Міністерство освіти, науки, молоді і спорту України

Прикарпатський університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики,

Кафедра алгебри та геометрії

Конспект лекцій до спецкурсу «Теорія ретрактів » для студентів спеціальності « Математика » , спеціалізація «Геометрія і топологія»

Підготував

доцент Атаманюк Богдан Васильович

Затверджено протоколом засідання кафедри алгебри та геометрії № 2 від 17.10.2011 р.

Рецензенти: д.ф.-м.н. Загороднюк А.В., к.ф.-м.н. Никифорчин О.Р.

Івано-Франківськ -2011-

Зміст

<u>ЛЕКЦІЯ №1. Ретракти та їх властивості.</u>

В цьому вступному розділі ми введемо поняття ретрактів та розглянемо їх властивості. В наступних розділах будемо розглядати поняття деформаційних і околових ретрактів та їх властивості.

§1. Ретракти.

Будемо називати топологічний простір просто простором, а неперервну дійснозначну функцію $f\colon X \to Y$ будемо називати *відображенням*.

Простір X називається *областю допустимих значень* f, а $f(X)$- *образом*. Y – називатимемо *полігоном* для f.

Розглянемо $f\colon X \to Y$ і підпростір A допустимої області X.

Якщо задати відображення $g\colon A \to Y$ формулою:

$$g(x)= f(x)$$

для будь-яких x із A, то таке відображення називається *звуженням* f на A і позначимо:

$$g=f|A.$$

З іншої сторони, дане відображення A називається *продовженням відображення* g над X. Якщо відображення

$$h\colon A \subset X,$$

то ми називаємо його *відображенням вкладення* ,якщо

$$h(a)=a \in X$$

для довільного a із A.

Іншими словами, звуження $g= f|A$ дає комутативність наступної діаграми $f\circ h=g$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Проблема продовження пов'язана з природою даного відображення $g:A\to Y$ заданого на даному підпросторі A даного простору X, яке має продовження до X. Зокрема, якщо $Y=A$ і g є тотожнім відображенням на A, то ми отримаємо важливий особливий випадок проблеми продовження, який називаємо *проблемою ретракції*.

Якщо тотожнє відображення має продовження $r:X\to A$, то A називається *ретрактом* X. Відображення r називається *ретракцією* X на A і ми будемо записувати $r:X\to A$.

Іншими словами ретракцією X на A є таке відображення r із $X\to A$ таке, що $r(a)=a$ для a із A.

Підпростір А простору X називається *ретрактом* X у випадку, якщо існує ретракт $r:X\to A$. Як сур'єктивне відображення кожна ретракція зберігає компактність, зв'язність та лінійну зв'язність. Далі в цьому розділі ми будемо наводити приклади ретрактів.

Ясно, що тотожнє відображення простору X самого на себе буде ретракцією. Тому X є ретракцією самого на себе.

З іншої сторони, якщо підпростір A простору X складається з однієї точки, то постійне відображення X в A є ретракцією. Тому кожний одноточковий підпростір простору *X* є ретрактом *X.* Такі одноточкові ретракції будуть називатися *тривіальними ретракціями*.

Як приклад тривіальних ретрактів розглянемо сферу розмірності *n-1*, яка обмежує кулю розмірності *n* в *n*-мірному евклідовому просторі E^n. Через *X* позначимо простір, одержаний вирізанням з кулі B^n деякої внутрішньої точки, наприклад, центру кулі.

Тоді сфера S^{n-1} буде ретракцією кулі з вирізаним центром, яку ми позначимо через *X.*

Насправді, ретракт $r: X \supset S^{n-1}$ заданий формулою:

$$r(x)=\left(\frac{x_1}{|x|},\ldots,\frac{x_n}{|x|}\right)$$

для кожної точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in X$, де через $|x|$ позначимо відстань між 0 та *X*. Надалі, ми будемо доводити, що сфера S^{n-1} не є ретрактором кулі B^n.

В якості другого прикладу нетривіального ретракту розглянемо

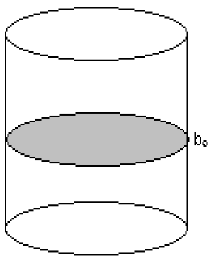
$$X = A \times B$$

добуток двох непорожніх просторів *A* і *B*. Зафіксуємо базисну точку b_0 із *B*. Тоді простір *A* можна розглядати як підпростір добутку *X* в сенсі вкладення $h: A \to X$, яке задане формулою:

$$h(a)=(a,b_0)$$

для довільного $a \in A$.

Насправді, ми розглядаємо простір *A* як переріз топологічного добутку, що проходить через точку b_0 (мал.1).



мал.1

Ясно, що природня проекція топологічного добутку X на співмножник A задає ретракцію $X \times A$, зокрема кожний меридіан тора $T= S \times S$ є ретрактом самого тора.

Зауважимо, що таке відображення буде розривним, тому тор ми можемо ототожнити з циліндром Z без верхньої основи $Z=S \times [0,1]$.

§2. Склеєні простори.

Подаємо означення склеювання по відображенні $g:A \to Y$ наступним чином: якщо A замкнутий підпростір простору X і $g:A \to Y$, то розглянемо топологічну суму $W=X+Y= X \cup Y$ просторів X і Y.

За означенням W – це є диз'юнктне об'єднання двох множин X і Y з наступною топологією. Множина U в W вважають відкритою в тому разі, коли перетин $U \cap X$ є відкритою множиною в X, а перетин $U \cap Y$ є відкритою множиною в Y.

Далі будемо ототожнювати кожну точку $x \in A$ з своїм образом $g(x)$ в просторі Y. Тоді фактор-простір Z одержаний з W таким топологічним ототожнюванням назвемо склеєним простором одержаним склеюванням X та Y по заданому відображенні $g:A \to Y.$ Нехай через $p:W \to Z$ ми позначимо природню проекцію W на свій фактор-простір.

Звідси легко видно, що звуження p *на* X буде вкладенням. В контексті такого вкладення простір Y буде розглядатися як замкнутий підпростір в $Z.$ Ясно, що $Y=Z$ тоді, і тільки тоді, коли $A=X.$

Тепер позначимо через p деяку топологічну властивість просторів. Ми скажемо, що склеєний простір Z зберігає властивість p тоді і тільки тоді, коли Z має властивість p разом із обома просторами X та Y, *тобто* коли вони мають цю властивість p одночасно.

Твердження 2.1.

Склеєний простір Z зберігає властивість бути T_1 простором.

Доведення.

Нехай z буде довільною точкою із простору Z. Якщо $z \epsilon Y$, то z є замкнутою точкою в Y, оскільки Y є T_1 простором. Так як Y є замкнутим в Z, то звідси випливає, що z є також замкнутою множиною в Z. Якщо $z \notin Y$, тоді зворотній образ природнього проектування $p:W \rightarrow Z$ є деяка одноточкова множина в $x \backslash A$ і вона є замкнутою множиною в X, а значить, і в W. Оскільки на z розглядається топологія ототожнення, то z буде замкнутою в Z. Твердження доведене.

Твердження 2.2.

Склеюваний простір Z не завжди зберігає наступні властивості:

1) бути хаусдорфовим простором;
2) бути регулярним простором;
3) бути цілком регулярним простором.

Доведення.

Нехай X топологічний простір, який не є нормальним, а Y – це замкнутий одиничний інтервал дійсних чисел $I=[0,1]$. Тоді обидва простори X та Y мають кожну з вище названих властивостей (1)-(3).

Оскільки простір X не є нормальним, то існують дві диз'юнктні замкнуті множини B і C даного простору X, які не мають диз'юнктних околів. Розглянемо замкнутий простір $A=B \cup C$ простору X та відображення $g(x): A \rightarrow Y$, яке задано наступною формулою:

$$g(x) = \begin{cases} 0, x \in B \\ 1, x \in C \end{cases}$$

Ми будемо доводити, що склеєний простір *Z*, який одержаний склеюванням *X* та *Y* по відображенню *g* не є хаусдорфовим. Припустимо від супротивного. Нехай *Z* -хаусдорфовий. Оскільки 0 і 1 дві різні точки в *Z*, то існують дві диз'юнктні непорожні відкриті множини *U* і *V* такі, що $0 \in U$ $1 \in V$. Використовуючи природнє проектування *p* в *W*, ми отримаємо дві диз'юнктні відкриті множини: $p^{-1}(U) \cap X$, $p^{-1}(V) \cap X$ простору *X*, які містять відповідно множини *B* і *C*. Ця умова приводить до протиріччя, яке доводить, що *Z* не є хаусдорфовим простором. Далі, застосувавши твердження 2.1. ми отримаємо, що *Z* буде T_1 простором.

Отже, *Z* не може бути регулярним або цілком регулярним. Таким чином *Z* не має жодної з трьох властивостей (1)-(3). Твердження доведено.

Твердження 2.3.

Склеюваний простір *Z* зберігає кожну з наступних властивостей:

1) бути компактним;
2) бути ліндельофовим;
3) бути нормальним простором;
4) бути цілком нормальним простором;
5) бути повністю нормальним простором;
6) бути колективно нормальним простором;
7) бути зліченно паракомпактним нормальним простором;
8) бути компактним хаусдорфовим простором.

Зауважимо, що (1), (2) очевидні.

Умова (9) є наслідком з (1), (3) і твердження 2.1.

§3. Зв'язок з проблемою продовження.

Проблема ретракції, яка означена в попередньому розділі є окремим випадком проблеми продовження. Цей зв'язок з проблемою продовження є замкнутим кругом.

З однієї сторони поняття ретракта дає необхідну і достатню умову, щоб проблема продовження була тривіальною.

Справді ми маємо наступнє твердження:

Твердження 3.1.

Підпростір A простору X є ретрактом простору X тоді і тільки тоді, коли для довільного простору Y кожне відображення $g\colon A \to Y$ має своє продовження до відображення $f\colon X \to Y$.

Доведення.

Якщо A є ретрактом простору X з ретрактом $r\colon X \to A$, то композиція $g \circ r\colon X \to Y$ буде продовженням відображення g до X і навпаки. Задаємо $Y=A$, тоді з цієї умови випливає, що топологічне відображення a простору A має продовження $r\colon X \to A$. Отже, A є ретрактом простору X. Твердження доведено.

З іншої сторони, проблема продовження для даного відображення $g\colon A \to Y$ визначеного на замкнутій підмножині A простору X в інший простір Y може бути зведена до проблеми ретракції в сенсі склеєного простору, побудованого в попередньому розділі.

Твердження 3.2.

Підпростір Y склеюваного простору Z є ретрактом простору Z тоді і тільки тоді, коли задане відображення $g\colon A \to Y$ має продовження на весь простір X.

Доведення.

Необхідність.

Нехай $r:Z \to Y$ буде ретракцією. Задаємо відображення $f:X \to Y$ формулою $f(x)=r(p(x))$ для кожної точки x із простору X, що належить W, де p- природнє проектування. Для кожної точки $x \in A$ маємо рівність

$$f(x)=r(p(x))=r(g(x))=g(x).$$

Цим самим доведено, що f є продовженням даного відображення g.

Достатність.

Нехай $f:X \to Y$ буде продовженням деякого відображення g. Задаємо функцію $r:Z \to Y$ наступним чином:

Нехай точка z - довільна точка простору Z. Якщо $z \in Y$, то $r(z)=z$. Якщо $z \notin Y$, то існує єдина точка x в просторі $X \setminus A$ така, що $p(x)=z$. Задаємо відображення $r(z)=f(x)$.

Нехай $h=r \circ p$. Звідси видно, що $h|X=f$. А також, що $h|Y$ є тотожнім відображенням. Так задана композиція h буде неперервною. Оскільки p є природнім проектуванням, то за теоремою про топологічні ототожнення відображення r буде неперервним. Оскільки $r|Y$ є тотожнім відображенням за означенням, то видно, що r буде ретракція.

Таким чином доведено, що проблема продовження для заданого відображення g буде еквівалентним проблемі ретракції.

§4. Самоподібні відображення.

Відображення $g:X \to X$ називається *самоподібним*, якщо $g \circ g=g$.

Твердження 4.1.

Якщо $r:X \to A$ ретракція, а $h:A \to X$ відображення вкладення, то композиція $g=h \circ r:X \to X$ буде самоподібною.

Доведення.

Оскільки r – ретракція, то композиція $r \circ h$ буде тотожнім відображенням на A. Отже, ми маємо $r \circ r=r$.

ЛЕКЦІЯ №2 .

§5. Властивість нерухомої точки.

Скажемо, що простір X має властивість нерухомої точки, якщо кожне відображення із X в X має нерухому точку, тобто таку точку p, що

$$f(p)=p.$$

Зауважимо, що різні відображення можуть мати різні нерухомі точки, не обов'язково одна точка буде нерухомою для всіх відображень.

За теоремою Брауера про нерухому точку одинична n-вимірна куля B^n має властивість нерухомої точки.

З іншої сторони ,обмежуюча сфера S^{n-1} не має властивості нерухомої точки, бо на сфері існує відображення, яке не має жодної нерухомої точки, наприклад, антиподальне (кожна точка відображається в діаметрально протилежну).

Теорема 5.1.

Ретракція зберігає властивість нерухомої точки.

Доведення.

Припустимо, що X - простір, який має властивість нерухомої точки і нехай $r:X \to A$ - довільна ретракція. Достатньо довести, що A має властивість нерухомої точки.

З цим наміром, нехай відображення $\varphi:A \to A$ буде довільно задане відображення.

Розглянемо композицію $g=h \circ \varphi \circ r$, де r – задана ретракція, яку ми мали, h – вкладення для того, щоб розглянути образ не в A, а в X.

Ми отримали відображення $g:X \to X$. За умовою, простір X має властивість нерухомої точки. Тому відображення g повинно мати нерухому точку, тобто p, що $g(p)=p$.

Оскільки за означенням $g(x)=\varphi(r(x)) \in A$ і $g(p)=p$, то, звідси випливає, що нерухома точка $g(p)$ повинна належати A. Тоді, застосувавши до цієї точки ретракцію r, будемо мати $r(p)=p$ і $p=g(p)=\varphi(r(p))=\varphi(p).$ Ми одержали $p=\varphi(p),$ тобто точка p буде нерухомою точкою для відображення φ. А це означає, що A має властивість нерухомої точки. Теорема доведена.

Таким чином, кожний ретракт простору з властивістю нерухомої точки зобов'язаний також мати властивість нерухомої точки.

Як наслідок, обмежуюча сфера одиничної кулі не є ретрактом цієї кулі. Інакше обмежуюча одинична сфера мала б властивість нерухомої точки, але це не так.

В наступному параграфі ми доведемо цей факт без використання теореми Брауера.

Наслідками є твердження про те, що звичайний n-мірний куб і гільбертовий куб також мають властивість нерухомої точки.

§6. Гомологічні властивості.

Нехай $r:X \to A$ довільна, але задана ретракція, $h:A \to X$ – вкладення.

Твердження 6.1.

Обмежуюча сфера S^{n-1} одиничної кулі не є ретрактом кулі.

Доведення.

Спочатку розглянемо випадок $n=1$.

Оскільки ретракт зберігає лінійну зв'язність, а відрізок лінійно зв'язний, хоча дві точки, що є його межею, як підпростір не буде лінійно зв'язний, тому не існує ретракція відрізків на свою нульмірну межу.

Для випадку $n>1$ гомологічна група буде нескінченою циклічною з одним твірним елементом. В той же час, як гомологічна група кулі рівна нулю. При ретракції група гомологій повинна зберігатись.

Отже, ми довели, що обмежуюча сфера не буде ретрактом кулі.

Теорема Брауера про нерухому точку 6.2.

Кожне відображення n-вимірної кулі $f:B^n \to B^n$ має нерухому точку.

Доведення.

Допустимо, що відобрження не має нерухомої точки. Тоді ми можемо побудувати ретракцію r кулі на свою границю наступним способом: зафіксуємо довільну точку x кулі B^n. Далі, за припущенням $f(x)=x$. Проводимо пряму лінію через дві різні точки х та $f(x)$ до перетину з обмежуючою сферою і цю точку перетину позначимо через $r(x)$. Ми можемо стверджувати, що така відповідність $r \to r(x)$ задає відображення r кулі на свою границю. Якщо x належить сфері, то зо побудовою $r(x)=x$.

З неперервності r випливає, що r буде ретрактом кулі на свою границю. Але це протирічить доведеному вище твердженню 6.3.

§7 Глобальна і локальна стягуваність.

Теорема 7.1.

Всякий ретракт стягуваного по собі в точку простору сам буде стягуваний по собі в точку.

Доведення.

Нехай $r:X\rightarrow Y$ і $H:X\times[0,1]\rightarrow X$, що $H(x,0)=idx=x$ та $H(x,1)=p.$ Треба довести, що існує гомотопія $g:Y\times[0,1]\rightarrow Y$, що $g(y,0)=IdY=y(g,1)=Q=r(p)$

Задаємо $g(y,t)=g(r\circ H(x,t),t)=r\circ H(x,t)=q$. Звідси випливає вірність теореми.

Теорема 7.2.

Кожний ретракт локально стягуваного простору є локально стягуваним.

Доведення.

Припустимо, що X- локально стягуваний простір. Нехай A – ретракт X, r – ретракція X на A.

Будемо доводити, що A – локально стягуваний. Нехай p – довільна точка множини A і нехай W – довільний окіл точки p у просторі A. З неперервності відображення r і того, що $r(p)=p$, бо на множині A ретракція нерухома, випливає: повний прообраз $U=r^{-1}(W)$ є відкритим околом точки р у просторі X. Оскільки простір X локально стягуваний в точку p, то існує окіл $V \in U$ даної точки p в просторі X разом з деякою гомотопією h_t: $V\rightarrow U$ (параметр t пробігає $[0,1]$) така гомотопія, що h_0 є тотожнім відображеням, а h_1 є постійним відображенням.

§8. Локальна зв'язність.

Як сюр'єктивне відображення ретракція зберігає зв'язність та лінійну зв'язність. За результатом із §6 ретракція також зберігає зв'язність у високих розмірностях як в гомологічному так і в гомотопічному сенсі.

В даному розділі ми будемо доводити, що ретракція також зберігається при локальній зв'язності.

Нагадаємо звичайне означення локальної зв'язності.

Простір X називається *локально зв'язним* в точці $p \in X$, якщо кожний окіл точки p містить зв'язний окіл даної точки p.

Локально зв'язний простір – це такий простір , який локально зв'язний в кожній точці.

Ясно, що з лінійної стягуваності випливає локальна зв'язність.

<u>Твердження 8.1.</u>

Кожний ретракт локально зв'язного простору також локально зв'язний.

<u>Доведення.</u>

Припустимо, що X є локально зв'язний простір і A є ретрактом X та $r:X \rightarrow A$.

Ми будемо доводити, що A – локально зв'язне. Нехай p - довільна точка з A і N довільно заданий окіл точки p в просторі A.

Оскільки r неперервне і $r(p)=p$, то повний прообраз

$$U=r^{-1}(N)$$

є околом точки p в просторі X.

Оскільки X локально зв'язний в точці p, то U містить зв'язний окіл V точки p в просторі X. Нехай

$$M=r(V).$$

Оскільки M містить окіл $V \cap A$ точки p в просторі A і є неперервним образом $r(V)$ зв'язної множини V, то M – зв'язний окіл в просторі A. Оскільки

$$M= r(V) \subset r(U)=N,$$

то, звідси випливає, що A – локально зв'язний в точці р.

Так як p – довільна точка з множини A, то цим самим доведено локальну зв'язність всієї множини A . Твердження доведено.

Далі, нехай тепер число N – довільне ціле число. Наведемо означення локальної зв'язності в розмірності N (в гомотопічному сенсі) наступним способом:

Розглянемо границю S^N одиничної кулі B^{N+1} в евклідовому просторі R^{N+1}.

Простір X називається *локально зв'язним розмірності N* в даній точці $p \in X$, якщо кожний окіл U точки p містить окіл V точки p такий, що кожне відображення $f:S^N \to V$ має продовження $\tilde{f}:B^{N+1} \to U$.

Якщо X локально зв'язний розмірності N в кожній точці, то він називається *локально зв'язним розмірності N*.

Якщо X локально стягуваний, то він також буде локально зв'язним розмірності N для довільного $N \geq 0$.

У спеціальному випадку N=0 і N=1 простори називаються *локально лінійно зв'язним* і просто локально зв'язним.

Твердження 8.2.

Якщо простір X локально лінійно зв'язний розмірності N, то таким же буде ретракт A простору X.

Доведення.

Нехай $r:X\to A$ ретракція. Розглянемо довільну точку $p\in N$ і заданий довільний окіл N точки p в просторі A. Оскільки r – неперервна і $r(p)=p$, то повний прообраз

$$U=r^{-1}(N)$$

буде околом точки p в просторі X.

Оскільки X локально зв'язний розмірності N, то U містить окіл V точки p в просторі X такий, що кожне відображення з сфери S^N в окіл V має продовження на кулю B^{N+1} з образами в околі U.

Тоді перетин

$$M=V\cap A$$

буде околом точки p в просторі A і міститься в N.

Вибираємо довільне відображення

$$f\colon S^N\to M.$$

Оскільки $M\in V$, то f має продовження $\hat{f}$ з кулі $B^{N+1}\to U$. Задаємо відображення $B^{N+1}\to N$ формулою:

$$\tilde{f}=r[\hat{f}\ (x)].$$

Тоді $\tilde{f}$ буде продовженням f. Цим самим доведено, що A є локально зв'язним розмірності N для довільного $p\in A$.

§9. Деформаційні ретракти.

Ретракт A простору X називається *деформаційним ретрактом* X, якщо існує така ретракція $r: X \to A$, що

$$h \circ r: X \to X,$$

(спочатку ретракція r, а потім вкладення h) буде гомотопне тотожньому на X. Іншими словами, підпростір A простору X є деформаційним ретрактом X, якщо існує гомотопія $f_t: X \to X$, $t \in [0,1]$ така, що f є тотожнім відображенням на X, а f_1 є постійним відображенням з умовою $f_1(x)=r(x)=A$.

Якщо гомотопія f_t задається умовою $f_t(a)=a$ для довільного $a \in A$ і довільного $t \in [0,1]$, то A – називається *сильним деформаційним ретрактом* X.

<u>Твердження 9.1</u>.

Якщо A – деформаційний ретракт X, то відображення включення h: $A \subset X$ є гомотопічною еквівалентністю.

Справді, ретракція $r:X \to A$ із вище наведеного означення має двохстороннє гомотопічне зворотнє відображення h.

Таким чином, кожний деформаційний ретракт із X має всі гомотопічні властивості самого X плюс ті властивості простору X, які зберігаються при ретракції.

Наведемо приклади сильних деформаційних ретрактів.

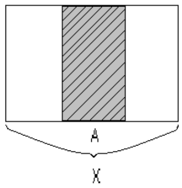
Нехай X – простір, одержаний з одиничної кулі вирізанням внутрішної точки, наприклад точки O (куля з вирізаним центром). Тоді обмежуюча сфера S^{N-1} кулі B^N буде сильним деформаційним ретрактом X. Справді, гомотопія f_t: $X \to X$, $t \in [0,1]$ задається формулою

$$f_t(X)=(1-t+\frac{t}{|x|})X$$

для довільного $x \in X$ і довільного t, де $|x|$ - називається *відстанню до центру кулі*, тоді задовольняється така умова: f_0 – тотожнє відображення на X, $f_1(x)$ є ретракція кулі з вирізаним центром на сферу і $f_t(x)=x$ для будь-якого $x \in S^{N-1}$ і довільного t.

Твердження 9.2.

Нехай X - скінченний сімпліціальний комплекс і A підкомплекс X. Тоді розглянемо простір (англійський циліндр)



$$ACL=(X \times 0) \cup (A \times [0,1]),$$

він буде підпростором топологічного добутку

$$D=X \times [0,1].$$

Тоді ACL буде деформаційним ретрактом D.

§10. Околові ретракти.

Підпростір A простору X називається *околовим ретрактом* X, якщо A є ретрактом деякого околу $U \in X$, зокрема ретракт X є також його околовим ретрактом і таким же є кожен відкритий підпростір в X.

Оскільки відкритий простір X зберігає всі локальні топологічні властивості з X, то кожний околовий ретракт X зберігає наступні локальні властивості:

а) локальну компактність;

б) локальну стягуваність;

в) локальну зв’язність;

г) локальну зв’язність розмірності *N*.

Наприклад, обмежуюча сфера S^{N-1} одиничної кулі B^N є околовим ретрактом кулі, оскільки вона є ретрактом відкритого підпростору $B^N \setminus \{0\}$. (з вирізаним центром).

Ми будемо стикатися з прикладами околових ретрактів.

Розглянемо замкнутий одиничний інтервал $I=[0,1]$ і тихонівський куб

$$T = I^{\alpha}$$

Іншими словами, T – топологічний добуток незліченного числа копій $[0,1]$.

Згідно означення топологічного добутку α є незліченною множиною, а точки добутку T є функціями $\tau:\alpha \to I$. Позначимо через ϑ постійну функцію $\vartheta(\alpha)=0$, тоді ϑ будемо називати початком тихонівського кубу T. Для довільного $\lambda \in \alpha$ замкнута підмножина

$$I_{\lambda}=\{\tau \in T, \tau(\alpha \setminus \lambda)=0\}$$

Твердження 10.1.

Для кожної заданої послідовності околів $\{U_n, n=1,2\ldots\}$ початку ϑ, перетин

$$\bigcap_{n-1}^{\infty} U_n$$

містить I^{α} для не більше як зліченного числа індексів $\lambda \in \alpha$. Оскільки α є незліченним, то існує таке λ, що $I_{\lambda} \in U_n$ для довільного n.

Доведення.

За означенням топології добутку кожний окіл точки ϑ в T містить всі I_λ для не більше ніж скінченного числа індексів λ і, отже, таким же є кожний U_n. Твердження доведено.

Розглянемо тепер топологічний добуток

$$X=I\times T.$$

Ясно, що X – тихонівський куб з початком $x_0=(0,\vartheta)$. Нехай

$$W=X\setminus\{x_0\}.$$

Розглянемо диз'юнктні замкнуті множини

$$E=(I\setminus\{0\})\times\{\vartheta\},F=\{0\}\times(T\setminus\{\vartheta\})$$

простору W.

Тоді ми маємо наступну лему.

<u>Лема 10.2</u>.

Диз'юнктні замкнуті множини E і F простору W не мають диз'юнктних околів в W.

<u>Доведення.</u>

Ми будемо доводити, що замикання $[U]$ кожного околу E в W перетинає F. Для будь-якого цілого $n>0$ нехай $t_n=1/n$. Оскільки U є околом точки $(t_n,0)$, то U містить множину виду $\{t_n\}\times U_n$, де кожне U_n є околом ϑ в T.

Існує таке λ, що $I_\lambda \in U_n$ для довільного n. Тоді $\{t_n\}\times I_\lambda\subset U$, а, значить, $\{0\}\times I_\lambda \subset U$, а значить $\{0\}\times(I_\lambda\setminus\{\vartheta\})\subset[U]$. Таким чином $[U]$ перетинає F.

<u>Наслідок 10.3.</u>

Тихонівський простір W не є нормальним.

Наслідок 10.4.

Тихонівський куб X не є цілком нормальним.

Розглянемо замкнуту множину $A=(I\times\{\vartheta\})\cup(\{0\}\times T)$ в тихонівському кубі $X=I\times T$.

Твердження 10.5.

Замкнутий підпростір A в X не є околовим ретрактом X.

Доведення.

Припустимо, що існує ретракція $r:U\to A$ відкритого підпростору U в X. Оскільки множина E та F відкриті в A і $A\setminus\{(0,\vartheta)\}=E\cap F$, то повні прообрази $r^{-1}(E)$ та $r^{-1}(F)$ будуть дизюнктними околами множин E та F в просторі W. Це протирічить з лемою 10.2. Цим і завершується доведення твердження 10.5.

§11. *r* - відображення .

Відображення $f: X\to Y$ простору X в простір Y називається *r-відображенням*, якщо існує відображення $g:Y\to X$, таке, що $f\circ g: Y\to Y$ є тотожнім відображенням простору Y на самого себе.

Властивості:

1. Всякий гомеоморфізм є r – відображенням.
2. $g\circ f(x)=x$ тоді і тільки тоді, коли $x\in g(Y)$.
3. $g(Y)$ є замкнутою підмножиною в X.
4. Всякий r-образ простору X гомеоморфний деякій його замкнутій підмножині.
5. Всякий топологічний дільник простору є його r-образом.
6. Композиція двох r – відображень є r – відображенням.

Дамо означення ретракції та ретрактів:

Якщо *Y* – підмножина *X*, то відображення $f: X \to Y$ називається *ретракцією*.

Підмножина X_o простору *X* називається *ретрактом* *X*, якщо існує ретракція *X* на X_o.

Гільбертовий простір позначається через E^ω; він складається із усіх послідовностей $x=\{x_k\}$, для яких ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ збігається; x_k називається *k-ю координатою точки x*. Підмножина в E^ω, що складається із всіх точок $x=\{x_k\}$, для $0 \le x_k \le 1/k,\ k=1,2,...,$ позначається через Q^ω і називається *гільбертовим кубом*.

Евклідовий *n*-мірний простір будемо позначати через E^n, n=1,2,3,.... Він складається із усіх точок $x \in E^\omega$, для яких x_k=0 при $k>n$.

Множина σ, що містить всі точки $x \in E^\omega$ виду $x = t_0 x^0 + t_1 x^1 + ... + t_m x^m$, $t_i \ge 0$ $t_0 + t_1 + ... + t_m = 1$ називається *m-мірним геометричним сімплексом з вершинами* x^0, x^1,...,x^m. Множина, що є об'єднанням скінченного числа геометричних сімплексів, називається *геометричним поліедром*. Гомеоморфний образ геометричного поліедра називається *криволінійним поліедром* або *поліедром.* Наприклад, круг є криволінійним поліедром як гомеоморфний образ трикутника.

<u>Твердження 11.1.</u>

Нехай $G \ne \emptyset$ є відкритою обмеженою підмножиною евклідового простору E^n. Тоді множина $X = E^n \setminus G$ не є ретрактом простору E^n.

<u>Твердження 11.2</u>.

Якщо X – замкнута підмножина в E^n і G – одна із обмежених компонент $E^n \setminus X$, то не існує відображення $f: \overline{G} \to X$ такого, що $f(x)=x$ для довільної точки $x \in \overline{G} \setminus G$.

Твердження 11.3.

Підмножина X_0 простору X є його ретрактом тоді і тільки тоді, коли будь-яке відображення f_0 цієї підмножини в довільний простір Y має неперервне продовження $f: X \to Y$.

ЛЕКЦІЯ №4. Абсолютні екстензори та абсолютні околові екстензори.

§1. Класи просторів.

Слабоспадковим топологічним класом ми будемо називати клас, який задовольняє такі дві аксіоми:

(I). C є топологічним. Це означає, що якщо C містить простір X, то C містить також кожний гомеоморфний образ простору X.

(II). Клас C слабоспадковий. Це означає: якщо C містить простір X, то C містить також кожний замкнутий підпростір X.

Іншими словами, кожний простір X належить класу C разом з усіма своїми замкнутими підмножинами і усіма своїми гомеоморфними образами.

Слабоспадковим це називається тому, що спадковість береться тільки по замкнутих, а не по всіх множинах.

Прикладами топологічних і слабоспадкових класів є:

H – клас усіх хаусдорфових просторів;

R – клас усіх регулярних просторів;

CR – клас усіх цілком регулярних просторів;

M – клас усіх метризованих просторів;

C_1 – клас усіх просторів з першою аксіомою зліченності;

C_2 – клас усіх просторів з другою аксіомою зліченності;

N – клас усіх нормальних просторів;

K – клас усіх компактних просторів;

LK – клас усіх локально компактних просторів;

L – клас усіх ліндельофових просторів.

§2. Абсолютні екстензори та абсолютні околові екстензори.

Замкнутий підпростір *A* має властивість продовження в *X* з образами в *Y*, якщо кожне відображення $f: A \to Y$ може бути продовжене на *X*. Замкнута підмножина *A* має околову властивість продовження в *X* з образами в *Y*, якщо кожне відображення $f: A \to Y$ може бути продовжене до деякого околу *U(A)* із *X.*

Зауважимо, що відкритий підпростір *U* із *X* може залежати від даного відображення *f*. Позначимо через *C* вибраний слабоспадковий топологічний клас просторів.

Назвемо *абсолютним екстензором* (AE) в класі *C* такий простір *Y*, що для довільного простору *X* із класу *C* і для будь-якої замкнутої підмножини *A* $\subset$X, ця підмножина *A* має властивість продовження в *X* з образами в *Y*.

Так само *Y* називається *абсолютно околовим екстензором* (ANE), якщо для будь-якого простору *X* із *C* і для довільного підпростору *A* із *X*, цей підпростір має околову властивість продовження в *X* з образами в *Y*.

Твердження 2.1.

Кожний абсолютний екстензор буде абсолютним околовим екстензором.

Твердження 2.2.

Якщо $\mathcal{B} \in C$, то кожний абсолютний екстензор в класі C буде абсолютним екстензором в $\mathcal{B}$.

Якщо Y складається з єдиної точки, то Y, очевидно, буде абсолютним екстензором.

З іншої сторони, коли клас C стає більшим, то клас усіх абсолютних екстензорів стає меншим згідно твердження 2.2.

Твердження 2.3.

Якщо клас C є настільки великий, що містить простір, який не є нормальним, то кожний хаусдорфовий абсолютний околовий екстензор для класу C складається з єдиної точки.

Доведення.

Припустимо, що Y буде абсолютним околовим екстензором для класу C, причому C є хаусдорфовим простором, що складається з більш ніж однієї точки. Виберемо дві різні точки p і q в Y. Тоді існують два диз'юнктні околи U та V, що $p \in U$, $q \in V$.

Оскільки X не є нормальним, то існують дві диз'юнктні замкнуті множини B і C в X, які не мають диз'юнктних околів (це заперечення нормальності).

Розглянемо замкнутий підпростір

$$A=B\cup C$$

і відображення $f: A\to Y$, яке задано формулою:

$$f(x)=\begin{cases} p, & x\in B \\ q, & x\in C \end{cases}$$

Оскільки Y – абсолютний околовий екстензор для класу C, то f має продоження $g: W\to Y$ на деякий відкритий підпростір W, що містить A.

Тоді $g^{-1}(U)$ та $g^{-1}(V)$ є дизюнктними околами B і C відповідно. Це протирічить із припущенням відносно B і C.

Твердження 2.4.

Якщо Y – абсолютний околовий екстензор для класу цілком нормальних хаусдорфових просторів, то кожне сімейство непорожніх колективно дизюнктних відкритих множин в Y є не більш ніж зліченним.

Доведення

Нехай $\{U_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ буде незліченне сімейство непорожніх колективно дизюнктних відкритих множин в Y. Тоді існує цілком нормальний хаусдорфовий простір X, а також локально скінченна множина $\{X_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ окремо взятих точок, які не мають диз'юнктних околів .

Позначимо через A підпростір X, який складається з усіх точок X_λ . Оскільки $\{X_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ є локально скінченним сімейством в хаусдорфовому просторі X, то A замнутий в X.

Задаємо відображенння $f: A\to Y$ вибором для довільної X_λ деякої точки $f(X_\lambda)\in U_\lambda$. Неперервність такого f випливає із локальної скінченності $\{X_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$.

Оскільки Y – абсолютний околовий екстензор, то існує продовження $g:V\to Y$ на деякий окіл $V(A)$ в X. Тоді сімейство $g^{-1}(U_\lambda)$ повних прообразів дає диз'юнктні околи сімейства $\{X_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$.Ми отримали протиріччя з умовою 2.4.

Надалі вважатимемо, що клас C є строго класом нормальних просторів.

§3 Теорема продовження Тітце-Урисона.

Теорема 3.1.

Замкнутий одиничний інтервал [$0,1$] є абсолютним екстензором в класі всіх нормальних просторів.

Доведення.

Нехай A – замкнутий підпростір довільного нормального простору X. Треба довести, що A має властивість продовжуваності в X з образами в [$0,1$].

Для двох вибраних замкнутих множин B і C позначимо через

$$\chi_{BC}(x)=\begin{cases}0, & x\in B\\ 1, & x\in C\end{cases}$$

Розглянемо довільне відображення $f: A\to[0,1]$. Для довільного $n\in Z$, $n\geq 0$ будуємо два відображення $f_n: A\to[0,1]$ та $g_n: X\to[0,1]$ наступним чином:

Нехай $f_0=f$ і , вважатимемо, що f_n вже задана.

Розгланемо диз'юнктні задані множини:

$$B_n=\left\{x\in A/\ f_n(x)\leq\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$
$$C_n=\left\{x\in A/\ f_n(x)\geq\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$
підпростору А.

Так як A замкнутий в X, то такими ж будуть B_n і C_n. Враховуючи характеристичу функцію χ_{BC}, ми задаємо відображення g_n формулою:

$$g_n(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \chi_{BC}(x),\ \ x\in X.$$

Треба довести, що для будь-якої точки $x\in A$

(1) $$0\le f_n(x)-g_n(x)\le 1.$$

Нехай точка $x\in B_n$. Тоді нерівність, очевидно, виконується, оскільки $g_n(x)=0$ для довільного $x\in B_n$. Далі x буде точкою з A, але не належить B_n. Тоді ми маємо

$$f_n(x)\ge \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

але

$$g_n(x)\le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

отже, нерівність знову виконується.

Маючи таку нерівність, ми можемо задати відображення f_{n+1} формулою:

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)-g_n(x)$$

для будь-якого $x\in A$.

Це завершує індуктивну побудову відображення $f_n(x)$ та $g_n(x)$ для довільного додатнього цілого числа n.

Далі досліджуємо деякі нерівності, які задовольняють f_n і g_n.

Оскільки

$$0 \le \chi_{B_n c_n}(x) \le 1$$

для довільного *x є X*, то ми маємо таку нерівність:

(2)
$$0 \le g_n(x) \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

для довільного $x \in X$.

З іншої сторони, можна довести математичною індукцією наступну нерівність:

$$0 \le f_n(x) \le \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

яка виконується для довільного $x \in A$.

Основа індукції:

Якщо *n*=0, то нерівність очевидна.

Індуктивне припущення.

Припустимо, що нерівність вірна для деякого вибраного $n \ge 0$.

Індуктивний крок.

Доведемо, що вона виконується для *n*+1, тобто треба довести:

$$0 \le f_n(x) \le \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

але нерівність випливає з попередніх нерівностей (1)-(2):

(3)
$$0 \le f_n(x) \le \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Цим завершується індуктивне доведення нерівності (3).

Враховуючи нерівність (2), ми отримаємо:

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n} g_i(x) \leq \frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^i\right] < 1,$$

яка виконується для довільного $x \in X$ і для $n \geq 0$.

Більше того, ми можемо задати відображення $S_n: X \to I$ для кожного $n \geq 0$ і довільного $x \in X$ формулою:

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} g_s(x).$$

Враховуючи (2), сума $\sum g_n(x)$ збігається рівномірно на X.

Оскільки g_n є неперервною функцією для довільного n, то за теоремою класичного аналізу існує границя $\lim S_n$ для довільного $x \in X$, що задає відображення $g: X \to [0,1]$ (теорема Вейєштрасса).

Це відображення задається формулою:

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

для довільного $x \in X$.

У відповідності до f_{n+1} ми маємо,що

$$g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$$

задано при довільному $x \in A$.

Звідси випливає, що

$$S_n(x) = f(x) - f_{n+1}(x)$$

для довільного $x \in X$.

Враховуючи (2), ми отримаємо, що

$$g(x)=f_n(x)$$

Отже, *g* є продовженням *f*, що і треба було довести.

Таким чином *A* має властивість продовжуваності з образами в [*0,1*].

Щоб навести інші нетривіальні приклади абсолютних екстензорів та абсолютних околових екстензорів, ми будемо виконувати операції з цими екстензорами в наступних чотирьох параграфах.

§4. Добуток екстензорів.

Твердження 4.1.

Довільний топологічний добуток абсолютних екстензорів для класу *C* буде абсолютним екстензором того ж класу.

Доведення.

Нехай $\{Y_\alpha,\ \alpha\in A\}$ позначає вибране сімейство для класу *C*, а через *Y* позначимо топологічний добуток просторів з цього сімейства.

Ми будемо доводити, що *Y* є абсолютним екстензором. Виберемо для цього доведення простір *X* із класу *C* і нехай $f{:}A\to Y$ довільне відображення, яке задане на замкнутому підпросторі $A\subset X$.

Для кожного індекса $\alpha\in A$ розглянемо композицію відображень

$$f_\alpha=p_\alpha\circ f{:}A\to Y_\alpha,$$

де проекція $p_\alpha{:}Y\to Y_\alpha$ позначає натуральне проектування.

Оскільки Y_α – абсолютний екстензор, то f_α має продовження

$$g_\alpha{:}\ X\to Y_\alpha.$$

Задаємо відображення $g: X \to Y$ формулою:

$$g_\alpha(x)=p_\alpha[g(x)]$$

для довільного $x \in X$. Легко бачити, що g є продовженням f.

Наслідок 4.2.

Довільний топологічний степінь одиничного інтервалу [$0,1$] буде абсолютним екстензором для класу всіх нормальних просторів. Зокрема, n – мірний куб, а також гільбертовий куб I^ω будуть абсолютними екстензорами для класу всіх нормальних просторів.

Наслідок 4.3.

n- мірна куля B^n, а також сімплекс Δ^n є абсолютними екстензорами для класу всіх нормальних просторів.

Для абсолютних околових екстензорів ми маємо наступний аналог:

Твердження 4.4.

Кожний топологічний добуток скінченного сімейства абсолютних околових екстензорів для класу C також буде абсолютним околовим екстензором.

§5. Ретракти екстензорів.

Твердження 5.1.

Кожний ретракт абсолютного екстензора для класу C також буде абсолютним екстензором, тобто властивість бути АЕ зберігається при ретракціях.

Доведення.

Нехай Z – довільний абсолютний екстензор для класу C і нехай Y є ретрактом Z з ретракцією $r: Z \to Y$. Будемо доводити, що Y є абсолютним екстензором для класу С. Для цього нехай X простір із класу C, а відображення $f: A \to Y$ – відображення, яке задане на замкнутому підпросторі $A \subset X$.

Розглянемо композицію відображень

$$\Phi = h \circ f: A \to Z,$$

де відображення $h: Y \to Z$ позначає відображення вкладення.

Оскільки Z є абсолютним екстензором для класу C, то Φ має продовження $\psi: X \to Z$.

Очевидно, що композиція $g = r \circ \psi: X \to Y$ є продовженням f. Це доводить, що Y є абсолютним екстензором для класу C.

<u>Твердження 5.2.</u>

Кожний околовий ретракт абсолютного околового екстензора для класу C також буде абсолютним околовим екстензором, тобто властивість бути абсолютним околовим екстензором зберігається при околових ретракціях.

<u>Доведення.</u>

Нехай Z є довільним ANE для класу C, а Y є околовим ретрактом Z. Тоді існує відкритий підпростір $W \supset$ Y в просторі Z разом з ретракцією $r: W \to Y$.

Ми будемо доводити, що Y є ANE для класу C.

Нехай X – простір із класу C і $f: A \to$ Y відображення на замкнутому підпросторі $A \subset$ X.

Розглянемо композицію

$$\varphi = I \circ f\colon A \to Z,$$

де через I позначимо відображення вкладення $Y \subset Z$.

Оскільки Z є ANE для класу C, то $\varphi\colon W \to Z$ відображає W на деякий відкритий підпростір $V \in X$, який містить A.

Повний прообраз

$$U = \psi^{-1}(W)$$

є відкритим підпростором простору X і, отже, містить A. Задаємо відображення $g\colon U \to Y$ формулою:

$$g(x) = r[\psi(x)]$$

для довільного $x \in U$. Звідси видно, що g буде продовженням f. Цим доведено, що Y є ANE для класу C. Твердження доведено.

Оскільки S^n - n-мірна сфера є околовим ретрактом n+1-вимірної кулі B^{n+1}, то ми одержимо з (2.1), (4.3) і (5.2) наступний наслідок:

<u>Наслідок 5.3.</u>

n-мірна сфера S^n є ANE для класу N усіх нормальних просторів.

Даний наслідок є окремим випадком із наступної теореми 5.4.

<u>Теорема 5.4.</u>

Кожний скінченний триангульований простір G є ANE для класу N усіх нормальних просторів.

<u>Доведення.</u>

Нехай Y – довільно вибраний, скінченно триангульований простір. Ми можемо вважати, що Y –скінченний сімпліціальний комплекс (позначимо CW-простір). Ми можемо вкласти цей Y як підкомплекс одиничного n-мірного сімплекса W^n для досить великих n. Оскільки цей сімплекс Δ^n гомеоморфний n-мірному кубу I^n, то W^n є AE для класу N.

За теоремою 10.1 Y є околовим ретрактом Δ^n . За теоремою 4.3. Y є ANE для класу N.

§6. Відкриті підмножини абсолютних околових екстензорів.

Твердження 6.1.

Кожний підпростір абсолютного околового екстензора також буде абсолютним околовим екстензором.

Доведення.

Нехай Y – абсолютний околовий екстензор. Нехай W – його відкритий підпростір. Будемо доводити, що W також абсолютний околовий екстензор.

Нехай $f\colon A \to W$ – будь-яке відображення задане на замкнутому підпросторі A довільно вибраного простору X із класу C.

Оскільки Y – абсолютний околовий екстензор, то композиція

$$\varphi = i \circ f\colon A \to Y$$

двох відображень f та $i\colon W \subset Y$ має продовження

$$\psi\colon V \to \mathrm{Y}$$

на деякий відкритий підпростір $V \supset A$ із X.

Розглянемо повний прообраз $U=\psi^{-1}(W)$ в просторі V. Оскільки U відкритий в V, а V – відкритий в X, то U буде відкритий в X. Відображення ψ задає відображення $g: U\to W$ формулою

$$g(x)=\psi(x)$$

для довільного $x\in U$. Тоді g – продовження f на U. Твердження доведено.

Оскільки n-мірний евклідовий простір R^n гомеоморфний внутрішності одиничної кулі B^n, то з тверджень (2.1), (4.3) та (5.2) випливає:

Наслідок 6.2.

n-вимірний евклідовий простір R^n є абсолютним околовим екстензором для класу N усіх нормальних просторів.

§7. Стягувані абсолютні околові екстензори.

Вважаємо далі, що всі простори нормальні.

Теорема 7.1.

Якщо стягуваний простір Y є абсолютним околовим екстензором для класу N, то Y є абсолютним екстензором (тобто стягуваність+ANE=AE).

Доведення.

Для стягуваного простору Y існує точка $y_0\in Y$ і відображення $h:Y\times I\to Y$ таке, що

$$h(y,0)=y \quad \text{і} \quad h(y,1)=y_0$$

для довільного $y\in Y$.

Для того, щоб довести, що Y є абсолютним екстензором для класу N вибираємо довільне відображення $f: A\to Y$, яке задане на замкнутому підпросторі довільно вибраного простору *X* із класу *N*. Оскільки *Y* є ANE, то f має продовження *g: U→Y* на деякий відкритий окіл *U(A)*⊆*X*.

Оскільки *X* - нормальний простір, то існує відкритий підпростір *V(A)*$\in$*X* такий, що за малою лемою Урисона

$$A\subset V\subset [V]\subset U.$$

А за великою лемою Урисона існує відображення *ε: X→* [*0,1*] таке, що

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & x\in A\\ 1, & x\in X\setminus V\end{cases}.$$

Ми задаємо відображення Ω: *X→Y* формулою:

$$\Omega=\begin{cases}h[g(x),\varepsilon(x)], & x\in[V]\\ y_0, & x\in X\setminus V\end{cases}.$$

Звідси випливає, що Ω є продовженням f. Цим доведено, що *Y* є абсолютним екстензором для класу *N*. Теорема доведена.

Оскільки *n*-вимірний евклідовий простір R^n стягуваний, то з (6.2) і (7.1) випливає наслідок.

<u>Наслідок 7.2.</u>

n-вимірний евклідовий простір R^n є абсолютним екстензором для класу *N* усіх нормальних просторів.

Зокрема, дійсна пряма також є абсолютним екстензором для класу *N* усіх нормальних просторів. Використовуючи твердження (4.1), ми маємо наступний наслідок.

<u>Наслідок 7.3.</u>

Кожна топологічна степінь дійсної прямої буде абсолютним екстензором для класу N усіх нормальних просторів.

§8. Об'єднання відкритих екстензорів.

Ми і далі вважатимемо, що N – клас усіх нормальних просторів.

Твердження 8.1.

Нехай Y_1 та Y_2 - два відкриті підпростори простору Y, причому $Y=Y_1\cup Y_2$. *Як*що обидва Y_1 і Y_2 є абсолютними околовими екстензорами для класу N, то такий же буде і Y.

Доведення.

Нехай $f: A\to Y$ - довільне відображеня замкнутого підпростору $A\subset X$ в простір Y. Ми будемо доводити, що f має продовження на деякий окіл простору $A\subset X$. Підпростір $A\subset X$ покривається множинами $f^{-1}(Y_1)$ та $f^{-1}(Y_2)$, а простір X покривається відкритими множинами

$$W_1 = f^{-1}(Y_1)\cup(X\backslash A)$$

$$W_2= f^{-1}(Y_2)\cup(X\backslash A).$$

Оскільки X - нормальний простір, то існують дві замкнуті множини $X_1 \in W_1$ та $X_2 \in W_2$ простору X, що

$$X=X_1\cup X_2.$$

Нехай тепер $A_1=X_1\cap A$ і $A_2=X_2\cap A$. Тоді ми маємо $A=A_1 \cup A_2$ і

$$f(A_1)=Y_1,\ f(A_2)=Y_2,\ f(A_1\cap A_2) \subset Y_1\cap Y_2.$$

Тоді $Y_1 \cap Y_2$ буде абсолютним околовим екстензором для класу N за теоремою (6.1), а також $A_1\cap A_2$ -замкнутий в $X_1\cap X_2$. Цей перетин також належить класу N і обмеження $f|A_1 \cap A_2$ має продовження $\Phi: M \to Y_1 \cap Y_2$ на деякий підпростір $M \in X_1 \cap X_2$.

Оскільки $X_1 \cap X_2$ - нормальний простір, то існує відкрита множина O із $X_1 \cap X_2$ така, що

$$A_1 \cap A_2 \subset O \subset [O] \subset X_1 \cap X_2.$$

Розглянемо $O \cap A$. Ми маємо

$$A_1 \cap A_2 \subset [O] \cap A \subset X_1 \cap X_2 \cap A = A_1 \cap A_2.$$

Звідси випливає, що $[O] \cap A = A_1 \cap A_2$. Враховуючи це, ми можемо задати відображення $g: [O] \cap A \to Y$ формулою:

$$g(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x \in [O] \subset M \\ f(x), & x \in A \end{cases}$$

Оскільки $g([O] \cap A) \subset Y_1$ і Y_1 є абсолютним околовим екстензором, то обмеження $g([O] \cup A)$ має продовження $h_1: V_1 \to Y_1$ на деякий відкритий окіл V_1 простору $[O]$ в X_1. Так само відображення $g([O] \cup A_2)$ має продовження $h_2: V_2 \to Y_2$ на деякий відкритий окіл V_2 постору $[O] \cup A_2$ в X_2. З нормальності обох просторів X_1, X_2 випливає, що існують Q_1, Q_2 – відкриті множини такі, що

$$[O] \cup A_1 \subset Q_1 \subset [Q_1] \subset V_1 \subset X_1$$

$$[O] \cup A_2 \subset Q_2 \subset [Q_2] \subset V_2 \subset X_2$$

З іншої сторони, оскільки $(X_1 \cap X_2) \setminus O$ дизюнктивне з множиною A і обидві вони - замкнуті множини в нормальному просторі X, то існують відкрито- замкнуті множини D і E такі, що $(X_1 \cap X_2) \setminus O \subset D$, $A \subset E$.

Розглянемо замкнуті множини

$$G_1 = [Q_1 X_2] \cap [E]$$

$$G_2=[Q_2\, X_1]\cap[E],\ \ G_1,G_2\in X$$

$$G_1\in V_1,\ \ G_2\in V_2 \ i\ G_1\cap G_2\subset O.$$

Нехай $K_1=G_1\cap[O]$, $K_2=G_2\cap[O]$. Тоді K_1 та K_2 є замкнутими множинами в X. Причому $K_1\in V_1$, $K_2\in V_2$ та $K_1\cap K_2=[O]$. Оскільки $h_1[O]=g[O]=h_2[O]$, то ми можемо задати відображення h:$K\to Y$ на підпростір $K=K_1\cup K_2\subset X$ формулою:

$$h(x)=\begin{cases} h_1, & x\in K_1 \\ h_2, & x\in K_2 \end{cases}.$$

Тоді h є продовження f. Ми хочемо довести, що K міститься як відкрита множина в X і містить в собі множину A.

Для цього розглянемо множину $G=[(Q_1\backslash X_2)\cup(Q_2\backslash X_1)\cup O]\cap E$. Тоді $A\subset G\subset K$. Оскільки E є відкритою множиною в X, то треба довести, що $H=(Q_1\backslash X_2)\cup(Q_2\backslash X_4)\cup O$ є відкритою в X. За означенням O, Q_1 та Q_2 існують три відкриті множини B_0, B_1 та B_2 такі, що

$$O=B_0\cap X_1\cap X_2$$

$$Q_1=B_1\cap X_1$$

$$Q_2=B_2\cap X_2$$

Звідси випливає, що $Q_1\backslash X_2=B_1\backslash X_2$, $Q_2\backslash X_1=B_2\backslash X_1$ і ці множини відкриті в X.

Оскільки $O\in Q_1$, $O\in Q_2$, то ми маємо

$$O\subset B_0\cap B_1\cap B_2 \tag{1}$$

З іншої сторони, нехай x- довільна точка в $B_0\cap B_1\cap B_2$. Якщо $x\in X_1\cap X_2$, то ми маємо $x\in O$. Якщо $x\in X\backslash X_2$, то $x\in B_1\cap(X_1\backslash X_2)=B_1\backslash X_2$. Так само, якщо $x\in X\backslash X_1$, то $x\in B_2\backslash X_1$. Отже, ми маємо:

$$B_0\cap B_1\cap B_2\subset H.$$

Остання нерівність разом з (1) дають нам:

$$H=(B_1\backslash X_2)\cap(B_2\backslash X_1)\cap(B_0\cap B_1\cap B_2).$$

Цим доведено, що H – є відкрита в X. Теорема доведена.

Як наслідок з теореми (8.1) ми маємо наступню теорему:

<u>Теорема 8.2.</u>

Якщо простір Y є об'єднанням скінченного числа відкритих підпросторів кожний з яких є ANE, то Y також буде ANE.

Як наслідок з теореми (6.2) і (8.2) маємо наступнє твердження (8.3):

<u>Твердження 8.3.</u>

Кожний компактний локальний евклідовий простір є ANE для класу N усіх нормальних просторів.

Це є особливий випадок наступного твердження, що випливають із наслідків (5.4) та (8.2):

<u>Твердження 8.4.</u>

Кожний компактний простір, який є локально скінченно триангульованим буде абсолютним околовим екстензором для класу N усіх нормальних просторів.

Аналогічно до (8.1) ми маємо наступнє твердження для AE.

<u>Твердження 8.5.</u>

Нехай Y_1 та Y_2 – два відкриті підпростори простору Y з умовою, що $Y=Y_1 \cup Y_2$. Якщо кожний із трьох просторів Y_1, Y_2 та $Y_1\cap Y_2$ є абсолютними екстензорами для класу N усіх нормальних просторів, то таким же буде і Y.

ЛЕКЦІЯ №4.

§9. Замкнуті підпростори екстензорів.

Замкнутий підпростір абсолютного околового екстензора для класу *C* не є, взагалі кажучи, абсолютним околовим екстензором для класу *C*. Наприклад, якщо *C* містить інтервал $I=[0,1]$ дійсних чисел, тоді кожний замкнутий підпростір *I*, який не є локально зв'язний не буде належати абсолютному околовому екстензору для класу *C*.

Проте, в наших припущеннях розуміється, що кожний простір з класу *C* є нормальним і ми маємо наступне:

<u>Твердження 9.1.</u>

Якщо Y_1 і Y_2 – два замкнуті підпростори простору *Y*, які належать ANE для класу *C* такі, що $Y_1 \cup Y_2 = Y$ та $Y_1 \cap Y_2$ належить ANE для класу *C*, то Y_1 і Y_2 належать ANE для класу *C*.

<u>Доведення.</u>

Потрібно довести, що Y_1 належить ANE для класу *C*.

Нехай $f\colon A \to Y_1$ є відображенням, визначеним на замкнутому підпросторі *A* з довільного простору *X*, що належить класу *C*. Цього достатньо, щоб довести, що *f* має продовження на деякий окіл підпростору *A* в *X*.

Оскільки *Y* належить абсолютному околовому екстензору для класу *C*, то композиція

$$\Phi = i \circ f\colon A \to Y,$$

де $i\colon Y_1 \subset Y$ має продовження $\Phi^*\colon U \to Y$ над деяким підпростором $U(A)$ в *X*.

Оскільки X є нормальним, то існує відкритий V із X, що

$$A \subset V \subset [V] \subset U$$

Нехай $\psi=\Phi^*[V]$ і розглянемо повні прообрази

$$B_1=\psi^{-1}(Y_1)$$

$$B_2=\psi^{-1}(Y_2).$$

Тоді B_1 і B_2 будуть замкнутими в $[V]$ і, отже, замкнуті в X.

Більше того, ми маємо

$$[V]=B_1 \cup B_2,\ \ A \subset B_1$$

$$\Psi(B_1 \cap B_2) \subset Y_1 \cap Y_2.$$

Як замкнутий підпростір в X, B_2 належить класу C. Оскільки $B_1 \cap B_2$ є замкнутим в B_2 і $Y_1 \cap Y_2$ належить ANE для класу C, то обмеження $\psi \circ B_1 \circ B_2$ має продовження k: $N \to Y_1 \circ Y_2$ на відкритому підпросторі N із B_2, який містить перетин $B_1 \circ B_2$.

Оскільки B_2 є нормальним простором, існує відкрита множина M із B_2, яка задовольнаає:

$$B_1 \circ B_2 \subset M \subset [M] \subset N \subset B_2$$

Тоді B_1 і $[M]$ є замкнутими множинами в X і $B_1 \circ [M]=B_1 \circ [M] \circ B_2=B_1 \circ B_2$ ми можемо задати відображення g: $B_1 \cup [M] \to Y_2$ за формулою:

$$g(x)=\begin{cases} \psi(x), & x \in B_1 \\ k(x), & x \in [M] \end{cases}.$$

Тоді g є продовженням відображення f на $B_1 \cup [M]$. Залишається довести, що $B_1 \cup [M]$ містить відкритий окіл A.

Розглянемо множину $W=(B_1 \cup M) \circ V$. Оскільки $A \subset W \subset B_1 \subset [M]$, то достатньо довести, що W – відкрита множина в X. Зважаючи на те, що $B_1 \circ B_2 \subset M$ і $[V]=B_1 \cup B_2$ ми маємо

$$W= [([V] \backslash B_2 \cup M] \circ V=(V \backslash B_2) \cup (M \circ V).$$

Оскільки M є відкритою множиною в B_2, то існує відкрита множина Q в X така, що $M=B_2 \cap Q$. Тоді ми маємо

$$M \circ V \subset Q \circ V= Q \circ [V] \circ V=$$

$$=Q \circ (B_1 \cup B_2) \circ V \subset [B_1 \cup (Q \circ B_2)] \circ V=(B_1 \cup M) \circ V=W$$

Звідси випливає, що $W=(V \backslash B_2) \cup (Q \circ V)$. Це дає нам, що W є відкритою множиною в X. Твердження доведено.

<u>Твердження 9.2.</u>

Якщо Y_1 і Y_2 –два замкнуті підпростори простору Y, які є абсолютними екстензорами для класу C такі, що $Y_1 \cup Y_2=Y$ і $Y_1 \circ Y_2$ є абсолютними екстензорами для класу C, то обидва Y_1 та Y_2 є абсолютними екстензорами для класу C.

§10. Об'єднання замкнутих екстензорів.

Нам потрібно буде задати сильнішу умову на заданому класі C, а саме, кожний простір в C буде цілком нормальним.

<u>Твердження 10.1.</u>

Нехай Y_1 і Y_2 – два замкнуті підпростори простору Y і $Y=Y_1 \cup Y_2$. Якщо Y_1, Y_2 і $Y_1 \circ Y_2$ є ANE для класу C, то такий є і Y.

<u>Доведення.</u>

Нехай $f\colon A \to Y$ є довільне відображення, яке задане на замкнутому підпросторі довільного простору X з класу C. Ми доведемо, що f має продовження на деяку відкриту множину X, що містить A.

Розглянемо повні прообрази $A_1 = f^{-1}(Y_1)$ та $A_2 = f^{-1}(Y_2)$ в A. Тоді A_1 і A_2 -замкнуті в X і їхні різниці $A_1 \backslash A_2$ і $A_2 \backslash A_1$ відокремлені в X, тобто

$$([A_1 \backslash A_2] \cap (A_1 \backslash A_2)) \cup ((A_1 \backslash A_2) \cap [A_1 \backslash A_2]) = \emptyset$$

Оскільки простір X цілком нормальний, то існує відкрита множина U із X така, що

$$A_1 \backslash A_2 \subset U \subset [U] \subset X \backslash (A_1 \backslash A_2) = (X \backslash A_2) \cup A_1 \backslash A_2$$

Тоді визначимо дві замкнуті множини X_1 та X_2 із X за формулою:

$$X_1 = [U] \cup (A_1 \backslash A_2)$$

$$X_2 = (X \backslash U) \cup (A_1 \backslash A_2)$$

Тоді наступні співідношення очевидні:

$$X_1 \cap A = A_1, \ \ X_2 \cap A = A_2, \ \ X_1 \cup X_2 = X.$$

Оскільки $Y_1 \cap Y_2$ є ANE для класу C і $A_1 \cap A_2$ є замкнутим в $X_1 \cup X_2$, що належить класу C, то звуження відображення $f\colon A_1 \to A_2$ має продовження $\Phi\colon M \to Y_1 \circ Y_2$ на деякий підпростір M із $X_1 \cup X_2$.

Надалі доведення (10.1) аналогічне доведенню (8.1). Твердження доведене.

<u>Твердження 10.2.</u>

Нехай Y_1 і Y_2 – два замкнуті підпростори Y і $Y = Y_1 \cup Y_2$.

Якщо Y_1, Y_2 і $Y_1 \cap Y_2$ є AE для класу C, то таким же буде і простір Y.

§11. Канонічні покриття.

Для подальших прикладів абсолютного екстензора і особливо для класу *M* всіх метризованих просторів, ми будемо використовувати продовження Дугунджі з теореми Тітце, яка буде подана в §14.

В даному параграфі і двох наступних ми будемо використовувати факти із §14.

Нехай дано *X* – простір і *A* – замкнутий підпростір із *X*. Покриття *X*\A буде сімейством *γ* відкритих підмножин *X\A* і буде називатися канонічним покриттям простору *X\A* тоді і тільки тоді, коли задовольнятимуться наступні аксіоми.

<u>Аксіома 1.</u> γ – є локально скінченний, тобто кожна точка із *X\A* має окіл, який перетинає тільки скінченне число відкритих множин в γ.

<u>Аксіома 2.</u> Кожний окіл довільної граничної точки з A в X містить нескінченну кількість відкритих множин з γ.

<u>Аксіома 3.</u> Для кожного околу *V* точки *a є A* в *X*, існує відображення *U* точки *a* в *X*, яка міститься в *V* так, що кожна відкрита множина *U є γ*, яка перетинає *W*, також міститься в *V*.

<u>Лема 11.1.</u>

Якщо *X* - метризований простір і *A* замкнутий підпростір в *X*, то існує канонічне покриття *X\A*.

<u>Доведення.</u>

Нехай через $d: X^2 \to R$ ми позначимо функцію відстані, яка породжує топологію *X*. Для кожної точки *x* із *X\A*, через S_x позначимо відкритий окіл точки *x* в *X*, що задано формулою.

$$S_x = \{ y \in X,\ d(x, y) < \frac{1}{2} d(x, A)\}$$

Ми отримали відкрите покриття $\{S_x,\ x \in X\backslash A\}$ в $X\backslash A$. Як метризований простір, $X\backslash A$ є паракомпатом. Тоді відкрите покриття

$$\{S_x,\ x \in X\backslash A\}$$

має локально скінченне відкрите подрібнення в γ. Залишилось перевірити, що γ задовольняє умови аксіом 2 і 3.

Нехай V довільно заданий окіл точки $a \in A$ в X. Існує дійсне додатнє число k таке, що для кожного $y \in X$ з нерівності $d(a,y)<2k$ випливає $y \in V$. Через W – позначимо окіл точки a заданий формулою:

$$W = \{y \in X,\ d(a, y) < \frac{1}{2} k\}.$$

Для перевірки аксіоми 3 припустимо, що $U \in \gamma$ перетинає W для деякої точки $y \in X$.

Оскільки γ є подрібненням $\{S_x,\ x \in X\backslash A\}$, то існує точка x із $X\backslash A$, що $y \in U \subset S_x$. За означенням S_x, ми маємо:

$$d(a, x) \leq d(a,y) + d(x,y) < \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} d(x,A) \leq \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} d(a, x).$$

Звідси випливає, що $d(a, x)<k.$ Тоді для довільної точки z із S_x, ми отримаємо:

$$d(a,z) \leq d(a,x) + d(x,z) < \frac{3}{2} d(a,x) < 2k.$$

Це означає,що $z \in V$. Тоді $U \subset S_x \subset V$ і аксіому 3 перевірено.

Для перевірки аксіоми 2 припустимо, що *a* є граничною точкою замкнутої множини *A*. Ми будемо доводити, що *V* містить нескінченно багато відкритих множин з *γ.* Для цього достатньо показати, що *V* містить множину *U* із *γ* і окіл *V* точки *a* не перетинає *U*.

Оскільки *a* є граничною точкою в *A*, то окіл *W* повинен містити точку *y* із *X\A*. Тоді існує відкрита множина $U \in \gamma$, яка містить *y*, як і вище.

$$U \subset S_x \subset V \qquad d\,(a, x) = k' \subset k$$

Через V' позначимо окіл, що задається формулою

$$V' = \{z \in X,\ d(a, z) < \frac{1}{2} k'\}.$$

Тоді ясно, що $V' \subset V$ і $W' \cap W = \emptyset$.

Цим самим лему доведено.

<u>Зауваження 11.2.</u>

Канонічне покриття *γ* із *X\A* побудоване при доведенні задовольняє $d(A,U)>0$ для довільного $U \in \gamma$.

§12. Заміщення політопами.

<u>Твердження 12.1.</u>

Якщо *X* метризований простір, а *A* замкнутий підпростір в *X*, то існує простір *Y* і відображення $\mu: X \to Y$, яке має наступні властивості:

(1) Звуження $\mu|A$ є гомоморфізм з А на замкнутому підпросторі $\mu(A) \in Y$.

(2) Відкритий підпростір *Y*, $\mu(A) \in Y$ є нескінченим сімпліціальним політопом з топологією Уайтхеда і $\mu(X\backslash A) \subset Y\backslash\mu(A)$

(3) Кожний окіл граничної точки, яка належить *μ(A)* в *Y* містить нескінченно багато сімплексів з сімпліціальними політопами *Y\μ(A).*

Доведення.

Нехай γ буде канонічним покриттям простору $X \setminus A$, а $N=N(\gamma)$ – це геометричний нерв покриття γ.

За означенням, N – це нескінченний сімпліціальний політоп з топологією Уайтхеда, яка також відома як слабка топологія. Вершина нерва N знаходиться у взаємнооднозначній відповідності з відкритою множиною з γ. Будемо позначати V_U вершину, яка відповідає околові $U \in \gamma$.

Нехай через Y позначимо множину, яка складається з точок, що належать A і цього нерва N так, що $Y = A \bigcup N$ і є дизюнктним об'єднання A і N.

Топологізуємо простір Y наступним чином:

Нехай y – довільна точка із Y. Якщо $y \in N$, то базис околів точки y із Y вибираємо так, щоб всі ці околи були околами з N.

Якщо $y \in A$, то задаємо базис околів в цій точці y так:

Нехай V буде довільним околом точки y в X. Тоді V – це окіл в Y, який складається з точок $A \bigcap V$ і усіх замкнутих зірок $St(V_U)$ в N так, що виконується умова $U \in V$.

Ми знаємо, що Y з такою топологією буде хаусдорфовим простором і, що обидві такі множини A і N будучи підпросторами в Y зберігають оригінальні (початкові) топології.

Очевидно, що N є відкритою в Y, а також A замкнута в Y. Оскільки γ – локально скінченне покриття метризованого простору $X \setminus A$, то ми можемо означити канонічне відображення $\chi: X \setminus A \to N$ наступним способом:

Нехай d – функція відстані $X\backslash A$, яка породжує топологію на $X\backslash A$. Нехай x – довільна точка з $X\backslash A$. Оскільки покриття γ є локально скінченним, то x міститься тільки в γ. Скажемо- в $U_0, U_1, \ldots, U_n$.

Нехай через Δ позначимо замкнутий n-мірний сімплекс в нерві N, чиї вершини співставляються відкритим множинам $U_0, U_1, \ldots, U_n$.

Тоді $\chi(x)$ – точка цього симплекса Δ з баріцентричними координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, які задані формулою:

$$\xi_i = d(x, X \setminus U_i) / \left[\sum_{j=0}^{n} d(x, X \setminus U_j) \right].$$

Тепер ми побудуємо функцію $\mu: X \to Y$ за формулою:

$$\mu(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ \chi(x), & x \in X \setminus A \end{cases} .$$

За твердженням про комбіновані відображення для доведення неперервності μ достатньо показати, що μ неперервна в граничних точках множини $A \in X$.

Для цього, нехай a – довільна точка A в X. Позначимо через A^* базисний окіл точки $\mu(a)$ в Y. За означенням, V^* задається $V(a)$ в X. За умов аксіоми 3 про канонічне покриття γ існує окіл $W \in V$ точки a в X такий, що кожний $U \in \gamma$, який перетинає W міститься також в V.

Ми стверджуємо, що $\mu(W) \in V^*$.

Справді, вибираємо довільну точку $x \in W$ і доведемо, що $\mu(x) \in V^*$. Якщо $x \in A$, то

$$\mu(x) = x \in A \cap W \subset A \cap V \subset V^*.$$

Якщо $x \in X\backslash A$, то $\mu(x) = \chi(x) \in N$. Оскільки сімейство

$$\{St(V_U)|U \in \gamma\}$$

покриває нерв *N*, то існує окіл $U \in \gamma$ такий, що

$$\chi(x) \in St(V_U).$$

Звідси випливає, що $x \in U$ у відповідності з означенням *χ.* Таким чином, *U* перетинає *W* в точці *x*, а значить, $U \in V$.

З означення множини *V** випливає, що $St(V_U) \in V*$, отже,

$$\mu(x) \in St(V_U) \in V*.$$

Цим завершується перевірка, що μ є відображенням.

Властивості (1)-(3) тепер випливають негайно.

§13. Топологічні лінійні простори.

Під *топологічним лінійним простором* ми розуміємо лінійний простір *L* над полем дійсних чисел *R* разом з топологією Хаусдорфа так, що сума *x+y*, а також множення на скаляр *α·x* є неперервними операціями в даній топології на *L* і в звичайній топології на *R*.

Далі подаємо два приклади топологічного лінійного простору.

<u>Приклад 13.1</u>

Довільна топологічна степінь R^M дійсної прямої *R* є топологічним лінійним простором. За означенням, точка *x* із R^M – це функція $x{:}M \to R$, а сума *x+y* і *αx* задаються формулами:

$$(x+y)(m) = x(m) + y(m)$$
$$[\alpha(x)](m) = \alpha[x(m)]$$

для довільного $m \in M$ і $x, y \in R, \alpha \in R$.

Твердження 13.2

Топологічний добуток довільного сімейства топологічних лінійних просторів також буде топологічним лінійним простором.

Приклад 13.3.

Будь-який нормований лінійний простір буде топологічним лінійним простором.

Тут під нормованим лінійним простором ми розуміємо лінійний простір *L* над полем *R* дійсних чисел разом з нормою, тобто дійсною функцією заданою на *L*, яка задовольняє наступні умови:

(Умова 1) $\|\Theta\| = 0$ і $\|x\| > 0,$ якщо $x \neq \Theta$

(Умова 2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(Умова 3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для довільних дійсних чисел α,

де Θ - нульовий елемент з *L* і $|\alpha|, \alpha \in R$ - це абсолютна веливича дійсного числа α. Якщо задати відстань між двома елементами *x* та *y* формулою:

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

то ми, очевидно, отримаємо метричний простір *L*.

Якщо нормований лінійний простір є повним, то він називається *Банаховим*.

Тепер нехай *L* – заданий топологічний лінійний простір. Множина *K* в *L* називається *опуклою*, якщо для кожного скінченного числа точок з *K*, наприклад $v_0, v_1, \ldots, v_n$ маємо, що лінійна комбінація

$$\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in K$$

для довільних невід’ємних дійсних чисел

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1.$$

Для довільної множини *S* в *L* назвемо опуклою оболонкою множину *S* в *L* , перетин усіх опуклих множин яких містить *S*.

Оскільки перетин опуклих множин є опуклим, то опукла оболонка – це найменша опукла множина в *L*, яка містить *S*.

Топологічний лінійний простір *L* називається *локально опуклим*, якщо для будь-якої точки $x \in L$ кожний окіл цієї точки містить опуклий окіл даної точки.

Ця умова, ясно, що виконується, якщо кожний окіл нульового елемента Θ в *L* містить деякий опуклий окіл цього елемента Θ.

Ми можемо легко перевірити, що обидва простори подані в прикладах 13.1 і 13.3 локально опуклі.

Одне з перших питань у дослідженні лінійних топологічних просторів є таким : знайти умови при яких простір буде нормований, тобто сказати чи здатний він бути нормованим.

Щоб відповісти на це питання треба задати обмежені множини.

Множина *S* топологічного лінійного простору *L* називається *обмеженою*, якщо для будь-якого околу $U(\Theta)$ нульового елемента Θ в *L* існує дійсне число $\alpha > 0$ таке, що

$$S \subset \alpha U = \{\alpha x | x \in U\}.$$

Теорема 13.4.

Топологічний лінійний простір можна нормувати, якщо він містить відкриту множину, яка є одночасно обмеженою і опуклою.

§14. Теорема Дугунджі про продовження.

Теорема 14.1.

Якщо $f: A \to L$ довільне відображення , яке задане на замкнутій підмножині A будь-якого метризованого простору X в локально опуклому топологічному лінійному просторі L, то існує продовження $g: X \to L$ відображення f таке, що $g(X)$ міститься в опуклій оболонці $f(A)$ в L (тобто локально опуклим топологічним лінійним простором буде AE, бо образ $g(X)$ попадає в опуклу оболонку $<f(X)>$).

Доведення.

Розглянемо простір $Y=A\cup N$ і відображення $\mu: X \to Y$ (§12). Достатньо довести, що відображення $f: A \to L$ має продовження $F:Y \to L$ таке, що $F(Y)$ міститься в опуклій оболонці $f(A)$ в L. Насправді, композиція $g=F\circ\mu: X \to L$ має продовження f таке, що $g(X)$ міститься в опуклій оболонці $F(A)$ в L.

Нехай d – функція відстані в X, яка породжує топологію на X і нехай γ – канонічне покриття простору $X\setminus A$, яке було використано для побудови простору Y та відображення μ з §12. Позначимо через N^0 множину усіх вершин сімпліціального політопа N. Ми будемо спочатку означувати відображення Φ на множині $A\cup N^0$ наступним чином:

З кожної відкритої множини $U(\gamma)$ вибираємо точку x_U і вибираємо точку $a_U\in A$ таку, що

$$d(x_U,a_U) < 2d(x_U,A)$$

Відображення Φ буде задане, якщо ми покладемо:

$$\Phi(a)=f(a), \qquad a\in A$$

$$\Phi(v_U)= f(a_U), \quad v_U\in N^0$$

Оскільки N^0 є множиною ізольованих точок, то $\Phi|N^0$, очевидно, є неперервним. Отже, для перевірки неперервності Φ досить перевірити це для граничних точок множини A. Виберемо довільну граничну точку a для множини A в X. Позначимо через M довільно вибраний окіл точки $\Phi(a)=f(a)$ в просторі L.

З непервності відображення f випливає, що існує додатнє дійсне число δ таке, що для довільного $b\in$ A, де (a,b)>δ, випливає, що $f(b)\in M$.

Позначимо через V окіл точки a в X ,який заданий формулою:

$$V=\{x\in X,\ d(a,x)<\frac{\delta}{3}\}.$$

Цей окіл V задає базисний окіл V^* точки $a=\mu(a)$ в просторі Y, як це зроблено в §12. Ми завершимо доведення неперервності відображення Φ, якщо покажемо, що

$$\Phi[V^*\cap(A\cup N^0)]\subset M.$$

Нехай y - довільна точка $V^*\cap(a\cup N^0)$. Ми будемо доводити, що $\Phi(y)$ належить N. Якщо $y\in A$, то

$$y\in V^*\cap A=V\cap A.$$

Отже,

$$d(a,y)<\frac{\delta}{3}<\delta.$$

Звідси випливає, що $\Phi(y) = f(y) \in N$. Якщо $y \in N^0$, то $y = v_U$ для деякого $U \in \gamma$ з умовою, що $U \in V$. Звіди видно, що $d(a, x_U) < \frac{\delta}{3}$. Отже,

$$d(a, a_U) \le d(a, x_U) + d(x_U, a_U) < d(a, x_U) + 2d(x_U, A) \le 3d(a, x_U) \le \delta$$

Тоді $\Phi(v_U) = f(a_U) \in D$. Цим завершується доведення неперервності відображення *Φ*.

Оскільки *L* є лінійним простором, то ми можемо продовжити лінійно до деякого сімплексу з *N* відображення *Φ*, яке задано на вершинах і отримати функцію

F: Y→L

Ми довели, що *F* є відображенням. Оскільки сума і скалярний добуток в *L* є неперервним, то *F* є неперервним на кожному сімплексі з *N*. Тоді з топології Уайтхеда випливає, що *F* є неперервний в *N*.

Для того, щоб довести неперервність *F*, достатньо перевірити неперервність в граничних точках *A*, що входять в *Y*.

Нехай *a* – довільна гранична точка *A* із *Y* і *M* – довільно вибраний окіл точки *F(a)* в *L*. Оскільки *L* є локально опуклий, то *M* містить опуклий окіл *K* точки *f(a)* в *L*. Оскільки *Φ* є неперервний, то існує базисний окіл *V** точки *a* в *Y* для якої виконується:

$$\Phi[V^* \cap (A \cup N^0)] \subset K$$

Цей базисний окіл *V** задається околом *V (a)* , як це описано в §12. За аксіомою 3, існує окіл *W* точки *a* в *X* з умовою $W \subset V$ і такий, що кожний $U \in \gamma$, який перетинає *W,* міститься в *V*.

Окіл W визначає базисний окіл W^* для a в Y. Ми завершимо доведення неперервності F показавши, що

$$F(W^*) \subset K$$

Нехай y є довільною точкою в W^*. Ми доведемо, що $F(y) \subset K$. Якщо $y \in A$, то

$$y \in W^* \bigcap A = W \bigcap A \subset V \bigcap A = V^* \bigcap A.$$

Звідси випливає, що $F(y) = \Phi(y) \in K$. Якщо $y \in A$, то y є точкою деякої зірки $St(v_U)$ з умовою, що $U \subset W$ за означенням W^*. Точка у є внутрішньою точкою сімплексу Δ з N.

Нехай вершинами Δ будуть точки $v_{U_0}, \ldots, v_{U_n}$. Оскільки $y \in St(v_U)$, то U – один із відкритих множин $U_0, \ldots, U_n$. За означенням нерва, ми маємо, що для кожного $i=0,1,\ldots,n$ окіл U_i перетинає U і отже, W. Звідси видно, що $U_i \subset V$ для довільних $i=0,\ldots,n$ і отже, всі вершини $v_{U_0}, \ldots, v_{U_n}$ знаходяться в $V^* \bigcap N^0$. Таким чином, $\Phi(v_{U_i}) \in K, i = 0, \ldots, n$. Оскільки K є опуклим, а F є лінійним на Δ, то $F(\Delta) \subset K$. Зокрема, ми маємо $F(y) \subset K$. Цим завершується доведення, що F є відображенням.

Оскільки $\Phi(A \bigcup N^0) = f(A)$ і оскільки F продовжує Φ лінійно над будь-яким сімплексом із N, то, очевидно, що $F(y)$ міститься в опуклій оболонці в $f(A)$. Теорема доведена.

Наслідок 14.2.

Кожна опукла множина в локально опуклому топологічному лінійному просторі є АЕ для класу M всіх метризованих просторів.

§15. Одинична сфера в нормованому лінійному просторі.

Нехай L – довільний нормований простір. Використовуючи термінологію алгебраїчної топології замість теорії банахового простору ми будемо брати множину

$$S=\{x \in L,\ \|x\| = 1\}$$

і називатимемо її одиничною сферою у нормованому лінійному просторі L, а множину

$$B=\{x \in L \mid \|x\| \le 1\}$$

називатимемо одиничною кулею в L. Зокрема, якщо L – n-мірний евклідовий простір E^n, то B є одиничною n-кулею B^n і S є $(n-1)$-сферою S^{n-1}.

Нехай $n \ge 0$. Множина X називається n-асферичною, якщо кожне відображення $f: S^n \to X$, яке задане на одиничній n-сфері S^n, має продовження до одиничної $(n+1)$-кулі B^{n+1}.

Лема 15.1

Якщо одинична сфера S у нормованому лінійному просторі L не є компактом, то S є n-асферична для кожного $n \ge 0$.

Доведення.

Нехай $f: S^n \to S$ є відображенням S^n на S. Оскільки $f(S^n)$ є компактом, хоча саме S не є компактом, то існує хоча б одна точка $s_0 \in S$ така, що $s_0 \notin f(S^n)$.

Ми будемо задавати відображення $g: B^{n+1} \to S$ наступним чином.

Нехай *x* – довільна точка кулі B^{n+1} і нехай $|x|$ - це відстань від початку до *x*. Тоді *x* є центром кулі B^{n+1}, якщо $|x|=0$ Якщо $|x|>0$, то будемо позначати через *s* точку $\frac{x}{|x|}\in S^n$. Тоді відображення *g* задається формулою:

$$g(x)=\begin{cases} s_0, & |x|=0 \\ \dfrac{|x|f(s)+(1-|x|)s_0}{\left\| |x|f(s)+(1-|x|)s_0 \right\|}, & |x|>0 \end{cases}.$$

Отже, знаменник не дорівнює нулю, тому $f(s)\neq s_0$. Неперервність відображення *g* в кулі може бути легко перевірена, а в усіх інших випадках очевидна.

За означенням відображення *g* ясно, що $g\circ S^n=f$.

Теорема 15.2.

Якщо одинична сфера *S* в нормованому лінійному просторі *L* не є компактною, то *S* є АЕ для класу всіх метризованих просторів.

Доведення.

Нехай $g:A\to S$ - довільне відображення на замкнутому підпросторі простору *X*. Як при доведенні 14.1, розглянемо простір $Y=A\bigcup N$ і відображення $\mu:X\to Y$ з §12. Достатньо довести, що відображення *g* має продовження на *Y*.

Композиція $f=i\circ g: A\to Y$ двох відображень $g:A\to S$ та відображення вкладення $i: S\to L$ має продовження $F:Y\to L$, як це побудовано при доведенні теореми 14.1. Нехай

$$H=\{y\in Y | F(y)\neq\Theta\},$$

де через Θ позначено початок *L*. Тоді *M* є відкрита множина в *Y*, що містить *A*. Розглянемо об'єднання *К* всіх замкнутих сімплексів з *N*, які містяться в *M*. Тоді *К* є замкнутим політопом в *N* за побудовою простору *Y* (§12). Легко перевірити, що $A \bigcup K$ є замкнутим околом множини *A* в *Y*. Більше того, оскільки

$$F\left(A \bigcup N^0\right) = \Phi\left(A \bigcup N^0\right) \subset f(A),$$

то підполітоп *К* із *N* містить усі вершини *N*. Позначимо через $r : L \setminus \{\Theta\} \to S$ ретракцію, задану формулою

$$r(x) = \frac{x}{|x|}$$

для кожного $x \in L \setminus \{\Theta\}$. Тоді відображення $g : A \to S$ має продовження $\psi : A \bigcup K \to S$, яке задане формулою

$$\psi(y) = r[F(y)]$$

для довільного $y \in A \bigcup K$.

Для кожного цілого $n \geq 0$ позначимо через N^n *n*-мірний скелетон цього нерва *N*, тобто об'єднання всіх сімплексів з *N* розмірності не більше ніж *n*. Ми будемо будувати для довільного $n \geq 0$ відображення

$$\psi_n : A \bigcup K \bigcup N^n \to S$$

таке, що $\psi_0 = \psi$ і $\psi_n \Big| A \bigcup K \bigcup N^{n-1} = \psi_{n-1}$ для довільного *n*>0. Це може бути легко доведено за індукцією. Справді, нехай *n*>0 і припустимо, що ψ_{n-1} вже побудоване. Оскільки *S* *n-1*-асферична за теоремою 15.1, то ψ_{n-1} може бути продовжено на кожний *n*-мірний сімплекс, що не лежить в *K*. Це дає нам продовження ψ_n відображення ψ_{n-1} на $A \bigcup K \bigcup N^n$ і цим завершується індуктивна побудова відображення ψ_n.

Нарешті, задаємо відображення $G{:}Y \to S$ формулою:

$$G(y) = \begin{cases} \psi_n(y), & y \in N^n \subset N \\ g(y), & y \in A \end{cases}$$

Оскільки $A \bigcup K$ є замкнутим околом в A і оскільки нерв має топологію Уайтхеда, то легко перевірити неперервність G. Далі, оскільки $G \circ A = g$, то воно є продовженням g.

<u>Наслідок 15.3</u>

Якщо одинична сфера S в нормальному лінійному просторі L не є компактною, то одинична куля B в L не має властивості нерухомої точки.

<u>Доведення</u>

Ми будемо будувати відображення $\varphi : B \to B$, яке не має нерухомої точки. Оскільки S замкнутий підпростір простору B, то з теореми 15.2 випливає, що тотожнє відображення $g : S \to S$ має продовження $G : B \to S$. Задаємо відображення Φ формулою:

$$\Phi(x) = -G(x)$$

для довільного $x \in B$.

Тоді, ясно, що Φ немає нерухомої точки.

§16. Метризовані екстензори.

<u>Теорема 16.1.</u>

Якщо Y – метризований простір, який належить AE для класу метризованих просторів, то:

1. *Y* є АЕ для класу цілком нормальних і досконалих нормальних просторів.
2. *Y* є АЕ для класу цілком нормальних просторів тоді і тільки тоді, коли *Y* – топологічно повний.
3. *Y* є АЕ для класу досконало нормальних просторів тоді і тільки тоді, коли *Y* – сепарабельний.
4. *Y* є АЕ для класу всіх нормальних просторів тоді і тільки тоді, коли *Y* – сепарабельний і топологічно повний.
5. *Y* є АЕ для класу *C*, який містить простір, шо не є нормальним тоді і тільки тоді, коли *Y* складається з одноточкової множини.

Доведення.

Нехай *Y* довільно вибраний метризований простір і *d* – функція відстані,яка робить *Y* метризованим простором. Ми можемо припустити, що *d* – обмежуюча метрика. Справді, якщо *d** - це довільна функція відстані на *Y*, то ми можемо завжди задати обмежену метрику на *Y* формулою:

$$d(a,b)=\frac{d^*(a,b)}{1+d^*(a,b)}$$

для кожної пари чисел $a,b\in Y$. Позначимо через *L=C(Y)* множину всіх обмежених неперервних функцій заданих на *Y*. Тоді *L* утворює лінійний простір над множиною дійсних чисел, якщо ми задаємо операцію наступним чином:

$$\begin{aligned}(f+g)(y)&=f(y)+g(y)\\(\alpha f)(y)&=\alpha[f(y)]\end{aligned}$$

для довільних $f,g\in G$ і $y\in G$, а $f\in L$.

Для кожного $f\in L$ ми задаємо норму формулою:

$$\|f\| = \sup|f(y)|$$

Властивості норми (1)-(3) з теореми 13.3 легко перевірити. Очевидно, *L* – повний. Отже, *L* - банаховий простір. Для довільної точки $\alpha \in Y$ розглянемо обмежену неперервну дійсну функцію, яка задана формулою:

$$f_a(y) = d(a, y), \qquad y \in Y$$

Позначимо через $\chi : Y \to L$ функцію, яка задана такою формулою :

$$\chi(a) = f(a), \quad a \in Y$$

Тоді ми маємо наступну лему:

<u>Лема 16.2.</u>

Функція χ є ізометричним відображенням з *Y* в *L* при *L=C(Y)* і ця функція називається канонічним ізометричним вкладенням обмеженого метричного простору *Y*.

<u>Доведення.</u>

Для довільної пари точок $a,b \in Y$ ми маємо

$$d(a,b) = |f_a(b) - f_b(b)| \le \|f_a - f_b\| = \sup_{y \in Y} |d(a,y) - d(b,y)| \le d(a,b)$$

Звідси випливає, що

$$d[\chi(a), \chi(b)] = \|f_a - f_b\| = d(a,b)$$

Отже, χ є ізометричним вкладенням.

Далі, нам потрібна буде наступна лема:

<u>Лема16.3.(Лема Арсена)</u>

Кожний банаховий простір є АЕ для класу усіх цілком нормальних просторів.

Доведення.

Нехай *R* – довільно вибраний банаховий простір і *f:A→L* довільне відображення, яке задане на замкнутому підпросторі *A* довільного цілком нормального простору *X*. Задаємо псевдометрику *G* на *A* формулою:

$$q(a,b) = \| f(a) - f(b) \|$$

для довільної пари точок *a,b*$\in$*A.* Відповідно до теореми про продовження псевдо метрик, *q* може бути продовжено на весь простір *X*.

Для довільного *x*$\in$*X* задаємо

$$q(x, A) = \inf\ q(x, a), \quad a \in A$$

Це продовжує відображення *f* на підпростір

$$B = \{x \in X | q(x, A) = 0\}$$

наступним чином:

Нехай *b*$\in$*B*. Для довільного $\delta > 0$ задаємо

$$N_\delta = \{a \in A | q(b, a) < \delta\}$$

Оскільки *L* – повний простір і $f(N_\delta)$ прямує до нуля при $\delta \to 0$, то існує єдина точка, яку ми назвемо *f(b)*, яка є спільна для всього образу замикання $[f(N_\delta)]$. Це продовжує *f* до всього *B.* Неперервність очевидна.

Введемо відношення еквівалентності на *X*, вважаючи, що a еквівалентно *b*, якщо $q(a, b) = 0$ для довільних $a, b \in X$.

Розглянемо фактор-простір X*=X/~ , а природню проекцію $p : X \to X^*$ задаємо як функцію відстані *d* на *X** формулою:

$$d(\xi, \eta) = q(x, y)$$

для довільної пари точок *ξ* та *η* з *X**, де точки *x* та *y* належать *X* з умовою *ξ=p(x)* і *η=p(y)*. З даною функцією *d* простір стає метричним.

Розглянемо образ *B*=p(B)* в *X*.* Тоді *B** є замкнутий підпростір метричного простору. Нехай $b^* \in B^*$ і вибираємо точку $b \in B$ так, щоб *p(b)=b**. Можна легко бачити, що *f(b)* залежить тільки від *b*.* Отже, співвідношення *b*→f(b)* задає функцію *f*:B*→L* за формулою

$$f = f^* \circ p$$

За фактор-топологією в *B*, f** буде відображенням. А, насправді, *f** є ізометричним відображенням. За теоремою 14.1 *f** має продовження *g*:X*→L.* Звідси випливає, що композиція $g = g^* \circ \emptyset$*: X→L* є продовження відображення *L*.

<u>Доведення (1).</u>

Нехай *f:A→Y* – довільне відображення задане на замкнутому підпросторі *A* простору *X*, який є одночасно цілком нормальним і досконало нормальним.

Нехай *Y* вкладено в банаховий простір *L* за допомогою канонічного ізометричного вкладення $\chi : Y \to L$

Оскільки X є цілком нормальний, то з 16.3. випливає, що композиція

$$g = \chi \circ f : A \to L$$

має продовження *g:X→L*.

В просторі $L \times I$ ми ототожнюємо замкнуті підмножини $L \times 0$ із самим L. Тоді Y є замкнутим в метричному просторі $M = (L \times I) \setminus (L \setminus Y)$.

Так як *A* – замкнута множина в досконалому нормальному просторі *X*, то *A* є також g_δ-множиною в *X*. Отже, існує відображення $\Phi: X \to I$ таке, що $A = \varphi^{-1}(0)$. Задаємо відображення $H: X \to M$ формулою:

$$H(x) = \{G(x), \Phi(x)\}$$

для довільного $x \in X$.

Якщо *Y* є ANE для класу *M*, то тотожнє відображення на *Y* має продовження $r: V \to Y$ на деякий окіл *V* простору *Y* в *M.*

Нехай $U = H^{-1}(V)$, тоді *U* є відкритим околом множини *A* в *X*. Відображення $F: U \to Y$, *яке* задане формулою:

$$F(x) = r[H(x)]$$

для довільного $x \in U$, є продовженням відображення *f.* Цим доведено, що *Y* є ANE.

Якщо *Y* є AE для класу *M*, то ми маємо *V=M* і, отже, *U=X.* Цим доведено, що *Y* є AE для класу цілком нормальних і досконало нормальних просторів.

Доведення (2).

Нехай $f: A \to Y$ – довільне відображення задане на замкнутому підпросторі *A* цілком нормального простору *X*. Оскільки *Y* – топологічно повний, то він має обмежену функцію відстані, яка перетворює цей простір *Y* на повний метричний простір. Тоді вкладаємо *Y* в банаховий простір *L=C(Y)* за допомогою канонічного ізометричного вкладення $\chi : Y \to L$.

За теоремою 16.3 композиція

$$g = \chi \circ f : A \to L$$

має продовження $G : X \to L$. Оскільки χ є ізометричним вкладенням, а *Y* повний простір, то звідси випливає, що *Y* – замкнутий в *L*.

Якщо *Y* є ANE для класу *M*, то тотожнє відображення на *Y* має продовження на $r\colon V \supset Y$ на деякий відкритий окіл *V(Y)* в *L*.

Позначимо $U=G^{-1}(V)$. Тоді *U* є околом множини *A* в *X*. Відображення $F\colon U \to V$, яке задане формулою:

$$F(x) = r[G(x)]$$

для $x \in U$ є продовженням відображення *f*. Цим доведено, що *U* є ANE для даного класу. Якщо *Y* є AE для класу *M*, то ми маємо *V=L*, отже, *U=X*. Цим самим доведено, що *Y* є AE для класу (2).

<u>Доведення (3).</u>

Це доводимо так само, як і (1) заміною вкладення *Y* в банаховий простір *L* на вкладення *Y* як підпростору зліченного топологічного добутку R^{ω} дійсної прямої *R*.

За теоремою 7.3. композиція

$$g = I \circ f : A \to R^{\omega}$$

має продовження $G : X \to R^{\omega}$.

<u>Доведення (4).</u>

Це доведення аналогічне доведенню пункту (1), але замість вкладення *Y* як замкнутої множини підпростору в *L*, ми розглядаємо *Y* як замкнутий підпростір в R^{ω}

Спочатку вкладемо Y в R^{ω}. Оскільки Y – топологічно повний, то він є типу G_{δ} в R^{ω}. Тоді Y гомоморфічно замкнутому підпростору в $R^{\omega} \times R^{\omega}$. І останній простір гомоморфний R^{ω}.

Доведення (5).

Оскільки Y складається тільки з однієї точки, то він належить AE для будь-яких класів просторів.

Зауваження 16.4.

Теорема 16.1 також правильна для хаусдорфових просторів.

§17. Локальні ANE.

Ми розглянемо питання: чи є властивість простору бути ANE для класу *C* є локальною властивістю. Відповідь буде позитивна, якщо всі простори в класі *C* будуть регулярними і цілком нормальними.

Простір *Y* буде локальним ANE для даного класу *C*, якщо кожна точка з *Y* має окіл, який належить ANE для класу *C*. Отже, за теоремою 8.2 *Y* буде сам належати ANE для класу *C*, якщо кожний простір в *C* є нормальним.

Для загального простору *Y* ми маємо наступню теорему Ханнера.

Теорема 17.1.

Якщо всі простори з даного класу *C* регулярні та цілком нормальні, то кожен локальний ANE буде ANE для цього класу.

Як наслідок випливає:

Теорема 17.2.

Кожний локально триангульований простір належить ANE для класу *C*.

Наступнє твердження є спеціальним випадком теореми 17.2.

Теорема 17.3.

Кожний локально скінченний сімпліціальний політоп належить ANE для класу *C*.

Твердження 17.4.

Кожний локально - евклідовий простір належить класу абсолютних околових екстензорів для класу *C.*

§18. Деякі леми.

Лема 18.1.

Якщо $\alpha = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ є локально скінченним замкнутим покриттям простору X, то кожна точка $x \in X$ має окіл V такий, що $\forall \lambda \in \Lambda \quad U_\lambda \bigcap V =$ ∅. Це вірно, якщо $x \notin U_\lambda$.

Доведення.

Оскільки λ - локально скінченний, то x має окіл W, який перетинає U_λ тільки для скінченного числа індексів $\lambda \in \Lambda$, скажемо $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Припустимо, що $x \in U_\lambda$ для $\lambda = \lambda_1 \ldots \lambda_m$ і $x \in U$ для $\lambda = \lambda_{ь+1} \ldots \lambda_m$. Оскільки кожне U_λ є замкнутим, то $V = W \setminus \left[U_{\lambda_{m+1}} \bigcup \ldots \bigcup U_{\lambda n}\right]$ є околом x.

Нехай U_λ - деякий елемент, який перетинає V. Оскільки $V \subset W$, то λ є один із n індексів $\lambda_1, \ldots \lambda_n$. Але, за означенням, V є дизюнктне з кожним U_{λ_i}, якщо $m < i < n$. Тоді λ повинно бути одним із $\lambda_1, \ldots \lambda_m$. Це означає, що $x \in U_\lambda$.

Лема 18.2.

Нехай *A* – замкнутий підпростір простору *X* і нехай *U* – відкрита підмножина з *A*. Якщо *G* є відкритою множиною в *X* такою, що $U \subset G$, то множина $V = U \bigcup (G \setminus A)$ є відкритою в *X*.

Доведення.

Оскільки *U* відкрита в *A*, то існує відкрита множина $H \subset X$, що $U = H \bigcap A$. Тоді ми маємо

$$V = (U \bigcap G) \bigcup (G \setminus A) = (H \bigcap A \bigcap G) \bigcup (G \setminus A) =$$

$$= (H \bigcap G) \bigcup (G \setminus A)$$

V є відкритою в *X* як об'єднання двох відкритих множин множина $H \bigcap G$ і $G \setminus A$.

Лема 18.3.

Нехай *A* – замкнутий підпростір цілком нормального простору *X*. Якщо $\alpha = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ є локально скінченним відкритим покриттям *A*, то існує локально скінченне відкрите покриття $\beta = \{V_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ таке, що

$$V_\lambda \bigcap A = U_\lambda$$

для $\forall \lambda \in \Lambda$.

Лема 18.4.

Кожне локально скінченне відкрите покриття нормального простору має локально скінченне відкрите подрібнення, яке є поелементно рівномірно точково скінченним.

Лема 18.5.

Нехай *A* – замкнутий підпростір нормального простору *X*. Якщо $\alpha = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ є локально скінченним відкритим покриттям в *A* і $\beta = \{V_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ є локально скінченним відкритим покриттям в *X* такі, що

$$V_\lambda \bigcap A = U_\lambda$$

для $\forall \lambda \in \Lambda$, то існує замкнутий окіл *H* простору *A* в *X* і локально скінченне замкнуте покриття

$$\chi = \{H_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$$

простору *H*, яке задовольняє наступні дві умови:

1. $H \bigcap A = U_\lambda$ для $\forall \lambda \in \Lambda$,
2. для довільної скінченної множини індексів $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ умова $U_{\lambda_1} \bigcap \ldots \bigcap U_{\lambda_n} = \emptyset$ тягне за собою умову $H_{\lambda_1} \bigcap \ldots \bigcap H_{\lambda_n} = \emptyset$.

Лема 18.6.

Нехай *A* є замкнутим підпростором простору *X* і $\alpha = \{X_\lambda\}$ є локально скінченне замкнуте покриття *X*. Якщо для $\forall \lambda \in \Lambda$ існує окіл B_λ множини $X_\lambda \bigcap A$ в X_λ, то множина *B*= B_λ є околом простору *A* в *X*.

Лема 18.7.

Нехай *A* є замкнутою підмножиною нормального простору *X* і нехай X' є замкнутим підпростором *X* з умовою $A' = X' \bigcap A$. Якщо B' є замкнутим околом множини A' в X', то існує замкнутий окіл *B(A)* в *X* такий, що $B' = X' \bigcap B$. Тоді ми можемо записати $B = B' \bigcap B^*, \quad B^* \subset \{X \setminus X'\}$.

ЛЕКЦІЯ № 5. Абсолютні ретракти і абсолютні околові ретракти.

В даному розділі буде означено поняття абсолютного ретракта (AR) і абсолютного околового ретракта (ANR), а також будуть встановлені їх зв'язки з екстензорами. Ми покажемо, що клас M усіх метризованих просторів є найкращим вибором серед інших класів. У наступних розділах будуть вивчатися сімпліціальні політопи, які пов'язані з природою ANR.

§1. AR і ANR для класу просторів.

Нехай C буде довільний топологічний клас. Під абсолютним ретрактом для класу C ми розумієм Y з класу C такий, що кожний гомеоморфний образ простору Y на замкнуту підмножину h(Y) у просторі Z з класу C обов'язково є ретрактом цього Z.

Абсолютним околовим ретрактом називається такий простір Y, що його гомеоморфний образ h(Y) є замкнутим підпростором деякого простору Z, причому існує окіл U в цьому Z даного образу h(Y), який ретрагується на Y.

Твердження 1.1. Кожен AR буде ANR.

Твердження 1.2. Нехай B буде деякий топологічний клас, що міститься в класі C, і нехай Y простір з B, тоді якщо Y є AR в класі C, то Y буде AR в класі B.

Якщо Y складається з однієї точки, то він буде AR для кожного класу C, який складається з одноточкового простору.

§2. Теорема Ейленберга-Войдиславського.

Важливими в теорії AR та ANR є наступні тереми.

Теорема 2.1. Образ æ(Y) канонічного ізометричного вкладення æ: Y→L обмеженого метричного простору Y в банаховий простір L=C(Y) обмежених неперервних дійснозначних функцій на Y буде замкнутою підмножиною випуклої оболонки Z образу æ(Y) в L. Якщо Y сепарабельний, то такий же Z.

<u>Доведення.</u> Щоб довести, що æ(Y) замкнута підмножина в Z достатньо довести, що Z\æ(Y) буде відкритий в Z.

Нехай g довільна точка в доповненні Z\æ(Y). Оскільки Z випукла оболонка образу æ(Y), то існує скінчений набір точок $a_1,...,a_n$ в Y такий, що

$$g=\sum_{i=1}^{n} t_i f_i, \quad \text{де } f_i = æ(a_i)$$

де кожне число $t_i \geq 0$, і виконується умова

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1.$$

Оскільки g не належить æ(Y), то маємо, що $g \neq f_i$ для $\forall i = 1,2,...,n.$ Зафіксуємо додатнє дійсне число δ таке, що

$$\delta < \frac{1}{2} d(g, f_i)$$

для $\forall i = 1,2,...,n,$ де через d позначена відстань між функціями в L=C(Y), яка задається нормою. Позначимо через V_δ відкритий окіл точки g в Z, який задається формулою

$$V_\delta = \{\Phi \in Z \mid d(g,\Phi) < \delta\}$$

Ми буде доводити, що окіл V_δ міститься в Z\ æ(Y).

Для цього припустимо, що існує точка $y \in Y$ з умовою $f = æ(y) \in V_\delta$.За вибором числа δ ми маємо рівність

$$d[æ(a_i), æ(y)] = d(f_i, f) > \delta$$

для $\forall i = 1, 2, ..., n.$ Оскільки æ є ізометричним відображенням, то звідси випливає, що

$$f_i(y) = d(a_i, y) > \delta$$

для $\forall i = 1, 2, ..., n.$ Ми одержимо :

$$d(g, f) = g - \|g - f\| \geq |g(y) - f(y)| - |g(y)| = \sum_{i=1}^{n} t_i f_i(y) > (\sum_{i=1}^{n} t_i)\delta = \delta$$

Ми одержали протиріччя з припущенням, що $f \in V_\delta$. Отже, $V_\delta \subset$Z\æ(Y). Тим самим доведено, що æ(Y) є замкнутою підмножиною в Z.

Щоб довести другу частину теореми припустимо, що Y сепарабельний. Оскільки æ(Y) гомеоморфний самому Y, то він також сепарабельний. Нехай C буде зліченною всюди щільною підмножиною æ(Y). Скінченні підмножини C утворюють зліченне сімейство Г. Нехай $\gamma = (c_1, ..., c_q)$ буде довільна скінченна підмножина в C. Опукла оболонка H(γ) в L є скінченне об'єднання замкнутих сімплексів з вершинами $c_1, ..., c_q$, отже воно сепарабельне. Оскільки опукла оболонка Q=H(C) множини C в L є об'єднанням

$$Q = H(C) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} H(\gamma).$$

зліченного сімейства сепарабельних множин, то Q само сепарабельне. Нехай D буде зліченною всюди щільною підмножиною в Q. Будемо доводити, що D також всюди щільна в Z.

Для цього нехай $z \in$ Z і $\delta > 0$ довільне зафіксоване число. Тоді існує скінченне число точок $x_1, ..., x_m$ в æ(Y) таке, що

$$z = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i \, ,$$

де кожне $t_i \geq 0$ є дійсним числом і виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = 1.$$

Оскільки C всюди щільне в æ(Y), то існують числа $c_1,\dots,c_m$ в C такі, що

$$d(x_i, c_i) < \frac{1}{2}\delta$$

для $\forall i = 1, 2, \dots, m.$ Нехай через *p* позначена точка

$$p = \sum_{i-1}^{m} t_i c_i$$

в Q. Звідси випливає, що

$$d(z, p) \le \sum_{i=1}^{m} t_i d(x_i, c_i) < (\sum_{i=1}^{m} t_i)\frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$$

Оскільки *p* знаходиться в Q, а D всюди щільна в Q, то існує точка $a \in$ D, для якої виконується

$$d(p, a) < \frac{\delta}{2}$$

Ми одержимо

$$d(z,a) \le d(z,p) + d(p,a) < \delta$$

Цим доведено, що D всюди щільна в Z, отже Z сепарабельний.

§3. Зв'язок з екстензорами.

Теорема 3.1. Нехай Y- простір з топологічного класу C. Якщо Y абсолютний екстензор (AE) для класу C, то Y буде також AR для класу C.

Доведення. Доведемо теорему для околових екстензорів (ANE) і околових ретрактів (ANR).

Розглянемо довільний гомеоморфізм h: $Y \to Z_0$ простору Y на замкнутий підпростір Z_0 простору Z з класу C. Оскільки Y є ANE для класу C, то відображення

$$f=h^{-1}: Z_0 \to Y$$

має продовження g: $U \to Y$ на деякий відкритий підпростір $U \supset Z_0$ простору Z. Тоді композиція відображень $r = h \circ g$: $U \to Z_0$ буде ретракцією і отже доведено, що Y є ANR для класу C.

<u>Теорема 3.2.</u> Нехай через C позначено один із наступних топологічних класів:

(a) нормальні простори,

(б) колективно нормальні простори,

(c) цілком нормальні простори,

(d) нормальні ліндельофові простори,

(f) компактні хаусдорфові простори,

(g) всі компактні метризовні простори ,

(h) метризовні простори,

(k) сепарабельні метризовні простори.

Тоді кожен ANR буде ANE.

<u>Доведення.</u> а) доведемо теорему для ANR і ANE.

Нехай Y довільний ANR для класу C. Щоб довести, що Y також належить класу ANE розглянемо довільне відображення f:$A \to Y$, яке визначене на замкнутому підпросторі A простору X. Досить показати, що f може бути продовжене на деякий окіл простору A в X. Ми будемо це доводити для трьох випадків:

1) Нехай C буде один із вищеназваних класів (a)-(f). Розглянемо склеєний простір Z, який одержаний склеюванням X та Y по відображенню f. Простір Z також належить класу C. Розглянемо природню проекцію $p:W\to Z$ топологічної суми $W=X+Y$ на Z та їх звуження

$$i=p|Y \quad , \qquad j=p|X$$

Тоді $i: Y\to Z_0$ буде гомеоморфізмом простору Y на замкнутий простір Z_0 в Z. Оскільки Y є ANR для класу C, то існує окіл V простору Z_0 в Z разом з ретракцією $r:V\to Z_0$. Повний прообраз $U=j^{-1}(V)$ відображення $j:X\to Z$ є околом множини A в просторі X. Задаємо відображення $g:U\to Y$ формулою

$$g(x) = (i^{-1}\circ r)\,[j(x)]$$

для кожного $x\in U$. Тоді g буде продовженням відображення f на U. Цим завершується доведення випадку 1).

2) Припустимо, що C буде один з вищеназваних класів (h)-(k). Оскільки Y метризовний простір, то вибираємо на Y обмежену метрику і розглядаємо канонічне ізометричне відображення æ: $Y\to L$ в банаховий простір $L=C(Y)$. За теоремою (2.1). образ Z_0=æ(Y) є замкнутою підмножиною опуклої оболонки цього образу æ(Y). Якщо C є клас всіх сепарабельних метризованих просторів, то Y є сепарабельним, отже Z також сепарабельний за другою частиною теореми (2.1). Отже, Z є простором з класу C. Оскільки Y є ANR для класу C, то існує окіл V простору Z_0 в Z разом з ретракцією r: $V\supset Z_0$. З другої сторони звідси випливає, що композиція

$$\Phi=æ\circ f : A\to L$$

має продовження ψ: X→L таке, що ψ(X) міститься в опуклій оболонці множини

$$\Phi(A) \subset æ(Y)$$

Звідси випливає, що ψ(X)⊂Z. Тоді повний прообраз U= $\psi^{-1}(V)$ буде околом множини A в просторі X. Задаємо відображення g: U→Y формулою

$$g(x)=æ^{-1}\{r[\psi(x)]\}$$

для кожного x∈U. Таким чином g є продовженням f на U. Цим завершується доведення 2).

3). Нарешті припустимо, що C належить класу усіх компактних метризованих просторів. Оскільки Y компактний метризовний простір, то існує гомеоморфізм h:Y→Z_0 на замкнуту підмножину Z_0 гільбертового куба Z=I^w. Оскільки I^w є компактним метризовним простором, а Y-ANR для класу всіх компактних метризовних просторів, то існує окіл V простору Z_0 в кубі I^w разом з ретракцією r: V⊃ Z_0. З іншої сторони композиція відображень

$$\Phi=h\circ f: A\to I^w$$

має продовження ψ: X→I^w. Повний прообраз U= $\psi^{-1}(V)$ є околом A в X. Задаємо відображення g: U→Y формулою

$$g(x)=(h^{-1}\circ r)[\psi(x)]$$

для кожного x∈U. Тоді g буде продовженням f на U. Цим завершується доведення випадку 3).

§4. Метризовні ретракти.

Теорема 4.1. Нехай Y буде AR (ANR) для класу M всіх метризованих просторів. Тоді:

(a) Y буде AR (ANR) для класу H всіх просторів, які є цілком нормальні.

(b) Y є AR (ANR) для классу J всіх цілком нормальних просторів тоді і тільки тоді коли Y топологічно повний.

(c) Y є AR (ANR) для класу G всіх досконало нормальних просторів тоді і тільки тоді коли Y сепарабельний.

(d) Y є AR (ANR) для класу N всіх нормальних просторів тоді і тільки тоді, коли Y сепарабельний і топологічно повний.

(e) Y є AR (ANR) для класу T всіх тихоновських просторів тоді і тільки тоді, коли Y компактний (сепарабельний і локально компактний).

Доведення. Ми будемо доводити теорему для ANR.

(a). Оскільки Y-ANR для класу M, то звідси випливає, що Y є ANE для класу M. Звідси слідує, що Y буде ANE для класу H. Нарешті, за теоремою (3.1), Y є ANR для класу H.

(b). Достатність пункту (b) може бути доведено як продовження доведення (a) з використанням теореми (3.2). Щоб довести необхідність пункту (b) розглядаємо довільний метризовний простір Y, який є ANR для класу J. Будемо доводити, що Y топологічно повний. Клас усіх топологічних просторів співпадає з класом усіх G_δ множин. Далі, під абсолютною G_δ множиною ми розуміємо метризовний простір, який будучи вкладеним в метризовний простір, буде простором типу G_δ. Ось чому ми вкладаємо простір Y в метризовний Z. Цього достатньо, щоб довести, що Y зобов’язаний бути G_δ в Z.

Візьмемо на Z іншу топологію, яка складається з усіх множин

$$H \cup K$$

де H – довільна відкрита множина в просторі Z, а K – довільна підмножина Z\Y. Ми будемо позначати через Z* простір одержаний наділенням Z цією новою топологією. Тоді Z* є хаусдорфовий простір і містить Y як замкнуту підмножину. Треба ести, що Z* є цілком нормальний.

Для цього нехай α – довільне відкрите покриття простору Z*, α={U_λ}. Для будь-якого λ окіл U_λ має вигляд

$$U_\lambda=H_\lambda \cup K_\lambda.$$

де H_λ – відкрита множина простору Z і K_λ є підмножиною Z\Y. Позначимо через H об'єднання множин H_λ, для всіх λ . Тоді H буде відкритою множиною в просторі Z і $Y \subset H$. Як підпростір метризовного простору Z, H є цілком нормальним, тому існує відкрите зірчато вписане подрібнення $\{G_\mu \mid \mu \in M\}$ відкритого покриття { H_λ} множини H. Доповнимо цей набір $\{G_\mu \mid \mu \in M\}$ до відкритого покриття ß простору Z* додаванням сімейства всіх точок в Z\H, кожна така точка є відкритою множиною в Z*. Можна догадатись, що ß є зірчато вписаним подрібненням α. Оскільки α – довільне, то цим самим доведено, що Z* є цілком нормальним.

Оскільки Y є ANR для класу J і замкнутий в Z*, то існує відкритий окіл U вY в просторі Z* разом з ретракцією $r:U \supset Y$.

Нехай через d ми позначимо метрину, яка породжує топологію на Z. Оскільки топологія на Z* містить кожну відкриту множину в Z, то d буде неперервна відносно топології Z*. Задаємо невід'ємну дійсну функцію Φ на U формулою.

$$\Phi(x)=d[x, r(x)]$$

для кожного $x \in U$. Оскільки обидва r та d неперервні, то таким же буде і Φ. Оскільки Φ(x)=0 тоді і тільки тоді, коли $x \in Y$, то звідси випливає, що Y має вигляд G_δ в U. Більше того, існує послідовність $\{U_n \mid n=1,2,\ldots\}$ відкритих підмножин в U таких, що

$$Y=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Оскільки U_n відкрита у відкритій множині U простору Z*, то вона відкрита в Z*. Отже, U_n має вигляд

$$U_n = H_n \cup K_n$$

де H_n – відкрита множина простору Z, а K_n – підмножина Z\Y. Отже, $Y \subset H_n$ а значить

$$Y= \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Цим доведено, що Y виду G_δ в просторі Z. Доведення пункту (b) завершено.

Пункти (c) і (d) випливають з теорем (3.1) і (3.2).

(e). Щоб довести достатність пункту (e) припустимо, що Y вкладений як замкнутий підпростір в тихоновський простір Z. За теоремою Тихонова про вкладення ми можемо вважати Z підпростором топологічного добутку $T=I^M$ замкнутого одиничного інтервалу I=[0,1]. Будемо доводити, що Y є околовим ретрактом Z.

Спочатку розглянемо випадок коли Y компакт. Тоді Y буде замкнутим в T. Як компактний метризовний простір, Y є сепарабельним і топологічно повним. Отже, за пунктом (d), Y буде ANR для класу всіх нормальних просторів. Як компактний хаусдорфовий простір, T буде нормальним. Отже, існує ретракція q: $V \supset Y$ деякого околу V(Y) на Y. Тоді множина

$$U=V \cap Z$$

буде околом Y в тихоновському просторі Z, а звуження r=q/U буде ретракцією U на Y.

Розглянемо випадок коли Y сепарабельний, локально компактний, але не компактний.

Нехай $\overline{Y}$ означає замикання Y в T; тоді $\overline{Y}$ компактний. З другої сторони нехай Y* означає одноточкову компактифікацію Y. Оскільки Y сепарабельний і метризовний, то такий же буде Y*. Більше того, ми можемо розглядати Y* як підпростір гільбертового кубу H=I^w.

Нехай j:$\overline{Y} \to Y^*$ задає функцію за формулою

$$j(x)=\begin{cases} x \;, & \textit{якщо} \quad x \in Y \\ \infty \;, & \textit{якщо} \quad x \in \overline{Y} \setminus Y \end{cases}$$

Щоб довести неперервність j зафіксуємо довільну відкриту множину U в Y*. Якщо $\infty \in$U, то Y*\U буде компактною підмножиною Y. Тоді j^{-1}(U) буде доповненням компактної підмножини $\overline{Y}$, отже відкрито в $\overline{Y}$. Якщо $\infty \notin$U, то U є відкритою підмножиною в Y і j^{-1}(U)=U. Оскільки Y локально компактний , то звідси випливає, що Y відкритий в $\overline{Y}$. Отже, j^{-1}(U) відкрите в $\overline{Y}$. Це означає, що j буде неперервним відображенням.

Оскільки гільбертовий куб H є AE для класу всіх нормальних просторів, то композиція

$$K=i \circ j : \overline{Y} \to H$$

відображення j та вкладення i:Y*$\subset$ H буде мати продовження h:T→H.

Оскільки Y* замкнутий в H, то Y буде замкнутий в H\{∞}. Оскільки Y є ANR для класу M і H\{∞} є простором в M, то існує ретракція r: W$\supset$Y відкритого околу W простору Y в $H\backslash\{\infty\}$ на Y. Оскільки $H\backslash\{\infty\}$ є відкритим в H, то таким буде і W. Отже, повний прообраз $V=h^{-1}(W)$ є відкритою множиною в T і містить Y. Нехай

$$U=V\cap Z.$$

Тоді U буде відкритим околом простору Y в Z і відображення $S: U\to Y$, яке задано формулою

$$S(x) = r[h(x)] \ , \quad (x \in U)$$

буде ретракцією U на Y. Це завершує доведення достатності пункту (e).

Щоб довести необхідність пункту (e), нехай Y буде ANR для класу T. За пунктом (c) і зауваженням (4.2) в кінці розділу, ми зауважимо, що Y має буди сепарабельним. Це зобов'язує довести локальну компактність Y.

Вкладемо Y в гільбертовий куб $H=I^{w}$ і нехай T позначає тихоновський куб, тобто незліченну топологічну степінь I^{M} замкнутого одиничного інтервалу I=[0,1]. В топологічному добутку $H\times T$, який також є тихоновським кубом, розглянемо множину

$$S=[Y\times\{\Theta\}]\cup[H\times(T/\{\Theta\})]$$

де Θ позначає точку в кубі T. Тоді S є тихоновським простором і $Y\times\{\Theta\}$ є замкнутим підпростором S. Оскільки $Y\times\{\Theta\}$ гомеоморфно Y і Y є ANR, то існує відкрита множина V в S, яка містить $Y\times\{\Theta\}$ і існує рефракція

$$r: V\supset Y\times\{\Theta\}.$$

Допустимо, що Y не локально компактне і приведемо до протиріччя. Для цього будемо доводити, що існує точка $u\in H$ та окіл W точки Θ в T, який задовольняє три умови:

(1) u $\in \overline{Y}$

(2) u $\notin Y$

(3) {u}×(W\{Θ}) $\subset$V

Оскільки Y не є локально компактним, то існує точка $y_0 \in Y$ така, що не існує компактного околу точки y_0 в Y. Оскільки V є відкритою множиною в S і містить точку (y_0, Θ), то звідси випливає для топології добутку, що існує замкнутий окіл U точки y_0 в H та окіл W точки Θ в T такий, що

$$(y_0, \Theta) \in (U\times W) \cap S \subset V$$

Множина U$\cap$Y є околом точки y_0 в Y і отже не є компактною. Оскільки U компактне, то U$\cap$Y не може бути замкнена в U. Існує точка u $\in$U, яка знаходиться в замиканні U$\cap$Y але не в Y. Ця точка u задовольняє умови (1)-(3).

Тепер нехай через d позначена метрика на гільбертовому кубі H. Для будь-якого цілого числа n позначимо

$$U_n=\{y \in Y \mid d(u,y)<\frac{1}{n}\}$$

Використовуючи умову (2), ми маємо :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n=\varnothing$$

За умови (1) ми бачимо, що U_n є непорожнім для кожного n. Зафіксуємо точку $y_n \in U_n$. Ми одержимо послідовність $\{y_n\}$,яка збігається до u.

Оскільки U_n відкритий в Y, то повний прообраз

$$V_n=r^{-1}(U_n\times\{\Theta\})$$

буде відкритою множиною в S. Оскільки точка (y_n, Θ) належить V_n, то існує окіл W_n точки Θ в T такий, що

$$\{y_n\}\times W_n \text{ с } V_n$$

іншими словами, ми маємо

$$r(\{y_n\}\times W_n) \subset U_n\times\{\Theta\}.$$

<u>Теорема.</u> Для кожної заданої послідовності околів $\{U_n \mid n=1,2\ldots\}$ початку ϑ, перетин $\bigcap_{n-1}^{\infty} U_n$ містить I^{α} для не більше як зліченного числа індексів $\lambda\in\alpha$. Оскільки α є незліченним, то існує таке λ, що $I_\lambda \in U_n$ для довільного n.

Застосуємо цю теорему до послідовності W, $W_1, W_2, \ldots, W_n\ldots$ околів точки Θ в тихоновському кубі T. Ми одержимо відрізок I_λ в T, який міститься в W і кожному W_n. Ми маємо

$$\{U\}\times(I_\lambda\backslash\{\Theta\}) \subset V$$

а також

$$r(\{y_n\}\times I_\lambda) \subset U_n\times\{\Theta\}$$

для кожного n. Нехай m>n. Тоді з умови $U_m\subset U_n$ ми одержимо

$$r(\{y_m\}\times I_\lambda) \subset U_n\times\{\Theta\}, \text{ де}$$

r – неперервне відображення і задане на $\{U\}\times(I_\lambda\backslash\{\Theta\})$. І оскільки $y_m\to u$, то одержимо

$$r(\{U\}\times(I_\lambda\backslash\{\Theta\})\subset \overline{U}_n\times\{\Theta\}$$

для кожного n, де $\overline{U}_n$ замикання U_n в Y. Оскільки

$$\overline{U}_n \subset U_{n-1}$$

то ми одержимо протиріччя. Цим завершується доведення.

Зауваження 4.2. Теорема (4.1) також вірна, якщо кожний простір з вищеназваних класів є хаусдорфовим.

§5. Спеціальні метризовні ретракти.

В даному розділі ми будемо розглядати AR(ANR) з додатковими умовами сепарабельності чи компактності. Чи можуть ці простори бути AR(ANR) для ширших класів.

Лема 5.1. Якщо Y є AR(ANR) для класу всіх компактних метризованих просторів, то Y буде AE(ANE) для класу всіх нормальних просторів.

Доведення. а) Доведемо для ANR.

Оскільки Y компактний метризовний простір, то можемо вважати його замкнутим підпростором гільбертового кубу I^w. Оскільки Y є ANR, то існує ретракція r: V$\supset$Y околу V в Y на Y.

Щоб довести, що Y є ANE для класу N усіх нормальних просторів, нехай f: A→Y буде довільне відображення замкнутого підпростору A в нормальному X. Композиція

$$\Phi = i \circ f : A \to I^w$$

має продовження ψ: X→I^w.

Нехай U = $\psi^{-1}(V)$, тоді U є околом множини A в X. Задаємо відображення g: U→Y формулою

$$g(x)=r[\psi(x)]$$

для кожного x є U. Тоді g буде продовженням на U. Це доводить, що Y є ANE для класу всіх нормальних просторів.

Твердження 5.2. Кожний AR (відповідно ANR) для класу всіх компактних метризовних просторів буде також AR (відповідно ANR) для класу всіх нормальних просторів.

Зокрема і для класу метризовних просторів.

Лема5.3. Якщо Y є AR (ANR) для класу всіх сепарабельних метризовних просторів, то Y буде AE (ANE) для класу усіх цілком нормальних просторів.

Доведення. а) доведемо для ANR.

Наділяємо Y обмеженою метрикою і розглянемо канонічне ізометричне вкладення æ$: Y \to L$ простору Y в банаховий простір $L = C(Y)$. За теоремою (2.1) образ æ(Y) буде замкнутий в опуклій оболонці Z простору æ(Y) в L. Більше того, Z є сепарабельним метризованим простором, таким, як в другій частині теореми (2.1). Оскільки Y є ANR, то він гомеоморфний образу æ(Y).Отже, існує ретракція $r: V \supset$ æ(Y) деякого околу V образу æ(Y) в Z на æ(Y).

Щоб довести, що Y є ANE для класу всіх цілком нормальних просторів, нехай $f: A \to Y$ буде довільне відображення, яке задане на замкнутому підпросторі A цілком нормального простору X. За теоремою про те, що кожна опукла множина в локально-опуклому топологічному лінійному просторі є AE для класу *M* всіх метризованих просторів, простір Z буде AE для класу всіх метризованих просторів. Оскільки Z сепарабельний, то Z буде AE. Отже, композиція

$$\Phi = æ \circ f : A \to Z$$

має продовження $\psi : X \to Z$.

Нехай $U=\psi^{-1}(V)$. Тоді U є околом множини A в X . Задаємо відображення $g:U\to Y$ формулою

$$g(x)=æ^{-1}r[\psi(x)]$$

для кожного $x \in U$. Тоді g є продовженням на U. Цим доведемо, що Y буде ANR.

§6. AR та ANR.

Розглядаємо AR та ANR тільки для метризованих просторів.

Твердження 6.1. Метризований простір Y є AR (ANR) тоді і тільки тоді, коли він гемеоморфний ретракту (відповідно околовому ретракту) опуклої підмножини банахового простору.

Твердження 6.2. Сепарабельний метризований простір Y є AR (ANR) тоді і тільки тоді, коли він гемеоморфний ретракту (відповідно околовому ретракту) сепарабельної опуклої підмножини банахового простору.

Твердження 6.3. Компактний метризований простір Y є AR (ANR) тоді і тільки тоді, коли він гомеоморфний ретракту (відповідно околовому ретракту) гільбертового куба I^w.

Наслідок 6.4. Кожна опукла підмножина банахового простору є AR .

Зокрема, сімлекс Δ^n, куб I^n, гільбертовий куб I^w, евклідовий простір R^n, гільбертовий простір R^w ,а також всі банахові простори є AR .

Твердження 6.5. Кожний AR є ANR

Роз’яснення: Ми можемо вважати околом точки весь простір X і

тоді означення AR перефразовується на означення ANR заміною X на окіл $V=X$.

ЛЕКЦІЯ №6.

§7. Елементарні властивості AR та ANR

Теорема 7.1. Кожний AR є стягуваним і кожний ANR є локально стягуваним.

Зокрема, кожен AR є n-асферичний для $\forall n \geq 0$, а також n-зв'язний для $\forall n \geq 0$. Так само, кожен ANR локально зв'язний в будь-якій розмірності $n \geq 0$.

Твердження 7.2. Кожний стягуваний ANR буде AR.

Твердження 7.3. Якщо ANR є n-асферичний для $\forall n \geq 0$,то він буде AR.

Оскільки гільбертовий куб I^w має властивість нерухомої точки, то маємо теорему:

Теорема 7.4. Кожний компактний AR має властивість нерухомої точки.

Твердження 7.5. Топологічний добуток скінченого або зліченого сімейства AR також буде AR.

Зауваження: тут зліченність важлива, бо топологічний добуток незліченного сімейства метризовних просторів, взагалі кажучи, може не бути метризовним.

Твердження 7.6. Топологічний добуток скінченного сімейства ANR є ANR.

Твердження 7.7. Кожний ретракт (відповідно околовий ретракт) AR (ANR) також буде AR (ANR).

Теорема 7.8. Кожний скінченно тріангульовний простір є ANR.

Твердження 7.9. Кожний відкритий постір ANR буде ANR.

Теорема 7.10. Нехай X є AR, тоді замкнута підмножина A простору X буде AR тоді і тільки тоді, коли A є сильним деформаційним ретрактом X .

Доведення. Достатність випливає із твердження (7.7). Щоб довести необхідність розглянемо замкнуту підмножину

$$Q = (X \times \{0\}) \bigcup (A \times I) \bigcup (X \times \{1\})$$

топологічного добутку $P = X \times I$. Оскільки A є AR і замкнутий в X, то існує ретракція $r : X \supset A$. Задаємо відображення $F : Q \to X$ за формулою

$$F = \begin{cases} x \quad , \quad якщо \quad x \in X \quad i \quad t = 0 \\ x \quad , \quad якщо \quad x \in A \quad i \quad t \in I \\ r(x) \quad , \quad якщо \quad x \in X \quad i \quad t = 1 \end{cases}$$

Оскільки X є AR і Q замкнута в P, то з (3.2) випливає, що F має продовження $H : P \to X$. Задаємо гомотопію $h_t : X \to X$ ($o \le t \le 1$) формулою

$$h_t(x) = H(x,t)$$

для кожного $t \in I$ і кожного $x \in X$. Тоді h_0 буде тотожнім відображенням, h_1 буде ретракцією r , $h_t(x) = x$ для $\forall x \in A$ і $\forall t \in I$. Отже, A буде сильним деформаційним ретрактом X .

§8. Локальна характеризація.

В даному розділі ми одержимо локальну характеризацією ANR . Іншими словами, властивість метризованого простору бути ANR є локальна властивість.

Метризований простір Y називається локальним ANR, якщо кожна точка $y \in Y$ має окіл, який є ANR .

Теорема 8.1. Кожен локальний ANR буде ANR.

Наслідок 8.2. Якщо метризований простір Y локально скінченно тріангульовний, то Y буде ANR.

Наслідок 8.3. Якщо метризований простір Y локально евклідовий, то Y буде ANR.

Наслідок 8.4. Кожний локально скінченний сімплексіальний політон є ANR.

§9. Сімплексіальні політопи.

Теорема (7.8) показує, що скінчений сімплексіальний політоп є ANR. Політоп називається нескінченним, якщо він складається з нескінченної кількості сімплексів або, що те саме, з нескінченного числа вершин. Підполітопом політопа K називаємо об'єднання замкнених сімплексів.

Топологія на політопі K повинна задовольняти дві умови: (1)

.Кожен підполітоп має бути замкненою підмножиною в K.

(2).Кожен скінчений підполітоп в K розглядається як підпростір і має евклідову топологію.

Політоп називається локально скінченним, якщо зірка його кожної вершини скінченна. Вище названі умови задають єдину топологію на K. Може бути доведено, що ця топологія перетворює K в локально компактний метризовний простір і що кожна точка в K має окіл, який є скінченним підполітопом.

Однак, якщо політоп K не є локально скінченним, ми можемо означити дві різні топології, які задовольняють двом вищеназваним аксіомам. Одна з цих топологій буде називатися топологією Уайтхеда, а інша- метричною топологією.

Топологія Уайтхеда на K задається наступним чином: множину $U \subset K$ назвемо відкритою, якщо для кожного замкнутого симплекса $\Delta \in K$ перетин $U \bigcap \Delta$ є відкритою множиною в Δ. При такому означені дві вище -названі аксіоми задовольняються. Така топологія перетворює K в CW – комплекс.

Щоб задати метричну топологію ,нам потрібно наступне поняття. Нехай $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ позначає вершини політопа K. Точка $y \in K$ задається своїми баріцентричними координатами $\{y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, які задовольняють умови:

(BC1) $0 \le y_\lambda \le 1,\ \forall \lambda \in \Lambda$;

(BC2) $y_\lambda = 0$ виконується для скінченного числа індексів;

(BC3) $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda = 1$.

Тепер для довільних двох точок $y, z \in K$ задаємо метрику

$$d(y,z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} |y_\lambda - z_\lambda|$$

Топологія, яка породжена цією метрикою d називається метричною топологією на K. Це та сама топологія, яка породжується наступною метрикою:

$$d(y,z) = \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda} (y_\lambda - z_\lambda)^2}$$

і яка називається природною метрикою. В такій топології послідовність точок $\{y^n\}$ буде збіжною до точки y тоді і тільки тоді, коли $\forall \lambda \in \Lambda$ послідовність $\{y^n_\lambda\}$ дійсних чисел збігається до y_λ. Функція $f : X \to K$ довільного простору

X в просторі K називається неперервною, якщо для будь-якого λ всі координати $\{f_\lambda(x)\}$ є неперервними в X.

Якщо політоп K не є локально скінченним, то названі дві топології не є однаковими. Так топологія Уайтхеда не є метризовна, окільки вона не задовольняє першу аксіому зліченості .

В обох топологіях відкрита зірка вершини V_λ, тобто множина

$$St(v_\lambda) = \{y \in K | y_\lambda > 0\}$$

є відкритою. Так доповнення $K \setminus St(v_\lambda)$ є підполітопом, а отже – замкнуте.

Оскільки доповнення замкнуте, то сама зірка відкрита.

Існує стандартний метод в теорії скінченних політопів для вкладення політопа в сімплекс, який має стільки вершин як і політоп. Для застосування цього методу до скінченних політопів нам необхідно дати поняття повного політопа.

Політоп K називається повним, якщо кожна скінченна підсім'я його вершин окантовує деякий сімплекс. Кожний політоп K може бути вкладений в повний політоп $F(K)$ з тими самими вершинами. Ми наділяємо $F(K)$ тим самим видом топології, яка була на K. Оскільки K є підполітопом $F(K)$, то він є замкнутим підпростором $F(K)$.

§10. Політопи з топологією Уайтхеда.

<u>Лема 10.1.</u> Кожний підполітоп H сімплексіального політопа K з топологією Уайтхеда є околовим ретрактом K.

<u>Доведення.</u> Розглянемо баріцентричне підрозділення $K^\#$ і наділяємо $K^\#$ топологією Уайтхеда. Простори K і $K^\#$ породженні однаковою

множиною точок. Більше того, їх топології також співпадають. Це справджується на кожному замкнутому сімплексі $\Delta \in \mathrm{K}$.

Баріцентричне підрозділення $H^{\#}$ підполітопа H є також підполітопом $K^{\#}$. Ми будемо доводити, що $H^{\#}$ і $K^{\#}$ маєть однакові властивості: якщо вершини сімплекса $\Delta^{\#} \in K^{\#}$ лежать в $H^{\#}$, то сімплекс $\Delta^{\#}$ буде сімплексом в $H^{\#}$. Для цієї мети, нехай $V_o^|, V_1^|, \ldots, V_n^|$ є вершинами сімплекса $\Delta^{\#}$. Тоді всі вершини лежать в замкненому сімплексі $\Delta \in K$, і одна з них, скажемо $V_0^|$ є баріцентром сімплекса Δ. Оскільки $V_0^| \in H^{\#}$, то звідси випливає, що $\Delta \subset H$,і далі випливає, що $\Delta^{\#} \subset H^{\#}$.

Нехай тепер $\{V_\mu \mid \mu \in \mathrm{M}\}$ позначає множину всіх вершин $K^{\#}$ зафіксовану множиною M. Точка $z \in K^{\#}$ однозначно задана своїми баріцентричними координатами $\{z_\mu | \mu \in \mathrm{M}\}$, де

$$\sum_{\mu \in M} z_\mu = 1$$

Нехай $N \subset M$ множина, яка задана формулою

$$N = \{ \mu \in m \,|\, V_\mu^| \in H^{\#} \}$$

і розглянемо дійснозначну функцію $\Phi : K^{\#} \to I$ задану формулою

$$\Phi(Z) = \sum_{\mu \in N} Z_\mu$$

Оскільки Φ є ,очевидно, неперервною на кожному замкнутому сімплексі $\Delta \in K^{\#}$, то вона неперервна і на самому $K^{\#}$, тому що маємо топологію Уайтхеда. Тоді множина

$$U = \{ z \in K^{\#} \,|\, \Phi(z) > 0 \}$$

є відкритим околом $H^{\#}$ в $K^{\#}$

Далі задаємо ретракцію $r: U \to H^{\#}$ беручи в якості образу $r(z)$ точки $z \in U$ таку точку, баріцентричні координати якої мають вигляд

$$[r(z)]_{\mu} = \begin{cases} z_{\mu} / \Phi(z), якщо \, \mu \in N \\ 0 \qquad\qquad , якщо \, \mu \in M \setminus N \end{cases}$$

Отже, $H^{\#}$ є околовим ретрактом $K^{\#}$. Оскільки $H = H^{\#}$ і $K = K^{\#}$ як простори, то цим доведення завершено.

<u>Лема 10.2.</u> Нехай X простір, який задовольняє першу аксіому зліченності і $f: X \to K$ є відображення X в політоп K з топологією Уайтхеда. Якщо $\alpha = \{St(v_{\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda\}$ є відкритим покритям K зірками своїх вершин $\{V_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$, то

$$\beta = f^{-1}(\alpha) = \{ f^{-1}[St(v_{\lambda})] \mid \lambda \in \Lambda \}$$

є локально скінченним відкритим покриттям X .

<u>Доведення.</u> Оскільки β є покритям X ,то залишається довести локальну скінченність β .

Припустимо, що β не є локально скінченне. Тоді існує точка $x_0 \in X$ така, що кожний окіл цієї точки перетинає нескінченне число елементів β . Оскільки $f(x_0)$ є точка деякого сімплакса K, то точка x_0 належить тільки скінченому числу множин $f^{-1}[St(v_{\lambda})]$,скажемо для таких

$$\lambda = \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$$

Тепер ми побудуємо послідовність точок $x_n \in X$ і послідовність індексів $\lambda_n \in \Lambda$, $n = 1,2,\ldots$, які задовольняють умови:

1) $x_n \to x_0$;

2) $x_n = f^{-1}[St(V_{\lambda_n})]$;

3) $\lambda_n \neq \mu_i$, $i = 1,2,\ldots,m$;

4) $\lambda_n \neq \lambda_q$, якщо $n \neq q$.

Нехай $\{U_n \mid n = 1,2,\ldots\}$ є зліченною базою околів в точці x_0. Ми будемо будувати x_n і λ_n індукцією по n. Нехай $n \geq 1$. Якщо $n > 1$, то ми допускаємо, що x_q і λ_q можуть бути побудовані для всіх $q < n$. Оскільки U_n перетинає нескінченно багато множин $f^{-1}[St(V_\lambda)]$, то ми можемо вибрати λ_n відмінне від кожного з індексів

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$$

і таке, що U_n перетинало би прообраз $f^{-1}[St(v_{\lambda_n})]$. Далі вибираємо точку x_n з перетину околу U_n і прообразу $f^{-1}[St(v_{\lambda_n})]$. Цим завершується індуктивна побудова послідовностей $\{x_n\}$ і $\{\lambda_n\}$.

За умовою (3) та означенням індексів $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$, ми маємо

$$x_0 \notin f^{-1}[St(v_{\lambda_n})]$$

цей вираз разом з умовою (2) дають нам, що $f(x_0) \neq f(x_n)$. Нехай тепер V позначає доповнення в K до множини, що складається з точок $f(x_n)$, $n = 1,2,\ldots$, тоді V містить $f(x_0)$ оскільки $f(x_0) \neq f(x_n)$, $\forall n \geq 1$. За умовою (2) і (4) кожний сімплекс $\Delta \in K$ містить тільки скінченне число точок $f(x_n)$; отже $V \cap \Delta$ є відкритим в K.

Нарешті, умова (1) та неперервність відображення f дають нам, що

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

Але це протирічить тому факту, що V є відкритим околом точки $f(x_0)$, який не містить жодної з точок $f(x_n)$.

Теорема 10.3. Кожний повний сімплексіальний політоп з топологією Уайтхеда буде абсолютним екстензором (AE) для класу M всіх метризованих прсторів.

Доведення. Достатньо довести, що кожний повний політоп K з топологією Уайтхеда буде стягувати ANE для даного класу M.

Через $\{y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ позначаємо баріцентричні координати точки $y \in K$. Зафіксуємо деяке $\lambda_0 \in \Lambda$. Задаємо функцію

$$h : K \times I \to K$$

на топологічному добутку $K \times I$ взявши баріцентричні координати точки $h(y,t)$

$$[h(y,t)]_\lambda = \begin{cases} (1-t)y_\lambda, якщо \lambda \neq \lambda_0 \\ (1-t)y_{\lambda_0}, якщо \lambda = \lambda_0 \end{cases}$$

для кожної точки $y \in K$ і числа $t \in I$. Оскільки $h|\Delta \times I$ є неперервне на кожному замкнутому сімплексі $\Delta \in K$, то звідси випливає, що $h-$ гомотопія. Насправді, h стягує K до вершини V_{λ_0}. Отже, K стягуваний.

Щоб довести, що K є ANE, берем $f : A \to K$ відображення, яке задане на замкнутому просторі A метризованого простору X. Для кожного $\lambda \in \Lambda$ позначимо:

$$U_\lambda = f^{-1}[St(v_\lambda)]$$

Тоді $\beta = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ є відкритим покриттям A. Оскільки A задовольняє першу аксіому зліченності, то з леми (10.2) випливає, що β –локально скінчене.

Існує локально скінченне відкрите покриття $\gamma = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ простору X таке, що

$$U_\lambda = V_\lambda \bigcap A$$

для кожного $\lambda \in \Lambda$.

Задаємо відображення $f_\lambda : A \to [0,1]$ як баріцентричну координату точки $f(x)$, що знаходиться на λ – місці. Тоді маємо

$$U_\lambda = \{ x \in A | f_\lambda(x) > 0 \}$$

Продовжимо відображення $f_\lambda : A \to [0,1]$ до відображення $g_\lambda : X \to [0,1]$, взявши спочатку $g_\lambda(x) = 0$, $\forall x \in X \setminus V_\lambda$ і застосувавши до того теорему продовження Тітце-Урисона.

Оскільки γ - локально скінченне покриття, то ми можемо задати відображення $g : X \to R$ формулою

$$g(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda(x)$$

для $\forall x \in X$. Якщо $x \in A$, то маємо

$$g(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) = 1$$

Отже, множина

$$W = \{ x \in X \mid g(x) > 0 \}$$

є відкритим околом множини A в X .

Задаємо відображення $F : W \to K$ формулою

$$[F(x)]_\lambda = \frac{g_\lambda(x)}{g(x)}$$

для кожного $x \in X$ і $\lambda \in \Lambda$. Тоді F буде продовженням f на відкритий окіл W в X. Цим доведено, що K є ANE для класу M.

Теорема 10.4. Кожний сімплексіальний політоп з топологією Уайтхеда належить ANE для класу M всіх метризовних просторів.

Доведення. Нехай K є довільно заданий політоп з топологією Уайтхеда. Ми можемо розглянути K як підполітоп повного політопа $F = F(K)$ також з топологією Уайтхеда.

За теоремою (10.3), F беде AE для класу M. За лемою (10.1), K є околовим ретрактом F. Отже, K є ANE для класу M.

11. Політопи з метричною топологією.

Лема 11.1. Кожний підполітоп H сімплексіального політопа K з метричною топологією є околовим ретрактом K.

Доведення. Використовуємо такий самий метод як в (10.1) і будемо розглядати ті місця, де аргументи залежать від топології K.

Спочатку потрібен факт, що метрична топологія на K узгоджується з баріцентричним підрозділеням $K^{|}$. Далі, ми будем доводити неперервність функції $\Phi : K^{|} \to [0,1]$.

$$\Phi(z) = \sum_{\mu \in N} z_{\mu}$$

Це випливає з

$$\left|\Phi(z) - \Phi(z^{|})\right| \le \sum_{\mu \in N} \left|z_{\mu} - z^{|}_{\mu}\right| \le d(z, z^{|}).$$

Нарешті , кожен $[r(z)]_{\mu}$ буде неперервним в z , а отже, і в $r(z)$.Таким чином $r : U \to H^{|}$ є околова ретракція.

Теорема 11.2. Кожний повний сімплексіальний політоп з метричною топологією є AR.

Доведення. Нехай K повний політоп з метричною топологією. Нехай $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ позначає множину всіх вершин K. Розглянемо банаховий простір S, який складається з усіх дійсних функцій $s:\Lambda \to R$ таких, що

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |s(\lambda)|$$

збіжна. Норма $s \in S$ задається формулою

$$\|s\| = \sum_{\lambda\in\Lambda} |s(\lambda)|$$

Задаємо функцію $h: K \to S$ наступним чином. Нехай $x \in K$ і нехай $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ баріценричні координати точки x. Тоді $h(x)$ – точка в S задана формулою

$$[h(x)](\lambda) = x_\lambda$$

для кожного $\lambda \in \Lambda$. Ця функція h буде ізометрією, оскільки

$$d(x,y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} |x_\lambda - y_\lambda| = \|h(x) - h(y)\|$$

Значить h є гомеоморфізмом на підпросторі $h(K)$ в S. Оскільки політоп K є повним, то очевидно, що $h(K)$ є опуклим. За (6.4), $h(K)$ є AR, а значить таким є K.

Теорема 11.3. Кожний сімплексіальний політоп з метричною топологією буде ANR.

Доведення. Нехай K довільний політоп з метричною топологією. Ми можемо вважати K як підполітоп деякого повного політопа $F = F(K)$ також з метричною топологією.

За лемою (11.1), K є околовим ретрактом F. За (11.2), F є AR, а отже, також є ANR за (6.5). За (7.7), K є ANR.

Лема 11.4. Сімплексіальний політоп з метричною топологією є сепарабельним тоді і тільки тоді, коли він має не більш як зліченне число вершин.

Доведення. Нехай K - довільний політоп з метричною топологією. Якщо K має не більш ніж зліченне число вершин, то він є об'єднанням не більш як зліченного числа сімплексів, а отже- сепарабельний.

З іншої сторони, якщо K має незліченне число вершин, позначимо $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, то він містить незліченно багато взаємно диз'юнктних не - порожніх відкритих множин $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, які задані формулою

$$U_\lambda = \{ x \in K \mid x_\lambda > \frac{1}{2} \},$$

де x_λ позначає λ – баріцентричну координату точки x. Отже, K не може мати скінченної всюди щільної множини. Тому K не є сепарабельним.

Лема 11.5. Сімплексіальний політоп з метричною топологією буде топологічно повним тоді в тільки тоді, коли він не містить нескінченного повного підполітопа.

Доведення. Достатність. Припустимо, що K політоп з метричною топологією, який не містить нескінченного повного підполітопа. Ми будемо доводити, що простір K зі своєю метрикою d є повним.

Вкладаємо ізометрично K в банаховий простір S за допомогою ізометричного вкладення $h: K \to S$ так само, як в доведені (11.2).

Розглянемо довільну послідовність Коші $\{x_n \mid n = 1,2,...\}$ в K. Оскільки банаховий S простір - повний метричний, то x^n збігається до точки $s \in S$. Ми будемо доводити, що $s \in K \subset S$.

За означенням банахового простору S, точка $s \in S$ є функцією $s : \Lambda \to R$. Оскільки $x^n \to s$, то маємо $x^n_\lambda \to s(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Оскільки $0 \le x^n_\lambda \le 1$, то звідси випливає, що $0 \le S(\lambda) \le 1$. Більше того, для $x^n \to s$ ми також робимо висновок, що $\|x^n\| \to \|s\|$. Оскільки $\|x^n\| = 1$, то маємо

$$\|s\| = \sum_{\lambda \in \Lambda} s(\lambda) = 1.$$

Через M позначаємо множину Λ, яка містить такі індекси $\lambda \in \Lambda$, що $s(\lambda) > 0$. Нехай F буде довільна скінченна підмножина M. Оскільки $x^n_\lambda \to s(\lambda)$, то існує ціле число n таке, що $x^n_\lambda > 0$, $\forall \lambda \in F$. Оскільки $x^n \in K$, то звідси випливає, що вершини $\{V_\lambda \mid \lambda \in F\}$ окантовуєть сімплекс в K. Більше того, вершини $\{V_\lambda \mid \lambda \in M\}$ окантовують повний підполітоп H в K. Оскільки K не містить нескінченного повного підполітопа, то M повинна бути скінченна, а значить K має бути сімплексом. Оскільки $0 \le s(\lambda) \le 1$ і $\|s\| = 1$, то звідси випливає, що $s \in K$. Отже, K є повним метричним простором.

Необхідність. Припустимо, що K політоп з метричною топологією і він є топологічно повним, але містить нескінченний повний підполітоп H. Ми будемо доводити, що це неможливо.

Не обмежуючи загальності, ми можемо припустити, що H має скінченне число вершин. З іншої сторони, як підполітоп К, H замкнутий в К. Оскільки К топологічно повний, то такий і H. отже, H може бути взятий відкритим з повною метрикою.

В H відкритими зірками вершин є зліченні сімейства відкритих всюди щільних множин з порожнім перетином. Але, за теоремою Бера, це неможливо в повному метричному просторі.

Лема11.6 Сімпліціальний політоп з метричною топологію буде локально компактний тоді і тільки тоді коли він є локальною скінченний.

Доведення. Нехай К довільний політоп з метричною топологією. Якщо К є локально скінченний, то замкнуті зірки вершин в К усі є компактними. Оскільки кожна точка в К належить внутрішності як мінімум однієї із замкнутих зірок вершин, то К є локально компактним.

З іншої сторони, якщо К не є локально скінченним, то існує вершина V, яка належить нескінченно багатьом одномірним сімплексам. Отже, вершина V не має компактного околу в К.

Наступна теорема є наслідком попередніх (4.1), (11.3) і лем (11.4) – (11.6).

Теорема 11.7. Нехай К - сімплексіальний політоп з метричною топологією. Тоді маємо :

(a) K є ANR для класу Н всіх просторів, які одночасно нормальні і цілком нормальні.

(b) K є ANR для класу J усіх цілком нормальних просторів тоді і тільки тоді коли він не містить нескінченного повного підполітопа.

(c) K є ANR для класу P усіх цілком нормальних просторів тоді і тільки тоді, коли він має не більш як зліченне число вершин.

(d) K є ANR для класу N усіх нормальних просторів тоді і тільки тоді, коли він має не більш як зліченне число вершин і не містить нескінченно повного підполітопа.

(e) K є ANR для класу Т усіх тихоновських просторів тоді і тільки тоді коли він є локально скінченним і містить не більш як зліченне число вершин.

Зауваження 11.8. Теорема 11.7. також вірна коли кожен простір із цих класів є хаусдорфовим.

ЛЕКЦІЯ №7 . Властивості ANR.

Даний розділ присвячений різним властивостям ANR. Більшість цих властивостей є характеристичними, тобто необхідними і достатніми умовами для того, щоб метризовний простір був ANR.

§1. Близькі відображення та малі гомотопії.

Нехай α дане відкрите покриття простору Y. Будь-які два відображення $\mathrm{f\ i\ g}:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ називаються α - близькими, якщо для будь-якої точки $x\in X$ існує окіл U_λ з покриття α такий, що образи

$$\mathrm{f(x)}\in\mathrm{U}_\lambda, \qquad g(x)\in U_\lambda$$

належать цьому U_λ одночасно.

Гомотопію $h_t:X\to Y, \quad (0\le t\le 1)$, будемо називати α - гомотопією, якщо для будь-якого індекса $x\in X$ існує індекс $\lambda\in\wedge$ такий, що

$$h_t(x)\in U_\lambda$$

для будь-якого $t\in[0,1]$. Тобто окіл U_λ повністю містить у собі слід гомотопії *h(x).* Два відображення $\mathrm{f\ i\ g}:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ називаються α-гомотопними, якщо існує така α-гомотопія $h_t:X\to Y, \quad (0\le t\le 1)$, яка їх з'єднує, тобто

$h_0 = f$ і $h_1 = g$.

У випадку коли Y є метричним простором з даною метрикою d, то для будь-якого ε >0 два відображення $\mathrm{f\ i\ g}:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ називаються ε – близькими, якщо для будь-якої точки $x\in X$ виконується нерівність

$$d\left[f(x),g(x)\right]<\varepsilon$$

Гомотопія $h_t : X \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$, буде називатися ε – гомотопією, якщо для будь-якого $x \in X$ множина

$$\{h_t(x) \mid t \in [0,1]\}$$

має діаметр менший ε. Два відображення $f \text{ i } g : X \to Y$ називаються ε – гомотопними тоді і тільки тоді, коли існує ε – гомотопія $h_t : X \to Y, \quad (0 \le t \le 1),$, яка з’єднує відображення *f* і *g*, тобто $h_0 = f$, $h_1 = g$.

<u>Теорема 1.1.</u> Якщо $Y \in ANR$ і $\alpha = \{U_\lambda \mid \lambda \in \wedge\}$ вибране відкрите покриття на Y, то існує відкрите покриття β простору Y, яке є подрібненям α, таке, що будь-які два β - близькі відображення $f \text{ i } g : X \to Y$ задані на довільному просторі X будуть α - гомотопними.

<u>Доведення.</u> За (2.1) ми розглядаємо Y як замкнуту підмножину опуклої множини Z в банаховому просторі L = C(Y). Оскільки Y є ANR, то існує відкритий окіл W цього Y в Z разом з ретракцією $r : W \supset Y$.

Для даного відкритого покриття α простору Y будуємо β наступним чином. Ясно, що

$$r^{-1}(\alpha) = \{r^{-1}(U_\pi) \mid \lambda \in \wedge\}$$

буде відкритим покриттям околу W. Оскільки є відкритою множиною опуклої множини Z в локально опуклому просторі L, то $r^{-1}(\alpha)$ також відкрите подрібнення. Позначимо його

$$\gamma = \{W_\mu \mid \mu \in M\}$$

таке, що W_μ є опуклим для кожного $\mu \in M$. Позначимо

$$V_\mu = W_\mu \cap Y$$

Тоді $\beta = \{V\mu \mid \mu \in M\}$ буде відкритим подрібненим даного покриття α.

Нехай тепер $f\ i\ g : X \to Y$ довільні два β - близькі відображення , які задані на просторі X. Оскільки Z -опукла, ми можемо вибрати гомотопію $k_t : X \to Z, (0 \le t \le 1)$ за формулою

$$k_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

для кожного $x \in X$ і $t \in [0,1]$.

Далі доведемо, що $k_t(x) \in W, \quad \forall x \in X$ і $\forall t \in [0,1]$. Для цього виберемо довільну точку $x \in X$. Оскільки f і g β - близькі відображення, то існує окіл V_μ, який одночасно містить два образи f(x) і g(x), причому $V_\mu \subset W_\mu$. Оскільки W_μ опукла, то $k_t(x) \in W\mu \subset W, \quad \forall t \in [0,1]$. Насправді цим самим доведено, що

$$k_t : X \to W, (0 \le t \le 1)$$

є γ - гомотопією.

Нарешті, задаємо гомотопію $h_t : X \to Y, (0 \le t \le 1)$ формулою

$$h_t(x) = r[k_t(x)]$$

для $\forall x \in X$ і $\forall t \in [0,1]$. Оскільки k_t є γ - гомотопією і γ є подрібнення $r^{-1}(\alpha)$, то звідси випливає, що h_t є α - гомотопія. З іншої сторони, оскільки r є ретракцією, то маємо $h_0 = f$ і $h_i = g$.

<u>Теорема 1.2.</u> Якщо Y є ANR і $\alpha = \{Y_\lambda \mid \lambda \in \wedge\}$ дане відкрите покриття простору Y, то існує відкрите покриття β простору Y, яке є подрібненим α і таке, що будь-які два β - близькі відображення $f\ i\ g : X \to Y$ задані на метризовному просторі X і для будь-якої β - гомотопії $j_t : A \to Y, (0 \le t \le 1)$, яка задана на замкнутому підпросторі A простору X з умовою, що $j_0 = f \mid A$ і $j_i = g \mid$

А, то існує α - гомотопія $h_t : X \to Y, (0 \le t \le 1)$, така, що $h_0 = f, h_1 = g$ і $h_t \mid A = j_t, \forall t \in [0,1]$.

Доведення. Повторюємо перших два етапи з доведення (1.1) дослівно. Таким чином ми одержимо ретракцію $r : W \supset Y$ і відкрите подрібнення $\beta = \{V_\mu \mid \mu \in M\}$ даного відкритого покриття α.

Нехай $\mathrm{f\,i\,g} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ довільні два β - близькі відображення визначені на метризовному просторі X, і нехай $j_t : A \to Y, (0 \le t \le 1)$, задана β - гомотопія, яка визначена на замкнутій підмножині А простору X з умовою, що $j_0 = f \mid A$ і $j_i = g \mid A$.

Як і при доведенні (1.1) ми будуємо γ - гомотопію $k_t : X \to W, (0 \le t \le 1)$ за формулою

$$k_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

для $\forall x \in X$ і $\forall t \in [0,1]$.

В топологічному добутку $P = X \times I$ розглядаємо замкнуту підмножину

$$Q = (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \cup (X \times \{1\})$$

і задаємо відображення $\Phi : Q \to Y$ формулою

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} f(x), & якщо \quad x \in X \quad i \quad t = 0 \\ j_t(x), & якщо \quad x \in A \quad i \quad t \in [0,1] \\ g(x), & якщо \quad x \in X \quad i \quad t = 1 \end{cases}$$

Оскільки Y є ANR, то з (3.2) випливає, що Φ має продовження $\Psi : N \to Y$ на деякий окіл N з Q в P.

Враховуючи компактність одиничного інтервала можна довести існування такого відкритого околу C з A в X що $C \times I$ міститься в N і такої гомотопії $\xi_t : C \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$, заданої формулою

$$\xi_t(x) = \Psi(x,t), \quad (x \in C, t \in [0,1]),$$

яка є β - гомотопією, близькою до j_t.

Оскільки X – метризований простір, то він нормальний. Отже, існує відкрита множина B в X така, що

$$A \subset B \subset \overline{B} \subset C$$

За великою метою Урисона існує відображення $e : X \to I$ таке, що

$$e(x) = \begin{cases} 0, & якщо \quad x \in X \mid B \\ 1, & якщо \quad x \in A \end{cases}$$

Задаємо гомотопію $Q_t : X \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$, за формулою

$$Q_t(x) = \begin{cases} [1 - e(x)k_t(x) + [e(x)]\xi_t(x), & якщо \quad x \in C \\ k_t(x), & якщо \quad x \in X \mid B \end{cases}$$

Далі нам треба довести, що $Q_t(x) \in W, \quad \forall x \in X$ і $\forall t \in [0,1]$. Для цього ми зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Доведемо, що існує такий окіл W_μ, який містить весь слід гомотопії $Q_t(x), \ \forall t \in [0,1]$.

Розглядаємо два випадки :

(1) e(x) = 0. Задаємо $Q_t(x) = k_t(x), \ \forall t \in I$. Оскільки k_t є γ - топологія, то існує такий окіл W_μ, який містить весь слід $Q_t(x), \ \forall t \in [0,1]$;

(2) e(x) > 0. Тоді $x \in b \subset C$. Оскільки $\xi_t \in \beta$ - гомотопією, то існує окіл V_μ , який містить $\xi_t(x), \ \forall t \in [0,1]$. Зокрема V_μ містить також дві точки

$$\xi_0(x) = f(x), \qquad \xi_1(x) = g(x).$$

Оскільки W_μ опукла множина, яка містить V_μ , то звідси випливає, що $k_t(x) \in W_\mu, \quad \forall t \in [0,1]$. Далі, оскільки опукла множина W_μ містить обидва образи $k_t(x)$ і $\xi_t(x)$, то вона повинна містити $Q_t(x), \ \forall t \in [0,1]$.

Таким чином ми довели, що

$$Q_t : X \to W, \qquad (0 \le t \le 1)$$

є γ-гомотопією. Нарешті задаєм гомотопію

$$h_t(x) = r[Q_t(x)]$$

для $\forall x \in X$ і $\forall t \in [0,1]$. Оскільки Q_t є γ - гомотопією і γ є подрібненням

$r^{-1}(\alpha)$, то звідси випливає, що h_t є α - гомотопія. З іншої сторони r ретракція, то легко перевірити, що $h_0 = f$, $h_1 = g$ і $h_t \mid A = j_t, \quad \forall t \in [0,1]$.

Теорема 1.3. Необхідною і достатньою умовою для метризовного простору Y бути ANR є існування відкритого покриття β простору Y такого що для будь-яких двох β - близьких відображень f і $g : X \to Y$ заданих на метризовному просторі X і будь якої β - гомотопія $j_t : A \to Y, (0 \le t \le 1)$, заданої на замкнутому підпросторі A в X, такої, що $j_0 = f/A$ і $j_1 = g/A$, то існує гомотопія $h_t : X \to Y, (0 \le t \le 1)$, що виконується умова $h_0 = f$, $h_1 = g$ *і* $h_t \mid A = j_t, \quad \forall t \in [0,1]$.

Доведення. Необхідна умова випливає з (1.2) вибором α відкритого покриття простору Y, яке складається з єдиної відкритої множини, а саме Y.

Щоб довести достатність вибираємо довільну точку $y \in Y$ і зафіксуємо відкриту множину $V \in \beta$, яка містить *y.* Задаємо два відображення $\Phi, \Psi : V \to Y$ і гомотопію $Q_t : \{y\} \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$, формулами

$$\Phi(V) = y, \quad (v \in V)$$
$$\Psi(V) = V, \quad (v \in V)$$
$$Q_t(V) = y, \quad (v \in I)$$

Очевидно Φ і x, β - близькі і Q_t є β - гомотопія. Оскільки V є метризовним, а *{y}* замкнуте в V, це випливає з умови, що існує гомотопія $\rho_t : V \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$, з умовами $\rho_0 = \Phi$, $\rho_1 = \Psi$ і $\rho_t(y) = y$, $\forall t \in [0,1]$.

Оскільки одиничний інтервал [0,1] є компактний і $\rho_t(y) = y$, $\forall t \in [0,1]$, то існує відкритий окіл U точки y, що $\rho_t(U) \subset V, \quad \forall t \in [0,1]$. Ми будемо доводити, що $U \in ANR$.

Для цього зафіксуємо довільне відображення $f : A \to U$, яке задане на замкнутому підпросторі A метризовного простору X. Задаємо два відображення $\xi, \eta : X \to Y$ і гомотопію $\Delta_t : A \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$ формулами

$$\xi(x) = y = \eta(x), \quad (x \in X)$$

$$\Delta_t(x) = \begin{cases} \rho_{2t}[f(x)], & \left(x \in A, \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}\right) \\ \rho_{2-2t}[f(x)], & \left(x \in A, \quad \frac{1}{2} \le t \le 1\right) \end{cases}$$

Очевидно ξ і η будуть β - близькими, а Δ_t буде β - гомотопією. Отже, за умовою теореми існує гомотопія $H_T : X \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$, з умовою $H_0 = \xi$, $H_1 = \eta$ і $H_t / A = \Delta_t$, $\forall t \in [0,1]$.

Розглянемо відображення $H = H_{\frac{1}{2}} : X \to Y$. За побудовою відображення H_t видно, що $H/A = f$. Нехай $W = H^{-1}(U)$, тоді W відкритий окіл A в X. Задаємо відображення $g : W \to U$ формулою $g(x) = H(x), \quad \forall x \in W$. Тоді g буде продовженням f до W. За (3.1) це доводить, що $U \in ANR$.

Як і вище ми можемо довести, що Y локальний ANR . Це випливає з того, що $Y \in ANR$. за (8.1).

§2. Властивість продовження гомотопії.

Підпростір A простору X має властивість продовження гомотопії (скорочено PEH), якщо кожна звужена гомотопія

$$h_t : A \to Y, \qquad (0 \le t \le 1)$$

довільного відображення $f : X \to Y$ має продовження

$$f_t : X \to Y, \qquad (0 \le t \le 1)$$

таке, що $f_0 = f$. Підпростір A має абсолютну властивість продовження гомотопії (скорочено PEH), якщо вона має властивість PEH з X в кожний простір Y. Ця властивість залежить тільки від гомотопічного класу f. Іншими словами, якщо $f, g : A \to Y$ два гомотопні відображення і якщо f продовжується до X, то таким буде і g.

Лема 2.1. (Даукер). Нехай A буде замкнута підмножина нормального простору X. Нехай Y – довільний простір і через T позначимо замкнуту підмножину $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ в топологічному добутку $D = X \times I$. Якщо відображення $f : T \to Y$ має продовження до $(X \times \{0\}) \cup U$, де U відкрита множина в P, що містить $A \times [0,1]$, то f має продовження до P.

Доведення. Нехай $g : (X \times \{0\}) \cup U \to Y$ є продовження відображення f, де U – відкрита множина в P, що містить $A \times I$. З компактності інтервалу [0,1] ми можемо знайти відкритий окіл V з A в X таких, що $V \times [0,1] \subset U$. Оскільки A і X\V диз'юнктивні замкнуті підмножини нормального простору X, то існує відображення $\varepsilon : X \to [0,1]$ таке, що

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \in A \\ 0, & \text{якщо} \quad x \in X \setminus V \end{cases}$$

Задаємо відображення $h : D \to Y$ формулою

$$h(x,t) = g[x, \varepsilon(x)t]$$

для $\forall x \in X$ і $\forall t \in [0,1]$. Тоді h буде продовженням f до P.

Теорема 2.2. Якщо Y є ANR, то кожний замкнутий підпростір A довільного метризовного простору X має PEH з X в Y.

Доведення. Розглянемо довільне відображення $f : X \to Y$ задане на метризовному просторі X і довільну звужену гомотопію $h_t : A \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$, відображення f заданого на замкнутому підпросторі A в X. Розглянемо замкнутий підпростір

$$T = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$$

в топологічному добутку $D = X \times [0,1]$. Задаємо відображення $H : T \to Y$ формулою

$$H(x,t) = \begin{cases} f(x), & якщо \quad x \in X \quad i \quad t = 0 \\ f_t(x), & якщо \quad x \in A \quad i \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

Оскільки T замкнута підмножина метризовного простору D, то за (3.2) випливає, що існує відкритий окіл U з T в D разом з продовженням $G : U \to Y$.

За (2.1), відображення H має продовження $F : D \to Y$. Звідси випливає, що звужена гомотопія $h_t : A \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$ відображення f має продовження $f_t : X \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$, яке задається формулою

$$f_t(x) = F(x,t)$$

для $\forall x \in X$ і $\forall t \in [0,1]$. Ясно, що $f_0 = f$.

Теорема 2.3. Якщо Y- сепарабельний і топологічно повний ANR, то кожний замкнутий підпростір A довільного зліченного паракомпактного нормального простору X має PEH з X в Y.

Спробуємо застосувати PEH до характеризації ANR.

Теорема 2.4. Для даного метричного простору Y наступні три твердження еквівалентні:

(a) *Y* є ANR.

(b) Y локально стягуваний і кожний замкнутий простір A метризовного простору X має властивість PEH з X в Y;

(c) кожна точка $y \in Y$ має окіл V такий, що довільне відображення $f : A \to V$ задане на замкнутому підпросторі A метризовного простору X має продовження $g : X \to Y$.

Доведення. Імплікація $(a) \Rightarrow (b)$ випливає з (7.1) і (2.2).

Доводимо $(b) \Rightarrow (c)$. Беремо довільну точку $y \in Y$. Оскільки Y – локально стягуваний простір, то існує окіл V(y), який стягується в Y. Для доведення, що V задовольняє умову (c), беремо довільне відображення $f : A \to V$ на замкнутому підпросторі A метризовного простору X. Оскільки V стягуваний в Y, то звідси випливає, що f як відображення з X в Y гомо топне постійному відображенню $k : A \to Y$, яке стягує всю множину A в точку y. Оскільки K може бути продовжене до X, то з властивості PEH для A з X в Y випливає, що f має продовження

$$g : X \to Y$$

Імплікація (c) $\Rightarrow$ (a). Вибираємо *y* з Y і нехай V(y) буде такий окіл, що задовольняє умову (c). Ми можемо вибрати V відкритим околом точки *y*. Будемо доводити, що V є ANR. Для цього виберемо довільне відображення $f : A \to V$ задане на замкнутому підпросторі A метризовного простору X. За умовою (c), f має продовження $g : X \to Y$. Повний прообраз $U = g^{-1}(V)$ є відкритою множиною в X, що містить A, і відображення $h : U \to V$ задане формулою $h(x)=g(x)$, $\forall x\in U$ має продовження $f:A\to V$ до U. За (3.1) випливає, що V є ANR. Тоді за (8.1) Y також ANR.

Локальна стягуваність або PEH не можуть характеризувати ANR. Існують контрприклади в Борсука.

Теорема 2.5. Якщо Y компактне ANR і відображення $f:Y\to Y$ гомотопне постійному відображенню, то f має нерухому точку.

Доведення. Як компактний метризовний простір, Y може розглядатися як замкнута підмножина гільбертового куба $H=I^{w}$. За припущенням f гомотопне постійному відображенню $k:Y\to Y$. Нехай *y_0 = k(Y)*, тоді *k* має продовження $K:H\to Y$ задане формулою *K(H) = y_0*. Оскільки H метризовний, а Y замкнутий в H, то за (2.2) випливає, що f має продовження $F:H\to Y$.

Оскільки гільбертовий куб H має властивість нерухомої точки, то існує точка $x\in H$ така, що *F(x) = x*. Оскільки F відображає H в Y, то маємо $x\in Y$ і *f(x) = x.*

Зауваження: в даній теоремі компактність Y важлива.

Контрприклад: кожна трансляція (зсув) дійсної прямої R не має нерухомої точки.

§3. Замкнуті ANR підпростори в ANR.

Лема 3.1. Замкнутий підпростір A простору X має властивість APEH в X тоді в тільки тоді коли замкнутий підпростір

$$T=\left(X\times\{0\}\right)\cup\left(A\times I\right)$$

топологічного добутку $D=X\times I$ є ретрактом D.

Доведення. Необхідність. Позначимо через $f: X \to T$ відображення задане формулою

$$f(x)=(x,0), \qquad (x \in X).$$

Задаємо звужену гомотопію $h_t: A \to T$, $(0 \le t \le 1)$ формулою

$$h_t(x)=(x,t), \qquad (x \in X, t \in I).$$

Оскільки A має властивість APEH в X, h_t має продовження $f_t: X \to T, \quad (0 \le t \le 1)$, таке $f_0 = f$. Тоді $r: D \to T$ буде ретракцією, яка задається формулою

$$r(x,t)= f_t(x), \ (x \in X, t \in [0,1])$$

Цим доведемо, що T є ретракт D.

Достатність. Припустимо, що T є ретрактом D з ретракцією $r: P \supset T$. Щоб довести APEH, вибираємо довільне відображення $f: X \to Y$ на довільний простір Y. І виберемо довільну звужену гомотопію $h_t: A \to Y, \quad (0 \le t \le 1)$ відображення f. Задаємо відображення $H: T \to Y$ формулою

$$H(x,t)=\begin{cases} f(x), & \text{якщо} \quad x \in X \quad i \quad t=0 \\ f_t(x), & \text{якщо} \quad x \in A \quad i \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

Тоді h_t має продовження $f_t: X \to Y$, $(0 \le t \le 1)$, яке задане формулою

$$f_t(x)=H[r(x,t)]$$

для $\forall x \in X$ і $\forall t \in [0,1]$. Ясно, що $f_0 = f$. Отже, A має APEH в X.

Теорема 3.2. Нехай X є ANR. Тоді замкнутий підпростір A в X є ANR тоді і тільки тоді, коли A має APEH в X.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що A є ANR. . Розглянемо замкнуту підмножину

$$T = \left(X \times \{0\}\right) \cup \left(A \times I\right)$$

топологічного добутку $D = X \times I$. За (7.6), $A \times I$ є ANR. . Оскільки $X \times \{0\}$ і $A \times [0,1]$ є замкнутими ANR підмножинами в T, то їх перетин $A \times \{0\}$ є також ANR. Це випливає з (3.1), (3.2). Отже, тотожнє відображення $i : T \to T$ має продовження $j : U \to T$ до відкритого околу U з T в D. За теоремою (2.1) звідси випливає, що *i* має продовження $r : D \to T$. Ясно, що r є ретракція добутку D в T. За (3.1), A має АРЕН в X.

Достатність. Припустимо, що A має АРЕН в X. Тоді, за (3.1), T є ретрактом D. Оскільки X і [0,1] є ANR, то з (7.6) випливає, що D є також ANR. Отже, застосувавши (7.7), T є ANR. Далі, A може бети ототожнено з замкнутим підпростором $A \times \{1\}$ в просторі T (простір T можна уявити як *англійський циліндр*). Позначимо

$$V = \{(x,t) \in T \mid x \in A, \quad t > 0\}$$

Тоді V є відкритий окіл A в T. Через $s : V \to A$ позначимо відображення яке задається формулою

$$s(x,t) = (x,1), \quad (x \in A, \quad 0 < t \leq 1)$$

Оскільки s є ретракція V на A, то A є околовим ретрактом T. Оскільки T є ANR, то за (7.7), A також ANR.

Наслідок 3.3. Якщо X є ANR і A замкнутий ANR підпростір в X, то англійський циліндр

$$T = \left(X \times \{0\}\right) \cup \left(A \times I\right)$$

який є замкнутим підпростором $D = X \times I$ є ретрактом D.

Твердження 3.4. Якщо X є ANR. і A замкнутий ANR підпростір в X, то для будь-якого відкритого покриття α простору X, існує α - гомотопія $h_t : X \to X, \quad (0 \le t \le 1)$, яка задовольняє такі умови:

(a) h_0 є тотожнє відображення на X,

(b) $h_t(x) = x, \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall x \in A$,

(c) існує відкритий окіл U від A в X, такий, що $h_1(U) = A$.

Доведення. Оскільки A є ANR. і замкнутий в X, то існує замкнутий окіл V від A в X разом з ретракцією $r : V \supset A$.

1 Розглянемо замкнутий простір

$$Q = (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \cup (V \times \{1\})$$

топологічного добутку $D = X \times I$ і задаємо відображення $f : Q \to X$ формулою

$$f(x,t) = \begin{cases} x, & якщо \quad x \in X \quad i \quad t = 0 \\ x, & якщо \quad x \in A \ i \quad t \in [0,1] \\ r(x), & якщо \quad x \in V \ i \quad t = 1 \end{cases}$$

Оскільки X є ANR, f має продовження $g : W \in X$ на деякий окіл W від Q в P. Оскільки [0,1] компактний, то існує відкритий окіл $\widetilde{W}$ від A в X такий, що $\widetilde{W} \times [0,1] \subset W$. Ми можемо вибрати $\widetilde{W}$ так, що $\widetilde{W} \subset$V, а також так, що для кожного $x \in \widetilde{W}$ образ $g(\{x\} \times I)$ міститься в деякій відкритій множині, що є елементом даного відкриття α.

Далі, виберемо відкриту множину U в X, що задовольняє нерівність

$$A \subset U \subset [U] \subset \widetilde{W}.$$

За лемою Урисона, існує відображення $\varepsilon : X \to I$ таке, що

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\in X\setminus\widetilde{W}\\ 1, & \text{якщо} \quad x\in[U]\end{cases}$$

Задаємо гомотопію $h_t : X \to X$, $(0 \le t \le 1)$, формулою

$$h_t(x)=g[x,t\varepsilon(x)]$$

для $\forall t \in [0,1]$ і $\forall x \in X$. Тоді гомотопія h_t буде α - гомотопією, що задовольняє умови (a) – (c).

ЛЕКЦІЯ № 8.

§4. Часткова реалізація політопів.

Нехай Y довільний простір і $\alpha = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ -довільне покриття простору Y . Через K позначимо сімплексіальний політоп з топологією Уайтхеда і нехай L – підполітоп цього K, який містить всі вершини з K.

Під частковою реалізацією політопа K в Y відносно α , яка задана на L розуміємо відображення $f : L \to Y$ таке, що для кожного замкнутого сімплекса $\Delta \in K$ існує число $\lambda \in \Lambda$ таке, що

$$f(L \cap \Delta) \subset U_\lambda .$$

У випадку, якщо $L = K$, то відображення f будемо називати повною реалізацією політопа K в Y відносно α .

Теорема 4.1. Метризовний простір Y є ANR тоді і тільки тоді, коли для будь-якого відкритого покриття α простору Y існує відкрите подрібнення β цього α таке, що кожна часткова реалізація довільного сімплексіального політопа K в Y відносно β продовжується до повної реалізації політопа K в Y відносно α.

Більшість даного розділу присвячена доведенню теореми (4.1) і лем.

Доведення. Необхідність. За теоремою (2.1), ми можемо розглядати Y як замкнутий підпростір деякої випуклої множини Z банахового простору $C(Y)$. Оскільки Y є ANR, то існує відкритий окіл W простору Y в Z разом з ретракцією

$$r : W \supset Y .$$

Як опукла підмножина в банаховому просторі, Z є локально опукла.

Далі, нехай $\alpha = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, через α позначимо задане відкрите покриття простору Y і побудуємо відкрите подрібнення β цього α таким чином. Нехай y довільна точка з Y. Виберемо $\lambda \in \Lambda$ з $y \in U_\lambda$. Оскільки Z є локально - опукла, то існує опуклий окіл N_y точки y в Z такий, що $N_y \subset W$ і $r(N_y) \subset U_\lambda$. Позначимо $V_y = N_y \cap Y$. Тоді

$$V_y = r(N_y \cap Y) \subset r(N_y) \subset U_\lambda .$$

Отже,

$$\beta = \{V_y | y \in Y\}$$

є відкритим подрібненням покриття α. Далі, покажемо, що β задовольняє умові з (4.1).

Нехай $f : L \to Y$ є часткова реалізація політопа K в Y відносно β. Розглянемо

$$\Phi = i \circ f : L \to Z$$

відображення $f: L \to Y$ та відображення вкладення $i: Y \subset Z$. Будемо будувати продовження $\psi: K \to Z$ відображення Φ наступним чином.

Нехай σ буде довільний замкнутий сімплекс політопа K і позначимо через H_σ опуклу оболонку множини $\Phi(L \cap \sigma)$ в Z. Тоді позначимо

$$\overline{K}^n = K^n \cup L,$$

де K^n – n- мірний скелетон політопа K. Будемо будувати за індукцією послідовність відображень

$$\psi_n : \overline{K}^n \to Z, \ (n = 0,1,2,...)$$

яка задовольняє умови:

(1) $\psi_0 = 0$

(2) $\psi_n \big| \overline{K}^{n-1} = \psi_{n-1}, \ (n > 0)$

(3) $\psi_n(\overline{K}^n \cap \sigma) \subset H_\sigma$

Оскільки ψ_0 означено першою формулою, то розглянемо $n > 0$ і припустимо, що ψ_{n-1} вже побудоване. Щоб побудувати ψ_n продовжимо ψ_{n-1} до внутрішності кожного n - вимірного сімплекса σ політопа K, який належить L. Далі, оскільки границя $\partial\sigma \subset \overline{K}^{n-1}$, то ψ_{n-1} визначене на цій границі $\partial\sigma$. Оскільки H_σ опукла підмножина банахового простору, то відображення $\psi_{n-1} \big| \partial\sigma$ має продовження

$$æ_0: \sigma \to H_\sigma.$$

Тоді задаємо відображення ψ_n формулою

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi_{n-1}(x), \ (x \in \overline{K}^{n-1}) \\ æ_\sigma(x), \ (x \in \sigma \subset \overline{K}^n \setminus L) \end{cases}$$

Неперервність відображення ψ_n випливає з того, що на політопі K вибрана топологія Уайтхеда. Умови (1)-(3) виконуються. Цим завершується індуктивна побудова відображень $\{\psi_n | n = 0,1,2,...\}$.

Далі, задаємо відображення $\psi : K \to Z$ формулою

$$\psi(x) = \psi_n(x), \quad (\text{ якщо } x \in \bar{K}^n).$$

Неперервність такого відображення ψ також випливає з топології Уайтхеда на політопі K. Для довільного замкнутого сіплекса σ політопа K, умова (3) дає, що

$$\psi(\sigma) \subset H_\sigma .$$

Далі, треба довести, що образ $\psi(K)$ неперервний в W. Для цього, нехай σ буде довільним замкнутим сімлексом політопа K. Оскільки $f : L \to Y$ є часткова реалізація відносно покриття β, то існує точка $y \in Y$ така, що

$$\Phi(L \cap \sigma) = f(L \cap \sigma) \subset V_y \subset N_y .$$

Оскільки N_y опукле, то звідси випливає

$$\psi(\sigma) \subset H_\sigma \subset N_y \subset W .$$

Це дає нам, що $\psi(K) \subset W$.

Далі, можемо означити відображення $g : K \to Y$ формулою

$$g(x) = r[\psi(x)]$$

для кожного $x \in K$. Оскільки ψ є продовженням Φ, то звідси випливає, що g є продовженням f. Залишилось довести, що g є відносним до даного покриття α. Для цього вибираємо σ - довільний замкнутий сімплекс політопа

K. Треба показати, що існує точка $y \in Y$, що $\psi(\sigma) \subset N_y$. За побудовою N_y існує $\lambda \in \Lambda$, що $r(N_y) \subset U_\lambda$. Отже, одержимо

$$g(\sigma) = r[\psi(\sigma)] \subset r(N_y) \subset Y_\lambda.$$

Цим завершується доведення необхідності.

Перед початком доведення достатності наведемо декілька допоміжних фактів.

Нехай Y є непорожній підпростір метризовного простору Z з функцією відстані d. Для кожної відкритої множини U простору Y розглянемо множину

$$Ext(U) = \left\{ z \in Z \,\middle|\, d(z,U) < d(z, Y \setminus U) \right\}$$

причому $d(z,\varnothing) = \infty$. Тоді ми можемо легко перевірити наступні властивості множини $Ext(U)$:

$(Ex\ 1)$ $Ext(\varnothing) = \varnothing$, $Ext(Y) = Z$

$(Ex\ 2)$ $Ext(U)$ є відкрита в Z

$(Ex\ 3)$ $Y \cap Ext(U) = U$

$(Ex\ 4)$ Якщо $U \subset V$, тоді $Ext(U) \subset Ext(V)$

$(Ex\ 5)$ $Ext(U \cap V) = Ext(U) \cap Ext(V)$

Кожна лема є прямим наслідком з $(Ex\ 2)$, $(Ex\ 3)$, $(Ex\ 5)$.

<u>Лема 4.2.</u> Якщо $\alpha = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ є відкритим покриттям простору Y, то сімейство

$$Ext(\alpha) = \{Ext(U_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$$

відкритих множин в Z має властивості:

(a) $\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda = Y \cap Ext(U_\lambda)$

(b) нерв покриття α ізоморфний нерву покриття $Ext(\alpha)$.

Доведемо достатність. Вкладаємо Y як замкнутий підпростір у опуклу множину Z банахового простору $C(Y)$. Позначимо через d функцію відстані в Z. Достатньо довести, що Y є околовим ретрактом простору Z.

Вибираємо канонічне покриття

$$\gamma = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$$

простору Z\Y, яке задовольняє наступні чотири умови:

(CC1) γ є локально скінченним.

(CC2) кожний окіл довільної граничної точки простору Y в Z містять нескінченно багато відкритих множин в γ.

(CC3) для кожного околу V точки $y \in Y$ в Z існує окіл $W \subset V$ такий, що кожна відкрита множина $U \in \gamma$, яка перетинає W сама міститься у V

(CC4) $d(Y, U) > 0, \quad \forall U \in \gamma$.

Далі, будемо індуктивно будувати відкриті покриття

$$\alpha_n, \beta_n, \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

простору Y наступним чином.

Нехай α_0 відкрите покриття простору Y, яке складається з єдиної відкритої множини – самого Y. Нехай $n \geq 0$ і припустимо, що α_n вже побудовано. За умовою теореми існує відкрите подрібнення β_n покриття α_n таке, що кожна часткова реалізація довільного політопа в Y відносно β_n

продовжується до повної реалізації відносно α_n. Нехай α_{n+1} є зірчато вписане подрібнення в β_n з діаметром меншим, ніж $\frac{1}{n+1}$, тобто

$$\sup\{diam(V) | V \in \alpha_{n+1}\} < \frac{1}{n+1}$$

Цим завершується індуктивна побудова відкритих покриттів α_n і β_n. Разом з тим нам також будуть потрібні сімейства

$$Ext(\alpha_n), \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

відкритих множин в просторі Z, які означені в теоремі (4.2).

Далі, ми будемо будувати послідовність

$$W_n, \quad (\mathrm{n} = 0,1,2\ldots)$$

відкритих околів простору Y в Z за індукцією наступним чином. Нехай $W_0 = Z$, тоді $n > 0$ і припускаємо, що W_{n-1} вже побудоване. Розглядаємо відкритий окіл

$$H_n = \left\{ z \in Z \middle| d(z,Y) < \frac{1}{n} \right\}$$

простору Y в Z. Оскільки Z є нормальним простором, то існує відкрита множина G_n цього Z з умовою

$$Y \subset G_n \subset \overline{G}_n \subset H_n \cap W_{n-1}$$

Нехай y довільна точка з простору Y. Вибираємо відкриту множину $V \in \alpha_n$, яка містить y. Тоді $G_n \cap Ext(V)$ є відкритим околом точки y в Z. За умовою (ССЗ) існує відкритий окіл $W_n(y)$ точки y в просторі Z такий, що кожна відкрита множина $U \in \gamma$, яка перетинає $W_n(y)$ міститься в перетині $G_n \cap Ext(V)$. Далі, задаємо

$$W_n = \bigcup_{y \in Y} W_n(y).$$

Цим завершується індуктивна побудова W_n .

<u>Лема 4.3.</u> Відкриті околи $W_n, \quad (n = 0,1,2,\ldots)$ у просторі Y мають наступні властивості:

(a) $d(z,Y) < \dfrac{1}{n}, \quad \forall z \in \overline{W_n}$

(b) $\overline{W_n} \subset W_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$

(c) Якщо $U \in \gamma$ і перетинається з $\overline{W_n}$, то існує відкрита множина $V \in \alpha_n$ така, що $U \subset W_{n-1} \cap Ext(V)$

(d) якщо $U \in \gamma$ перетинається з $\overline{W_n},\ n > 1$, то маємо

$$U \cap (\overline{W}_{n-2} \setminus W_{n-1}) = \varnothing$$

<u>Доведення.</u> Оскільки $W_n(y) \subset G_n, \quad \forall y \in Y$, то маємо $W_n \subset G_n$, а також

$$\overline{W_n} \subset \overline{G_n} \subset H_n \cap W_{n-1} \,,$$

$\forall n > 0$. Звідси випливає (a) і (b).

Щоб довести (c) нехай $U \in \gamma$, яке перетинає $\overline{W_n}, n > 0$. Оскільки U відкрита множина, то вона містить точку $\omega \in W_n$. Отже, існує точка $y \in Y$ така, що $\omega \in W_n(y)$. Оскільки U перетинає $W_n(y)$ в точці ω то існує відкрита множина $V \in \alpha_n$ така, що U належить $G_n \cap Ext(V)$. Оскільки $G_n \subset W_{n-1}$, то звідси випливає (c).

І нарешті, умова (d) є прямим наслідком з (c).

Щоб завершити доведення леми (4.1) задаємо ціле число n_u формулою

$$n_u = sup\{i | U \cap \overline{W_i} \neq \emptyset\}$$

для кожного $U \in \gamma$. За умовами (СС4), (4.3а) і з того факту, що $W_0 = Z$ випливає, що число n_u є добре означене скінченне від'ємне ціле число.

Лема 4.4. Якщо $U \in \gamma$ і $0 \leq k \leq n_u$, то існує окіл $V \in \alpha_k$ такий, що $U \subset Ext(V)$.

Доведення. Оскільки $Ext(Y) = Z$, то для $k = 0$ лема тривіальна. Припустимо, що $k > 0$. Оскільки $k \leq n_u$, то звідси випливає, за означенням числа n_u, що U перетинає $\overline{W_k}$. Отже, за умовою (4.3 с), існує окіл $V \in \alpha_k$ такий, що $U \subset Ext(V)$.

Повертаючись до доведення (4.1) ми розглянемо геометричний нерв N канонічного покриття γ простору $Z \setminus Y$. Замінимо $Z \setminus Y$ сімплексіальним політопом N. Тоді одержимо простір

$$Y^* = Y \cup N$$

і відображення

$$\mu : Z \to Y^*$$

таке, що $\mu | Y$ є відображенням вкладення, а $\mu | Z \setminus Y$ є канонічне відображення з $Z \setminus Y$ в нерв N відкритого покриття γ.

Ми будемо доводити, що Y є околовим ретрактом простору Y^*. Для цього побудуємо спочатку ретракцію

$$\Phi : Y \cup N^\circ \supset Y,$$

де N° – нуль-мірний скелетон нерва N наступним способом.

Для кожного $U \in \gamma$ вибираємо точку $z_u \in U$, і за (4.4) вибираємо відкриту множину $V_u \in \alpha_{n_u}$ таку, що

$$U \subset Ext(V_u).$$

Повернемось до доведення (4.1). Ми можемо продовжити відображення Φ_{2n+1} до повної реалізації

$$\psi_{2n+1} : P_{2n+1} \to Y$$

відносно відкритого покриття α_{2n-1} для кожного $n \geq 1$.

Далі, нехай

$$P = Y \cup \left(\bigcup_{m=2}^{\infty} P_m \right)$$

і задаємо відображення $\psi : P \to Y$ формулою

$$\psi(x) = \begin{cases} x, \ (якщо \ \ x \in Y) \\ \psi_m(x), \ (якщо \ \ x \in P_m) \end{cases}$$

Неперервність так заданого ψ в граничній точці простору Y в P може бути перевірена враховуючи той факт, що діаметр покриття α_m є меншим ніж $\frac{1}{m}$.

Позначимо $$W = \bigcup_{m=2}^{\infty} W_m.$$

Тоді W є відкритим околом простору Y в Z, і відображення $\mu : Z \to Y^*$ переводить W в P. Задаємо відображення $r : W \to Y$ формулою

$$r(z) = \psi[\mu(z)]$$

для кожного $z \in Z$. Тоді r є ретракція, а Y околовий ретракт простору Z. Цим завершується доведення достатності.

§5. Малі деформації.

Під деформацією простору Y розуміємо гомотопію $h_t : Y \to Y$, $(0 \le t \le 1)$ таку, що h_0 є тотожнім відображенням на Y.

Твердження 5.1. Якщо Y є ANR і вкладений як замкнутий підпростір в метризовний простір Z, то для кожної деформації $h_t : Y \to Y$, $(0 \le t \le 1)$, відображення h_1 має продовження $h : U \to Y$ на деякий окіл U простору Y в Z.

Доведення. Оскільки Y є ANR і замкнутий в метризовному просторі Z, то за означенням ANR випливає, що існує ретракція $r : U \supset Y$ деякого околу U простору Y в Z. Тоді композиція

$$h = h_1 \circ r : U \to Y$$

буде продовженням відображення h_1.

Властивість (5.1) характеризує ANR.

Нехай α буде задане покриття простору Y. Тоді α - деформацією на Y ми називаємо таку деформацію $h_t : Y \to Y$, $(0 \le t \le 1)$, яка також є α - гомотопією, тобто для кожного y образ $h(y,[0,1])$ належить деякому околу з покриття α. У випадку, якщо Y - метризовний простір і задана функція відстані d, то деформація $h_t : Y \to Y$, $(0 \le t \le 1)$ називається ε - деформацією на Y, якщо вона є ε - гомотетією.

Послідовність деформацій

$$h_t^n : Y \to Y, \ (0 \le t \le 1)$$

на просторі Y називається збіжною до тотожного відображення тоді і тільки тоді, коли для кожної точки $y \in Y$ і для кожного околу $V(y)$ в Y існує окіл $W(y)$ в Y і ціле число K таке, що

$$h_t^n(W) \subset V$$

$\forall n \geq k$ і $\forall t \in I$.

Нехай Y буде довільно вибраний метризовний простір. За (I,2.1) ми можемо розглядати Y як замкнутий підпростір опуклої підмножини Z банахового простору $C(Y)$.

<u>Лема 5.2.</u> Нехай $h_1 : Y \to Y$ - відображення, яке має продовження $h : U \to Y$ на деякий окіл $U(Y)$ в Z. Якщо $f : A \to Y$ є довільне відображення, яке задане на замкнутому підпросторі A метризовного простору X, то композиція $h_1 \circ f : A \to Y$ може бути продовжена на деякий окіл підпростору A в X.

<u>Доведення.</u> Оскільки Z є AE для класу всіх метризовних просторів, то композиція

$$\Phi = i \circ f : A \to Z$$

даного відображення $f : A \to Y$, і відображення вкладення $i : Y \subset Z$ має продовження $\psi : X \to Z$. Позначимо $V = \psi^{-1}(U)$. Тоді V є околом множини A в X. Задаємо відображення $g : V \to Y$ формулою

$$g(x) = h[\psi(x)]$$

$\forall x \in V$. Тоді g буде продовженням композиції $h_1 \circ f$.

Теорема 5.3. Для довільного метризовного простору Y вкладеного як замкнутий підпростір опуклої множини Z в банаховому просторі, наступні умови еквівалентні:

(a) Y є ANR

(b) для кожного відкритого покриття α простору Y існує α - деформація $h_t : Y \to Y$, $(0 \le t \le 1)$, простору Y така, що h_1 може бути продовжено на деякий окіл простору Y в Z

(c) для деякої метрики, яка породжує топологію на Y, і $\forall \varepsilon > 0$ існує ε - деформація $h_t : Y \to Y$ на просторі Y така, що h_1 може бути продовжено на деякий окіл простору Y в Z

(d) існує послідовність деформацій

$$\{ h_t^n ; Y \to Y, (0 \le t \le 1) n = 1,2,\ldots \}$$

простору Y, яка збігається до тотожнього відображення так, що кожне h_n може бути продовжене на деякий окіл простору Y в Z.

Доведення. Оскільки з (a)$\Rightarrow$(b) за (5.1), а також з (b) $\Rightarrow$(c) і з (c) $\Rightarrow$(d) (це очевидно), то залишилось довести, що з (d) $\Rightarrow$(a).

За умовою (d) відображення $h_1^1 : Y \to Y$ має продовження $h : U \to Y$ на деякий окіл U з Y в Z. Оскільки Z є AR, то достатньо довести, що Y є ретрактом U.

Для цього через J позначимо напіввідкритий інтервал

$$J = \{ t \in I \,|\, 0 \le t < 1 \}$$

і розглянемо зростаючу послідовність дійсних чисел

$$S_n = 1 - 2^{-(n-1)}, (n = 1,2,\ldots).$$

Ми будемо будувати відображення $H : U \times J \to Y$ наступним чином.

Спочатку, задаємо H на $U\times\{0\}$ формулою

$$H(x,0)=h(x)$$

для кожного $x\in U$. Оскільки $s_1=0$, ми можемо припустити, що H має завжди бути заданим на $U\times[s_1,s_n]$ для деякого $n\geq 1$, такого, що

$$H(x,s_n)=h_1^n(x)$$

для кожного $x\in Y$. Будемо будувати H на $U\times[s_n,s_{n+1}]$.

Для цього розглянемо замкнений підпростір

$$T=(U\times\{0\})\cup(Y\times I)$$

топологічного добутку $U\times I$. Задаємо відображення $g:T\to Y$ формулою

$$g(x,t)=\begin{cases} H(x,s_n),\ (\text{якщо}\, x\in U \text{ і } t=0) \\ h_{1-t}^n(x),\ (\text{якщо } x\in Y \text{ s } t\in I) \end{cases}$$

За (5.2), композиція $h_1^{n+1}\circ g:T\to Y$ може бути проведена на деякий окіл простору T в $U\times I$. Використовуючи (2.1), ми одержали продовження

$$G:U\times I\to Y$$

відображення $h_1^{n+1}\circ g$ на весь простір $U\times I$.

Означуємо H на $U\times[s_n,s_{n+1}]$ формулою для кожного $x\in U$.

$$H[x,(1-s)s_n+s_{n+1}]=\begin{cases} h_{2s}^{n+1}[H(x,s_n)], & \left(0\leq s\leq\frac{1}{2}\right) \\ G(x,2s-1), & \left(\frac{1}{2}\leq s\leq 1\right) \end{cases}$$

Можна легко перевірити, що на стику при $t=s_n$ і $t=\frac{1}{2}(s_n+s_{n+1})$ різні значення H співпадають. І нарешті, для $t=s_{n+1}$ маємо

$$H(x, s_{n+1}) = G(x,1) = h_1^{n+1}[g(x,1)] = h_1^{n+1}(x)$$

для кожного $x \in Y$. Цим завершується індуктивна побудова відображення $H : U \times J \to Y$.

Наступним кроком буде продовжити відображення $K = H|Y \times J$ до $Y \times I$ формулою

$$K(y,1) = y$$

для кожного $y \in Y$. Щоб довести неперервність $K : Y \times I \to Y$ виберемо $y_0 \in Y$ і окіл V точки y_0 в Y. Досить знайти окіл $W \times [a,1]$ точки $(y_0,1)$ в просторі $Y \times I$ такий, що

$$K(W \times [a,1]) \subset V .$$

Якщо $t \in [s_n, s_{n+1}]$, то він може бути записаний у вигляді $t = (1-s)s_n + ss_{n+1}$ для деякого $0 \le s \le 1$.

Оскільки послідовність h_t^m збігається до тотожнього відображення, то існує окіл $W_1 \subset V$ точки y_0 в Y і ціле число k_1 таке, що

$$h_t^{n+1}(W_1) \subset V$$

для кожного $n \ge k_1$ і $t \in I$. Знову ж існує окіл $W \subset W_1$ точки y_0 в Y і ціле число $k \ge k_1$ такі, що

$$h_t^n(W) \subset W_1$$

для кожного $n \ge k$ і $t \in I$. Нехай $a = s_k$. Звідси випливає, що $K(W \times [a,1]) \subset V$. Цим перевіряється неперервність K.

Два відображення $H : U \times J \to Y$ і $K : Y \times I \to Y$ співпадають на $Y \times J$. Проте, ми не можемо в загальному задати відображення на $(U \times J) \cup (Y \times I)$, оскільки для послідовності $u_n \in U \setminus Y$ для якої $u_n \to y \in Y$ і для послідовності $t_n \to 1$ ми не обов'язково маємо наступну умову

$$H(u_n, t_n) \to K(y,1) = y\,.$$

Більше того, коли ми вже побудуємо ретракцію $r: U \to Y$ за формулою:

$$r(u) = \begin{cases} H(u, \varepsilon(u)), & (\text{якщо}\, u \in U / Y) \\ u & , (\text{якщо}\, u \in Y) \end{cases} \qquad (1)$$

де $0 \le \varepsilon(u) < 1$ є функція, що прямує до 1, коли u наближається до Y, ми повинні бути дуже акуратні, коли вибираємо $\varepsilon(u)$ так, щоб r було неперервним.

Позначимо через d функцію відстані на U, яка породжує топологію на U. На просторі $U \times J$ ми використовуємо функцію відстані d_1 формулою

$$d_1[(u_1, t_1), (u_2, t_2)] = d(u_1, u_2) + |t_1 - t_2|$$

Розглянемо відкритий окіл V_0 простору $Y \times J$ в $U \times J$, який заданий наступним чином. Точка (u,t) простору $U \times J$ належить V_0 тоді і тільки тоді, коли існує точка $(y,\tau) \in Y \times J$ така, що

$$d_1[(u,t),(y,\tau)] < 1 - t \qquad (2)$$

$$d[H(u,t), H(y,\tau)] < 1 - t \qquad (3)$$

Тоді V_0 є відкритим.

Для кожного $n \ge 1$, оскільки $[s_n, s_{n+1}]$ є компактним, ми можемо вибрати відкритий окіл простору Y в U такий, що

$$U_n \times [s_n, s_{n+1}] \subset V_0\,.$$

З того, що U - нормальний, ми можемо припустити, що $[\overline{U}_{n+1}] \subset U_n$ для кожного $n \geq 1$. За великою лемою Урисона ми можемо вибрати відображення $\varepsilon_n : U \to I$ таке, що

$$\varepsilon_n(u) = \begin{cases} 0, & якщо \;\; u \in U \setminus U_n \\ 1, & якщо \;\; u \in \overline{U}_{n+1} \end{cases}$$

Задаємо відображення $\varepsilon : U \to I$ за формулою

$$\varepsilon(u) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} e_n(u)$$

для кожного $u \in U$. Очевидно, що ми маємо формулу

$$\varepsilon(u) = \begin{cases} 0, & якщо \;\; u \in U \setminus U_1 \\ 1, & якщо \;\; u \in Y \end{cases}$$

Більше того, ми будемо доводити, що таке відображення ε має наступну властивість

$$(u, \varepsilon(u)) \in V_0$$

для кожного $u \in U_1 \setminus Y$. Для цього зауважимо, що з (2) випливає

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = Y .$$

Отже, для будь-якого $u \in U_1 \setminus Y$ ми маємо $u \in U_i \setminus U_{i+1}$ для деякого i . Звідси випливає, що

$$\varepsilon_n(u) = \begin{cases} 1, & якщо \;\; n < i \\ 0, & якщо \;\; n > i \end{cases}$$

і більше того

$$\varepsilon(u)=\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{i-1}}+\frac{1}{2^i}\varepsilon_i(u)=1-\frac{1}{2^{i-1}}+\frac{1}{2^i}\varepsilon_i(u)$$

Звідси випливає, що $\varepsilon(u)\in[s_i,s_{i+1}]$. Отже,

$$(u,\varepsilon(u))\in U_i\times[s_i,s_{i+1}]\subset V_0$$

Далі, ми задаємо функцію $r:U\to Y$ враховуючи умову (1) для відображення $\varepsilon:U\to I$. Оскільки $r|Y$ є тотожнє відображення, то залишилось дослідити неперервність r в граничних точках простору Y в U. Завжди коли ми хочемо довести це - треба показати, що для будь-якої послідовності

$$U_n\in U\setminus Y,(n=1,2,\ldots)$$

$u_n\to y\in Y$, негайно випливає, що $r(u_n)\to r(y)=y$.

Насправді точка $(u_n,e(u_n))$ належить околові V_0. Отже, існує точка (y_n,τ_n) в $Y\times J$ така, що виконується

(4) $d_1[(u_n,e(u_n)),(y_n,\tau_n)]<1-e(u_n)$

(5) $d[H(u_n,e(u_n)),H(y_n,\tau_n)]<1-e(u_n)$

у відповідності з умовами (2) і (3). Оскільки $u_n\to y$, це випливає з неперервності ε, то $\varepsilon(u_n)\to\varepsilon(y)=1$. Цей факт, а також умови (4) і (5) дають умови

(6) $(u_n,\varepsilon(u_n))\to(y,1)$

(7) $d_1[(u_n,\varepsilon(u_n)),(y_n,\tau_n)]\to 0$

(8) $d[H(u_n,\varepsilon(u_n)),H(y_n,\tau_n)]\to 0$

З (6) і (7) робимо висновок, що $(y_n,\tau_n)\to(y,1)$, а отже

(9) $K(y_n,\tau_n) \to K(y,1) = y$

Оскільки $K(y_n,\tau_n) = H(y_n,\tau_n)$, то ми одержимо з (8) і (9), що

$$r(u_n) = H(u_n, \varepsilon(u_n)) \to y$$

Цим доведена неперервність ретракції r.

§6. Домінування політопами.

Ми говоримо, що простір X домінує над простором Y тоді і тільки тоді, коли існує два відображення

$$\Phi : X \to Y,\ \psi : Y \to X$$

такі, що композиція $\Phi \circ \psi : Y \to Y$ є гомотопною до тотожнього відображення i на Y. В цьому випадку, X називається домінуючим простором над Y.

Разом з тим, якщо α задане покриття простору Y і композиція $\Phi \circ \psi \in \alpha$ – гомотопною до тотожнього відображення, то X називається α-домінуючим простором над Y. У випадку, якщо Y метричний простір і $\Phi \circ \psi$ є ε- гомотопна тотожному відображенню, то X називається ε- домінуючим простором над Y.

Насправді тут подано означення тонкого гомотопічного домінування.

<u>Теорема 6.1.</u> Якщо Y є ANR, то для будь-якого відкритого покриття α простору Y існує α- домінуючий сімплексіальний політоп X над простором Y з топологією Уайтхеда.

Це не критерій, а тільки властивість ANR.

<u>Доведення.</u> Нехай α довільне відкрите покриття простору Y. За (1.1) існує відкрите подрібнення β цього α таке, що будь-які два β- близькі

відображення з довільного простору в простір Y будуть α- гомотопними. Тоді, за необхідністю з (4.1) існує відкрите подрібнення γ цього β таке, що кожна часткова γ- реалізація сімпліціального політопа K продовжується до повної β- реалізації цього K в Y.

Оскільки простір Y метризовний, то він цілком нормальний і паракомпактний. Отже, існує локально скінченне відкрите зірчато вписане покриття δ в γ . Позначимо через X геометричний перв цього δ з топологією Уайтхеда. Ми будемо означувати відображення

$$\Phi_0 : X^0 \to Y \,\sigma$$

з нуль-вимірного скелетона (сукупність вершин) $X^0 \in X$ наступним чином. Для кожної відкритої множини $U \in \delta$ вибираємо точку $y_u \in U$. Тоді ми задаємо Φ_0 формулою

$$\Phi_0(V_u) = y_u$$

для вершини V_u відповідного околу U .

Відображення Φ_0 буде частковою γ реалізацією X в Y. Справді, нехай σ - довільний замкнутий сімплекс в X . Якщо через $V_{u_0},\ldots,V_{u_q}$ позначити вершини цього σ ,то звідси випливає ,що

$$U_0 \cap U_1 \cap \ldots \cap U_q \neq \varnothing$$

Оскільки δ є зірчато вписаним подрібненням покриття γ , то існує відкрита множина $V_0 \in \gamma$, яка містить усі околи $U_i,(i = 0,1,\ldots,q)$. Отже, $\Phi_0(\sigma \cap X^0) \subset V_\sigma$.

За вибором відкритого покриття γ, часткова реалізація Φ_0 цього X продовжується до повної реалізації

$$\Phi : X \to Y$$

Для довільно вибраного сімплекса σ з X існує відкрита множина $W_\sigma \in \beta$ така, що

$$\Phi(\sigma) \subset W_\sigma .$$

Враховуючи доведення необхідності в (4.1), ми можемо припустити, що

$$V_\sigma \subset W_\sigma$$

для кожного замкнутого сімплекса σ в X .

Розглянемо тепер канонічне відображення

$$\psi : Y \to X$$

для локально скінченного відкритого покриття δ .

Ми будемо доводити, що композиція відображень $\Phi \circ \psi : Y \to Y$ буде β - близькою до тотожного відображення $Id : Y \to Y$. Для цього вибиремо довільну точку y з Y . Позначимо відкриті множини покриття δ , які містять точку y буквами $U_0, U_1, \ldots, U_q$. Тоді $\psi(y)$ - точка сімплекса $\sigma \in X$

з вершинами, що відповідають даним відкритим множинам. Звідси випливає, що

$$\Phi[\psi(y)] \in W_0 .$$

З іншої сторони ми маємо

$$y \in U_i \subset V_\sigma \subset W_\sigma .$$

Цим доведено, що композиція $\Phi \circ \psi$ буде β - близькою до Id .

За вибором відкритого покриття β випливає, що композиція $\Phi \circ \psi$ є α-гомотопною тотожному Id. Цим доведено, що X є α- домінуючим простором над Y.

В даному доведенні ми можемо вибрати δ зірчато скінченним, якщо Y сепарабельний, або скінченним якщо Y компактний.

<u>Наслідок 6.2.</u> Якщо Y сепарабельний ANR, то для будь-якого відкритого покриття α простору Y існує α- домінуючий сімплексіальний політоп X над Y, який є локально скінченним.

Якщо ж Y - компактний ANR, то політоп X можна вибрати скінченним.

Насправді (6.1) є характеристичною для ANR, тобто вона буде не тільки як властивість але як і критерій.

<u>Теорема 6.3.</u> Для кожного метризовного простору Y наступні чотири умови еквівалентності:

(a) Y є ANR,

(b) для будь-якого відкритого покриття α простору Y існує α-домінуючий простір X над Y, який є ANE для класу всіх метризовних просторів.

(c) для деякої метрики, яка породжує топологію на Y і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує ε- домінуючий простір X над Y, який буде ANE для всіх метризовних просторів.

(d) існує послідовність домінуючих просторів $\{X_n\}$ над Y кожний з яких належить класу ANE і така, що відповідна послідовність гомотопій $\{h_t^n : \Phi_n \circ \psi_n \approx Id\}$ є послідовністю деформацій, що збігаються до Id.

Ця теорема є прямим наслідком з (5.1), (6.1) і леми (6.4).

Лема 6.4. Якщо X є ANR для класу всіх метризовних просторів і Y замкнутий підпростір метризовного Z, то композиція

$$\Phi \circ \psi : Y \to Y$$

двох відображень $\Phi : X \to Y$ і $\psi : Y \to X$ має продовження $h : U \to Y$ на деякий окіл U з Y в Z.

Це означає, що Y є ANR

Доведення. Оскільки X є ANR, то відображення $\psi : Y \to X$ має продовження $g : U \to X$ на деякий окіл U з Y в Z. Тоді композиція

$$h = \Phi \circ g : U \to Y$$

є продовженням $\Phi \circ \psi$.

ЛЕКЦІЯ №9.

Локально n-зв'язні простори та нескінченно-вимірні ANR.

В цьому розділі характеризуються властивості локально зв'язних просторів. Результати будуть використані для дослідження того факту, що нескінченно вимірні метризовані простори, які є локально стягувані, будуть ANR. Для довільних нескінченно вимірних просторів це невірно, навіть для будь-якого компакта метричного простору.

§1. Попередні означення.

Розглянемо сферу S^n, яка обмежує кулю E^n у евклідовому просторі. Нам відоме означення, що простір Y – n-асферичний тоді і тільки тоді, коли кожне відображення $f\colon S^n \to Y$ продовжується до відображення $g\colon E^{n+1} \to Y$. Раніше ми означили, що простір Y локально зв'язний в розмірності n тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $y \in Y$ і кожного околу U існує інший окіл $V \subset N$ точки y такий, що кожне відображення $f : S^n \to V$ переходить у $g : E^{n+1} \to U$.

Нехай $n \geq 0$ – задане ціле число. Кажуть, що простір Y є n-зв'язний (позначаємо C^n) тоді і тільки тоді, коли Y є q-асферичний для кожного $q \leq n$. Простір Y називають локально n-зв'язним (позначаємо LC^n), якщо Y є локально зв'язним в розмірності q для кожного $q \leq n$. У випадку $n=\infty$ позначатимемо C^∞ і LC^∞. Будемо використовувати C^* і LC^* для стягуваності та локальної стягуваності.

Кажуть, що метризований простір X має розмірність $\leq n$ і позначають $dimX \leq n$, якщо кожне відкрите покриття α простору X має скінченне подрібнення β таке, що його нерв N_β не містить сімплексів розмірності більше n.

Метризований простір X називається скінченно вимірним, якщо існує ціле число n таке, що $dimX \leq n$. У іншому випадку ми називаємо його нескінченно вимірним. Якщо X - скінченно вимірний, то його розмірністю називається найменше ціле n, що $dimX \leq n$.

Багато властивостей розмірності сепарабельних метричних просторів виконуються для метризованих просторів. Наприклад, дві леми.

Лема 1.1. $dim\,(X \times I) \leq 1 + dim\,X$.

Лема 1.2. Якщо $A \subset X$, то $dimA \leq dimX$.

Доведення цих лем дав Моріта.

§2. Характеризація LC^n околовим продовженням.

Теорема 2.1. Якщо Y – метризований простір і маємо ціле число n, то наступні 4 твердження еквівалентні:

(a) Y є LC^n.

(b) Якщо відображення $f\colon A \to Y$ задане на замкнутій підмножині A метризованого простоту X розмірності $dim(X\backslash A) \le n+1$, то це відображення може бути продовжене на окіл W у просторі X.

(c) Для кожної точки $y\in Y$ і для кожного околу U точки y існує інший окіл $V\subset U$ точки y просторі Y такий, що кожне відображення $f\colon A\to V$ на заданому просторі A метризованого простору X розмірності $dim\,(X\backslash A) \le n+1$, має продовження $g\colon X \to U$.

(d) Для кожної точки $y\in Y$ і для кожного околу U точки y існує інший окіл $V\subset U$ точки y просторі Y такий, що кожне відображення $f\colon X\to Y$ метризованого простору X, $dimX \le n$, буде гомотопне постійному відображенню в межах околу U.

Доведення. (a)$\Rightarrow$(b). Оскільки $dim\,(X\backslash A) \le n+1$, то існує канонічне покриття γ простору $X\backslash A$ таке, що його геометричний нерв N, який не має сімплекса розмірності > $n+1$, замінимо $X\backslash A$ - симплексіальним політопом N і одержимо простір

$$X^* = A \cup N$$

і відображення

$$\mu\colon X \to X^*$$

таке, що $\mu|A$ є відображенням вкладення, а $\mu \mid X\backslash A$ – канонічне відображення простору $X\backslash A$ в нерв N відкритого покриття γ. Ми будемо будувати продовження $g^*: W^* \to Y$ на окіл відображення f.

Для кожного цілого числа $k \geq 0$ через N^{k} позначимо k-вимірний скелетон нерва N. Задамо спочатку відображення

$$\Phi: A \cup N^0 \to Y$$

Нехай d – функція відстані, яка задає топологію X. У кожній множині $U \in \gamma$ вибираємо точки x_u, a_u, і т. д. із A так, що

$$d\,(x_u, a_u) < 2d(x_u, A).$$

Відображення Φ буде задане, якщо покладемо

$$\Phi(a) = f(a),\ \ a \in A$$

$$\Phi(v_U) = f(a_U),\ \ v_U \in N^0$$

де $v \in N^0$, N^0 – множина вершин, N^1 – множина відрізків, N^2 – множина трикутників, N^3 – множина тетраедрів і т.д.

Далі будемо будувати за індукцією окіл W_k^* множини A упросторі Y^* і відображення

$$\Phi_k: (A \cup N^k) \cap W_k^* \to Y$$

наступним чином. Для $k=0$ задаємо $W_0^*=X^*$, а $\Phi_0=\Phi$. Це була основа індукції, тепер йде індуктивне допущення. Нехай вже побудовані відображення W_k^* і Φ_{k-1} для всіх $0 \leq k \leq n+1$. Будемо далі будувати W_k^* і Φ_k .

Для кожного $a \in A$ нехай W_a буде околом точки $\Phi_{k-1}(a) = f(a)$ у просторі Y таким, що кожне відображення сфери S^{k-1} в окіл W_a продовжується до відображення E^k у посторі Y. Оскільки відображення Φ_{k-1} є неперервним, то існує окіл $V_a^* \subset W_{k-1}^*$ точки a у просторі X^* такий, що

$$\Phi_{k-1}\,[\,(A \bigcup N^{k-1}) \bigcap V_a^*\,] \subset W_a\,.$$

Відповідно до означення топології $A \bigcup N$ можна допустити, що V_a^* містить точки простору $A \bigcap V_a$ у просторі X. Іншими словами, V_a^* містить точки простору $A \bigcap V_a$, таким чином містить зірки $St(v_U)$ в просторі N, для яких $U \subset V_a$. Ми задаємо окіл

$$W_k^* = \bigcup_{a \in A} V_a^*\,.$$

Щоб побудувати Φ_k візьмемо довільний замкнутий k-сімплекс (позначаємо σ) у просторі $N \bigcap W_k^*$. Тоді існує точка $a \in A$ така, що $\sigma \subset V_a^*$. $\Phi_{k-1} | \partial \sigma$ є відображенням $(k-1)$-вимірної сфери в окіл W_a, і, отже, продовжується до відображення всього сімплекса σ прорстора Y. Позначимо через $\partial(\sigma)$ інфінум діаметрів образів сімплекса σ, вибраних по всіх можливих продовженнях $\Phi_{k-1} | \partial \sigma$, що задовольняє умову

$$diam\ \psi_\sigma(\sigma) < 2\delta(\sigma)\,.$$

З цією метою ми для усіх замкнутих k-сімплексів в $N \bigcap W_k^*$ задаємо відображення Φ_k:

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} \Phi_{k-1}(x), & x \in A \bigcup N^{k-1} \\ \psi_\sigma(x), & x \in \sigma \subset N^k \end{cases}$$

для довільних точок $x \in (A \bigcup N^k) \bigcap W_k^*$. Неперервність побудованого таким чином відображення Φ_k необхідно доводити тільки для граничних точок множини A в просторі X^*, як простий наслідок неперервності відображення Φ_{k-1}, локальної зв'язності Y розмірності < $k-1$ і того факту, що множина має діаметр $<2\delta(\sigma)$. Це завершує індуктивну побудову W_k^* і Φ_k для кожного $k=0,1,\ldots,n+1$.

Нехай $W^*=W^*_{n+1}$, і нехай $g^*=\Phi^*_{n+1}$. Як тільки N має розмірність $\le n+1$, то g^* ,задане на W^* ,є продовженням f.

Нарешті задаємо $W=\mu^{n-1}(W^*)$. Тоді W буде околом множини A в просторі X. Задаємо відображення $g: W \to Y$ формулою

$$g(x) = g^*[\mu(x)]$$

для кожного $x \in W$. Тоді g буде продовженням f на окіл W. Цим завершується доведення (a)⇒(b).

(b)⇒(c). Допустимо супротивне. Це не вірно для $y_0 \in Y$. Тоді існує окіл U точки y_0 в просторі Y, що для кожного $V \subset U$ точки y_0 простору Y існує відображення $f: A \to V$, яке задане на замкнутій підмножині A метричного простору X з розмірністю $dim\ (X\backslash A) \le n+1$, що не має продовження на весь простір X.

Оскільки простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то існує спадна послідовність околів точки y_0 в просторі Y такого виду:

$$U \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_i \supset \ldots,$$

які утворюють локальний базис в точці y_0. Для кожного i вибираємо відображення $f_i: A_i \to V_i$, яке задано на замкнутому підпросторі A_i метричного простору X_i так, що $dim(X_i \backslash A_i) \le n+1$, та яке не має продовження на весь простір X_i із значеннями в околі U.

Також ми можемо вибрати метрику d_i в X_i для кожного i, яке задовольняє умову

$$d_i(p,q)<1.$$

Будуємо метричний простір X, який містить точку θ та диз'юнктне об'єднання усіх просторів X_i , $i=1,2,\ldots$, з метрикою

$$d(p,q)=\begin{cases} 2^{-i}d_i(p,q), & p\in X_i,\ q\in X_i \\ 2^{-min}(i,j), & p\in X_i,\ q\in X_j,\ i\neq j \\ 2^{-i}p, & p=\theta,\ q\in X_i \end{cases}$$

Підпростір A^* простору X^*, який містить точку θ і об'єднання всіх A_i, буде замкнутий у просторі X. Як доведено Морітою, маємо

$$вim\ (X^*\backslash A^*)\leq n+1$$

Задаємо відображення $f^*: A^*\rightarrow Y$ за формулою

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x)_i, & x\in A_i \\ y_0, & x=\theta \end{cases}$$

Згідно з (b), існує окіл W^* простору A^* у просторі X^* разом з продовженням $g^*:W^*\rightarrow Y$.

Розглянемо прообраз $H^*=g_*^{-1}(U)$. Тоді H^* буде околом точки θ у просторі X^*. Оскільки $d^*(\theta, x_i)= 2^{-1}$, то існує ціле число k таке, що $X_i\subset H^*$ для кожного $i\geq k$. Нехай тепер $i\geq k$, і ми задаємо відображення $g_i: X_i\rightarrow U$ формулою

$$g_i(x)=g^*(x),\ \forall x\in X_i\,.$$

Тоді відображення g_i буде продовженням відображення f_i на простір X_i із значеннями в околі U. Це протирічить вибору відображення f_i і завершує доведення (b)⇒(c).

(c)⇒(d). Нехай y буде довільна точка простору Y, і нехай U -довільний окіл точки y в Y. Вибираємо окіл точки $V\subset U$ такий, щоб виконувалась умова (c). Нехай $f: X\rightarrow V$ - довільне відображення, для якого виконується умова $dim\,X\leq n$. Розглянемо замкнутий підпростір

$$A^*=(X\times\{0\}\cup X\times\{1\})$$

топологічного добутку $X^*=X\times I$. За лемами (1.1) і (1.2) ми маємо

$$dim\ (X^*\backslash A^*) \le n+1$$

Отже, згідно умови (с), відображення $F\colon A^* \to V$, яке задане формулою $F(x,0)=f(x)$ і $F(x,1)=y$, має продовження $H\colon X^* \to U$. Оскільки H задає гомотопію відображення f і постійного відображення y, то ми довели (с)$\Rightarrow$(d).

(d)$\Rightarrow$(a). Нехай $y \in Y$, і нехай U - окіл точки y у просторі Y. Вибираємо окіл $V \subset U$ такий, щоб виконувалась умова (d). Зокрема, нехай $X=S^k$, $0 \le k \le n$. Звідси випливає, що кожне відображення $f\colon S^k \to V$ буде гомотопним постійному відображенню в U і, отже, продовжується до відображення $g\colon E^k \to U$. Цим самим доведено, що простір Y є LC^n.

Зауваження 2.2. У випадку $n=\infty$ теорема 2.1 виконується, якщо ми в пункті (b) і (с) обмежимося умовою на $X\backslash A$, і в пункті (d) простір X буде вважатися скінченно вимірним.

Нарешті, оскільки метричний простір X^*, побудований при доведенні (b)$\Rightarrow$(с), буде сепарабельним, якщо усі простори X_i – сепарабельні, то ми маємо наступне зауваження.

Зауваження 2.3. Якщо в пунктах (b), (с), (d) обмежитися сепарабельним простором, то теорема буде вірна.

§3. Характеризація LC^n околовою ретракцією

Теорема 3.1. Якщо Y - метризований простір і n - ціле число, то наступні дві умови еквівалентні:

(a) Y є LC^n.

(b) Якщо Y вкладається як замкнутий підпростір у метризований простір Z, так що $\dim (Z\setminus Y) \le n+1$, то простір Y буде околовим ректрактом Z .

Для доведення спочатку доведемо наступну лему.

Лема 3.2. Якщо відображення $f\colon A \to Y$ задано на замкнутому підпросторі A метризованого простору X в метризований простір Y, то існують: метризований простір Y^*, який містить Y як замкнуту підмножину,також продовження $F\colon X \to Y^*$ відображення f таке, що $F|(X\setminus A)$ буде гомеоморфізмом простору $X\setminus A$ на простір $Y^*\setminus Y$.

Доведення. Беремо X та Y з обмеженими метриками і вкладаємо їх у банаховий простір $C(X)$ і $C(Y)$ як замкнуті дійснозначні функції в значенні канонічних ізометричних вкладень. Тоді Y буде замкнутою підмножиною у своїй опуклій оболонці Z в просторі $C(Y)$.

Оскільки Z є абсолютним екстензором для Y, то задане відображення $f\colon A \to Y$ має продовження $g\colon X \to Z$. Розглянемо топологічний добуток

$$P=Z\times I\times C(X),$$

і задаємо відображення $\Phi\colon X\to P$ формулою

$$\Phi(x) = \{ g(x), D(x, A), x\, d(x, A) \}$$

По координатно для кожного $x\in X$.

Нехай Y ототожнюється із підпростором $Y\times\{0\}\times\{\theta\}$ добутку P, де через θ позначимо екземпляр банахового простору $C(X)$. Нехай

$$Y^* = Y \cup \Phi(X) \subset P.$$

Задаємо відображення $F\colon X\to Y^*$ формулою $F(x) = \Phi(x)$, $\forall x\in X$. Це може бути легко замінено, коли Y є замкнутим в Y^* і коли відображення $F|(X\setminus A)$ є гомеоморфізмом простору $X\setminus A$ на $Y^*\setminus Y$.

Доведення. *(3.1).* Імплікація (a)$\Rightarrow$(b) після позначення $X=Z$ дає нам $A=Y$ і f буде тотожним відображенням на Y.

(b)$\Rightarrow$(a) Нехай $f\colon A\rightarrow Y$ – довільне відображення, задане на довільному замкнутому підпросторі A метризованого простору X з умовою

$$dim\ (X\backslash A) < n+1.$$

Використовуючи (3.2), можна стверджувати, що існує метризований простір Y^* , який містить Y як замкнутий підпростір, а також існує продовження $F{:}X\rightarrow Y^*$ відображення f таке, що $F|(X\backslash A)$ буде гомеоморфізмом простору $X\backslash A$ на простір $X^*\backslash Y$. Звідси випливає

$$dim\ (Y^*\backslash Y) \leq n+1.$$

За умовою (b), Y є околовим ретрактом простору Y^*. Нехай $r\colon V\supset Y$ - ретракція з околу V простору Y в межах Y^*, і нехай $W=F^{-1}(V)$. Тоді W буде околом множини A в просторі X. Задаємо відображення $g\colon W\rightarrow Y,\ \forall x\in W$, за формулою

$$G(x) = r[F(x)],\quad \forall x\in W.$$

Тоді g буде продовженням f на окіл W. Отже, за (2.1) Y буде LC^n.

§4. Характеризація LC^n частковими реалізаціями.

Теорема 4.1. Якщо Y – метризований простір і n – ціле число, то наступні дві умови еквівалентні:

(a) Y є LC^n.

(b) Для будь-якого покриття α простору Y існує відкрите подрібнення β цього покриття таке, що для довільного сімплексіального політопа K з топологією Уайтхеда, який не має сімплекса розмірності більше $n+1$, кожна часткова реалізація K в Y відносно покриття β продовжується до повної реалізації K в Y відносно α.

Доведення. (a)$\Rightarrow$(b). Нехай α - задане відкрите покриття простору Y. Ми будемо будувати відкриті покриття у кількості $2n+2$:

$$\alpha_0 , \beta_0 ,\ldots, \alpha_n , \beta_n$$

простору Y по індукції наступним чином. Нехай спочатку $\alpha_n=\alpha$. Виберемо $0\leq i\leq n$ таке, щоб α_i завжди було побудоване. Нехай точка $y\in Y$ – довільна. Зафіксуємо відкриту множину $U_y \in \alpha_i$, яка містить точку y. Оскільки Y – локально зв'язний розмірності i, то існує вдкритий окіл $V_y\subset U_y$ такий, що кожне відображення S^i у просторі V_y продовжується до відображення E^{i+1} в окіл U_y. Нехай тепер

$$\beta_i=\{V_y|y\in Y\}$$

Для випадку $i>0$ ми задаємо α_{i-1} як відкрите зірчате подрібнення β_i. Це завершує індуктивну побудову відкритих покриттів α_i , β_i $(i=0,1,\ldots,n)$.

Нехай β - відкрите подрібнення покриття β_0. Ми будемо доводити, що β задовільняє умову (b). Нехай K – сімплексіальний політоп, який не має сімплексів розмірності більше $n+1$,

$$f\colon L\to Y$$

буде частинною реалізацією K в Y відносно покриття β. Ми будемо продовжувати f до повної реалізації відносно α. Для кожного $i = 0,1,\ldots,n+1$ задаємо

$$\overline{K}^i = L\bigcup K^i,$$

де кожне K^i позначає i-вимірний скелетон простору K. Тоді маємо

$$\overline{K}^0 = L,\ \ \overline{K}^{n+1} = K$$

Ми будемо будувати також за індукцією для кожного $i=0,1,\ldots,n$ частинну реалізацію

$$f_i\colon \overline{K}^{\,i} \to Y,$$

тобто це відображення політопа K в простір Y відносно покриття β_i .

Робимо це наступним чином. По-перше, нехай $f_0=f$. Допустимо, f_i уже побудовано для кожного $0\le i< n$. Нехай σ буде довільний $(i+1)$-вимірний сімплекс політопа K, який не лежить в L. Оскільки f_i є частинною реалізацією відносно β_i, то f_i переводить границю $\partial\sigma$ сімплекса σ у відкриту множину покриття β_i. Іншими словами, існує точка $y\in Y$, що

$$f_i\,(\partial\sigma) \subset V_y \in \beta_i.$$

За вибором елемента V_y відображення $f_i|\partial\sigma$ продовжується до відображення

$$\Phi_\sigma : \sigma \to U_y \in \alpha_I$$

Робимо це для кожного замкнутого $(i+1)$-вимірного сімплекса σ політопа K, який не належить L. Тоді відображення f_{i+1} можна задати наступною формулою для кожного $x\in\overline{K}^{\,i+1}$

$$f_{i+1}(x)=\begin{cases} f_i(x), & x\in\overline{K}^{\,i} \\ \Phi_\sigma(x), & x\in\sigma \end{cases}.$$

Враховуючи, що f_{i+1} є частковою реаліазацією політопа K відносно β_{i+1}, вибираємо довільний замкнутий сімплекс τ політопа K. Оскільки f_1 є реалізацією відносно β_i, а, отже, і відносно α_i, то існує відкрита множина $U_\tau\in\alpha_i$, така що

$$\boldsymbol{f_{i+1}}\,(\tau \cap \overline{K}^{\,i}) = \boldsymbol{f_i}\,(\tau \cap \overline{K}^{\,i}) \subset U_\tau\,.$$

Для кожної $(i+1)$-вимірної замкнутої грані σ в τ, яка не лежить в L існує відкрита множина $U_\sigma\in\alpha_i$, яка містить образ $f_{i+1}(\sigma)$. Оскільки $f_{i+1}(\sigma)$ міститься в $U_\sigma \cap U_\tau$, то звідси випливає, що кожний U_σ перетинає U_τ, а значить, він розміщений у зірці U_τ відносно α_i. Оскільки α_i є зірчатим подрібненням покриття β_{i+1}, то існує покриття $V\in \beta_{i+1}$, яке містить зірку U_τ . Таким чином, одержимо

$$f_{i+1}(\tau\bigcap \overline{K}^{i+1i})\subset V\in\beta_{i+1}$$

Цим завершується індуктивна побудова часткової реалізації f_i $(i=0,1,\ldots,n)$.

Зокрема, f_n: $\overline{K}^n \to Y$ є частковою реалізацією політопа K відносно покриття β_n. Використовуючи побудову f_{i+1} через f_i , одержимо повну реалізацію політопа K відносно $\alpha=\alpha_n$:

$$g=f_{n+1}: K\to Y.$$

Отже, відображення g – продовження відображенння f, що й завершує доведення (a)⇒(b).

(b)⇒(a) Нехай k – ціле число, яке задовольняє умову $0\le k\le n$. Ми будемо доводити, що простір Y буде локально зв'язним в розмірності k. Для цього зафіксуємо довільну точку $y\in Y$ і довільний окіл U точки y. Достатньо довести існування околу $V\subset U$ точки y в прсторі Y такого, що кожне відображення f: $S^{\mathrm{k}}\to V$ продовжується до відобрвження g: $\Delta^{\kappa+1}\to U$, де границею симплекса Δ вважається сфера S^{k}.

Оскільки простір Y – регулярний, то існує відповідний простір W, що

$$y\in W\subset\overline{W}\subset U.$$

Тоді покриття $\alpha = \{U,Y\backslash W\}$ буде відкритим покриттям простору Y. Нехай β є відкритим подрібненням покриття α, що задовольняє умову (b). Вибираємо відкриту множину $V\in\beta$, яка містить точку y. Ми можемо допустити, що $V\subset W$. В протилежному випадку замінимо окіл V перетином $V\bigcap W$. Нехай f: $S^k\to V$ – довільне відображення. Тоді f – часткова реалізація $\Delta^{\kappa+1}$ у простір Y відносно покриття β. За умовою (b), відображення f продовжується до повної реалізації g: $\Delta^{\kappa+1}\to Y$ відносно покриття α**.** Оскільки $\Delta^{\kappa+1}$ є замкнутим сімплексом, то образ $g(\Delta^{\kappa+1})$ буде міститися у відкритій множині, що є елементом покриття α. Оскільки $f(S^k) \subset W$, то звідси випливає $g(\Delta^{\kappa+1}) \subset U$. Отже, відображення g буде продовженням відображення f в U. Цим завершується доведення (b)$\Rightarrow$(a).

§5. Характеризація LC^n малою гомотопією.

Теорема 5.1. Якщо Y є метризованим простором і n – ціле число, то наступні дві умови еквівалентні.

(a) Y є LC^n.

(b) Для кожного відкритого покриття α простору Y існує відкрите подрібнення β таке, що будь-які два β - близькі відображення $f, g: X \to Y$, задані на довільному метризованому просторі X, $dimX \le n$, будуть α - гомотопними.

Доведення. (a)$\Rightarrow$(b). Нехай α буде довільним відкритим покриттям простору Y. Задамо $\beta_{n+1} = \alpha$ і зафіксуємо відкрите зірчато вписане подрібнення α_n покриття β_{n+1}. Побудуємо відкриті покриття α_i $(i=0,1,\dots,n-1)$, а також відкриті покриття β_i $(i=0,1,\dots,n)$. Нехай β буде відкритим зірчато вписаним покриттям покриття β_0. Доведемо, що β задовольняє (b).

Для цього нехай $f, g: X \to Y$ - два довільно задані β-близькі відображення, визначені на метризованому просторі X, $dimX \le n$. Досить довести, що f, g - α-гомотопні.

Нехай θ відкрите покриття простору X, яке є загальним зірчато вписаним подрібненням для двох індукованих покриттів

$$f^{-1}(\beta) = \{f^{-1}(V) | V \in \beta\},\ g^{-1}(\beta) = \{g^{-1}(V) | V \in \beta\}.$$

Розглянемо замкнутий підпростір

$$A = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$$

топологічного добутку $P=X\times I$. Позначимо через J відкритий інтервал $(0,1)$; тоді

$$P\backslash A = X\times J,$$

де A – це просто дві основи, P – просто циліндр, $P\backslash A$ – циліндр без основи. Тоді $\theta\times J = \{G\times J | G\in\theta\}$ -це відкрите покриття цього обрізаного циліндра $P\backslash A$. Нехай тепер γ - канонічне покриття $P\backslash A$ таке, що γ подрібнює покриття $\theta\times J$ таке, що його геометричний нерв N не має сімплексів розмірності $> n+1$. Замінимо обрізаний циліндр $P\backslash A$ сімпліціальним політопом N. Одержимо простір

$$P^* = A\cup N$$

і відображення

$$\mu\colon P\to P^*$$

таке, що $\mu|A$ є включенням і $\mu|P\to P^*$ буде канонічним відображенням обрізаного циліндра $P\backslash A$ в нерв відкритого покриття γ.

Задамо відображення $h\colon A\to Y$ формулою:

$$h(x,0) = f(x)\ ,\quad h(x,1) = g(x)$$

$\forall x\in X$. Позначимо через N^i i-вимірний скелетон нерва N. Будемо будувати за індукцією відображення

$$\Phi_i\colon A\cup N^i \to Y,$$

де $i=0,1,\ldots,n+1$, наступним чином. По-перше, нехай вже побудовано Φ_0. Для кожного $U\in\gamma$ вибираємо точку $(x_U, t_U)\in U$. Далі продовжуємо відображення h до відображення Φ_0, задаючи його в кожній вершині v_U нерва N формулою

$$\Phi_0(v_U)=\begin{cases} f(x_U), & t_U \le \frac{1}{2} \\ g(x_U), & t_U > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Неперервність такого Φ_0 може бути перевірена як при доведенні (II, 14.1).

Теорема 14.1. Якщо $f: A \rightarrow L$ - довільне відображення, задане на замкнутій підмножині A будь-якого метризованого простору X в локально-опуклому топологічному лінійному просторі L, то існує продовження $g:X \rightarrow L$ відображення f таке, що $g(X)$ міститься в опуклій оболонці $f(A)$ в L (тобто локально-опуклим топологічним лінійним простором буде AE, бо образ $g(X)$ попадає в опуклу оболонку $\langle f(X) \rangle$)

Доведення.

Розглянемо простір $Y=A \cup N$ і відображення $\mu:X \rightarrow Y$ (§12). Достатньо довести, що відображення $f:A \rightarrow L$ має продовження $F:Y \rightarrow L$ таке, що $F(Y)$ міститься в опуклій оболонці $f(A)$ в L. Насправді, композиція $g=F\circ\mu: X \rightarrow L$ має продовження f таке, що $g(X)$ міститься в опуклій оболонці $F(A)$ в L.

Нехай d – функція відстані в X, яка породжує топологію на X і нехай γ – канонічне покриття простору $X \backslash A$, яке було використано для побудови простору Y та відображення μ з §12. Позначимо через N^0 множину усіх вершин сімплексіального політопа N. Ми будемо спочатку означувати відображення Φ на множині $A \cup N^0$ наступним чином:

з кожної відкритої множини $U(\gamma)$ вибираємо точку x_U і вибираємо точку $a_U \in A$ таку, що

$$d(x_U,a_U)<2d(x_U,A)$$

Відображення Φ буде задане, якщо ми покладемо:

$$\Phi(a)=f(a), \quad a \in A, \quad \Phi(v_U)=f(a_U), \; v_U \in N^0 .$$

Оскільки N^0 є множиною ізольованих точок, то $\Phi \,|\, N^0$, очевидно, є неперервним. Отже, для перевірки неперервності Φ досить перевірити це для граничних точок множини A. Виберемо довільну граничну точку a для множини A в X. І позначимо через M довільно вибраний окіл

точки $\Phi(a)=f(a)$ в просторі L.

З непервності відображення f випливає, що існує додатнє дійсне число δ таке, що для довільного $b \in$ A, де (a,b)>δ, маємо , що $f(b) \in M$.

Позначимо через V множину точок a в X ,задану формулою:

$$V=\{x \in \mathrm{X} \,|\, d(a,x)<\frac{\delta}{3}\}.$$

Цей окіл V задає базисний окіл V^* точки $a=\mu(a)$ в просторі Y, як це зроблено в §12. Ми завершимо доведення неперервності відображення Φ, якщо покажемо, що

$$\Phi[V^* \cap (A \cup N^0)] \subset M.$$

Нехай y - довільна точка $V^* \cap (a \cup N^0)$. Ми будемо доводити, що $\Phi(y)$ належить N. Якщо $y \in A$, то

$$y \in V^* \bigcap A = V \bigcap A.$$

Отже,

$$d(a, y) < \frac{\delta}{3} < \delta.$$

Звідси випливає, що $\Phi(y) = f(y) \in N$.

Якщо $y \in N^0$, то $y = v_U$ для деякого $U \in \gamma$ з умовою, що $U \in V$. Звідси видно, що $d(a, x_U) < \dfrac{\delta}{3}$.

Отже,

$$d(a, a_U) \le d(a, x_U) + d(x_U, a_U) < d(a, x_U) + 2d(x_U, A) \le 3d(a, x_U) \le \delta.$$

Тоді $\Phi(v_U) = f(a_U) \in D$. Цим завершується доведення неперервності відображення Φ.

Оскільки L є лінійним простором, то ми можемо продовжити лінійно до деякого сімплексу з N відображення Φ, яке задано на вершинах і, тому отримати функцію

$$F:Y\to L$$

Ми довели, що F є відображенням. Оскільки сума і скалярний добуток в L є неперервним, то F є неперервним на кожному сімплексі з N. Тоді з топології Уайтхеда випливає, що F є неперервний в N.

Для того, щоб довести неперервність F, достатньо перевірити цю неперервність в граничних точках A, що входять в Y.

Нехай a – довільна гранична точка A із Y і M – довільно вибраний окіл точки $F(a)=F(a)$ в L. Оскільки L є локально опуклий, то M містить опуклий окіл K точки $f(a)$ в L. Оскільки Φ є неперервний, то існує базисний окіл V^* точки a в Y для якої виконується:

$$\Phi[V^*\cap(A\cup N^0)]\subset K.$$

Цей базисний окіл V^* задається околом V від a в , як це описано в §12. За аксіомою 3, існує окіл W точки a в X з умовою $W\subset V$ і такий, що кожний $U\in\gamma$, який перетинає W міститься в V.

Окіл W визначає базисний окіл W^* для a в Y. Ми завершимо доведення неперервності F показавши, що

$$F(W^*)\subset K.$$

Нехай y є довільною точкою в W^*. Ми доведемо, що $F(y)\subset K$.

Якщо $y\in A$, то

$$y\in W^*\cap A = W\cap A\subset V\cap A = V^*\cap A.$$

Звідси випливає, що $F(y)=\Phi(y)\in K$.

Якщо $y\in A$, то y є точкою деякої зірки $St(v_U)$ з умовою, що $U\subset W$ за означенням W^*. Точка у є внутрішньою точкою сімплексу Δ з N.

Нехай вершинами Δ будуть точки $v_{U_0},\dots,v_{U_n}$. Оскільки $y\in St(v_U)$, то U – одна із відкритих множин $U_0,\dots,U_n$. За означенням нерва, ми маємо, що для кожного $i=0,1,\dots,n$ U_i перетинає U , отже W *також*.

Звідси видно, що $U_i \subset V$ для довільних $i=0,...,n$, отже, всі вершини $v_{U_0},...,v_{U_n}$ знаходяться в $V^* \bigcap N^0$.

Таким чином, $\Phi(v_{U_i}) \in K, i = 0,...,n$.

Оскільки K є опуклим, а F є лінійним на Δ, то $F(\Delta) \subset K$.

Зокрема, ми маємо $F(y) \subset K$. Цим завершується доведення, що F є відображенням.

Оскільки $\Phi(A \bigcup N^0) = f(A)$ і оскільки F продовжує Φ лінійно над будь-яким сімплексом із N, то, очевидно, що $F(y)$ міститься в опуклій оболонці в $f(A)$. Все доведено.

По-друге, нехай ми досліджуємо властивості відображення Φ_0. Для кожної точки $x \in X$ через γ_x позначимо множину всіх $U \in \gamma$, що кожне U містить точку (x, s_U) для деякого числа $s_U \in J$. Нехай тепер через K^0_x ми позначимо множину всіх вершин нерва N, які відповідають відкритим множинам з покриттям γ_x. Будемо доводити, що для $\forall x \in X\ \exists V_x \in \beta_0$ у просторі Y таке, що

$$\{f(x)\} \cup \{g(x)\} \cup \Phi_0(K^0_x) \subset V_x .$$

Щоб довести включення (I_0), ми спочатку зауважимо, що γ є подрібненням покриття $\theta \times J$. Для кожного околу $U \in \gamma_x$ існує відкрита множина $G_U \in \theta$ така, що

$$U \subset G_U \times J.$$

Звідси випливає, що $x \in G_U$, і $x_U \in G_U$. Оскільки покриття θ зірчато вписане в покриття $f^{-1}(\beta)$, і оскільки всі множини G_U мають спільну точку x, то існує відкрита множина $W \in \beta$ така, що

$$f(G_U) \subset W$$

для кожного $U \in \gamma_x$. Звідси випливає

$$f(x) \in W, \quad f(x_U) \in W, \quad (U \in \gamma_x).$$

Далі, оскільки f і g між собою β-близькі, то за означенням існує відкрита множина $W_X \in \beta$, яка містить одночасно два образи $f(x_U)$ і $g(x_U)$. Оскільки β - зірчато вписане подрібнення покриття β_0, а також W перетинає W_x і кожне W_U для $U \in \gamma_x$,то звідси випливає включення (I_0).

Для кожного невід'ємного цілого числа $i \leq n+1$ і для кожної точки $x \in X$ розглянемо політоп $K_X^{\,i}$ нерва $N^{\,\mathrm{i}}$, утворений усіма сімплексами цього нерва разом з вершинами $K_X^{\,0}$

Нехай $0 \leq i \leq n$. Допустимо, що маємо уже побудовані відображення Φ_i , які задовольняють умову, що для кожного $x \in X$ існує відкрита множина $V_x \in \beta_i$, що виконується включення (I_1)

$$\{f(x)\} \cup \{g(x)\} \cup \Phi_i(K_x^{\,i}) \subset V_x .$$

Будемо будувати Φ_{i+1} наступним чином.

Візьмемо довільний замкнутий $(i+1)$-вимірний сімплекс σ в нерві N. Відкриті множини в γ, які відповідають вершинам цього сімплекса σ мають спільну точку $(x,t) \in X \times J$. Отже, $\sigma \in K_x^{i+1}$. Звідси випливає, що $\partial\, \sigma \in K_X^{\,i}$. Отже, $\Phi_i\,(\partial\, \sigma) \subset V_x$. За побудовою покриття β_i при доведенні теореми (4.1), існує точка $y \in Y$ така, що $V_x = V_y$. Отже, за вибором V_y , частинне відображення $\Phi_i|\partial\, \sigma$ продовжується до відображення з σ на образи в околі U_y. Беремо метрику на Y, яка породжує його топологію і позначимо через $\partial\,(\sigma)$ інфінум діаметрів образів σ, взятих по усіх можливих продовженнях $\Phi_i|\partial\, \sigma$ із значеннями в U_y. Виберемо продовження $\psi_\sigma\colon \sigma \to U_y$ відображення $\Phi_i|\partial\, \sigma$ з

$$diam[\psi_\sigma(\sigma)] < 2\delta(\sigma).$$

Зробимо це для всіх замкнутих $(i+1)$-вимірних сімплексів σ в N і задамо Φ_{i+1} за формулою

$$\Phi_{i+1}(p)=\begin{cases}\Phi_i(p), p\in A\bigcup N^i\\ \psi_\sigma(p), p\in\sigma\subset N^{i+1}\end{cases}$$

для довільної точки $p\in A\cup N^{i+1}$. Неперервність Φ_{i+1} може бути доведена, як в доведенні теореми (2.1).

Для закінчення індуктивної побудови Φ_0, $\Phi_1,\ldots\Phi_{n+1}$, потрібно довести, що для кожного $x\in X$ існує відкрита множина $V_x\in\beta_{i+1}$ така, що

$$(\mathrm{I}_{i+1})\qquad \{f(x)\}\cup\{g(x)\}\cup\Phi_{i+1}(K_x^{i+1})\subset V_x$$

Оскільки β_i є подрібненням α_i, то з (I_i) випливає, що існує відкрита множина $W_x\in\alpha_i$ така, що

$$\{f(x)\}\cup\{g(x)\}\cup\psi_i(K_x^i)\subset W_x.$$

Тепер нехай σ - довільний замкнутий *(i+1)*-вимірний сімплекс в K_x^{i+1}. За побудовою ψ_σ існує відкрита множина $W_\sigma\in\alpha_i$ така, що

$$\Phi_{i+1}(\sigma)=\psi_\sigma(\sigma)\subset W_\sigma.$$

Оскільки, α_i – зірчато-вписане подрібнення β_{i+1} і W_x перетинає W_σ для кожного замкнутого *(i+1)* - вимірного сімплекса σ в K_x^{i+1}, то існує відкрита множина $V_x\in\beta_{i+1}$, яка містить W_x і кожну множину W_σ.Звідси випливає включення (I_{i+1}), що й завершує індуктивну побудову.

Зокрема, відображення

$$\Phi=\Phi_{n+1}: P^*\to Y$$

є продовженням відображення $h: A\to Y$ на всьому просторі P^*. Для кожного $x\in X$ існує відкрита множина $V_x\in\beta_{i+1}=\alpha$ така, що

$$(\mathrm{I})\qquad \{f(x)\}\cup\{g(x)\}\cup\Phi(K_x)\subset V_x,$$

де через K_x позначають підполітоп нерва N, утворений з вершин K_x^0.

Тепер задаємо гомотопію $h_t: X\to Y$, $(0\leq t\leq 1)$, наступним чином

(II) $$h_t(x)=\Phi[\mu(x,t)]$$

для кожного $t\in I$ і для кожного $x\in X$. Тоді $h_0 = f$ і $h_1=g$. Залишається довести, що h_t є α-гомотопним. Для цього, нехай x – довільна точка простору X. Виберемо множину $V_x\in\alpha$ таку, що включення (I) вірне. Оскільки, μ є канонічним відображенням γ, то $\mu(x,t)\in K_x$ для кожної точки t у відкритому інтервалі J. Звідси, за (I) і (II) ми маємо $h_t(x)\in V_x$ для кожного $t\in I$. Це означає, що h_t є α-гомотопним, що й завершує доведення (a)$\Rightarrow$(b).

(b)$\Rightarrow$(a). Нехай k – будь-яке ціле число, $0\leq k\leq n$. Будемо доводити, що Y є локально зв'язним в розмірності k. Для цього зафіксуємо точку y в Y. Досить довести існування околу $V\subset U$ точки y в просторі Y такого, що кожне відображення $f: S^k\to V$ є гомотопним постійному відображенню $g: S^k\to\{y\}$ в U.

Виберемо відкритий окіл W точки y з $\overline{W}\subset U$ і розглянемо відкрите покриття $\alpha=\{U, Y\backslash\overline{W}\}$. Нехай β - відкрите подрібнення покриття α, яке задовольняє умову (b). Виберемо відкриту множину $V\in\beta$, яка містить точку y. Оскільки два відображення

$$f: S^k\to V,\quad g: S^k\to\{y\}$$

є β-близькими, то вони повинні бути α-гомотопні.

Оскільки, $Y\backslash\overline{W}$ не містить $g(S^k) = y$, то f є гомотопним відображенню g в U. Це завершує доведення (b)$\Rightarrow$(a).

Зауваження 5.2. Якщо ми обмежимо простір X в умові (b), щоб він був сепарабельним, то теорема (5.1) залишиться справедливою.

Це випливає з того факту, що S^k є компактним, а, отже, сепарабельним.

§6. Характеризація LC^n за допомогою факторизацій відображень.

Теорема 6.1. Якщо Y – метризований простір і n – скінченне ціле число, то наступні дві умови еквівалентні:

(a) Y є LC^n.

(b) Для кожного відкритого покриття α простору Y існує сімплексіальний політоп P з топологією Уайтхеда, який не має сімплексів розмірності $> n$ разом з відображенням $\Phi\colon P\to Y$ таким, що для кожного відображення $f\colon X\to Y$ заданого на метризованому просторі X з $dimX\leq n$, існує відображення $\psi\colon X\to Y$ таке, що f і $\Phi\circ\psi$ є α-гомотопними.

Доведення. (a)$\Rightarrow$(b). Нехай задано довільне відкрите покриття α простору Y. За теоремою (5.1), існує відкрите подрібнення β покриття α таке, що будь-які два β-близькі відображення f, $g\colon X\to Y$, задані на довільному метризованому просторі X з $dimX\leq n$, є α-гомотопні. Виберемо відкрите зірчато вписане подрібнення γ покриття β. Тоді, за (4.1), існує відкрите подрібенння δ покриття γ таке, що для будь-якого сімплексіального політопа K з топологією Уайтхеда, який не має сімплекса розмірності $>n+1$, кожна часткова реалізація K в Y відносно δ продовжується до повної реалізації K в Y відносно γ. Нарешті, нехай через η позначимо локально скінченне відкрите зірчато вписане подрібнення покриття δ.

Через N позначимо геометричний нерв покриття δ з топологією Уайтхеда і візьмемо

$$P = N^n$$

скелетон нерва N розмірності n. В кожному просторі $U \in \eta$ зафіксуємо точку y_U. Задаємо відображення

$$\Phi_0 \colon P^0 \to Y$$

на скелетоні простору P^0 розмірності 0, за формулою $\Phi_0(v_U) = y_U$ для кожного $U \in \eta$. Оскільки η - зірчато вписане подрібнення покриття δ, то Φ_0 є частковою реалізацією простору P в Y відносно δ. За вибором δ, відображення Φ_0 продовжується до повної реалізації

$$\Phi \colon P \to Y$$

відносно γ. Ми доведемо, що P і Φ задовольняють умову (b).$\aleph$

З цією метою, нехай $f\colon X \to Y$ – будь-яке відображення задане на метризованому просторі X з $\dim X \leq n$. Розглянемо індуковане покритя $f^{-1}(\eta) = \{ f^{-1}(U) | U \in \eta \}$ простору X і візьмемо локально скінченне відкрите зірчато вписане подрібнення θ - покриття $f^{-1}(\eta)$ таке, що нерв M подрібнення θ не має сімплексів розмірності $>n$. Через

$$\aleph \colon X \to M$$

позначимо канонічне відображення відкритого покриття θ. З другого боку, оскільки θ подрібнює $f^{-1}(\eta)$, ми можемо задати сімплексіальне відображення

$$\lambda \colon M \to P$$

ототожненням вершин $v_V \in M$ з вершинами $v_U \in P$ так, що $f(V) \in U$.

Нехай $$\psi = \lambda \circ \aleph \colon X \to P$$

Залишається довести, що два відбраження f і $g = \Phi \circ \psi$ є α-гомотопними. За вибором відкритого покриття β, досить показати, що f і g є β-близькими. Для цього, нехай x – довільна точка простору X. Нехай через

$$V_0, V_1,\ldots,V_q$$

позначено відкриті множини в покритті θ, які містять точку x. Вершини з M, які відповідають цим $q+1$ відкритим множинам в θ, окантовують замкнутий сімплекс σ. Звідси випливає, що $\psi(x)=\lambda[\aleph(x)]$ – точка замкнутого сімплекса $\tau=\lambda(\sigma)$ простору P, який окантований вершинами, що відповідають відкритим множинам

$$U_0, U_1,\ldots, U_q$$

вибраним вище з відображення $f(V_i)\subset U_i$ для кожного $i=0,1,\ldots,q$. Деякі з відкритих множин U_i можуть співпадати, і, звідси, розмірність τ може бути $<q$.

Оскільки $f(x)\in U_i$ для кожного $i=0,1,\ldots,q$, і оскільки η є зірчато вписаним подрібненням покриття δ, то всі U_i $(i=0,1,\ldots,q)$ містяться в деякій відкритій множині з δ, а, отже, і γ. Іншими словами, існує відкрита множина $C_x\in\gamma$ така, що

$$\{f(x)\}\cup U_0\cup U_1\cup\ldots\cup U_q\subset C_x\,.$$

З другого боку, оскільки Φ відображається в γ, то існує відкрита множина $C_\tau\in\gamma$ така, що

$$\Phi(\tau)\subset C_\tau$$

Оскільки $\Phi(v_{U_0})\in U_0\subset C_x$, то C_x перетинає C_τ . Оскільки γ є зірчато вписаним подрібненням покриття β, то існує відкрита множина $B_x\in\gamma$ з

$$C_x\cup C_\tau\subset B_x\,.$$

Оскільки $f(x)\in C_x$ і $g(x)\in\Phi(\tau)\subset C_\tau$, то звідси випливає, що B_x містить обидва відображення $f(x)$ і $g(x)$. Це доводить, що g і f є β-близькими, і завершує доведення (a)$\Rightarrow$(b).

(b)⇒(a). Припустимо, що існує точка $y_0 \in Y$ і невід'ємне ціле число $k \leq n$ таке, що Y не є локально зв'язним в розмірності k. За означенням, існує відкритий окіл U точки y_0 в Y такий, що для кожного околу $V \subset U$ точки y_0 існує відображення $f: S^k \to V$, яке є гомотопне постійному відображенню в U.

Оскільки Y є регулярним і задовольняє першу акіому зліченності, то існує послідовність відкритих околів

$$V_0, V_1, \ldots, V_i, \ldots$$

точки y_0 , що задовольняє $\overline{V_1} \subset U$, $\overline{V_i} \subset V_{i-1}$ для кожного $i>1$ і утворює локальний базис в точці y. Для кожного i візьмемо відображення

$$f_i: S_i^k \to V_i$$

k-вимірної сфери S_i^k, яке не є гомотопним постійному відображенню в U.

Побудуємо метричний простір X^* , який складається з точок θ і диз'юнктних об'єднань усіх S_i^k $(i=1,2,\ldots)$ з метрикою d^*, заданою, як в доведенні імплікації (b)⇒(c) теореми (2.1). Задамо відображення $f^*: X^* \to Y$ формулою

$$f^*(x) = \begin{cases} y_0 & x = \theta \\ f_i(x) & x = S_i^k \end{cases}$$

Оскільки простір Y – нормальний, то існує відкрита множина V простору Y, яка задовольняє

$$\overline{V_1} \subset V \subset \overline{V} \subset U .$$

Тоді $\alpha = \{V, Y \setminus \overline{V_1}\}$ – відкрите покриття простору Y. Припустимо, що (b) виконується, і приводимо це до протиріччя. Згідно з (b), існує сімпліціальний політоп P з топологією Уайтхеда, який не має сімплексів розмірності $> n$

разом з відображенням Φ: $P \rightarrow Y$ і відображенням $\psi: X^* \rightarrow P$ такий, що f^* і $g^* = \Phi \circ \psi$ є α-гомотопними. Оскільки

$$f^*(x^*) \subset V_1 ,$$

то гомотопія між f^* і g^* не може відображатися у простір $Y \setminus \overline{V_1}$

Звідси f^* і g^* - гомотопні в V. Зокрема,

$$g^*(x^*) \subset V .$$

Відкриті множини $\beta = \{\Phi^{-1}(U),\ \Phi^{-1}(Y \setminus \overline{V}\ )\}$ покривають P. Підрозділимо B так, що кожна замкнута зірка лежить в одній із двох відкритих множин в β. Нехай v – вершина підрозділеного політопа P така, що відкрита зірка $St(v)$ містить точку $\psi\ (\theta)$. Оскільки $\psi\ (\theta)$ не належить $\Phi^{-1}(Y \setminus \overline{V}\ )$, то звідси випливає, що

$$St(v) \subset \Phi^{-1}(U) .$$

З другого боку, оскільки $St(v)$ є відкритою і ψ є неперервне, то існує ціле число p таке, що

$$\psi(S_i^k) \subset St(v)$$

для кожного $i \geq p$. Оскільки $St(v)$ є стягуваною, то звідси випливає, що $\psi | S_i^k$ гомотопне постійному відображенню в $St(v)$. Отже, відображення

$$g^* | S_i^k = (\Phi \circ \psi) | S_i^k$$

є гомотопне постійному відображенню в U. Але, оскільки f^* і g^* є гомотопними в $V \subset U$, то такими ж є їх звуження (тобто обмеження гомотопій)

$$f_i = f^* | S_i^k \quad \text{і} \quad g^* | S_i^k .$$

Таким чином, звідси випливає, що f_i є гомотопним постійному відображенню в U. Це протирічить вибору відображення f_i і завершує доведення (b)⇒(a).

Оскільки простір X^*, побудований вище, є сепарабельним, то маємо зауваження.

Зауваження 6.2. Якщо обмежити простір X в (b) сепарабельністю, то теорема (6.1) буде справедливою.

Якщо Y є сепарабельним, то відкрите покриття η в доведенні (a)⇒(b) може бути зірчато скінченним. Звідси маємо наступне зауваження.

Зауваження 6.3. Якщо простір Y є сепарабельним, тоді сімпліціальний політоп P в умові (b) теореми (6.1) можна вибрати локально скінченним.

ЛЕКЦІЯ № 10.

§7. Скінченно вимірні ANR.

Теорема 7.1. Якщо Y є метризовним простором і n – скінченне ціле число, $dimY \leq n$, тоді наступні дві умови еквівалентні:

(a) Y є ANR.

(b) Y є LC*.

(c) Y є LC^n.

Доведення. Ми маємо (a)⇒(b) за (7.1), і очевидною є імплікація (b)⇒(c). Залишається довести (c)⇒(a). Для цього, нехай виконується (a)⇒(b) з теореми (6.1), і візьмемо f - тотожне відображення на Y. Звідси випливає, що для кожного відкритого покриття α простору Y, існує α-домінуючий сімпліціальний політоп P. З (6.3) випливає, що Y є ANR.

Якщо Y є нескінченно вимірним, то теорема (7.1) в загальному випадку невірна, навіть якщо Y є компактом. В наступному розділі ми побудуємо компактний метризований простір X, який є LC*, але не ANR. Далі ми побудуємо компактний метризований простір Y, який є LC^{∞} але не LC*.

§8. LC* компакти, але не ANR.

В цьому розділі ми будемо вивчати приклад Борсука компактного метризованого простору, який є локально стягуваний, але не ANR.

Розглянемо гільбертів куб $H=I^{w}$. Точки простору H є функціями x: $w\to I$, заданими на множині w цілих додатних чисел із значеннями з замкнутого одиничного інтервалу I. Нехай

$$H_0 = \{x \in H|\ x(1) =0\}.$$

Тоді H_0 є замкнутим підпростором простору H, гомеоморфним до H. Для кожного додатнього цілого k, розглянемо k-вимірний куб $C_k \subset H$, який складається з точок $x \in H$, що задовольняють

$$\frac{1}{k+1} \le x(1) \le \frac{1}{k}, \quad x(i)=0, \quad i>k$$

і позначимо через B_k границю $(k\text{-}1)$-вимірної сфери в C_k. Позначимо

$$X=H_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k \cup \ldots \ .$$

Очевидно, що X – підпростір гільбертового куба H. Звідси, X є компактним метричним простором, який називають компактом.

<u>Лема 8.1.</u> $H_n(X)\neq 0$ для кожного $n\geq 0$.

<u>Доведення.</u> Нехай H – будь-яка гомологічна теорія, яка задовольняє аксіому Ейленберга-Стінрода з ненульовими коефіцієнтами групи і з означенням категорії, що містить усі компакти і їх відображення. Звідси випливає, що

$$H_{k-1}(B_k) \neq 0$$

для кожного $k > 0$. Далі задамо ретракт

$$r_k : X \to B_k ,$$

позначаючи через точку $x \in X$ точку $y = r_k(x)$, задану наступним чином

$$y(1) = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1} , & x(1) \le \dfrac{1}{k+1} \\ x(1) , & x \in B_k \\ \dfrac{1}{k} , & x(1) \ge \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

$$y(i)=x(i), \quad (2 \le i \le k).$$

Тоді ретракт r_k є неперервним і є ретракцією простору X в B_k. Отже B_k є ретрактом простору X. З (7.2) випливає, що $H_{k-1}(B_k)$ ізоморфне прямій сумі

$$H_{k-1}(X) , \quad \text{для кожного } k > 0,$$

а отже,

$$H_{k-1}(X) \neq 0$$

для кожного $k > 0$. Якщо візьмемо $k= n+1$, то це доводиться у (8.1).

Твердження 8.2. Компакт X не є ANR.

Доведення. Допустимо, що X – є ANR і приведемо це до протиріччя. За (6.2), X має скінченно домінуючий сімплексіальний політоп K. За (7.1), для кожного $n \geq 0$ $H_n(X)$ ізоморфне прямій сумі простору $H_n(K)$. Зокрема, маємо $H_n(X)= 0$. Це протирічить лемі (8.1).

Твердження 8.3. Компакт X є локально стягуваним.

Доведення. Нехай a – довільна точка простору X. Будемо доводити, що простір X – локально стягуваний до точки a.

Спочатку допустимо, що $a \in B_k$, для деякого $k > 0$. Розглянемо замкнутий окіл точки a

$$N_k=\{x \in X \mid x(1) \geq \frac{1}{k+2}\}.$$

Оскільки N_k є скінченно тріангульовним, то він є ANR. За теоремою (7.1), N_k локально стягуваний. Звідси випливає, що X – локально стягуваний до точки a.

Припустимо, що $a \in H_0$. Тоді $a(1)=0$. Нехай U – даний окіл точки a в X. За топологією добутку на кубі H, існує додатнє дійсне число δ і додатнє ціле $n>1$ таке, що U містить кожну точку $x \in X$, і задовольняє дві умови

(1) $$x(1) < \delta$$

(2) $$| x(i) - a(i) | < \delta, \ (i=2,\dots,n-1).$$

Будемо будувати відкритий окіл $V \subset U$ простору X, який є стягуваним. Ми можемо допустити, що $\delta < \frac{1}{n}$.

Випадок I. Припустимо, що $a(n)<1$. Позначимо через V відкриту множину в X, яка містить всі точки $x \in X$, і яка задовольняє умови (1), (2) і $x(n) <1$. Тоді V буде відкритим околом точки a, і міститься в U. Те, що V є стягуваним, випливає як наслідок з трьох гомотопій

$$f_t, g_t, h_t : V \to V, \ \ (0 \leq t \leq 1),$$

які задані при кожному $x \in X$ і кожному $t \in I$ формулами

$$[f_t(x)]\,(i) = \begin{cases} (1-t)x(n), & (i=n) \\ x(i), & (i \neq n) \end{cases}$$

$$[g_t(x)](i)=\begin{cases}(1-t)x(1), & (i=1)\\ 0, & (i=n)\\ x(i), & (i\neq 1, i\neq n)\end{cases}$$

$$[h_t(x)]\ (i)=(1\text{-}t)\ [g_1(x)](i)+ta(i)$$

для кожного $i\in w$. Оскільки f_0 є тотожним відображенням на V, $f_1=g_0$, $g_1=h_0$, і h_1 є постійним відображенням, що переводить V в точку a, то простір V є стягуваним.

Випадок II. Припустимо, що $a(n)=1$. Позначимо через V відкриту множину в X, яка містить всі точки $x\in X$, що задовольняють (1), (2) і $x(n)>0$. Тоді $a\in V\subset U$. Розглянемо три гомотопії

$$f_t, g_t, h_t: V\to V,\quad (0\le t\le 1),$$

задані для кожного $x\in V$ і кожного $t\in I$, за формулами

$$[f_t(x)]\ (i)=\begin{cases}(1-t)x(n), & (i=n)\\ x(i), & (i\neq n)\end{cases}$$

$$[g_t(x)](i)=\begin{cases}(1-t)x(1), & (i=1)\\ 0, & (i=n)\\ x(i), & (i\neq 1, i\neq n)\end{cases}$$

$$[h_t(x)]\ (i)=(1\text{-}t)\ [g_1(x)](i)+ta(i)$$

для кожного $i\in w$. Оскільки f_0 є тотожним відображенням на V, $f_1=g_0$, $g_1=h_0$, і h_1 є постійним відображенням, що переводить V в точку a, то простір V є стягуваним.

§9. $\mathbf{LC}^{\infty}$ компакти, які не є $\mathbf{LC}^{*}$.

В даному розділі наводимо приклад Борсука компактного метризованого простору, який є локально зв'язним в кожній розмірності, але не є локально стягуваним.

Нехай $J=[-1:1]$. Розглянемо куб $H=J^w$. Для кожної точки $x\in H$, дійсне число $x_n = x(n)\in J$ звичайно називають n-ю координатою точки x. Більше того, x може розглядатися як послідовність дійсних чисел

$$x=\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

де $-1\le x_n \le 1$ для кожного n.

Для кожного цілого числа k, позначимо через D_k $(k-1)$-вимірну сферу в H, яка складається з точок $x=\{x_n\}\in H$ таких, що

$$(x_1-c_k)^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = r_k^2$$

$$x_i=0, \quad (i>k),$$

де c_k і r_k є дійсні числа, задані формулами

$$c_k=\frac{2k+1}{2k(k+1)}, \; r_k=\frac{1}{2k(k+1)}.$$

Тоді $D_k \cap D_{k+1} \neq \emptyset$, якщо $|j-k| > 1$.

Вибираючи,

$$Y=\{\theta\} \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \cup \dots,$$

де через θ позначено центр гільбертового куба H, можна легко побачити, що Y є замкнутим підпростором H. Отже, Y є компакт.

Твердження 9.1. Компакт Y не є локально стягуваний до точки θ.

Доведення. Оскільки $(k-1)$-вимірна сфера має тільки дві граничні точки в Y, то вона не є стягуваною в Y. Оскільки кожний окіл точки θ в Y містить D_k для достатньо великих k, то θ не має околу, який був би стягуваний в Y. Це доводить (9.1).

Твердження 9.2. Компакт Y є локально зв’язний в кожній розмірності.

Доведення. Нехай n – невід’ємне ціле число і b – довільна точка в Y. Будемо доводити, що Y є локально стягуваний в розмірності n до точки b.

Спочатку нехай $b \in D_k$, для кожного $k > 0$. Розглянемо замкнутий окіл точки b

$$N_k = \{y \in Y \mid y(1)\} \geq \frac{1}{k+2}$$

Оскільки N_k є скінченно тріангульовний, то він є локально зв’язний в розмірності n. Звідси випливає, що Y є локально стягуваний в розмірності n до точки b.

Далі припустимо, що $b=\theta$ і U – довільний окіл точки θ. Тоді існує достатньо велике ціле число k таке, що U містить D_i , для кожного $i \geq k$. Ми можемо припустити, що $k > n$. Тоді

$$V = \{\theta\} \cup D_k \cup D_{k+1} \cup \ldots$$

є замкнутим околом точик θ в Y, що міститься в U. Оскільки $k > n$, то ми можемо довести звичайним методом гомотопічної теорії, що кожне відображення $f\colon S^n \to V$ є гомотопне постійному відображенню в V, а, отже, і в U. Отже, Y є локально стягуваним в розмірності n до точки θ.

§10. Простори, які є одночасно C^n і LC^n

Теорема 10.1. Якщо Y є LC^n метризованим простором, де n – скінченне ціле число, то наступні три умови еквівалентні

(a) Y є C^n.

(b) Якщо $f\colon A \to Y$ – будь-яке відображення, задане на замкнутому підпросторі A метричного простору X з $dim(X \setminus A) \leq n+1$, тоді f може бути продовжене на увесь X.

(c) Кожне відображення $f\colon X \to Y$ задане на метризованому просторі X з $dimX \le n$, гомотопне постійному відображенню.

Доведення. (a)$\Rightarrow$(b). Згідно з доведенням (a)$\Rightarrow$(b) в теоремі (2.1), замінимо $X\backslash A$ геометричним нервом N канонічного покриття γ простору $X\backslash A$ так, що N не має скінченних сімплексів розмірності $>n+1$, і одержимо простір

$$X^* = A \cup N$$

та відображення $\mu\colon X \to X^*$. У цьому ж доведенні ми будували продовження

$$g^* : W^* \to Y$$

даного відображення $f: A \to Y$ над околом W^* простору A в X^*.

Нехай через θ позначимо об’єднання всіх замкнутих сімплексів політопа N, які містяться в W^*. Тоді θ є підполітопом нерва N і $A \cup \theta$ є околом A в X^*. Оскільки Y є C^n і N не має сімплексів розмірності $>n+1$, то з методу звичайного покрокового продовження в теорії гомотопій випливає, що часткове відображення $g^*|Q$ має продовження $h^*\colon N \to Y$. Задаємо відображення $F^* : X^* \to Y$ формулою

$$F^*(x^*) = \begin{cases} g^*(x^*), & x \in A \cup Q \\ h^*(x^*), & x \in N \end{cases}.$$

Неперервність F^* випливає з того факту, що N є відкритим в X, і A міститься в $A \cup Q$.

Тоді утворене відображення

$$F = F^* \circ \mu : X \to Y$$

є продовженням відображення $f: A \to Y$ над X. Це доводить (a)$\Rightarrow$(b).

(b)⇒(c). Нехай $f : X \to Y$ – будь-яке відображення задане на метризованому просторі X з розмірністю $dimX \leq n$. Розглянемо замкнутий підпростір

$$A^* = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$$

топологічного добутку $X^* = X \times I$ і задамо відображення $g : A^* \to Y$ формулою

$$g(x,t) = \begin{cases} f(x), & t = 0 \\ y_0, & t = 1 \end{cases}$$

для кожного $x \in X$, де y_0 – довільно вибрана точка в Y. Оскільки $dim\ (X^* \backslash A^*) \leq n+1$, то з (b) випливає, що відображення g має продовження $G\colon X^* \to Y$. Задамо гомотопію $h_t : X \to Y \quad (0 \leq t \leq 1)$ формулою

$$H_t(x)=G(x,t)$$

для кожного $t \in I$ і кожного $x \in X$. Тоді маємо $h_0 = f$ і $h_1(X) = y$. Це доводить (b)⇒(c).

Імплікація (c)⇒(a) очевидна.

Зауваження 10.2. У випадку $n = \infty$ теорема (10.1) виконується, якщо ми обмежимо $X \backslash A$ в умові (b) і X в умові (c) скінченно- вимірністю.

Зауваження 10.3. Якщо ми обмежимо простір X в умові (b) і (c) сепарабельністю, то теорема залишиться справедливою.

§11. Скінченно-вимірні AR.

Теорема 11.1. Якщо Y є метризованим простором і n – скінченне ціле число з $dim\ Y \leq n$, то наступні три умови еквівалентні:

(a) Y є AR.

(b) Y є C^* і LC^*.

(c) Y є C^n і LC^n.

<u>Доведення.</u> Ми маємо (a) $\Rightarrow$ (b) з (7.1), а імплікація (b) $\Rightarrow$ (c) – очевидна. Залишається довести (c) $\Rightarrow$ (a). За (7.1), Y є ANR. Використовуючи (10.1c) для ототожнення відображення на Y, ми робимо висновок, що Y є стягуваним. Отже, за (7.2), Y є AR.

Якщо простір Y є скінченно-вимірним, то теорема (11.1) не виконується в загальному, навіть, якщо Y є компактом. Наприклад, конус $\hat{X}$ над компактом X в §8 є C^* і LC^* компактом, який не є AR, і конус $\hat{Y}$ над компактом Y, в §9 є C^* і LC^∞ компактом, який не є LC^*.

ЛЕКЦІЯ №11. **Змішані AR і ANR**

У цьому розділі розглядаються три різні теми, а саме про склеєні простори, простори відображень і про компактні AR і ANR у евклідових просторах.

§1. Склеєні простори з AR.

Протягом усього цього розділу через

$$g : A \to Y$$

позначаємо дане відображення, задане на замкнутому підпросторі A метризованого простору X в метризований простір Y. Ми будемо стикатися з склеєним простором Z, одержаним з X та Y в розумінні даного відображення g, як задано в (I,§2).

Нехай через $p: W \to Z$ позначимо природну проекцію топологічної суми

$$W = X + Y$$

на свій фактор-простір Z. Тоді $p|Y$ є вкладенням. Через те, що це вкладення, то Y буде розглядатися як замкнутий підпростір простору Z.

Лема 1.1. Якщо A є компактом, то Z є метризованим.

Доведення. Розглянемо природну проекцію $p : W \to Z$. Оскільки A є компактом, то повний прообраз $p^{-1}(z)$ є компактом для кожної точки z в A. Звідси за теоремою Стоуна, залишається показати, що р є замкнутим відображенням.

Для цього, нехай F є будь-якою замкнутою множиною простору W. Ми доведемо, що $p(F)$ і є замкнутою множиною простору Z. Оскільки A є компактом, то існує множина

$$K=A \cup f(A) \subset W.$$

Нехай $H=F \cap K$. Тоді $p(H)$ є компактною множиною простору Z, і отже, замкнутою в Z. Згідно з неперервністю p, множина $p^{-1}[\ p(h)\ ]$ є замкнутою в W. Більше того, як об'єднання двох замкнутих множин простору W, множина

$$p^{-1}[p(F)] = F \cup p^{-1}[p(H)]$$

є замкнутою в просторі W. Звідси, за означенням фактор-топології, $p(F)$ є замкнутою множиною в Z.

Якщо A не є компактом, тоді Z не обов'язково метризований, як показано, беручи X – дійсною прямою, A – множиною цілих чисел і Y – просто точкою. В цьому прикладі склеєний простір Z не може мати злічену локальну базу точки $p(Y)$.

Теорема 1.2. Якщо A, X і Y є ANR і якщо склеєний простір Z по відображенню $g: A \to Y$ є метризований, то Z є ANR.

Доведення. Нехай α - довільне відкрите покриття простору Z і розглянемо індуковане покриття

$$\beta = p^{-1}(\alpha) = \{\ p^{-1}(U) |\ U \in \alpha\ \}$$

топологічної суми $W=X+Y$. Використовуючи (IV, 3.4), ми можемо задати β-деформацію

$$k_t\colon W \to W, \quad 0 \le t \le 1,$$

яка задовольняє умови:

(Д1) $k_t(w)=w$ для кожного $w \in A \cup Y$ і кожного $t \in I$.

(Д2) $k_t(w) \in X$ для кожного $w \in X$ і кожного $t \in I$.

(Д3) існує відкрита множина V в W така, що $A \subset V \subset X$ і $k_1(V)=A$

Задаємо гомотопію $h_t\colon z \to z, 0 \le t \le 1,$ формулою

$$h_t(w)= p\{ k_t [p^{-1}(z)] \}$$

для кожного $t \in I$ і для кожного $z \in Z$. Оскільки виконується (Д1), то h_t задане однозначно. Неперервність h_t в t і z випливає із звичайної теореми про топологічну ідентифікацію. Отже, h_t є α-деформацією в сенсі (IV, §5). Тепер нехай Z – буде вкладений як замкнутий підпростір опуклої множини S в банаховому просторі. За (IV, 5.3) залишається довести, що відображення $h_1\colon Z \to Z$ може бути продовжене на деякий окіл простору Z в S.

Розглянемо дві диз'юнктні замкнуті множини

$$F=p(X \backslash V), \quad Y=p(Y)$$

в Z, а, отже, і в S. Візьмемо дві диз'юнктні відкриті множини G і M в S такі, що

$$F \subset G, \qquad Y \subset M.$$

Тоді $B=S \backslash (G \cup M)$ є замкнутою підмножиною в S. Нехай

$$C=B \cap Z, \; H=G \cap Z, \; N=M \cap Z$$

тоді звідси безпосередньо випливає, що

$C \subset p(V\backslash A)$, $H \subset (X\backslash A)$, $N \subset (V \cup Y)$.

Звідси випливають наступні три співвідношення:

(E1) $p^{-1}|C$ задане однозначно і $k_1 [\, p^{-1}(C)\,] \subset A$.

(E2) $p^{-1}|H$ задане однозначно і $k_1 [\, p^{-1}(H)\,] \subset X$.

(E3) $h_1(N) = p\{\, k_1[\, p^{-1}(N)\,]\, \} \subset p(A \cup Y) = p(Y) = Y$.

Оскільки виконується (E1), ми можемо задати відображення $\Phi\colon C \to A$, беручи $\Phi(z) = k_1[\, p^{-1}(z)\,]$ для кожного $z \in C$. Оскільки A є ANR і оскільки C є замкнутим в B, то Φ має продовження $\psi\colon K_0 \to A$ до відкритого околу K_0 простору C в B.

Далі розглянемо замкнутий підпростір $K_0 \cup H$ простору K_0. Оскільки виконується (E1) і (E2), то $k_1 \circ p^{-1}$ задані однозначно на замкнутій множині

C ∪ H=Z\N і приймає значення в X. Оскільки перетин простору $C \cup H$ і простору K_0 є C, то ми можемо задати відображення $\xi\colon K_0 \cup H \to X$ за формулою

$$\xi(s) = \begin{cases} \psi(s), & s \in K_0 \\ k_1[\, p^{-1}(s)], & s \in C \cup H \end{cases}$$

Неперервність відображення ξ випливає з того факту, що і K_0, і $C \cup H$ є замкнутими в $K_0 \cup H$. Оскільки X є ANR, то ξ має продовження $\eta\colon K_1 \to X$ до відкритого околу K_1 простору $K_0 \cup H$ в $K_0 \cup G$.

Тепер розглянемо замкнутий підпростір $K_0 \cup N$ в $K_0 \cup M$. Використовуючи (E3), ми можемо задати відображення $\rho\colon K_0 \cup N \to Y$ за формулою

$$\rho(s) = \begin{cases} p[\psi(s)], & s \in K_0 \\ h_1(s), & s \in C \cup N \end{cases}.$$

Щоб підтвердити це означення, нехай z – будь-яка точка в перетині C простору K_0 i $C \cup N$. Тоді ми маємо

$$p[\psi(z)] = p[\Phi(z)] = p\{k_1[p^{-1}(z)]\} = h_1(z)$$

Звідси, ρ можна задати однозначно. Неперервність відображення ρ випливає з того факту, що K_0 і $C \cup N$ є замкнутими в $K_0 \cup N$. Оскільки Y є ANR, то ρ має продовження θ: $K_2 \to Y$ до відкритого околу K_2 простору $K_0 \cup N$ і $K_0 \cup M$.

Нарешті, нехай $k= K_1 \cup K_2$ і задаємо відображення g: $K \to Z$ за формулою

$$\mathrm{g(s)}=\begin{cases} p[\eta(s)], & s \in K_1 \\ p[\theta(s)] = \theta(s), & s \in K_2 \end{cases}.$$

Щоб перевірити коректність задання, вважаємо,шо s –будь-яка точка в перетині K_0 просторів K_1 і K_2. Тоді ми маємо

$$p[\eta(s)] = p[\psi(s)] = \rho(s) = \theta(s).$$

Звідси, g можна задати однозначно. Оскільки

$$K_1=K \backslash M, \quad K_2=K \backslash G$$

то K_1 і K_2 є замкнутими в K. Звідси випливає неперервність g.

Тепер доведемо, що K є відкритою множиною в S. Для цього спочатку зауважимо, що

$$S \backslash K = [(B \cup G) \backslash K_1] \cup [(B \cup M) \backslash K_2].$$

Оскільки $B \cup G = S \backslash M$ і $B \cup M= S \backslash G$ є замкнутими в S, і оскільки K_1 і K_2 є відкритими в $B \cup G$ і $B \cup M$ відповідно, то $S \backslash K$ є замкнутою в S, а, отже, K є відкритим околом Z в S.

За означенням ξ і ρ добре видно, що

$$g \mid Z = h_1$$

і, отже, відображення h_1 може бути продовжено до околу *К* простору Z в S.

Теорема 1.3. Якщо A, X і Y є AR, і якщо склеєний простір Z відображення $g\colon A \to Y$ є метризованим, то Z є AR.

Доведення. За (1.2), Z є ANR. За теоремою 7.2 досить довести, що Z є стягуваний.

Для цього достатньо довести, що Y є сильний деформаційний ретракт простору Z. За теоремою 7.10 A є сильний деформаційний ретракт простору X. Звідси випливає, що існує гомотопія

$$h_t : W \to W, \quad 0 \le t \le 1$$

топологічної суми $W = X+Y$, яка задовольняє наступні умови

(H1) h_0 є гомотопним відображенням на простір W.

(H2) h_t є ретракція W на $A \cup Y$.

(H3) $h_t(w)=w$ для кожного $w \in A \cup Y$ і кожного $t \in I$.

Задаємо гомотопію $k_t\colon Z \to Z$, $0 \le t \le 1$ за формулою

$$k_t(z)= p\{ h_t [h^{-1}(z)]\}$$

для кожного $t \in I$ і кожного $z \in Z$. Те, що k задане однозначно, випливає з (H3). Неперервність $k_t(z)$ по t і z випливає з неперервності $h_t(z)$ в розумінні ідентифікаційної топології.

Згідно з (H1)-(H3), добре видно, що k_0 є тотожним відображенням на Z, а також , що k_1 є ретракцією простору Z на Y, і що $k_t(z)= z$ для кожного $z \in Z$, і кожного $t \in I$. Це доводить, що Y є сильний деформаційний ретракт простору Z.

Оскільки простір Y є AR , то він є стягуваний за теоремою 7.1. Звідси випливає, що Z є стягуваним, а, отже, і AR.

Як безпосередній наслідок з (1.2) і (1.3) ми маємо наступний висновок. який стосується відносних гомеоморфізмів.

Під відносним гомеоморфізмом ми розуміємо відображення

$$h: (X,A) \to (Y,B)$$

з X в Y, яке переводить A в B і $X \backslash A$ гомеоморфно переводить на $Y \backslash B$.

Теорема 1.4. Якщо $h: (X,A) \to (Y,B)$ є відносним гомеоморфізмом, де X, A, B є компактними AR (відповідно ANR) і Y є хаусдорфовим простором, то Y також є AR (відповідно ANR).

Доведення. Нехай через $g: A \to B$ позначено відображення, задане формулою $g(x)=h(x)$ для кожного $x \in A$. Розглянемо склеєний простір Z, одержаний склеюванням X з B в розумінні відображення g. Продовжимо h до відображення $f: W \to Y$ до топологічної суми $W=X+B$ за формулою

$$f(w)=\begin{cases} f(w), & w \in X \\ w, & w \in B \end{cases}.$$

Тоді задамо функцію $k: Z \to Y$ за формулою

$$k(z) = f[p^{-1}(z)]$$

для кожного $z \in Z$, де через $h: W \to Z$ позначено природну проекцію. Легко перевірити, що k є взаємно-однозначним відображенням простору Z в Y. Оскільки Z є компактним і Y є хаусдорфовим простором, то k є гомеоморфізмом. Оскільки Z є компактним AR, то таким же є і Y.

§2. Простори відображень.

Нехай X і Y – довільно вибрані простори, і позначимо через

$$\Omega = Map(X, Y)$$

сукупність відображень з X в Y. Існують різні шляхи топологізації на Ω, серед яких найчастіше використовують компактно-відкриту топологію.

Для будь-яких двох множин $K\subset X$ і $W\subset Y$, нехай через $M(K, W)$ позначимо підмножину множини Ω, задану за формулою

$$M(K, W) = \{f\in\Omega \mid f(K)\subset W\}.$$

Цю множину $M(K, W)$ будемо називати передбазисною множиною множини Ω у тому випадку, коли множина K є гомотопною, а W є відкритою. Компактно-відкрита топологія множини Ω задана за вибором в якості передбазиса для відритих множин множини Ω, сімейства всіх можливих передбазисних множин $M(K, W)$ множини Ω. Позначимо через Ω простір, одержаний топологізацією Ω за допомогою компактно-відкритої топології.

Надалі в цьому розділі припускатимемо, що простір Y є метризований. Нехай d - довільна обмежена функція відстані, яка породжена топологією на простір Y. Існує природна топологія множини Ω індукована функцією відстані d. Задаємо

$$d^*(f,g) = sup_{x\in X}\, d\,[f(x), g(x)]$$

для кожної пари відображень $g, f \in\Omega$. Легко перевірити, що d^* задовольняє умови функції відстані, а, отже, задає топологію в Ω. Цю топологію будемо називати d^*- топологією , або топологією по відношенню до d. Будемо позначати через Ω_d простір, одержаний топологізацією множини Ω d^*-гомотопією.

d^*-гомотопія є очевидно найлегшою для операцій, ніж компактно-відкрита топологія, проте принциповим наслідком є те, що вона звичайно не залежить від топології на самих просторах X і Y, але залежить від функцій відстані на Y.

Існує природня функція

$$W: \Omega \times X \to Y$$

задана за формулою $w(f, x)=f(x)$ для кожного $f \in \Omega$ і для кожного $x \in X$. Цю функцію w називають оцінкою простір-відображень Ω.

Кажуть, що топологія τ в Ω є допустимою, якщо оцінка w стає відображенням, коли Ω топологізоване цією топологією τ. Якщо X є регулярним і локально компактним, то компактно-відкрита топологія в Ω є найменш допустимою топологією в Ω.

Лема 2.1. d^*- топологія в Ω, породжена будь-якою заданою обмеженою функцією відстані d на Y, є допустимою.

Доведення. Ми будемо доводити, що оцінка

$$w: \Omega_d \times X \to Y$$

є неперервною. Нехай $f_0 \in \Omega_d$, $x_0 \in X$ і дано довільне дійсне число $\delta > 0$. Нехай $y_0 = f_0(x_0)$. Оскільки f_0 є неперервним, то існує окіл точки x_0 в X такий, що

$$d[y_0, f_0(x)] < \frac{1}{2}\delta$$

для кожного $x \in V$. Нехай через U позначено окіл точки f_0 в Ω_d заданий формулою

$$U = \{ f \in \Omega_d \mid d^*(f_0, f) < \frac{1}{2}\delta \}.$$

Тоді ми маємо

$$d [w(f_0, x_0), w(f, x)] = d [f_0(x_0), f(x)] \leq d [f_0(x_0), f_0(x)] +$$

$+ d [f_0(x), f(x)] \le d [y_0, f_0(x)] + d^* (f_0, f) < \delta$

для кожного $f \in U$ і для кожного $x \in V$. Це доводить неперервність w.

Лема 2.2. Якщо X – компактно регулярний простір, то компактно-відкрита топологія простору Ω збігається з d^*-топологією, породженою будь-якою заданою обмеженою функцією відстані d на Y.

Доведення. Оскільки d^*-топологія простору Ω є допустимою за (2.1), то кожна відкрита множина простору Ω_k є відкритою в Ω_d. Залишається довести, що кожна відкрита множина простору Ω_d є відкритою в Ω_k. Для цього досить довести, що для будь-якого $f \in \Omega$ і будь-якого $\delta > 0$, можна знайти відкриту множину V простору Ω_k таку, що

$$f \in V \subset U = \{g \in \Omega \mid d^*(f, g) < \delta\}$$

Для кожного $x \in X$ через W_x позначимо відкриту множину простору Y задану за формулою

$$W_x = \{ y \in Y \mid d [f(x), y] < \frac{\delta}{3} \}.$$

Оскільки f є неперервним і $f(x) \in W_x$, то існує відкритий окіл G_x точки x в X такий, що

$$f (K_x) \subset W_x ,$$

де через K_x позначено замикання G_x в X. Оскільки X є компактним, то існує скінченне число точок в X - $x1, x_2,\dots,x_n$ таких, що X покривається відкритими множинами

$$G_{x_1}, \dots, G_{x_n}$$

Для station підіндексації в поняттях різних множин замінимо x_i через і для кожного $i=1,\dots, n$.

Як замкнуті підмножини компактного простору X, множини $K_1,\ldots, K_n$ є компактними. Звідси

$$V = M(K_1, W_1) \cap \ldots \cap M(K_n, W_n)$$

є відкритою множиною простору Ω_κ , і $f \in V$. Залишається довести, що $V \subset U$. Нехай $g \in V$ і $x \in X$. Тоді існує ціле число i , $1 \le i \le n$, таке, що $x \in G_i \subset K_i$. Звідси випливає, що $f(x) \in W_i$, $g(x) \in W_i$. Тому

$$d\,[f(x_i), f(x)] < \frac{\delta}{3}\ , \quad d\,[f(x_i), g(x)] < \frac{\delta}{3}$$

Звідси маємо

$$d\,[f(x), g(x)] \le d\,[f(x_i), f(x)] + d\,[f(x_i), g(x)] < \frac{2\delta}{3}$$

Оскільки x – довільна точка, то це доводить, що

$$d^*(f, g) \le \frac{2\delta}{3} < \delta$$

а, отже, $g \in U$. Таким чином ми довели, що $V \subset U$.

Зауваження 2.3. Оскільки обмеженість d використовується тільки в заданні d^* і не є необхідним, у випадку, коли X – компактний, то ми можемо пропустити слово «обмежений» в твердженні (2.2).

Компактність простору X є істотньою для співпадання двох топологій простору Ω. Насправді, якщо X є тихоновським простором і Y є метризованим простором, який містить невироджені дуги, то компактність простору X є необхідною і достатньою умовою для компактно-відкритої топології простору Ω для збігу з d^*-топологією, породженою данною обмеженою функцією відстані d на Y. З другого боку, наступний приклад вказує на те, що компактність простору X є істотною навіть якщо простір Y є таким простором, що містить тільки дві точки.

Нехай Y складається з двох точок $0, 1$, і X – множина всіх додатних цілих чисел. Обидва простори X і Y є метричними і сепарабельними з евклідовою функцією відстані d на дійсній прямій. Оскільки X є локально компактною, то простір Ω_k – сепарабельний. З іншого боку, ми покажемо, що простір Ω_d не є сепарабельним. Множина Ω складається з нескінченних послідовностей з значеннями 0 або 1, а отже, вона має потужність континуума на дійсній прямі. Очевидно, що кожні дві різні точки простору Ω_d знаходяться на відстані 1, виміряній метрикою d^*. Звідси випливає, що простір Ω_d є дискретний. Отже, Ω_d не є сепарабельним. Таким чином, компактно-відкрита топологія і d^*-топологія простору Ω не співпадають.

Теорема 2.4. Нехай X – компактний метризований простір, і Y - метризований простір. Тоді функціональний простір

$$\Omega = Map\ (X, Y)$$

з d^*-топологією, породжений функцією відстані d на Y є ANR тоді і тільки тоді, якщо таким є простір Y.

Доведення. Необхідність. Для кожної точки $y \in Y$ через $j(y)$ позначимо постійне відображення в Ω, яке переводить простір X у єдину точку y. Позначення $y \to j(y)$ задає ізометричне вкладення

$$j : Y \to \Omega$$

по відношеню до метрик d і d^*. Це вкладення j називають природною ін'єкцією простору Y в Ω. Воно переводить Y гомеоморфно на замкнутий простір $j(Y)$ простору Ω.

Для будь-якої даної точки $a \in X$ позначимо через

$$p_a : \Omega \to Y$$

функцію, задану за формулою $p_a(f)=f(a)$ для кожного $f\in\Omega$. Очевидно, що p_a є відображенням і переводить підпростір $j(Y)$ простору Ω на Y. Таке відображення p_a називається проекцією .

Враховуючи дане вище означення, ми зауважимо, що $p_a\circ j$ є тотожним відображенням на Y і $j\circ p_a$ є ретракцією Ω на $j(Y)$. Таким чином, ми довели, що Y є гомеоморфним з ретрактом простору Ω . Якщо Ω є ANR, то звідси випливає, що таким є і Y, згідно з теоремою 7.7. Це завершує доведення необхідності.

<u>Достатність.</u> Припустимо, що Y є ANR. За теоремою 3.1 досить довести, що Ω є ANE для класу всіх метризованих просторів.

Для цього, нехай $\psi\colon A \to \Omega$ - довільне відображення , задане на замкнутому підпросторі A метризованого простору S. Задамо функцію $\Phi\colon X\times A\to Y$ за формулою

$$\Phi(x, a) = [\psi(a)](x)$$

для кожного $x\in X$ і кожного $a\in A$. Оскільки d^*-топологія простору Ω є допустима за (2.1), то Φ є відображенням. Оскільки Y є ANR і $X\times A$ є замкнутим підпростором метризованого простору $X\times S$, то з (III 3.2) випливає, що Φ має продовження $\Phi^*\colon U\to Y$ до околу U простору $X\times A$ в $X\times S$.

Враховуючи компактність простору X, можемо знайти окіл V простору A в S такий, що $X\times V\subset U$. Задамо відображення $\psi^*\colon V\to \Omega$ за формулою

$$[\psi^*(v)](x) = \Phi^*(x, v)$$

для кожного $v\in V$ і кожного $x\in X$. Оскільки $\Phi^* \mid X\times A = \Phi$, то ми маємо $\psi^* \mid A = \psi$. Це завершує доведення достатності.

Компактність простору X використовується тільки для одержання околу V простору A в S, що не є необхідним для випадку, коли Y є AR, і, отже, $U=X+S$. Тому маємо наступне.

Теорема 2.5. Нехай X і Y – метризовані простори. Тоді функціональний простір

$$\Omega = Map\ (X, Y)$$

з d^*-топологією, яка породжена обмеженою функцією відстані d на Y, є AR тоді і тільки тоді, якщо таким є Y.

§3. Відносні функціональні простори.

Нехай X і Y – довільні дані простори і $A \subset X$, $B \subset Y$ – підпростори. Розглянемо множину

$$\Lambda = Map\ (X, Y; A, B)$$

як підмножину простору $\Omega = Map\ (X, Y)$, задану за формулою

$$\Lambda = \{f \in \Omega \mid f(A) \subset B\}$$

Коли ж Ω є топологізований, ми будемо розглядати Λ як підмножину простору Ω. Таким чином, ми маємо компактно відкриту топологію і d^*-топологію в Λ.

Теорема 3.1. Нехай X – компактний метризований простір, Y є ANR, і $A \subset X$, $B \subset Y$ – замкнуті підпростори. Тоді функціональний простір

$$\Lambda = Map\ (X, Y; A, B)$$

з d^*-топологією, який породжений функцією відстані d на Y, належить класу ANR тоді і тільки тоді, якщо таким є B.

Доведення. Необхідність. Як і в доведенні теореми (2.4),ми маємо природну ін’єкцію

$$j : B \to Л$$

яка переводить *B* ізометрично на замкнутий підпростір *j(B)* простору *Л* по відношенню до метрик *d* і d^*. З другого боку, для кожного $a \in A$, маємо проекцію

$$p_a : Л \to B$$

Очевидно, що $j \circ p_a$ є ретракцією простору *Л* на *j(B)*. Тому *B* є гомеоморфним ретракту простору *Л*. Звідси випливає необхідність .

<u>Достатність.</u> Припустимо, що *B* є ANR. За(III, 3.1) достатньо довести, що *Л* є ANE для класу всіх метризованих посторів.

Для цього, нехай $\psi\colon F \to Л$ – довільне відображення, задане на замкнутому підпросторі *F* метризованого простору *S*. Задамо відображення $\xi\colon A \times F \to B$ за формулою

$$\xi(a, s) = [\,\psi(s)\,]\,(a)$$

для кожного $a \in A$ і $s \in F$. Оскільки *B* є ANR, то ξ має продовження $\xi^*\colon W \to B$ до околу простору $A \times F$ в $A \times S$.

Оскільки *A* є компактним і *S* є нормальним, то існує замкнутий окіл *N* простору *F* в *S* такий, що $A \times N \subset W$. Розглянемо замкнутий підпростір

$$H = (X \times F) \cup (A \times N)$$

топологічного добутку $X \times S$ і задамо відображення $\eta\colon H \to Y$ за формулою

$$\eta(x, s) = \begin{cases} [\psi(s)](x), & x \in X,\ s \in F \\ \xi^*(x, s), & x \in A,\ s \in A \end{cases}.$$

Оскільки *Y* є ANR, то η має продовження $\eta^*\colon U \to Y$ на окіл *U* простору *H* в $X \times S$.

Оскільки X – компактний, то існує окіл V простору F в S такий, що $X \times V \subset U$. Задаємо відображення $\psi^*: V \to \Lambda$ формулою

$$[\psi^*(v)](x) = \eta^*(x, v)$$

для кожного $v \in V$ і кожного $x \in X$. Тоді $\psi^* \mid F = \psi$.

Оскільки компактність простору X використовується тільки для одержання околів N і V, що не є необхідним у випадку, коли Y і B є AR, то маємо наступну теорему.

<u>Теорема 3.2.</u> Нехай X – метризований простір, Y є AR, і $A \subset X$, $B \subset Y$ – замкнуті підпростори. Тоді функціональний простір

$$\Lambda = Map\ (X, Y; A, B)$$

з d^*-топологією породжений функцією відстані d на Y є AR, якщо таким є B.

<u>Теорема 3.3.</u> Для будь-якого компактного метризованого простору X і будь-якого замкнутого підпростору A простору X n-вимірна група $\pi^n(X, A)$ є скінченною або зліченною.

<u>Доведення.</u> За заданням, $\pi^n(X, A)$ можна розглядати як множину всіх компонент шляхів простору

$$\Lambda = Map\ (X, S^n; A, \{s_0\})$$

з компактно-відкритою топологією, де s_0 – дана базисна точка в одиничній n-вимірній сфері S^n. За (2.2) і (3.1), Λ є ANR і, отже, локально дугоподібно зв'язним. Це доводить, що кожна компонента шляхів простору Λ є відкритим в Λ. Оскільки X є локально-компактним і X, S^n є сепарабельними, то Λ є теж сепарабельним. Звідси випливає, що $\pi^n(X, A)$ є скінченною або зліченною.

Наслідок 3.4. Для будь-якого компактного метризованого простору X, n-вимірна когомотопна група $\pi^n(X, A)$ є скінченною або зліченною множиною.

З другого боку, якщо візьмемо X=S ^{n}, $A=\{s_0\}$ і $B=\{y_0\}$, де через y_0 позначимо дану базисну точку простору Y, ми одержимо наступну теорему про гомотопні групи.

Теорема 3.5. Якщо Y є сепарабельним ANR, то n-вимірна гомотопна група $\pi^n(Y, y_0)$ з довільною базисною точкою $y_0 \in Y$ є скінченною чи зліченною.

Нарешті, роблячи очевидне узагальнення (3.1), можна дедуктивно довести наступну теорему.

Теорема 3.6. Якщо Y є сепарабельним ANR і якщо B є замкнутим ANR простору Y, то n-вимірна відносна гомотопна група $\pi^n(Y, B, y_0)$ з довільною базисною точкою $y_0 \in B$ є скінченною або зліченною.

ЛЕКЦІЯ № 12.

§4. Компактні AR в евклідовому просторі.

В цьому місці і надалі ми будемо мати справу з AR і ANR в n-вимірному евклідовому просторі R^n з метрикою d, яка встановлює евклідову функцію відстані на R^n.

Лема 4.1. Якщо K є компактним підпростором R^n і f: $X \to R^n$ – відображення таке, що $f(x)= x$ для граничної точки x простору K в R^n, то маємо $K \subset f(K)$.

Доведення. Як компактні множини в R^n, K і $f(K)$ є замкнутими і обмеженими. Виберемо досить велике дійсне число $r > 0$ таке, що

$$d(\theta, x) < r, \quad d[\theta, f(x)] < r$$

для кожного $x \in K$, де через θ позначено початок простору R^n. Розглянемо n-вимірну кулю

$$E^n = \{x \in R^n \mid d(\theta, x) \leq r\}$$

і її обмежуючу $(n\text{-}1)$-вимірну сферу

$$S^{n-1} = \{ x \in R^n \mid d(\theta, x) = r \}.$$

Оскільки $f(k) \subset E^n$ і $f(x) = x$ для кожної граничної точки x простору K в R^n, то ми можемо задати відображення $g\colon E^n \to E^n$ за формулою

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K \\ x, & x \in E^n \setminus K \end{cases}.$$

Для доведення $K \subset f(K)$, припустимо, що існує точка p в K, яка не міститься в $f(K)$. Ми приведемо до протиріччя.

За вибором дійсного числа r, точка p є внутрішньою точкою простору E^n. Згідно з (I,§1), існує ретракція

$$H\colon E^n \setminus \{p\} \supset S^{n-1}$$

За означенням відображення g, видно, що p не міститься в $g(E^n)$. Звідси, ми можемо задати відображення $r : E^n \to S^{n-1}$ за формулою

$$r(x) = h[g(x)]$$

для кожної точки $x \in E^n$. Звідси випливає,що r є, очевидно, ретракцією простору E^n на S^{n-1}. Це протирічить (I, 7.3), бо не існує ретракції кулі на свою границю.

<u>ТЕОРЕМА 4.2.</u> Якщо X є компактним AR в евклідовому просторі R^n розмірності n, тоді $R^n \setminus X$ не має обмеженої компоненти.

<u>Доведення.</u> Припустимо, що $R^n \setminus X$ має обмежену компоненту C. Приведемо до протиріччя наступним чином. Оскільки $R^n \setminus X$ є локально-

зв'язний в R^n, то кожна компонента простору $R^n \backslash X$ є відкритою в R^n. Звідси, границя простору ∂C простору C міститься в X.

Оскільки простір X є AR і замкнутий в R^n, то існує ретракція

$$r : R^n \to X.$$

Задамо відображення $f: \overline{C} \to R^n$ на замикання $\overline{C}$ простору C за формулою $f(x) = r(x)$ для кожного $x \in \overline{C}$. Оскільки $\partial C \subset X$, то $f(x) = x$ для кожної граничної точки простору $\overline{C}$ в R^n. Оскільки C є замкнутий і обмежений, то він є компактний. За (4.1) потрібно, щоб

$$\overline{C} \subset \mathrm{f}(\overline{C}) = \mathrm{r}(\overline{C}) \subset \mathrm{r}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}}) = \mathrm{X}$$

Це протирічить припущенню, що C є компонентою простору $R^n \backslash X$.

Оскільки доповнення компактної множини в R^n при $n \geq 2$ має тільки одну необмежену граничну компоненту, то маємо наступне.

Наслідок 4.3. Якщо X є компактним AR в евклідовому просторі R^n розмірності n з $n \geq 2$, то $R^n \backslash X$ є зв'язним.

Допоміжна умова є істотньою. Щодо компактності, кожна гіперплощина в R^n буде AR, але розрізує R^n. З другого боку, кожна точка дійсної прямої R розрізує R^n.

§5. Компактні ANR в евклідовому просторі.

Протягом цього розділу позначатимемо через X заданий компактний ANR в евклідовому просторі R^n розмірності n з метрикою d, яка встановлює евклідову функцію відстані на R^n. Оскільки X є компактним ANR, то існує обмежений відкритий окіл U простору X в R^n разом з ретракцією

$$r: U \supset X$$

Теорема 5.1. Відкритий підпростір $R^n \backslash X$ має тільки одне скінченне число компонент.

Доведення. Спочатку доведемо, що кожна компонента простору $R^n \backslash X$ перетинає $R^n \backslash U$. Для цього, нехай C – компонента простору $R^n \backslash X$, яка міститься в U. Ми приведемо до протиріччя. Оскільки границя ∂C міститься в X як в доведенні (4.2), то маємо $\overline{C} \subset U$. Звідси ми можемо задати відображення

$$\mathrm{f} : \overline{C} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$$

за формулою $f(x) = r(x)$ для кожного $x \in \overline{C}$. Оскільки $\partial C \subset X$, то звідси випливає, що $f(x) = r(x) = x$ для кожної граничної точки простору $\overline{C}$. Оскільки $\overline{C}$ є граничною обмеженою множиною в R^n, то $\overline{C}$ є компактною. Звідси, за (4.1) маємо:

$$C \subset \overline{C} \subset f(\overline{C}) \subset r(U) = X\,.$$

Це протирічить нашому припущенню, що C є компонентою доповнення $R^n \backslash X$. Звідси випливає, що кожна компонента доповнення $R^n \backslash X$ перетинає $R^n \backslash U$.

Позначимо через α сім'ю всіх компонент доповнення $R^n \backslash X$. Ми доведемо, що α є скінченою. Для цього виберемо досить велике дійсне число $k>0$ таке, що куля

$$E = \{x \in R^n \mid d(\theta, x) \leq k\}$$

містить U, де через θ позначено початок координат простору R^n. Тоді $K = E \backslash U$ є компактним і перетинає кожну компоненту простору $R^n \backslash X$. Таким чином α покриває K відкритими множинами простору R^n. Оскільки K є компактним, то існує скінчена підсім'я β сім'ї α, яка вже покриває K. Оскільки елементи сім'ї є попарно диз'юнктні, і кожне з них перетинає K, то звідси випливає, що $\beta = \alpha$. Отже, α є скінченним.

Тепер нехай p – довільна точка в R^n і $0 < a < b$ – задані цілі числа. Через A, B позначимо кулі, задані формулами

$$A = \{x \in R^n \mid d(p, x) \leq a\} ,$$

$$B = \{x \in R^n \mid d(p, x) \leq b\} .$$

Лема 5.2. Існує не більш як скінченне число компонент простору $B \backslash X$, яке має граничні точки в A.

Доведення. За компактністю X і неперервністю r, існує досить мале дійсне число $\delta > 0$ таке, що замкнутий δ-окіл

$$N_\delta(X) = \{ w \in R^n \mid d(w, X) \leq \delta \}$$

простору X міститься в U, і що

$$d[w, r(w)] \leq \frac{1}{4}(b-a)$$

для кожного w в $N_\delta(X)$. За методом, використаним в доведенні (5.1), можна довести, що тільки скінченне число компонент простору $B \backslash X$ перетинають компактну множину

$$K = B \backslash Int[N_\delta(X)] .$$

Тепер припустимо, що існує нескінченно багато компонент простору $B \backslash X$, які мають граничні точки в A. Ми приведемо до протиріччя наступним чином.

Оскільки тільки скінченне число компонент простору $B \backslash X$ перетинає K, то звідси випливає, що існує компонента C простору $B \backslash X$, яка міститься в внутрішності $Int\ [N_\delta(X)]$ простору $N_\delta(X)$ і має граничні точки в A.

Через H позначимо кулю, задану за формулою

$$H = \{ x \in R^n \mid d(p, x) \leq a + \frac{3}{4}(b-a) \}.$$

Оскільки R^n є топологічним лінійним простором, ми можемо задати відображення $\Phi\colon H \cup (\partial C) \to R^n$, задане за формулою

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in H \\ r(x) - x, & x \in \partial C \end{cases},$$

де через ∂C позначено границю C в R^n. Це означення підтверджує факт

$$H \cap \partial C \subset X.$$

Через D позначимо кулю за формулою

$$D = \{\, x \in R^n \mid d(\theta, x) \le \frac{1}{4}(b-a) \,\}.$$

Оскільки $\partial C \subset N_\delta(X)\theta \subset U$, то

$$\Phi[H \cup (\partial C)] \subset D$$

Оскільки D є ANR, то Φ має продовження $\Phi^*\colon B \to D$.

Тепер розглянемо відображення $f\colon \overline{C} \to R^n$, задане за формулою

$$f(x) = r(x) - \Phi^*(x)$$

для кожного $x \in \overline{C}$. Тоді маємо:

(1) $f(x) = x, \ \ x \in \partial C$

(2) $f(x) = r(x), \ \ x \in \overline{C} \cap H$

(3) $d[x, f(x)] \le d[x, r(x)] + d[\theta, \Phi^*(x)] \le \frac{1}{2}(b-a)$

для кожного $x \in \overline{C}$.

Оскільки $\overline{C} \cap A \neq 0$, то існує точка $q \in C$ така, що

$$d(q, R_n \backslash H) > \frac{1}{2}(b-a)$$

Ми доведемо, що

$$(4) \qquad q \notin f(\overline{C}).$$

Для цього нехай x – довільна точка простору $\overline{C}$. Якщо $x \in H$, то з (2) випливає, що

$$f(x) = r(x) \in X$$

і звідси, $f(x) \neq q$. З другого боку, якщо $x \notin H$, маємо

$$d(q, x) > \frac{1}{2}(b-a)$$

а, отже, $f(x) \neq q$, за рахунок (3). Це доводить (4).

Тепер, оскільки $\overline{C}$ є компактний, то з (4.1) і (1) випливає

$$(5) \qquad \overline{C} \subset f(\overline{C})$$

Оскільки $q \in C \subset \overline{C}$, то (4) і (5) утворюють протиріччя.

<u>Лема 5.3.</u> Якщо точка p є граничною точкою компоненти C простору $B \backslash X$, то p є також граничною точкою компоненти простору $A \cap C$.

<u>Доведення.</u> Кожна компонента простору $A \cap C$ є очевидно також компонентою простору $A \backslash X$. Виберемо додатне дійсне число $\varepsilon < a$ і розглянемо кулю радіуса ε

$$E = \{x \in R^n \mid d(p, x) \leq \varepsilon\}.$$

За (5.2), існує тільки скінчене число компонентів простору $A \backslash X$, а, отже, простору $A \cap C$, які можуть мати граничні точки в E. Точка p повинна належати границі хоча б одного з цих компонент простору $A \cap C$. Інакше, p не буде міститися в об'єднанні цих компонент простору $A \cap C$, а, отже, не буде міститися в границі простору C. Це протирічить гіпотезі.

Кажуть, що гранична точка p відкритої множини C в просторі Y є досяжною з простору C тоді і тільки тоді, якщо існує відображення

$$\sigma\colon I \to \{p\} \cup C$$

замкнутого інтервалу $I = [0, 1]$ таке, що $\sigma(0)=p$ і $\sigma(t) \in C$ щоразу для $0 \le t \le 1$.

Теорема 5.4. Кожна гранична точка p компоненти C простору $R^n \backslash X$ є досяжною з простору C.

Доведення. Для кожного цілого числа $k=1, 2, \ldots$, нехай E_k позначає кулю, задану за формулою

$$E_k = \{x \in R^n \mid d(p, x) \le \frac{1}{k}\}.$$

За (5.3) і індукцією за k, ми можемо побудувати послідовність

$$C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$$

підмножин простору R^n, які задовольняють наступні дві умови:

(S1) Для кожного $k \ge 1$ C_k є компонентою простору $C \cap E_k$ з p як граничною точкою.

(S2) Для кожного $k \ge 1$ C_{k+1} є компонентою простору $C_k \cap E_{k+1}$.

Для кожного $k \ge 1$ виберемо точку $p_k \in C_k$. Як зв’язна відкрита множина локально зв’язного метризованого простору E_k, множина C_k є дугоподібно зв’язна. Нехай I_k позначає замкнутий підінтервал

$$I_k = [\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}] .$$

Оскільки і p_k, і p_{k+1} є дугоподібною множиною C_k, то існує відображення

$$\sigma_k\colon I_k \to C_k$$

таке, що

$$\sigma_k\left(\frac{1}{k}\right) = p_k, \quad \sigma_k\left(\frac{1}{k+1}\right) = p_{k+1}\ .$$

Нарешті, задамо відображення $\sigma : I \to \{p\} \cup C$ за формулою

$$\sigma(t) = \begin{cases} p, & t = 0 \\ \sigma_k(t), & t \in I_k \end{cases}$$

неперервність відображення σ в точці $t=0$ випливає з того факту, що послідовність $\{C_k\}$ збігається до точки p. Оскільки $\sigma(0)=p$ і $\sigma(t) \in C$ для кожного $t>0$, то p є досяжною з боку C.

Теорема 5.5. Границя ∂X простору X в R^n є локально зв'язна.

Доведення. Нехай p – довільна точка в ∂x і $\xi > 0$ – дане дійсне число. Виберемо додатне дійсне число $\eta < \xi$ таке, що для довільної точки $y \in R^n$, і з того, що $d(p,y) \leq \eta$ випливає, що $y \in U$ і $d[p, r(y)] < \xi$.

Розглянемо кулі E і H, задані за формулами

$$E = \{\, y \in R^n \mid d(p, y) \leq \xi \,\},$$

$$H = \{\, y \in R^n \mid d(p, y) \leq \eta \,\}.$$

Позначимо через G об'єднання множини $R^n \backslash U$ і кожної компоненти простору $H \backslash X$, які не містять точку p як граничну точку. З (5.2) випливає, що $d(p, G) > 0$. Нехай

$$\delta = \min\,[\eta, d(p, G)].$$

Для встановлення локальної зв'язності ∂x в точці p, досить довести, що для кожної точки $q \in \partial x$ з $d(p, q) < \delta$, існує зв'язна множина $K \subset E \cap (\partial x)$, яка містить p, і q.

Для цього, нехай q – довільна точка простору ∂x з $d(p, q)< \delta$. Оскільки $\delta \leq d(p, G)$, то існує компонента C простору $H\backslash X$, для якої p і q є граничними точками. Тоді з (5.4) випливає, що існує відображення

$$\sigma: I \to \{p\} \cup C \cup \{q\},$$

яке задовольняє $\sigma(0) = p$, $\sigma(1) = q$ і $\sigma(t) \in C$ для $0 < t < 1$.

Позначимо через K компоненту простору $E \cap X$, яка містить зв'язну множину $r[\sigma (I)]$. Далі через D позначимо компоненту простору $E\backslash K$, який містить точку $\sigma\left(\frac{1}{2}\right) \in C$. Оскільки K є зв'язною множиною, то звідси випливає, що простір $E\backslash D$ є зв'язним. Через те, що n-вимірна куля унікогерентна, то перетин

$$J = (E\backslash D) \cap \overline{D}$$

двох зв'язних замкнутих множин $E\backslash D$ і $\overline{D}$ є зв'язним.

Оскільки J є границею D відносно E, і оскільки D є компонентою простору $E\backslash K$, то

$$J \subset E \cap (\partial x)$$

Оскільки D є компонентою $E\backslash K$, яка містить точку $\sigma\left(\frac{1}{2}\right)$, то $\sigma (t) \in D$, $0 < t < 1$.

Отже, $p \in \overline{D}$ і $q \in \overline{D}$. Це доводить, що J є зв'язною множиною в просторі $E \cap (\partial x)$, який містить і p, і q. Отже, ∂x є локально зв'язним.

§6. Деякі застосування теорії ретрактів.

<u>Теорема 1.</u>

Кожний топологічний добуток скінченного сімейства абсолютних околових екстензорів для класу C також буде абсолютним околовим екстензором.

Доведення.

Нехай $\{Y_\alpha \mid \alpha \in A\}$ – довільно вибране сімейство абсолютних околових екстензорів для класу C і нехай Y – топологічний добуток просторів цього сімейства.

Ми будемо доводити, що Y є абсолютним околовим екстензором для класу C.

Нехай X – довільний простір із класу C, а $f{:}A \to Y$ – довільне відображення, яке задане на замкнутому підпросторі $A \subset X$.

Для кожного індекса $\alpha \in A$ задамо композицію відображень

$$f_\alpha = p_\alpha \circ f{:}A \to Y_\alpha,$$

де через проекцію $p_\alpha{:}Y \to Y_\alpha$ позначимо натуральну проекцію.

Оскільки Y_α – абсолютний околовий екстензор для класу C, то існує відкритий підпростір $U_\alpha \in X$, який сам є околом A, а також існує продовження

$$g_\alpha{:}\ X \to Y_\alpha.$$

відображення f_α.

Оскільки A – скінченна множина індексів за вибором, то перетин усіх U_α є відкритим простором в X, що містить A. Задамо відображення $g{:}\ X \to Y$ формулою:

$$g_\alpha(x) = p_\alpha[g(x)]$$

для довільного $x \in U = \bigcap U_\alpha$.

Отже, g є продовженням f.

Твердження 9.1.

Якщо Y_1 і Y_2 – два замкнуті підпростори простору Y, які належать АЕ для класу C такі, що $Y_1 \cup Y_2 = Y$ та $Y_1 \cap Y_2$ належить АЕ для класу C, то Y_1 і Y_2 належать АЕ для класу C.

Доведення.

Потрібно довести, що Y_1 належить АЕ для класу C.

Нехай $f\colon A \to Y_1$ є відображенням, визначеним на замкнутому підпросторі A з довільного простору X, що належить класу C. Цього достатньо, щоб довести, що f має продовження на деякий окіл підпростору A в X.

Оскільки Y є абсолютним екстензором для класу C, то композиція

$$\Phi = i \circ f\colon A \to Y,$$

де $i\colon Y_1 \subset Y$ має продовження $\Phi^*\colon X \to Y$ на X.

Оскільки X є нормальним, то існує відкритий V із X, що

$$A \subset V \subset [V] \subset U$$

Нехай $\psi = \Phi^*[V]$ і розглянемо повні прообрази

$$B_1 = \psi^{-1}(Y_1)$$

$$B_2 = \psi^{-1}(Y_2).$$

Тоді B_1 і B_2 будуть замкнутими в $[V]$ і, отже, замкнуті в X.

Більше того, ми маємо

$$[V] = B_1 \cup B_2,\ A \subset B_1$$

$$\Psi(B_1 \cap B_2) \subset Y_1 \cap Y_2.$$

Як замкнутий підпростір в X, B_2 належить класу C. Оскільки $B_1 \cap B_2$ є замкнутим в B_2 і $Y_1 \cap Y_2$ належить АЕ для класу C, то обмеження $\psi \big| B_1 \cap B_2$

має продовження $k: N \to Y_1 \cap Y_2$ на відкритому підпросторі N із B_2, який містить перетин $B_1 \cap B_2$.

Оскільки B_2 є нормальним простором, то існує відкрита множина M із B_2, яка задовольняє:

$$B_1 \cap B_2 \subset M \subset [M] \subset N \subset B_2$$

Тоді B_1 і $[M]$ є замкнутими множинами в X і $B_1 \cap [M] = B_1 \cap [M] \cap B_2 = B_1 \cap B_2$; ми можемо задати відображення $g: B_1 \cup [M] \to Y_2$ за формулою:

$$g(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in B_1 \\ k(x), & x \in [M] \end{cases}.$$

Тоді g є продовженням відображення f на $B_1 \cup [M]$. Залишається довести, що $B_1 \cup [M]$ містить відкритий окіл A.

Розглянемо множину $W = (B_1 \cup M) \cap V$. Оскільки $A \subset W \subset B_1 \subset [M]$, то достатньо довести, що W – відкрита множина в X. Зважаючи на те, що $B_1 \cap B_2 \subset M$ і $[V] = B_1 \cup B_2$, ми маємо

$$W = [([V] \backslash B_2 \cup M] \cap V = (V \backslash B_2) \cup (M \cap V).$$

Оскільки M є відкритою множиною в B_2, то існує відкрита множина Q в X така, що $M = B_2 \cap Q$. Тоді ми маємо

$$M \cap V \subset Q \cap V = Q \cap [V] \cap V =$$

$$= Q \cap (B_1 \cup B_2) \cap V \subset [B_1 \cup (Q \cap B_2)] \cap V = (B_1 \cup M) \cap V = W$$

Звідси випливає, що $W = (V \backslash B_2) \cup (Q \cap V)$. Це дає нам, що W є відкритою множиною в X. Твердження доведено.

Теорема 3.1. Нехай Y простір з топологічного класу C. Якщо Y абсолютний екстензор (AE) для класу C, то Y буде також AR для класу C.

б) Доведемо теорему для AR і AE.

Розглянемо довільний гомеоморфізм H: $Y \to Z_0$ простору Y на замкнутий підпростір Z_0 простору Z з класу C. Оскільки Y є AE для класу C, то відображення

$$F=H^{-1}:Z_0 \to Y$$

має продовження $G:Z \to Y$. Тоді композиція $R=H\circ G$ із Z в Z_0 буде ретракцією. Отже, Y буде AR для класу C.

Теорема 3.2. Нехай через C позначено один із наступних топологічних класів:

(а) нормальні простори;

(б) колективно нормальні простори;

(с) цілком нормальні простори;

(d) нормальні ліндельофові простори;

(f) компактні хаусдорфові простори;

(g) всі компактні метризовні простори ;

(h) метризовні простори;

(k) сепарабельні метризовні простори.

Тоді кожен ANR буде ANE.

б) доведемо теорему для AR і AE.

Нехай Y - довільний AR для класу C. Щоб довести, що Y також належить класу AE розглянемо довільне відображення f: $A \to Y$, яке визначене на замкнутому підпросторі A простору X. Досить показати, що f може бути продовжене на весь простір X. Ми будем доводити для трьох випадків:

1)Нехай C буде один із вищеназваних класів (a)-(f). Розглянемо склеєний простір Z, який одержаний склеюванням X та Y по відображенню f.

Простір Z також належить класу С. Розглянемо природню проекцію p:W→Z топологічної суми W=X+Y на Z та їх звуження

$$i = p\,|Y \quad , \quad j = p\,|X$$

Тоді $i:Y\to Z_0$ буде гомеоморофізмом простору Y на замкнутий підпростір Z_0 в Z. Оскільки Y є AR для класу С, то існує простір Z разом з ретракцією r: $Z\to Z_0$. Пов-ний прообраз $X=j^{-1}(Z)$ відображення j: X→Z буде співпадати з X. Задаємо відображення g: X→Y формулою

$$g(x)=(i^{-1}\circ r)[j(x)]$$

для кожного $x\in X$. Тоді g буде продовженням відображення f на X. Цим завершується доведення випадку 1).

2) Припустимо, що С буде один з вищеназваних класів (h)-(k). Оскільки Y метризовний простір, то вибираємо на Y обмежену метрику і розглядаємо канонічне ізометричне вкладення æ:Y→L в банаховий простір L=C(Y). За теоремою (2.1) образ Z_0=æ(Y) є замкнутою підмножиною випуклої оболонки цього образу æ(Y). Якщо С є клас всіх сепарабельних метризованих просторів, то Y є сепарабельний, отже Z також сепарабельний за другою частиною теореми (2.1). Отже Z є простором з класу С. Оскільки Y є AR для класу С, то існує ретракція R: $Z\to Z_0$. З другої сторони звідси випливає, що композиція

$$\Phi=æ\circ f:A\to L$$

має продовження $\psi:X\to L$ таке , що $\psi(X)$ міститься в опуклій оболонці множини

$$\Phi(A)\subset æ(Y).$$

Звідси випливає, що $\psi(X)\subset Z$. Тоді повний прообраз $X = \psi^{-1}(Z)$ буде співпадати з X. Задаємо відображення g: X→Y формулою

$$g(x)=æ^{-1}\{r[\psi(x)]\}$$

для кожного $x \in X$. Таким чином g є продовженням до X. Цим завершується доведення 2).

3) Нарешті припустимо, що C належить класу всіх компактних метризовних просторів. Оскільки Y компактний метризований простір, то існує гомеоморфізм $h:Y \rightarrow Z_0$ на замкнуту підмножину Z_0 гільбертового куба $Z=I^w$. Оскільки I^w є компактним метризованим простором, а $Y \in AR$ для класу всіх компактних метризовних просторів, то існує простір Z в кубі I^w разом з ретракцією $R: Z \rightarrow Z_0$. З іншої сторони композиція відображень

$$\Phi = h \circ f : A \rightarrow I^w$$

має продовження ψ: $X \rightarrow I^w$ повний прообраз $X=\psi^{-1}(Z)$ буде співпадати з X. Задаємо відображення g: $X \rightarrow Y$ формулою

$$g(x)=(h^{-1} \circ r)[\psi(x)]$$

для кожного x є X. Тоді g буде продовженням f на весь простір X. Цим завершується доведення випадку 3).

Лема 5.1. Якщо Y є AR(ANR) для класу всіх компактних метризованих просторів, то Y буде AE (ANE) для класу всіх нормальних просторів.

б) Доведення для AR.

Оскільки Y компактний метризовний простір, то можемо вважати його замкнутим підпростором гільбертового кубу I^w. Оскільки Y є AR, то існує ретракція R куба I^w на Y.

Щоб довести, що Y є AE для класу всіх нормальних просторів , нехай f:A $\rightarrow$ Y довільне відображення замкнутого простору A в нормальному X. Композиція

$$\Phi = i \circ f : A \rightarrow I^w$$

має продовження ψ: X→I^w.

Нехай U = ψ^{-1}(V), тоді U є околом множини A в X. Задаємо відображення G: X→Y формулою

$$g(x)=r[\psi(x)]$$

для кожного x є X. Тоді G буде продовженням на X. Це доводить, що Y є AE для класу всіх нормальних просторів.

Лема5.3. Якщо Y є AR (ANR) для класу всіх сепарабельних метризовних просторів, то Y буде AE (ANE) для класу усіх цілком нормальних просторів.

б) доведемо для AR.

Наділяємо Y обмеженою метрикою і розглянемо канонічне ізометричне вкладення æ:$Y \to L$ простору Y в банаховий простір $L = C(Y)$. За теоремою (2.1) образ æ(Y) буде замкнутий в опуклій оболонці Z простору æ(Y) в L. Більше того, Z є сепарабельним метризованим простором, таким як в другій частині теореми (2.1). Оскільки Y є AR, то він гомеоморфний образу æ(Y). Отже, існує ретракція $r: X \to Y$.

Щоб довести, що Y є AE для класу всіх цілком нормальних просторів, нехай $f: A \to Y$ буде довільне відображення, яке задане на замкнутому підпросторі A цілком нормального простору X. За теоремою про те, що кожна опукла множина в локально-опуклому топологічному лінійному просторі є AE для класу M всіх метризованих просторів, простір Z буде AE для класу всіх метризованих просторів. Оскільки Z - сепарабельний, то Z буде AE. Отже, композиція

$$\Phi = æ \circ f: A \to Z$$

має продовження $\psi: X \to Z$

Нехай $U = \psi^{-1}(V)$.Тоді U є околом множини A в X . Задаємо відображення $g : X \to Y$ формулою

$$g(x) = æ^{-1} r[\psi(x)]$$

Для кожного $x \in X$. Тоді g є продовженням на весь X . Цим доведемо, що Y буде AE .

Доведення теореми 2.5.

Теорема 2.5. Нехай X і Y – метризовані простори. Тоді функціональний простір

$$\Omega = Map\ (X, Y)$$

з d^*-топологією, яка породжена обмеженою функцією відстані d на Y, належить класу AR тоді і тільки тоді, коли таким є Y.

Доведення. Необхідність. Для кожної точки $y \in Y$ через $j(y)$ позначимо постійне відображення в Ω, яке переводить простір X у єдину точку y. Позначення $y \to j(y)$ задає ізометричне вкладення

$$j : Y \to \Omega$$

по відношеню до метрик d і d^*. Це вкладення j називають природною ін'єкцією простору Y в Ω. Воно переводить Y гомеоморфно на замкнутий простір $j(Y)$ простору Ω.

Для будь-якої даної точки $a \in X$ позначимо через

$$p_a : \Omega \to Y$$

функцію, задану за формулою $p_a(f)=f(a)$ для кожного $f \in \Omega$. Очевидно, що p_a є відображенням і переводить підпростір $j(Y)$ простору Ω на Y. Таке відображення p_a називається проекцією .

Враховуючи дане вище означення, ми зауважимо, що $p_a \circ j$ є тотожним відображенням на Y і $j \circ p_a$ є ретракцією Ω на $j(Y)$. Таким чином, ми довели, що Y є гомеоморфним з ретрактом простору Ω. Якщо Ω є AR, то звідси випливає, що таким є і Y, згідно з теоремою 7.7. Це завершує доведення необхідності.

<u>Достатність</u>. Припустимо, що Y є AR. За теоремою 3.1 досить довести, що Ω є ANE для класу всіх метризованих просторів.

Для цього, нехай $\psi\colon A \to \Omega$ - довільне відображення, задане на замкнутому підпросторі A метризованого простору S. Задамо функцію $\Phi\colon X{\times}A{\to}Y$ формулою

$$\Phi(x, a) = [\psi(a)]\,(x)$$

для кожного $x \in X$ і кожного $a \in A$. Оскільки d^*-топологія простору Ω є допустима за (2.1), то Φ є відображенням. Оскільки Y є AR і $X{\times}A$ є замкнутим підпростором метризованого простору $X{\times}S$, то з теореми 3.2 випливає, що Φ має продовження $\Phi^*\colon X{\times}S \to Y$. Цим завершується доведеня теореми і лекції №12.

Список використаної літератури

1. *Hu See Tzen., Theory of retracts., Detroit, 1958.*
2. *Борсук К., Теория ретрактов., Warszawa, 1967.*