x) є додатнім для кожного $0 \neq x \in X$.

Якщо просто припустити, що X – нормований лінійний простір замість Банахового простору, то X називається передгільбертовим простором.

Гільбертів простір є рефлексивним простором.

Припустимо, що X – Гільбертів простір, $x, y \in X$ і $\| y \| = 1$. Тоді, за (1)-(3)

$$0 \geq (x - (x, y)y, x - (x, y)y) = (x, x) - (x, y)^2.$$

Тому

(6) $|(x,y)|\le\|x\|$ для кожних $x,y\in X$, де $\|y\|=1$.

Отже, з однорідності скалярного добутку, ми отримуємо:

(7) $|(x,y)|\le\|x\|\|y\|$, для кожних $x,y\in X$.

Це є абстрактна нерівність Коші-Шварца. Класична нерівність Коші-Шварца реалізується у вибраному просторі l_2,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)y(n)|\le(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^2)^{1/2}(\sum_{n=1}^{\infty}|y(n)|^2)^{1/2}$$

ряд зліва є збіжним тоді, коли вираз справа є скінченним.

Говорять, що непорожня підмножина B Гільбертового простору X називається ортогональною (ортонормованою) за умови, що $(y,y')=0$ як тільки $y,y'\in B$ і $y\ne y'$. Для кожної скінченної ортонормальної множини $\{y_1,...,y_n\}$ наступна нерівність Бесселя є правильною:

(8) $\sum_{i=1}^{n}|(x,y_i)|^2\le\|x\|^2$, для кожного $x\in X$.

Для $n=1$ це не що інше, як нерівність (6). Доведення (8) починаємо з очевидної нерівності $(x-\sum_{i=1}^{n}(x,y_i)\ y_i,\ x-\sum_{i=1}^{n}(x,y_i)\ y_i\ge 0$, є наслідком з (3) і доводимо тим самим шляхом, як доведення (6).

З нерівності Бесселя легко довести, що якщо B- ортонормальна множина в X , тоді для кожного $x\in X$, ми маємо, що $card\{y\in B:\langle x,y\rangle\ne 0\}\le\aleph_0$,а також, що ряд

(9) $\sum_{y\in B}(x,y\ )\ y$

є збіжним в кожній впорядкованій ненульовій множині і сума ряду не залежить від конкретного вибору порядку. Позначимо суму рядів (9) через $P_B(x)$. Ми маємо:

(10) $\|P_B(x)\|=\sum_{y\in B}(|x,y\ |^2)^{1/2}$.

Зауважимо, що якщо X – Гільбертів простір, то $T\in L(X,Y)$ є ортогональним проектуванням на $Y=T(X)$ тоді і тільки тоді, коли

(11) $\langle\ T(x),x-T(x)\ \rangle\ =0$ для всіх $x\in X$.

З (11) випливає, що

(12) $T^2=T$ і $\|T(x)\|^2=\|x-T(x)\|^2=\|x\|^2$ для всіх $x\in X$.

Ортонормальна множина $B \subset X$ така, що $P_B(x) = x$ для всіх $x \in X$ називається ортонормальною базою для X або повною ортонормальною множиною.

Твердження 7.3. Кожен Гільбертів простір допускає ортонормальну базу.

Доведення. З того, що якщо $B \subset X$ – ортонормальна множина в X, що не є базою і $x_0 \notin P_B(x)$, тоді $B \bigcup \{(x_0 - P_B(x_0)) / \| x_0 - P_B(x_0) \|\}$ є ортонормальною множиною, що містить B, як власну підмножину. Це разом з лемою Куратовського - Цорна дає нам доведення твердження.

Наслідок7.4. Нехай X – Гільбертів простір і x^*- обмежений лінійний функціонал на X. Тоді існує єдиний $y \in X$ такий $x^*(x) = (x, y)$, що для $x \in X$ і $\| x^* \| = \| y \|$. І в зворотний бік: кожний $y \in X$ задає обмежений лінійний функціонал на X.

Доведення випливає з твердження 7.1 і нерівності Коші-Шварца (7).

З твердження 7.3 також випливає наступне:

Теорема 7.4. Кожен Гільбертів простір X – ізометрично ізоморфний до простору $l_2(B)$. Тут $card B = dens X$. Зокрема кожен сепарабельний нескінченно-вимірний Гільбертів простір є ізометрично ізоморфним до l_2.

Доведення. Нехай B – ортонормальна база для X. Легко перевірити, що $card B = dens X$.

З (10)$\Rightarrow$ що відображення $x \to \{(x, y)\}_{y \in B} \in l_2(B)$ є необхідним ізометричним ізоморфізмом. Теорема доведена.

Послідовність (y_n) елементів Гільбертового простору X називається ортонормальною, якщо: $y_n \neq y_k$ для $n \neq k$ і $\{y_n : n \in N\}$ є ортонормальна. Наступне твердження співпадає з нашим попереднім.

Твердження 7.4. Якщо (x_n) є лінійно незалежною послідовністю елементів Гільбертового простору, тоді існує ортонормована послідовність (y_n) така, що $span\{y_n : n \leq k\} = span\ \{x_n : n \leq k\}$ для $k = 1, 2, ...$

Наслідок 7.5. Нехай X – сепарабельна, симетрична відносно нуля, опукла підмножина Гільбертового простору. Тоді існує ортогональна множина $B \subset A,$ що є максимальною для A, тобто $\langle y, z \rangle = 0$ для $y, z \subset B, y \neq z$ і ,якщо $x \in A$ є таким, що $\langle x, y \rangle = 0$ для кожного $y \in B$, тоді $x = 0$.

Доведення. Нехай (x_n) – лінійно незалежна послідовність у A така, що $span\{x_n : n \in N\} = A$, і нехай (z_n) –послідовність, отримана за допомогою процесу ортогоналізації Шмідта з (x_n) і нехай $z_n = \sum\{a_{nk} x_k; 1 \leq k \angle \infty\}$

Ми задаємо: $B = \{y_n : n \in N\}$ таке , що $y_n = z_n / \sum\{|a_{nk}| : k = 1,\infty\}$

Нехай X – Банаховий простір. Послідовність векторів (x_n) називається базою для X , за умови, що кожен $x \in X$ має єдине представлення сумою рядів:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n, t \in R, n = 1,2,...$$

K-тий коефіцієнт функціоналу f_k задається формулою $f_k(x) = t_k$ де $x = \sum\{t_n x_n : n = 1,\infty\}$. З твердження 7.5 (подано нижче) , випливає, що f_k є неперервним лінійним функціоналом.

Очевидно, що якщо (x_n) – база, то множина $\{x_n : n \in N\}$ є лінійно всюди щільною в X , тобто $cl[span\{x_n : n \in N\}] = X$, множина координатних функціоналів $\{f_n : n \in N\}$ є тотально відокремленою для X , тобто, якщо $f_n(x) = 0$ для всіх n , тоді $x = 0$ і більше того, система $(x_n, f_n)_{n \in N}$ є біортогональною в сенсі, що $f_n(x_n) = 1$ та $f_n(x_k) = 0$ для $n \neq k, n, k \in N$.

Твердження 7.5 (Банах). Нехай (x_n) – послідовність векторів Банахового простору X , така що $cl\{span\{x_n : n \in N\}\} = X$. Тоді (x_n) є базою X тоді і тільки тоді, коли існує $K > 0$ таке, що

(13) $\|\sum\{t_i x_i, i = 1,n\}\| \leq K \cdot \|\sum\{t_i x_i : i = 1, n+m\}\|$

Слабкою топологією для Банахового простору X є та топологія, що породжена передбазою .

З означення, що вище і теореми Гана-Банаха 7.3, є зрозумілим наступне твердження:

Твердження7.6. Якщо Y – замкнений лінійний підпростір Банахового простору X , то слабка топологія на Y співпадає з топологією простору Y, яка породжена слабкою топологією на простолрі X .

Підмножина Банахового простору X називається слабкозамкненою, якщо вона є замкненою у слабкій топології на X; послідовність (x_n) точок X слабко збігається до точки $x \in X$, якщо $\lim f(x_n) = f(x) \ \forall f \in X^*$.

Твердженя7.7 (Мазур). Нехай X – Банаховий простір. Тоді опукла множина $A \subset X$ є слабкозамкненою тоді і тільки тоді, коли A є замкненою. Якщо (x_n) послідовність точок в X така, яка слабко збігається до точки $x_0 \in X$, тоді існує $y_n \in conv\{x_n : n \in N\}$ таке, що $\lim \| y_n - x_0 \| = 0$

Якщо Банаховий простір є спряженим до іншого Банахового простору, то ми кажемо, що існує дві природні слабкі топології для X : слабка топологія, задана вище та слабко - зірчата топологія, передбазою якої є

$$(\{x \in X : x(y) < 1\})_{y \in Y}$$

Очевидно, що для рефлексивних просторів ці дві топології співпадають.

Твердження 7.8 (Алаоглу). Нехай X –Банаховий простір і нехай $\sum^* = \{f \in X^* : \|f\| \le 1\}$ - одинична куля X^*, з топологією, що індукована слабко-зірчатою топологією на просторі X^*. Тоді $\sum^*$ є компакт; більше того, якщо простір X є сепарабельним, тоді $\sum^*$ є метризованим і метрика може бути задана формулою: $d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left| f(x_n) - g(x_n) \right| / \left(1 + \left| f(x_n) - g(x_n) \right|\right)$, де $\{x_n : n \in N\}$ -це довільна всюди щільна за топологією норми підмножина одиничної кулі в *X*.

З останнього твердження ми одразу одержуємо, що замкнена одинична куля деякого рефлексивного (сепарабельного) Банахового простору є компактною (і метризовною) у слабкій топології.

Ми одержуємо також наступне:

Твердження 7.9. Якщо X є Банаховим простором, A – опукла підмножина в *X**, яка є компактом у слабко-зірчатій топології і $f_0 \in X^* \setminus A$,то існує точка $x_0 \in X$, що $f_0(x_0) > \sup\{f(x_0) : f \in A\}$.

Твердження 7.10. Нехай B - ортонормована база Гільбертового простору X . Тоді послідовність (x_n) елементів X є слабко-збіжною тоді і тільки тоді, коли (1)$\sup \| x_n \| < \infty$ і (2) існує границя $\lim(x_n, y)$ для всіх $y \in B,$ при $n \to \infty.$

Доведення. За принципом рівномірної обмеженості Банаха-Штейнгауза та загальним виглядом обмежених лінійних функціоналів Гільбертового простору випливає, що будь-яка слабко збіжна послідовність в просторі X задовольняє (1) і (2).

У другу сторону, що якщо послідовність задовільняє (1) і (2), то з нерівності Бесселя випливає $\sum_{y \in B} |(x_n, y_n)|^2 < \| x \|^2$. Тому $\sum_{y \in B} | a_y |^2 < \sup \| x \|^2 < \infty$. Тому, за теоремою 7.4, існує $x_0 \in X$ таке, що $x_0 = \sum_{y \in B} a_y y$. Оскільки $spanB$ - всюди щільна і з (2) випливає, що функція є майже неперервною на X . Ми одержимо, $\lim\langle x_n, x\rangle = \langle x_0, x\rangle$ для кожного x .

Ми завершуємо простим спостереження, яке відіграє важливу роль у визначенні гомеморфізму опуклих множин лінійних топологічних просторів.

Твердження 7.11. Нехай (x_n) послідовність Гільбертового простору X така, що слабко збігається до $x_0 \in X$ і $\lim_n \| x_n \| = \| x_0 \|$.

Тоді $\lim_n \| x_n - x_0 \| = 0$.

Доведення. Ми маємо, що $\lim_n \| x_n \|^2 = \| x_0 \|^2$ і $\lim(x_n, x_0) = \|x_0\|^2 = \lim(x_0, x_n)$

Таким чином:

$$\lim_n \| x_n - x_0 \| = \lim_n (x_n - x_0,\ x_n - x_0) = \lim\left(\|x_n\|^2 - \langle x_n, x_0\rangle - \langle x_0, x_n\rangle + \|x_0\|^2\right) = 0.$$

Лекція № 7. Попередні зауваження з теорії опуклих множин.

У цьому розділі X означає лінійний топологічний простір над полем R дійсних чисел.

Ми нагадуємо, що підмножина A простору X є опуклою тоді і тільки тоді, коли для кожного $x, y \in A$ сегмент $[x, y]$ міститься в A. Легко перевірити, що якщо A є довільна замкнена, або відкрита множина і з $x, y \in A$ випливає, що $\frac{1}{2}(x+y) \in A$, тоді A - опукла.

Під характеристичним конусом опуклої множини ми розуміємо таку множину:

(1) $$ccA = \{y \in Y : x \in X, x + R^+ \cdot y \subset A\}.$$

Легко перевірити, що якщо A - опукла підмножина X, яка є довільна відкрита, або замкнена, то для будь-якої заданої точки $x \in A$ ми одержимо:

$$ccA = \{y \in X : R^+ \cdot y \subset A - x\}$$

Зокрема, якщо $0 \in A$, то $ccA = \{y \in X : R^+ \cdot y \subset A\}$, а також $ccA \subset A$.

Опукла множина з непорожньою внутрішністю називається **опуклим тілом**.

Нехай U - опукле тіло таке, що $0 \in \operatorname{int} U$. Нагадаємо, що функція:

$$w_U(x) = \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in U\}$$

Називається калібровочним функціоналом множини U. Ми одержимо:

(2) $$w_U(x+y) \le w_U(x) + w_U(y),\ \ w_U(tx) = t \cdot w_U(x)$$

для довільного $t \geq 0$. Так як $0 \in \operatorname{int} U$ ми робимо висновок, що w_U є неперервна в точці нуль і тому згідно (2), w_U - неперервна скрізь. З іншого боку, якщо $w : X \to R^+$ - неперервна і задовольняє (2), тоді множина $V = \{x : w(x) < 1\}$ є відкритим опуклим тілом і $w = w_V$.

У випадку, коли U - опукле тіло і $0 \in \operatorname{int} U$, ми одержимо:

(3) $$ccU = \{x \in X : w_U(x) = 0\}.$$

Припускаємо, що $x_0 \in A \subset X$. Неперервний лінійний функціонал f є носієм множини A в точці x_0, якщо:

$$\inf \{f(x) : x \in A\} < \sup\{f(x) : x \in A\} = f(x_0).$$

Множина $\{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$ є несуча гіперплощина для множини A в точці x_0. Точка x_0 називається **точкою носія** для A. Множину усіх точок носія для A будемо позначати $Support\, A$.

Твердження 1.1. Якщо U - замкнене опукле тіло в X, то $Support U = \partial U$ топологічна границя для U.

Доведення: Оскільки поняття точки носія є інваріантом при перетворенні, ми можемо припустити, що $0 \in \operatorname{int} U$. Припускаємо, що $x_0 \in \partial U$. Нехай Y є одновимірним лінійним підпростором простору X, що проходить через точку x_0. Задаємо $g(tx_0) = t$. Для кожного $x \in Y$, ми одержимо:

(4) $$g(x) \leq w_U(x).$$

За теоремою Гана - Банаха існує лінійний функціонал f визначений на X, який є продовженням g і задовольняє умову (4) для довільного $x \in X$. Звідси випливає, що функція f - неперервна і є носієм для U в точці x_0. Отже, ми довели, що $\partial U \subset Support U$. Зворотнє включення є очевидне. ■

Твердження 1.2. Якщо A - сепарабельний повна опукла множина в лінійному метричному просторі, то A допускає точку, яка не має носія.

Доведення: Без втрати загальності ми можемо припустити, що $0 \in A$. Нехай $\{x_n : n \in N\}$ буде зліченна всюди щільна підмножина в A. Оскільки A - повна, то існують додатні сталі t_n такі, що $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1$, ряд $\sum_n t_n x_n$ збіжний і $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in A$. Ми стверджуємо, що x_0 - точка, яка не має носія в просторі A. Насправді, якщо f -

неперервний лінійний функціонал на X такий, що $f(x_0) = \sup\{f(x): x \in A\}$. Звідси випливає, що $f(x_n) \le f(x_0)$ для всіх n і тому:

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n f(x_n) \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\right) \cdot \sup_n f(x_n) \le f(x_0).$$

Отже, $f(x_0) = f(x_n)$ для всіх n і оскільки множина точок { x_n } всюди щільна в A, ми підсумовуємо. що f є константою на A і тому не носій. Отже, не має носія функціоналу для A в точці x_0. ■

Множина $A \subset X$ називається **еліптичною опуклою** тоді і тільки тоді, коли $x, y \in A, x \ne y$ випливає $(x, y) \subset A \setminus Support\, A$. Нагадаємо, що норма на X є неперервний функціонал $\|\cdot\| : X \to R^+$ такий, що:

(5) $$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|, \quad \|tx\| = |t| \cdot \|x\|.$$

Норма $\|\cdot\|$ називається **строго опуклою** тоді і тільки тоді, коли із $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ випливає, що x і y лінійно залежні (що еквівалентно тому факту, що замкнена одинична куля $\{x : \|x\| \le 1\}$ - еліптично опукла).

Твердження 1.3. Припускаємо, що $\|\cdot\|$ є нормою на X, $F : X \to X$ визначається формулою $F(x) = (1 + \|x\|)^{-1} \cdot x$ і припускаємо, що A - опукла підмножина простору X з умовою $0 \in A$. Тоді множина $F(A)$ - опукла. Більше того, якщо норма $\|\cdot\|$ є строго опуклою і $0 \in A \setminus Support\, A$, то $F(A)$ - еліптично опукла.

Доведення: Припускаємо, що $x, y \in A$ і

(6) $$t, t' \ge 0, \quad t + t' = 1.$$

Тоді ми легко обчислюємо, що:

$$t \cdot F(x) + t'F(y) = F(ax + by),$$

де

$$a = t(1 + \|x\|)^{-1} \left(1 - \left\| \frac{tx}{1 + \|x\|} + \frac{t'y}{1 + \|y\|} \right\| \right)^{-1}$$

і

$$b = t'(1 + \|y\|)^{-1} \left(1 - \left\| \frac{tx}{1 + \|x\|} + \frac{t'y}{1 + \|y\|} \right\| \right)^{-1}.$$

Це є очевидним, що $a \ge 0$ і $b \ge 0$. Ми збираємося оцінити $a+b$ за формулами (5) і (6), ми одержимо:

(7)
$$1-\left\|\frac{tx}{1+\|x\|}+\frac{t'y}{1+\|y\|}\right\| \ge 1-t\frac{\|x\|}{1+\|x\|}-t'\frac{\|y\|}{1+\|y\|}$$
$$=t\frac{1+\|x\|}{1+\|x\|}+t'\frac{1+\|y\|}{1+\|y\|}-t\frac{\|x\|}{1+\|x\|}-t'\frac{\|y\|}{1+\|y\|}=\frac{t}{1+\|x\|}+\frac{t'}{1+\|y\|}$$

Отже, $a+b \le 1$. Оскільки A - опукла множина, що містить нуль, ми отримаємо $ax+by \in A$, тобто $t \cdot F(x)+t'F(y) \in F(A)$. Отже, ми встановили , що множина $F(A)$ - опукла.

Якщо x і y лінійно незалежні і норма $\|\cdot\|$ - строго опукла, то ми отримаємо строгу нерівність (7) і тому $a+b<1$. Отже, $t \cdot F(x)+t'F(y) \in (0;z)$ з умовою:

$$z=\frac{t \cdot F(x)+t' \cdot F(y)}{a+b} \in F(A).$$

Якщо x і y лінійно залежні, $x \ne y$ і $x=ty$ з умовою $0<t<1$, то $(0;F(x)) \subset (0:F(y))$. Отже, в будь – якому випадку, щоб завершити доведення достатньо показати, що для кожного $z \in F(A)$, сегмент $(0;z)$ не перетинається з носієм $Support\, F(A)$.

Зауважимо, що відображення F зберігає кожен промінь, що виходить з нуля. Тому $\operatorname{sgn} f(F(x))=\operatorname{sgn} f(x)$ для кожного $x \in X$ і для кожного лінійного функціонала f. Отже, припущення $0 \in A \setminus Support\, A$ дає нам:

(8)
$$0 \in F(A) \setminus Support\, F(A).$$

Припускаємо, що $z \in F(A)$ і $0 \le c < 1$. Якщо би існував носій функціонала f для $F(A)$ в точці cz, то ми мали б таку нерівність $f(cz) \ge f(0)=0$ і $f(cz)=cf(z) \ge f(z)$, а також звідси випливає, що $f(z)=f(0)$. Отже, функціонал f був би носієм множини $F(A)$ в точці 0. Ми одержали протиріччя з умовою (8). ■

Зауваження: Оскільки поняття точки носія –трансляційний інваріант, то із завершальної частини доведення випливає, що якщо $x \in A, y \in A \setminus Support\, A$, тоді $(x,y) \subset A \setminus Support\, A$.

Наслідок 1.1. Кожна замкнена опукла множина в гільбертовому просторі l_2 є гомеоморфна до еліптично опуклої множини.

Це випливає з твердження 1.2, 1.3 і того факту, що в просторі l_2 стандартна норма $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 \right)^{1/2}$ є строго опуклою. ■

Нехай Y є замкнений лінійний підпростір простору X. Корозмірність Y в X ми маємо на увазі розмірність доповнення:

$$co\dim Y = \dim X / Y,$$

зокрема $co\dim Y = 0$, якщо $Y = X$.

Надалі ми повинні знати певні властивості скінченних корозмірних просторів.

Твердження 1.4. Якщо Y - замкнений підпростір простору X з умовою $co\dim Y - m < \infty$, то існує m- вимірний підпростір Z простору X, який є комплементарний до Y, а також існує лінійний гомеоморфізм h і h_1 простору X на $Y \times Z$ і $Y \times R^m$ відповідно такий, що $h(Y) = Y \times \{0\}, h_1(Y) = Y \times \{0\}$.

Доведення: Для довільного $x \in X$ нехай $[x] \in X / Y$ буде комножина вектора x, тобто $[x] = \{z \in X : z - x \in Y\}$. Нехай $[z_1], \ldots, [z_m]$ - базис на X / Y і нехай $f_1, \ldots, f_m$ - координатні функціонали, що відповідають даному базису, тобто $[x] = f_1([x])[z_1] + \ldots + f_m([x])[z_m]$, для кожного x із X / Y. Тоді

$$Z = span\{z_1, \ldots, z_m\}, \quad h(x) = \left(x - \sum_{i=1}^{m} f_i([x]) z_i, \sum_{i=1}^{m} f_i([x]) z_i \right),$$

$$h_1(x) = \left(x - \sum_{i=1}^{m} f_i([x]) z_i, \sum_{i=1}^{m} f_i([x]) v_i \right),$$

де $v_1, \ldots, v_m$ - одиничні вектори в просторі R^m. Відображення h - взаємно однозначне і $h^{-1}(y, z) = y + z$ для всіх $(y, z) \in Y \times Z$. Із неперервності лінійних функціоналів на скінченно – вимірних просторах випливає, що h - гомеоморфізм. Так само ми перевіряємо, що h_1 - лінійний гомеоморфізм. ■

Твердження 1.5. Якщо Y і Z - замкнені лінійні підпростори простору X такі, що $co\dim Y = co\dim Z < \infty$, то Y і Z - лінійно гомеоморфні між собою.

Доведення: 1° Якщо $co\dim Y = co\dim Z = 1$ і $Z \neq Y$, то $Y \cap Z$ має корозмірність 1 як в Y, так і в Z. Отже, за твердженням 1.4 Y і Z- лінійно гомеоморфні до $(Y \cap Z) \times R$ і тому вони лінійно гомеоморфні між собою.

2° Якщо $co\dim Y = m < \infty$, то використовуючи твердження 1.4 ми можемо знайти підпростори $X = Y_0 \supset Y_1 \supset \ldots \supset Y_m = Y$ такі, що корозмірність простору Y_{i+1} в Y_i є 1. Це спостереження зводить доведення до випадку 1°. ■

Нехай f - неперервний функціонал на X і нехай c - константа. Множина

(9) $$M = \{x \in X : f(x) \geq c\}$$

називається **замкненим напівпростором** простору X.

Твердження 1.6. Напівпростір (9) – гомеоморфний до $Y \times R^+$, де $Y = \{x \in X : f(x) = 0\}$ - підпростір простору X корозмірності 1. Якщо M_1 і M_2 - замкнений підпростір в X, то існує автогомеоморфізм X, який відображає M_1 на M_2.

Доведення: Виберемо $x_0 \in X$ з умовою $f(x_0) = 1$. Відображення g задана формулою:

$$g(x) = (x - f(x)x_0, f(x) - c) \text{ для } x \in X$$

є гомеоморфізмом простору X на $Y \times R$ і $g(M) = Y \times R^+$. Це дає перше твердження і комбінуючи з твердженням 1.5, ми одержимо також друге твердження. ■

Лекція №8. Афінне вкладення компактних замкнутих локальних множин у банахових просторах

Нехай A і B є опуклі множини в лінійних топологічних просторах X і Y, відповідно. Під афінним перетворенням простору A на B ми маємо на увазі будь – яке неперервне відображення $g : A \to B$, яке зберігає опуклу лінійну комбінацію, тобто:

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i), \text{ якщо всі } t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1.$$

Множини A і B називаються **афінно-гомеоморфні**, якщо існує гомеоморфізм h простору A на B такий, що h - афінне (h^{-1} - так само афінне).

Теорема 2.1. Нехай A - компактна опукла множина в лінійному топологічному просторі X така, що існує зліченна множина $\{f_n : n \in N\}$ - неперервних функціоналів на X, яка відокремлююча на A (тобто, якщо $x, y \in A$ і $f_n(x) = f_y(y)$ для всіх n, то

$x = y$). Тоді множина A - афінно-гомеоморфна до компактної опуклої підмножини гільбертового простору l_2.

Доведення: Оскільки множина A - компактна, $\sup\{|f_n(x)| : x \in A\} < \infty$, і тому (після множення відповідно на додатню константу) можемо допустити, що $\sup\{|f_n(x)| : x \in A\} \le 1/n$ для кожного n. Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(x))^2 < \infty$ для кожного $x \in A$, тобто $h(x) = (f_n(x)) \in l_2$ і h - чітке , коректно задане афінне перетворення множини A в простір l_2. Оскільки функціонали f_n є відокремлюючи, то h - взаємно - однозначне. Отже, $h(A)$ - компактний і $h : A \to h(A)$ - гомеоморфізм.■

Теорема 2.2. Нехай X є локально опуклим лінійним топологічним простором і нехай A - локально компактна замкнена опукла підмножина простору X така, що A допускає сепарабельну множину $\{f_n : n \in N\}$ неперервних лінійних функціоналів. Тоді A - афінно-гомеоморфна до локальної компактної замкненої опуклої підмножини банахового простору.

Доведення: Без втрати загальності ми можемо припускати, що $0 \in A$ і тому:

(1) $$A \subset t \cdot A \text{ для } t \ge 1.$$

Оскільки A - локальна компактна і замкнена, а простір X - локальний опуклий, то існує замкнений опуклий окіл U точки 0 в просторі X такий, що $A \cap U$ - компактний. Нехай $V = U \cap (-U)$. Тоді V - замкнена підмножина околу U і тому $V \cap A$ - компактний. Для кожного $0 \le t < 1$ множина $(t \cdot V) \cap A$ міститься в компактній множині $V \cap A$ і за формулою (1) для $t \ge 1$ множина $(t \cdot V) \cap A$ міститься в компактній множині $t \cdot (V \cap A)$. Отже,

(2) $$(c \cdot V) \cap A \text{ - компактний для кожного } c \ge 0.$$

Ми маємо $\sup\{|f_n(x)| : x \in V \cap A\} < \infty$ і тому ми можемо додатково зробити припущення, що:

(3) $$\sup\{|f_n(x)| : x \in V \cap A\} \le 1/n \text{ для кожного } n.$$

Оскільки V - симетричний відносно нуля, то калібровочний функціонал w_V є псевдонормою, тобто:

(4) $$w_V(x + y) \le w_V(x) + w_V(y), \quad w_V(tx) = |t| \cdot w_V(x).$$

Нехай $Y = span\, A$. Оскільки A є опуклим і $0 \in A$, то ми маємо $Y = R \cdot A$ і тому за формулою (3) $$\|y\| = w_V(y) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(y)|^2\right)^{1/2} < \infty \text{ для всіх } y \in Y.$$

За формулою (4) і за тим фактом, що функціонали f_n відокремлюючі, випливає, що функціонал $\|\cdot\|$, який заданий вище, є нормою на Y.

Якщо ми беремо A з топологією індукованою з простору X та Y з топологією породженою нормою, то тотожне вкладення $h: A \to Y$ очевидно неперервне та взаємно - однозначне. Нехай дано, що $y_n \in A,\ y \in Y$ і $\lim\limits_{n}\|y_n - y\| = 0$. Тоді $\lim\limits_{h} w_V(y_n) = w_V(y)$ і отже, $c = \sup\limits_{n} w_V(y_n) < \infty$. Тому всі вектори y_n і границя y належать до компактної множини $(c \cdot V) \cap A$. Ясно, що h^{-1}, обмежене до $(c \cdot V) \cap A$, є неперервне і тому послідовність (y_n) збігається до y в топологічному просторі X. Таким чином, ми довели, що A може бути афінно-гомеоморфно відображена на замкнену локально-компактну опуклу підмножину нормованого простору.

Оскільки $w_V(y) \le \|y\|$ для всіх $y \in Y$, то робимо висновок, що кожна послідовність Коші в $h(A)$ є обмеженою відносно псевдо норми w_V і тому за формулою (2) розміщена в компактній частині простору $h(A)$. Отже, $h(A)$ - повний відносно норми $\|\cdot\|$ і є замкненим в банаховому просторі, який є поповненням нормованого лінійного простору Y. ■

Лекція № 9. Келлєрові простори. Теорема Келлєра.

Означення 3.1. Під келлєровим простором ми розуміємо будь – яку опуклу підмножину K лінійного топологічного простору таку, що K - афінно-гомеоморфна до нескінченно вимірної компактної опуклої множини в гільбертовому просторі l_2. Структура келлєрового простору складається з топології та операції формування опуклих лінійних комбінацій.

За теортмою 2.1 ми отримаємо, що кожна компактна опукла множина K, яка допускає зліченну відокремлючу систему лінійних функціоналів і яка нескінченно вимірна є келлєровим простором. Зокрема ми маємо:

Твердження 3.1. Кожний нескінченно – вимірна компактна опукла підмножина довільного Фреше простору є келлєровим простором.

Доведення: Якщо K - компактний, то замкнена оболонка $clspanK$ - сепарабельна. Кожний сепарабельний Фреше простір Y допускає зліченну відокремлюючу систему неперервних лінійних функціоналів. (Насправді, нехай $\{V_n : n \in N\}$ буде базисом замкнених опуклих околів точки нуль в Y, нехай $\{x_{nk} k \in N\}$ буде всюди щільною множиною в V_n і нехай f_{nk} - неперервний лінійний функціонал, який зосереджує ∂V_n в x_{nk}. Тоді послідовність $\{f_{nk} : n,k \in N\}$ задовольняє розділяючу систему.) ■

Найпростішим келлєровим простором є гільбертів куб $Q = I^N$ (зауважимо, що $I = [-1;1]$), який може бути представлений як підмножина Фреше простору R^N і є афінно-гомеоморфним до множини:

$$\left\{x \in l_2 : |x(n)| \le 1/n \quad \forall n\right\}.$$

Основним інструментом в цьому розділі є наступна теорема Келлєра.

Теорема 3.1. Кожен келлєровий простір K гомеоморфний гільбертовому кубу Q.

Щоб довести теорему 3.1 ми повинні задати деякий спеціальний простір T і показати, що кожен келлєровий простір гомеоморфний до T.

Нехай $n = \{1,\dots,n\}$. Позначимо:

$$T = \{-1,1\} \cup \bigcup_{n \in N} (-1;1)^n \times \{-1,1\} \cup (-1,1)^N,$$

іншими словами T - простір послідовностей $x = (x(n))$, кожна з яких - нескінченна і має свої координати з відкритого інтервалу $(-1;1)$,або є скінченними і мають послідовні координати ± 1 , а інші координати – з інтервалу $(-1;1)$.

Виберемо точку $y \in T$, де $ord\, y$ ми розуміємо число координат точки y. Для кожного $n \in N$ задаємо $\varphi_n : T \to I$ наступними формулами:

$$\varphi_1(x) = x(1),$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} x(n)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-|x(i)|\right), & \text{якщо} \quad n \le ord\, x, \\ 0, & \text{якщо} \quad n > ord\, x, \end{cases} \qquad \text{для } n \ge 2.$$

Легко перевірити, що функції φ_n відокремлюють точки всередині T.

Означення 3.2. Тестовий простір - це є множина T ,задана вище і наділена топологією, яка індукована метрикою:

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\left|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)\right|.$$

Нехай $x_k \in T$ для $k \in N \cup \{0\}$. Це є очевидно, що $\lim x_k = x_0 \Leftrightarrow \lim_k \varphi_n(x_k)=\varphi_n(x_0)$ для кожного $n \in N$. Використовуючи цей факт можна легко перевірити, що:

(1) $$\lim_k x_k = x_0 \Leftrightarrow \lim_k x_k(n)=x_0(n) \quad \forall n < 1+ord\, x_0;$$

звичайно це вимога, для $n<1+ord\, x_0$, але для скінченого числа точок x_k ,які мають n-ту координату (тобто $1+ord\, x_k > n \; \forall k > k(n)$).

З властивості (1) випливає, що кожна послідовність точок з K має збіжну підпослідовність. Отже, з твердження 3.5 випливає, що T є компактним.

Використовуючи наслідок 1.1 і те, що Q - келлєровий простір ми можемо звести доведення теореми 3.1 до наступного твердження.

Твердження 3.2. Нехай K є нескінченно – вимірним і еліптично опуклим компактним підпростором в l_2. Тоді існує гомеоморфізм F із K на T.

Від цього місця аж ми будемо припускати, що K - зафіксована множина, що задовольняє припущення з твердження 3.2.

Лема 3.1. Припустимо, що функціонал $f=\langle \cdot, v\rangle : l_2 \to R$ і число c такі, що:

(2) $$\inf_{x\in K} f(x) < c < \sup_{x\in K} f(x).$$

Нехай $K_c=\{x\in K: f(x)=c\}$. Тоді $Support\, K_c = K_c \cap Support\, K$, і отже, K_c - еліптично опуклий.

Доведення: Якщо $x_0 \in K_c \cap Support K$ і g - носій K в точці x_0. Тоді $g \mid K_c$ не константа, тому що K_c розділяє K на дві частини. Отже, $x_0 \in Support\, K_c$.

Зараз ми покажемо, що $Support\, K_c \subset Support\, K$. Не порушуючи загальності ми можемо припустити, що $c=0$ (інакше ми будемо відповідно перекладати множину K). Позначимо:

$$K^-=\{x\in K: f(x)<0\} \text{ і } K^+=\{x\in K: f(x)>0\}.$$

Припустимо, що g - несучий функціонал для K_0 в точці x_0, тобто:

(3) $$g(x_0)=\sup_{x\in K_0} g(x) > \inf_{x\in K_0} g(x).$$

Оскільки $f(x)=0$ для $x\in K_0$, ми робимо висновок , що для кожного $t\in R$ фунціонал $g_t = g + t\cdot f$ зосереджує носій в точці x_0. Нехай:

$$A = \left\{ t \in R : \sup_{x \in K^-} g_t(x) > g(x_0) \right\}, \quad B = \left\{ t \in R : \sup_{x \in K^+} g_t(x) > g(x_0) \right\}.$$

Ясно, що A і B - відкриті. З (2) $\Rightarrow$ кожен t досить велике знаходиться в B і кожен t досить мале знаходиться в A; тому A і B - непорожні. Більше того $A \cap B = \emptyset$, тому що в іншому разі ми мали б $g_t(x_1) > g(x_0), g_t(x_2) > g(x_0)$ для деяких $t \in R, x_1 \in K^+, x_2 \in K^-$ і, беручи $x_3 \in [x_1, x_2] \cap K_c$, ми мали б $g(x_3) = g_t(x_3) > g(x_0)$ і одержуємо протиріччя з (3). Оскільки дійсна пряма – зв'язна, то ми маємо $A \cup B \neq R$. Отже, g_t зосереджує носій K в x_0 для будь – якого $t \in R \setminus (A \cup B)$. ■

Нехай (v_n) є максимально ортогональною системою для опуклої множини K - **K**, Нехай $g_n(x) = \langle x, v_n \rangle$, $n \in N$. Для кожного $x \in K$, позначимо:

$$K_0(x) = K, \quad K_n = \{ y \in K_{n-1}(x) : g_n(y - x) = 0 \} \; \forall n \in N$$

і

$$a_n(x) = \inf \{ g_n(y) : y \in K_{n-1}(x) \}, \quad b_n(x) = \sup \{ g_n(y) : y \in K_{n-1}(x) \}.$$

Лема 3.2. Простір лінійних функціоналів $\{ g_n : n \in N \}$ розділяє точки в K. Для кожного $x \in K, n \in N$ ми маємо:

(1) Якщо $a_n(x) < b_n(x)$, тоді $a_j(x) < g_j(x) < b_j(x) \; \forall \, 1 \leq j \leq n-1$

(2) Якщо $a_{n-1}(x) < g_{n-1}(x) < b_{n-1}(x)$, тоді $a_n(x) < b_n(x)$ і тоді існують дійсні числа c_i такі, що $c_i v_i \in K_n(x) - \mathrm{K}_n(x)$ для $i \geq n+1$.

Доведення: Припустимо, що функціонали $g_n = \langle \cdot, v_n \rangle, n \in N$ не відокремлюють точки з K. Тоді там існують $x, z \in K, x \neq z$ такі, що $\langle x - z, v_n \rangle = 0$, тобто $x - z$ - неодиничний вектор в $K - \mathrm{K}$, який є ортогональним до усього v_n's. Це суперечить припущенню, що (v_n) - максимальна ортогональна система для $K - \mathrm{K}$.

Якщо $g_{n-1}(x) \in \{ a_{n-1}(x), b_{n-1}(x) \}$, тоді g_{n-1} виберемо з $K_{n-2}(x)$ в x. Отже, еліптично опукла з $K_{n-2}(x)$ (Лема 3.1), тоді простір:

$$K_{n-1}(x) = K_{n-2}(x) \cap g_{n-1}^{-1}(g_{n-1}(x))$$

складається з однієї точки x. Тому $a_n(x) = b_n(x)$. Це аргументує (1).

Пункт (2) є очевидним для $n = 0$. Нехай $m \in N$ припустимо, що (2) виконується для $n = m - 1$. Припустимо, що $x \in K$ таке, що:

$$a_{m-1}(x) < g_{m-1}(x) < b_{m-1}(x).$$

Візьмемо v_i, де $i \geq m+1$. Доведемо методом індукції, що $c \in (0;1)$, $y_i, z_i \in K_{m-1}(x)$, $y_i \neq z_i$ такі, що $cv_i = y_i - z_i$.

Тоді є два випадки:

(a) $g_m(y) < g_m(x) < b_m(x)$. Тоді ми задамо:

$$c_i' = (b_m(x) - g_m(x))^{-1}(b_m(x) - g_m(x))$$

і виберемо точки $u_i \in K_{m-1}(x)$ такі, що $g_m(u_i) = b_m(x)$.

(b) $a_m(x) < g_m(x) < g_m(y)$. Тепер позначимо:

$$c_i' = (g_m(x) - a_m(x))^{-1}(g_m(x) - a_m(x))$$

і виберемо точки $u_i \in K_{m-1}(x)$ такі, що $g_m(u_i) = a_m(x)$.

Легко довести, що в будь – якому випадку $c_i' \in (0;1)$ і точки $(1-c_i')u_i + c_i'y_i$ і $(1-c_i')u_i + c_i'y_i$ знаходяться у $K_m(x)$. Вибираємо $c_i = cc_i'$. Тоді:

$$c_i v_i = (1-c_i')u_i + c_i'y_i - (1-c_i')u_i - c_i'z_i \in K_m(x) - K_m(x)$$

для $i \geq m+1$. Зокрема $c_{m\cdot 1}v_{m\cdot 1} \in K_m(x) - K_m(x)$. Отже,

$$b_{m+1}(x) - a_{m+1}(x) \geq c_{m+1}\|v_{m+1}\|^2 > 0.$$

Це завершує індуктивний крок. ■

Доведення твердження 3.2. З написаного вище позначимо:

$$f_n(x) = \frac{2g_n(x) - b_n(x) - a_n(x)}{b_n(x) - a_n(x)}$$

для всіх n, де знаменник не перетворюється в нуль. Зауважимо, що $f_n(x)$ одержане з афінного перетворення сегменту $[a_n(x); b_n(x)]$ на $[-1;1]$ і оцінюється це в точці $g_n(x)$. Нехай:

$$F(x) = (f_n(x)) \text{ для } x \in K.$$

З леми 3.2 і визначення T випливає, що F відображає K на T і також випливає, що F - взаємно – однозначне (починаючи з g_n's і тому також f_n's відокремлює точки з K). Для доведення, що F - гомеоморфізм нам потрібна буде наступна лема.

Лема 3.3. Візьмемо $n \in N$. Припустимо, що $x_j \in K$, $\lim\limits_j x_j = x_0$ і y_0 є довільною точкою з $K_n(x_0)$. Тоді існує $y_j \in K_n(x_j)$ для $j = 1,2,\ldots$ з умовою $\lim\limits_j y_j = y_0$.

Доведення: Розглянемо ортогональну проекцію простору l_2 на скінченно – вимірний простір $Y = span\{v_1, \ldots v_n\}$. Для будь – якої точки $x \in l_2$ (будь – яка множина

$A \subset l_2$) її образ внаслідок проектування позначимо x' (відповідно - A'). Тоді з функціоналів $\langle \cdot, v_1 \rangle, \ldots, \langle \cdot, v_n \rangle$, які лінійно незалежні і діють для K, ми підсумуємо, що внутрішність K' відносно Y непорожня, тобто K' - замкнене опукле тіло в Y. Очевидно, $(K_n(x_0))' = \{y_0'\}$ множина з однієї точки. Є дві можливості:

(a) $y_0' \in \operatorname{int} K'$. Тоді для кожного $j \in N$ ми виберемо $y_j \in K_n(x_j)$ такі, що промінь, який виходить з y_0 і проходить через y_j, має спільний з K сегмент $\lfloor y_0; z_j \rfloor$ з умовою $z_j' \in \partial K'$. З елементарної теореми Таллєса ми маємо:

$$\|y_0 - y_j\| : \|y_0 - z_j\| = \|y_0' - y_j'\| : \|y_0' - z_j'\|,$$

звідси:

$$\|y_0 - y_j\| = \|y_0' - y_j'\| \cdot \|y_0 - z_j\| / \|y_0' - z_j'\|.$$

Починаючи з

$$\|y_0' - y_j'\| \le \|x_0 - x_j\|, \quad \|y_0 - z_j\| \le diam K \text{ і } \|y_0' - z_j'\| \ge r,$$

де $r = d(y_0', Y \setminus K') > 0$ ми одержимо:

$$\|y_0 - y_j\| \le r^{-1} \cdot diam K \cdot \|x_0 - x_j\|.$$

Отже, $y_0 = \lim_j y_j$.

Зараз ми переходимо до другого випадку:

(b) $y_0' \in \partial K'$. У цьому випадку $x_0 \in Support\, K$ та із еліптичної опуклості K ми маємо $K_n(x_0) = \{x_0\}$, звідси $y_0 = x_0 = \lim_j x_j$. Це доводить лему 3.3. ■

Зараз ми повернемося до доведення твердження 3.2. Припустимо, що n - фіксований, $x_j \in K$ для $j \in N \cup \{0\}$ і $\lim_j x_j = x_0$. Оскільки множина $K_{n-1}(x_j)$ є компактною, то існує $z_j \in K_{n-1}(x_j)$ таке, що $b_n(x_j) = g_n(z_j)$ і маємо підпослідовність (k_j) з індексів таку, що $u_0 = \lim z_{k_j}$ існує. Оскільки $z_j \in K_{n-1}(x_j)$, ми маємо $g_i(z_j) = g_i(x_j)$ для $i \le n-1$ і отже, $g_i(u_0) = g_i(x_0)$ для $i \le n-1$, тобто $u_0 \in K_{n-1}(x_0)$, тому:

$$b_n(x_0) \ge g_n(u_0) = \lim_j g_n(z_{k_j}) = \lim_j b_n(x_{k_j}).$$

За лемою 3.3, існує $y_j \in K_{n-1}(x_j)$ з умовою $\lim_j y_j = z_0$. Очевидно $g_n(y_j) \le b_n(y_j) = b_n(x_j) = b_n(z_j)$. Отже,

$$b_n(x_0) = g_n(z_0) = \lim_j g_n\left(y_{k_j}\right) \le \lim_j b_n\left(y_{k_j}\right) = \lim_j b_n\left(x_{k_j}\right).$$

Тому $\lim_j b_n\left(x_{k_j}\right) = b_n(x_0)$. Ми хочемо показати, що кожна підпослідовність (x_j) точок з K допускає підпослідовність $\left(x_{k_j}\right)$ таку, що:

$$\lim_j b_n\left(x_{k_j}\right) = b_n\left(\lim_j x_j\right).$$

Це приводить до неперервної функції b_n для $n = 1,2,\dots$ Той самий аргумент показує, що a_n's теж неперервна. Отже, з визначення f_n's і F та з властивості (1) випливає, що функція $F : K \to T$ - неперервна. З компактності ми отримаємо, що $F^{-1} : T \to K$ є неперервною. Це завершує доведення твердження 3.2. ■

Лекція № 10. Топологічна однорідність гільбертового кубу.

У цьому розділі ми повинні показати, що гільбертів куб є топологічно однорідним.

Теорема 4.1. Для кожних точок $x, y \in Q$ існує гомеоморфізм $F \in Auth\,Q$ такий, що $F(x) = y$.

Ми нагадаємо, що $Auth\,Q$ позначає множину всіх автогомеоморфізмів куба Q.

Очевидно, що теорема наведена вище – наслідок наступних двох фактів.

Лема 4.1. Нехай $P = \{x \in Q : |x(n)| < 1\ \forall n\}$ - псевдовнутрішня з Q. Тоді для кожного $x, y \in P$ існує $F \in Auth\,Q$ таке, що $F(x) = y$.

Лема 4.2. Для кожного $x \in Q$ існує $G \in Auth\,Q$ таке, що $G(x) \in P$.

Доведення леми 4.1. Для будь-якого $u \in P,\ x \in Q$, нехай

(1) $$F_n(x) = x + u - |x| \cdot u,$$

де операції виконуються покоординатно. Тоді $F = F_y F_x^{-1} \in Auth\,Q$ і $F(x) = y$.■

Для доведення леми 4.2 ми повинні вибрати класичні аргументи з категорії Бера. Ми розглянемо Q як метричний простір з заданою метрикою:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x(n) - y(n)|.$$

Легко перевірити, що $Auth\,Q$ - повний метричний простір, який наділений метрикою:

$$D(F, G) = \sup_{x \in Q} d(F(x), G(x)) + \sup_{x \in Q} d\left(F^{-1}(x), G^{-1}(x)\right).$$

Більше того відносно метрики D визначені групові операції:

(2) $$(F,G)\to FG \text{ і } F\to F^{-1},$$

Які є неперервними.

Далі, через e ми позначимо тотожній гомеоморфізм на Q. Нехай $p_n : Q\to R$ відображення між координатами,яке задане формулою : $p_n(x)=x(n)$. Ми маємо наступне:

Лема 4.3. Для кожного $n\in X$, $x\in Q$, множина:

$$A(n,x)=\{F\in AuthQ : |p_nF(x)|<1\}$$

є відкритою і всюди щільною у просторі $AuthQ$.

Доведення: Те, що $A(n,x)$ відкрита є очевидним. Щоб довести, що вона є всюди щільною досить показати, що для кожного $z\in Q$ такого, що $|p_n(z)|=1$ і для кожного $1>\varepsilon>0$ існує $F\in AuthQ$ з умовами:

(3) $$D(F,e)<\varepsilon,\quad |p_nF(z)|<1.$$

Нехай $a,b,c,d\in I^2$, де точки:

$a=(-1,1), b=(1,1), a'=(1-\varepsilon/6,1), b'=(1-\varepsilon/6,1)$. Нехай $f\in Auth\,I^2$ такі, що:

(4) $f(|a;b|)\quad [a';b'],\quad f(-x,-y)=-f(x,y),\quad f(x,y)-(x,y)$, якщо $|x|\le 1-\varepsilon/4$.

Виберемо $m>n$ таке, що $2^{-m}<\varepsilon/8$ і задамо $F\in AuthQ$ формулами:

$(p_nF(x), p_mF(x))=f(p_n(x),p_m(x)),\quad p_iF(x)=p_i(x)$ для $i\notin\{n,m\}$.

Використовуючи (4)ми легко перевіримо, що F задовольняє умову (3). ■

Доведення леми 4.2. Візьмемо $x\in Q$. Множина:

$$\{F\in AuthQ : F(x)\in P\}=\bigcap_{n\in N}A(n,x)$$

за лемою 4.3 є перетином відкритих всюди щільних множин і тому за класичною теоремою Бера – непорожня. Це задовольняє умови леми 4.2 і завершує доведення теореми 4.1. ■

Лекція №12. Техніка неповних норм для удаляючих множин .

Ми маємо встановити достатні умови для множини A лінійного топологічного простору X для того, щоб $X\setminus A$ був гомеоморфізмом до цілого X. Ми будемо починати з того, що X є неповним нормованим лінійним простором. $\|\cdot\|$ ми позначимо норму X і $d(x,A)=\inf\{\|x-y\| : y\in A\}$ - відстань між точкою і множиною.

Твердження 5.1. Припустимо, що X - неповний нормований лінійний простір і K - повна підмножина простору X. Тоді існує гомеоморфізм h з $X \setminus K$ на X такий, що $h(x) = x$ якщо $d(x, K) \geq 1$.

Доведення: Нехай $\hat{X}$ - повний в X. Тоді $\hat{X}$ - банаховий простір з визначеною нормою, що є природнім продовженням норми X і ми позначимо тим же символом $\|\cdot\|$. Виберемо точку $y_0 \in \hat{X} \setminus X$ з умовою $\|y_0\| < 1/4$ і підпослідовність Коші (x_n), $x_n \in X$ збіжну до y_0 і таку, що:

$$\|x_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < 1/2 .$$

Нехай $(q(t))_{0<t<1}$ буде афінною параметризацією дуги:

$$L = [0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup [x_2; x_3] \cup \ldots$$

Такою , що:

(1) $$q(1) = 0, \quad \lim_{t \to 0} \|q(t) - y_0\| = 0, \quad \|q(t) - q(t')\| \leq \frac{1}{2}|t - t'| \text{ для } t, t' \in (0;1].$$

Ми розширимо цю параметризацію до функції $q : R^{+} \to X \cup \{y_0\}$ задаючи:

(2) $$q(0) = y_0, \quad q(t) = 0 \quad \text{для всіх } t > 1 .$$

Необхідний гомеоморфізм h може бути визначений формулою:

$$h(x) = x + q(d(x, K)) \text{ для } x \in X \setminus K .$$

Насправді, відображення h може бути взято як відображення з $\hat{X}$ в $\hat{X}$. Згідно (1) відображення $g(x) = q(d(x, K))$ задовольняє умову Ліпшиця з константою $1/2$. Отже, за стискуючим принципом випливає, що h - автогомеоморфізм простору $\hat{X}$. Але з умови (2) та з означення h можемо бачити, що $h(x) \in X \Leftrightarrow x \in X \setminus K$ і $h(x) = x$ для $d(x, K) \geq 1$. ■

Зауважимо, що параметризація $(q(t))_{0<t<1}$ будучи афінною, має наступну властивість: для кожного лінійного топологічного простору X

(3) відображення $t \to q(t)$ є неперервним для $t > 0$.

Цей факт ми використаємо в наступному доведенні.

Ми зараз допускаємо, що X - лінійний топологічний простір і $w : X \to R^{+}$ є псевнормою (тобто w - неперервне і таке, що:

$$w(x + y) \leq w(x) + w(y), \quad w(tx) = |t| \cdot w(x)).$$

Для будь – якої $A \subset X$, $x \in X$ ми позначимо:

$$d_w(x, A) = \inf\{w(x-y) : y \in A\}.$$

Підпростір $K \subset X$ називають **повним** відносно w, якщо із

(4) $x_i \in A, \lim\limits_{n,m} w(x_n - x_m) = 0$ впливає, що $\lim\limits_{n} w(x_n - x) = 0$ для деякого $x \in A$,

і, зокрема

(5) із $d_w(x, A) = 0$ випливає $x \in A$.

Псевдонорма w називається **неповною**, якщо цілий простір X є неповним відносно w.

Наступна теорема узагальнює твердження 5.1.

Теорема 5.1. Нехай X - лінійний топологічний простір і нехай w - неповна псевдонорма на X. Тоді для кожної множини $A \subset X$, яка є повною відносно w існує гомеоморфізм h з $X \setminus A$ на X такий, що $h(x) = x$, якщо $d_w(x, A) \geq 1$.

Доведення: Ми позначимо X_w нормований лінійний простір векторів, для якого комножина $[x] = \{y \in X : w(y-x) = 0\}$ наділена нормою $\|[x]\| = w(x)$. Нехай $\hat{X}_w$ - поповнення з X_w і нехай $j : X \to \hat{X}_w$ природна ін'єкція, задана формулою $j[x] = x$.

Виберемо $y_0 \in \hat{X}_w \setminus X_w$ з умовою $\|y_0\| < 1/4$. Використовуючи той же аргумент, що і в попередньому доведенні і зауваження (3), ми будуємо відображення $q : R^+ \to X \cup \{y_0\}$ таке, що:

(6) $q|_{(0;\infty)}$ є X - значним і неперервним, $q(t) = 0$ для $t \geq 1$, $q(0) = y_0$

а також:

(7) $jq : R^+ \to \hat{X}_w$ задовольняє умову Ліпшиця з константою $1/2$.

Ми задамо $h : X \to X$ формулою:

$$h(x) = x + q(d_w(x, K)) \text{ для } x \in X.$$

Ми повинні показати, що h має необхідні властивості. Нехай $h : \hat{X}_w \to \hat{X}_w$ задається формулою $\hat{h}(y) = y + jq(d_w(y, j(K)))$. Очевидно $jh(x) = \hat{h}j(x)$ для $x \in X \setminus K$. За тим же аргументом, що і раніше, $\hat{h}$- автогомеоморфізм з $\hat{X}_w$ і $\hat{h}(\hat{X}_w \setminus j(K)) = X_w$. Зараз легко перевірити, що h відображає $X \setminus K$ на X і що:

$$h^{-1}(x) = x - q\left(d_w\left(h^{-1}(j(x)), j(K)\right)\right),$$

звідки з (6) h^{-1} - неперервне. З означення відображення h і умови $q(t)=0$ для $t \geq 1$ випливає, що $h(x)=x$, якщо $d_w(x,K) \geq 1$. ■

Можливість застосування теореми 4.1 – обмежена лінійним топологічним простором X, який допускає неповну псевдонорму. Ясно, що кожна неповна псевдонорма w на просторі X - нескінченно – вимірна в тому сенсі, що довільна комножина простору X_w - нескінченно – вимірна. Ми покажемо, що якщо X допускає нескінченно – вимірну псевдонорму, тоді він допускає неповну псевдонорму. Точніше:

Твердження 5.2. Нехай X - лінійний топологічний простір і нехай w_1 - нескінченно – вимірна псевдонорма на X. Тоді існує неповна псевдонорма w на X така, що $w(x) \leq w_1(x)$ для кожного $x \in X$ і $w(x)=0$ тоді і тільки тоді, коли $w_1(x)=0$.

Доведення: Досить побудувати неповну норму нормованого простору X. Це твердження – наслідокіз наступної леми.

Лема 5.1. Якщо X - нескінченно – вимірний банаховий простір, тоді існує неповна норма $w: X \to R^+$ така, що $w(x) \leq \|x\|$.

Доведення: Ми починаємо доведення із випадку коли X - сепарабельний. Тоді існує злічення множина $\{f_n : n \in N\}$ неперервних лінійних функціоналів, що відокремлює точки з X і така, що $\|f_n(x)\| \leq \frac{1}{n}\|x\|$ для всіх $x \in X, n \in N$. Формула:

$$T(x)-(f_n(x))$$

визначає взаємно – однозначний неперервний лінійний оператор із X в l_2, який є компактним (тобто $T(\{x \in X : \|x\| \leq 1\})$ є тотально обмежена множина). З того, що X - нескінченно – вимірний і T - компактний $\Rightarrow T^{-1} : T(X) \to X$ -не є неперервний. Тому за теоремою про замкнутий графік, норма $w_0(x)=\|T(x)\|$ є неповною.

У випадку, що X - не є сепарабельним , ми виберемо довільний сепарабельний нескінченно – вимірний замкнутий лінійний підпростір X_1 з X, неповну норму w_0 на X_1 і число $\varepsilon > 0$ таке, що:

(8) $X_1 \cap B_\varepsilon \subset A$, де $B_\varepsilon = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}$, $A = \{x \in X_1 : w_0(x) < 1\}$.

Задаємо $U = conv(B_\varepsilon \cup A)$ - найменша опукла множина, що містить $B_\varepsilon \cup A$. Оскільки U - симетричне опукле тіло і U не містить ніяких променів , калібровочний функціонал w_U є нормою. За формулою (8) $w_U(y)=w_0(y)$ для $y \in X_1$ і тому w_U є неповною.

Ми показали, що кожний нескінченно – вимірний банаховий простір X допускає неповну норму w_0. Оскільки w_0 - неперервна і додатньо – однорідна, ми маємо $c = \sup\{w_0(x) : \|x\| \le 1\} < \infty$, отже, $w(x) = c^{-1} w_0(x) \le \|x\|$ для всіх $x \in X$. ■

Наслідок 5.1. Нехай X - нескінченно – вимірний лінійний топологічний простір такий, що X задає норму. Тоді для кожної компактної підмножини K з X існує гомеоморфізм h з $X \setminus K$ на X.

Доведення: З твердження 5.2 маємо неповну норму w на X. Тоді множина K, яка компактна в топології X є повною відносно w. Отже, доведення випливає з теореми 5.1.

Зауваження: Якщо простір X допускає C^k - диференційовану (крім 0) норму яка є неповною, тоді за тим же самим аргументом ми можемо побудувати диффеоморфізм класу C^k з $X \setminus K$ на X. Це випливає з того факту, що параметризація $(q(t))_{0<t<\infty}$ може завжди бути задана через траєкторію ,яка приймає значення нуль у вершинах і є кусково-лінійною.

Техніка неповних норм може бути використана для видалення σ - компактних множин із звичайних просторів.

Твердження 5.3. Нехай X - банаховий простір, який має наступну властивість:

(*) задана норма w на X така, що одинична куля $B = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ є неповною відносно w.

Тоді $X \setminus K \cong X$ для кожної σ - компактної множини $K \subset X$.

Доведення: Нехай $y_0 \in \hat{B}_w \setminus B$, де $\hat{B}_w$ є поповненням множини B відносно w. Виберемо відображення $q : R^+ \to X \cup \{y_0\}$, що задовольняє умови (6), (7) і

(9) $$q(t) \in B \text{ для } t > 0, \text{ де } B = \{x \in c_0 : \|x\| \le 1\}.$$

Доведення умови (9) випливає з того, що y_0 належить до поповнення B відносно w. Нехай $K = \bigcup_{n \in N} K_n$, де K_n - компакт.

Необхідний гомеоморфізм з $X \setminus K$ на K можемо задати формулою:

$$h(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1} q(d_w(x, K_n)).$$

Лекція № 11. Відносна топологічна класифікація замкнених опуклих тіл у лінійному топологічному просторі

Протягом цього розділу через X позначатимемо фіксований лінійний топологічний простір. Ми повинні навести необхідні і достатні умови для замкнених опуклих тіл $U, V \subset X$ в тому сенсі, що пари $(X,U) \approx (Y,V)$ гомеоморфні, тобто існує $F \in Auth\, X$ такий , що $F(U) = V$.

Зауважимо, що характеристичний конус опуклих множин $V \subset X$ - це множина $ccV = \{y \in X : існує \quad x \in X$ з умовою $x + R^{+} y \subset V\}$, в цьому випадку, коли $0 \in \operatorname{int} V$, ми маємо $ccV = w_V^{-1}(X)$, де w_V - калібровочний функціонал множини V.

Під типом опуклого тіла U ми розуміємо ∞ тоді і тільки тоді, коли ccU - лінійний підпростір в простоорі X нескінченної корозмірності, або він не є лінійним підпростором і ми маємо на увазі тип m $(0 \le m < \infty)$ тоді і тільки тоді, коли ccU є лінійним підпростором в X корозмірності m.

Теорема 6.1. Нехай U_1 і U_2 - замкнені опуклі тіла простору X. Необхідною і достатньою умовою для гомеоморфності пар $(X, U_1) \cong (X, U_2)$ є те, що U_1 і U_2 мають бути одного типу.

Оскільки з твердження 1.5 та 1.6, всі замкнені підпростори з X даної скінченної корозмірності є гомеоморфними і всі замкнені напівпростори є гомеоморфні між собою за допомогою автогомеоморфізму з X, ми робимо висновок, що достатня частина теореми є еквівалентною до:

Твердження 6.1. Нехай U - замкнене опукле тіло у X. Якщо U є типом ∞, тоді є замкнений напівпростір X^{+} в X такий, що пари $(X, U) \cong (X, X^{+})$ гомеоморфні. Якщо U - типу m, тоді $(X, U) \cong (ccU \times R^{m}, ccU \times I^{m})$.

Доведення твердження 6.1 базується на наступних двох твердженнях:

Твердження 6.2. Нехай U_1 і U_2 - замкнені опуклі тіла у X. Якщо $ccU_1 = ccU_2$, тоді $(X, U_1) \cong (X, U_2)$. Зокрема, границі тіл є гомеоморфні: $\partial U_1 \cong \partial U_2$.

Доведення: Не втрачаючи загальності ми можемо припустити, що $0 \in \operatorname{int} U_i$ для $i = 1,2$. Нехай $V = \dfrac{1}{2}(U_1 \cap U_2)$. Для будь – якого $v \in \partial V$ ми задаємо $u_i(v)$ як точку перетину променя $R^{+}\cdot v$ з границею $\partial U_i, i=1,2$. Для $i,j\in\{1,2\}$ ми задаємо відображення h_{ij} на кожному промені $[1;\infty)\cdot v$, де $v\in\partial V$ як афінний гомеоморфізм променя, що відображає $u_i(v)$ на $u_j(v)$ і ми нехай

$$h_{ij}(x)=x \text{ для } x\in X \setminus \bigcup_{r\in\partial V}[1;\infty)\cdot v.$$

Очевидно з цього означення, що h_{ij} відображає пару (X,U_i) на пару (X,U_j) і що $h_{ji}=h_{ij}^{-1}$. Легко перевірити, що явні формули для h_{ij} в термінах калібровочних функціоналів є

(1) $$h_{ij}(x)=\left|f(x)+(f_i(x)-f(x))^{-1}(f_j(x)-f(x))(1-f(x))\right|\cdot x,$$

де

$$f(x)=\min(1,1/w_V(x)),\quad f_i(x)=1/w_{U_i}(x) \text{ для } i=1,2.$$

З цих формул стає очевидним, що відображення h_{ij} - гомеоморфізм. ■

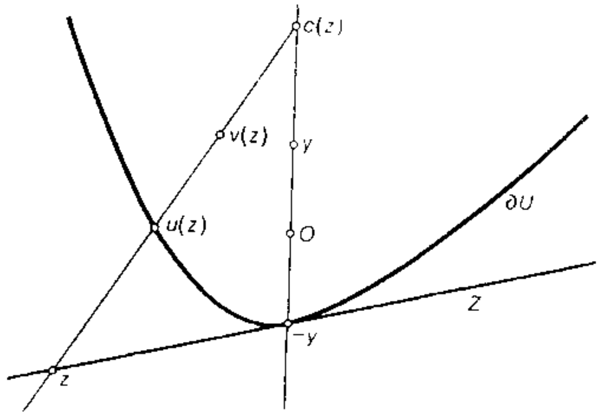
Твердження 6.3. Якщо U - замкнене опукле тіло в просторі X, тоді гомеоморфні пари : $(X \setminus ccU, U \setminus ccU)\cong(\partial U\times R, \partial U\times R^{+})$.

Доведення: Не порушуючи загальності ми можемо припустити, що $0\in \operatorname{int}U$. Відображення $h(x)=(x/w_U(x), w_U(x))$ є гомеоморфізмом пари $(X\setminus ccU, U\setminus ccU)$ на $(\partial U\times(0;\infty), \partial U\times(0;1])$. Зараз, щоб довести твердження ми другу координату виберемо як довільний гомеоморфізм з $(0;\infty)$ на R, що відображає $(0;1]$ на R^{+}, наприклад $f(t)=-\log t$. ■

Доведення твердження 6.1. 1° Ми починаємо з розгляду випадку, коли $ccU=Y$ - лінійний підпростір з X корозмірності $m<\infty$. Тоді з твердження 1.4 X - пряма сума з Y і доповнення m - вимірного підпростору L з X. Зрозуміло, що $(X,U)\cong(Y\times L, Y\times(L\cap U))$. З твердження 6.2 ми маємо $(L, L\cap U)=(R^m, I^m)$ тому, що $cc(L\cap U)=\{0\}$ і $ccI^m=\{0\}$. Отже, $(X,U)\cong(Y\times R^m, Y\times I^m)$.

2° Тепер ми припустимо, що ccU - нелінійний простір. Припускаючи, що $0\in\operatorname{int}U$ ми продовжимо доведення. Виберемо $y\in\operatorname{int}U$ таким, що $-y\in\partial U$ і $R^{+}\cdot y\subset U$. Нехай f - вибраний несучий функціонал для U в точці $-y$, скажемо $f(-y)=-1$ і нехай $Z=\{x\in X : f(x)=-1\}$ - несуча гіперплощина.

Для кожного $z \in Z$ ми вибираємо $c(z) = (w_U(z + y) - 1) \cdot y$ і ми позначимо через $u(z)$ точку перетину променя $c(z) + R^+ \cdot (z - c(z))$ з границею ∂U. Ми задаємо $v(z) = \frac{1}{2} \cdot (c(z) + u(z))$. Нехай $h : X \to X$ - афінне відображення на кожному промені $v(z) + R^+ \cdot (z - c(z))$ для $z \in Z$ виберемо $u(z)$ на z і тотожним на $X \setminus \bigcup_{z \in Z} R^+ \cdot (z - c(z))$, див. мал. 1. Не важко перевірити, що h - необхідний гомеоморфізм з (X, U) на (X, X^+), де X^+ - замкнений напівпростір $\{x \in X : f(x) \geq 0\}$.



Мал. 1

3° Зараз ми переходимо до наступного випадку, коли $ccU = Y$ - лінійний підпростір з X нескінченної корозмірності. Ми можемо припустити, що $0 \in \operatorname{int} U$. Нехай X_1 є підпростором з X корозмірності 1 і такий, що $X_1 \supset Y$. Ми повинні ідентифікувати X з простором $X_1 \times R$.

Застосовуючи твердження 5.2 до калібровочного функціоналу (псевдонорми) з множини $X_1 \cap U \cap (-U)$, ми можемо вибрати неповну псевдонорму w з X_1 таку, що:

(2) $$\{x \in X_1 : w(x) = 0\} = Y.$$

Ми задаємо такі множини:

$$V_1 = \{x \in X_1 : w(x) \leq 1\}, \quad V = \{(x, t) \in X_1 \times R : w(x) + |t| \leq 1\},$$

$$\partial^+ V = \{(x, t) \in \partial V : t \geq 0\}, \quad \partial^- V = \{(x, t) \in \partial V : t \leq 0\},$$

і відображення:

$$g(x, t) = x \text{ для } x \in \partial V, \quad g_+ = g|_{\partial^+ V}.$$

Очевидно, g - неперервне відображення з ∂V на V_1 і g_+ - гомеоморфізм з $\partial^+ V$ на V_1.

Ми задаємо $z_0 = (0,1)$ "північний полюс" границі з ∂V. При такому позначенні ми маємо :

Лема 6.1. Існують гомеоморфізми f, h_1, h_2, h_3 і h таке, що:

(3) $$f:(X,V)\underset{onto}{\to}(X\setminus Y, V\setminus Y),$$

(4) $$h_1:(X_1,V_1)\underset{onto}{\to}(X_1\setminus Y, V_1\setminus Y),$$

(5) $$h_2:\partial V\setminus(z_0+Y)\underset{onto}{\to}\partial Y,$$

(6) $$h_3:\partial V\setminus(z_0+Y)\underset{onto}{\to}X_1,$$

(7) $$h:\partial V\underset{onto}{\to}X_1.$$

Доведення: Існування f і h_1 випливає з теореми 5.1: перепозначимо для $K=Y$, спочатку: для простору X (ототожненого з $X_1\times R$) і з неповною псевдонормою w_V, по – друге: для X_1 з псевдонормою w.

Ми покладемо:

$$h_2(x)=\begin{cases} g_+^{-1}h_1^{-1}g_+(x) & для \quad x\in\partial^+V\setminus(z_0+Y),\\ x \quad для \quad x\in\partial^-V. \end{cases}$$

Тепер ми задаємо h_3:

$$h_3(x)=\begin{cases} g(x)/w(g(x))^2 & для \quad x\in\partial^+V\setminus(z_0+Y),\\ g(x) \quad для \quad x\in\partial^-V. \end{cases}$$

І на кінець ми покладемо:

$$h(x)=h_3h_2^{-1}(x).$$

Легко перевірити, що задані вище відображення мають потрібні властивості.

Зараз ми можемо завершити доведення твердження 6.1 у випадку 3°. Згідно (2) і твердження 6.2 ми маємо $(X,U)\cong(X,V)$. Отже, з леми 6.1 і твердження 6.3:

$$\begin{aligned}&(X,U)\cong(X,V)\cong(X\setminus Y, V\setminus Y)\cong(\partial V\times R, \partial V\times R^+)\\ &\cong(X_1\times R, X_1\times R^+)\cong(X,X^+)\end{aligned},$$

що завершує доведення. ■

Доведення теореми 6.1. Необхідність. Границя з X^+ - стягувана, як тільки границя замкнутого опуклого тіла типу r є гомотопічно еквівалентною до евклідової $(r-1)$ - вимірної сфери. Отже, якщо типи U_1 і U_2 - відмінні, то ∂U_1 і ∂U_2 є гомотопічно відмінні, а тому U_1 не може бути гомеоморфна до U_2. ■

Оскільки поняття внутрішності і границі множини є інваріантами при автогомеоморфізмах простору X, з теореми 6.1 ми виводимо:

Наслідок 6.1. Якщо U і V - відкриті опуклі тіла в просторі X, то $(X,U)\cong(X,V)$ тоді і тільки тоді, коли U і V мають однаковий тип.

Зауважити також наступні прості факти:

Теорема 6.2. Кожне відкрите опукле тіло U в X є гомеоморфним до всього простору X.

Доведення: Шуканий гомеоморфізм з U на X може бути заданий формулою:

$$h(x)=(1-w_U(x))^{-1}\cdot x. \ \blacksquare$$

Теорема 6.3. Нехай X - нескінченно – вимірний локальний опуклий лінійний метричний простір і нехай f - нетривіальний неперервний лінійний функціонал на X. Нехай $W=\{x\in X : f(x)>0\}$. Тоді існує гомеоморфізм h з $W\cup\{0\}$ на X такий, що $h(x)=x$ для $x\in f^{-1}([1;\infty))$.

Для доведення використовуємо наступну лему:

Лема 6.2. Припустимо, що X - лінійний топологічний простір, f - нетривіальний неперервний лінійний функціонал на X, V - топологічний простір і $(V_n)_{n\in N}$ - це послідовність відкритих підмножин з V таких, що:

(1) $V_n\supset clV_{n+1}$ *для всіх* $n\in N$,

(2) $(V\setminus V_1,\partial V_1)\cong\left(f^{-1}([1;\infty)), f^{-1}(1)\right)$,

(3) $(clV_n\setminus V_{n+1},\partial V_n,\partial V_{n+1})\cong\left(f^{-1}(I), f^{-1}(-1), f^{-1}(1)\right)$ *для* $n\in N$.

Нехай g_0 - довільний гомеоморфізм між парами (2). Тоді g_0 продовжується до гомеоморфізму $g: V\setminus\bigcup\limits_{n\in N}V_n\to X$ такого, що $g(clV_n)=f^{-1}((-\infty;2-n])$.

Основна ідея доведення леми така: Ми виберемо гомеоморфізм $g_0:(V\setminus V_1,\partial V_1)\underset{onto}{\rightarrow}\left(f^{-1}([1;\infty)), f^{-1}(1)\right)$. Тоді, використовуючи (3) ми індуктивно будуємо гомеоморфізми:

$$g_n: clV_n\setminus V_{n+1}\underset{onto}{\rightarrow} f^{-1}([2-n;1-n])$$

такі, що $g_n|_{\partial V_n}=g_{n-1}|_{\partial V_n}$. Легко перевірити, що відображення g, визначене як $g(x)=g_n(x)$ для $x\in V_n\setminus V_{n+1}$, $g(x)=g_0(x)$ для $x\in V\setminus V_1$ є необхідним гомеоморфізмом. ■

Доведення теореми 6.3. Розглянимо два випадки:

1° X допускає неперервну норму (еквівалентно: існує опукле тіло $U \subset X$ з умовою $ccU = \{0\}$). У цьому випадку ми задаємо:

$$V_1' = W \cap f^{-1}((-\infty;1)) \text{ і } V_{n+1}' = W \cap U_n \text{ для } n \in N,$$

де $\{U_n\}_{n\in N}$ - базис центрально симетричних опуклих відкритих околів нуля в X такий, що $clU_1 \subset f^{-1}((-\infty;1))$ і $clU_{n+1} \subset U_n$ для всіх $n \in N$. Використовуючи припущення 1° ми можемо очевидно задати базис $\{V_n\}_{n\in N}$ околів нуля в простір X такий, що :

$$V_1 = f^{-1}((-\infty;1)), \quad clV_{n+1} \subset V_n \text{ і } ccV_{n+1} = \{0\} \text{ для всіх } n \in N.$$

Легко перевірити, що $V = W$, послідовність (V_n') і $g_0 = e|_{W \setminus V_1'}$, однакові на $W \setminus V_1'$, і задовольняється припущення леми 6.2. Також використовуючи той же самий аргумент як і на третьому етапі доведення твердження 6.3, - ми стверджуємо, що $V = X$, (V_n) і та ж функція g_0 задовольняє ті самі припущення. Отже, застосовуючи лему 6.2 два рази, ми отримаємо гомеоморфізм g з $W = W \setminus \bigcap_{n\in N} V_n'$ на $X \setminus \{0\} = X \setminus \bigcap_{n\in N} V_n$, які є тотожні на $f^{-1}([1;\infty))$. Оскільки кожний окіл з нуля в X буде містити всі, але скінченне число множин V_n і V_n', ми підсумовуємо, що g продовжується до гомеоморфізму h, що має необхідні властивості.

2° Нехай не існує наперервної норми , заданої на X. Ми виберемо послідовність (V_n') і відображення g_0 як і вище, і нехай (V_n) є послідовність множин з наступної леми:

Лема 6.3. З припущення 2° маємо існування послідовності (V_n) з опуклих відкритих околів нуля в X і послідовність векторів (y_n) такої, що $V_1 = f^{-1}((-\infty;1))$ і для кожного $n \in N$,

(8) $$V_n \supset clV_{n+1}, \quad diamV_{n+1} < (n+1)^{-1}, \quad diam(R \cdot y_n) < (2n)^{-1}$$

і

(9) $$R^+ \cdot y_n \cup R^+ \cdot y_{n+1} \subset V_n, \quad R \cdot y_n \not\subset V_n, \quad R \cdot y_{n+1} \not\subset V_n.$$

Повторючи аргумент у другому випадку доведення твердження 6.1, ми перевіряємо припущення леми 6.2 і завершуємо доведення теореми так само, як і у випадку 1°.

Доведення леми 6.3. Виберемо $y_1 \in V_1 = f^{-1}((-\infty;1))$ таким чином, що $f(-y_1) = 1$. Далі використовуємо припущення 2°, зафіксуємо $y_2 \in V_1 \setminus \{0\}$ таким чином, що $diam(R \cdot y_2) < 1/4$.

Припустимо, що $V_1,\ldots,V_n, y_1,\ldots, y_{n+1}$ уже є побудовані. Нехай U_{n+1} - довільний опуклий відкритий окіл з променя $R^+ \cdot y_{n+1}$ таке, що $clU_{n+1} \subset V_n$ і $diamU_{n+1} < (n+1)^{-1}$. Використовуючи припущення 2°, ми можемо знайти вектор $y_{n+2} \in U_{n+1} \setminus \{0\}$ з умовою $R \cdot y_{n+2} \subset U_{n+1}$ і $diam(R \cdot y_{n+2}) < (2n+2)^{-1}$. Далі ми вибираємо відкритий підпростір K з умовою $-y_{n+2} \in \partial K$ і $0, y_{n+1} \in K$. Остаточно, ми задаємо:

$$V_{n+1} = K \cap U_{n+1}.$$

Це дає нам індуктивну конструкцію для послідовностей (V_n) і (y_n). ■

Лекція № 12. Топологічна класифікація локальних компактних замкнених опуклих множин у банахових просторах

Теорема 7.1. (Клі [3].)

Якщо K - локально компактна замкнена опукла підмножина банахового простору X, тоді існують кардинальні числа m і n з умовою $0 \le m \le \aleph_0$ і $0 \le n < \aleph_0$ такі, що K - гомеоморфна з кожним $I^m \times R^n$ або $I^m \times R^+$. Різні вказані можливості топологічно відрізняються.

Доведення: Ми починаємо доведення з другої умови. Нехай через K_0 позначено одноточкову компактифікацію K. Тоді формально різні можливості ,виписані вище є фактично відмінні – це наслідок наступних (які легко перевіряються) фактів. (a). Якщо K - гомеоморфний до I^m, тоді K - компактний і розмірність $\dim K = m$. (b). Якщо K - гомеоморфний до $I^m \times R^+$, тоді K - некомпактний, розмірність $\dim K = m+1$ і K_0 є стягуваним. (c) Якщо $n > 0$ і K - гомеоморфний до $I^m \times R^n$, тоді $\dim K = m+n$ і кожне неперервне відображення k - сфери $S^{(k)}$ в K_0 є гомотопне до константи для $k < n$, хоча існує відображення з $S^{(n)}$ в K_0, яке не є гомотопним до будь – якого постійного відображення.

Зараз ми перейдемо до першої гіпотези. Зауважимо, що якщо розмірність $\dim K < \infty$, тоді K - замкнене опукле тіло відносно простору лінійної оболонки K і доведення гіпотези випливає з твердження 6.1. Далі зауважимо, що нескінченно –

вимірний нормальний лінійний простір не є локальним компактом, і тому випадок, де б ccK був нескінченно – вимірним лінійним підпростором в X, є неможливим. Отже, перша гіпотеза випливає з твердження, що нижче.

Твердження 7.1. Нехай K - нескінченно – вимірна локальна компактна замкнена опукла підмножина банахового простору X. Тоді:

(1) Якщо $ccK = \{0\}$, тоді $K \approx Q$,

(2) Якщо $ccK = Y$ є для n - вимірного $(n < \infty)$ лінійного простору, тоді

$K \cong Q \times R^n$,

(3) Якщо ccK - не є лінійний підпростір, тоді K - гомеоморфний до доповнення $Q \setminus \{0\}$, простір отриманий з Q видаленням однієї точки ,а також- до простору $Q \times R^+$.

Доведення (1): З теореми 3.1 досить показати, що K - компакт. Ми припустимо, що $0 \in K$ і тому:

(1) $t_1 \cdot K \subset t_2 \cdot K$ як тільки $0 \le t_1 \le t_2$.

Позначимо:

$$B_t = \{x \in X : \|x\| \le t\}.$$

З припущення, що K - замкнений локально компактний і $0 \in K$, випливає, що $K \cap B_{t_0}$ - компактний для деяких $t_0 > 0$. Тоді з (1) ми аргументуємо ,(див. початок доведення теореми 2.2) , що:

(2) $K \cap B_t$ - компакт для кожного $t \ge 0$.

Тепер припустимо, що K - не є компакт. Тоді з (2) K має бути необмеженим, тобто існують вектори $x_n \in K$ такі, що $\lim\| x_n \| = \infty$. Вибираючи відповідну підпослідовність, ми можемо припустити, що послідовність $(x_n / \|x_n\|)$ є збіжною і :

(3) $\lim\limits_n x_n / \|x_n\| = x_0 \in K$.

Зафіксуємо $t \ge 0$. Оскільки $\lim\limits_n \|x_n\| = \infty$ ми маємо $t / \|x_n\| \le 1$ для всіх, але скінченої кількості чисел n, і тому $z_n = (t / \|x_n\|) \cdot x_n \in K$ для всіх, але скінченного числа індексів n. Отже, для кожного $t \ge 0$, $\lim\limits_n z_n = tx_0 \in K$, що суперечить припущенню $ccK = \{0\}$. ■

Доведення (2): Нехай Z - замкнений підпростір з X, що є доповнювальним n - вимірного простору $Y = ccK$. Ми ототожнюємо X з добутком $Y \times Z$. При такому ототожненню ми маємо: $K = Y \times (K \cap Z) \cong R^n \times (K \cap Z)$. Згідно (1) $K \cap Z \cong Q$, як тільки $K \cong Q \times R^n$. ■

Наступна лема є спеціальним випадком для виразу (3).

Лема 7.1. Припустимо, що $X = Y \times R$, де Y - банахів простір і K - нескінченно – вимірна локально компактна замкнена опукла підмножина в X така, що:

(4) $$Y \times R^+ \supset K \supset \{0\} \times R^+.$$

Тоді $K \cong Q \setminus \{0\}$.

Доведення леми: Нехай $h_1 : Y \times R^+ \to Y \times [-1;\infty)$ відображення виду:

$$h_1(y,t) = \left(y, (t + \|y\|)^2 - 1\right),$$

і нехай $h_2 : Y \times R \to Y \times R$ задане формулою:

$$h_2(y,t) = (1 + \|y\| + |t|)^{-1} \cdot (y,t).$$

Використовуючи (4) легко перевірити, що образ h_1 - гомеоморфне вкладення і, що образ $h_1(K)$ є локально компактною замкненою опуклою підмножиною простору X такою, що:

(5) $$0 \in h_1(K), \quad cc(h_1(K)) = \{0\} \times R^+.$$

Відображення h_2 є гомеоморфізмом за твердженням 1.3 і тому множина $C = h_2 h_1(K)$ є опуклою. Використовуючи (5), ми також легко перевіримо, що $(0;1) \notin C$ і, що множина $\overline{C} = C \cup \{(0;1)\}$ - локально компактна, замкнена, опукла і обмежена. Таким чином, із (1) випливає $\overline{C} \cong Q$. Отже, з однорідності куба Q ми маємо $h_2 h_1(K) = \overline{C} \setminus \{(0;1)\} \cong Q \setminus \{0\}$. Нарешті, $K \cong Q \setminus \{0\}$. ■

Доведення (3): Ми продовжуємо спостерігати, що вираз (3) може бути виведений з леми 7.1. Якщо ccK - власний конус, то існує лінія L така, що $L \cap K$ - замкнений промінь і скажемо $L \cap K = x_0 + R^+ \cdot z$. Оскільки K - замкнений, то відстань між точкою $z_1 = x_0 - z$ і множиною K є додатня, і тому існує $t > 0$ таке, що $z_1 \in \partial(K + t \cdot B_1)$, де $B_1 = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ - одинична куля. З твердження 1.1 існує несуча гіперплощина Y_1 для опуклого тіла $K + t \cdot B_1$ в точці z_1 і ми легко робимо висновок, що існує гіперплощина Y паралельна до Y_1, яка зосереджує множину K, скажемо у точці z_0. Використовуючи відношення перетворення, ми можемо припустити, що $z_0 = 0$, оскільки X - пряма сума простору Y та одновимірного підпростору $R \cdot z$. Більше того:

$$Y + R^+ \cdot z \supset K \supset R^+ \cdot z,$$

який відповідає припущенню (4) з леми 7.1. Отже, з леми ми маємо $K \cong Q \setminus \{0\}$.

Це дозволяє показати, що $Q \setminus \{0\} \cong Q \times R^+$. Однак $Q \times R^+$ може бути природньо представлена, як локальна компактна замкнена опукла підмножина з $l_2 \times R$ така, що $cc(Q \times R^+) = \{0\} \times R^+$, яка є власним конусом. Отже, згідно вищедоведеного результату $Q \times R^+ \cong Q \setminus \{0\}$. Це встановлює вираз (3) і завершує доведення теореми 7.1. ■

Лекція № 15.

-

Z-множини в гільбертовому просторі та в зліченному нескінченному добутку ліній.

Ми розглянемо гільбертів куб $Q = [-1;1]^N$ і пару (Q, P), де $P = (-1;1)^N$ - псевдовнутрішність гільбертового куба. Це дослідження - про Z - множину в Q і в зліченному нескінченому добутку осей R^N, що є гомеоморфним до P.

Грецькі букви α, β, γ позначатимуть непорожні підмножини множини N -додатних цілих чисел; $\alpha(n)$ - позначає n - номер відповідно до значення у множині α; $N \setminus \{\alpha\}$ - доповнення .

$$|\alpha| = \{n \in N; n < 1 + card\alpha\}$$

Нагадаємо, що $I = [-1;1]$, $i = (-1;1)$ - це замкнений та відкритий одиничний інтервал; $R = (-\infty; \infty)$ - дійсна вісь. Гільбертів куб є зліченим нескінченним добутком замкнених одиничних інтервалів.

Для зручності ми позначимо гільбертів куб через I^N і I^{x_0}; відповідно символами $I^3, I^{\{1,2,3\}}, I^{\{1,5,7\}}$ - позначимо трьохвимірний куб і так далі.

Визначимо особливу метрику на Q

(1) $$d(x,y) = \sum_{n \in N} 2^{-n} |x(n) - y(n)|$$

Покладемо $0 = (0,0,...)$ - центр для Q, і ν_n - енний одиничний вектор, тобто $\nu_n(j) = 0$, якщо $j \neq n$ і $\nu_n(n) = 1$. Для кожного $n \in N$, ми покладемо $p_n : Q \to I$ координатне відображення, тобто $p_n(x) = x(n)$. Якщо $\alpha \subset N$, то відображення $p_\alpha : Q \to I^{|\alpha|}$ визначається однозначно умовою :

(2) $$p_\alpha(x) = y, \quad y(n) = x(\alpha(n)) \text{ при } n \in |a|$$

Як наслідок ми постійно використовуватимемо декомпозиційні оператори $T_\alpha : AuthQ \to AuthQ$, що визначаються так :

(3) $p_\alpha[T_\alpha F] = Fp_\alpha$ і $p_{\alpha^\perp}\left[T_\alpha F\right] = p_{\alpha^\perp}$

Це означає, що гомеоморфізм $\left[T_\alpha F\right]$ діє на координати, які належать до α одинаковим способом, що й F діє на область I^a, і $\left[T_\alpha F\right]$ не міняє координати у $\alpha^\perp$.

Якщо $F_i \in AuthQ$ при $i \in N$, то символом $()\{Fi : i \in N\}$ позначимо $\lim\limits_n F_n ... F_2 F_1$ в топології $AuthQ$, що забезпечує існування цієї границі. Важливу роль в нашому обговоренні відіграють множини $P = \{x \in Q : \left|x(n)\right| < 1$ для всіх $n \in N\}$ і $Q \setminus P$, що називається відповідно псевдовнутрішністю і псевдограницею куба. Оскільки $I \cong R$, то псевдовнутрішність $P = I^N$ є гомеоморфною до простору R^N .

Множини P і $Q \setminus P$ розрізняємо з радіальною внутрішністюта радіальною границею Q:

$r\operatorname{int}Q = \{x \in Q : \sup\left|x(n)\right| < 1\} \qquad i \qquad rbdQ = Q \setminus r\operatorname{int}Q$

Інші спеціальні підмножини Q що використовуються в цій лекції:

$$Q_{odd} = \{x \in Q : x(2n) = 0,\ n \in N\},$$
$$Q_{odd} = \{x \in Q : x(2n-1) = 0,\ n \in N\},$$
$$W = \{x \in Q : x(1) = 1\}$$

Лема 1.1 Нехай $(\beta_n) -$ послідовність попарно диз’юнктних підмножин з N . Якщо для кожного $n,\ F_n \in Auth\, I^{|\beta_n|}$, то $F = \underset{n \in N}{()} [T_{\beta_n} F_n]$ існує і міститься в $AuthQ$

Лема 1.2 Якщо A - компактна підмножина з P, то існує $H \in auth(Q,P)$ така, що $H(A) \subset Q_{odd} \cap P$.

Доведення: Маємо, що $A \subset \underset{n \in N}{P} [-r_n, r]$, де $r_n = \sup\left|x(n)\right| < 1$ для кожного $n \in N$.

Використовуючи координатні відображення $f_n \in AuthI$, такі, що $f_n(\pm r_n) = \pm\frac{1}{2}$, ми зводимо загальний випадок до того, що $A = C$, де:

(4) $$C = \{x \in Q : \left|x(n)\right| \le \frac{1}{2}, \quad n \in N\}$$

Спочатку ми встановимо наступні факти:

(*) Існує $G \in Auth(Q,P)$, така, що $G(C) \subset P$ і $p_1(G(C)) = \{0\}$.

Доведемо факт (*). Позначимо $\lambda(t) = \frac{1}{2}(\left|2t-1\right| + \left|2t+1\right| - 2)$ при $t \in I$, тобто $\lambda(t)$ є відстанню від точки t до інтервалу $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Для кожного $x \in Q$ покладемо:

$$F(x)=y, \quad y(1)=x(1)\, i \quad y(n)=\frac{1}{n}x(n)+\frac{1}{4}x(1)+\lambda(x(n))\left[\frac{n-1}{n}x(n)-\frac{1}{4}x(1)\right],$$

$n \geq 2$

Легко перевірити, що для будь яких фіксованих значень координат $x(i), \quad i \in N \setminus \{n\}$, значення $y(n)$, розглядається, як функція від однієї дійсної змінної $x(n)$, що строго зростає; також очевидно, що $y(n)=\pm 1$, тоді і тільки тоді, коли $x(n)=\pm 1$. Звідси випливає:

(5) $\qquad F \in Auth(Q,P) \quad i \quad F(C) \subset P$

Нехай $Q_1 = I^{1\perp}$. Ми розглядатимемо Q як добуток $I \times Q_1$. Нехай $s : I \times Q_1 \to \{0\} \times Q_1$ - "природна проекція", тобто:

(6) $\quad s(t,x)=(0,x)$ при $(t,x) \in I \times Q_1$, і нехай $f_1 = s\,|_{F(C)}$. Ми вимагатимемо, щоб:

(7) $\quad f_1$ було гомеоморфним вкладенням.

Оскільки $F(C)$ - компакт, то досить перевірити чи f_1 є взаємо однозначним..

Якщо $y \in F(C)$, і $y = F(x), x \in C,$ то $\lambda(x(n))=0$ для всіх n, і тоді $y(n)=\frac{1}{n}x(n)+\frac{1}{4}x(1) \quad при \quad n \geq 2$. Оскільки $|x(n)| \leq 1$,то ми одержуємо: $y(1)=4 \cdot \lim y(n)$, тобто y визначається однозначно через $s(y)$.

Пара $\left(I, \dot{I}\right)$ має сильну властивість псевдотрансляції . Отже , згідно (7) відображення f_1 має продовження $F_1 \in Auth(Q,P)$. Покладемо $G = F_1 F$.Згідно (5) і (6),

$G(C)=(F(C))=s(F(C)) \subset (\{0\} \times Q_1) \cap P$. Це встановлює факт (*).

Тепер ми завершимо доведення Леми 1.2. Нехай для кожного $n \in N$,
$\beta_n = \{2n, 1+1\cdot 2^n, 1+3\cdot 2^n, 1+5+2^n, \ldots\}$, і покладемо $H = \bigcirc_{n \in N} \lfloor T_{\beta_n} G \rfloor$ де G є відображенням типу (*). За лемою 1.1, маємо, що $H \in Auth(Q,P)$, і очевидно, що $HC \in P \cap Q_{odd}$.

Лема 1.3 Якщо A і B - компактні підмножини P, такі, що $A \cong B$ то кожен гомеоморфізм f з A в B може бути продовжений до $F \in Auth(Q,P)$.

Доведення: очевидно $Q_{odd} \cong Q_{even}$. Отже за Лемою 1.2, існують гомеоморфізми $H_1, H_2 \in Auth(Q,P)$, такі, що $H_1(A) \subset Q_{odd} \cap P$ і $H_2(B) \subset Q_{even} \cap P$. Пара (Q,P) має властивість псевдотрансляції . Отже , існує гомеоморфізм $G \in Auth(Q,P)$, що є продовженням відображення $g : H_1(A) \to H_2(B)$, що визначається так:

$$g(x)=H_2\left(f\left(H_1^{-1}(x)\right)\right).$$

Покладемо $F = H_2^{-1} G H_1$. Цим доведення леми завершено.

Лема 1.4 Існує $G \in Auth(Q,P)$ і таке, що $G(W) \subset W \cap p_{1\perp}^{-1}(P)$.

Доведення: Застосуємо теорему Бера про категорію до простору $Y = \{F \in AuthQ : F(W) \subset W\}$, який доповнює як замкнену підмножину $AuthQ$. Нехай для кожного $n \geq 2$:

$$Y_n = \{F \in Y : p_n F(W) \subset \dot{I}\}.$$

Нам треба показати, що $\bigcap_{n \geq 2} Y_n \neq \emptyset$. Очевидно, що оскільки множини Y_n - відкриті в Y, то можна довести, що кожна множина Y_n є всюди щільною в Y. Нехай $f_j \in AuthI^{\{1,2\}}$ є таким, що

$$f_j(\{z : z(1) = 1\}) \subset \{z : z(1) = 1 \quad i \ |z(2)| < 1\}, \text{ та}$$

$$d(f_j(x), x) < \frac{1}{j} \text{ при } x \in I^{\{1,2\}},$$

де через d позначена евклідова метрика. Покладемо

$$F_j = \lfloor T_{\{1,n\}} f_j \rfloor \in Y_n.$$

Тоді для кожного $H \in Y$, маємо, що $F_j H \in Y_n$, а також $\lim F_j H = H$. Лема доведена.

Лекція № 13. Z- множини в гільбертовому кубі.

Нехай X - довільний метричний простір, і нехай K - компактний метричний простір. Через $C(K,X)$ позначимо простір X - значних неперервних функцій;визначених на K, на якому введена компактно-відкрита топологія. Якщо $d \in D(X)$ - довільна обмежена метрика на X, то компактно- відкрита топологія простору $C(K,X)$ визначається метрикою.

(1) $$\bar{d}(f,g) = \sup d(f(x), g(x)), \quad x \in K.$$

Очевидно, що коли d є повною метрикою на X, то метрика $\bar{d}$ - також повна.
Якщо $f_n \in C(K,X)$, , то $\lim_n f_n$ - це границя функцій f_n у компактно відкритій топології. Маємо наступне твердження.

Твердження 2.1 Нехай A - підмножина з X, тоді дві наступні умови є еквівалентними:

(а) замикання $\mathrm{cl}\left\{f \in C(I^n, X) : f(I^n) \subset X \setminus A = C(I^n, X)\right\}$ для кожного $n \in N \cup \{0\}$

(б) замикання $\mathrm{cl}\left\{f \in C(Q,X) : f(Q) \subset X \setminus A = C(Q,X)\right\}$.

Доведення: Ми ототожнимо куб I^n з множиною $\{x \in Q : p_i(x) = 0, i > n\}$. Для $n \in N$ позначимо $s_n : Q \to I^n$ звичайну проекцію. Зрозуміло, що

$\lim_{n} \sup_{x\in Q} d\left(s_n(x), x\right) = 0$, оскільки кожна функція $f \in C(Q, X)$ є рівномірно неперервною, тому:

(2) $$\lim_{n} \bar{d}\left(f \circ s_n, f\right) = 0 \text{ для всіх } f \in C(Q, X).$$

Припустимо (а). Нехай $f \in C(Q, X)$. Тоді для кожного n знайдеться $g_n \in C\left(I^n, X\right)$, таке, що $g_n\left(I^n\right) \subset X \setminus A$ і

(3) $$\bar{d}\left(g_n; f|_{I^n}\right) < \frac{1}{n}$$

Задаємо $f_n = g_n \circ s_n \in C(Q, X)$. Очевидно, що $f_n(Q) \subset X \setminus A$. Згідно (2) і (3) ми легко робимо висновок, що $\lim_{n} f_n = f$. Це доводить справедливість (б). Тепер

припустимо, що A задовольняє (б) і $f \in C\left(I^n, x\right)$ для деякого n. Покладемо $h = f \circ s_n \in C(Q, X)$. Виберемо $h_j \in C(Q, X)$ з $\lim_{j} h_j = h$ i $h_j(Q) \subset X$ \A. Тоді відображення $f_j = h_j|_{I^n}$ має властивість $f_j\left(I^n\right) \subset X \setminus A$ i $\lim_{j} f = f$. Це встановлює умову (б).

Означення 2.1 Замкнена підмножина $A \subset X$, яка задовольняє еквівалентні умови (а) та (б), називається Z - множиною. Кожна множина утворена зліченним об'єднанням Z - множин, називається σZ - множиною в X, будемо позначати через $Z(X)$ i $\sigma Z(X)$ відповідно.

Твердження 2.2. Нехай X та Y метричні простори.

(а). Сім'я $Z(X)$ є спадковою по замкнених підмножин, тобто якщо $A \in Z(X)$. $B = clB \subset A$, то $B \in Z(X)$.

(в) Якщо $A \in Z(X)$, то $A \times Y \in Z(X \times Y)$.

(с) Припустимо, що добуток метричних просторів $X = D\{X_i, i \in N\}$, де X_i - метричні простори;

$p_i : X \to X_i$ - це і – та координата проекція, $i = 1,2,\ldots$. Тоді якщо K є замкненою підмножиною X, $p_i(K) \neq Xi$, то $K \in Z(X)$.

(д) Якщо X - *повно* – метризований, $K_i \in Z(X)$, $i = 1,2,\ldots$ і множина $K = \bigcup_{i\in N} K_i$ є замкненою, то $K \in Z(X)$.

Доведення: Твердження (а) та в) є очевидними. Припустимо, що X, X_i та K – задовольняють припущення з (с), і кажемо, що $y_i \in X_{m_i} \setminus p_{m_i}(K)$, де $m_1 < m_2 < \ldots$. Нехай $f \in C(Q, X)$, для кожного $i \in N$, визначимо $f_i \in C(Q, X)$ за формулою

$$p_j f_i(x) = \begin{cases} p_j f(x), & j \neq m_i, \\ y_i, & j = m_2. \end{cases}$$

Легко побачити, що $\lim\limits_{i} f_i = f$ та $f_i(Q) \subset X \setminus K$ для кожного $i \in N$. Це доводить справедливість (с).

Якщо K є замкненою підмножиною з X, то $M = \{f \in C(Q, X): f(Q) \subset X \setminus K\}$ є відкритою в $C(Q, X)$. Отже згідно припущення з (д),

$$M = \bigcap_{n \in N} \{f \in C(Q, X): f(Q) \subset X \setminus K_n\},$$

Перетин всюди щільних відкритих підмножин повного метричного простору $C(Q, X)$ є згідно теореми Бера , є всюди щільним в $C(Q, X)$. Отже, за означенням 2.1 $K \in Z(X)$.

Зауваження: Доведення (д) показує насправді, що коли X є повним і метризованим, то $A \in \sigma Z(X)$ як тоді і тільки тоді коли A має тип $F\sigma$ і задовольняє еквівалентні умови (а) та (б) твердження 2.1. Надалі ми припустимо, що $X = Q$,- гільбертів куб. Набори $Z(Q)$ та $\sigma Z(Q)$ будемо позначати через Z та σZ.

Приклад 2.1 Нехай A та B довільні компактні підмножини Q, такі що $A \subset P$ та $B \subset Q \setminus P$. Тоді

(4) $\qquad A \in Z$,

(5) $\qquad B \in Z$.

Твердження (4) в основному випливає з Твердження 2.2 (с). Щоб довести (5), припустимо, що $f \in C(Q, Q)$ задаємо $f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$. Тоді $f_n \in C(Q, Q), \lim\limits_{i} f_n = f \ i \ f_n(Q) \subset P \subset Q \setminus B$.

Далі нам потрібна наступна лема:

Лема 2.1 Нехай A - замкнена підмножина з Q, і нехай $f \in C(Q, Q)$ є такою, що $f(Q) \subset Q \setminus A$. Тоді

$$f \in cl\{h \in C(Q, Q): h(Q) \subset P \setminus A \ i \ h \ \textit{є вкладенням}\}.$$

Доведення: Для кожного $n \in N$ задаємо функцію $f_n \in C(Q, Q)$ за формулою:

$$f_n(x) = \frac{n-1}{m}(p_1 f(x), p_2 f(x), ..., p_n f(x), x(1), x(2), ...), \quad x \in Q.$$

Тоді $\lim\limits_{n} f_n = f$, $f_n(Q) \subset P$ для всіх $n \in N$ і $f_n(Q) \subset Q \setminus A$ для доволі великого n, тому що множина $\{f : f(Q) \subset Q \setminus A\}$ є відкритою в $C(Q, Q)$. Більше того, всі f_n є взаємно - однозначними і вони є гомеоморфними вкладеннями. Лема доведена.

Через $\wp(\mathrm{P})$ позначимо сімейство всіх замкнених підмножин з Q, які містяться в P. Маємо наступне:

Твердження 2.3 $\wp(P)$ має властивість $Auth(Q, P)$-продовження.

Доведення: Згідно Леми 1.3 $\wp(\mathrm{P})$ має властивість $Auth(Q, P)$ - продовження. Отже, згідно Теореми 3.1, твердження зводиться до наступної леми:

Лема 2.2 Кожна множина $A \in \wp(P)$ є $Auth(Q,P)$ - тонкою, тобто для кожного околу U множини A існує послідовність (F_n) елементів з $Auth(Q,P)$, така, що $F_n(x)=x$, $x \in Q \setminus U$, $n \in N$ i $\lim\limits_n F_n = e$.

Доведення: Припустимо, що $A \in \wp(P)$. За лемою 1.2 знайдеться гомеоморфізм $H \in Auth(Q,P)$, такий що множина $A_1 = H(A)$ міститься в множині $\{x \in Q : p_2(x)=0\}$. Отже достатньо показати, що $A_1 \in Auth(Q,P)$ - тонкою. Ми можемо представити Q як добуток $Q \times I$ та розглянути A_1 як замкнену підмножину з $Q \times \{0\}$, U - як відкритий окіл A_1 в $Q \times I$. Щоб завершити доведення ми повинні визначити гомеоморфізм

$$G_n \in Auth\left(Q \times I,\, P \times \dot{I}\right), \quad n \in N$$

такий що $G_n(x)=x$ при $x \in Q \times I \setminus U$, $\lim\limits_n G_n = e$, тотожний на $Q \times I$.

Нехай $\varphi : Q \to I$ - неперервна функція, така що

$\{(y,t) \in Q \times I : |t| \le \phi(y)\} \subset U \cup Q \times \{0\}$ i $\varphi(y) > 0$, якщо $(y,0) \in A_1$.

Для кожного $\varepsilon \in [0;1]$ покладемо $f_\varepsilon \in AuthI$ - гомеоморфізм, який є тотожнім на $[-1;-\varepsilon] \cup [\varepsilon;1]$ і афінно переводить $[-\varepsilon;0]$ i $[0;\varepsilon)$ в $\left[-\varepsilon;\frac{\varepsilon}{2}\right]$ i $\left[\frac{\varepsilon}{2};\varepsilon\right]$ відповідно. Легко перевірити що відображення $G_n : Q \times I \to Q \times I$ $(n = 1,2,....)$ які визначаються формулами

$$G_n(y,t) = \left(y, \frac{f_{\phi(y)}}{n}(y)\right)$$

будуть шуканими гомеоморфізмами. Лема доведена.

Твердження 2.4 Якщо K є Z - множиною в Q, то існує гомеоморфізм $F \in AuthQ$, такий що $F(K) \subset P$.

Спочатку ми доведемо спеціальний випадок цього твердження, який встановлюється наступною лемою.

Лема 2.3 Нехай $W = \{x \in Q : p_1(x) = 1\}$. Тоді знайдеться така множина $W' \subset P$, що пари (Q,W) i (Q,W') є гомеоморфними.

Доведення: За Лемою 1.4, існує така множина $A \subset W$, що $(Q,W) \simeq (Q,A)$ i $p_{1\perp}(A) \subset P$. За Лемою 1.2 знайдеться таке $H \in AuthQ$, що

(6) $$H(p_{1\perp}(A)) \subset Q_{odd} \cap P.$$

Покладемо $A_1 = [T_{1\perp}H](A)$ i $d = \{2n-1; n \in N\}$- множина α непарних чисел.

Використовуючи (6) і той факт, що $A \subset W$, маємо

(7) $$A_1 \subset \{x \in Q : x(1)=1,\, x(i)=0,\, якщо\, 1 \ne i \in \alpha\}, \quad p_{\alpha\perp}(A_1) \subset P$$

І тому $p_\alpha(A_1)=\{v_1\}$, де $v_1=(1,0,0,....)\in Q$. Із однорідності куба Q (III, Твердження 4.1) знайдеться $F\in AuthQ$, така що $F(v_1)\in P$, і тому згідно (7), $W'=[T_\alpha F](A_1)\subset P$. Зрозуміло, що $(Q,W)\simeq(Q,W')$.

Доведення Твердження 2.4. Припустимо, що $A\in Z$ і W' є підмножиною P, що задовольняє висновок Леми 2.3. Зрозуміло, що $W'\simeq W\simeq Q$. Отже, за означенням 2.1

$$e|_{W'}\in cl\{f\in C(W',Q):\ f(W')\subset Q\setminus A\},\ .\quad \Rightarrow \text{ за Лемою 2.1}$$

(8) $\qquad e|_{W'}\in cl\{f\in C(W',Q):\ f(W')\subset.\ P\setminus A$, причому f -це є вкладення.

Комбінуючи (8) з Твердженням 2.3, ми встановимо, що

$$e\in cl\{F\in AuthQ: F(W')\cap A=\emptyset\}.$$

Це еквівалентне тому, що

(9) $$e\in cl\{F\in AuthQ: F(A)\cap W'=\emptyset\}$$

Припустимо, що K є Z - множиною в Q і G - довільний гомеоморфізм в $AuthQ$. Застосуємо (9) до множини $A=G(K)$ і матимемо, що G міститься в замиканні множини $\{F\in AuthQ: F(K)\cap W'=\emptyset\}$. Отже:

$$cl\{F\in AuthQ: F(K)\cap W'=\emptyset\}=AuthQ$$

Нехай $W_{2i-1}=\{x\in Q: x_i=1\}, W_{2i}=\{x\in Q: x_i=-1\}$ при $i=1,2,...$..Оскільки $(Q,W_n)\simeq(Q,W)\simeq(Q,W')$ і кожне W_n є замкненою підмножиною в Q, ми робимо висновок, що для кожного $n\in N$ множина

$$Y_n=\{F\in AuthQ: F(K)\cap W_n=\emptyset\}$$

є всюди щільною відкритою підмножиною простору $AuthQ$.

Зрозуміло, що $Q\setminus P=\bigcup_{n\in N}W_n$, і тому $Y=\{F\in AuthQ: F(A)\subset P\}=\bigcap_{n\in N}Y_n$, а це- зліченний перетин всюди щільних відкритих підмножин повного метричного простору $AuthQ$. За Теоремою Бера (I, Теорема 3.1), Y є непорожнім. Теорему доведено.

Тепер ми готові довести теорему про продовження Андерсена, яка є основним результатом цього параграфу.

Теорема 2.1. Сімейство Z має властивість $AuthQ$ - продовження.

Доведення: Припустимо, що $A_1,A_2\in Z,\quad A_1\simeq A_2$, а f є гомеоморфізм з A_1 в A_2. Ми повинні показати, що існує гомеоморфізм $F\in AuthQ$, який є продовженням f. Згідно Твердження 2.4 знайдуться такі $G_1,G_2\in AuthQ$, що $G_1(A_1)$ та $G_2(A_2)$ будуть підмножинами в P. За лемою 1.3 (альтернативно -твердження 1.3), гомеоморфізм

$$h=G_2 f(G_1\mid A_1)^{-1}: G_1(A_1)\to G_2(A_2)$$

Допускає продовження $H\in Auth(Q,P)$. Покладемо $F=G_2^{-1}HG_1$.Теорема доведена.

Ми завершимо наше обговорення двома результатами про σZ -множини.

Твердження 2.5 Нехай A - підмножина Q типу $F\sigma$. Якщо існують такі $f_n \in C(Q,Q)$, що $\lim_n f_n = e \quad i \; f_n(Q) \subset Q \setminus A$ при $n = 1,2,...$, то $A \in \sigma Z$.

Доведення: Припустимо, що A_i є замкненими підмножинами в Q і $\bigcup_{i\in N} A_i = A$ та $g = C(Q,Q)$. Тоді $\lim_n f_n g = g$ та $f_n g(Q) \subset Q \setminus A \subset Q \setminus A_i$ при $i, n \in N$. Отже, за Означенням 2.1 кожне A_i є Z - множиною. Твердження доведено.

Наслідок 2.1. Покладемо $A = \bigcup_{n\in N} A_n$, де кожне A_n є компактною підмножиною P. Тоді знайдеться таке $G \in AuthQ,$ що $G(A) \subset Q \setminus P$.

Доведення: Покладемо $\beta_n = \{1\cdot 2^n, 3\cdot 2^n, 5\cdot 2^n, ...\}$. Для кожного $n \in N$ нехай $A'_n = p_{\beta_n}(A_n)$ і A''_n є підмножиною з $Q \setminus P$, що гомеоморфна до A'_n. Зрозуміло, що кожне A_n є компактною підмножиною з P. Отже множини A'_n та A''_n є Z - множинами (приклад 2.1) і за Теоремою 2.1 знайдуться такі $F_n \in AuthQ$, що $F_n(A'_n) = A''_n \; (n = 1,2,...)$. За лемою 1.1 маємо:

$$G = \underset{n\in N}{()} \lfloor T_{\beta_n} F_n \rfloor \in AuthQ.$$

Гомеоморфізм G має властивість $G(A) \subset Q \setminus P$, що й треба було довести.

Лекція №14. Z **- скелетоїди в кубі** Q .

Нагадаємо, що Z - це сімейство Z -множин в кубі Q.

Теорема 3.1 . Z - досконале сімейство (у сенсі IV, Означення 3.2).

Доведення: Нехай $A \in Z$ та A' є підмножиною з P, яка гомеоморфна до A. Оскільки $A' \in \wp(P)$, то множина A' є $Auth(Q,P)$ - тонкою.(Твердження 2.3), і тому вона є $AuthQ$ - тонкою. Таким чином, усі множини в Z є $AuthQ$ - тонкими. Набір Z є інваріантним відносно до $AuthQ$, і має властивість (д) із Твердження 2.2. Отже згідно IV, Теореми 3.1, Z має властивість $AuthQ$ - продовження і тому Z є досконалим сімейством.

Твердження 2.1 Нехай $Q_n = \left\{ x \in Q : |x(i)| \le 1 - \frac{1}{n} \; для \; всіх \; i \in N \right\}$. Тоді послідовність (Q_n) є Z - скелетоном.

Доведення: Маємо, що $A \in Z$, $m \in N, \varepsilon > 0$. Виберемо $\delta > 0$ так, щоб $\max\left(1 - \frac{1}{m}, 1 - \varepsilon\right) < \delta < 1$. Нехай g є гомеоморфізмом (наприклад , кусково –

лінійним) з I на $[-1+\delta;1-\delta]$, який є тотожнім відображенням на $\left[-1+\frac{1}{m};1-\frac{1}{m}\right]$.
Визначимо $f : A \to Q$ покоординатно так : $p_i f(x) = gp_i(x)$ при $x \in A, i \in N$. Очевидно, що f є гомеоморфним вкладенням, що задовольняє умову (1) з IV, Твердження 4.1, для кожного $n > \frac{m}{\delta}$.

Теорема 3.2 Множина L є Z - скелетоїдом тоді і тільки тоді, коли $L \cong r\operatorname{int} Q$. Якщо L є Z - скелетоїдом і $L \subset B \in Z\sigma$, то B теж є Z -скелетоїдом. Псевдограниця $Q \setminus P$ є Z - скелетоїдом.

Доведення: Перше твердження випливає з Твердження 3.1, з IV, Теорема 2.1 та IV, Твердження 2.1 . Друге твердження випливає з IV, Теорема 4.2, а третє випливає з IV, Наслідок 4.1. Нарешті, згідно Наслідку 2.1 знайдеться такий гомеоморфізм $F \in AuthQ$, що $Q \setminus P \supset F(r\operatorname{int} Q)$, і тому $Q \setminus P$ є Z - скелетоїдом. Теорему доведено.

Теорема 3.3 Якщо $A, B \in Z, A \cong B$, і L_1 та L_2 є Z - скелетоїдами, кожен з яких диз'юнктний з $A \cup B$, то f має таке продовження $F \in AuthQ$, що $F(L_1) = L_2$.

Доведення: Виберемо $G \in AuthQ$ так, що $G(L_1) = L_2$. Нехай $h : G(A) \to B$ - відображення $h(x) = f(G^{-1}(x))$. Маємо, що $G(A) \cap L_2 = B \cap L_2 = \emptyset$. Тому, згідно IV, Твердження 4.2, h допускає продовження $H = Auth(Q, L_2)$. Тоді $F = HG$ є шуканим продовженням f .

Наслідок 3.1. Якщо A та B є Z - множинами і h є гомеоморфізмом з A на B, що $h(A \cap P) = B \cap P$, то h має продовження $H = Auth(Q, P)$.

Доведення: За теоремою 3.2 множини $L_1 = (Q \setminus P) \setminus A$ та $L_2 = (Q \setminus P) \setminus B$ є Z -скелетоїдами. Отже, шуканий висновок випливає з Теореми 3.3. Наслідок доведено.

Наслідок 3.2. $P \cup W \simeq P$.

Доведення: За Теоремою 3.1 $W \in Z$. Отже, згідно Теореми 3.2, обидві множини $Q \setminus P$ і $Q \setminus (P \cup W) = (Q \setminus P) \setminus W$ є Z - скелетоїдами, і тому їхні доповнення P та $P \cup W$ є гомеоморфними. Наслідок доведено.

Z - **скелетоїди в просторах Келлера.**

У цьому параграфі K буде позначати простір Келлера, тобто K - це опукла підмножина лінійного топологічного простору, такого, що K - афінно гомеоморфний до нескінченновимірної компактної опуклої підмножини гільбертового простору l_2(див. III, параграф 3). Оскільки K є гомеоморфним до гільбертового кубу Q (III, Теорема 3.1), то топологічні властивості K такі ж і як в Q. Однак ми будемо цікавитися також деякими фактами, що випливають з афінно – топологічної структури K, і також структури окремого лінійного топологічного простору, в який K є вкладеним.
Нагадаємо, що $[x; y]$- замкнений відрізок, що включає точки x та y є K, $[x; y) = [x; y] \setminus \{y\}$, $(x, y) = [x; y) \setminus \{x\}$.

Означення 4.1 Точка $y_0 \in K$ Називається центральною, якщо множина $\bigcup\limits_{x \in K}[y_0; x)$ є Z - скелетоїдом для K. Множину усіх центральних точок K позначмо $cent(K)$, множину $\bigcup\limits_{x \in K}[y; x) = y + [0;1) \cdot (K - y)$ називатимемо скелетоїдом гомотетії з центром y. Маємо:

Твердження 4.1 Якщо K - простір Келлера $C \in (0;1), y \in centK$ і $K_c = y + c \cdot (K - y)$, то $(K, K_c) \simeq (Q, Q_{\cdot\, even})$.

Доведення: Оскільки K_c є компактною підмножиною скелетоїду гомотететії $L = y + [0;1) \cdot (K - y)$ і $L \in Z_\sigma(K)$, то маємо, що $K_c \in Z(K)$ (див. Означення 2.1). Очевидно, що $K_c \approx K$ і за теоремою Келлера (ІІІ, Теорема 3.1) $K \simeq Q$. Тому $K_c \simeq Q \simeq Q_{even}$. Оскільки $K_c \in Z(K), Q_{ever} \in Z(Q)$, а Z є досконалим набором, то гомеоморфізм між K_c та Q_{ever} може бути продовжений до гомеоморфізму з K на Q. Твердження доведено.

Ми перевіряємо те, які з точок Келлера K є центральними. Почнемо з таких допоміжних результатів.

Твердження 4.2 Нехай $x_0 \in K$. Тоді множина $L = x_0 + [0;1) \cdot (K - x_0)$ є скелетоїдом гомотетії і тільки тоді,коли $L \in Z_\sigma(K)$.

Доведення. Оскільки введені поняття є інваріантними при перетворені, то можна вважати,, що x_0=0. Припустимо, що $L \in Z_\sigma(K)$. Оскільки кожна компактна підмножина з Z_σ - множини є Z - множиною, то маємо, що:

(1) $$c \cdot K \in Z(K) \text{ для кожного } 0 \le c < 1.$$

Покладемо $0 < c_1 < c_2 <,....$ причому $\lim\limits_n c_n = 1$. Зрозуміло, що $L = \bigcup\limits_{n \in N} c \cdot K$. Ми покажемо, що послідовність $(c_n \cdot K) \in Z(K)$ - скелетоном для K. Дано, що $A \in Z(K), \quad m \in N, \quad \varepsilon > 0$. Виберемо $n > m$ так, що $\sup\limits_{x \in K} d(x, c_{n-1} \cdot K) < \frac{\varepsilon}{4}$, де через d позначимо відстань між точкою і множиною що індукована нормою $\|\cdot\|$ простору l_2. За теоремою Дугунжі (див. ІІ, Наслідок 3.4), існує ретракція $r : K \to c_{n-1} \cdot K$, така що $\sup\limits_{x \in K}\|r(x) - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Відображення:

(2) $$g = r|_A : A \to K$$

має властивості:

(3) $$g(A) \subset c_{n-1} \cdot K, \quad g(x) = x \text{ при } x \in A \cap c_m \cdot K, \sup_{x \in K}\|g(x) - x\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

які є аналогічними до умови (1) з IV, Твердження 4.1, окрім того, що g є лише неперервним відображенням, а не гомеоморфним вкладенням. Ми виправимо відображення g, використовуючи наступну лему.

Лема 4.1 Нехай $2Q=[-2,2]^N$ наділена метрикою, що визначається за формулою (1) з параграфа першого. Введемо Q і Q_{even}, як підмножини з $2Q$. Тоді для кожної замкненої підмножини $A\subset 2Q$ і для кожного відображення $g:A\to Q_{even}$, знайдеться послідовність (f_k) гомеоморфних вкладень A в Q, така що $\lim\limits_k f_k=g$ у компактно - відкритій топології з $C(A,2Q)$ і $f_k(x)=x$ при $x\in B$, де $B=\{x\in A:g(x)=x\}$.

Доведення: Покладемо $Q_0=\{x\in Q:p_i(x)=0,i\in\{2,4,6,....\}\cup\{1\}\}$ і нехай $\rho(x)=\min(1,d(x,B)),x\in 2Q$. Нехай $h:2Q\to Q_0$ - довільне гомеоморфне вкладення. Задаємо:

$$f_k(x)=g(x)+\rho(x)\cdot v_1+k^{-1}\rho(x)\cdot h(x)\,при\;x\in A,n\in N.$$

Нагадаємо, що $v_1=(1,0,0,...)\in Q$. Очевидно, що $\lim\limits_n f_n=g$ і що f_n є неперервними. Більше того $f_n(x)=x$ при $x\in B$. Через p_0 позначимо проекцію Q на Q_0. Якщо $x\neq y\;\; i\;\rho(x)=\rho(y)$,то $p_0f_n(x)\neq p_0f_n(y)$. В іншому випадку $f_n(x)\neq f_n(y)$. Тому кожне відображення f_n взаємно однозначне. З компактності A випливає, що кожне f_n є гомеоморфним вкладенням. Лема доведена.

Тепер ми завершимо доведення твердження 4.2. Поєднуючи (1) і Теорему 2.1, трійка $(K,c_nK,c_{n-1}K)$ може вважатися трійкою $(2Q,Q,Q_{even})$. Застосовуючи Лему 4.1, ми виберемо k_0 так, що відображення $f=f_{k_0}$ є вкладенням A в K і має властивості

$f(A)\subset c_nK,\sup\|f(x)-g(x)\|<\dfrac{\varepsilon}{2},\;f(x)=g(x)$, як тільки $g(x)=x$. Отже, згідно (3), f задовольняє умову (1) із IV, Твердження 4.1, а це забезпечує те, що (c_nK) є $Z(K)$ - скелетоном. Достатність є очевидною.

Твердження 4.3 Припустимо, що K є компактною опуклою підмножиною в l_2, такою що опукла оболонка $span\,K$ є всюди щільною в l_2 і (U_n) є ортогональним нормованим базисом в l_2. Якщо точка $x_0\in K$ має властивість

$$\inf\{|c|:x_0+CU_n\notin K\}>0 \text{ для кожного } n\in N\text{, то } x_0\in centK.$$

Доведення: Аналогічно, як раніше, можна вважати, що $x_0=0$. Покладемо $L=[0;1)\cdot K$. Згідно Твердження 4.2 , достатньо перевірити, що $L\in Z_\sigma(K)$. Нехай

$$Y_n=span\{U_i:i\le n\},\;K_n=Y_n\cap\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot K$$

Нехай $\varphi_n:K_n\to R^+$ задається так: $\varphi_n(x)=\sup\{t:x+tu_{n+1}\in K\}$.

Тоді з компактності K і того факту, що $\{u_n\}$ – утворює базис в ℓ_2 $\Rightarrow$ (5) $\lim_n \sup_{x\in K} d(x, K_n = 0)$ i $\lim_n \sup_{x\in K_n} |\varphi_n(x) = 0|$.

І тому за теоремою Дугунджі (див. ІІ, Наслідок 3.4), існують ретракції $g_n : K \to K_n$, такі що

(6) $$\lim_n \sup_{x\in K} \|g_n(x) - x\| = 0$$

Тепер, для кожного $n \in N$ ми задаємо $f_n : K \to K$ формулою

(7) $$f_n(x) = g_n(x) + \varphi_n(g_n(x)) \cdot U_{n+1}$$

Згідно (5),(6),(7), $\lim_n f_n(x) = x$, причому $f_n(x)$ рівномірно прямує до x на K. Очевидно, що для кожного

$$x \in K,\ f_n(x) \in \partial(K \cap Y_{n+1}) \subset K \setminus L$$

Тут через ∂ позначимо границі відносно Y_{n+1}. Отже згідно твердження 2.5, щоб встановити, що $L \in Z_\sigma(K)$, достатньо перевірити чи функція f_n є неперервними, а це зводиться до доведення неперервності φ_n.

Оскільки K_n i $\partial(K \cap Y_{n+1})$ є компактними та диз'юнктними, то одержимо, що:

(8) $$b_n = \inf\{\|x - y\| : x \in K_n, y \in \partial(K \cap Y_{n+1})\} > 0.$$

Нехай x, y - довільні точки з K_n, нехай M - площина, що проходить через x, y та $y + U_{n+1}$. Нехай z - точка перетину променя, що виходить з y і проходить через x, з межею $K \cap M$. Згідно (5), маємо, що $a_n = \sup_{x\in K_n} |\varphi_n(x)| < \infty$. Згідно (8), $\|x - z\| \geq b_n$. Отже, за теоремою Талеса, ми записуємо оцінку

$$|\varphi_n(y) - \varphi_n(x)| \leq \varphi_n(x) \cdot \|x - y\| / \|z - y\| \leq a_n b_n^{-1} \|x - y\|.$$

Це неперервність функцій φ_n і завершує доведення того, що L є скелетоїдом гомотетії.

Наслідок 4.1 Для кожного простору Келлера множина $centK$ є непорожньою.

Доведення: не втрачаючи загальності ми можемо вважати, що $spanK$ є всюди щільною в l_2. Нехай $\{y_n : n \in N\}$ -всюди щільна множина в K, покладемо

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} y_i$$

Оскільки K - обмежений за нормою опуклий та замкнений, то ряд ,описаний вище ,збігається і $x_0 \in K$. Покладемо $n > 1$, одержимо

$$x_0 \pm 2^{-n}(y_n - y_1) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i y_i, \quad t_1 = 2^{-1} \pm 2^{-n}, t_n = 2^{-n} \pm 2^{-n}, t_i = 2^{-i}, i \notin \{1, n\}$$

.Оскільки усі $t_i \geq 0$ і $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1$, то одержимо, що $x \pm 2^{-n}(y_n - y_1) \in K$, тобто

$$\inf\{|t| : x_o + t(y_n - y_1) \notin K\} \geq 2^{-n} > 0.$$

Оскільки $\{y_n : n \in N\}$ є всюди щільною в K і $spanK$ є всюди щільною в l_2, то ми одержимо, що $span\{y_n - y_1 : n \in N\}$ є всюди щільною в l_2. Отже, щоб закінчити доведення , достатньо довести наступну лему.

Лема 4.2 Припустимо, що K - компактна опукла підмножина в $l_2, x_0 \in K$,і множина A є множиною всіх векторів таких, що

(9) $$\inf\{|c| : x_0 + cy \notin K\} > 0$$

Тоді із умови $clspanA = l_2$ випливає , що $x_0 = centK$.

Доведення: Припустимо, що $y_1, y_2 \in A$. Тоді згідно (9) існують додатні c_1 та c_2, такі що

$$A_1 = \{c_1 y_1, -c_1 y_1, c_2 y_2, -c_2 y_2\} \subset K - x_0$$

І тому оболонка $A_1 \subset K - x_0$. Таким чином, A - лінійний простір. Отже, якщо A є всюди щільною в l_2, то використовуючи процедуру ортогоналізації Шмідта (див I, параграф сьомий), ми можемо вибрати ортонормальний базис (U_n) для l_2, що складається з векторів із A. Отже згідно Твердження 4.3 , $x_0 \in centK$. Лема доведена.

Означення 4.2. Нехай K - простір Келлера, $x_0 \in K$. Точка x_0 називається майже внутрішньою [внутрішньою] , якщо множина всіх точок $x \in K$, таких що $y = x - x_0$ задовольняє умову (9), є всюди щільною в K [є рівною K]. Множину всіх майже внутрішніх [внутрішніх] точок K позначатиме через $al\operatorname{int}K$ [через rint K] і покладемо $rbdK = K \setminus r\operatorname{int}K$. Позначення $r\operatorname{int}$ та rbd є абревіатурами від "радіальна внутрішність" та "радіальна границя".

Твердження 4.4. Маємо що $r\operatorname{int}K \subset al\operatorname{int}K \in centK$. Якщо $x_0 \in r\operatorname{int}K$, то скелетоїд гомотетії з центром x_0 є рівним $r\operatorname{int}K$, зокрема, якщо $0 \in r\operatorname{int}K, \quad r\operatorname{int}K = [0;1) \cdot K$.

Доведення: Означення $al\operatorname{int}K$ та $r\operatorname{int}K$ наведені у термінах афінної топології, тому ці твердження справджуються і при афінному гомеоморфізмі, та без втрат загальності можна вважати, що $K \subset l_2$ і $spanK$ є всюди щільною в l_2. Отже, якщо $x_0 \in al\operatorname{int}K$, то множина

$$span\{y \in K - x_0 : \text{задовольняє умову } (9)\}$$

І є всюди щільною в l_2. Тому за лемою 4.2 $x_0 \in centK$. Таким чином, $al\operatorname{int}K \subset centK$. Включення $r\operatorname{int}K \subset al\operatorname{int}K$ є очевидним.

Припустимо, що $x_0 \in r\operatorname{int}K$ і $y \in K$. Нехай x - довільна точка в K . Оскільки $x_0 \in r\operatorname{int}K$, то знайдеться таке $c > 0$, що точки $x_1 = x_0 + c(x - x_0)$ і $x_2 = x_0 + c(x - x_0)$ належать до K . Якщо точки x, x_0, y - не колінеарні, то кожна точка $z \in (x_0; y)$ міститься у внутрішності трикутника $conv\{y, x_1, x_2\}$, який повністю лежить в K . Тому:

(10) $$\inf\{|c| : z + c(x - x_0) \notin K\} > 0$$

Якщо x, x_0, y - колінеарні і $z \in (x_0; y)$, то (10) є очевидним . Таким чином, $(x_0; y) \subset r\operatorname{int} K$, тобто $L = \bigcup_{y \in K} [x_0; y) \subset r\operatorname{int} K$. З іншого боку, якщо $x_0 \in r\operatorname{int} K, x \notin L$, то $x + c(x - x_0) \notin K$ для кожного $c > 0$. Отже $r\operatorname{int} K = L$. Твердження доведено.

З останнього твердження випливає, що $r\operatorname{int} K$ є $Z(K)$- скелетоїдом і тому є всюди щільною F_σ множиною в K, а це забезпечує те, що вона є не порожня . Існують простори Келлера K з умовою $r\operatorname{int} K = \emptyset$, тобто K є множиною всіх ймовірнісних мір Бореля на інтервалі I, що вважається опуклою підмножиною Банахового простору $[C(I)]^*$. Однак, легко бачити, що коли простір Келлера K має центр симетрії, наприклад x_0, то $x_0 \in r\operatorname{int} K$.

Означення 4.3. Підмножина B простору Келлера K називається T - множиною, якщо, виконуться одна з умов:

(а) $cl\{f \in C(I^n, K) : f(I^n \subset B)\} = C(I^n, K)$ для кожного $n \in N$

(в) $cl\{f \in C(Q, K) : f(Q \subset B)\} = C(Q, K)$.

Ці умови, згідно твердження 2.1 є еквівалентними. Більше того, Якщо B є T - множиною, яка є відкритою [типу $\wp_\delta$], то $K \setminus B$ э Z - множиною.

Тепер ми встановимо деякі результати, що будуть корисними для опису топологічних просторів, гомеоморфних до простору R^N.

Теорема 4.1. Припустимо, що $x_0 \in centK, L = \bigcup_{x \in K} [x_0, x)$ та X є T - множиною типу $\wp_\delta$, що $X \subset K \setminus L$. Тоді X - гомеоморфний до R^N; більше того гомеоморфні такі пари $(K, X) \simeq (Q, P)$.

Доведення: За теоремою Келлера $K \simeq Q$. Згідно припущення $L \subset K \setminus X \in Z_{,\sigma}$(*К*) . Отже за означенням $centK$ і за теоремою 3.2 $K \setminus X$ є Z - скелетоїдом, та знайдеться такий гомеоморфізм F з K на Q, що $F(K \setminus X) = Q \setminus P$, що еквівалентне другому твердженню теореми. Теорема доведена.

Наслідок 4.2 . Якщо $r\operatorname{int} K \neq \emptyset$ і X є T - множиною типу $\wp_\delta$,така, що $X \subset rbdK$, то $(K, X) \simeq (Q, P)$, зокрема $(K, rbdK) \simeq (Q, P)$.

Доведення: Це випливає з Твердження 4.4 і теореми 4.1.

Точка $X \in K$ є екстремальною точкою, якщо із $x + y \in K$ та $x - y \in K$ випливає, що $y = 0$. Множина екстремальних точок позначатиметься через $ExtK$.

Наслідок 4.3. Якщо X є T - множиною типу $\wp_\delta$, що $X \subset ExtK$, то $(K, X) \simeq (Q, P)$.

Доведення: Нехай L - будь – який гомотетичний скелетоїд для K з центром в x_0,(x_0 існує згідно наслідку 4.1). Оскільки L є об'єднанням напіввідкритих інтервалів $[x_0, x)$, то звідси випливає, що $(L \setminus \{x_0\}) \cap ExtK = \emptyset$. Використовуючи теорему 3.2, ми робимо висновок, що $L \setminus \{x_0\}$ є Z -скелетоїдом, $K \setminus X$ є Z - скелетоїдом і $(K, X) \simeq (Q, P)$.

εZ**- скелетоїди у просторах Келлера.**

εZ

Нехай K - простір Келлера, що представлений опуклою підмножиною в l_2, і нехай $\varepsilon Z = \varepsilon Z(K)$ - клас усіх Z - множин в K, які є скінченно вимірними, тобто вкладаються в скінченно вимірні лінійні простори. Зрозуміло, що клас $\varepsilon Z(K)$ є адитивним з успадкованою компактністю і інваріантний при автогомеоморфізмі, більше того $\varepsilon Z(K) \subset Z(K)$. Тому $\varepsilon Z(K)$ є досконалим набором.(див. IV, Означення 3.2).

Твердження 5.1. Нехай (v_n) - послідовність лінійно незалежних векторів простору Келлера, $Y_n = span\{v_i : i \le n\}$ та $K_n = \lfloor 1 - 2^{-n} \rfloor \cdot K \cap Y_n,\ n = 1,2,\dots$ Крім того, припустимо, що

(1) $$clspan\{v_i : i \in N\} \supset K$$

(2) для кожного $n \in N, 0 \in \operatorname{int}(K \cap Y_n)$,тобто 0 належить внутрішності відносно Y_n.

Тоді послідовність (K_n) є εZ - скелетоном.

Доведення: Дано, що $m \in N,\ \varepsilon > 0\ i\ A \in \varepsilon Z$. Згідно компактності K, умови (1) та теореми Дугунжі (II, Наслідок 3.4) знайдеться натуральне число $j > m$ та ретракція $r : K \to K_j$ з умовою: $\sup\limits_{x \in A} \|r(x) - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, де $\|\cdot\|$- норма простору l_2. Оскільки $A \in \varepsilon Z$, то знайдеться ціле число k і гомеоморфне вкладення $g : A \to span\{v_{j+i}$: $1 \le i \le k\}$. Нехай $\rho : A \to [0;1]$ така неперервна функція, що $\rho(x) = 0$, якщо $x \in A \cap K_m$. Для кожного $c > 0, x \in A$ ми задаємо

$$f_c(x) = r(x) + c \cdot \rho(x) \cdot \left(g(x) + v_{j+k+1}\right).$$

Легко бачити, що кожне f_c є гомеоморфним вкладенням A в Y_{l+k+1}, таким що $f_c(x) = x$ при $x \in A \cap K_m$. При достатньо малому $c > 0$ маємо $f_c(A) \subset K_{j+k+1}$ і

$$\sup_{x \in A} \left\| c \cdot \rho(x) \cdot \left(g(x) + v_{j+k+1}\right) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Як тільки $\sup\limits_{x \in A} \| f_c(x) - x \| < \varepsilon$. Це зводиться до умови (1) з IV, Твердження 4.1, і завершує доведення.

Наслідок 5.1 Згідно припущення у Твердженні 5.1, множина $M = K \cap span\{v_i : i \in N\}$ є εZ - скелетоїдом в K.

Доведення: Очевидно, що $M \in (\varepsilon Z)_{\sigma}$ і $M \supset \bigcup\limits_{n \in N} K_n$. Отже, справедливість наслідку випливає з IV, Теорема 4.2.

Твердження 5.2. Нехай $\widetilde{B} = \{x \in l_2 : \|x\| \le 1\}$ - множина наділена слабкою топологією, що індукується метрикою

(3) $$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n} |x(n) - y(n)| \quad .$$

Тоді множина

$$L=\{x\in B:\|x\|=1\, i\; x(n)=0 \textit{ для всіх, але скінченної кількості } n\}$$
Є εZ - скелетоїдом в $\tilde{B}$.

Доведення: Зауважимо, що $\tilde{B}$ є простором Келлера і афінно гомеоморфна до $\left\{y\in l_2:\sum_{n=1}^{\infty}n^2|y(n)|^2\le 1\right\}$.

Очевидно, що $L\in(\varepsilon Z)_\sigma$ і $L\supset\bigcup_{n\in N}A_n$ де

$A_n=\{x\in\tilde{B};\|x\|=1, x(n+1)\ge 0, x(i)=0 \textit{ при всіх } \; i\ge n+2$.

За IV, Теорема 4.2, достатньо показати, що

(*) послідовність (A_n) є εZ - скелетоїдом в $\tilde{B}$.

Дано, що $m\in N,\varepsilon>0, A\in\varepsilon Z(\tilde{B})$. Виберемо $j>m$ так, що $2^{-j}<\frac{\varepsilon}{4}$. Нехай $r:A\to A_j$ визначається так $r(x)=y$, де

$$y(i)=\begin{cases}x(i), & i\le j;\\ \left(1-\sum_{n-1}^{1}|x(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} & i=j+1;\\ 0, & i>j+1.\end{cases}$$

Зрозуміло, що r є неперервним, більше того

(4) $\quad r(x)=x, \quad x\in A\cap A_j, \sup_{x\in A}d(r(x),x)<\frac{\varepsilon}{2}$

Остання умова випливає з (3) і факту що $2^{-j}<\frac{\varepsilon}{4}$. Властивості (4) є аналогічними до припущення (1) в IV, Твердження 4.1, окрім того, що r - просте відображення, а не вкладення. Ми виправимо відображення r, використовуючи такий же трюк, як і в Твердженні 5.1.

Починаємо з очевидної леми.

Лема 5.1. Нехай $k\in N$. Тоді існує гомеоморфне вкладення $h:A_j\times R^k\to A_{j+k+1}$, таке що

(5) $\quad h(x,0)=x$ для кожного $x\in A_j$.

Оскільки $A\in\varepsilon Z(\tilde{B})$, то існує гомеоморфне вкладення A в евклідів простір, назвемо його $g:A\to R^k$. Використовуючи k - вимірну версію теореми Тітце, побудуємо відображення $\bar{g}:A_j\to R^k$, таке що

(6) $\quad \bar{g}(x)=g(x) \quad \textit{при} \quad x\in A\cap A_j$.

Нехай h - таке відображення, як в Лемі 5.1 і нехай $n=j+k+1$. При $c>0$, задаємо функції $g_c:A_j\times R^k$, і $f_c:A\to A_n$ так

(7) $$g_c(x)=\left(r(x),c\cdot\left(g(x)-\bar{g}r(x)\right)\right);\quad f_c=hg_c$$

Використовуючи компактність A, та умову (4), одержимо, що

(8) $\sup\limits_{x\in A} d\left(f_c(x),x\right)<\varepsilon$ для достатньо малих c.

Згідно (4), (5),(6) та (7) маємо

(9) $$f_c(A)\subset A_n \ i \ f_c(x)=x \quad при \ x\in A\cap A_m$$

Згідно (8) та (9) та IV, Твердження 4.1 ми вивели (*), що завершує доведення.

Зауважимо, що коли C є Z - скелетоїдом в гільбертовому кубі Q,а також M є εZ - скелетоїдом в гільбертовому кубі Q, то M не є гомеоморфним до C. Це випливає з того факту, що $Q\setminus P$ містить нескінченно вимірні компактні підмножини , хоча M їх не містить. Наступна теорема була встановлена Р.Д. Андерсеном.

Теорема 5.1. Якщо M - εZ - скелетоїд в Q, то $Q\setminus M$ гомеоморфна простору R^N.

Доведення: Оскільки εZ - скелетоїди є інваріантними при гомеоморфізмах (IV, твердження2.1), то досить побудувати гомеоморфізм F з $\tilde{B}\setminus L$ в $P=(-1;1)^N$, де $\tilde{B}$ та L є такими як в Твердженні 5.2. Шуканий гомеоморфізм F подається формулою

$$F(x)=y \ \text{, де } y(n)=x(n)/\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}\left|x(i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad при \ n=1,2,...$$

Лекція №15. Z - множини у зліченному нескінченному добутку ліній.

Простір R^N очевидно гомеоморфний до $P-$псевдовнутрішності гільбертового куба.Тому багато топологічних фактів., що стосується гільбертового куба, мають власну інтерпретацію для простору R^N. Наступна теорема буде корисною при переносі властивостей з Z множин в Q на Z - множини в R^N.

Теорема 6.1. Нехай A - замкнена множина в Q. Тоді $A\in Z(Q)$ тоді і тільки тоді, коли $A\cap P\in Z(P)$.

Доведення: Для кожного $f\in C(Q,Q), n\in N$ відображення $n^{-1}\cdot f$ (множення розуміємо, як покоординатне) є P - значним. Отже відображення зі значенням в P є всюди щільним в $C(Q,Q)$ і тому

$$cl\{f\in C(Q,Q):\ f(Q)\subset P\setminus A\}=cl\{f\in C(Q,Q):\ f(Q)\subset Q\setminus A\}$$

Це схоже на означення 2.1 , чим і завершуємо доведення теореми.

У цьому параграфі ми використовуємо поняття з §1, що адаптовані до добутку - простору R^N. Наприклад $p_\alpha : R^N\to R^{|\alpha|}$ - відображення, що визначається умовою $p_\alpha(x)=y$, тоді і тільки тоді, коли $y(i)=x(\ \alpha(i))$ при $i\in|\alpha|$.

Множина $A \subset R^N$, називається відміченою, якщо існує послідовність (β_n) попарно диз'юнктних непорожніх підмножин N, таких що для кожного $n \in N$, $p_{\beta_n}(R^N) \setminus p_{\beta_n}(A) \neq \emptyset$.

Твердження 6.1 нехай A- замкнена непорожня множина в R^N. Тоді наступні умови є еквівалентними:

(a) $A \in Z(R^N)$;

(в) існує $F \in AuthR^N$, таке що $p_{2k}F(A) = 0$ для всіх $k \in N$;

(c) існує $G \in authR^N$ таке, що $G(A)$ - відмічена.

Доведення: із (а) випливає (в). Представимо R^N, як псевдовнутрішність P гільбертового куба. Нехай $\overline{A}$ - замикання A відносно Q. Нехай h - природній гомеоморфізм з Q в Q_{odd} ,тобто $h(x) = y, y(2_n - 1) = x(n), y(2n) = 0, \quad n \in N$. Гомеоморфізм $h|_{\overline{A}}$ має властивість $h(\overline{A} \cap P) = h(\overline{A}) \cap P$. Отже, згідно Наслідку 3.1, знайдеться таке $H \in Auth(Q, P)$, що $H|_{\overline{A}} = h|_{\overline{A}}$. Нехай $F = H|_P$. Маємо, що $F(A) = H(A) = H(\overline{A} \cap P) = h(\overline{A}) \cap P \subset Q_{odd} \cap P$.

(в) випливає (с). Нехай $G = F, \beta_n = \{2n\}$. Тоді $p_{\beta_n}(R^N) \setminus p_{\beta n}(A) = I \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

(с) випливає (а). Це випливає з Твердження 2.1,(с).

Наслідок 6.1 Якщо A є не порожньою Z - множиною в R^N та a є підмножиною в N, яка має нескінченне доповнення, то існує таке $G \in AuthR^N$, що $p_\alpha(G(A)) = \{0\}$.

Доведення: Після перепозначення координатних осей можна вважати, що $\alpha \subset \{2_n : n \in N\}$.

Наслідок 6.2 Кожна сигма – компактна підмножина в R^N (тобто множина яка є зліченним об'єднанням компактних множин) є елементом $Z_\sigma(R^N)$.

Доведення: Зауважимо, що кожна компактна множина A має властивість $p_n(A) \neq R$ при всіх n, і отже- є відміченою.

Теорема 6.2 Якщо $A, B \in Z(R^N), A \simeq B$, то кожен гомеоморфізм f між A та B має продовження $F \in AuthR^N$.

Доведення: Нехай α і β - множини всіх парних і всіх завжди додатніх цілих чисел, відповідно. Представимо R^N, як добуток $R^N = R^\alpha \times R^\beta$. Згідно наслідку 6.1 знайдуться такі G та H в $AuthR^N$, що $G(A) \subset R^\alpha \times \{0\}, H(B) \subset \{0\} \times R^\beta$. Нехай f_1 - це гомеоморфізм з $G(A)$ в $H(B)$, визначений як: $f_1(x) = H(f(G^{-1}(x)))$. Зрозуміло, що простори R^α та R^β мають властивість псевдо псевдотрансляції (див. IV, Твердження 6.1 і Приклад 6.1). Отже, згідно IV, Твердження 6.3, f_1 може бути продовжений до $F_1 \in AuthR^N$. Тепер шукане продовження F гомеоморфізму f визначається так $F = H^{-1}F_1G$. Теорема доведена.

Наступна теорема є простим наслідком Теореми 6.1.

Теорема 6.3 Якщо $A \in Z_\sigma\left(R^N\right)$, то $R^N \setminus A \simeq R^N$.

Доведення: Нехай $A = \bigcup_{n\in N} A_n$, причому $A_n \in Z\left(R^N\right)$. Розглянемо R^N як псевдо внутрішність P гільбертового кубу Q і позначимо через $\overline{A_n}$ замикання A_n відповідно Q. За теоремою 6.1 множина $C = \bigcup_{n\in N} \overline{A_n} \in Z_{,\sigma}(Q)$ Отже, за теоремою 4.2, знайдеться таке $G \in AuthQ$, що $G(C \cup (Q \setminus P)) = Q \setminus P$, тобто $G(P \setminus C) = P$. Щоб завершити доведення, ми запишемо, що $P \setminus C = P \setminus A$. Попередня теорема може бути посилена:

Теорема 6.4. Нехай M - відкрита підмножина в R^N. Підмножина $A \subset M$ є сильно незначна в просторі M тоді і тільки толі, коли $A \in Z_\sigma(M)$. Поняття сильної незначності було визначено в IV,§5.

Доведення: 1^0. Почнемо з випадку $M = R^N$. Дивлячись на R^N, як на псевдо - внутрішність P в Q і використовуючи факт, що $Q \setminus P$ є Z - скелетоїдом та за теоремою IV, 5.1, одержимо таке:

(1) якщо $A \in Z_\sigma\left(R^N\right)$, то A є сильно незначною в R^N.

2^0. Щоб довести загальний випадок, ми застосовуємо принцип локалізації Майкла до звичайної властивості $H(K)$, яка є близькою до властивості Z. Ця властивість визначається таким чином.

Припустимо, що K є замкненою множиною в R^N і L є відкритою (відносно K) підмножиною в K. Будемо вважати, що L має властивість $H(K)$, якщо знайдеться така множина U, відкрита в R^N, що $L = U \cap K$ і для кожної відкритої множини $V \subset U$ та для кожної метрики $d = D(V)$, існує таке неперервне відображення $f : V \to V$, що $f(V) \cap K = \emptyset$, і

(2) $$d\left(f(x), x\right) < 1 \text{ для всіх } x \in V.$$

Вимагаємо, щоб властивість $H(K)$, що розглядається як властивість відкритих підмножин простору K, задовольняла припущення принципу локалізації Майкла: II, Твердження4.1 . Тут ми лише покажемо, що властивість $H(K)$ є скінченно - адитивною, оскільки перевірка інших умов є очевидною.

Припустимо , що L_1 та L_2 - відкриті (відносно K) підмножини в K, $L_1 = K \cap U_1, L_2 = K \cap U_2$, де U_1, U_2 є відкритими множинами в R^N, що задовольняють властивість, встановлену в означенні $H(K)$. Нехай $U = U_1 \cup U_2$, і нехай V - довільна відкрита підмножина в U, а $d \in D(V)$. Легко бачити, що існують метрики $d_1 \in D(V \cap U_1)$, $d_2 \in D(V \cap U_2)$ причому $d_i(x, x') \le 2d(x, x')$ при $x, x' \in V \cap U_i$, $i = 1,2,\ldots$ такі що коли $f : U \cap V_i \to U \cap V_i$ є відображенням. які задовольняють умову (2), де V замінено на $U \cap V_i$, то відображення $\bar{f}_i : U \to U$ визначається так:

$$\bar{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & x \in U \cap V_i; \\ x, & x \in U \setminus V_i. \end{cases}$$

і є неперервними. Тепер, припускаючи, що $f_i, i=1,2$ - відображення, що задовольняють властивості означення $H(K)$ при $L=L_i$ та з $V\cap U_i$ замість V, ми стверджуємо, що $f=\left(\bar{f}_2\,\bar{f}_1\right)|_v$ має такі ж властивості, як $L=L_1\cup L_2$ та V. Це доводить, що властивість $H(K)$ є адитивною.
Тепер ми доведемо лему.

Лема 6.1 Нехай K - замкнена множина в R^N. Якщо K допускає покриття $\{U_c\}_{c\in C}$ відкритими підмножинами з R^N, такими, що $U_c\cap K\in Z(U_c)$ для кожного $c\in C$, то $K\in Z(R^N)$.

Доведення: Оскільки кожна точка з R^N має базу відкритих околів, гомеоморфних до R^N, то можна просто припустити, що кожен U_c є гомеоморфним до R^N. Тоді згідно (1) і припущення леми, множина $K_c=U_c\cap K$ є сильно незначною в U_c, і тому ми робимо висновок , що K_c має властивість $H(K)$. Таким чином, згідно II, Твердження 4.1, множина K має властивість $H(K)$. Отже з означення властивості $H(K)$ та з Означення 4.1 випливає, що $K\in Z(M)$. Лема доведена.

Тепер ми будемо доводити, що кожна множина $K\in Z\sigma\,(M)$ є сильно незначною в M. Справді, оскільки M є F_σ- підмножиною в R^N, то робимо висновок, що K є множиною типу F_σ, як підмножина в R^N, тобто $K=\bigcup_{n\in N}K_n$, де кожна K_n - замкнена в R^N. Кожна K_n належить до $Z(M)$, і згідно леми 6.1 одержимо $K_n\in Z(R^N)$, коли $K\in Z_\sigma(R^N)$. Тепер згідно 1^0, K є сильно незначною в R^N, а отже, K є сильно незначною в U.

3^0.Припустимо, що K є сильно незначним в M. Оскільки M - відкрита множина компактного простору R^N, а $M\setminus K\simeq M$, то робимо висновок, що $M\setminus K$ є абсолютний $\wp_\delta$ простір (I, Наслідок 3.2), і тому K є множиною типу F_σ відносно M. З іншого боку K, як незначна в M, задовольняє умову (2) з Твердження 2.1, де X замінено на M. Отже , згідно зауваження після твердження 2.2, $K\in Z_\sigma(M)$.
Ми завершимо цей параграф застосуванням груп перетворень, які запропонував Вест .
Під дією топологічної групи Γ на простір X, ми розуміємо функцію $g\to F_g$ з Γ в $AuthX$, таку, що

(3) $Fgg'=F_gF_{g'}\quad i\quad F_{g-1}=F_g^{-1}$ для кожного $g,g'\in\Gamma$ і

(4) індукована функція $(g,x)\to F_g(x)$ є неперервною на $\Gamma\times X$.

Через 1 позначимо нейтральний елемент групи Γ.
Дія $g\to F_g$ називається ефективною, якщо із $g\neq 1$ випливає, що $F_g\neq e$ і називається вільною, якщо із $g\neq 1$ випливає, що $F_g(x)\neq x$ для кожного $x\in X$.

Теорема 6.5. Якщо існує ефективна дія $g\to F_g$ групи Γ в простір R^N, то Γ допускає також і вільну дію $g\to H_g$ в R^N.

Доведення: Нехай для кожного $n \in N$, $\alpha_n = \{(2k-1)2^{n-1} : k \in N\}$. Покладемо
$Y = \{y \in R^N : множина \{p_{\alpha_n}(y) : n \in N\} є\ щільною\ в\ R^N\}$
Для кожного $g \in \Gamma$, $y \in Y$
(5) $H_g(y) = y', p_{\alpha_n}(y') = F_g(p_{\alpha_n}(y))$ для всіх $n \in N$.

Очевидно, що коли $\{x_n : n \in N\}$ є всюди щільною множиною в R^N,то множина $\{F_g(x_n) : n \in N\}$ теж є всюди щільною. Таким чином, робимо висновок, що із $y \in Y$, випливає, що $H_g(y) \in Y$, тобто $g \to H_g$ є дією групи Γ на Y.

Припустимо, що $1 \neq g \in \Gamma, y \in Y$. Оскільки вихідна дія $g \to F_g$ є ефективною, то знайдеться такий $x \in R^N$, що $F_g(x) \neq x$. Але це означає, що можна вибрати точку $p_{\alpha_n}(y)$ із всюди - щільної множини $\{p_{\alpha_n}(y) : n \in N\}$, так, щоб $F_g(p_{\alpha_{n0}}(y)) \neq p_{\alpha_{n0}}(y)$.Остання умова означає, що дія (5) є вільною.

Залишається показати, що простір Y є гомеоморфним до R^N. Нехай $\{x_m, m \in N\}$ - довільна зліченна всюди щільна множина в R^N. Очевидно що $x \in R^N \setminus Y$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться такі $k, m \in N$, що $d(p_{\alpha_n}(x), x_m) \geq \frac{1}{k}$, для всіх $n \in N$. Отже, $Y = R^N \setminus \bigcup_{k,m \in N} A_{k_m}$, де :

$A_{k_m} = \left\{ x \in R^N : d(p_{\alpha_n}(x), x_m) \geq 1/k \right.$ для всіх $n \in N$. Кожна множина A_{k_m} є замкненою. Отже, згідно Твердження 6.1 , $Y \simeq R^N$.

Стабільність Брауна – Глюка.

Нехай X - топологічний простір.

Означення 7.1 Гомеоморфізм $F \in AuthX$ називається стабільним, якщо F може бути поданий, як добуток скінченої кількості гомеоморфізмів $F = F_k \circ F_{k-1} \circ \ldots \circ F_1$, де кожен F_i є тотожнім на деякій непорожній відкритій множині $U_i \subset X$, $i \leq k$.

Метою цього параграфу буде показати, що усі гомеоморфізми гільбертового куба, а також усі гомеоморфізми простору R^N є стабільними. Почнемо з двох означень.

Означення 7.2 Множина $A \subset X$ називається стабілізуючою, якщо кожен $F \in AuthX$ з властивістю $F|_A = e|_A$ є стабільним.

Означення 7.3. Замкнена множина називається частково стиснутою, якщо існує підмножина $B \subset A$ та замкнене вкладення $h : A \times \{0\} \cup B \times [0;1] \to X$, що $h(A \times \{0\} \cup B \times [0;t))$ є відкритим в X для кожного $t \in (0;1)$ і $h(z,0) = z$ для всіх $z \in A$.

Зауваження 7.1. Поняття стабілізуючої множини і частково стиснутої множини є топологічними, а це означає, що коли A є стабілізуючою в X та f є гомеоморфізмом з X на Y, то $f(A)$ є стабілізуючою в Y.

Твердження 7.1 Кожна частково стиснута множина в топологічному просторі X є стабілізуючою.

Доведення: Нехай B та h є такими, як в означенні 7.3. Позначимо

$$V_t = h(A\times\{0\}\cup B\times[0;t)),\quad t\in(0;1)$$

Припустимо, що $F \in AuthX$, є таким, що

(1) $$F|_A = e|_A$$

Нехай $U = F^{-1}h\left(B\times\left(\frac{1}{2};1\right)\right)$. За Означенням 7.3 U є відкритою. Більше того , згідно (1) та Означення 7.3, маємо

(2) $$A\subset V_{\frac{1}{2}},\quad F(U)\subset X\setminus V_{\frac{1}{2}}$$

Визначимо допоміжний топологічний простір

(3) $$Y = [(X\setminus A)\cup B]\cup\left[A\cup\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup B_x\left(-\frac{1}{2};0\right)\right]$$

через ототожнення $b=(b,0), b\in B$, та відображення $g: X\to Y$, що визначається формулою:

(4) $$g(x)=\begin{cases} x & при \quad x\in X\setminus V_{\frac{1}{2}};\\ h(z,2t-1), & якщо\ x=h(z,t), \frac{1}{2}>t\geq\frac{1}{4},\\ (z,2t-1), & якщо\ x=h(z,t), \frac{1}{4}>t\geq 0 \end{cases}$$

Очевидно, що g є гомеоморфізмом з X в Y. Тепер задаємо $H\in AuthY$ так:

$$H(y)=\begin{cases} F(y) & при\ y\in Y\cap X,\\ y & при\quad y\in Y\setminus X.\end{cases}\qquad (5).$$

Неперервність H та H^{-1} випливає з формули (1). Нарешті покладемо

$$F_1 = g^{-1}Hg\in AuthX\ .$$

Згідно (2)-(5), маємо $F_1|_U = F|_U$ та $F_1|_{V_{\frac{1}{2}}} = e_{V_{1/2}}$. Отже $F = F_1\left(F_1^{-1}F\right)$, і першим фактором є тотожність на $V_{\frac{1}{2}}$, другим - тотожність на U. Твердження доведено.

Теорема 7.1. Нехай X є або гільбертовим кубом Q, або простором R^N. Тоді кожен $F\in AuthX$ є стабільним.

Доведення базується на наступній лемі.

Лема 7.1. Нехай X такий, як описано вище. Тоді кожна множина $A \in Z(X)$, така що $A \simeq Q$, є стабілізуюча для X.

Доведення: Згідно наслідку 3.2, простір R^N може бути представлений як $P \cup W$. Маємо, що $W \simeq Q, W$ є частково стиснутою в обидвох: і в Q і в $P \cup W$. Отже, згідно Твердження 7.1 ,W - стабілізуючим в X. Оскільки W є Z - множиною і відносно Q і відносно $P \cup W$, то звідси випливає, що за Теоремою 2.1, Твердження 2.3 та Наслідком 7.1,що кожна Z - множина в X, яка є гомеоморфною до Q, є стабілізуючою. Лема доведена.

Доведення теореми 7.1 . Нехай $F \in AuthX$ і нехай B - довільна Z - множина в X, така, що $B \simeq Q$. Оскільки в кожній відкритій множині в X існує підмножина гомеоморфна до Q, то можна вибрати Z- множину A так, що $A \simeq B \simeq Q$ і $A \cap (B \cup F(B)) = \emptyset$. Покладемо

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & x \in A, \\ F(x), & x \in B. \end{cases}$$

Використовуючи Теорему 3.3, ми одержуємо, що f_1 може бути продовжена до $F_1 \in AuthX$. Нехай $F_2 = F_1^{-1}F$. Оскільки F_1 є тотожнім на A, а F_2 є тотожнім на $F(B)$, і оскільки, згідно Твердження 7.2, множини A та $F(B)$ є стабілізуючими, то робимо висновок, що F_1 та F_2 є стабільними. Таким чином, $F = F_1F_2$ є стабільними. Теорему доведено.

Насправді, ми показати, що кожен $F \in AuthX$ є добутком 4 гомеоморфізмів, кожен з яких є тотожнім на деякій відкритій множині. Більш детальні аргументи дозволяють скоротити це число до 2.

Лекція №16. Топологічна класифікація неповних сепарабельних метричних лінійних просторів.

Згідно теоремі Андерсона-Кадеца (VI, теорема 5,2) існує тільки один топологічний тип серед сепарабельних нескінченно - вимірних повних лінійних нормованих просторів. Ми покажемо в § 2, що всі абсолютні Борелівські типи $\mathscr{F}_\alpha, 2 \leqslant \alpha < \Omega,$ мають своїх представників серед сепарабельних лінійних нормованих просторів. Тому існує принаймні $\aleph_1$ топологічно різних нескінченновимірних сепарабельних лінійних нормованих просторів.

Можна запитати, чи всі нескінченно - вимірні сепарабельні лінійні нормовані простори одного і того ж борелівського типу гомеоморфні. Однак це не так, тому що існують $\aleph_1$ нескінченно - вимірних сепарабельних предгільбертових просторів, які сигма-компактні (тобто абсолютні $\mathscr{F}_\sigma$), див. § 5. Можна очікувати, що для інших борелівських типів відповідь також негативна.

У § 3 ми покажемо, що серед сигма-компактних локально опуклих лінійних метричних просторів: (1) всі алгебраїчно - $\aleph_0$ вимірні простори - гомеоморфні, і

(2) всі такі простори, які містять нескінченно -вимірні компактні опуклі множини є гомеоморфними.

§ 1. Абсолютні борелівські класи та проективні класи метричних просторів.

Нехай X - метричний простір. Борелівські класи $\mathscr{F}_0(X)$ і $\mathscr{G}_0(X)$ складаються з усіх замкнутих і всіх відкритих підмножин з X відповідно.

Припустимо, що ξ є порядковим,і таким,що для всіх $0 \leqslant \alpha < \xi$ класи $\mathscr{F}_\alpha(X)$ і $\mathscr{G}_\alpha(X)$ визначені. Якщо ξ непарне, то $\mathscr{F}_\xi(X)$ $[\mathscr{G}_\xi(X)]$ задаються як класи усіх зліченних об'єднань (зліченних перетинів) елементів класів $\mathscr{F}_\alpha(X)$ $[\mathscr{G}_\alpha(X)]$, з $\alpha < \xi$.Якщо ξ - парне,то навпаки- $\mathscr{F}_\xi(X)$ $[\mathscr{G}_\xi(X)]$ задаються як класи усіх зліченних перетинів (зліченних об'єднань) елементів класів $\mathscr{F}_\alpha(X)$ $[\mathscr{G}_\alpha(X)]$, з $\alpha < \xi$. Граничні ординали є парними.

Елементи також називаються наборами типу $\mathscr{F}_\sigma$, $\mathscr{G}_\delta$, $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, і т. д.

Ми виділили дві серії борелівських класів: $\mathscr{F}$-серії, починаючи із замкнутих множини і $\mathscr{G}$-серії, починаючи з відкритих множин. Іноді вигідніша інша система організації борелівських класів:

Для будь-якого $1 \leqslant \alpha < \Omega$ позначимо

$$\mathscr{A}_\alpha(X) = \begin{cases} \mathscr{F}_\alpha(X) & \text{якщо } \alpha \text{ непарне,} \\ \mathscr{G}_\alpha(X) & \text{якщо } \alpha \text{ парне.} \end{cases}$$

$$\mathscr{M}_\alpha(X) = \begin{cases} \mathscr{G}_\alpha(X) & \text{якщо } \alpha \text{ непарне} \\ \mathscr{F}_\alpha(X) & \text{якщо } \alpha \text{ парне} \end{cases}$$

Визначене вище $\mathscr{A}_\alpha(X)$ називається аддитивним борелівським класом простору X, і $\mathscr{M}_\alpha(X)$ є мультиплікативний клас α.

Проективні класи $\mathscr{P}_n(X)$ $(0 \leqslant n < \omega)$ підмножин повного метричного простору X визначається наступним чином: $\mathscr{P}_0(X) = \bigcup_{0 \leqslant \alpha < \Omega} \mathscr{F}_\alpha(X)$.

Наступна $\mathscr{P}_{2k+1}(X)$ клас всіх підмножин з X, які є образами при неперервному відображенні елементів з $\mathscr{P}_{2k}(X)$. Нарешті

$$\mathscr{P}_{2k}(X) = \{A \subset X : X \setminus A \in \mathscr{P}_{2k-1}(X)\}.$$

Далі нам треба задати абсолютні борелівські класи $\mathscr{F}_\alpha, \mathscr{G}_\alpha$ для $0 \leqslant \alpha < \Omega$ і абсолютні проективні класи $\mathscr{P}_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$

Означення 1.1. Нехай $\mathscr{B}$ є одним з символів: $\mathscr{F}_\alpha, \mathscr{G}_\alpha, \mathscr{P}_n$. Тоді абсолютний клас $\mathscr{B}$ складається з усіх метричних просторів E таких, що для будь-якого метричного простору X і для кожного гомеоморфного вкладення $f\colon E \to X$, образ $f(E) \in \mathscr{B}(X)$.

Клас $\mathscr{F}_0$ складається з компактних метричних просторів. Кожний сепарабельний елемент з класу $\mathscr{F}_1$ є сигма-компактним.

За винятком декількох початкових борелівських класів, два квантори « для кожного» у наведеному вище означенні можуть бути замінені кванторами існування. Це випливає з наступної теореми.

Теорема 1.1. (Лаврентьєв [1]). *Припустимо, що X є повним метричним простір і E є підмножиною X, яка належать до одного з класів:* $\mathscr{F}_\alpha(X)$ *з умовою* $\alpha \geqslant 2$, $\mathscr{G}_\beta(X)$ *з умовою* $\beta \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n(X)$. *Тоді E, який розглядається як простір (з топологією успадкованою від X) є елементом відповідних абсолютних класів* $\mathscr{F}_\alpha, \mathscr{G}_\alpha, \mathscr{P}_n$.

Ця теорема легко доводиться за допомогою трансфінітної індукції комбінуючи теорему Лаврентьєва про продовження (I, теореми 3,2) з наступними властивостями борелівських та проективних класів:

1) Якщо $\mathscr{B}$ є одним з класів, що розглядається в теоремі, і $Y \in \mathscr{B}$, $K \in \mathscr{G}_1(Y)$, Тоді $K \in \mathscr{B}$.

2) Якщо $K \in \mathscr{P}_n(X)$, $L \in \mathscr{F}_1(X)$, тоді $K \cup L \in \mathscr{P}_n(X)$.

Для детального доведення див. Куратовський § 35, IV ▪

У наступному розділі ми будемо використовувати наступні класичні результати (Куратовський 1, § 30 і § 38).

Теорема 1.2. *Для* $0 \leqslant \alpha < \Omega,\ 0 \leqslant n < \omega$, *класи* $\mathscr{G}_\alpha(\boldsymbol{I}) \setminus \mathscr{F}_\alpha(\boldsymbol{I})$ і $\mathscr{P}_{n+1}(\boldsymbol{I}) \setminus \mathscr{P}_n(\boldsymbol{I})$ *непорожні.*

Наслідок 1.1. Для кожного $1 \leqslant \alpha < \Omega$, у нас є $\mathscr{F}_\alpha(\boldsymbol{I}) \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\beta(\boldsymbol{I}) \neq \emptyset$, $\mathscr{A}_\alpha(\boldsymbol{I}) \setminus \mathscr{M}_\alpha(\boldsymbol{I}) \neq \emptyset$, $\mathscr{A}_\alpha(\boldsymbol{I}) \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathscr{A}_\beta(\boldsymbol{I}) \neq \emptyset$.

Доведення. Відзначимо, що: $K \in \mathscr{F}_\alpha(\boldsymbol{I})$ iff $\boldsymbol{I} \setminus K \in \mathscr{G}_\alpha(\boldsymbol{I})$, $\mathscr{G}_\alpha(\boldsymbol{I}) \supset \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\beta(\boldsymbol{I})$, $\mathscr{F}_\alpha(\boldsymbol{I}) \supset \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathscr{G}_\beta(\boldsymbol{I})$, і застосувати теорему 1.2.

Лекція №17. Борелівська і проективна класифікація лінійних метричних просторів. Теореми існування Мазура і Клі.

Метою даного розділу є показати, що існують $\geqslant \aleph_1$ топологічно різних нескінченно - вимірних сепарабельних лінійних нормованих просторів, через доведення того факту , що в кожному абсолютнолму борелівському класі $\mathscr{F}_\alpha$ існує нескінченно-вимірний сепарабельний нормований простір X такий, що $X \notin \mathscr{G}_\alpha$, і отже $X \in \mathscr{F}_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathscr{F}_\beta$.

Зауважимо, що ролі $\mathscr{F}_\alpha$ і $\mathscr{G}_\alpha$ в зв’язку з вищесказаним, не можуть бути взаємозамінними. Не існує лінійного нормованого простору в класі $\mathscr{G}_0 \setminus \mathscr{F}_0$ (очевидно) і в класі і $\mathscr{G}_1 \setminus \mathscr{F}_1$ (у зв'язку з твердженням нижче).

Твердження 2.1 (Мазур-Стернбах). *Якщо X є повний лінійний метричний простір і Y є лінійним підпростором X типу* $\mathscr{G}_\delta$, *то Y замкнений в X.*

Доведення. Нехай $Y_1 = \mathrm{cl}\, Y$. Тоді Y є типу $\mathscr{G}_\delta$ в Y_1. Ми покажемо, $Y = Y_1$. Насправді , якщо $y_0 \in Y_1 \setminus Y$, то сума $Y + y_0$ буде всюди щільною $\mathscr{G}_\delta$ в Y_1 і $(Y + y_0) \cap Y = \emptyset$, що суперечить з теоремою Бера (I теорема 3.1).

Відзначимо наступний наслідок останнього твердження.

Наслідок 2.1. *Якщо X є лінійним топологічним повним метризованим простором, то кожна інваріантна метрика* d *на X повне.*

Доведення. Нехай Y - поповнення X в метриці d. Очевидно , що Y є повним лінійним метричним простором і, за наслідком I., 3.2, X має тип $\mathcal{G}_\delta$ в Y. Отже, за твердженням 2.1 , $X=Y$.

Твердження 2.2. *Нехай* X *-нескінченновимірний сепарабельний повний лінійний метричний простір і нехай* $T = [1/3; 2/3]$. *Тоді існує відображення* $f\colon T\to X$ *таке, що якщо* $t_1, \dots, t_k$ *- різні точки з T, то* $f(x_1), \dots, f(x_k)$ *- лінійно незалежні, і таке що* $\operatorname{cl}\operatorname{span} f(A) = X$ *для будь-якої нескінченної підмножини* A *із T.*

Доведення. Нехай (x_n) лінійно незалежна послідовність в X така, що $\operatorname{cl}\operatorname{span}\{x_n\colon n\in N\} = X$. Так як оболонка $\{x_i\colon 1\leqslant i\leqslant n\}$ ізоморфна до R^n (див. Ейдельхейт і Мазур [1], Бурбакі [3], розділ I, § 3), то можна виділити послідовність додатніх чисел (ε_n), що $\varepsilon_1 < 1$ і з нерівності $d\left(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i, 0\right) \leqslant \varepsilon_k$ (1) випливає $\max_{i\leqslant k}|t_i| \leqslant 1/k$ при $k = 1, 2, \dots$ де d є інваріантна повна метрика для X. Далі, для кожного n, вибираємо додатні числа ϑ_n такі, що з нерівності $|t|\leq\vartheta_n$ випливає (2) :

$$d(tx_n, 0) < \min(\varepsilon_1/2^n, \varepsilon_2/2^{n-1}, \dots, \varepsilon_n/2).$$

Покажемо, що із (1) і (2) випливає

$$(3)\qquad \text{if } |t_n| \leqslant \vartheta_n \text{ for } n\in N \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n = 0, \text{ then } t_n = 0 \text{ for all } n.$$

Насправді, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n = 0$ то із (2) для кожного $k\in N$, $\Rightarrow$

$$d\left(\sum_{n=1}^{k} t_n x_n, 0\right) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} d(t_n x_n, 0) \leqslant \varepsilon_k\cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon_k$$

і згідно (1) для всіх $n\in N$, $|t_n| \leqslant 1/k$ для $k\geq N$,тобто $t_n = 0$.

Відображення $f\colon T\to X$ можна визначити формулою

$$(4)\qquad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n y_n, \quad \text{де } y_n = \vartheta_n x_n \quad \text{для } n = 1, 2, \dots$$

Згідно (2), $\sum_{n=1}^{\infty} d(t^n y_n, 0) < \infty$ і оскільки X повне, то ми робимо висновок, що функція f визначена коректно, (бо ряди (4)-збіжні). Крім того, легко перевірити, що f - неперервна.

Тепер ми повинні встановити, що образи f - лінійно незалежні.

Припустимо, що $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ та $\sum_{j=1}^{k} a_j f(t_j) = 0,$ якщо $\sum_{j=1}^{k} |a_j| > 0$.

Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n = 0,$ де $b_n = \vartheta_n \Big(\sum_{j=1}^{k} |a_j|\Big)^{-1} \sum_{j=1}^{k} a_j t_j^n \leqslant \vartheta_n .$

Отже, згідно (3), $b_n = 0$ при $n = 1, 2, \ldots,$ і, зокрема, $\sum_{j=1}^{k} a_j t_j^n = 0 \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \ldots, k.$

Оскільки визначник Вандемонда $\operatorname{Det}(t_j^n)_{j,n=1}^{k}$ не дорівнює нулю, то ми робимо висновок, що $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0,$ ми прийшли до протиріччя.

Нарешті, ми повинні довести, що якщо A - нескінченна підмножина T, то оболонка *span* $f(A)$ - всюди щільна в X. Нехай $A \subset T$ є нескінченна, і нехай $\varepsilon > 0.$. Ми будемо доводити, що якщо (b_n) є прямуюча до нуля послідовність дійсних чисел, то існує лінійна комбінація елементів з $f(A)$, чия відстань від точки $\sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n$ менша за ε. Тепер, для кожного $t \in A,$ let $g(t)$, точка $g(t) = (t, t^2, t^3, \ldots) \in c_0,$ де c_0 є Банахів простір дійсних послідовностей, що прямують до нуля. Ми стверджувати, що *span* $g(A)$ -всюди щільна в c_0. Якщо ні, то c_0 допускає нетривіальний неперервний лінійний функціонал h такий, що $hg(t) = 0$ для всіх $t \in A,$, тобто існує ненульова дійсна послідовність $(a_n) \in l_1 = (c_0)^*$ така, що $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$ для всіх $t \in A,$. Але, звичайно, цей степеневий ряд в точці *t* не може мати нескінченно багато нулів в *T*, якщо коефіцієнти a_n дорівнюють нулю, і протиріччя показує, що *span* $g(A)$ -всюди щільна в c_0. Нехай тепер m -додатне ціле число таке, що $\sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2,$

і $0 < \delta < 1$ таке, що $2m \cdot d(ty_n, 0) < \varepsilon$ як тільки $1 \leqslant n \leqslant m$ and $|t| \leqslant \delta$. Так як оболонка *span* $g(A)$ є всюди щільною в c_0 то дійсні числа $t_1, \ldots, t_k$ в *A* і $a_1, \ldots, a_k$ такі, що дл всіх *n* сума

$$\Big|\sum_{j=1}^{k} a_j t_j^n - b_n\Big| < \delta$$

Отже:

$$d\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j f(t_j) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n, 0\Big)$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{m-1} d\bigg(\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j t_j^n - b_n\Big) y_n, 0\bigg) + \sum_{n=m}^{\infty} d\bigg(\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j t_j^n - b_n\Big) y_n, 0\bigg)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=m}^{\infty} d\bigg(\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j t_j^n - b_n\Big) \vartheta_n x_n, 0\bigg) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_1 \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon.$$

Цим завершується доведення твердження 2.2.

Тепер ми сформулюємо основний результат цього параграфа.

Теорема 2.1. *Нехай X нескінченно - вимірний сепарабельний повний лінійний метричний простір. Тоді для кожного порядкового* α *з інтервалу* $1 \leqslant \alpha < \Omega$*, існує всюди - щільний лінійний підпростір в X, який є елементом* $\mathscr{F}_\alpha$ але не є елементом $\mathscr{G}_\alpha$. Для будь-якого $n \in N$ існує всюди щільний лінійний підпростір *X* , що є елементом $\mathscr{P}_{2n-1}(X)$, але не з будь-якого нижнього проективного класу.

Доведення. Нехай $f\colon T \to X$ -відображення із твердження 2.2. Позначимо

$$K = f(T), \quad Y(A) = \operatorname{span} f(A) \quad \text{for} \quad A \subset T.$$

Операція $Y(\cdot)$ має такі властивості:

1) Якщо *A* нескінченно, то *Y (A)* всюди щільне в *X*.

2) $Y(A) \cap K = f(A)$ для кожного $A \subset T$.

3) $Y(\bigcap_{i \in N} A_i) = \bigcap_{i \in N} Y(A_i)$; якщо $A1 \subset A2 \subset \ldots$,

То $Y(\bigcup_{i \in N} A_i) = \bigcup_{i \in N} Y(A_i)$.

4) Якщо A- це замкнута підмножина *T*, то $Y(A) \in \mathscr{F}_1(X)$.

5) $A \in \mathscr{F}_\alpha(T) \Leftrightarrow Y(A) \in \mathscr{F}_\alpha(X)$.

6) $A \in \mathscr{P}_{2n-1}(T) \quad \Rightarrow \quad Y(A) \in \mathscr{P}_{2n-1}(X).$

7) $Y(A) \in \mathscr{G}_\alpha(X) \quad \Rightarrow \quad A \in \mathscr{G}_\alpha(T).$

8) $Y(A) \in \mathscr{P}_n(X) \quad \Rightarrow \quad A \in \mathscr{P}_n(X)$ при $n = 0, 1, \ldots$

Рутинна перевірка 1) - 3) надається читачеві. Якщо A замкнута підмножина T, то $Y(A) = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} C_n$, де C_n є множина всіх лінійних комбінацій з n точок з $f(A)$ з абсолютними значеннями коефіцієнтів $\leqslant n$. Так як $f(A)$ - компактно і такі ж усе C_n's, ми отримуємо $Y(A) \in \mathscr{F}_1(X)$, що доводить (4).

Імплікація "=>" (5) випливає, за трансфінітною індукцією, з (3) та (4). Зворотна імплікація безпосередньо випливає з (2) і того факту, що K -компактне.

Для доведення (6), треба замінити символ $\mathscr{P}_{2n-1}$ на $\mathscr{B}$. Нехай E є-довільний метричний простір. У нас є (Куратовський [1], § 34):

(i) якщо $A_k \in \mathscr{B}(E)$ для $k \in \boldsymbol{N}$, то $\bigcup_{k \in \boldsymbol{N}} A_k \in \mathscr{B}(E)$,

(ii) якщо $L, L' \in \mathscr{B}$, то $L \times L' \in \mathscr{B}$,

(iii) $\boldsymbol{R} \in \mathscr{B}$,

(iv) $\mathscr{B}$ включає в себе всі замкнуті підмножини з її елементів,

(v'') $\mathscr{B}$ включає в себе всі неперервні образи своїх елементів.

Припустимо, що $A \in \mathscr{B}(T)$. Тоді $Y(A) = \operatorname{span} f(A) = \bigcup_{k \in \boldsymbol{N}} F_k(\boldsymbol{R}^k \times T^k)$, де

$$F_k\big((r_1, \ldots, r_k), (t_1, \ldots, t_k)\big) = \sum_{i=1}^{k} r_i f(t_i),\ r_i \in \boldsymbol{R},\ t_i \in T.$$

Отже, за теоремою 1.1 і умови (i) - (v''), ми маємо , що $Y(A) \in \mathscr{B}(X)$.

Для доведення (6) і (7) нехай $\mathscr{B}$ представляють собою один із символів $\mathscr{F}_\alpha$ та $\mathscr{P}_n$. Тепер $\mathscr{B}$ задовольняє умову (iv) та наступну (v)- $\mathscr{B}$ містить в собі всі гомеоморфні образи своїх елементів . Припустимо, що $Y(A) \in \mathscr{B}(X)$. Тоді, за теоремою 1.1, $Y(A) \in \mathscr{B}$. Таким чином, згідно (2) і (iv), $f(A) \in B$, із умовою (v) $A \in \mathscr{B}(T)$,.

Об'єднуючи теореми 1.2 з (5), (6) і (7), (8) одержуємо перше та друге твердження з теореми 2.1.

Наслідок 2.2. *Для кожного порядкового числа α з $1 \leqslant \alpha < \Omega$, існує нескінченно-вимірний сепарабельний лінійний нормований простір, який є елементом* *абсолютного класу* $\mathscr{F}_{\alpha}$ *, але не будь-якого іншого нижчого класу. Для кожного* $n \in \boldsymbol{N}$, *існує нескінченно-вимірний сепарабельний лінійний нормований простір, яке належить абсолютному класу* $\mathscr{P}_{2n-1}$, *але неналежить до класу* $\mathscr{P}_k$ *для* $k < 2n-1$. *Таким чином, число т топологічних типів представлених лінійними нормованими просторами (навіть передгільбертовими просторами) не менше ніж* $\aleph_1$.

Доведення. Предгільбертовий простір $(l_2)_F$ всіх прямуючих до нуля послідовностей є елементом $\mathscr{F}_1 \setminus \mathscr{F}_0$. Вирази щодо інших абсолютних класів безпосередньо випливають з теорем 2,1 і 1,1.

Наслідок 2.3. *Нехай* $\mathscr{B}$ *і* $\mathscr{D}$ *класи метричних просторів, що задовольняють (i) - (v) і (iv) - (v) відповідно, і X є нескінченно вимірний сепарабельний повний лінійний метричний простір. Тоді, якщо деяка підмножина R є членом* $\mathscr{B} \setminus \mathscr{D}$,*то простір X повинен містити всюди-щільну лінійну підмножину, яка є елементом* $\mathscr{B} \setminus \mathscr{D}$.

Теорема 2.3. *Якщо X є нескінченно-вимірний сепарабельний повний лінійний метричний простір, то*

(a) для кожного порядкового числа α *з інтервалу* $1 \leqslant \alpha < \Omega$, *існує всюди щільний лінійний підпростір E простору X такий, що* $E \in \mathscr{A}_{\alpha}(X) \setminus \mathscr{M}_{\alpha}(X)$,

(b) для кожного $n \in \boldsymbol{N}$, *існує всюди щільний лінійний підпростір E простору X такий, що* $E \in \mathscr{P}_n(X) \setminus \bigcup_{k<n} \mathscr{P}_k(X)$

Лекція №18. Топологічна класифікація сигма-компактних нормованих лінійних просторів.

У цьому розділі (а також в § 5) ми будемо вивчати нескінченно-вимірні сігма-компактні локально опуклі метричні лінійні простори. Ми покажемо, що серед топологічних типів таких просторів існує мінімальний та максимальний, які може бути представлені, наприклад, $\Sigma \boldsymbol{R}$, підпростір простору $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$, що складається з усіх прямуючих до нуля послідовностей, і $(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}}$- підпростір простору $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$, що складається з обмежених послідовностей. Ці два підпростори виявилися скелетоїдні в $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ по відношенню до досконалих наборів $\mathscr{E}\mathscr{C}$ та $\mathscr{C}$ відповідно.

Для даної метрики простору *X*, через $\mathscr{C}(X)$ ми будемо позначати сімейства всіх компактних підмножин *X* , а через $\mathscr{E}\mathscr{C}(X)$ -класи всіх скінченно-вимірних компактних підмножин в *X*. Якщо простір *X* гомеоморфний до $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$,- ми будемо писати коротко: $\mathscr{C}$ і $\mathscr{E}\mathscr{C}$.

У цьому параграфі *X* буде позначати сепарабельний нескінченно-вимірний простір Фреше. Тому, якщо тільки *X* наділений топологічною структурою , ми можемо обгрунтовано припускати, що $X = \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ (див. Теорема Андерсона - Кадеца: VI, теорема 5,2).

Твердження 3.1. *Класи* $\mathscr{C}$ *і* $\mathscr{E}\mathscr{C}$, *є досконалими сімействами в просторі* $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$.

Доведення. Почнемо з класу $\mathscr{C}$. Очевидно, що $\mathscr{C}$ є спадково - компактним. Таким чином, за IV, наслідок 3.1, достатньо перевірити умови (1)-(4) з IV § 3. Очевидно, що: (1) $\mathscr{C}$ є інваріантом при автогомеоморфізмах простору $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$. Оскільки кожна компактна підмножина в $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ належить $\mathscr{C}$, то умова (2), очевидно задовольняється. Згідно V, твердження 6.1 (див. V, наслідок 6,2), маємо $\mathscr{C}(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}) \subset \mathscr{Z}(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})$. Тому, за V, теоремою 6.2, клас $\mathscr{C}$ має властивість продовження: умову (4). Нарешті , згідно V, твердження 6.1, існує $F \in \operatorname{Auth} \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ таке, що *F(A)* є підмножиною кільцевидної множини $\{x \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}} \colon x(1) = 0\}$. Таким чином,згідно IV, наслідок 3,2 (див. IV, твердження 3.3) множина *F(A)* є тонкою.

Так як $\mathscr{E}\mathscr{C}$ є інваріантом, спадкового- компактного і аддитивного підкласу з $\mathscr{C}$, ми робимо висновок, що $\mathscr{E}\mathscr{C}$ також належить до сімейства.

Твердження 3.2. *Припустимо, що X є нескінченно-вимірний сепарабельний простір Фреше і* (A_n) *є послідовність компактних опуклих підмножин в X таких, що для кожного* $n \in \boldsymbol{N}$.

(1) $$A_n = -A_n; \quad A_n + A_n \subset A_{n+1}$$

і

(2) $$\operatorname{cl} \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n = X.$$

Тоді ми одержимо:

(a) *if* $\dim A_n = \infty$ *for all* n, *then* (A_n) *is a* $\mathscr{C}$*-skeletoid in* X;
(b) *if* $\dim A_n < \infty$ *for all* n, *then* (A_n) *is an* $\mathscr{E}\mathscr{C}$*-skeletoid in* X.

Доведення. Припустимо, що d є інваріантна метрика на просторі *X*. Нехай *A* компакт в *X*, $m \in \boldsymbol{N}$, $\varepsilon > 0$. Виберемо опуклий окіл *U* точки 0 в *X* такий, що

(3) $$x - y \in 2U \text{ implies } d(x, y) < \varepsilon/4$$

У силу компактності A та умови (2), $\Rightarrow$ $\lim_n \sup_{x \in A} d(x, A_n) = 0$. $\Rightarrow$Тому існує $k > m$ таке, що

(4) $$A_k + U \supset A$$

Згідно II, наслідок 3.3, існує ретракція $r: X \to A_k$ така, що якщо $x \in A_k + U$, тоді $r(x) - x \in 2U$. Let $g = r|_A: A \to A_k$. Тоді враховуючи (3) і (4), маємо

(5) $$\sup_{x \in A} d(g(x), x) < \varepsilon/2, \quad g(x) = x \quad \text{for} \quad x \in A \cap A_m, \ g(A) \subset A_k.$$

Властивості (5) аналогічні до умови (1) із IV, твердження 4.1, яка характеризує скелетоїди, крім того, що g є просто відображення, а не вкладення. Нижче ми будемо робити відповідні корекції g .

У випадку (a) згідно V, твердження 4.1, $(A_{k+1}, A_k) \simeq (Q, Q_{\text{even}})$, і корекцію g можна зробити за допомогою V, лема 4.1 так само, як і в доведенні V, твердження 4.2.

У випадку (б). Припустимо, що $A \in \mathscr{E}\mathscr{C}$. Тоді для деякого $j \in \boldsymbol{N}$,

(6) A є гомеоморфним підмножині $\boldsymbol{R}^j$.

Згідно (2) існує $n > k$ таке, що $q = j + 1 + \dim A_k \leqslant \dim A_n$. Нехай $u_1, \ldots, u_q$ лінійно незалежні вектори в $\operatorname{span} A_n$ такі, що вектори $u_{j+2}, \ldots, u_q$, утворюють базис для оболонки $\operatorname{span} A_k$. Згідно (6) і того факту, що A- компактне, $\Rightarrow$ існує гомеоморфного вкладення

$$h: A \to \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_j\}$$

таке, що

$$h(A) \subset U \cap \tfrac{1}{4} A_n.$$

Нехай $\varphi: A \to [0; 1]$ - така функція $\varphi(x) = d(g(x), x)/(1 + d(g(x), x))$, і нехай $c > 0$ таке, що

(8) $$c u_{j+1} \in U \cap \tfrac{1}{4} A_n.$$

Нехай $f: A \to X$ - відображення, визначене за формулою

$$f(x) = g(x) + \varphi(x) \cdot (c u_{j+1} + h(x)).$$

Очевидно, $f(x) = x$, коли $g(x) = x$ (i.e. $\varphi(x) = 0$). У зв'язку із вкладом терміна $\varphi(x) \cdot (c u_{j+1} + h(x))$, відображення f є вкладенням.

Нарешті, згідно із (1), (7) і (8),

$$f(A) \subset A_k + [0;1]\cdot(\tfrac{1}{4}A_n + \tfrac{1}{4}A_n) \subset \tfrac{1}{2}A_n + \tfrac{1}{4}A_n + \tfrac{1}{4}A_n = A_n$$

а також :

$$f(x) - g(x) \in [0;1]\cdot(U+U) = U+U = 2U.$$

(Ми скористалися тимфактом, що як тільки *V* опукле, то *V* + *V* = 2*V*) звідки, згідно (3) і (5), $d(f(x), x) < \varepsilon$. Таким чином, f задовольняє умову (1) із IV, Твердження 4.1.

Надалі будемо позначати через *Y* –нескінченно-вимірний лінійний метричний простір. Простір *У* називається $\aleph_0$- вимірним, якщо він має базис Гамеля потужності $\aleph_0$, тобто існує лінійно - незалежна послідовність (y_n) векторів із *Y* таких, що опукла оболонка *span* $\{y_n : n \in \boldsymbol{N}\} = Y$. Простір *У* називається стержневим простором, якщо він є сігма-компактним і містить нескінченно-вимірну компактну опуклу множину. Ясно, що якщо *Y* - локально опуклий і $\aleph_0$-вимірний, то *Y* є сігма-компактний, але не гомеоморфний до ніякого стержневого (ядерного) простору. Остання властивість випливає з того факту, що простір Келлера не може бути виражений як зліченне об'єднання елементів $\mathscr{E}\mathscr{C}$, що є простим наслідком з теореми Бера (див. І, наслідок 3.1).

Нагадаємо, що

$$\Sigma \boldsymbol{R} = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} \{x \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}} : x(i) = 0 \text{ for } i \geqslant n\},$$

$$(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}} = \{x \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}} : \sup|x(n)| < \infty\}.$$

Основним результатом цього параграфа є наступна:

Теорема 3.1. *Припустимо, що Y є нескінченно-вимірний сігма-компактний локально опуклий лінійний метричний простір. Тоді ми маємо:*

(а) Якщо Y є стержневим (ядерним) простором, то $Y \simeq (\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}}$.

(б) якщо у $\aleph_0$*-вимірний, то* $Y \simeq \Sigma\boldsymbol{R}$.

(Гомеоморфізм в пунктах (а) і (б) може бути продовжений до поповнень даних просторів.)

(с) простір Y містить $\aleph_0$ *- вимірний підпростір і може бути ізоморфно вкладений в стержневі простори.*

Властивість (*с*) виражає той факт, що $\Sigma\boldsymbol{R}$ і $(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}}$ є мінімальний і максимальний топологічні типи некінечнно-вимірних сігма-компактних локально опуклих метричних лінійних просторів. У § 5 ми покажемо, що є принаймні $\aleph_1$ проміжних типів таких просторів.

Доведення теореми 3.1.

(а) Припустимо, що X є поповненням простору Y, $\{y_n: n \in \boldsymbol{N}\}$ є всюди щільною підмножиною Y і M –нескінченно - вимірна компактна опукла підмножина в Y. Нехай

$$A_1 = \operatorname{conv}(M \cup -M \cup \{y_1\} \cup \{-y_1\}),$$
$$A_{n+1} = \operatorname{conv}(2A_n \cup \{y_{n+1}\} \cup \{-y_{n+1}\})$$

для $n = 1, 2, \ldots$ Легко бачити, що опукла оболонка будь-якого скінченного об'єднання компактних опуклих множин - компактна. Тому (A_n) є $\mathscr{C}$- скелетоном згідно твердження 3.2 в просторі X. Ясно, що $\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n \subset Y \in \mathscr{C}_\sigma(X)$. Отже, згідно IV, теорема 4.2, Y буде $\mathscr{C}$-скелетоїдом в X. Враховуючи $Y = (\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}}, X = \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$, ми отримаємо, що $(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}}$. є $\mathscr{C}$-скелетоїдом в $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$. Отже, згідно IV, теорема 2.1, ми одержимо $(X, Y) \simeq (\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}, (\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}})$.

(б) Припустимо, що $Y = \operatorname{span}\{y_n: n \in \boldsymbol{N}\}$. Пригадаємо, що Y є підпростором свого поповнення X. Ми маємо $Y = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n$, де

$$A_n = 2^n \cdot \operatorname{conv}\{y_1, -y_1, \ldots, y_n, -y_n\} \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тому, за твердженням 3.2, простір Y є $\mathscr{E}\mathscr{C}$-скелетоїдом у просторі Фреше X. Враховуючи $Y = \Sigma\boldsymbol{R}$. $X = \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$, ми отримуємо, що $\Sigma\boldsymbol{R}$ є $\mathscr{E}\mathscr{C}$-скелетоїдом в $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$. Отже, згідно IV, теорема 2.1, ми одержимо $(X, Y) \simeq (\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}, \Sigma\boldsymbol{R})$.

(с) Нехай X поповнення простору Y, і нехай (y_n) -лінійно незалежна послідовність в Y така, що $\lim_n y_n = 0$. Нехай $M = \operatorname{cl}\operatorname{conv}\{y_n: n \in \boldsymbol{N}\}$, є замикання опуклої оболонки відносно X. Тоді M нескінченновимірних компактних опуклих підмножин простору X (див. Бурбакі [3], стор 80). Тому $\operatorname{span}\{y_n: n \in \boldsymbol{N}\} \subset Y \subset \operatorname{span}(M \cup Y)$. Простір $\operatorname{span}\{y_n: n \in \boldsymbol{N}\}$ є $\aleph_0$-вимірним і *span* $(M \cup Y)$ є ядерним простором.

Існує декілька цікавих прикладів ядерних просторів. Наприклад, підпростір Y простору $C(\boldsymbol{I})$, що складається з функцій, які задовольняють умову Гьольдера з фіксованим показником α з інтервалу $0 < \alpha \leqslant 1$ є ядерним простором; також підпростір $(l_2)_Э$ з l_2, натягнутий на компактний еліпсоїд

$$Э = \left\{x \in l_2: \sum_{n=1}^{\infty} |nx(n)|^2 \leqslant 1\right\}$$

є також ядерним простором. Ці два простори, так само як і простір $(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}}$ належать спеціальному класу так званих просто породжених ядерних просторів.

Ядерний простір Y є просто породжений, якщо існує компактн опукл і симетрична відносно нуля підмножина W простору Y, така, що $\dim W = \infty$ а також $Y = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} nW$.

Не кожний ядерний простір просто породжений. Дійсно, якщо E є довільним ядром простору, то простір $Y = \{x \in E^{\boldsymbol{N}}: x(n) = 0$ для всіх, крім скінченного числа $n.\}$ є ядерним простором, який не є просто породженим.

Просто породжені ядерні простори можна охарактеризувати в термінах замкнутих компактних операторів. Неперервний лінійний оператор $T: Z \to E$ із Банахового простору Z в лінійний метричний простір E називається замкнуто -компактним, якщо множина $\{T(z): \|z\| \leqslant 1\}$ - компактна.

Твердження 3.3. *Нескінченно - вимірний лінійний метричний простір Y є просто породженим ядерним простором , якщо і тільки якщо існує замкнуто-компактний оператор , що діє з Банахового простору на Y.*

Ми також маємо наступне

Твердження 3.4. *Якщо T - компактний лінійний оператор з рефлексивного Банахового простору в довільний лінійний метричний простір, то образ T є просто породженим ядерним простором при умові, що він є нескінченно - вимірним.*

Тепер ми покажемо, що властивість бути $\aleph_0$ - вимірним не є топологічним інваріантом навіть для лінійних нормованих просторів.

Приклад 3.1. Нехай Y – підпростір простору $C(\boldsymbol{I})$, що складається з кусково-афінних функцій. Тоді $Y \simeq \Sigma \boldsymbol{R}$,хоча Y не є $\aleph_0$- вимірним.

Доведення. Нехай для кожного $a \in (-1; 1)$, y_a позначимо вибрану функцію, що $y_a(-1) = y_a(1) = 0$, $y_a(a) = 1$, y_a афінно на кожному відрізку $[-1; a]$,$[a; 1]$. Функції x_a для $0 < a < 1$ - лінійно незалежні. Тому Y не є $\aleph_0$-вимірним.

Назвемо точку $t \in \boldsymbol{I}$ *вузлом функції* $x \in Y$, якщо завжди $|t| = 1$ або, для будь-якого $\varepsilon > 0$, функція x обмежена інтервалом $\boldsymbol{I} \cap (t-\varepsilon; t+\varepsilon)$, не є афінною. У нас є $Y = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} D_n$, де $D_n = \{x \in Y: \|x\| \leqslant n$ і відстані між вузлами x is $\geqslant 1/n\}$

Легко бачити, що кожен D_n компактний та скінченно - вимірний. Тому

$$Y \in (\mathscr{E}\mathscr{C})_\sigma(C(\boldsymbol{I})).$$

Нехай $\{t_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ -всюди щільна множина в $\boldsymbol{I}$ з $t_1 = -1, t_2 = 1$, і нехай $A_n = \{x \in Y : \|x\| \leqslant 2^n$ і x не має вузлів, крім $t_1, \ldots, t_{n+1}\}$.

Тоді за твердженням 3.2, (A_n) є $\mathscr{E}\mathscr{C}$-скелетоном у просторі $C(\boldsymbol{I})$. Оскільки $\bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{N}} A_n \subset Y \in (\mathscr{E}\mathscr{C})_\sigma$, ми робимо висновок, (з використанням IV, теорема 4,2), що *Y* є $\mathscr{E}\mathscr{C}$-скелетоїдом у $C(\boldsymbol{I})$ і тому $Y \simeq \Sigma\boldsymbol{R}$.

Теореми 3.2. Кожен $\mathscr{L}$-скелетоїд в кубі *Q* гомеоморфний простору $(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}}$ і будь-який $\mathscr{E}\mathscr{C}'$-скелетоїд в кубі *Q* гомеоморфний $\Sigma\boldsymbol{R}$.

Доведення. Нехай $f : \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}} \to P$ функція, задана як $f(x) = y$, де $y(n) = x(n)/(1 + |x(n)|)$ при $n = 1, 2, \ldots$ Ясно, що f є гомеоморфізмом і f відображає $(\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}}$ на $\mathscr{L}$-скелетоїд *r* int *Q* (див. V, теорема 3,2).

Очевидно, *Q* є гомеоморфним до простору Келлера.

$$K = \{x \in l_2 : |x(n)| \leqslant 1/n \text{ for each } n\}.$$

Нехай v_n є одиничний вектор в l_2 і нехай $Y_n = \operatorname{span}\{v_i : i \leqslant n\}$ для $n \in \boldsymbol{N}$. Легко бачити, що відображення $g : \Sigma\boldsymbol{R} \to K$, яке задається формулою $g(x) = y$, де $y(n) = x(n)/(n + n|x(n)|)$ при $n = 1, 2, \ldots,$ є гомеоморфним вкладенням. У нас є $g(\Sigma\boldsymbol{R}) = \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{N}} (1 - 2^{-n}) \cdot K \cap Y_n$, які згідно V, твердження 5,1 є $\mathscr{E}\mathscr{L}$-скелетоїдом в *K*.

Для завершення доведення застосуємо IV, теорему 2.1 про еквівалентність скелетоїдів.

Наслідок 3.1. *Гільбертовий куб Q можна представити у вигляді об'єднання двох неперетинних його підмножин, кожна з яких гомеоморфна лінійному нормованому простору. Більше того , існують принаймні два нееквівалентні такі розклади.*

Доведення. У нас є $Q = P \cup (Q \setminus P)$ і $Q = (Q \setminus C) \cup C$, де *C* є довільним $\mathscr{E}\mathscr{L}$- скелетоїдом в *Q*, наприклад, $C = Q \cap \operatorname{span}\{v_n : n \in \boldsymbol{N}\}$.

Використовуючи V, теореми 3.2 і 5.1, VI, теорему 2.1 і теореми 3.1, 3.2 в цьому розділі, ми отримаємо:

$$Q \setminus C \simeq P \simeq \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}} \simeq l_2, \quad Q \setminus P \simeq \operatorname{rint} Q \simeq (\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})_{\mathrm{bd}} \simeq (l_2)_Э$$

і

$$C \simeq \Sigma\boldsymbol{R} \simeq l_2 \cap \operatorname{span}\{v_n : n \in \boldsymbol{N}\}.$$

Ми повинні спочатку визначити поняття нескінченного слабкого добутку. Візьмемо відмічений топологічний простір, тобто пару (X, x_0), що складається із топологічного простору X і його елемента x_0 ,який називається базовою точкою. Слабкий добуток $\aleph_0$ копій просторів (X, x_0) є відмічений простір $\Sigma(X, x_0) = (Y, y_0)$, де $Y = \{y \in X^N : y(n) = x_0$ для всіх, крім скінченного числа індексів $n\}$, і $y_0 = (x_0, x_0, \dots) \in Y$. Топологія нап просторі Y є та, що успадкована від X^N.

У випадку, коли X є підмножиною лінійного топологічного простору , що містить нуль (зокрема, інтервал дійсної прямої, що містять 0), ми автоматично вважаємо, що базова точка дорівнює нулю, і ми будемо писати коротко ΣX замість $\Sigma(X, 0)$.

Ми будемо розглядати наступні сепарабельні нескінченно - вимірні локально опуклі метричні лінійні простори:

X - простір Фреше,

X_0 - $\aleph_0$-вимірний - простір,

X_c - ядерний простір,

$X_m = X \times X_c$.

Ми будемо також розглядати інтервалами: $\boldsymbol{I} = [-1; 1]$, $[0; 1)$, $(-\infty; \infty) = \boldsymbol{R}$;, з гільбертовим кубом $Q = \boldsymbol{I}^N$ та з добутком просторів:

$$Q^+ = Q \times [0; 1), \quad Q_* = Q \times \boldsymbol{R}.$$

Твердження 4.1. Простори: X, X_0, X_c, X_m, $\boldsymbol{I}$, $[0; 1)$, $\boldsymbol{R}$, Q, Q^+ та Q_* перераховані вище представляють різні топологічні типи.

Доведення. Серед просторів, перерахованих у твердженні локально компактними є $\boldsymbol{I}$, $[0; 1)$, $\boldsymbol{R}$, Q, Q^+, Q_*; вони були диференційовані в III, теорема 7.1. Серед інших просторів X є тільки абсолютні $\mathscr{G}_\delta$ і X_c, X_0 є тільки сигма-компактними просторами. X_c , який містить підмножини гомеоморфні до куба Q, не може бути виражений у вигляді зліченного об'єднання скінченно - вимірних компактів, доки X_0 є таким об'єднанням. |

Твердження 4.2. З вищенаведених позначень, ми маємо:

(a) $$X_c \times X_c \simeq X_c, \quad X_c \times X_0 \simeq X_c, \quad \Sigma X_c \simeq X_c;$$

(b) $$X_0 \times X_0 \simeq X_0, \quad \Sigma X_0 \simeq X_0;$$

(c) якщо Y являє собою однин з просторів: X, X_0, X_c, X_m і $\boldsymbol{J}$ представляє один з інтервалів: $\boldsymbol{I}$, $[0; 1)$, $(-1; 1)$, то $Y \times \boldsymbol{J} \simeq Y$.

Доведення. Ясно, що всі простори, що входять в (а) є ядерними просторами і всі простори в (б) є $\aleph_0$- вимірними. Тому твердження (а) і (б) випливає з теореми 3.1. Випадок (с) з $Y = X$ був описаний в VI, теорема 6.1.

Тепер ми доведемо (с) при $Y = X_0$. Простір X_0 можна розглядати як всюди щільну $\aleph_0$-вимірну підмножину простору Фреше X. Нехай (K_n) є $\mathscr{EC}$-скелетон у просторі X, об'єднання яких $= X_0$. Нехай $J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \dots$ є послідовність замкнутих інтервалів, таких, що $\bigcup_{n \in N} J_n = J$. Задаємо $A_n = J_n \times K_n$ for $n = 1, 2, \dots$ Легко перевірити, що послідовність (A_n) є $\mathscr{EC}$-скелетонами у просторі $J \times X$. Тому, користуючись тим, що $J \times X \simeq X$ і теоремою 3.2, ми робимо висновок, що $J \times X_0 = \bigcup_{n \in N} J_n \times K_n \simeq X_0$.

Тепер твердження (а) дає $X_c \times J \simeq X_c \times X_0 \times J \simeq X_c \times X_0 \simeq X_c$,

і за визначенням X_m, ми отримаємо

$$X_m \times J \simeq X \times X_0 \times J \simeq X \times X_0 \simeq X_m.$$

Для доведення наступного твердження ми будемо використовувати деякі спеціальні $\mathscr{EZ}$-скелетоїди в Q.

Лема 4.1. Послідовності (K_n), (L_n), (M_n) є $\mathscr{EZ}$-скелетонами в Q,

де

$$K_n = \{x \in Q : x(i) = -1 \ for \ i > n\}, \qquad L_n = \{x \in Q : x(i) = 0 \ for \ i > n\},$$
$$M_n = [-1; 1)^N \cap K_n \quad for \quad n = 1, 2, \dots$$

Доведення. Аргумент похожий до такого як в V, твердження 5.1, і є однаковим для всіх трьох послідовностей множин. Нехай (A_n)бути одна із цих послідовностей, і нехай буде задано: множина $A \in \mathscr{EZ}$, $\varepsilon \in (0; 1)$ and $m \in N$.

Застосовуючи II, наслідок 3.4, ми побудуємо відображення $r: A \to A_j$ для деякого $j > m$ такого , що

$$r(x) = x \quad \text{for} \quad x \in A \cap A_m \quad \text{and} \quad \sup_{x \in A} d\big(r(x), x\big) < \varepsilon/2.$$

Так як $A \in \mathscr{EZ}$, то існує вкладення, наприклад $g: A \to [0; 1]^k$ з умовою $k < \infty$. Нехай $g(x) = \big(g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)\big)$, і нехай $\lambda: A \to [0; \varepsilon/2]$

відображення таке, що $\lambda^{-1}(0) = A \cap A_m$. Ми задаємо $h\colon A \to A_{j+k+2}$ формулою

$$h(x) = r(x) + \lambda(x) \cdot \left(v_{j+1} + \sum_{i=1}^{k} g_i(x) \cdot v_{j+i+1} \right)$$

(нагадаємо, що v_i це i – й одиничний вектор в Q).

Легко побачити, що $h(x)$ задовольняє умові (1) з IV, твердження 4.1, яке характеризує скелетони.

Надалі ми будемо використовувати позначення, введені на початку цієї лекції і наступне:

$\Sigma^* I = \{x \in Q\colon x(i) = -1$ для всіх, окрім скінченного числа значень $i\}$,

Слабкий добуток інтервалів I з базовою точкою - 1; та простір $X_M = X_0^N$.

Твердження 4.3. У нас є

(a) $$\Sigma I \simeq \Sigma^* I \simeq \Sigma[0;1) \simeq \Sigma R \simeq X_0;$$

(b) $$\Sigma Q \simeq Q \times X_0 \simeq Q \times X_c \simeq X_c;$$

(c) $$X^N \simeq Q \times X \simeq X; \quad X \times X_c \simeq X \times X_0 \simeq X_m;$$

(d) $$X_0^N \simeq X_c^N \simeq X_m^N.$$

Доведення. Нехай (L_n), (K_n) і (M_n) скелетонами із леми 4.1. Очевидно, $\Sigma I = \bigcup_{n \in N} L_n$, $\Sigma^* I = \bigcup_{n \in N} K_n$ а також $\Sigma[0;1) \simeq \Sigma(I, -1) = \bigcup_{n \in N} M_n$; тобто, за лемою 4.1, ΣI, $\Sigma^* I$ і $\Sigma(I, -1)$, що розглядається як підмножини Q, є $\mathscr{E}\mathscr{X}$-скелетоїдами. Тому, згідно теорем 3.2 і 3.1, отримаємо твердження (а).

Для дослідження другої серії гомеоморфізмів, покладемо для n = 1,2, ...

$$A_n = \{x = (x(i)) \in Q^N\colon x(i) = 0 \text{ for } i > n\},$$

$$D_n = (1 - 1/n) \cdot Q, \quad C_n = Q \times D_n, \quad E_n = Q \times (1 - 1/n) L_n,$$

де (M_n) є скелетон з леми 4.1. Згідно V, твердження 3.1, послідовність (D_n) є $\mathscr{X}$-скелетоном в Q. Ясно, що (A_n) є $\mathscr{X}$-скелетоном в Q^N, і (C_n) і (E_n) є $\mathscr{X}$-скелетонами в $Q \times Q$. Так як простори Q, $Q \times Q$ і Q^N - попарно гомеоморфні між собою, потрібний результат випливає з Теореми 3.2 і 3.1 і з відношень:

$$\Sigma Q \simeq \bigcup_{n \in N} A_n, \quad Q \times X_0 \simeq \bigcup_{n \in N} E_n, \quad Q \times X_c \simeq \bigcup_{n \in N} C_n.$$

За твердженням 4.2 і розділу VI, теорема 5.2, ми маємо

$$X^{\boldsymbol{N}} \simeq (\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})^{\boldsymbol{N}} \simeq \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}} \simeq X; \qquad X \simeq \boldsymbol{I} \times X \simeq (\boldsymbol{I} \times X)^{\boldsymbol{N}} \simeq Q \times X^{\boldsymbol{N}} \simeq Q \times X;$$

$$X \times X_c \simeq X \times Q \times X_c \simeq X \times Q \times X_0 \simeq X \times X_0,$$

що є твердженням (c).

Нарешті, за твердженням 4.2 і VI, теоремою 5.2, ми одержимо:

$$X_0^{\boldsymbol{N}} \simeq (X_0 \times \boldsymbol{R})^{\boldsymbol{N}} \simeq (X_0 \times \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}})^{\boldsymbol{N}} \simeq (X_0 \times X)^{\boldsymbol{N}}$$

і аналогічно

$$X_c^{\boldsymbol{N}} \simeq (X_c \times \boldsymbol{R})^{\boldsymbol{N}} \simeq (X_c \times X)^{\boldsymbol{N}}.$$

Отже, згідно пункту (c) цього твердження , ми отримуємо (d).

Використання скелетів, що відповідають певним підгрупам групи $\mathrm{Auth}Q$ і відповідного набору множин можна показати, що

(1) $$\Sigma X \simeq \Sigma X_m \simeq X_m.$$

Для доведення див. Торунчика [5].

Результати, що стосуються декартових добутків і "дії" функторів Σ і $(\cdot)^{\boldsymbol{N}}$,що встановлені у твердженнях 4.2 і 4.3 і в формулі (1) наведемо в таблицях нижче.

	X_0	X_c	X	X_m	Q	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{R}$	$[0;1)$
X_0	X_0	X_c	X_m	X_m	X_c	X_0	X_0	X_0
X_c	X_c	X_c	X_m	X_m	X_c	X_c	X_c	X_c
X	X_m	X_m	X	X_m	X	X	X	X
X_m	X_m	X_m	X_m	X_m	X_m	X_m	X_m	X_m
Q	X_c	X_c	X	X_m	Q	Q	Q_*	Q^+

	X_0	X_c	X	X_m	Q	$\boldsymbol{I}$, $[0;1]$	$[0;1)$, $[-1;1)$, $\boldsymbol{R}$
Σ	X_0	X_c	X_m	X_m	X_c	X_0	X_0
$(\cdot)^{\boldsymbol{N}}$	X_M	X_M	X	X_M	Q	Q	X

Щоб довести, що $[0;1)^{\boldsymbol{N}} \simeq \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$, зауважимо , що $[0;1)^2 \simeq \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}$ і застосуємо VI, теорему 6.1.

Мета подальшого викладу полягає в доведенні наступних результатів Д.В. Хендерсона та А. Пелчинського:

Теорема 5.1. ***Існує незліченна кількість гомеоморфних різних нескінченно - вимірних сігма-компактних лінійних нормованих просторів***.

Щоб диференціювати топологічні типи сігма-компактних просторів ми будемо використовувати звичайний інваріант ,пов'язаний з трансфінітною розмірністю. Трансфінітна розмірність топологічного простору є прямим узагальненням малої індуктивної розмірності Урисона і визначається наступним чином:

Означення 5.1. Нехай $\mathscr{D}_{-1}$ є клас топологічних просторів, що складаються тільки з порожньої множини. Для будь-якого порядкового ξ, нехай $\mathscr{D}_\xi$ складається з тих просторів що мають базою топології кожну з тих множин, чиї границі (вважається простір з відносною топологією) знаходяться в $\bigcup_{\alpha<\xi} \mathscr{D}_\alpha$. Трансфінітна розмірність простору *X* є найменшим порядковим числом ξ (якщо такі існують) такі, що $X \in \mathscr{D}_\xi$. Трансфінітної розмірності *X* будуть позначатися через $\operatorname{ind} X$.

Концепція трансфінітної розмірності була введена Гуревичем та Уоллменом [1], однак перше систематичне вивчення їх властивостей було зроблено Тоулміном [1].

Нагадаємо, що для кожного порядкового числа ξ, символ $[\xi]$ позначає порядок інтервалу $\{\alpha : 1 \leqslant \alpha < \xi\}$. Зокрема $[\Omega]$ позначає множину всіх зліченних ординалів.

Твердження 5.1. *У нас є наступні справедливі висловлення:*

(а) Якщо $Y \subset X$ *і* $\operatorname{ind} X$ *існує, то існує* $\operatorname{ind} Y$ *і більше того,* $\operatorname{ind} Y \leqslant \operatorname{ind} X$

(б) Існує функція $k : [\Omega] \to [\Omega]$ *,така що для кожного* $n \in \boldsymbol{N}$*, якщо* $\operatorname{ind} X_i \leqslant \alpha$ *для* $i = 1, \ldots, n,$ *, то* $\operatorname{ind}(X_1 \times \ldots \times X_n) \leqslant k(\alpha)$.

(с) для кожного $\alpha \leqslant \Omega,$ *існує компактний метричний простір A з* $\operatorname{ind} A \leqslant \alpha + 1$*, що A не може бути виражена у вигляді зліченного об'єднання його замкнених підмножин, що мають трансфінітні розмірності менші, ніж* α.

Пункт (а) цього твердження установлений явно, як в теоремі 2.13 в Тоулміна [1]; (б) є прямим наслідком з теореми 2.32 з даної роботи. Нарешті (с) отримано Левшенком [1], теорема 4.

У доведенні теореми 5.1 ми будемо використовувати аргументи В. Клі , що включають перерізи декартових добутків - § 2, вправи А і В.

Нехай X-метричний простір. Під перерізом добутку в просторі X^n ми маємо на увазі множину $C \subset X^n$, таку, що якщо $(x_1, \ldots, x_n) \in C$, то точки x_i всі різні, і таку, що кожного разу, коли $y_1, \ldots, y_n$ є n різних точок простору X, то існує рівно одна перестановка $z_1, \ldots, z_n$ точок y_i, для яких $(z_1, \ldots, z_n) \in C$. Ми будемо використовувати наступну лему.

Лема 5.1. Нехай A компактний метричний простір. Тоді кожен добуток просторів A^n $(n \in \boldsymbol{N})$ допускає перетин C_n який сигма-компактний.

Доведення. Застосувати підказку до § 2, вправа А.

Позначимо через $\mathscr{X}$ клас лінійних нормованих просторів, які є зліченними об' єднаннями компактних підмножин, що мають зліченну трансфінітну розмірність.

Для кожного $X \in \mathscr{X}$, нехай $\gamma(X)$ нижня межа ординалів α така, що X є зліченне об'єднання своїх компактних підмножин з трансфінітною розмірністю $< \alpha$.

Твердження 5.2. Для будь-якого компактного метричного простору A з $\operatorname{ind} A < \Omega$, існує лінійний нормований простір $X_A \in \mathscr{X}$,що містять ізометричний до простору А.

Доведення. За теоремою Аренса-Іллса (ІІ, наслідок 1.1), існує лінійний нормований простір Y ,що містить ізометричний до простору А як лінійно незалежну замкнену підмножину. Задаємо $X_A = \operatorname{span} A$.

Нехай $T_n\colon A^n \times \boldsymbol{R}^n \to X_A$ - відображення , яке задане формулою $T_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$.

Нехай C_n є сигма-компактний переріз множини A^n (лема 5,1), і скажемо $C_n = \bigcup_{j \in \boldsymbol{N}} C_{nj}$ де множини C_{nj} - компактні. Нехай L_n буде множиною всіх $(t_1, \ldots, t_n) \in \boldsymbol{R}^n$, для яких не існує t_i, яке дорівнює нулю. Очевидно L_n є сігма-компактним, і скажемо $L_n = \bigcup_{i \in \boldsymbol{N}} L_{ni}$, де L_n компактні. У нас є наступне:

$$(1) \quad X_A = \bigcup_n T_n(A^n \times \boldsymbol{R}^n) = \{0\} \cup \bigcup_n T_n(C_n \times L_n) = \{0\} \cup \bigcup_{n,i,j} T_n(C_{nj} \times L_{ni})$$

і за твердженням 5.1, (а), (б),

$$(2) \qquad \operatorname{ind}(C_{nj} \times L_{ni}) \leqslant k(\operatorname{ind} A).$$

З лінійної незалежності A випливає, що кожне обмеження $T_n|_{C_n \times L_n}$ є взаємно-однозначним, а так як набори $C_{nj} \times L_{ni}$ компактні, ми робимо висновок,що кожен $T_n|_{C_{nj}\times L_{ni}}$. є гомеоморфізмом. Таким чином

$\operatorname{ind} T_n(C_{nj}\times L_{ni}) \leqslant k(\operatorname{ind} A)$ (згілно (2)). Тому, згідно (1),

$\gamma(X_A) \leqslant k(\operatorname{ind} A) < \Omega,$ i.e. $X_A \in \mathscr{X}.$

Доведення теореми 5.1. Звичайно, достатньо показати, що множина $\{\gamma(X): X\in\mathscr{X}\}$ незлічення. Припустимо, що це не так. Тоді $a = \sup\limits_{X\in\mathscr{X}} \gamma(X)+1 < \Omega$. Отже, згідно твердження 5.1, (с), існує компактний метричний простір *A*, що має злічену трансфінітну розмірність $\leqslant a+1$, який не може бути виражений у вигляді зліченного об'єднання компактних підмножин, що мають розмірність меншу ніж a. Тому простір X_A із твердження 5.2 містить *A* , що має властивість $\gamma(X_A) \geqslant a > \sup\limits_{X\in\mathscr{X}} \gamma(X)$, а це суперечить з $X_A \in \mathscr{X}.$

Теорема 5.1. доведена, чим і завершується остання лекція.

Список літератури.

[1] .Cz.Bessaga and A.Pelczynski. Selected Topics of infinite-dimensional topology. PWN. Warszawa.1975.
[2]. Т. Чепмэн Лекции о Q- многообразиях. – М., Мир, 1981.
[3]. Александров П.С., Пасынков Б.Т. Введение в теорию размерности. М. Наука. 1982.