Довгий О.Я.

Методичні рекомендації

до вивчення розділу

”Рівняння лінії. Функції.

Перетворення графіків функцій”

курсу математики для студентів спеціальності

”Початкове навчання”

Довгий О.Я. Методичні рекомендації до вивчення розділу ”Рівняння лінії. Функції. Перетворення графіків функцій” курсу математики для студентів спеціальності ”Початкове навчання” / Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2008. – 80 с.

Рецензенти:

Кульчицька Н.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри статистики і вищої математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Махней О.В. – кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри диференціальних рівнянь та прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Рекомендовано до друку Вченою Радою Педагогічного інституту Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол № 3 від 1 листопада 2007 року)

Дані методичні рекомендації розкривають зміст всіх теоретичних положень розділу: ”Рівняння лінії. Функції. Перетворення графіків функцій”, який складається з наступних тем: «Елементи аналітичної геометрії на площині», «Функції. Перетворення графіків функцій». При цьому акцентовано увагу на те, що студентам найважче зрозуміти в процесі вивчення даних тем. Запропонована достатня кількість прикладів.

В даних методичних рекомендаціях міститься весь необхідний навчальний матеріал другого з двох розділів курсу математики, які вивчаються на І-у курсі в ІІ-ому семестрі згідно робочої програми з навчального предмету ”Математика” для студентів спеціальності ”Початкове навчання”.

Метою вивчення розділу про який йдеться в даних методичних рекомендаціях, а саме розділу: ”Рівняння лінії. Функції. Перетворення графіків функцій” є глибше засвоєння основних математичних положень, а також підготовка студентів до самостійного вивчення тих розділів математики, які можуть бути потрібні додатково в практичній і дослідницькій роботі спеціалістів в області початкового навчання.

Завданням вивчення розділу є розкриття змісту і значення основних понять даного розділу математики, оволодіння вмінням записувати рівняння лінії маючи деякі дані та будувати графіки маючи рівняння, використовуючи перетворення основних графіків. В результаті вивчення цього розділу с**тудент повинен знати** основні теоретичні положення, навчитися використовувати їх при записі рівняння лінії, побудові графіка та виробити навики користування літературою і **уміти** знаходити взаєморозташування та відстані між лініями, будувати та перетворювати графік функції.

Методичні рекомендації включають в себе:

– робочу програму курсу математики для II семестру I курсу: тематичний план з відображенням кількості лекційних, практичних і самостійних годин призначених на освоєння відповідних тем; детальний тематичний план лекційних і практичних занять з відображенням кількостей годин;
– детальний конспект лекційних занять розділу ”Рівняння лінії. Функції. Перетворення графіків функцій”;
– список рекомендованої літератури.

Нормативні дані щодо вивчення математики студентами спеціальності ”Початкове навчання” на I курсі в II семестрі стаціонарної форми навчання

Лекційних (год)	**Практичних (семінарських) (год.)**	**Лабораторних (год.)**	**Самостійна робота (годин.)**	**Всього годин**	**Заліки (семестр)**	**Екзамен (семестр)**
14	16	–	24	54	–	–

Тематичний план дисципліни „математика”

№ п/п	Тема	Кількість годин		
		лекц.	**практ.**	**самост.**
1	Вирази	0,5	0,5	2
2	Рівняння і нерівності, та їх системи і сукупності.	7	9,5	16
3	Рівняння лінії	3,5	2	2
4	Функції. Перетворення графіків функцій	3	4	4

Тематичний план лекційних занять для студентів денної форми навчання

№ *п/п*	Розділи	Назва теми для денної форм и навчання	К-сть годин
1	2	3	4
1	Вирази	1.1. Поняття числового виразу. Числові рівності. Числові нерівності. 1.2. Властивості числових рівностей і нерівностей. Вирази із змінною.	0,25 0,25
2	Рівняння і нерівності та їх системи. Текстові задачі	2.1. Рівняння з однією змінною. Розв'язування рівнянь з однією змінною. Рівносильні рівняння. Теореми про рівносильні рівняння та наслідки з них. 2.2. Поняття про рівняння з двома змінними. Системи двох рівнянь. Способи їх розв'язування. Графічна інтерпретація розв’язку системи. 2.3. Системи і сукупності нерівностей з однією змінною. Нерівності та системи нерівностей з двома змінними. Графічний спосіб розв'язування систем та сукупностей. 2.4. Складання та розв’язування різних типів задач за допомогою рівнянь та систем рівнянь.	2 1,5 2 1,5

1	2	3	4
3	Рівняння лінії	3.1. Поняття про рівняння лінії. Рівняння прямої. Загальне рівняння прямої. 3.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих. Точка перетину двох прямих. 3.3. Рівняння кола.	1,5 1 1
4	Функції. Перетворення графіків функцій	4.1. Числова функція, її властивості. Функція обернена до даної. Лінійна функція. Пряма пропорційність. Обернена пропорційність. 4.2. Квадратична функція, її властивості, графік. 4.3. Перетворення графіків $y=Af(ax+b)+B$, де A, B, a, b – сталі, $A\neq0$ і $b\neq0$ за графіком функції $y=f$(x).	1,5 0,75 0,75

Тематичний план практичних занять для студентів денної форми навчання

№ *п/п*	Розділи	Назва теми для денної форми навчання	Кількість годин	З них	
				практичні	самостійні.
1	2	3	4	5	6
1	Вирази	1.1. Поняття числового виразу. Числові рівності. Числові нерівності. 1.2. Властивості числових рівностей і нерівностей. Вирази із змінною.	1,25 1,25	0,25 0,25	1 1

1	2	3	4	5	6
2	Рівняння і нерівності та їх системи. Текстові задачі	2.1. Рівняння з однією змінною. Розв'язування рівнянь з однією змінною. Рівносильні рівняння. Теореми про рівносильні рівняння та наслідки з них.	2,5	0,5	2
		2.2. Поняття про рівняння з двома змінними. Системи двох рівнянь. Способи їх розв'язування.	6	2	4
		2.3. Системи і сукупності нерівностей з однією змінною. Нерівності та системи нерівностей з двома змінними, графічний спосіб їх розв'язування.	7	3	4
		2.4. Складання та розв’язування задач за допомогою рівнянь та систем рівнянь.	10	4	6
3	Рівняння лінії	3.1. Поняття про рівняння лінії. Рівняння прямої. Загальне рівняння прямої.	1,5	0,75	0,75
		3.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих. Точка перетину двох прямих.	2	1	1
		3.3. Рівняння кола.	0,5	0,25	0,25
4	Функції. Перетворення графіків функцій	5.1. Числова функція, її властивості. Функція обернена до даної. Лінійна функція. Пряма пропорційність. Обернена пропорційність.	3	2	1
		5.2. Квадратична функція, її властивості, графік.	2	1	1
		5.3. Перетворення графіків $y=Af(ax+b)+B$, де A, B, a, b – сталі, $A\neq 0$ і $b\neq 0$ за графіком функції $y=f(\text{x})$.	3	1	2

Самостійна робота полягає в розв’язуванні різних завдань та вправ з даної тематики та доведенні по аналогії деяких теорем.

Елементи аналітичної геометрії на площині

1. Координати та їх використання. Системи прямокутних і полярних координат на площині.
2. Віддаль між двома точками. Поділ відрізка в даному відношенні. Визначення площі трикутника за допомогою методу координат.
3. Лінія на площині.
   3.1. Різні види рівнянь прямої.
   3.2. Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.
   3.3. Віддаль від точки до прямої.
   3.4. Поняття про рівняння другого порядку. Коло.

1. Спосіб визначення положення точок чи інших об'єктів на площині і в просторі за допомогою чисел називають **методом координат**.

Візьмемо на площині дві взаємно перпендикулярні осі

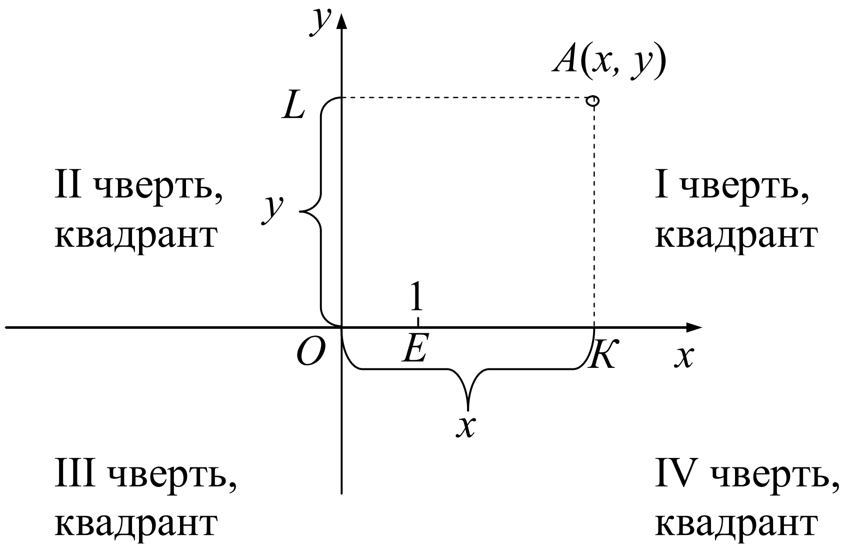


Рис. 1.1

(напрямні прямі) Ox і Oy, які перетинаються в точці O (рис. 1.1). Задамо на цих осях масштаб (одиничний відрізок $e = OE$), тобто отримаємо дві координатні осі, які взаємно перпендикулярні. Точка O ділить обидві осі на від'ємну і додатню півосі. Ці осі утворюють **прямокутну систему координат *Oxy***. Вісь Ox називається віссю **абсцис**, вісь Oy – віссю **ординат**. Нехай A – довільна точка на площині. Спроектувавши її на осі Ox та Oy, отримаємо точки K і L відповідно. Довжини відрізків OK і OL, взяті зі знаком „+” або „–”, в залежності від того, чи точки K і L знаходяться на додатній чи від'ємній півосях, називаються абсцисою і ординатою точки A.

Абсциса та ордината точки A називаються координатами цієї точки на площині. Кожній точці на площині відповідає пара дійсних чисел і навпаки, тобто існує *бієктивна* (*взаємно однозначна*) *відповідність*. Множина впорядкованих пар чисел в обраній системі координат називається **двовимірним простором** і позначається $\mathbf{R_2}$.

Введені на площині координати x і y називаються ***декартовими*** в честь французького математика Рене Декарта.

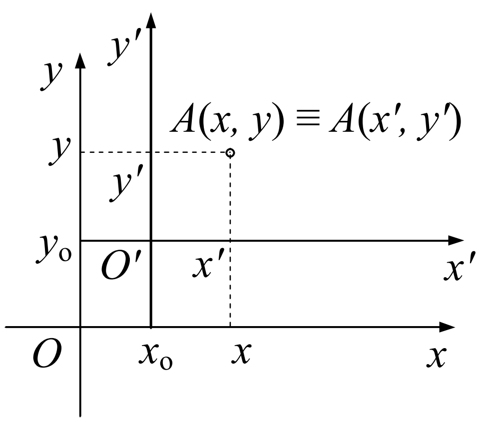


Рис. 1.2

При паралельному зсуві осей, коли положення початку нової системи координат в точці $O'(x_0, y_0)$ старої системи координат, а напрям осей залишається такий самий (рис 1.2), зв'язок між координатами виглядає так:

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0 . (1.1)$$

Звідси маємо: $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$.

Приклад.

Рівняння прямої l у старій системі Oxy координат має вигляд y=3x+7. Знайти рівняння прямої в новій системі координат $O'x'y'$, яка утворена паралельним зсувом осей старої системи координат, так, що положення початку нової системи координат знаходиться в точці O'(4, 7) старої системи координат.

Розв’язок. Використавши зв’язок між координатами, записаний формулами (1.1), отримаємо: $x=x'+4$, $y=y'+7$. Підставимо ці вирази в рівняння прямої l і отримаємо: $y'+7=3(x'+4)+7 \Rightarrow y'=3x'+12$ – рівняння прямої l в системі координат $O'x'y'$. Відповідь: $y'=3x'+12$.

Розглянемо так звану полярну систему координат, яку часто використовують під час пояснення багатьох фізичних явищ. Виберемо на площині довільну точку O, назвемо її **полюсом** і проведемо промінь OP, який називається **полярною віссю**, задамо масштабну одиницю довжини $e = OE$. Положення будь-якої точки M на площині визначимо так. Сполучимо відрізком прямої полюс з точкою M. Довжину відрізка OM позначимо через ρ. Цей відрізок називається **полярним радіусом** точки M; задамо на ньому напрям від O до M. Отримаємо вісь OM. Таким чином, маємо дві осі: перша — полярна вісь, а друга — вісь OM. Величину кута POM (з урахуванням того, що додатний напрям повороту проти

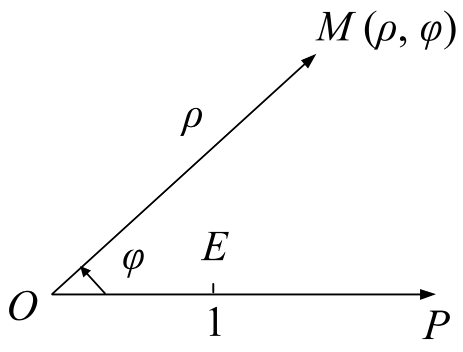


Рис. 1.3

годинникової стрілки) позначимо через φ (у градусах або радіанах) і назвемо його **полярним кутом** точки M (рис. 1.3).

Полярними координатами точки M називається впорядкована пара чисел (ρ, φ), де ρ — довжина полярного радіуса; φ — величина полярного кута точки M. Для полюса $\rho = 0$, а φ має довільне значення. Те, що числа ρ і φ — координати точки M, записують так: $M(\rho, \varphi)$.

Полярні координати ρ і φ однозначно визначають положення точки на площині. Обернене твердження неправильне, оскільки кожній точці координатної площини відповідає одне й те саме ρ і нескінченна множина полярних кутів, які можуть відрізнятись один від одного на $2\pi k$, де $k \in Z$.

Для того щоб отримати взаємно однозначну відповідність, на полярний кут φ накладають обмеження: $0 \le \varphi < 2\pi$ або $-\pi < \varphi \le \pi$.

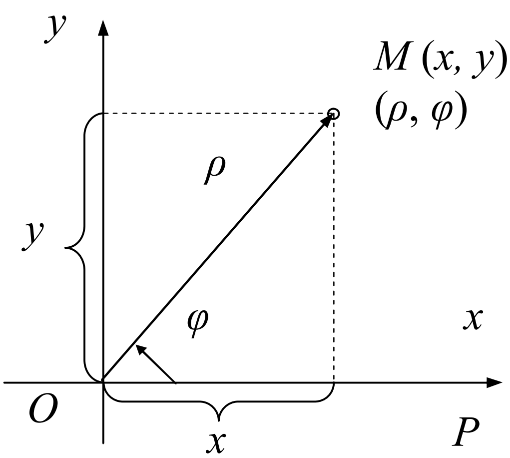


Рис. 1.4

Ці значення називаються **головними значеннями полярного кута.**

Знайдемо залежність між полярними і прямокутними декартовими координатами точки M. Сумістимо прямокутну систему координат Oxy з полярною так, щоб початок координат збігався з полюсом, а полярна вісь — з додатною піввіссю абсцис (рис. 1.4).

Нехай точка M у декартовій системі визначається координатами (x, y), а в полярній — координатами (ρ, φ). Використовуючи означення тригонометричних функцій, знаходимо

$$x = \rho \cos \varphi, \ y = \rho \sin \varphi. \qquad (1.2)$$

Ці формули виражають декартові координати точки через полярні. Розв'язуючи систему (1.2) відносно ρ і φ за умови, що $\rho \geq 0$ і $0 \leq \varphi < 2\pi$, маємо

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (1.3)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при} \ \ y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при} \ \ y < 0. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Формули (1.2) – (1.4) встановлюють взаємно однозначну відповідність між прямокутними і полярними координатами точок площини.

На підставі цих залежностей можна скласти рівняння кривої в полярних координатах, якщо відомим є рівняння в декартових координатах і навпаки. Деякі криві зручніше подавати рівняннями в полярних координатах. Наприклад, спіраль Архімеда (рис. зліва), яка має вигляд пружини в годиннику, чи доріжки на грамофонній платівці, визначається рівнянням $\rho = a\varphi$.

Приклад.

Точка M у прямокутній декартовій системі координат визначається координатами $M(4, 7)$. Які координати цієї точки в полярній системі координат.

Розв'язок. Використавши формули (1.3), (1.4), отримаємо:

$\rho = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$ (од.), $\varphi = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) \approx \arccos 0{,}496 \approx 60^\circ$.

Відповідь: $M\,(\sqrt{65}, \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right))$.

Приклад.

Точка M у полярній системі координат визначається координатами (ρ, φ). Знайти координати цієї точки в прямокутній декартовій системі координат. Числа ρ, φ подані в таблиці 1.

Розв'язок. Варіант 1: ρ=5, φ=60°. Отже $M(5,\ 60^\circ)$.

Використавши формули (1.2), отримаємо:

$x = 5\cos 60^\circ = 5/2 = 2{,}5$; $y = 5\sin 60^\circ = 5\sqrt{3}/2$.

Відповідь: $M\,(5/2, 5\sqrt{3}/2)$.

2. Розглянемо задачу на знаходження віддалі між двома точками площини. Нехай задано дві точки $M_1(x_1,\ y_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2)$ (рис. 1.5)

$$M_1K = |x_2 - x_1|, \quad M_2K = |y_2 - y_1|$$

Трикутник M_1M_2K — прямокутний, тому за теоремою Піфагора маємо:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.5)$$

– *формула віддалі між точками* $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$.

Приклад.

Яка віддаль між точками $M_1(1, -2)$ і $M_2(3, 4)$.

Розв’язок. Використавши формулу (1.5), отримаємо:

$$M_1M_2 = \sqrt{(3-1)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10} \text{ (од.)}.$$

Відповідь: $2\sqrt{10}$ (од.).

Розглянемо задачу на знаходження координат точки поділу відрізка в даному відношенні. Нехай відрізок M_1M_2 ділиться точкою M в відношенні λ (рис. 1.6), тобто $\lambda = M_1M \,/\, M\ M_2$.

Нехай задано λ, треба знайти координати точки $M(x, y)$.

З рис. 1.6 і з теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, випливають співвідношення:

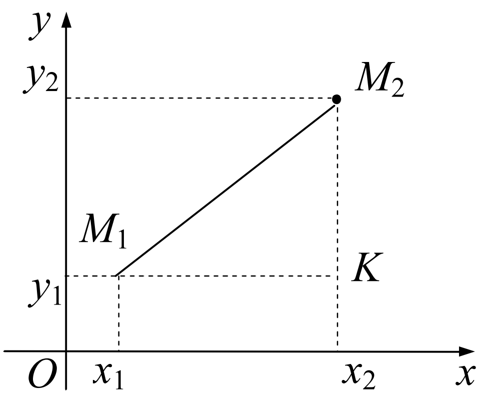


Рис. 1.5

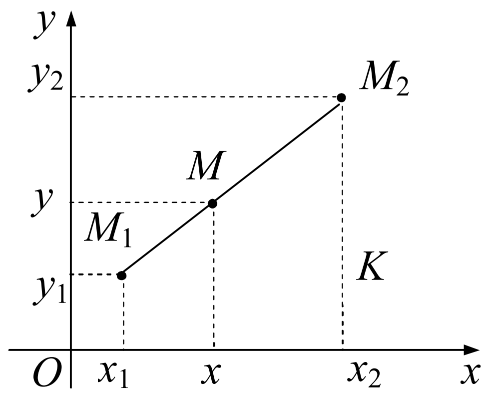


Рис. 1.6

$$\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda.$$

Оскільки числа $x - x_1$ і $x_2 - x$ одного й того знаку, то $\dfrac{|x-x_1|}{|x_2-x|} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda$. Звідси $x = \dfrac{x_1 + \lambda\, x_2}{1+\lambda}$

$$\tag{1.6}$$

Аналогічно $\qquad y = \dfrac{y_1 + \lambda\, y_2}{1+\lambda}.$

Приклад.

Які координати точки М, яка ділить відрізок з кінцями в точках $M_1(-3, 0)$ і $M_2(5, -4)$ у відношенні λ.

Розв'язок. Використавши формулу (1.6), отримаємо:

$x = \dfrac{-3 + 3 \cdot 5}{1 + 3} = 3;\;\; y = \dfrac{0 + 3 \cdot (-4)}{1 + 3} = -3$. Відповідь: $M(3, -3)$.

Наслідок. Якщо точка $M\,(x,\; y)$ — середина відрізка M_1M_2, то $\lambda = 1$ і формули (1.6) набувають вигляду:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (1.7)$$

Розглянемо задачу на знаходження за допомогою методу координат **площі трикутника.**

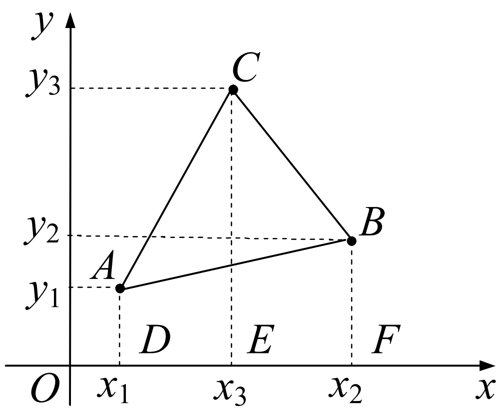


Рис. 1.7

Нехай задано координати вершин деякого трикутника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$ (рис. 1.7).

Знайдемо площу цього трикутника. З рисунка видно, що площу трикутника ABC можна знайти як:

$$S_{\Delta ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}.$$

У правій частині формули розміщені площі відповідних трапецій, які знаходяться за формулами (тому даний метод називають **методом трапецій**). Підставивши знайдені площі у вираз для площі трикутника, отримаємо:

$$S_{ADEC}=DE\frac{AD+CE}{2}=\frac{(x_3-x_1)(y_3+y_1)}{2};$$

$$S_{BCEF}=EF\frac{EC+BF}{2}=\frac{(x_2-x_3)(y_2+y_3)}{2};$$

$$S_{ABFD}=DF\frac{AD+BF}{2}=\frac{(x_2-x_1)(y_1+y_2)}{2}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+(x_3-x_1)(y_3+y_1)\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|.$$

Отже $$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|. \qquad (1.8)$$

Приклад.

Яка площа трикутника з вершинами в точках $M_1(4,\ 7)$, $M_2(0,\ 1)$ і $M_3(5,\ 1)$.

Розв'язок. Використавши формулу (1.8), отримаємо:

$$S=\frac{1}{2}\left|(0-4)(1-7)-(5-4)(1-7)\right|=\frac{1}{2}\left|24+6\right|=15(\text{од.}^2).$$

Відповідь: 15 (од.^{2}).

Приклад.

Яка довжина сторін трикутника і які координати точки перетину його медіан, якщо координати його вершин $A(-2,1)$, $B(3,4)$, $C(6,-5)$.

Розв'язок. Використавши формулу (1.5), отримаємо:

$$AB=\sqrt{(3-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}(\text{од.});$$

$$AC=\sqrt{(6-(-2))^2+(-5-1)^2}=\sqrt{64+36}=10(\text{од.});$$

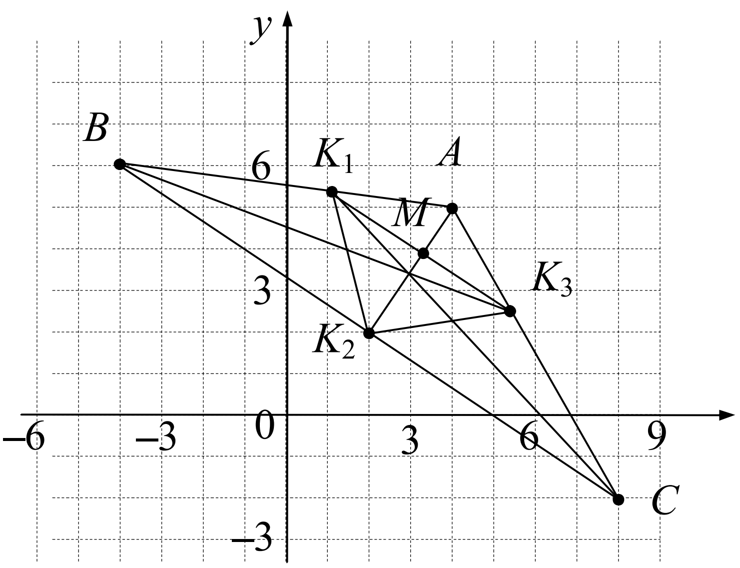
$$BC = \sqrt{(6-3)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}(\text{од.}).$$

Медіана трикутника – це відрізок, що сполучає його вершину із серединою протилежної сторони. Медіани трикутника точкою перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

Використавши формули (1.7) для знаходження координати точки *M*, яка є серединою сторони *AC*, отримаємо $M(2,-2)$.

Поділимо відрізок *BM* у відношенні 2:1 і отримаємо точку *O*, яка є точкою перетину медіан. При цьому, використавши формули (1.6) при $\lambda = 2$, отримаємо такі координати точки *O*:

$$x = \frac{3+2\cdot 2}{1+2} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3};\ y = \frac{4+2\cdot(-2)}{1+2} = 0. \text{ Отже } O(2\frac{1}{3}, 0).$$



Відповідь: $\sqrt{34}$ од., 10 од., $3\sqrt{10}$ од., $O(2\frac{1}{3}, 0)$.

Приклад.

Яка площа трикутника, вершини якого розташовані в точках перетину бісектрис трикутника *ABC* з його сторонами. Координати вершин трикутника *ABC*: $A(4,5), B(-4,6), C(8,-2)$.

Розв’язок. Див. рис. зліва. Знайдемо спочатку вершини $\Delta\, K_1K_2K_3$.

Оскільки бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам, то потрібно знайти відношення довжин прилеглих сторін, попередньо знайшовши їх довжини.

$$AB = \sqrt{(-4-4)^2(6-5)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}\,(\text{од.});$$

$$AC = \sqrt{(8-4)^2(-2-5)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}\,(\text{од.});$$

$$BC = \sqrt{(8+4)^2(-2-6)^2} = \sqrt{144+64} = \sqrt{208}\,(\text{од.}).$$

Беручи до уваги, що $AK_1 : K_1B = AC : BC$, тобто $\lambda_1 = \sqrt{\dfrac{65}{208}}$, то за формулами (1.6), отримаємо:

$$K_1\left(\frac{4+\sqrt{\frac{65}{208}}\cdot(-4)}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}, \frac{5+\sqrt{\frac{65}{208}}\cdot 6}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right).$$ Аналогічно: $K_2(2, 2)$, і також:

$$K_3\left(\frac{4+\sqrt{\frac{65}{208}}\cdot 8}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}, \frac{5+\sqrt{\frac{65}{208}}\cdot(-2)}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right).$$

Використавши формулу (1.8) для площі трикутника, отримаємо:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|\left(2-\frac{4-4\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)\cdot\left(\frac{5-2\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}-\frac{5+6\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{4+8\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}-\frac{4-4\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)\cdot\left(2-\frac{5+6\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)\right| =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(2-\frac{4-4\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)\cdot\frac{-8\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}-\frac{12\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\cdot\left(2-\frac{5+6\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\frac{2\cdot\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)-\left(4-4\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right)\cdot\left(-8\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(12\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)-\left(5+6\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\frac{2+2\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}-4+4\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right)\cdot\left(-8\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(12\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)\cdot\left(\frac{2+2\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}-5-6\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{\left(-48\cdot\frac{65}{208}+16\sqrt{\frac{65}{208}}\right)+\left(48\cdot\frac{65}{208}+36\sqrt{\frac{65}{208}}\right)}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{52\sqrt{\frac{65}{208}}}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right|=$$

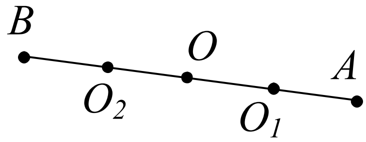
$$= \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{52\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right| \approx \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{52\cdot 0{,}55901699}{(1+0{,}55901699)^2}\right| \approx \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{29{,}0688837}{2{,}43053399}\right| \approx 5{,}98.$$

Наочно перевіримо, користуючись рисунком на прямокутній системі координат (бісектриси рисуємо з допомогою транспортира). Для цього поміряємо в одиничних відрізках довжини сторін трикутника $K_1K_2K_3$ і за формулою Герона, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b(p-c)}$, де $p-$ півпериметр, знаходимо його площу (в даному випадку трикутник рівнобедрений, то можна за формулою $S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot K_1K_3\cdot K_2M \approx 0{,}5\cdot 2{,}17\cdot 5{,}52 \approx 5{,}98$ од.^{2}.

Відповідь: $\approx 5{,}98$ од.^{2}.

Приклад.

Які координати точок поділу, якщо відрізок з кінцем в точці $A(1,0)$ і серединою в точці $O(-7,1)$ поділили на чотири рівних частини.



Розв'язок. Розглянемо рис. справа.

Знайдемо координати точки B, яка є другим кінцем відрізка. З формул (1.7) випливає, що $x_2=2x_0-x_1$, $y_2=2y_0-y_1$, де (x_o, y_o) – координати центра відрізка. Отже: $x_B=2\cdot(-7)-1=-15$, $y_B=2$, тобто: $B(-15,2)$.

Щоб поділити відрізок на чотири рівних частини, потрібно поділити пополам відрізки AO і OB.

У результаті отримаємо: $AO_1 = O_1O = OO_2 = O_2B$, де

$$O_1\left(\frac{1+(-2)}{2}, \frac{0+1}{2}\right); O_2\left(\frac{-7+(-15)}{2}, \frac{1+2}{2}\right),$$ тобто

$$O_1\left(-3, \ \frac{1}{2}\right); O_2\left(-11, \ \frac{3}{2}\right).$$

2 спосіб. Першою точкою ділення відрізок ділиться в відношенні 1:3, другою – пополам, третьою – 3:1.

Зважаючи на те, що точкою O_1 відрізок AB ділиться у відношенні $1:3$, то використовуючи формули (1.6) при $\lambda = \frac{1}{3}$, отримаємо:

$$x_{O_1} = \frac{1+\frac{1}{3}\cdot(-15)}{1+\frac{1}{3}} = (1-5):\frac{4}{3} = -4\cdot\frac{3}{4} = -3; \quad y_{O_1} = \frac{0+\frac{1}{3}\cdot 2}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}:\frac{4}{3} = \frac{1}{2}.$$

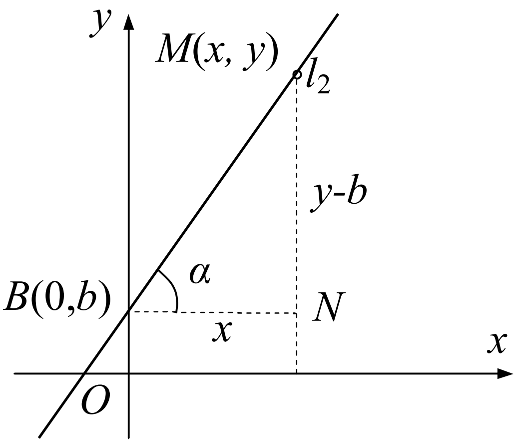


Рис. 1.8

Отже, $O_1\left(-3, \frac{1}{2}\right)$. Аналогічно $O_2\left(-11, \frac{3}{2}\right)$. Відповідь: $O_1\left(-3, \frac{1}{2}\right)$, $O(-7, 1)$, $O_2\left(-11, \frac{3}{2}\right)$.

3. *Рівнянням деякої лінії на площині* є рівняння $F(x, y) = 0$, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) всіх точок, що лежать на цій лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, яка не лежить на цій лінії.

3.1. Нехай задано деяку пряму (рис. 1.8), знайдемо її рівняння.

Точка M $(x,\ y)$ лежить на прямій тоді і тільки тоді, коли виконується умова: $\frac{NM}{BN} = \mathrm{tg}\alpha$. Позначимо $\mathrm{tg}\,\alpha = k$ і назвемо цю величину *кутовим коефіцієнтом* прямої лінії. Тоді враховуючи, що $NM = y - b$, $BN = x$, маємо: $\frac{y-b}{x} = k$. А звідси:

$$y=kx+b \qquad (1.9)$$

– рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Нехай деяка точка $M_1(x_1,\ y_1)$ належить заданій прямій, тоді повинна виконуватись рівність: $y_1 = kx_1 + b$. Знайшовши з цього рівняння величину b $(b = y_1 - kx_1)$ і підставивши в рівняння прямої (1.9), отримаємо: $y = kx + y_1 - kx_1$. Звідси:

$$y - y_1 = k\,(x - x_1) \qquad (1.10)$$

– рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, *що проходить через задану точку* $M_1(x_1,\ y_1)$.

Нехай точка $M_2(x_2,\ y_2)$ теж належить заданій прямій. Тоді маємо: $y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$. Отже:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \mathrm{tg}\alpha\,. \qquad (1.11)$$

Знайдене значення k з останнього співвідношення підставимо в рівняння прямої (1.10) і отримаємо:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (1.12)$$

Отримане співвідношення називають *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*.

Рівняння прямої, записаної в будь-якому вигляді (1.9), (1.10), (1.12) в прямокутній системі координат Oxy, задається рівнянням першого степеня відносно x і y і його можна записати в загальному вигляді:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1.13)$$

– загальне рівняння прямої лінії.

Коефіцієнти A, B рівняння (1.13) є координатами ***вектора нормалі*** $\mathbf{n} = (A, B)$ прямої, заданої даним рівнянням, причому A і B одночасно не рівні нулю, тобто $A^2 + B^2 > 0$, коефіцієнт C – вільний член. Числові величини $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ рівняння (1.12) рівні відповідно m, n і є координатами ***напрямного*** вектора $\mathbf{s} = (m, n)$ прямої, заданої даним рівнянням. З того, що скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю, тобто $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = A \cdot m + B \cdot n = 0$, випливає, що $m = \pm B$ і відповідно $n = \pm A$, тобто $\mathbf{s} = (B, -A)$, або $\mathbf{s} = (-B, A)$. Детальніше це висвітлено в четвертому розділі посібника.

Рівняння (1.13) при довільних A, B, C ($A^2 + B^2 > 0$) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy.

Точка $M_1(x_1, y_1)$ лежить на прямій, заданій рівнянням (1.13), тоді і тільки тоді, коли $C = -Ax_1 - By_1$.

Тому:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \qquad (1.13а)$$

– рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ *і має вектор нормалі* $\mathbf{n} = (A, B)$.

Якщо точка $M_2(x_2, y_2) \neq M_1(x_1, y_1)$ також лежить на прямій заданій рівнянням (1.13а), то це буде тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0 \qquad (1.13б)$$

Отже, вектор $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ перпендикулярний до вектора нормалі $\mathbf{n} = (A, B)$ і паралельний напрямному вектору прямої $\mathbf{s} = (m, n) = (B, -A)$ (рис. 1.9).

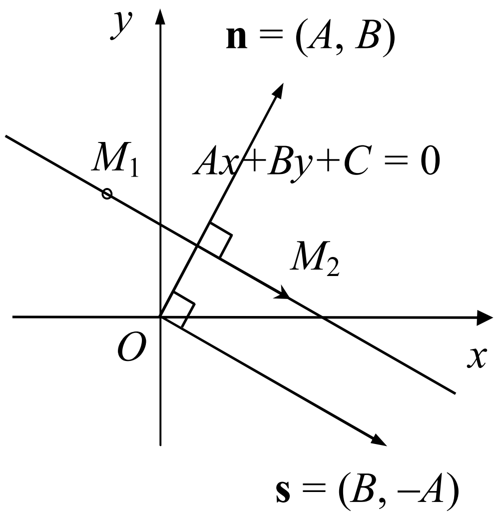


Рис. 1.9

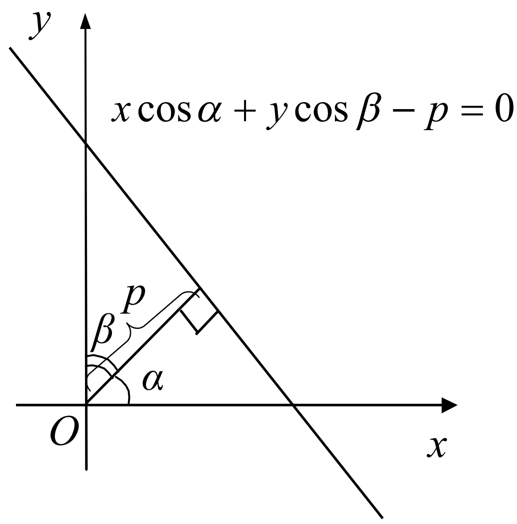


Рис. 1.10

Якщо вектор $\mathbf{M}_1\mathbf{M} = (x - x_1, y - y_1)$ паралельний вектору $\mathbf{s} = (m, n)$, то:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} \qquad (1.13в)$$

– *рівняння прямої, що проходить через точку* $M_1(x_1, y_1)$ *і має напрямний вектор* $\mathbf{s} = (m, n)$. Його ще називають *канонічним рівнянням прямої.*

Помноживши рівняння (1.13) на нормуючий множник $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак якого вибирають протилежним до знака *C*, і позначивши $\cos\alpha = \pm\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin\alpha = \pm\dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\beta$, $-p = \pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, одержимо:

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, або $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ (1.13г)

– *нормальне рівняння прямої*, де *p* – відстань від початку координат до прямої; α і β – кути, які утворює відповідно з осями *Ox* та *Oy* нормаль до прямої (рис. 1.10).

Приклад.

Відомо, що пряма *l* проходить через точку $M_1(2, 1)$ і має напрямний вектор $\mathbf{s} = (-1, 3)$. Записати канонічне і загальне рівняння прямої *l*, а також знайти координати її вектора нормалі.

Розв'язок. З допомогою рівняння (1.13в), отримаємо: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{3}$ – канонічне рівняння прямої *l*.

Здійснивши рівносильні перетворення над останнім рівнянням, отримаємо: $3x + y - 5 = 0$ – загальне рівняння прямої *l*.

Отже, координати вектора нормалі прямої *l* такі: $\mathbf{n} = (3, 1)$.

Відповідь: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{3}$, $3x + y - 5 = 0$, $\mathbf{n} = (3, 1)$.

Приклад.

Відомо, що пряма l проходить через точку $M_1(3,-4)$ і має вектор нормалі $\mathbf{n}=(2,-5)$. Записати загальне і канонічне рівняння прямої l, а також знайти координати точок перетину прямої l з осями координат.

Розв'язок. З допомогою рівняння (1.13а), отримаємо: $2(x-3)-5(y+4)=0$.

Здійснивши рівносильні перетворення над останнім рівнянням, отримаємо: $2x-5y-26=0$ – загальне рівняння прямої l. Напрямний вектор прямої l: $\mathbf{s}=(-5,-2)$, отже, згідно з рівнянням (1.13в) отримаємо: $\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y+4}{-2}$ – канонічне рівняння прямої l.

Якщо $y=0$, то $x=13$. Якщо $x=0$, то $y=-\dfrac{26}{5}=-5\dfrac{1}{5}$. Тобто точки $(13,0)$ і $(0,-5\dfrac{1}{5})$ – точки перетину прямої l з осями Ox і Oy відповідно.

Відповідь: $2x-5y-26=0$, $\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y+4}{-2}$, $(13,0)$ і $(0,-5\dfrac{1}{5})$.

Приклад.

Які рівняння сторін трикутника ABC і які координати його вершин, якщо середини сторін трикутника лежать в точках: $P(2, 1)$, $Q(3, 7)$, $R(4, -1)$.

Розв'язок.

1-ий спосіб. Скориставшись властивістю середньої лінії трикутника, складемо рівняння кожної зі сторін трикутника ABC як прямої, що проходить через одну з даних точок сторони (наприклад

P) паралельно до відповідної середньої лінії (*QR*), утвореної двома іншими точками, тобто як прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору.

Рівняння сторони трикутника, що проходить через точку *P*(2, 1), отримаємо, підставивши в рівняння (1.13в) координати цієї точки і вектора $\mathbf{QR} = (1, -8)$: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-8}$, або $8x + y - 17 = 0$.

Підставивши в рівняння (1.13в) координати точки *Q*(3, 7) і вектора $\mathbf{PR} = (2, -2)$, отримаємо рівняння другої сторони трикутника: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{-2}$, або $x + y - 10 = 0$.

Підставивши в рівняння (1.13в) координати точки *R*(4, –1) і вектора $\mathbf{PQ} = (1, 6)$, отримаємо рівняння третьої сторони трикутника: $\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{6}$, або $6x - y - 25 = 0$.

Координати вершин трикутника *ABC* є розв'язками систем рівнянь всіх пар сторін (*A* – *AB* і *AC*, *B* – *AB* і *BC*, *C* – *AC* і *BC*), бо кожна вершина трикутника *ABC* належить двом сторонам цього трикутника. $\begin{cases} 8x + y - 17 = 0 \\ x + y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} 8x + y - 17 = 0 \\ 6x - y - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -7 \end{cases}$;

$\begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ 6x - y - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$. Отже, три вершини трикутника лежать відповідно в точках (1, 9), (3, –7) і (5, 5).

2-ий спосіб. За координатами середини сторін трикутника, використовуючи формули (1.7), можна визначити координати його вершин і скориставшись рівнянням (1.12), записати рівняння його сторін. Нехай вершини сторін трикутника лежать в точках: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. За умовою $P(2, 1)$, $Q(3, 7)$, $R(4, -1)$.

Отже, використаємо формули (1.7): $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2$, $\frac{x_1 + x_3}{2} = 3$, $\frac{x_2 + x_3}{2} = 4$. Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

$\frac{y_1 + y_2}{2} = 1$, $\frac{y_1 + y_3}{2} = 7$, $\frac{y_2 + y_3}{2} = -1$. Звідси $y_1 = 9$, $y_2 = -7$, $y_3 = 5$.

Тобто три вершини трикутника лежать відповідно в точках (1, 9), (3, –7) і (5, 5).

Тепер, підставивши координати точок в рівняння (1.12), отримаємо: $\frac{y-9}{-7-9} = \frac{x-1}{3-1}$.Звідси $8x + y - 17 = 0$ – рівняння першої сторони. $\frac{y-9}{5-9} = \frac{x-1}{5-1}$.Звідси $x + y - 10 = 0$ – рівняння другої сторони. $\frac{y+7}{5+7} = \frac{x-3}{5-3}$. Звідси $6x - y - 25 = 0$ – рівняння третьої сторони.

Відповідь: $8x + y - 17 = 0$,

$x + y - 10 = 0$,

$6x - y - 25 = 0$, (1, 9),

(3, –7) і (5, 5).

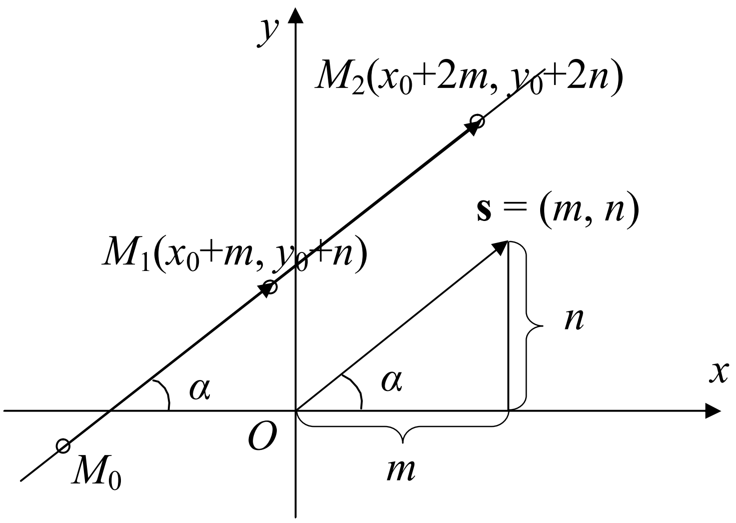


Рис. 1.11

З рівняння (1.13в) можна отримати:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt \end{aligned} \qquad (1.13д)$$

– *параметричні рівняння прямої* (рис.1.11).

Дослідимо рівняння (1.13) (рис. 1.12):

1. $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, тоді $Ax + By = 0$ і останнє визначає пряму, що проходить через початок системи координат, бо координати точки $O\,(0, 0)$ задовольняють рівняння, тобто точка O лежить на цій прямій.

2. $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, тоді $Ax + C = 0$, або $x = -C/A = a$, де $|a|$ – величина відрізка, що пряма відтинає на осі Ox, а сама вона розташована паралельно осі Oy. Якщо $C = 0$, то $x = 0$ задає рівняння осі Oy.

3. $A = O$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ тоді $By + C = 0$, або $y = -C/B = b$, де $|b|$ – величина відрізка, що відтинає пряма на осі Oy, а сама вона паралельна осі Ox. При $C = 0$ маємо $y = 0$ – рівняння осі Ox.

Поділимо рівняння (1.13) на вільний член і помножимо на (-1), отримаємо рівносильне рівняння:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

Отже:

$$\frac{x}{a_o} + \frac{y}{b_o} = 1 \qquad (1.14)$$

– *рівняння прямої у відрізках на осях*.

Тут $a_o = -\dfrac{C}{A}$, $b_o = -\dfrac{C}{B}$ – це точки на осях, що є кінцями відрізків, які

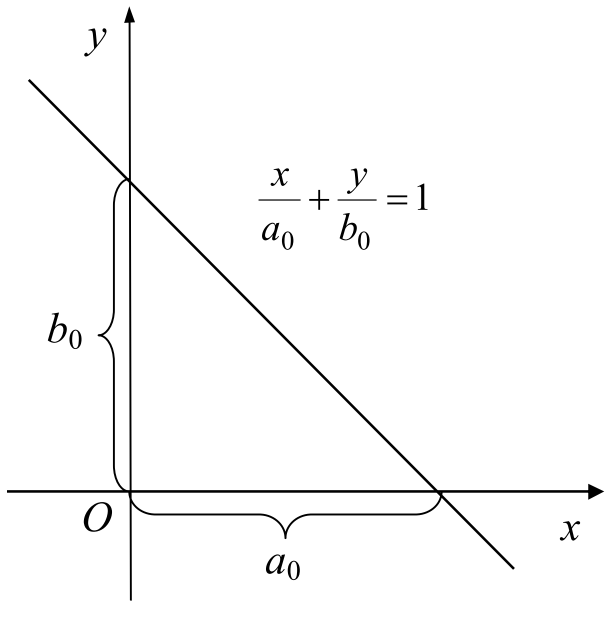


Рис. 1.13

відтинає пряма на осях координат Ox і Oy відповідно (рис. 1.13).

Ще по-іншому вивести рівняння (1.14) можна так. Нехай пряма проходить через точку $A(a_0, 0)$ на осі Ox і через точку $B(0, b_0)$ на осі Oy. Використавши рівняння (1.12), отримаємо: $\frac{y-0}{b_0-0} = \frac{x-a_0}{0-a_0}$. Звідси одержимо: $xb_0 + ya_0 = a_0 b_0$. Поділивши на $a_0 b_0$, отримаємо: $\frac{x}{a_o} + \frac{y}{b_o} = 1$.

Приклад.

1). Які з точок A(-1, 3), B(7, 7) і C(4, 0) лежать на прямій l: $y = x - 4$. 2). Яке рівняння даної прямої l а) в відрізках на осях, б) в загальному вигляді.

Розв'язок. 1). Підставляючи в рівняння прямої l координати точки A(-1, 3), потім B(7, 7) і пізніше C(4, 0), переконуємося, що дане рівняння задовольняють лише координати точки C, бо 0 = 4 – 4, 0 = 0 – істинна числова рівність. Отже, на прямій лежить точка C, а точки A і B не лежать. Відповідь: $C \in l$, A і $B \notin l$.

2а). Щоб записати рівняння прямої l у відрізках на осях, тобто у вигляді (1.14), поділимо його почленно на вільний член зі знаком мінус і отримаємо:

$\frac{x}{4} + \frac{y}{-4} = 1$ – рівняння прямої l у відрізках на осях.

2б). У загальному вигляді (1.13) рівняння прямої l запишеться: $x - y - 4 = 0$. Відповідь: 2а). $\frac{x}{4} + \frac{y}{-4} = 1$. 2б). $x - y - 4 = 0$.

3.2. Розглянемо дві прямі:

$$l_1:\ y = k_1x + b_1 \quad \text{і} \quad l_2:\ y = k_2x + b_2.$$

Кутом між прямими l_1 і l_2 називається такий найменший кут φ, при повороті на який, відносно точки перетину прямих, проти бігу годинникової стрілки, першої прямої до другої відбувається їх збігання.

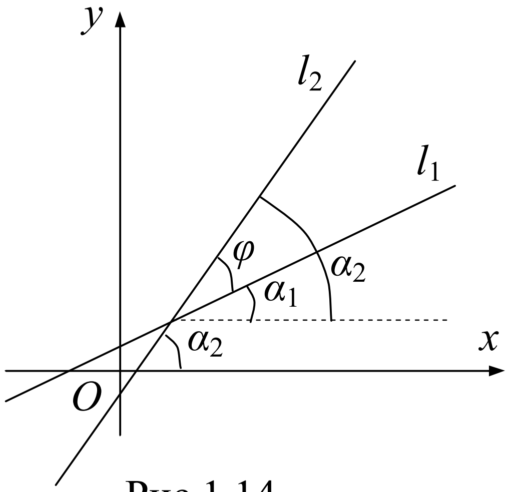


Рис.1.14

Зауважимо, що кут між l_1 і l_2 не дорівнює куту між l_2 і l_1. Пригадуючи, що $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = k_1$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = k_2$ і беручи до уваги очевидне співвідношення між кутами $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис. 1.14) маємо:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \mathrm{tg}\,\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha_2 \mathrm{tg}\,\alpha_1}.$$

Остаточно:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \qquad (1.15)$$

– *кут між прямими* l_1 і l_2 з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 відповідно.

Якщо кут φ – це кут між l_1 і l_2, то кут між l_2 і l_1 дорівнюватиме $(\pi - \varphi)$. З формули (1.15) легко одержати умови *паралельності і перпендикулярності* двох прямих.

Коли пряма l_1 паралельна прямій l_2, кут φ між ними дорівнює нулю – маємо: $\mathrm{tg}\,\varphi = 0 \Rightarrow$

$$k_2 = k_1 \qquad (1.16)$$

– умова *паралельності* двох прямих.

По-іншому умову паралельності можна вивести з таких міркувань. Якщо прямі паралельні, то вони мають однакові кути нахилу, а, отже, і однакові тангенси цих кутів, тобто однакові кутові коефіцієнти.

Коли $l_1 \perp l_2$, кут φ між ними дорівнює π/2 – маємо:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}(\text{p}/2 + \alpha_1) = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = -1/\operatorname{tg}\alpha_1 \Rightarrow$$

$$k_2 = -1/k_1 \qquad (1.17)$$

– умова *перпендикулярності* двох прямих.

Приклад.

Дано вершини трикутника *A*(3, 5), *B*(-4, -2) і *C*(-4, 8). 1). Яке рівняння а) сторони *AC*; б) медіани *CM*; в) бісектриси *BK*; г) висоти *AN* і висоти *CD*? 2). Які координати точки *D*? 3). Які величини кутів *B* і *A*? 4). Зробити рисунок.

Розв'язок. 1а). Рівняння сторони *AC* складаємо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки *A* і *C* за рівнянням (1.12): $\frac{y-5}{8-5} = \frac{x-3}{-4-3} \Rightarrow \frac{y-5}{3} = \frac{x-3}{-7}$ – рівняння сторони *AC*.

1б). Знайдемо координати точки *M* як середини відрізка *AB* за формулами (1.7): $x_M = \frac{3+(-4)}{2} = -0{,}5$; $y_M = \frac{5+(-2)}{2} = 1{,}5$. Отже точка $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Отже: $\frac{y-(-4)}{-\frac{1}{2}-(-4)} = \frac{x-8}{\frac{3}{2}-8} \Rightarrow \frac{y+4}{\frac{7}{2}} = \frac{x-8}{-\frac{13}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \frac{2}{7}(y+4)+\frac{2}{13}(x-8)=0\ \Big|\cdot\frac{7\cdot 13}{2}\Rightarrow 13y+52+7x-56=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad 7x+13y-4=0$ – рівняння медіани *СМ*.

1в). Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Отже, щоб знайти координати точки *К*, треба знайти відношення $\lambda=\frac{AK}{KC}=\frac{BA}{BC}=\frac{\sqrt{(-4-3)^2+(-2-5)^2}}{\sqrt{(-4-(-4)^2+(8-(-2))^2}}=\frac{\sqrt{98}}{10}$ і, використавши формули (1.6), отримаємо:

$$x_K=\frac{3+\frac{\sqrt{98}}{10}\cdot(-4)}{1+\frac{\sqrt{98}}{10}}=\frac{30-4\sqrt{98}}{10+\sqrt{98}}\approx-\frac{1}{2},$$

$$y_K=\frac{5+\frac{\sqrt{98}}{10}\cdot 8}{1+\frac{\sqrt{98}}{10}}=\frac{50+8\sqrt{98}}{10+\sqrt{98}}\approx 6\frac{1}{2}.$$

Для складання рівняння бісектриси *ВК* нам потрібні точні координати точки *К*. Рівняння прямої, що проходить через точки *В* і *К*, запишеться:

$$\frac{x-\frac{30-4\sqrt{98}}{10+\sqrt{98}}}{-4-\frac{30-4\sqrt{98}}{10+\sqrt{98}}}=\frac{y-\frac{50+8\sqrt{98}}{10+\sqrt{98}}}{-2-\frac{50+8\sqrt{98}}{10+\sqrt{98}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x(10+\sqrt{98})-30+4\sqrt{98}}{7}=\frac{y(10+\sqrt{98})-50-8\sqrt{98}}{7+\sqrt{98}}$$

– рівняння бісектриси *ВК*.

1г). Висота AN – це перпендикуляр проведений з точки A на сторону BC. Рівняння сторони BC: $x = –4$, бо абсциси точок B і C дорівнюють –4. Отже, BC паралельний Oy, тоді висота AN перпендикулярна Oy, а отже AN паралельний Ox, тобто ординати точок, що лежать на прямій AN, –одинакові. Ще враховуючи, що для точки A ордината дорівнює 5, отримаємо рівняння висоти AN: $y = 5$.

Висота CD – це перпендикуляр проведений з точки C на сторону AB. Рівняння сторони AB: $\frac{y-5}{-2-5} = \frac{x-3}{-4-3} \Rightarrow \frac{y-5}{-7} = \frac{x-3}{-7} \Rightarrow$ $\Rightarrow y = x + 2$. У цьому рівнянні кутовий коефіцієнт k_1=1. З умови перпендикулярності двох прямих (1.17) отримаємо: $k_2 = -\frac{1}{1} = -1$ – кутовий коефіцієнт висоти CD. Отже, нам відомо координати точки C і кутовий коефіцієнт. Тому за рівністю (1.10), отримаємо: $y - 8 = -1 \cdot (x - (-4)) \Rightarrow x + y - 4 = 0$ – рівняння висоти CD.

Відповідь: 1а) $\frac{y-5}{3} = \frac{x-3}{-7}$; 1б) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$;

1в) $\frac{x(10+\sqrt{98}) - 30 + 4\sqrt{98}}{7} = \frac{y(10+\sqrt{98}) - 50 - 8\sqrt{98}}{7+\sqrt{98}}$;

1г) $y = 5$, $x + y - 4 = 0$ відповідно.

2) Координати точки D знаходимо як розв’язок системи рівнянь прямих AB і CD, на перетині яких є ця точка:

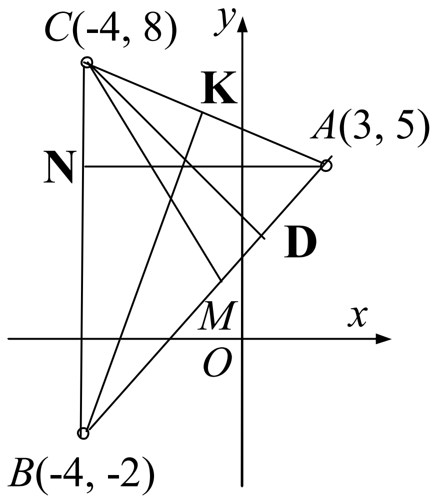
$\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 1, \; y = 3$. Отже D(1, 3). Відповідь: (1, 3).

3) Величина кута B дорівнює різниці кутів нахилу до осі Ox прямих BC і BA: $\angle B = \alpha_1 - \alpha_2$. $BC \perp Ox \Rightarrow \alpha_1 = 90^\circ$. З рівняння

прямої BA: $y = x + 2 \Rightarrow k = 1 = \mathrm{tg}\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$. Отже $\angle B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Величину кута A між прямими AC і AB знайдемо за формулою (1.15). Спочатку знайдемо кутові коефіцієнти прямих AC і AB.

$$AC: \quad \frac{y-5}{3} = \frac{x-3}{7} \Rightarrow -7y + 35 = 3x - 9 \Rightarrow y = \frac{3x-44}{-7} = -\frac{3}{7}x + \frac{44}{7} \Rightarrow$$



$\Rightarrow k_1' = \dfrac{-3}{7}$. AB: $y = x + 2 \Rightarrow k_2' = 1$. Отже

$$tg\angle A = \frac{1 - \left(-\frac{3}{7}\right)}{1 + 1 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{7}}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle A = \mathrm{arctg}\, 2\dfrac{1}{2} \approx 68^\circ$. Відповідь: 45°, 68° відповідно.

4). На прямокутній декартовій системі координат відкладаємо точки $A(3, 5)$, $B(-4, -2)$ і $C(-4, 8)$. За допомогою лінійки, трикутника і транспортира проводимо медіану CM, висоти AN і CD і бісектрису BK. Порівнянням координат точок M, N, K і D, отриманих розрахунково і з допомогою рисунка (рис. зліва), переконуємося в правильності розв'язків.

3.3. Нехай задано деяку точку $M(x_o, y_o)$ і пряму l: $Ax + By + C = 0$. Вважатимемо, що т. M не лежить на прямій, тобто, що:

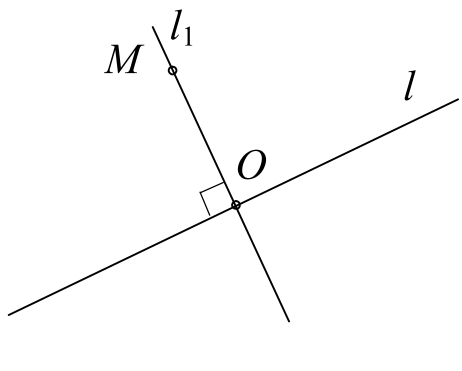


Рис. 1.15

$Ax_o + By_o + D \neq 0$.

Проведемо через точку M перпендикуляр l_1 до прямої l (рис. 1.15). Позначимо точку перетину перпендикуляра l_1 з прямою l через O. Віддаль від точки M до точки O і буде віддаллю від точки M до прямої l. Виведемо формулу для відстані від точки до прямої. Перепишемо рівняння прямої l в вигляді з кутовим коефіцієнтом.

$$l: \ y = \frac{-C - Ax}{B} = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \quad \text{Тут} \ k = -\frac{A}{B}.$$

Використовуючи умову перпендикулярності двох прямих (1.17): $k_1 = -1/k = B/A$ і умову належності точки $M_o(x_o, y_o)$ прямій l_1 з кутовим коефіцієнтом k_1 (1.10), отримаємо рівняння прямої l_1.

$$l_1: \quad y - y_o = \frac{B}{A}(x - x_o).$$

Координати точки O, як спільної точки прямих l_1 та l, знайдемо, розв'язавши систему рівнянь, складену з рівнянь прямих l_1 та l. Підставивши знайдені вирази для координат точки $O(x_1, y_1)$ у формулу для віддалі між точками M і O: $MO = \sqrt{(x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2}$, після алгебраїчних перетворень отримаємо: $MO = \dfrac{|Ax_o + By_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Отже, *віддаль від точки* $M(x_o, y_o)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$ можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (1.18)$$

Приклад.

Знайти віддаль від точки $M(3,\ 1)$ до прямої $l:\ y=-\frac{3}{4}x+2$ 1) не використовуючи формулу (1.18); 2) використовуючи формулу (1.18).

Розв'язок. 1). Переконаємось, що точка M не лежить на прямій: $1\neq-\frac{3}{4}\cdot3+2$. Отже не лежить.

Проведемо через точку M перпендикуляр l_1 до прямої l (Рис. 1.10). Віддаль від точки M до точки O, перетину прямих l_1 і l, тобто MO, і є шуканою віддалю.

Використовуючи умову перпендикулярності прямих (1.17) дістанемо $k=-\frac{1}{-3/4}=\frac{4}{3}$. Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку (1.10): $y-1=\frac{4}{3}(x-3)\ \Rightarrow\ y=\frac{4}{3}x-3$ – рівняння прямої l_1.

Розв'яжемо систему рівнянь прямих l_1 та l: $\begin{cases} y=\frac{4}{3}x-3 \\ y=-\frac{3}{4}x+2 \end{cases}$.

Віднімемо від I-ого рівняння II-ге і отримаємо: $\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\right)x=5\Rightarrow x=\frac{12}{5}=2{,}4$. $y=-\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{5}+2=-\frac{9}{5}+2=0{,}2$. Отже, точка $O\left(\frac{12}{5},\frac{1}{5}\right)$ – точка перетину прямих l і l_1.

Використавши формулу (1.5), отримаємо: $MO=\sqrt{(3-\frac{12}{5})^2+(1-\frac{1}{5})^2}=\sqrt{(3-2{,}4)^2+(1-0{,}2)^2}=1$. Відповідь: 1.

2). $M(3,\ 1)$, $l\colon y=-\dfrac{3}{4}x+2 \Rightarrow 4y+3x-8=0$.

Використавши формулу (1.18), отримаємо: $MO=\dfrac{|4\cdot 1+3\cdot 3-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}=1$. Відповідь: 1.

Приклад.

Знайти рівняння прямої, відрізок якої між осями координат ділиться точкою $M(2,1)$ навпіл.

Розв'язок. Рівняння прямої шукатимемо у вигляді (1.14): $\dfrac{x}{a_o}+\dfrac{y}{b_o}=1$, де a_o, b_o – відрізки, що відтинає пряма на осях координат Ox і Oy відповідно.

Отже, пряма перетинає осі Ox і Oy відповідно в точках: $A(a_o,0)$ і $B(0,b_o)$. Знайдемо a_o, b_o.

Оскільки точка M є середина відрізка BA, то згідно з формулами (1.7), отримаємо: $\dfrac{0+a_o}{2}=2$ і $\dfrac{b_o+0}{2}=-1$. Звідси $a_o=4$, $b_o=-2$.

Отже, рівняння прямої: $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}=1$. Відповідь: $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}=1$.

Приклад.

Знайти значення A, при яких пряма $Ax+2y-5=0$ відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини, рахуючи від початку координат.

Розв'язок. Здійснюючи рівносильні перетворення, запишемо рівняння у вигляді (1.14): $Ax+2y=5 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x}{5/A}+\dfrac{y}{5/2}=1$, де згідно з рівнянням (1.14), $\frac{5}{A}$ і $\frac{5}{2}$ – це точки на осях, що є точками перетину прямої з осями координат Ox і Oy відповідно. Довжини відрізків, які відтинає пряма на осях координат Ox і Oy, відповідно рівні $\left|\frac{5}{A}\right|$ і $\left|\frac{5}{2}\right|$, бо це є відстані від початку координат.

За умовою задачі відрізки повинні бути однакової довжини, отже, $\left|\frac{5}{A}\right| = \left|\frac{5}{2}\right|$. Звідси $A = \pm 2$. Відповідь: ± 2.

Приклад.

Дано точку $P(-8, 12)$ і пряму l, яка проходить через точки $A(2, -3), B(-5, 1)$. Знайти 1) проекцію точки P на пряму l; 2) координати точки Q, яка симетрична точці P відносно прямої l.

Розв'язок. Проекцією точки P на пряму l є точка O, яка є точкою перетину прямої, що проходить через точку P і перпендикулярна прямій l, з прямою l.

Запишемо згідно з рівнянням (1.12) рівняння прямої l: $\frac{y-(-3)}{1-(-3)} = \frac{x-2}{-5-2}$; $\frac{y+3}{4} = \frac{x-2}{-7}$; $-7(y+3) = 4(x-2)$; $4x + 7y + 13 = 0$ – рівняння прямої l. З цього рівняння отримаємо: $y = -\frac{4}{7}x - \frac{13}{7}$ $\Rightarrow$ $k_1 = -\frac{4}{7}$ – кутовий коефіцієнт прямої l.

З умови перпендикулярності (1.17) отримаємо кутовий коефіцієнт перпендикуляра: $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{(-4/7)} = \frac{7}{4}$.

Підставивши кутовий коефіцієнт перпендикуляра і координати точки P в рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку, тобто в рівняння (1.10), отримаємо: $y-12=\frac{7}{4}\big(x-(-8)\big) \;\Rightarrow\; y-\frac{7}{4}x-26=0$ – рівняння перпендикуляра.

Шукаємо координати точки перетину перпендикуляра і прямої l, тобто точки O, яка і є проекцією точки P на пряму l. Координати точки O є розв'язком системи рівнянь перпендикуляра і прямої l, бо точка належить обидвом. Отже: $\begin{cases} 4x+7y+13=0 \\ -\frac{7}{4}x+y-26=0 \end{cases}$. Друге рівняння помножимо на 7 і від першого віднімемо друге. Отримаємо $4x+\frac{49}{4}x+13+26\cdot 7=0 \;\Rightarrow\; x=-12$. $y=\frac{7}{4}x+26=\frac{7}{4}(-12)+26=5$. Отже, $O(-12,5)$.

2). Точка Q є кінцем відрізка PQ з серединою в точці O. Використавши формули (1.7) зв'язку координат кінців і середини відрізка PQ, отримаємо: $\frac{-8+x}{2}=-12$ і $\frac{12+y}{2}=5$; $\Rightarrow$ $x=-24+8=-16$ і $y=10-12=-2$. Отже: $Q(-16,-2)$.

Відповідь: 1)$O(-12,5)$. 2)$Q(-16,-2)$.

Приклад.

Дві сторони паралелограма $ABCD$ лежать на прямих $l_1:\ 8x+3y+1=0$ і $l_2:\ 2x+y-1=0$, а одна з його діагоналей на прямій $d_1:\ 3x+2y+3=0$. Визначити координати вершин цього паралелограма.

Розв’язок. З непропорційності $\frac{8}{2} \neq \frac{3}{1}$ відповідних коефіцієнтів рівнянь двох прямих l_1 і l_2 випливає нерівність їх кутових коефіцієнтів, а отже, згідно з (1.16), – непаралельність сторін. Отже, ці дві сторони паралелограма мають спільну вершину A. Знайдемо її координати з системи рівнянь сторін:

$$\begin{cases} 8x+3y+1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}. \text{ Отже, } A(-2, 5).$$

Точка A не належить прямій d_1, бо не задовольняє рівняння прямої ($3\cdot(-2)+2\cdot 5+3 \neq 0$), а, отже, точки перетину прямої d_1 з прямими l_1 і l_2 будуть відповідно вершинами B і D. Знайдемо їх:

$$\begin{cases} 8x+3y+1=0 \\ 3x+2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}. \text{ Отже, } B(1, -3).$$

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 3x+2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-9 \end{cases}. \text{ Отже, } D(5, -9).$$

Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам. Координати точки O, як середини сторони DB, згідно з формулами (1.7), такі: $x_o = \frac{5+1}{2} = 3,\quad y_o = \frac{-9+(-3)}{2} = -6.$ Отже, $O(3, -6)$.

Ця ж точка O ділить навпіл діагональ AC. Знайдемо згідно з формулами (1.7), координати точки C: $\frac{-2+x}{2} = 3,\quad \frac{5+y}{2} = -6.$ Звідси $x = 6+2 = 8$, $y = -12-5 = -17$. Отже, точка $C(8, -17)$.

Відповідь: $A(-2, 5)$, $B(1, -3)$, $C(8, -17)$, $D(5, -9)$.

Приклад.

Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $C(5,-1)$ – вершина прямого кута, а $2x-3y+5=0$ – рівняння гіпотенузи.

Розв'язок. У рівнобедреному трикутнику висота, опущена на основу, є і бісектрисою. У даному випадку висота CH ділить прямий кут пополам, тобто утворює з катетами кути по 45°. Використавши формулу кута між прямими, зможемо записати рівняння катетів.

Отже, спочатку знайдемо кутовий коефіцієнт гіпотенузи:

$2x-3y+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$. Отже, $k_1=\frac{2}{3}$.

Застосувавши умову перпендикулярності прямих (1.17), знайдемо кутовий коефіцієнт висоти CH: $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2/3}=-\frac{3}{2}$.

Зважаючи що, кути між висотою і катетами відповідно рівні – 45° і 45°, то, використавши формулу (1.15), отримаємо:

$\text{tg}\,(-45^\circ)=\frac{k_3-(-3/2)}{1+(-3/2)k_3}$. Звідси $-1=\frac{k_3+3/2}{1-3k_3/2}$. Звідси

$k_3+\frac{3}{2}=\frac{3k_3}{2}-1$. Звідси $k_3=5$. $\text{tg}\,45^\circ=\frac{k_4-(-3/2)}{1+(-3/2)k_4}$. Звідси

$1=\frac{k_4+3/2}{1-3k_4/2}$. Звідси $k_4+\frac{3}{2}=1-\frac{3k_4}{2}$. Звідси $k_4=-\frac{1}{5}$.

Застосувавши рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку, тобто рівняння (1.10), отримаємо:

CA: $y+1=5(x-5) \;\Rightarrow\; 5x-y-26=0$ – рівняння катета CA.

Аналогічно, CB:

$y+1=-\frac{1}{5}(x-5)\,\Big|\cdot(-5) \;\Rightarrow\; -5y-5=x-5 \;\Rightarrow\; x+5y=0$ – рівняння катета CB. Відповідь: $5x-y-26=0$; $x+5y=0$.

3.4. Рівняння другого порядку виду:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+a_{10}x+a_{20}y+a_{00}=0,$$

де хоча б одне з чисел $a_{11}, a_{22}, \ a_{12}$ не дорівнює нулю, називаються рівняннями ліній другого порядку на площині.

Задавши коефіцієнти a_{ij} даним рівнянням можна описати будь-яку криву другого порядку. Кола, еліпси, гіперболи, параболи є кривими другого порядку (хоча існують і багато інших кривих другого порядку). Детально розглянемо рівняння кола (рис. 1.16).

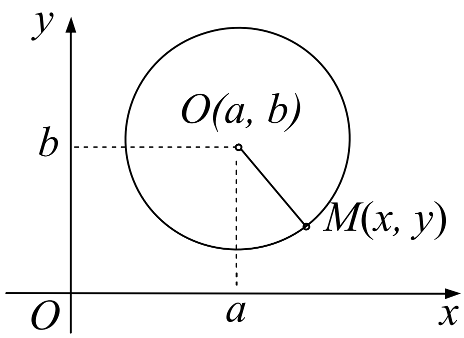


Рис. 1.16

Множина всіх точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від заданої точки, називається ***колом***. А саму цю точку називають центром кола. Нехай $M\,(x, y)$ – поточна точка кола, $O\,(a, b)$ – центр кола. З означення $OM = R$, або, використовуючи формулу відстані (1.5): $OM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрату, отримаємо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{1.19}$$

– *канонічне рівняння кола*.

Тут (a, b) – координати центра кола, R – його радіус.

Приклад.

Дано коло: $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$. Який його центр і радіус?

Розв’язок.

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-(-3))^2 = 4 = 2^2.$$

Порівнюючи це рівняння з канонічним рівнянням кола (1.19), отримаємо, що центр кола знаходиться в точці $O(4, -3)$, а радіус кола R=2. Відповідь: (4, –3), 2.

Функції. Перетворення графіків функцій

1. Постійні і змінні величини. Поняття числової функції однієї змінної та способи її задання.
2. Класифікація функцій однієї змінної. Лінійна функція. Пряма пропорційність. Обернена пропорційність. Пропорційні величини в початкових класах. Функція $y = x^2$.
3. Перетворення графіків $y = Af(ax+b)+B$, де A, B, a, b – сталі, $A \neq 0$ і $b \neq 0$ за графіком функції $y = f(x)$. Квадратична функція, її властивості, графік.

1. Математика вивчає явища, процеси, тіла з точки зору кількісних характеристик, абстрагуючись (abctractio від лат. озн. відокремлення) від всіх інших, які не мають суттєвого значення, характеристик. Число з'явилось генетично в процесі рахунку предметів і вимірювання величин (довжин, площ, об'ємів і ін.). На це вказував ще Арістотель (IV ст. до н.е.). Так, число "п'ять" є кількісною характеристикою множини пальців однієї руки. Число "нуль" є кількісною характеристикою порожньої множини – множини, що не містить жодного елемента. Величиною називають те, що можна виразити в певних одиницях та характеризувати числовим значенням. Поняття величини вперше з'явилося у філософській літературі і пов'язувалося з дійсними числами. Евклід дав перше визначення понять "довжина відрізка", "площа", "об'єм" та ін. у вигляді аксіом. Довжиною відрізка називається додатна величина, визначена для кожного відрізка так, що: рівні відрізки мають рівні довжини; якщо відрізок складається із скінченого числа відрізків, то його довжина дорівнює сумі довжин цих відрізків; існує відрізок, довжина якого дорівнює одиниці. Умови, які повинна задовольняти довжина відрізка, називаються властивостями або аксіомами довжини. Величини відображають властивості реального світу у процесі їх абстрагування, ідеалізування. Вимірювання величин допомагає людині практично пізнавати навколишній світ.

Однорідними величинами називають величини, які характеризують одну і ту саму якість об'єктів. Наприклад, однорідними величинами є всі довжини відрізків, усі площі фігур, усі маси тіл і т.д. Основна увага в початкових класах приділяється скалярній величині – величині, які повністю характеризується числовим значенням – числом (довжина, площа, вік, маса і т.д.). У початкових класах ознайомлюють лише з однією векторною (крім числа ще вказано і напрямок дії) величиною – швидкістю (аж в 4 класі при розв'язанні задач на рух і то термін "вектор" не вживається, а лише практично застосовуються вектори при зображенні швидкостей та напряму руху тіл). Якщо сума двох однорідних скалярних величин a і b дорівнює сумі їх чисел $a+b$, то такі однорідні скалярні величини називають адитивно-скалярними величинами. У початкових класах вивчають такі основні адитивно-скалярні величини, як довжина відрізків, маса тіл, ємність посудин, площа фігур, час, швидкість, шлях. Детально самі величини, їх властивості та вимірювання вивчатимуться в наступних розділах цього курсу математики.

При розв'язанні задач молодші школярі встановлюють також взаємозв’язки між величинами: ціна, кількість, вартість товару; продуктивність праці, час роботи, загальний випуск товарів; врожайність з одиниці площі, площа, загальний врожай; вантажність машини, кількість рейсів, загальна маса перевезеного вантажу; норма видачі кормів на одну тварину, кількість тварин, загальна маса кормів; швидкість, час, шлях; довжина прямокутника, ширина прямокутника, площа прямокутника тощо. Зв'язки між величинами, їх взаємозалежність виражають формулами (функціями) (або правилами в початкових класах), що допомагає не лише описувати їх, а й оцінювати кількісно. Наприклад, шлях який проїхав автомобіль рухаючись t год зі швидкістю v км/год знаходиться як добуток його швидкості (v) та часу (t) – $(S = v \cdot t)$.

Величина числове значення якої при розглядуваних умовах не змінюється, називається *постійною*. З виникненням таких кількісних характеристик, які можуть з часом змінюватись, виникло поняття змінної величини. Так *змінною величиною* називається величина, яка при розглядуваних умовах може приймати різні числові значення. Змінна величина має ряд характеристик: неперервність, дискретність, монотонність, обмеженість. Сталі величини, які в умовах даної задачі залишаються незмінними, але при зміні умови задачі можуть змінюватися, називають *параметрами*.

Сталі і змінні величини бувають *розмірні та безрозмірні*. *Розмірністю* величини називають ту одиницю, число яких вона вказує. Наприклад, розмірністю довжини є метр, при цьому величина вказує скільки метрів містить дана довжина. Кожна одиниця розмірності має своє загальноприйняте позначення.

Зрозумілим є те, що додавати і віднімати можна величини лише однорідні, бо інакше отримаємо, наприклад таку величину – 3 груші, 8 кг і 5 м. Тобто це є три різні за розмірністю величини і додавати або віднімати їх не можна. Однорідні величини можуть мати розмірність різного найменування, але завжди можна перейти до одного. Так швидкість світла і швидкість автомобіля – однорідні величини, та першу швидкість переважно позначають в м/с, а другу – км/год (хоча згідно міжнародної системи одиниць (SI) швидкість повинна позначатися в м/с, її часто для зручності подають в км/год). При додаванні однорідних величин їх потрібно перевести до одного найменування. Врахувавши, що 1 км = 1000 м, а 1 год = 3600 с, отримують 1 км/год = 1000 м / 3600 с = 10/36 м/с. Так швидкість автомобіля може дорівнювати 72 км/год = 72 000 м / 3600 с = 20 м/с. Зате, величини будь-якої розмірності можна множити та ділити в результаті чого отримувати величини іншої розмірності. Наприклад, 4 кг $\cdot$ 10 м/с^2 = 40 кг $\cdot$ м/с^2 = 40 Н – приблизна вага тіла, яке має масу 4 кг (10 м/с^2 – округлене значення прискорення земного тяжіння).

Ще для прикладу розглянемо таку задачу: трамвай рухається зі сталою швидкістю 25 км/год, а автомобіль у 2 рази швидше. Який шлях проїде трамвай, а який автомобіль за a годин, якщо: 1) $a = 1$; 2) $a = 3$; 3) $a = 5$? В задачі йде мова про такі величини, як швидкість руху трамвая (25 км/год – стала величина, розмірна величина), час руху трамвая (a год – параметр, розмірна величина), шлях, який проїде трамвай за відповідний час (25 км/год · a год = 25a км – змінна величина, розмірна величина) і величина кратного порівняння швидкостей автомобіля і трамвая (2 – безрозмірна величина), швидкість руху автомобіля (25 км/год · 2 = 50 км/год – стала величина, розмірна величина), час руху автомобіля (a год – параметр, розмірна величина), шлях, який проїде автомобіль за відповідний час (50 км/год · a год = 50a км – змінна величина, розмірна величина).

Безрозмірна величина – це величина, яка повністю характеризується лише своїм числовим значенням. В результаті ділення двох величин однакової розмірності отримують безрозмірну величину (наприклад, 50 км/год : 25 км/год = 2).

В курсі математики за початкові класи переважно йде справа з сталими величинами. Та вивчення таких тем як ознайомлення з буквенною символікою, числові рівності і нерівності, рівняння та нерівності із змінною, розв'язування простих задач способом складання рівнянь і задач з буквеними даними способом складання виразів передбачає оперування та зі змінними величинами.

В більшості випадків одні змінні величини певного явища приводять до зміни інших величин цього ж явища. Так зміна часу і прискорення (прискорення – це величина зміни швидкості за одиницю часу, а швидкість – це величина зміни шляху за одиницю часу) приводить до зміни швидкості і шляху. Тобто між такими величинами існує функціональна залежність. Величини, значення яких можна обирати довільно називають незалежними змінними, а величини, значення яких визначаються значеннями незалежних змінних називають залежними величинами (наприклад, якщо розглядати залежність пройденого шляху від часу, то час – незалежна змінна величина, а шлях – залежна, або якщо розглядати площу прямокутника сталої ширини в залежності від довжини, то довжина – незалежна змінна величина, а площа – залежна).

Розглянемо дві змінні величини x і y і введемо деякі позначення. Нехай x – незалежна змінна або аргумент; y – залежна змінна або функція; f – символ функціональної залежності, або закону відповідності; D – множина значень аргумента, тобто область визначення функції, $D \subseteq \mathbf{R}$; E – множина значень функції, $E \subseteq \mathbf{R}$. Якщо кожному числу $x \in D \subseteq \mathbf{R}$ за певним законом (правилом) поставлено у відповідність одне дійсне число $y \in E \subseteq \mathbf{R}$, то говорять, що на множині D визначено ***числову функцію***, або просто ***функцію*** і записують $y = f(x)$. Або інакше, змінна величина y називається числовою функцією змінної величини x, якщо вказано закон, за яким кожному значенню x, взятому з області можливих значень, відповідає одне певне дійсне значення y (якщо пригадати типи відповідностей, то функціональна відповідність або функція – це така відповідність, коли кожному елементу з множини відправлення відповідає не більше як один елемент, тобто характерною особливістю функціо-нальної відповідності є її однозначність і через це в графі такої відповідності від кожного елемента множини відправлення не напрямлено взагалі (не напрямлено взагалі це в випадку якщо цей елемент не входить до множини можливих значень незалежної змінної), або напрямлено лише одну стрілку. Кожен рядок матриці цієї функціональної відповідності містить не більше однієї одиниці).

Отже, щоб задати числову функцію (далі просто функцію), треба задати область визначення функції і закон (правило) відповідності.

Областю визначення (*D*) *функції* називають сукупність усіх тих значень аргумента *x*, для яких існують дійсні значення *y* (при яких функція має зміст).

Наприклад, областю визначення функції $y = 1/(4 - x^2)$ є всі дійсні числа, крім чисел $x_{1,2} = \pm 2$.

З іншого боку, *областю визначення* (*D*) *функції* є *область визначення* виразу з допомогою якого функція задана.

Областю значень (*E*) *функції* $y = f(x)$ називають сукупність усіх значень *y*, що відповідають аргументам *x* з області визначення цієї функції.

Наприклад, область значень функцій:

– $y = \sin x$, $y = \cos x$ така: $[-1, 1]$;

– допустимої швидкості автомобіля в міській зоні від часу така: [0, 60] (це якщо не брати до уваги можливості руху в зад якому відповідає від'ємна швидкість).

Оскільки функція набуває при різних аргументах різних значень, то функцію також можна віднести до змінної величини.

Існує декілька способів задання функції; аналітичний, таб-личний, графічний, усний та програмний. В математиці найбільш часто використовують перші три способи. Розглянемо їх.

Аналітичний спосіб. Тут функція задається однією або декількома рівностями, що зв'язують залежні та незалежні змінні, тобто існує математична формула (закон, правило, рівняння) – деяка кількість певних впорядкованих операцій над аргументом, які необхідні для того, щоб дістати відповідне цьому аргументу значення функції.

Якщо при цьому не зазначається область визначення функції, то це означає, що вона збігається з множиною тих значень аргументу, для кожного з яких за даною формулою можна знайти (обчислити) відповідне значення функції.

Наприклад: $3x - 2y = 6$; $y = 5x2 - 1$.

Якщо рівняння, що зв'язує аргумент x з функцією y не розв'язано відносно y, то змінну y називають неявною функцією x. Наприклад $7x - 10y = 6$.

При *табличному способі* функціональна залежність задається у вигляді таблиці, в якій для кожного можливого числового значення x вказано його відповідне числове значення y. Наприклад:

1	2	3	4	5
1	5	19	76	255

Графічний спосіб задання функції є основним надбанням методу координат. Цей спосіб задання функції є найбільш наглядний, бо функціональна залежність зображується лінією, яку називають графіком функції. Вихідною інформацією про функцію є її графік (лінія). При цьому для будь-якого x з області визначення D функції f легко знайти відповідне значення y цієї функції. Правилом в цьому випадку є взаємо-однозначна відповідність кожній точці графіка пари чисел – аргумента і значення функції.

Прикладом графічного способу задання функції може бути електрокардіограма, за якою медики аналізують роботу серця.

У математиці і її застосуваннях до графічного зображення функцій вдаються навіть у тих випадках, коли функція задана аналітичним чи табличним способам. Завжди, коли треба з'ясувати загальний характер поведінки функції, виявити її особливості на деяких підмножинах області визначення, графік нічим не можна замінити. Тому будь-який дослідник, маючи функцію, задану аналітичним чи табличним способом, як правило, виконує ескіз графіка і аналізує цю функцію.

Переважно не важко перейти від аналітичного або табличного способу задання функції до графічного. А от перехід від графічного або табличного способів до аналітичного потребує неабияких знань та навичок і в переважаючій більшості є лише наближеним. В даний час ця задача досить полегшена завдяки наявності спеціальних комп’ютерних програм, створених на основі методу найменших квадратів та інших, призначених для апроксимації експериментальних даних і задання виразу відповідного експериментальним даним.

2. Самих функцій є безліч (змінивши будь-що в самому заданні функції отримують іншу функцію). Функції можна *класифікувати* за будовою і за властивостями.

Функція $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$, називається *складною* функцією, або суперпозицією функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$ і позначається $y = F(u(x))$.

Наприклад, $y = 2\sin x$ – складна функція, вона буде суперпозицією двох функцій: $y = 2u$, $u = \sin x$.

Функція $x = f^{-1}(y)$ називається *оберненою* функцією до функції $y = f(x)$, коли вона кожному $y \in E$ ставить у відповідність число $x \in D$, таке, що $f(x) = y$.

Поняття оберненої функції в початкових класах з учнями не розглядається, але якщо розглянути в 3, 4 класах задачу на рух зі сталою швидкістю, наприклад, 5 км/год, то функція шляху від часу запишеться $s = 5t$, а функція часу від шляху буде оберненою до попередньої і матиме вигляд $t = s/5$.

Множина всіх значень аргумента, для яких можна обчислити значення функції, називається природною областю визначення функції. Область визначення може бути заданою і може залежати також від умови задачі. Наприклад, число y літрів видоєного молока від x корів (тут $x \in \mathbf{N}$ – натуральне число, $y \in \mathbf{R}$ – дійсне число).

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо для будь-якого $x \in D$ виконується умова $f(–x) = f(x)$, тобто при заміні x на $(-x)$ функція не змінюється.

Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо для будь-якого $x \in D$ виконується умова $f(–x) = –f(x)$, тобто при заміні x на $(-x)$ функція лише змінює свій знак на протилежний.

Функція буде *ні парною, ні непарною*, якщо для $x \in D$, $f(-x) \neq \pm f(x)$.

Відмітимо, що графіки парних функцій симетричні відносно осі ординат, а непарних функцій – симетричні відносно початку координат.

Наприклад, функції $y = x^2$, $y = 4$, $y = \cos x$ є парними функціями тому, що $y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x)$, $y = 4$ – стала і не залежить від аргумента, $\cos(-x) = \cos x$. Графік парної функції є симетричним відносно осі Oy. Функція $y = x$, $y = \sin x$, $y = x^3$ є непарною функцією тому, що $y(-x) = -x = -y(x)$, $\sin(-x) = -\sin x$, $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$. Графік непарної функції є симетричним відносно початку координат.

Функція $y = f(x)$ називається *періодичною*, якщо для будь-якого аргумента x з області визначення функції виконується умова $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$, де число T – період функції.

Наприклад, $y = \mathrm{tg}\, x$, та $y = \mathrm{ctg}\, x$ – періодичні функції з мінімальним періодом $T = \pi$ (періодичні всі тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ та їх обернені $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$, а також функції утворені на їх основі).

Функція $f(x)$, визначена на множині D, називається *обмеженою зверху* (*знизу*) *на цій множині,* якщо множина її значень обмежена зверху (знизу), тобто якщо існує таке $M \in \mathbf{R}$, що для будь-якого $x \in D$ виконується нерівність $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$).

Функція $f(x)$, що обмежена зверху і знизу на множині D, називається просто *обмеженою на цій множині.*

Зрозуміло, що функція $f(x)$ обмежена на множині D тоді і тільки тоді, коли існує таке $H \in \mathbf{R}$, що для будь-якого $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \le H$.

Функція $f(x)$, визначена на множині D, називається: а) *зростаючою,* б) *спадною,* в) *незростаючою;* г) *неспадною на цій множині*, якщо для будь-яких $x_1 \in D$ і $x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ правильна відповідно нерівність:

а) $f(x_1) < f(x_2)$, б) $f(x_1) > f(x_2)$, в) $f(x_1) \ge f(x_2)$, г) $f(x_1) \le f(x_2)$.

Зростаючі, спадні, незростаючі і неспадні функції на деякій множині називаються *монотонними на цій множині,* а зростаючі і спадні функції, крім того, називаються *строго монотонними.*

Наведемо перелік назв основних елементарних функцій, які вивчаються в курсі середньої школи:

– лінійна функція вигляду $y = kx + b$;
– пряма пропорційність вигляду $y = kx$;
– обернена пропорційність вигляду $y = 1/x$;
– функція $y = x^2$;
– квадратична функція вигляду $y = ax^2 + bx + c$;
– степенева функція вигляду $y = x^n$ де n – дійсне число;
– показникова функція вигляду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \ne 1$;
– експоненціальна функція $y = e^x$, де $e \approx 2{,}7182$;
– логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \ne 1$;
– натуральна логарифмічна функція $y = \ln x$;
– тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\ x$, $y = \mathrm{ctg}\ x$, $y = \sec x$, $y = \mathrm{cosec}\ x$;
– обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,

$y = \text{arctg}\, x$, $y = \text{arcctg}\, x$, $y = \text{arcsec}\, x$, $y = \text{arccosec}\, x$.

Самі ці функції та їх графіки розглядалися в старших класах середньої школи.

Ще є такі функції, в яких змінна величина y залежить від другої змінної величини u, яка в свою чергу є функцією від x. Кожну з таких функцій називають складеною функцією або функцією від функції (композицією функцій). Математично це можна записати так:

якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то $y = f[\varphi(x)]$.

Кажуть: y – складена функція x, u – проміжний аргумент, x – аргумент (незалежна змінна).

Наприклад: $y = (2x+3)^4$, тут $y = u^4, u = 2x+3$, або наприклад, $y = \sqrt{\cos x}$, тут $y = \sqrt{u}, u = \cos x$.

Для складеної функції важливим є те, щоб множина значень проміжного аргумента була підмножиною області визначення самої складеної функції. Так, наприклад, якщо $y = \sqrt{u}, u = -x^2 - 1$, то складена функція не визначена, так як всі значення проміжного аргумента $u = -x^2 - 1$ від'ємні, а функція $y = \sqrt{u}$ визначена лише для невід'ємних значень u.

(Вміння швидко розщепляти складену функцію на основні елементарні і виконувати математичний аналіз для висвітлення залежностей які фігурують в певній галузі науки, та встановлення нових залежностей є корисним для студентів спеціальностей *географічних, економічних, фізико-математичних, технічних,* і дана задача виходить за межі області математичного матеріалу для студентів спеціальності початкове навчання.)

Детальніше зупинимося на розгляді найпростіших із основних елементарних функцій, а саме: лінійній функції, прямій пропорційності, оберненій пропорційності, квадратичній функції.

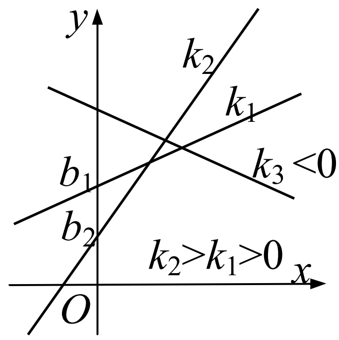


Рис. 2.1.

Лінійною функцією є функція виду $y = kx + b$, де k і b – деякі числа (рис. 2.1).

Якщо, зокрема, $k = 0$, то отримаємо функцію $y = b$, яку називають сталою.

Область визначення лінійної функції є множина **R** (вона має зміст при будь-якому дійсному значенні змінної, тобто $\forall x \in \mathbf{R}$). Лінійна функція є ні парна ні непарна, бо $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Графіком лінійної функції є пряма з кутовим коефіцієнтом k і ординатою b для аргумента рівного нулю.

Функція f називається зростаючою (спадною) на деякій області визначення, якщо для будь-яких x_1, x_2 з цієї області визначення, таких, що $x_2 > x_1$, виконується $f(x_2) > f(x_1)$ $\left(f(x_2) < f(x_1)\right)$.

Якщо $k > 0$, то лінійна функція зростаюча, а якщо $k < 0$, то лінійна функція спадна (рис. 2.1).

Доведення. Відомо, що $x_2 - x_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 > x_1$ і

$y_2 - y_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 > y_1, \quad y_2 - y_1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 < y_1.$

Крім того відомо, що добуток двох додатних величин є додатною величиною, а добуток двох величин протилежних знаків є від'ємною величиною.

Оскільки $y_2 - y_1 = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$, то з того що $x_2 > x_1$, слідує $y_2 > y_1$, якщо $k > 0$, і з того що $x_2 > x_1$, слідує $y_2 < y_1$, якщо $k < 0$.

Лінійну функцію в початкових класах спеціально не розглядають, але до лінійної функції можна прийти при розв'язуванні в початкових класах алгебраїчним способом такого типу задач: Мотоцикліст, який виїхав з пункту A, знаходиться в 20 км від цього пункту. На якій відстані S (км) від пункту A він буде знаходитись через t годин, якщо його швидкість 50 км/год? При розв'язуванні задачі одержуємо, що $S = 50t + 20$, де $t > 0$ – час руху, а шукана відстань S – лінійна функція від t. Назви функцій, залежностей між величинами вчителі не вводять, лише готують школярів до їх подальшого вивчення.

Ще в початкових, а саме в 3, 4 класах приділяється значна увага розв'язанню задач з пропорційними величинами (ціна, кількість, вартість; швидкість, час, шлях та іншими). Подібні задачі сприяють пропедевтичному ознайомленню учнів з поняттям прямопропорційної та оберненопропорційної залежностей між величинами, які вивчаються в середніх класах, з поняттям функції – одним із найголовніших понять у математиці старших класів. Розглянемо детальніше функцію прямої та оберненої пропорційності.

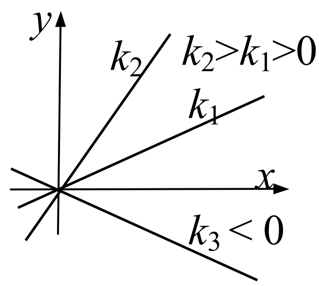


Рис. 2.2.

Прямою пропорційністю (рис. 2.2) називають функцію виду $y = kx$, де k – деяке число, що не дорівнює нулю. Число k ще називають коефіцієнтом пропорційності. Пряма пропорційність – це окремий випадок лінійної функції при $k \neq 0, b = 0$. Тому для прямої пропорційності справедливі деякі твердження що і для лінійної функції: область визначення є множина **R**; при $k > 0$, – зростаюча, а при $k < 0$, – спадна; графіком прямої пропорційності є пряма з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює коефіцієнту пропорційності k і ординатою, що дорівнює нулю для аргумента рівного нулю; пряма пропорційність є непарною функцією, бо $f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x)$; для прямої пропорційності відношення двох довільних дійсних значень аргумента дорівнює відношенню відповідних значень функції: $x_1 / x_2 = kx_1 / kx_2 = y_1 / y_2$. Для прямої пропорційності з додатнім коефіцієнтом із збільшенням (зменшенням) значення аргументу в кілька разів відбувається збільшення (зменшення) значення функції у стільки ж разів.

Отже дві величини, які залежать одна від одної так, що при збільшенні (зменшенні) однієї з них в кілька разів інша збільшується (зменшується) в стільки ж разів, називаються **прямопропорційними**.

Пряма пропорційність в початкових класах спеціально не вивчається, але при розв'язуванні текстових задач учні часто зустрічаються з прямопропорційними величинами. Основною з найпростіших таких задач є задача наступного типу.

Метр полотна коштує 10 грн. Скільки коштує 2 м полотна? 3 м?

Оберненою пропорційністю називається функція виду $y = \dfrac{k}{x}$, де

k – деяке число, що не дорівнює нулю. Число k ще називають коефіцієнтом оберненої пропорційності (рис. 2.3). Областю визначення оберненої пропорційності є множина $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ (бо на нуль ділити не можна).

Доведемо таку властивість оберненої пропорційності.

Обернена пропорційність при $k > 0$, – спадна на області визначення, а при $k < 0$, – зростаюча на області визначення.

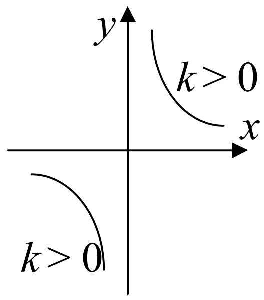
Доведення.

Так як область визначення функції складається із двох проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; \infty)$, то слід розглядати її поведінку на кожному із них окремо. При додатній $(x_2 > x_1)$ зміні аргумента на проміжку $(-\infty; 0)$ матимемо $x_1 < x_2 < 0$, а на проміжку $(0; \infty)$ матимемо $0 < x_1 < x_2$, тобто на кожному з проміжків визначення обидва аргументи мають однакові знаки. Розглянемо як змінюється функція:

$$y_2 - y_1 = k / x_2 - k / x_1 = k\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = k\,\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}.$$

Оскільки величина $x_1 - x_2 < 0$, а величина $x_1 x_2 > 0$, бо x_1 і x_2 мають однакові знаки, то беручи до уваги те що величина $\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} < 0$, матимемо $y_2 < y_1$, якщо $k > 0$ і функція спадна, та $y_2 > y_1$, якщо $k < 0$ і функція зростаюча.

Обернена пропорційність є непарна, бо



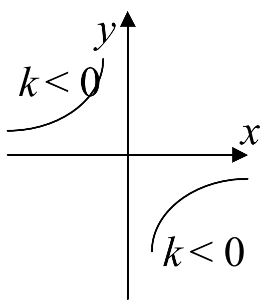


Рис. 2.3

$f(-x) = \dfrac{k}{-x} = -\dfrac{k}{x} = -f(x)$. Графік оберненої пропорційності називають гіперболою. Він складається з двох віток (рис. 2.3).

Ще для оберненої пропорційності властиве наступне твердження: відношення двох довільних значень аргумента з області визначення дорівнює оберненому відношенню відповідних значень функції, тобто $x_1 / x_2 = y_2 / y_1$.

Доведення. $x_1 / x_2 = \dfrac{kx_1}{kx_2} = \dfrac{k}{x_2} \cdot \dfrac{x_1}{k} = \dfrac{k}{x_2} : \dfrac{k}{x_1} = y_2 / y_1$.

Як наслідок з цієї властивості випливає наступна: для оберненої пропорційності з додатнім коефіцієнтом із збільшенням (зменшенням) значення аргументу в кілька разів відбувається зменшення (збільшення) значення функції у стільки ж разів.

Отже, дві величини, які залежать одна від одної так, що при збільшенні (зменшенні) однієї з них в кілька разів інша зменшується (збільшується) в стільки ж разів, називаються **оберненопропорційними**.

З оберненою пропорційністю учні в початкових класах лише зустрічаються при розв’язуванні завдань і текстових задач. Однією з таких задач є задача наступного типу.

Турист-спортсмен повинен пройти 24 км за декілька годин безперервного ходу. Скільки кілометрів проходитиме турист за 1 год, якщо на весь шлях він витратить 3 год? 4 год? 6 год? 8 год?

Отож, в початкових класах розв’язують задачі в яких містяться прямо та обернено пропорційні величини і цим самим готують школярів до їх подальшого вивчення в середній ланці школи. При таблиця 1

1	2	3
I множник	II множник	добуток
метраж одиниці вимірювання	кількість одиниць вимірювання	загальний метраж
ціна	кількість	вартість
ширина	довжина	площа прямокутника
швидкість	час	шлях
довжина кроку	кількість кроків	шлях
норма видачі кормів на одну тварину	кількість тварин	загальна маса кормів
вантажність машини	кількість рейсів	загальна маса перевезеного вантажу
продуктивність праці	час роботи	загальний випуск товарів
врожайність з одиниці площі	площа	загальний врожай
кількість сторінок прочитаних за 1 день	кількість днів	загальна кількість прочитаних сторінок
середній час прочитання однієї сторінки	кількість сторінок	весь час
метраж проводу в 1 мотку	кількість мотків	загальна кількість метрів проводу
метраж тканини на 1 костюм	кількість костюмів	загальна кількість метрів тканини

цьому кожна із задач містить три величини, що можуть бути взяті з будь-якого рядка таблиці 1 або будь-які інші три величини, добуток двох з яких дає третю величину.

Якщо розглянути задачу з величинами четвертого рядка таблиці 1, тобто задачу на ціну, кількість і вартість, то зафіксувавши кількість, отримаємо задачу на прямо пропорційні величини – ціну і вартість, зафіксувавши ціну, отримаємо задачу на прямо пропорційні величини – кількість і вартість, а зафіксувавши вартість, отримаємо задачу на обернено пропорційні величини – ціну і кількість. Аналогічні результати будуть якщо складати задачі з величинами будь-якого рядка таблиці 1. Тобто, якщо в умові задачі фіксуємо величину що відповідає першому або другому стовпцю таблиці 1, то отримуємо задачу на прямо пропорційні величини, а якщо в умові задачі фіксуємо величину що відповідає третьому стовпцю таблиці 1, то отримуємо задачу на обернено пропорційні величини.

Скільки сторінок книжки прочитує дівчинка за 2 дні, якщо вона щодня прочитує одну і ту саму кількість сторінок і за 4 дні прочитує 80 сторінок?

При складанні та розв'язуванні такого типу задач слід пам'ятати, що якщо не змінюється значення кількості сторінок прочитаних за 1 день (швидкості читання), то кількість днів (час) і загальна кількість прочитаних сторінок пов'язані прямо пропорційною залежністю, тому що при збільшенні (зменшенні) кількості днів читання в кілька разів, загальна кількість прочитаних сторінок збільшиться (зменшиться) в стільки ж разів.

Розв'язок.

4 дні ↔ 80 сторінок

2 дні ↔ ? сторінок

1). 4 : 2 = 2 (рази) – в скільки разів зменшилася кількість днів читання;

2). 80 : 2 = 40 (ст.).

Відповідь. 40 сторінок книжки прочитує дівчинка за 2 дні.

Задачею з прямо пропорційними величинами буде і така задача.

Скільки сторінок книжки прочитує дівчинка за 3 дні, якщо вона щодня прочитує одну і ту саму кількість сторінок і за 4 дні прочитує 80 сторінок?

Розв'язок. Оскільки число 4 не ділиться на 3, то цю задачу не зможемо розв'язати так як попередню, а розв'яжемо звичайно зведенням до одиниці.

4 дні ↔ 80 сторінок

3 дні ↔ ? сторінок

1). 80 : 4 = 20 (ст.) – прочитала дівчинка за 1 день;

2). 20 · 3 = 60 (ст.).

Відповідь. 60 сторінок книжки прочитує дівчинка за 3 дні.

Читаючи 20 сторінок у день дівчинка може прочитати за тиждень 140 сторінок книжки. Скільки сторінок книжки прочитає дівчинка за тиждень, якщо вона буде читати 10 сторінок у день?

Розв'язок. Це також задача з прямо пропорційними величинами, але в ній зафіксованою величиною є не кількість сторінок які читає дівчинка за день, а час читання (в цій задачі час читання – тиждень).

20 ст. за 1 день ↔ 140 сторінок

10 ст. за 1 день ↔ ? сторінок

1). 20 : 10 = 2 (рази) – в скільки разів зменшилася кількість прочитаних за 1 день сторінок;

2). 140 : 2 = 70 (ст.).

Відповідь. 70 сторінок книжки прочитає дівчинка.

Якщо не змінюється значення загальної кількості прочитаних сторінок, то кількість сторінок прочитаних за 1 день (швидкість читання) і кількість днів (час) пов'язані обернено пропорційною залежністю, тому що при збільшенні (зменшенні) швидкості читання в кілька разів, час, за який людина прочитає ту саму кількість сторінок зменшиться (збільшиться) в стільки ж разів.

Розглянемо задачу.

Читаючи 20 сторінок у день дівчинка може прочитати цілу книжку за 12 днів. За скільки днів дівчинка прочитає цілу книжку якщо вона буде читати 10 сторінок у день?

Розв'язок. Це вже задача з обернено пропорційними величинами, бо в ній зафіксованою величиною є загальна кількість прочитаних сторінок за час читання, а час читання і швидкість читання (кількість сторінок прочитаних за 1 день) є обернено пропорційними величинами.

20 ст. за 1 день ↔ 12 днів

10 ст. за 1 день ↔ ? днів

1). 20 : 10 = 2 (рази) – в скільки разів зменшилася кількість прочитаних за 1 день сторінок;

2). 12 · 2 = 24 (дн.).

Відповідь. За 24 дні дівчинка прочитає цілу книжку.

Аналогічні міркування проводять при розв'язуванні задач з пропорційними величинами зміст яких пов'язаний з величинами будь-якого рядка таблиці 1, або будь-якими іншими трьома величинами, добуток двох з яких дає третю величину.

Повернемося до розгляду ще деяких елементарних функцій і розглянемо функцію $y = x^2$. Перелічимо всі властивості і цієї функції. Областю визначення функції $y = x^2$ є вся числова пряма. $y = x^2$ – парна функція, бо $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Функція $y = x^2$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$ – спадає, а на проміжку $(0;\ \infty)$ – зростає. Графіком є парабола з вершиною в точці (0, 0) (рис. 2.4).

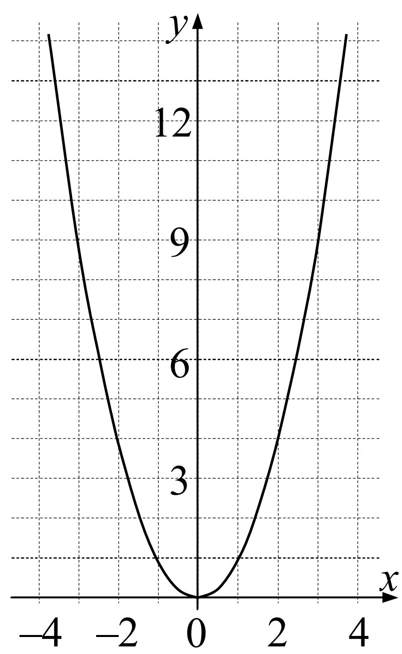


Рис. 2.4.

3. Перетворення графіків $y = Af(ax+b)+B$, де A, B, a, b – сталі, $A \neq 0$ і $a \neq 0$ за графіком функції $y = f(x)$. Квадратична функція, її властивості, графік.

Як відомо, будувати графік функції можна "за точками" з таблиці значень цієї функції. Якщо графік функції складається, як часто буває, з нескінченної множини точок, то ми не можемо відобразити його "точно", а можемо зробити лише ескіз такого графіка з'єднуючи від руки гладкою лінією декілька точок графіка.

Наприклад побудуємо "за точками" графік функції $y = x^2 + 1$. Область визначення цієї функції – множина всіх дійсних чисел. Ця функція неперіодична. Функція $y = x^2 + 1$ парна, бо $y(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = y(x)$. Отже графік функції достатньо побудувати для невід'ємних значень аргумента, а потім симетрично відносно осі значень функції відобразити на від'ємну піввісь аргумента. Складемо таблицю:

x	0	1	2	3	4
$y = x^2 + 1$	1	2	5	10	17

З'єднуючи від руки гладкою лінією точки (x, y) взяті з таблиці, отримаємо одну праву вітку графіка. Провівши симетрію відносно прямої Oy, отримаємо весь графік. Як бачимо це є парабола x^2 піднята на одну одиницю вгору.

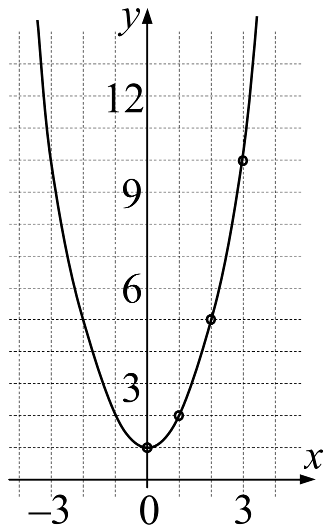


Рис. 2.5.

Графік функції $y = x^2 + 1$ можна побудувати і іншими способами.

Одним із способів побудови графіків функцій є спосіб побудови за допомогою перетворення графіків відповідних основних елементарних функцій графіки яких відомі.

При цьому використовуються деякі геометричні перетворення площини. А саме:

– *паралельне перенесення* на a одиниць вздовж Ox і на b одиниць вздовж Oy: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$. Кожна точка з координатами $M(x, y)$ переходить у точку з координатами $M'(x + a, y + b)$, де a і b – сталі паралельного перенесення (координати вектора паралельного перенесення $\overrightarrow{u} = \mathbf{u} = (a, b)$). Якщо a або b нуль, то відбувається паралельне перенесення на b одиниць вздовж Oy або на a одиниць вздовж Ox відповідно;

– *гомотетію* з центром O і коефіцієнтом $k \neq 0$: $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

Точка O залишається нерухомою, а довільна точка $M(x, y)$ переходить у точку $M'(x', y')$, що лежить на прямій OM, причому $OM' = |k| \cdot OM$. Причому точки M і M' лежать по один бік (по різні боки) від O, якщо $k > 0$ $(k < 0)$. Зауважимо, що якщо тільки $x' = kx$ або $y' = ky$, то відбувається *гомотетія* з центром O і коефіцієнтом $k \neq 0$ не площини а осі Ox або Oy відповідно. При цьому точка O залишається нерухомою, а довільна точка $M(x, y)$ переходить у точку $M'(x', y)$ або $M'(x, y')$ відповідно, причому для проекції виконуватиметься $\left(OM'\right)_x = |k| \cdot \left(OM\right)_x$ або $\left(OM'\right)_y = |k| \cdot \left(OM\right)_y$ відповідно;

– *симетрію* відносно точки O: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$. Це є гомотетія з центром O і коефіцієнтом $k = -1$.

А зараз висвітлимо як ж відбувається безпосередньо сама побудова графіків $y = Af(ax + b) + B$, де A, B, a, b – сталі, $A \neq 0$ і $a \neq 0$ за графіком функції $y = f(x)$.

Спочатку розглянемо простіший варіант, а саме, як побудувати графік функції $y = f(x+b)+B$ за заданим графіком функції $y = f(x)$. Оскільки $y = f(x+b)+B \Leftrightarrow y+(-B) = f(x+b)$, то якщо ввести заміну $\begin{cases} x' = x+b \\ y' = y+(-B) \end{cases}$, – наше рівняння набуде вигляду $y' = f(x')$. Тобто графік функції $y = f(x+b)+B$ співпадає з паралельно перенесеним графіком функції $y = f(x)$. Оскільки $\begin{cases} x = x' + (-b) \\ y = y' + B \end{cases}$, то згідно цих формул графік функції $y = f(x+b)+B$ утворений паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ на $-b$ одиниць вздовж Ox і на B одиниць вздовж Oy.

Наприклад, накреслимо графік функції $y = (x-3)^2 + 2$. Оскільки $y = (x-3)^2 + 2 = = (x+(-3))^2 + 2$, то зі сказаного вище зрозуміло, що він може бути утворений паралельним перенесенням графіка функції $y = x^2$ на $-b = -(-3) = 3$ одиниці вздовж Ox і на $B = 2$ одиниці вздовж Oy. Отримаємо графік (рис. 2.6).

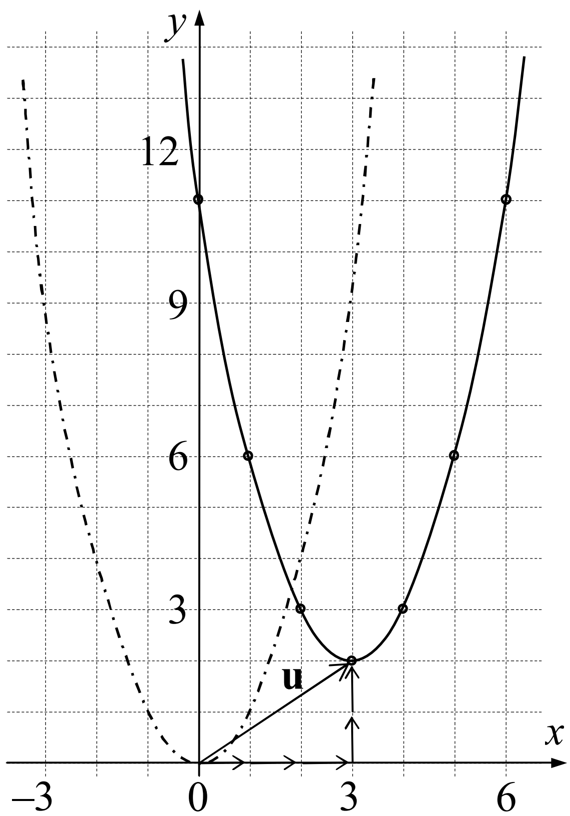


Рис. 2.6.

Тепер розглянемо такий варіант, а саме, як побудувати графік функції $y = Af(ax)$ за заданим графіком функції $y = f(x)$. Оскільки $y = Af(ax) \Leftrightarrow \frac{y}{A} = f(ax)$, то якщо ввести заміну $\begin{cases} x' = ax \\ y' = \frac{y}{A} \end{cases}$, – наше рівняння набуде вигляду $y' = f(x')$. Оскільки $\begin{cases} x = \frac{x'}{a} \\ y = Ay' \end{cases}$, то згідно цих формул графік функції $y = Af(ax)$ співпадає зі стиснутим в a разів вздовж осі Ox та розтягнутим в A разів вздовж осі Oy графіком функції $y = f(x)$.

Наприклад, накреслимо графік функції $y = 3x^2/4$. Оскільки $y = 3x^2/4 = 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2$, то зі сказаного вище зрозуміло, що він може бути утворений стисненням в $a = 1/2$ рази вздовж осі Ox та розтягненням в $A = 3$ рази вздовж осі Oy графіка функції $y = x^2$. Отже спочатку стиснемо в $a = 1/2$ рази (розтягнемо в 2 рази) вздовж осі Ox графік функції $y = x^2$. Отримаємо графік $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ (рис. 2.7). Тепер цей отриманий графік розтягнемо в 3 рази вздовж осі Oy. Отримаємо графік $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ (рис. 2.8), тобто той що і потрібно було накреслити в кінцевому рахунку за вимогою задачі.

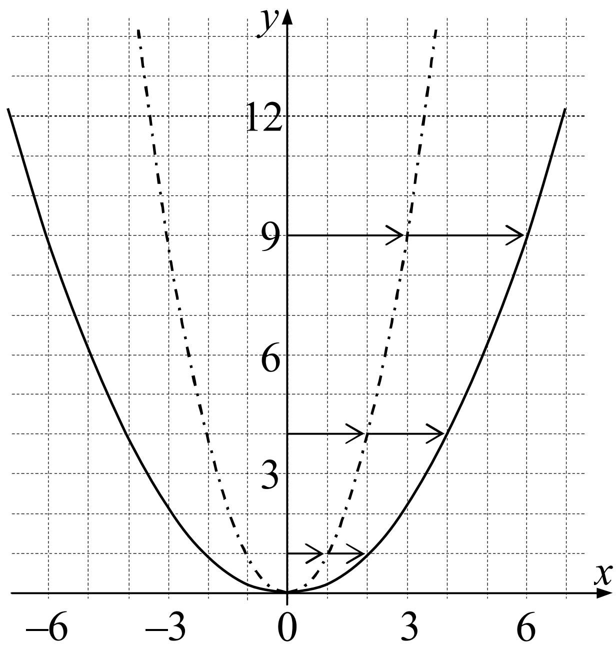


Рис. 2.7.

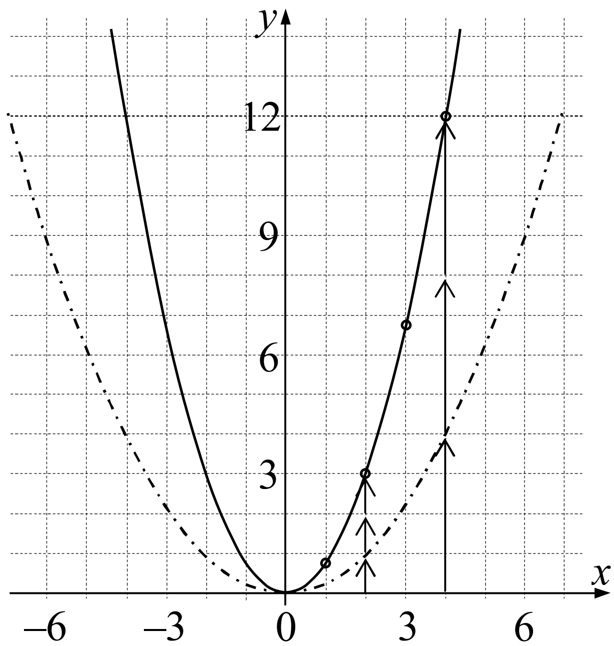


Рис. 2.8.

Для того, що переконатися в правильності отриманого результату, складемо для парної функції $y = 3x^2/4$ таблицю.

x	0	1	2	3	4
$y = \dfrac{3x^2}{4}$	0	$\dfrac{3}{4}$	3	$6\dfrac{3}{4}$	12

Поставимо на координатній площині точки з таблиці. Я бачимо з (рис. 2.8) точки, що відповідають табличним значенням функції $y = 3x^2/4$ дійсно лежать на отриманому графіку, тобто перетворення графіка здійснено правильно.

Отже можемо зробити висновок, що для того щоб побудувати графік функції $y = Af(ax+b)+B$, де A, B, a, b – сталі, $A \neq 0$ і $a \neq 0$ за графіком функції $y = f(x)$ потрібно графік функції $y = f(x)$ стиснути в a разів вздовж осі Ox, потім утворений графік розтягнути в A разів вздовж осі Oy, потім новоутворений графік перенести паралельним перенесенням на $-b$ одиниць вздовж Ox і також перенести паралельним перенесенням на B одиниць вздовж Oy.

Наприклад, накреслимо графік функції $y = 3(x+1)^2/4 - 2$. Оскільки $y = 3(x+1)^2/4 - 2 = 3\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 - 2$, тут елементарною функцією є функція $f(x) = x^2$, причому $a = \frac{1}{2}$, $A = 3, b = 1, B = -2$, то враховуючи вище сказане зрозуміло, що шуканий графік може бути утворений в результаті послідовного проведення таких перетворень:

1) стиснення графіка функції $y = x^2$ в $a = 1/2$ рази вздовж осі Ox (розтягнення в 2 рази), в результаті чого отримаємо графік функції $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$;

2) розтягу в $A = 3$ рази вздовж осі Oy утвореного графіка функції $y = (x/2)^2$, в результаті чого отримаємо графік функції $y = 3(x/2)^2$;

3) паралельного перенесення на $-b = -1$ одиниць вздовж Ox новоутвореного графіка функції $y = 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2$, в результаті чого отримаємо графік функції $y = 3\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2$;

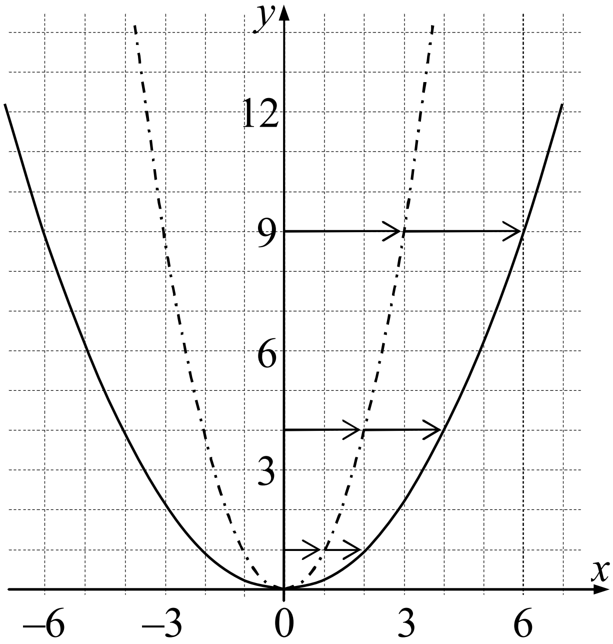


Рис. 2.9.

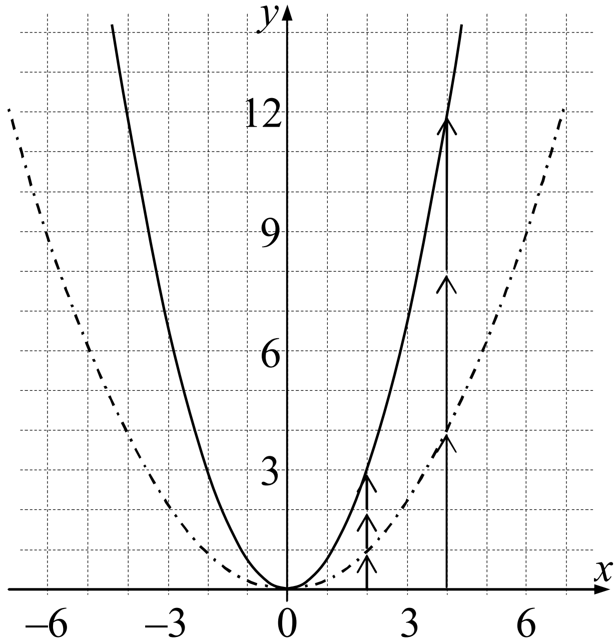


Рис. 2.10.

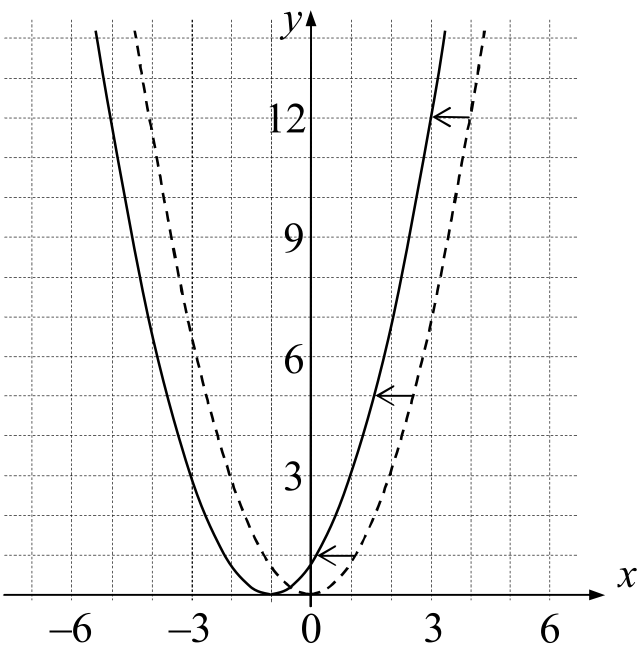


Рис. 2.11.

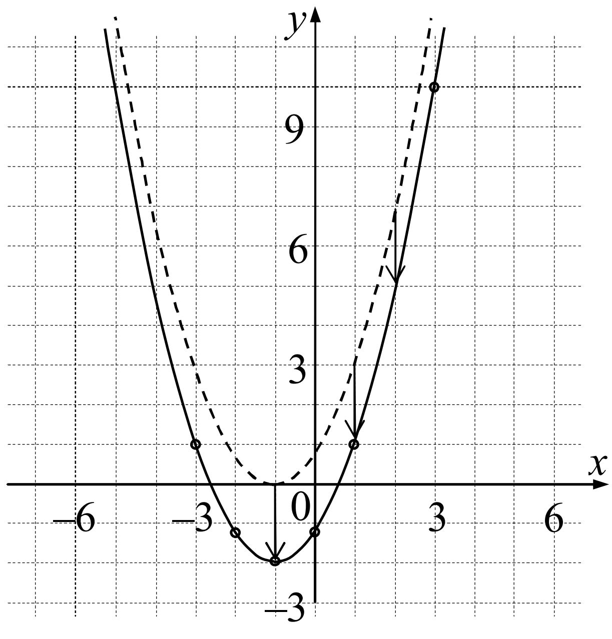


Рис. 2.12.

4) паралельного перенесення на $B=-2$ одиниці вздовж Oy новоутвореного графіка функції $y=3\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2$, в результаті чого отримаємо графік функції $y=3\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2-2$, тобто той що і

потрібно було накреслити в кінцевому рахунку за вимогою задачі.

Для того, що переконатися в правильності отриманого результату, складемо для непарної функції $y = 3(x+1)^2/4-2$ таблицю.

x	–3	–2	–1	0	1	3
$y = 3(x+1)^2/4-2$	1	$-1\frac{1}{4}$	–2	$-1\frac{1}{4}$	1	10

Поставимо на координатній площині точки з таблиці. Я бачимо з (рис.) точки, що відповідають табличним значенням функції $y = 3(x+1)^2/4-2$ дійсно лежать на отриманому для функції $y = 3(x+1)^2/4-2$ графіку, тобто перетворення графіка здійснено правильно.

Розглянемо і побудуємо за допомогою перетворень графіків графік функції такого виду $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c – деякі числа, причому $a \neq 0$. Таку функцію називають *квадратичною функцією*. Вираз $ax^2 + bx + c$ називається квадратним тричленом. Областю визначення квадратичної функції є множина **R**. Квадратична функція є ні парна, ні непарна, бо $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$.

Нехай $y = a^* x^2 + b^* x + c$. Оскільки ми вже вміємо будувати графіки функцій виду $y = Af(ax+b) + B$ то перепишемо квадратичну функцію саме до такого виду.

Для цього виконаємо наступні тотожні перетворення:

$$y = a^* x^2 + b^* x + c = a^*(x^2 + \frac{b^* x}{a^*}) + c =$$

$$= a^*\left(x^2 + 2\frac{b^* x}{2a^*} + \left(\frac{b^*}{2a^*}\right)^2 - \left(\frac{b^*}{2a^*}\right)^2\right) + c = a^*\left(x^2 + 2\cdot\frac{b^*}{2a^*}\cdot x + \left(\frac{b^*}{2a^*}\right)^2\right) -$$

$$- a^*\left(\frac{b^*}{2a^*}\right)^2 + c = a^*\left(x + \frac{b^*}{2a^*}\right)^2 + \left(c - \frac{(b^*)^2}{4a^*}\right)$$ (можна легко переконатися, що вони істинні).

Введемо заміну використовуючи коефіцієнти функції виду $y = Af(ax+b) + B$: $f(x) = x^2$, $a = 1$, $A = a^*$, $b = \frac{b^*}{2a^*}$, $B = c - \frac{(b^*)^2}{4a^*}$.

Тоді згідно послідовності перетворення графіка функції $y = x^2$ до графіка функції $y = a^*\left(x + \frac{b^*}{2a^*}\right)^2 + \left(c - \frac{(b^*)^2}{4a^*}\right)$ слід:

1) стиснути графік функції $y = x^2$ в $a = 1$ раз вздовж осі Ox (оскільки $a = 1$, то графік залишиться незмінним), в результаті чого отримаємо графік функції $y = 1\cdot x^2 = x^2$;

2) розтягнути в $A = a^*$ рази вздовж осі Oy утворений попереднім перетворенням графік функції $y = x^2$, в результаті чого отримаємо графік функції $y = a^* x^2$;

3) паралельно перенести на $-b = -\frac{b^*}{2a^*}$ одиниць вздовж Ox новоутворений графік функції $y = a^* x^2$, в результаті чого отримаємо графік функції $y = a^*\left(x + \frac{b^*}{2a^*}\right)^2$;

4) паралельно перенести на $B = c - \frac{(b^*)^2}{4a^*}$ одиниць вздовж Oy

новоутворений в результаті попереднього перетворення графік функції $y = a^*\left(x + \frac{b^*}{2a^*}\right)^2$, в результаті чого отримаємо графік функції $y = a^*\left(x + \frac{b^*}{2a^*}\right)^2 + \left(c - \frac{(b^*)^2}{4a^*}\right)$, тобто графік квадратичної функції $y = a^* x^2 + b^* x + c$. Отриманий графік також називається параболою.

1) стиснути графік функції $y = x^2$ в $a = 1$ раз вздовж осі Ox (оскільки $a = 1$, то графік залишиться незмінним), в результаті чого отримаємо графік функції $y = 1 \cdot x^2 = x^2$;

2) розтягнути в $A = a^*$ рази вздовж осі Oy утворений попереднім перетворенням графік функції $y = x^2$, в результаті чого отримаємо графік функції $y = a^* x^2$;

3) паралельно перенести на $-b = -\frac{b^*}{2a^*}$ одиниць вздовж Ox новоутворений графік функції $y = a^* x^2$, в результаті чого отримаємо графік функції $y = a^*\left(x + \frac{b^*}{2a^*}\right)^2$;

4) паралельно перенести на $B = c - \frac{(b^*)^2}{4a^*}$ одиниць вздовж Oy новоутворений в результаті попереднього перетворення графік функції $y = a^*\left(x + \frac{b^*}{2a^*}\right)^2$, в результаті чого отримаємо графік

функції $y = a^*\left(x + \frac{b^*}{2a^*}\right)^2 + \left(c - \frac{(b^*)^2}{4a^*}\right)$, тобто графік квадратичної функції $y = a^* x^2 + b^* x + c$. Отриманий графік також називається параболою.

Наприклад, накреслимо графік функції $y = 2x^2 + 4x + 5$. Оскільки
$y = 2x^2 + 4x + 5 = 2(x^2 + 2x) + 5 = 2\left(x^2 + 2x + 4\right) - 2 + 5 = 2(x+1)^2 + 3$, тут елементарною функцією є функція $f(x) = x^2$, причому $a = 1,\ A = 2,\ b = 1,\ B = 3$, то враховуючи вище сказане зрозуміло, що шуканий графік може бути утворений в результаті послідовного проведення таких перетворень:

1) стиснення графіка функції $y = x^2$ в $a = 1$ раз вздовж осі Ox (оскільки $a = 1$, то графік залишиться незмінним), в результаті чого отримаємо графік функції $y = 1 \cdot x^2 = x^2$;

2) розтягу в $A = 2$ рази вздовж осі Oy утвореного графіка, в результаті чого отримаємо графік функції $y = 2x^2$;

3) паралельного перенесення на $-b = -1$ одиниць вздовж Ox новоутвореного графіка функції $y = 2x^2$, в результаті чого отримаємо графік функції $y = 2(x+1)^2$;

4) паралельного перенесення на $B = 3$ одиниці вздовж Oy новоутвореного графіка функції $y = 2(x+1)^2$, в результаті чого отримаємо графік функції $y = 2(x+1)^2 + 3$, тобто графік квадратичної функції $y = 2x^2 + 4x + 5$.

Для того, що переконатися в правильності отриманого результату, складемо для непарної функції $y=2x^2+4x+5$ таблицю.

x	–3	–2	–1	0	1
$y=2x^2+4x+5$	11	5	3	5	11

Поставимо на координатній площині точки з таблиці. Я бачимо з (рис.) точки, що відповідають табличним значенням функції $y=2x^2+4x+5$ дійсно лежать на отриманому для функції $y=2x^2+4x+5$ графіку, тобто перетворення а отже і побудова графіка здійснено правильно.

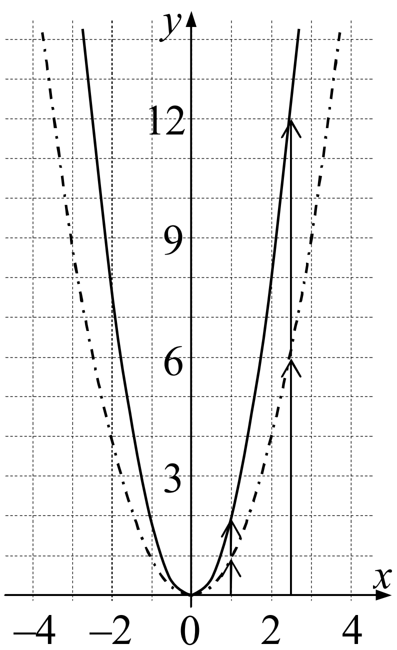


Рис. 2.13.

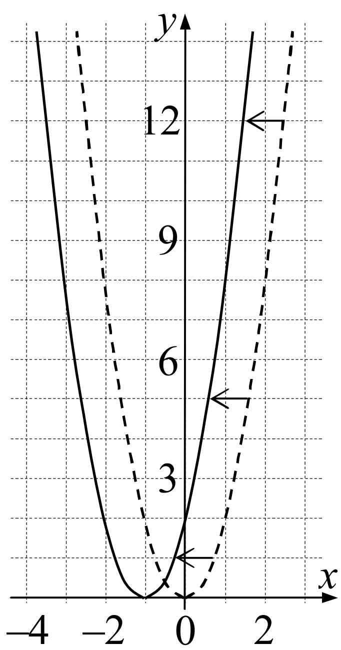


Рис. 2.14.

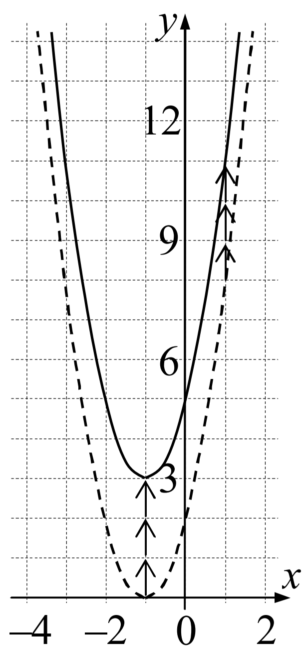


Рис. 2.15.

Повернемося до розгляду квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$, де a, b, c – деякі числа, причому $a \neq 0$ і встановимо її властивості.

Якщо повернутися до тих міркувань, які застосовані нами для побудови графіка квадратичної функції, то при $a>0$ $(a<0)$ вітки параболи напрямлені вгору (вниз), а сама квадратична функція має в точці $x=-\dfrac{b}{2a}$ найменше (найбільше) значення.

Наприклад, функція $y=2x^2+4x+5$, $a=2>0$ має вітки параболи напрямлені вгору та в точці $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2\cdot 2}=-1$ найменше значення, яке рівне $y=2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+5=3$, що і видно з рис.   .

Квадратична функція при $a>0$ $(a<0)$ спадна (зростаюча) на проміжку $\left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ і зростаюча (спадна) на проміжку $\left(-\dfrac{b}{2a};\ +\infty\right)$. Графік квадратичної функції називають параболою з вершиною в точці $x=-\dfrac{b}{2a}$. При $b=c=0, a=1$ квадратична функція набирає вигляду $y=x^2$.

Список рекомендованої літератури

1. Кужель О.В. Елементи теорії множини і математичної логіки. – К.: Радянська школа, 1977.
2. Пышкало А.М. и др. Теоретические основы начального курса математики. – М.: Просвещение, 1974.
3. Архипов Б.М. Математика. – Минск.: Вышэйш. школа, 1976.
4. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б. Математика. – М.: Просвещение, 1977.
5. Столяр А.А, Лельчук М.П. Математика. Минск.: Вышэйш. школа, 1975.
6. Виленкин Н. Я., Лаврова Н, Н., Рождественская В. Б. и др. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1977.
7. Кухар В. М., Білий Б. М. Теоретичні основи початкового курсу математики. 2-е вид. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1987.
8. Боровик В. Н. та ін. Математика. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1980.
9. Пышкало А. М., Стойлова Л, М., Лаврова Н. Н.и др. Сборник задач по математике – М.: Просвещение, 1979.
10. Довгий О.Я., Межиловська Л.Й., Ткачук О.М., Файчак З.Є. Курс математики: Навч.-метод. посібник для студентів спеціальності ”Початкове навчання” . – Івано-Франківськ: Плай, 2005.

З м і с т стр.

Навчальне видання

Довгий Олег Ярославович

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИВЧЕННЯ РОЗДІЛУ

”РІВНЯННЯ ЛІНІЇ. ФУНКЦІЇ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ”

КУРСУ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ ”ПОЧАТКОВЕ НАВЧАННЯ”

В авторській редакції

Головний редактор – Василь Головчак

Комп’ютерна верстка – Олег Довгий

Навчально-методичний посібник

Здано до набору 9.01.08 р. Підписано до друку 14.01.08 р.

Формат 60x84/16.

Гарнітура ”Times New Roman”. Ум. друк. арк.: 4,8.

Тираж 300 прим. Зам. № 7.

Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ

Прикарпатського національного університету

імені Василя Стефаника

76000, м. Івано-Франківськ, вул.. Бандери, 1.

Тел. 71-56-22.

E-mail: vdvcit@pu.if.ua

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру

від 12.12.2006. Серія ДК 2718