Довгий О.Я.

Методичні рекомендації

до вивчення розділу

”Вирази. Рівняння. Нерівності”

курсу математики для студентів спеціальності

”Початкове навчання”

Довгий О.Я. Методичні рекомендації до вивчення розділу ”Вирази. Рівняння. Нерівності” курсу математики для студентів спеціальності ”Початкове навчання” / Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2008. – 130 с.

Рецензенти:

Кульчицька Н.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри статистики і вищої математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Махней О.В. – кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри диференціальних рівнянь та прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Рекомендовано до друку Вченою Радою Педагогічного інституту Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол № 2 від 18 вересня 2007 року)

Вступ

За перший семестр першого курсу студенти спеціальності ”Початкове навчання” освоїли наступні два математичні розділи: „Множини і відповідності між елементами множин” і „Математична логіка”. В другому семестрі цього ж курсу, згідно робочої навчальної програми, студентами вивчаються такі два математичні розділи: ”Вирази. Рівняння. Нерівності” і ”Рівняння лінії. Функції. Перетворення графіків функцій”.

Дані методичні рекомендації розкривають зміст всіх теоретичних положень розділу: ”Вирази. Рівняння. Нерівності”, який в свою чергу складається з наступних тем: ”Вирази. Числові рівності та нерівності”, ”Рівняння з однією змінною. Рівносильні рівняння”, ”Системи та сукупності рівнянь та нерівностей”. При цьому висвітлено доведення відповідних властивостей, а також акцентовано увагу на те, що студентам найважче зрозуміти в процесі вивчення даних тем. Запропонована достатня кількість прикладів розв’язування відповідних темам практичних завдань.

Метою даного курсу є глибше засвоєння основних математичних положень пов’язаних із арифметичним та алгебраїчним матеріалом курсу математики та методики викладання математики, а також підготовка студентів до самостійного вивчення тих розділів математики, які можуть бути потрібні додатково в практичній і дослідницькій роботі спеціалістів в області початкового навчання. **Завданням даного курсу** є розкриття змісту і значення основних понять даного розділу математики а також вивчення способів розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем і сукупностей.

В результаті вивчення розділу: ”Вирази. Рівняння. Нерівності” **студент повинен знати** основні теоретичні положення, навчитися використовувати їх при розв'язанні задач та виробити навики користування літературою і **студент повинен уміти** знаходити область визначення і множину коренів рівняння; розв'язувати системи рівнянь з двома змінними різними способами; аналітико-синтетичним методом аналізувати текстові задачі, складаючи при цьому рівняння з однією змінною або систему рівнянь з двома змінними; доводити теореми про рівносильні нерівності; різними способами знаходити множину розв'язків нерівностей, систем нерівностей і сукупностей нерівностей.

Методичні рекомендації включають в себе:

– робочу програму курсу математики для II семестру: тематичний план з відображенням кількості лекційних, практичних і самостійних годин призначених на освоєння відповідних тем; детальний тематичний план лекційних і практичних занять з відображенням кількостей годин;

– детальний конспект лекційних занять зі зразками розв'язаних практичних завдань розділу "Вирази. Рівняння. Нерівності";

– перелік того, що студент повинен знати і вміти в результаті вивчення кожної із тем розділу "Вирази. Рівняння. Нерівності";

– перелік орієнтовних завдань для виконання на практичному занятті і самостійної роботи студентів;

– список рекомендованої літератури.

Нормативні дані щодо вивчення математики студентами спеціальності ”Початкове навчання” на І курсі в ІІ семестрі стаціонарної форми навчання

Лекційних (год)	Практичних (семінарських) (год.)	Лабораторних (год.)	Самостійна робота (год.)	Всього годин	Заліки (семестр)	Екзамен (семестр)
14	16	–	24	54	–	–

Тематичний план дисципліни „математика”

№ п/п	Тема	Кількість годин		
		лекц.	**практ.**	**самост.**
1	Вирази	0,5	0,5	2
2	Рівняння і нерівності, та їх системи і сукупності.	7	9,5	16
3	Рівняння лінії	3,5	2	2
4	Функції. Перетворення графіків функцій	3	4	4

Тематичний план лекційних занять для студентів денної форми навчання

№ *п/п*	Розділи	Назва теми для денної форм и навчання	К-сть годин
1	2	3	4
1	Вирази	1.1. Поняття числового виразу. Числові рівності. Числові нерівності. 1.2. Властивості числових рівностей і нерівностей. Вирази із змінною.	0,25 0,25

1	2	3	4
2	Рівняння і нерівності та їх системи. Текстові задачі	2.1. Рівняння з однією змінною. Розв'язування рівнянь з однією змінною. Рівносильні рівняння. Теореми про рівносильні рівняння та наслідки з них. 2.2. Поняття про рівняння з двома змінними. Системи двох рівнянь. Способи їх розв'язування. Графічна інтерпретація розв’язку системи. 2.3. Системи і сукупності нерівностей з однією змінною. Нерівності та системи нерівностей з двома змінними. Графічний спосіб розв'язування систем та сукупностей. 2.4. Складання та розв’язування різних типів задач за допомогою рівнянь та систем рівнянь.	2 1,5 2 1,5
3	Рівняння лінії	3.1. Поняття про рівняння лінії. Рівняння прямої. Загальне рівняння прямої. 3.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих. Точка перетину двох прямих. 3.3. Рівняння кола.	1,5 1 1
4	Функції. Перетворення графіків функцій	4.1. Числова функція, її властивості. Функція обернена до даної. Лінійна функція. Пряма пропорційність. Обернена пропорційність. 4.2. Квадратична функція, її властивості, графік. 4.3. Перетворення графіків $y=Af(ax+b)+B$, де A, B, a, b – сталі, $A\neq 0$ і $b\neq 0$ за графіком функції $y=f(x)$.	1,5 0,75 0,75

Тематичний план практичних занять для студентів денної форми навчання

№ п/п	Розділи	Назва теми для денної форми навчання	Кількість годин	З них	
				практичні	самостійні.
1	2	3	4	5	6
1	Вирази	1.1. Поняття числового виразу. Числові рівності. Числові нерівності. 1.2. Властивості числових рівностей і нерівностей. Вирази із змінною.	2,5	0,5	2
2	Рівняння і нерівності та їх системи. Текстові задачі	2.1. Рівняння з однією змінною. Розв'язування рівнянь з однією змінною. Рівносильні рівняння. Теореми про рівносильні рівняння та наслідки з них.	2,5	0,5	2
		2.2. Поняття про рівняння з двома змінними. Системи двох рівнянь. Способи їх розв'язування.	6	2	4
		2.3. Системи і сукупності нерівностей з однією змінною. Нерівності та системи нерівностей з двома змінними, графічний спосіб їх розв'язування.	7	3	4
		2.4. Складання та розв’язування задач за допомогою рівнянь та систем рівнянь.	10	4	6

1	2	3	4	5	6
3	Рівняння лінії	3.1. Поняття про рівняння лінії. Рівняння прямої. Загальне рівняння прямої. 3.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих. Точка перетину двох прямих. 3.3. Рівняння кола.	1,5 2 0,5	0,75 1 0,25	0,75 1 0,25
4	Функції. Перетворення графіків функцій	5.1. Числова функція, її властивості. Функція обернена до даної. Лінійна функція. Пряма пропорційність. Обернена пропорційність. 5.2. Квадратична функція, її властивості, графік. 5.3. Перетворення графіків $y=Af(ax+b)+B$, де A, B, a, b – сталі, $A\neq 0$ і $b\neq 0$ за графіком функції $y=f(x)$.	3 2 3	2 1 1	1 1 2

Самостійна робота полягає в розв’язуванні різних задач та вправ з даної тематики та доведенні по аналогії деяких теорем.

Конспект основного матеріалу

Тема № 1.

Вирази. Числові рівності та нерівності

1. Поняття числового виразу.
2. Числові рівності.
3. Числові нерівності.
4. Рівність і нерівність числових виразів.
5. Властивості рівностей та нерівностей числових виразів.
6. Методи швидкого виконання дій.
7. Вирази зі змінною.

1. Числові вирази. Щоб зрозуміти для чого потрібні числові вирази і що вони собою являють, розв'яжемо таку задачу: «Відстань між містами A і B дорівнює 350 км. З міста A виїхав велосипедист зі швидкістю 25 км/год, а через 4 год назустріч йому виїхав з міста B автомобіліст зі швидкістю 100 км/год. Через скільки годин після виїзду автомобіля вони зустрінуться?»

Спочатку знайдемо, який шлях проїхав велосипедист за 4 год. Швидкість велосипедиста згідно умови задачі 25 км/год, тобто за одну годину він проходить 25 км, то щоб знайти скільки він пройде за 4 години треба помножити 25 на 4. Не виконуючи цієї дії, позначимо цей шлях так: $25 \cdot 4$.

Після цього знайдемо, на якій відстані від міста B велосипедист знаходився через 4 год після виїзду. Так як відстань між містами A і B згідно умови задачі дорівнює 350 км, а за 4 години велосипедист пройде частину цього шляху, а саме $25 \cdot 4$, то залишиться пройти до міста B: $350 - 25 \cdot 4$.

Далі визначаємо швидкість зближення велосипедиста й автомобіля. Так як вони рухаються назустріч один одному, то за одну годину вони зближуються на той шлях, який за одну годину пройде кожен з них в сумі, а отже в силу того, що шлях пройдений за одиницю часу (в даному випадку за годину) і є швидкістю, то швидкість зближення велосипедиста й автомобіля дорівнює: 25 + 100.

І нарешті, знаходимо, через скільки годин після виїзду автомобіля відбудеться зустріч. Так як для того щоб зустрітися їм слід пройти шлях: $350 - 25 \cdot 4$, а вони проходять за одну годину шлях: $25 + 100$, то щоб знайти скільки вони затратять годин до зустрічі, слід знайти скільки разів 25 + 100 міститься в $350 - 25 \cdot 4$, а для цього слід поділити $350 - 25 \cdot 4$ на $25 + 100$ і в результаті отримаємо: (350 – 25 · 4) : (25 + 100).

Отже, у результаті розв’язування задачі ми одержали числовий вираз (240 – 20 · 3) : (20 + 70). У цьому виразі показані дії, які треба зробити з даними в умові задачі числами, щоб отримати відповідь. Значення цього числового виразу таке:

(350 – 25 · 4) : (25 + 100) = (350 – 100) : 125 = 250 : 125 = 2.

Виходить, зустріч відбудеться через 2 год після виїзду автомобіля.

Числові вирази, переважно, позначають великими буквами латинського алфавіту. Поняття числового виразу загалом визначається з наступних двох пунктів:

а) кожне число є числовим виразом.

б) Якщо A і B – числові вирази, то $(A)+(B)$ – числовий вираз, який називається сумою, $(A)-(B)$ – числовий вираз, який називається різницею; $(A)\cdot(B)$ – числовий вираз, який називається добутком і $(A):(B)$ – числовий вираз, який називається часткою.

Отже, числовий вираз можна уявити собі просто як число, або як числа об'єднані хоч би одним зі знаків чотирьох арифметичних дій (вираз може містити дужки що вказують на порядок виконання дій).

Для скорочення запису домовилися не брати в дужки окремі числа, бо якщо точно слідувати цьому визначенню, то довелося б писати занадто багато дужок, наприклад $(45)+(30)$ або $(7):(2)$. Крім того, домовилися не писати дужки, якщо кілька виразів додаються. Наприклад: $A-''2+4\cdot 5-32''$ і $B-''7:3{,}5-4''$, тоді $(A)+(B)-''2+4\cdot 5-32+7:3{,}5-4''$.

Якщо кілька виразів віднімаються, то щоб не писати дужки, знаки кожного члена виразу який віднімають змінюють на протилежний. Наприклад: $C-''2+4\cdot 5''$ і $D-''7:3{,}5-4+8\cdot 57-24''$, тоді $(C)-(B)-''2+4\cdot 5-7:3{,}5+4-8\cdot 57+24''$. Операції додавання і віднімання в виразі в якому немає дужок і знаків інших операцій, виконуються одна за одною і обов'язково зліва направо (хоча якщо вираз містить тільки додавання, то не обов'язково зліва направо, а можна в будь-якому порядку).

Якщо ж перемножують або ділять кілька виразів які не є числами а містять в собі знаки арифметичних дій, то в більшості випадків ненаписання дужок приведе до небажаного результату. Дужок не пишуть хіба що тоді, коли перемножують або ділять кілька виразів, кожен з яких є числом. Наприклад: $A-''24''$, $B-''73{,}5''$ і $C-''0{,}9''$, тоді $(A):(B):(C)-''24:73{,}5:0{,}9''$. Операції множення чи ділення, згідно правильного порядку який подано нижче, виконують одну за одною і обов'язково зліва направо, але якщо вираз містить тільки множення, то порядок виконання операцій не є обов'язковим зліва направо і їх можна виконувати в будь-якому порядку.

Виконуючи в правильному порядку зазначені в виразі операції, знаходимо значення числового виразу.

Правильний порядок дій при обчисленні значення числового виразу такий:

1) Якщо числовий вираз не містить дужок, то треба розділити його на частини, відділені друг від друга знаками додавання і віднімання, і обчислити значення кожної такої частини, виконуючи множення і ділення одне за одним зліва направо; після цього, замінивши кожну частину її значенням, знайти значення виразу, виконуючи операції додавання і віднімання одну за одною зліва направо.

2) Якщо числовий вираз містить дужки, то треба взяти вираз з самих внутрішніх дужок, знайти його значення за правилом 1) і замінити отриманим значенням, опустивши ці дужки. Проробляти це до тих пір, поки не вийде вираз без дужок і обчислити його за правилом 1).

Отже, спочатку слід виконувати дії другого ступеня (множення і ділення), а потім першого ступеня (додавання і віднімання).

Зазначимо, що *вираз означується* (*називається*) *за останньою дією*, яка в ньому виконується. Отже, щоб задати вираз словесно, слід насамперед визначити яка дія в ньому буде виконуватися останньою. Так наприклад: $115-52\cdot 2$ – різниця числа 115 з добутком чисел 52 і 2; $(5+3/4+7)\cdot 2$ – добуток відповідної суми з числом 2; $3+1/5+8$ – сума. З іншого боку розглянемо наприклад вираз який є сумою найменшого натурального числа з добутком найменшого цілого невід’ємного і будь-якого числа. Цей вираз приймає значення 1, бо це вираз $1+0\cdot(\text{будь}-\text{яке число})$ (добуток з нулем – завжди нуль). А якщо розглянемо наприклад вираз який є добутком суми найменшого натурального числа з найменшим цілим невід'ємним числом та будь-якого числа, то цей вираз приймає значення того будь-якого числа, яке в нім фігурує, бо це вираз $(1+0)\cdot(\text{будь}-\text{яке число})$.

У числових виразах числа можуть бути зв'язані і іншими операціями (піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування). Так 3^2+4, $\sqrt{9}/2+\sqrt{2}$, $\lg 100+\sqrt[3]{14+50}$ – числові вирази.

Відзначимо, що не всякий числовий вираз має значення. Наприклад, вирази 10 : (2 – 2) і (12 – 12) : (6 – 6) не мають числових значень, тому що ділення на нуль неможливе. Про такі вирази говорять, що вони не мають смислу. Також не мають смислу і такі вирази: $\sqrt{-4}, \sqrt[6]{-64}$, тому що корінь парного степеня з від'ємного числа не існує.

2. Числові рівності. Числа можуть бути рівні або не рівні між собою. Оскільки ми будемо розглядати деякі відношення (дорівнює, а в подальшому – менше) між дійсними числами, то, насамперед пригадаємо всі властивості множини дійсних чисел. З попереднього курсу нам відомо, що множина дійсних чисел **R** є лінійно впорядкованою множиною і має властивість *щільності* (для будь-яких двох як завгодно близьких але різних елементів цієї множини існує елемент цієї множини, що лежить між ними). Крім того множина дійсних чисел **R** є нескінченна і незчисленна. Множину дійсних чисел глибше вивчатимемо в подальшому, але для простоти міркувань, заходячи вперед, розглядатимемо додатне дійсне число як довжину деякого відповідного за довжиною відрізка нитки чи будь-якого іншого предмета. Для покращення міркувань про від'ємне дійсне число, розглянемо вісь дійсних чисел як нитку нескінченної довжини натягнуту вздовж відповідної прямої лінії з нескінченності в нескінченість (на нитку не діють зовнішні сили або їх рівнодійна дорівнює нулю – ця умова для того, що нитка була моделлю прямої лінії – вісі дійсних чисел). Позначимо на цій нитці точку *O*, яка символізуватиме початок відліку, а також одиничний відрізок. Кожній точці цієї нитки відповідатиме певне дійсне число і навпаки. Будь-яке додатне дійсне число в цьому випадку можна розглядати як довжину відрізка від точки *O* до відповідної точки на нитці і тільки якщо точка знаходиться зліва від точки *O*, то відповідне їй дійсне число є від’ємне і дорівнює довжині від точки *O* до неї, взятій зі знаком „мінус”.

Перейдемо безпосередньо до розгляду відношення рівності на множині дійсних чисел (**R**), яке є одним з найважливіших прикладів відношення і позначається знаком =. Це відношення є відношенням еквівалентності, оскільки відношення „дорівнює” на вищезгаданій множині має властивості: по-перше – *рефлексивності* $(\forall x \in \mathbf{R} : x = x)$ (читається так: для будь-якого числа x, що належить множині дійсних чисел виконується x дорівнює x, або скорочено: будь-яке дійсне число рівне саме собі), по-друге – *симетричності* $(\forall x, y \in \mathbf{R} : x = y \Rightarrow y = x)$ (скорочено: якщо деяке перше дійсне число дорівнює деякому другому, то це друге дорівнює цьому першому) і по-третє – *транзитивності* $(\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x = y, y = z \Rightarrow x = z)$ (скорочено: якщо деяке перше дійсне число дорівнює деякому другому, а це друге дорівнює певному третьому, то і це перше дорівнює цьому третьому).

Введемо означення: рівність $x = y$, де x і y – числа, називається *числовою рівністю*.

Наприклад: $3 = 3$; $\sqrt{7} = \sqrt{7}$; $9{,}9 = 9{,}9$.

Якщо з двох сторін числової рівності стоять однакові числа, то така числова рівність є істинною (істинне висловлення), а якщо з двох сторін числової рівності стоять різні числа, то така числова рівність є хибною (хибне висловлення).

Розглянемо такі твердження. Рівність $x = y$ є істинною тоді коли $y - x = 0$ є істина ($y - x = 0 \Rightarrow x = y$) і навпаки $y - x = 0$ є істина тоді коли $x = y$ є істинною ($x = y \Rightarrow y - x = 0$), тобто рівність $x = y$ є істинною в тому і тільки в тому випадку, коли $y - x = 0$ ($x = y \Leftrightarrow y - x = 0$).

Доведемо дані твердження міркуючи в такий спосіб. Розглянемо спочатку друге з даних тверджень, тобто твердження $x_1 = y_1 \Rightarrow y_1 - x_1 = 0$. Якщо число y_1 від'ємне, то число x_1 також від'ємне, бо лише в цьому випадку $x_1 = y_1$. Згідно того, що якщо два числа рівні між собою, то рівні між собою два відповідно протилежні їм числа, помноживши обидві сторони нашої істинної числової рівності на (-1), отримаємо також істинну числову рівність, в кожній стороні якої стоятимуть додатні числа $x_2 = y_2$. Тепер розглядатимемо додатне дійсне число як довжину деякого відповідного за довжиною відрізка нитки. Істинність другого з даних тверджень, тобто твердження $x_2 = y_2 \Rightarrow y_2 - x_2 = 0$, де x_2, y_2 – додатні числа, наглядна, якщо уявити собі, що від відрізка нитки заданої довжини відрізали (відняли) відрізок нитки такої самої довжини $x_2 = y_2$. Зрозуміло, що залишиться відрізок нитки довжиною в нуль $y_2 - x_2 = 0$. Якщо ми замінимо числа x_2 і y_2 відповідно протилежними їм числами, то отримаємо також істинну числову рівність $y_1 - x_1 = 0$. Отже, якщо $x_1 = y_1$, то $y_1 - x_1 = 0$, тобто твердження $x_1 = y_1 \Rightarrow y_1 - x_1 = 0$ ми довели.

Доведемо перше з даних тверджень, тобто твердження $y_1 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1$. Якщо число y_1 від'ємне, то число x_1 також від'ємне, бо лише в цьому випадку $y_1 - x_1 = 0$ (якщо y_1 від'ємне, а x_1 – додатне, то замінивши числа x_1 і y_1 відповідно протилежними їм числами, отримаємо $y_2 - x_2 = 0$, або $y_2 + x_1 = 0$, де y_2 і x_1 – додатні числа. Так як $y_2 + x_1 \neq 0$ (сума двох додатних чисел не може дорівнювати нулю), згідно аналогічних міркувань, також і $y_1 - x_1 \neq 0$, що суперечить умові $y_1 - x_1 = 0$, отже, якщо y_1 від'ємне, то і x_1 від'ємне). Замінивши числа x_1 і y_1 відповідно протилежними їм числами x_2 і y_2, отримаємо також істинну числову рівність $y_2 - x_2 = 0$, де y_2 і x_2 – додатні числа. Тепер розглядатимемо додатне дійсне число як довжину деякого відповідного за довжиною відрізка нитки. Твердження $y_2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2$ можна довести, якщо міркувати так: щоб від відрізка нитки першої довжини відрізати (відняти) відрізок нитки такої другої довжини, щоб після відрізання залишився відрізок нитки довжиною в нуль $y_2 - x_2 = 0$, треба щоб ця друга довжина була така як перша, тобто треба відрізати відрізок нитки такої самої довжини (відняти всю нитку), тобто $x_2 = y_2$. Згідно того, що якщо два числа рівні між собою, то рівні між собою два відповідно протилежні їм числа, помноживши обидві сторони істинної числової рівності $x_2 = y_2$ на (-1), отримаємо також істинну числову рівність $x_1 = y_1$. Отже, якщо $y_1 - x_1 = 0$, то $x_1 = y_1$, тобто твердження $y_1 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1$ ми довели.

Отже, *рівність $x = y$ є істинною в тому і тільки в тому випадку, коли $y - x = 0$.*

Наприклад: $5 = 5 \Leftrightarrow 5 - 5 = 0$, $7 \neq 5 \Leftrightarrow 7 - 5 \neq 0$.

Крім трьох зазначених властивостей, відношення „дорівнює” на множині $\mathbf{R}$ має ще й такі *властивості*:

1, 2). *Монотонності додавання і множення*: $(\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x = y \Rightarrow x + z = y + z)$ і $(\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x = y \Rightarrow x \cdot z = y \cdot z)$ відповідно.

Доведення. Згідно означення маємо: $x = y \Leftrightarrow y - x = 0$.

Для додавання: $x + z = y + z \Leftrightarrow (y + z) - (x + z) = 0$;

$(y + z) - (x + z) = y + z - x - z = y - x = 0$, бо $y - x = 0$.

Отже, $(y + z) - (x + z) = 0$, а отже, згідно означення: $x + z = y + z$.

Для множення: $x \cdot z = y \cdot z \Leftrightarrow y \cdot z - x \cdot z = 0$;

$y \cdot z - x \cdot z = z(y - x) = 0$, бо $y - x = 0$.

Отже, $y \cdot z - x \cdot z = 0$, а отже, згідно означення: $x \cdot z = y \cdot z$.

Отже, обидві частини числової рівності можна збільшити на якесь число і помножити на якесь число.

3, 4). *Скорочення для додавання і множення* $(\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x + z = y + z \Rightarrow x = y)$ і $(\forall x, y, z \in \mathbf{R} : z \neq 0 \wedge x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y)$ відповідно.

Ці дві властивості ще інакше можна назвати властивостями *монотонності віднімання і ділення* відповідно і подати в такому вигляді: $(\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x = y \Rightarrow x - z = y - z)$ і $(\forall x, y, z \in \mathbf{R} : z \neq 0 \wedge x = y \Rightarrow x : z = y : z)$ відповідно.

Доведення. *Для віднімання*: Згідно означення маємо: $x + z = y + z \Leftrightarrow (y + z) - (x + z) = 0$, $x = y \Leftrightarrow y - x = 0$.

Розглянемо різницю: $y - x = (y + z) - (x + z) = 0$, бо $(y + z) - (x + z) = 0$.

Отже, $y - x = 0$, а отже, згідно означення: $x = y$.

Для ділення: Згідно означення маємо: $x \cdot z = y \cdot z \Leftrightarrow y \cdot z - x \cdot z = 0$, $x = y \Leftrightarrow y - x = 0$. Розглянемо різницю: $y - x = y \cdot z - x \cdot z = 0$, бо $y \cdot z - x \cdot z = 0$.

Отже, $y - x = 0$, а отже, згідно означення: $x = y$.

Отже, обидві частини числової рівності можна зменшити на якесь число і поділити на якесь число.

Наприклад: $4 = 4 \Leftrightarrow 4 + 7 = 4 + 7$, $9 = 9 \Leftrightarrow 9 \cdot 2 = 9 \cdot 2$, $4 = 6 \Leftrightarrow 4 + 7 = 6 + 7$. Як бачимо дані еквіваленції завжди істинні, бо перше і друге висловлення в кожній з них набувають однакового значення істинності.

5). *Адитивності* $\left(\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R} : \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \right)$.

Доведення. Згідно означення маємо: $x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 0$, $x_3 = x_4 \Leftrightarrow x_4 - x_3 = 0$, $x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \Leftrightarrow (x_2 + x_4) - (x_1 + x_3) = 0$.

$(x_2 + x_4) - (x_1 + x_3) = x_2 + x_4 - x_1 - x_3 = x_2 - x_1 + x_4 - x_3 =$
$= (x_2 - x_1) + (x_4 - x_3) = 0 + 0 = 0$, бо $x_2 - x_1 = 0$, $x_4 - x_3 = 0$.

Отже, $(x_2 + x_4) - (x_1 + x_3) = 0$, а отже, згідно означення: $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$.

Цю властивість можна узагальнити на випадок більшої кількості числових рівностей:

$$\left(\forall x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \in \mathbf{R}, n = 2k, k \in \mathbf{N} : \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_n \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_3 + \ldots + x_{n-1} = x_2 + x_4 + \ldots + x_n \right).$$

Отже, обидві частини істинних числових рівностей можна почленно додавати і при цьому отримувати істинну числову рівність.

6). $\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R} : \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - x_3 = x_2 - x_4) \wedge (x_3 - x_1 = x_4 - x_2)$.

Доведення. Згідно означення маємо:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0,$$

$$x_3 = x_4 \Leftrightarrow x_4 = x_3 \Leftrightarrow x_3 - x_4 = 0 \Leftrightarrow x_4 - x_3 = 0,$$

$$x_1 - x_3 = x_2 - x_4 \Leftrightarrow (x_2 - x_4) - (x_1 - x_3) = 0 \text{ і}$$

$$x_3 - x_1 = x_4 - x_2 \Leftrightarrow (x_4 - x_2) - (x_3 - x_1) = 0.$$

$(x_2 - x_4) - (x_1 - x_3) = x_2 - x_4 - x_1 + x_3 = x_2 - x_1 + x_3 - x_4 =$
$= (x_2 - x_1) + (x_3 - x_4) = 0 + 0 = 0$, бо $x_2 - x_1 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$ і
$(x_4 - x_2) - (x_3 - x_1) = x_4 - x_2 - x_3 + x_1 = x_4 - x_2 - x_3 + x_1 =$
$= (x_4 - x_3) + (x_1 - x_2) = 0 + 0 = 0$, бо $x_1 - x_2 = 0$, $x_4 - x_3 = 0$.

Отже, $(x_2 - x_4) - (x_1 - x_3) = 0$ і $(x_4 - x_2) - (x_3 - x_1) = 0$, а отже, згідно означення: $x_1 - x_3 = x_2 - x_4$ і $x_3 - x_1 = x_4 - x_2$.

Отже, обидві частини числової рівності можна почленно віднімати (від першої другу і від другої першу).

Цю властивість також можна узагальнити на випадок більшої кількості числових рівностей.

7). $\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}: \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_4.$

Доведення. Згідно означення маємо: $x_3 = x_4 \Leftrightarrow x_4 - x_3 = 0$, $x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_4 \Leftrightarrow x_2 \cdot x_4 - x_1 \cdot x_3 = 0$.

$x_2 \cdot x_4 - x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_4 - x_2 \cdot x_3 = x_2(x_4 - x_3) = 0$, бо $x_4 - x_3 = 0$.

Отже, $x_2 \cdot x_4 - x_1 \cdot x_3 = 0$, а отже, згідно означення: $x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_4$.

Цю властивість можна узагальнити на випадок більшої кількості числових рівностей:

$$\left(\forall x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \in \mathbf{R}, n = 2k, k \in \mathbf{N}: \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_n \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} = x_2 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_n \right).$$

Отже, обидві частини істинних числових рівностей можна почленно перемножувати і при цьому отримувати істинну числову рівність.

8). $\forall x, y \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N} : x = y \Rightarrow x^n = y^n$.

Доведення. Згідно означення маємо: $x = y \Leftrightarrow y - x = 0$, $x^n = y^n \Leftrightarrow y^n - x^n = 0$.

$$y^n - x^n = yy^{n-1} - xx^{n-1} = yy^{n-1} - yx^{n-1} = y(y^{n-1} - x^{n-1}) = y(yy^{n-2} - yx^{n-2}) =$$
$$= y^2(y^{n-2} - x^{n-2}) = \ldots = y^{n-1}(y^{n-(n-1)} - x^{n-(n-1)}) = y^{n-1}(y - x) = 0, \text{ бо } y - x = 0.$$

Отже, $y^n - x^n = 0$, а отже, згідно означення: $x^n = y^n$.

Отже, обидві частини числової рівності можна підносити до степеня з натуральним показником.

9). $\forall x, y \in \mathbf{R} : x = y \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$.

Доведення. Згідно означення маємо:

$x = y \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow x - y = 0$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 0$.

Для доведення досить помітити, що $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x - y}{xy} = 0$, бо $x - y = 0$. То $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 0$, а отже: $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$.

3. Числові нерівності. Одним з найважливіших прикладів відношення порядку є відношення „менше” на множині дійсних чисел **R**, що позначається знаком <. Це відношення є строгого лінійного порядку, тому що воно: по-перше – *асиметричне* $(\forall x, y \in \mathbf{R} : x < y \Rightarrow \overline{y < x})$ (читається так: для будь-яких дійсних чисел x, y виконується: якщо x менше y, то y не менше x), по-друге – *транзитивне* $(\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x < y, y < z \Rightarrow x < z)$ (для будь-яких дійсних чисел x, y, z виконується: якщо $x < y$, $y < z$ то $x < z$) і по-третє – *зв'язне* $\left(\forall x, y \in \mathbf{R} : x \neq y \Rightarrow (x < y) \vee (y < x)\right)$ (для будь-яких двох різних дійсних чисел x і y виконується одне і тільки одне з відношень $x < y$ або $y < x$).

Як протилежне до відношення „менше" введемо відношення „більше", яке позначається знаком >, і яке має такі самі властивості що і відношення „менше". Нерівність $y > x$ еквівалентна (рівносильна) нерівності $x < y$ – обоє нерівностей одночасно істинні або хибні. Знаки нерівностей < і > взаємно-протилежні.

Істинні такі твердження, які можна вважати емпіричними, і які вводяться як означення:

1) *нерівність $x < y$ називається числовою нерівністю і є істинною в тому і тільки в тому випадку, коли $y - x > 0$, тобто* $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$;

Якщо є зрозумілим доведення твердження $x = y \Leftrightarrow y - x = 0$, то дане твердження легко зрозуміти і довести по аналогії.

2) *з того, що $x > 0$ і $y > 0$ випливає нерівність $x + y > 0$.*

3) *з того, що $x > 0$ і $y > 0$ випливає нерівність $x \cdot y > 0$*

Два останні твердження виливають з самих означень суми і добутку додатних дійсних чисел.

З зазначених властивостей, відношення „менше" можна вивести всі інші його властивості.

1). $(\forall x, y, a \in \mathbf{R} : x < y \Rightarrow x + a < y + a)$. Відношення $x < y$ зберігається при додаванні до обох частин нерівності того самого числа (ця властивість називається *монотонністю відношення* *порядку щодо додавання*). Іншими словами, якщо $x < y$, то для будь-якого числа a виконується нерівність $x + a < y + a$.

Справді, з $x < y$ випливає, що $y - x > 0$. Але $(y + a) - (x + a) = y - x > 0$, і тому згідно означення маємо $x + a < y + a$.

Оскільки $x - a = x + (-a)$, $y - a = y + (-a)$, то з $x < y$ випливає, що $x - a < y - a$, тобто $(\forall x, y, a \in \mathbf{R} : x < y \Rightarrow x - a < y - a)$ (ця властивість називається *монотонністю відношення порядку щодо віднімання*).

2). Якщо $x < y$ і $a < b$, то $x + a < y + b$, тобто $\left(\forall x, y, a, b \in \mathbf{R} : (x < y) \wedge (a < b) \Rightarrow x + a < y + a\right)$

Справді, у цьому випадку $y - x > 0$ і $b - a > 0$, а тому і $(y + b) - (x + a) = y + b - x - a = (y - x) + (b - a) > 0$.

Отже: $(y + b) - (x + a) > 0 \;\Leftrightarrow\; x + a < y + b$.

3). Якщо $x < y$ і $a > b$, то $x - a < y - b$.

Справді, у цьому випадку $y - x > 0$ і $a - b > 0$, а тому і $(y - b) - (x - a) = y - b - x + a = y - x + a - b = (y - x) + (a - b) > 0$.

Отже: $(y - b) - (x - a) > 0 \;\Leftrightarrow\; x - a < y - b$.

Як результат: числові нерівності протилежних знаків можна почленно віднімати, залишаючи знак першої нерівності. Наприклад: $3<5 \wedge 4>1 \Rightarrow 3-4<5-1$, або $3<15 \wedge 2>1 \Rightarrow 3-2<15-1$, чи $6>5 \wedge 2<10 \Rightarrow 6-2>5-10$, або $25>1 \wedge 2<3 \Rightarrow 25-2>1-3$.

4). Відношення $x < y$ зберігається при множенні обох частин нерівності на те ж саме додатне число, тобто з $x < y$ і $a > 0$ випливає нерівність $ax < ay$ (ця властивість називається *монотонністю відношення порядку щодо множення на додатне число*).

Справді, з $x < y$ випливає, що $y - x > 0$. Так як згідно означення – добуток двох додатних чисел додатне число, то й

$a \cdot (y - x) > 0$. Так як $a \cdot (y - x) = ay - ax > 0$, то звідси випливає, що $ax < ay$.

5). Якщо x, y, a, b – додатні числа, то з нерівностей $x < y$ і $a < b$ випливає нерівність $ax < by$.

Справді, з $x < y$ і додатності a випливає, що $ax < ay$, а з $a < b$ і додатності y випливає, що $ay < by$. Але тоді в силу транзитивності відношення нерівності з $ax < ay$ й $ay < by$ випливає, що $ax < by$.

Отже, числові нерівності з додатними членами можна почленно перемножувати зберігаючи знак нерівності.

6). При зміні знаків чисел нерівність змінюється нерівністю протилежного знаку: якщо $x < y$, то $-x > -y$.

Справді, $x < y$ означає, що $y - x > 0$. Але $y - x = y + (-x) = (-x) + y = (-x) - (-y)$, а тому $(-x) - (-y) > 0$, тобто $-y < -x$, що згідно означення те саме, що і $-x > -y$.

Дана властивість говорить, що якщо обидві сторони нерівності помножити на (-1), то знак нерівності поміняється на протилежний.

7). При множенні обох частин нерівності на від'ємне число знак нерівності змінюється, знаком протилежного значення: якщо $x < y$ і a від'ємне ($a < 0$), то $ax > ay$.

В силу того, що будь-яке від'ємне число дорівнює добутку свого модуля на (-1), множення на від'ємне число a можна замінити множенням на додатне число $|a|$, при якому знак нерівності зберігається, і множенням на (-1), при якому цей знак міняється на знак протилежного значення.

8). Якщо $0 < x < y$ або $x < y < 0$, то $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Для доведення досить помітити, що $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}$. Так як числа x і y за умовою мають однакові знаки, то xy – додатне число, а тому знаки $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ і $y-x$ однакові. Так, як $y-x$ додатне, бо $x<y$, то $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ – додатне, тобто $\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$.

Введемо означення відношень „менше або рівне”, „більше або рівне”, які позначаються відповідно знаками ≤, ≥. Нерівність $x \le y$ є диз'юнкцією двох нерівностей $x<y$, $x=y$ і тому істинна, якщо істинна хоча б одна з них:

$$x \le y = (x<y) \vee (x=y).$$

Наприклад, істинно, що $4 \le 10$, оскільки істинно, що $4<10$. Точно так само істинно, що $4 \le 4$, тому що істинно, що $4=4$. А нерівність $4 \le 3$ хибна, оскільки хибні обоє висловлення $4<3$ і $4=3$.

Нерівність $y \ge x$ еквівалентна (рівносильна) нерівності $x \le y$ – обоє нерівностей одночасно істинні або хибні. Знаки нерівностей ≤ і ≥ взаємно-протилежні.

Дане відношення „менше або рівне” („більше або рівне”) є відношенням нестрогого порядку у множині чисел, бо воно транзитивне (якщо $x \le y$, $y \le z$ то $x \le z$, аналогічно якщо $x \ge y$, $y \ge z$ то $x \ge z$) і антисиметричне (якщо $x \le y$ і $x \ne y$ то $\overline{y \le x}$, аналогічно якщо $x \ge y$ і $x \ne y$ то $\overline{y \ge x}$).

Подвійна нерівність $x<y<z$ є кон’юнкцією двох нерівностей $x<y$, $y<z$ і тому вона істинна лише за умови, що істинні обоє ці нерівності:

$$x < y < z = (x < y) \wedge (y < z).$$

Наприклад, істинна подвійна нерівність $4 < 8 < 10$, тому що істинні обоє нерівності $4 < 8$ і $8 < 10$. А подвійна нерівність $4 < 10 < 8$ хибна, тому що, хоча нерівність $4 < 10$ істинна, нерівність $10 < 8$ хибна.

4. Рівність і нерівність числових виразів. Нехай дані три числові вирази *A*, *B* і С. Ми можемо скласти з цих виразів рівності і нерівності числових виразів. Наприклад, деякі з них: рівність $A = B$, подвійна рівність $A = B = C$ і нерівності $A < B$, $A > B$, а також нерівності $A \le B$, $A \ge B$, подвійні нерівності $A < B < C$, $C \le B < A$ (можливі і інші). Ці рівності і нерівності є висловленнями, які можуть бути як істинними, так і хибними.

Два числові вирази *A* і *B*, сполучені знаком дорівнює утворюють рівність числових виразів, яку позначають $A = B$, і рівність $A = B$ вважається істинною тоді і тільки тоді, коли обидва вирази *A* і *B* мають числові значення, причому ці значення однакові (рівні).

Іноді значення виразу *A* позначають так: Зн *A*.

Отже, $A = B \Leftrightarrow$ Зн A = Зн B.

Наприклад, істинна рівність $4 \cdot 4 = 9 + 7$, тому що і ліва і права частини цієї рівності мають значення 16. А рівність $9 - 5 = 7 - 2$ помилкова (хибна), тому що значення лівої частини дорівнює 4, а права частина має значення 5. Хибна і рівність $8 : (4 - 4) = 7$, тому що вираз $8 : (4 - 4)$ не має числового значення.

Відзначимо, що якщо вважати відомою лише множину натуральних чисел, то добуток $2 \cdot 3$ має інше числове значення ніж сума $4 - 8 + 10$, тому що на множині **N** не визначене значення виразу $4 - 8$. Але після розширення множини натуральних чисел і введення від’ємних чисел рівність $2 \cdot 3 = 4 - 8 + 10$ стає істинною, оскільки обидві її частини мають значення 6.

Рівність $A = 0$ вважається істинною тоді і тільки тоді, коли значення виразу A дорівнює нулю (Зн $A = 0$).

Отже, $A = 0 \Leftrightarrow$ Зн $A = 0$.

Нерівність $A < B$, де A і B – числові вирази, ми будемо вважати істинною, якщо A і B мають числові значення, причому числове значення виразу A менше числового значення виразу B.

Отже, $A < B \Leftrightarrow$ Зн $A <$ Зн B.

Наприклад, істинна нерівність $(18 - 3) : 5 < 3 + 4$, тому що $(18 - 3) : 5$ має значення 3, $3 + 4$ має значення 7, а $3 < 7$.

Оскільки записи вигляду $A = B$, $C < D$ і т. д., де A, B, C, D – числові вирази, є висловленнями, ми можемо виконувати над ними логічні операції кон’юнкції, диз'юнкції, імплікації і т. д.

Наприклад, нерівність $A \leq B$ є диз'юнкцією двох: рівності і нерівності – $A < B$, $A = B$:

$$A \leq B = A < B \vee A = B.$$

Дане висловлення істинне, якщо істинне хоча б одне з висловлень $A < B$, $A = B$. Наприклад, вірно (істинно), що $(2 \cdot 4 + 15) \cdot 2 \leq 35 + 19$, тому що значення виразу $(2 \cdot 4 + 15) \cdot 2$ дорівнює 46, значення виразу $35 + 19$ дорівнює 54, а нерівність $46 < 54$ істинна.

Подвійна нерівність $A < B < C$ є кон’юнкцією двох нерівностей $A < B$, $B < C$. Дане висловлення $A < B < C$ істинне, якщо істинні обидві нерівності $A < B$, $B < C$. Наприклад, вірно (істинно), що $16 + 4 < 125 : 5 < 3 \cdot 10$. Справді, значення $16 + 4$ дорівнює 20, значення $125 : 5$ дорівнює 25, а значення $3 \cdot 10$

дорівнює 30. Тому що дійсно $20 < 25$ і $25 < 30$, то подвійна нерівність істинна.

5. Властивості рівностей та нерівностей числових виразів.

В попередніх параграфах ми розглядали властивості відношень „дорівнює”, „менше” а також „більше”, які являються найпростішими властивостями числових рівностей і нерівностей. Для того, щоб порівнювати числові вирази, потрібно, виконавши відповідні арифметичні дії, знайти їх числове значення. Тобто рівності та нерівності числових виразів зводитимуться до числових рівностей та нерівностей відповідно (рівностей та нерівностей значень числових виразів). В силу цього найпростіші властивості числових рівностей і нерівностей будуть найпростішими властивостями рівностей та нерівностей числових виразів і крім цього, з них можна вивести і інші основні властивості рівностей та нерівностей числових виразів.

Нехай нам дано числові вирази A, B, C і D і нехай значення кожного з них дорівнює числу x_1, x_2, x_3 і x_4 відповідно, тобто Зн $A = x_1$, Зн $B = x_2$, Зн $C = x_3$ і Зн $D = x_4$. Складемо перелік основних властивостей рівностей та нерівностей числових виразів. А саме:

1°. *Рефлексивність* рівності числових виразів: будь-який числовий вираз рівний сам собі, тобто $A = A$.

Доведення випливає з властивості рефлексивності відношення „дорівнює” на множині чисел (значень числових виразів).

2°. *Антирефлексивність* нерівності числових виразів: будь-який числовий вираз не менший і не більший сам себе, тобто $\overline{A < A}$ і $\overline{A > A}$.

Доведення випливає з властивості антирефлексивності відношень „менше” і „більше” на множині чисел (значень числових виразів).

3°.*Симетричність* рівності числових виразів:

$$A = B \Leftrightarrow B = A.$$

Доведення випливає з властивості симетричності відношення „дорівнює”: $x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1$.

4°.*Несиметричність* (*асиметричність*) нерівності числових виразів:

$$A < B \Leftrightarrow B > A.$$

Доведення: з властивості асиметричності відношення „менше” випливає: $x_1 < x_2 \Rightarrow \overline{x_2 < x_1}$, отже $x_2 > x_1$ або $x_2 = x_1$ і $x_2 > x_1 \Rightarrow \overline{x_1 > x_2}$, отже $x_1 < x_2$ або $x_1 = x_2$. Так як $\overline{x_1 = x_2}$, бо інакше $\overline{x_1 < x_2} \wedge \overline{x_2 > x_1}$, то $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 > x_1$ і $x_2 > x_1 \Rightarrow x_1 < x_2$, отже $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_2 > x_1$.

5°.*Монотонність додавання і віднімання* для рівності числових виразів:

$$A = B \Leftrightarrow A + C = B + C.$$

Доведення випливає з властивості монотонність додавання і з властивості монотонність віднімання (скорочення відносно додавання) для числової рівності: $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_3$ і $x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \Rightarrow x_1 = x_2$, а отже $x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_3$.

6°.*Монотонність додавання і віднімання* для нерівності числових виразів:

$$A < B \Leftrightarrow A + C < B + C;$$

$$A > B \Leftrightarrow A + C > B + C.$$

Доведення випливає з властивості монотонності додавання і з властивості монотонності віднімання (скорочення відносно додавання) для числової нерівності: $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + x_3 < x_2 + x_3$ і $x_1 + x_3 < x_2 + x_3 \Rightarrow x_1 < x_2$, а отже $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_3 < x_2 + x_3$. Аналогічне доведення при відношенні „більше”.

Якщо до (*від*) *обох частин істинної рівності чи нерівності додати* (*відняти*) *те саме число, то дістанемо істинну рівність чи нерівність відповідно; якщо до* (*від*) *обох частин хибної рівності чи нерівності додати* (*відняти*) *одне й те ж число, то дістанемо хибну рівність чи нерівності відповідно.*

7°. *Адитивність* для рівності числових виразів:

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \Rightarrow A + C = B + D.$$

Доведення випливає з властивості адитивності для числових рівностей: $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_4$.

Аналогічно, якщо крім того, що $A = B$ і $C = D$ існують ще два рівні за значенням числові вирази, наприклад $E = F$, то $A + C + E = B + D + F$ і т.д.

Отже, відповідні частини рівностей числових виразів можна почленно додавати і при цьому отримувати рівність числових виразів, права і ліва частина якої являється сумою відповідно правих і лівих частин вихідних рівностей.

8°. *Адитивність* для нерівності числових виразів:

$$\begin{cases} A < B \\ C < D \end{cases} \Rightarrow A + C < B + D.$$

Доведення випливає з властивості адитивності для числових нерівностей: $\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_3 < x_4 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_3 < x_2 + x_4$.

Якщо, крім того, що $A<B$ і $C<D$ існують ще два числові вирази E і F, причому $E<F$, то $A+C+E<B+D+F$.

Аналогічно: $\begin{cases} A>B \\ C>D \end{cases} \Rightarrow A+C>B+D.$

Отже, відповідні частини нерівностей числових виразів одного змісту (в них мають стояти або тільки знаки „<” або тільки знаки „>”) можна почленно додавати і при цьому отримувати нерівність числових виразів того самого змісту, права і ліва частина якої являється сумою відповідно правих і лівих частин вихідних нерівностей.

9°. *Монотонність множення і ділення* для рівності числових виразів:

$$A=B \Leftrightarrow A\cdot C=B\cdot C,\ \text{Зн } C\neq 0.$$

Доведення випливає з властивості монотонності множення і з властивості монотонність ділення (скорочення відносно множення) для числової рівності: $x_1=x_2 \Rightarrow x_1\cdot x_3=x_2\cdot x_3$ і $x_3\neq 0 \wedge x_1\cdot x_3=x_2\cdot x_3 \Rightarrow x_1=x_2$, а отже $x_1=x_2 \Leftrightarrow x_1\cdot x_3=x_2\cdot x_3,\ x_3\neq 0$.

10°. *Монотонність множення і ділення* для нерівності числових виразів:

$$A<B \ \wedge\ \text{Зн } C>0 \quad \Leftrightarrow \quad A\cdot C<B\cdot C;$$

$$A<B \ \wedge\ \text{Зн } C>0 \quad \Leftrightarrow \quad A/C<B/C;$$

$$A<B \ \wedge\ \text{Зн } C<0 \quad \Leftrightarrow \quad A\cdot C>B\cdot C;$$

$$A<B \ \wedge\ \text{Зн } C<0 \quad \Leftrightarrow \quad A/C>B/C;$$

$$A<B \ \wedge\ \text{Зн } C=0 \quad \Rightarrow \quad A\cdot C=B\cdot C.$$

Їх доведення випливає з властивостей монотонності множення і з властивості монотонності ділення (скорочення відносно множення) для числової нерівності, а також з властивості множення числової нерівності на (-1) (*при множенні* (*діленні*) *обох частин числової нерівності на* (-1) *знак нерівності змінюється на протилежний*, і як результат: $A < B \Leftrightarrow -A > -B$) і з означення множення на нуль.

Отже, *при множенні* (*діленні*) *обох частин нерівності на те саме додатне число знак нерівності не змінюється, а при множенні* (*діленні*) *на від'ємне число знак нерівності змінюється на протилежний.*

При множенні обох частин нерівності на нуль нерівність перетворюється в рівність 0 = 0.

Якщо обидві частини істинної рівності чи нерівності помножити (або поділити) на те саме додатне число, то дістанемо істинну рівність чи нерівність відповідно. Якщо обидві частини хибної рівності чи нерівності помножити (поділити) на одне й те ж додатне число, то дістанемо хибну рівність або нерівність відповідно.

При множенні на нуль із хибної рівності або нерівності дістанемо істинну рівність.

11°. $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \Rightarrow A - C = B - D$. Доведення випливає з відповідної властивості для числових рівностей: $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_3 = x_2 - x_4$.

12°. $\begin{cases} A < B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow A - C < B - D$. Доведення випливає з відповідної властивості для числових нерівностей: $\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_3 > x_4 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_3 < x_2 - x_4$.

Аналогічно $\begin{cases} A > B \\ C < D \end{cases} \Rightarrow A - C > B - D$.

Як результат: числові нерівності протилежних знаків можна почленно віднімати (праву сторону від правої, а ліву від лівої), залишаючи знак нерівності від якої віднімали.

13°. $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases} \Rightarrow A\cdot C=B\cdot D$. Доведення випливає з відповідної властивості для числових рівностей.

Числові рівності можна почленно перемножувати (праву сторону на праву, а ліву на ліву).

14°. $\begin{cases} A>B \\ C>D \end{cases} \Rightarrow A\cdot C>B\cdot D$, якщо $A>0, B>0, C>0, D>0$. Доведення випливає з відповідної властивості для числових нерівностей.

Числові нерівності з додатними членами можна почленно перемножувати (*праву сторону на праву, а ліву на ліву*)*, зберігаючи при цьому знак нерівності незмінним.*

15°. $A=B \Rightarrow A^n=B^n$, $n\in\mathbf{N}$. Доведення випливає з відповідної властивості для числової рівності.

Властивість $A^n=B^n \Rightarrow A=B$ виконуватиметься, якщо вважати, що $A\geq 0, B\geq 0$, або що n – непарне (бо корінь парної степені з від'ємного числа не існує).

Обидві частини рівності можна піднести до степеня з натуральним показником.

16°. $A>B \Leftrightarrow A^n>B^n$, якщо $A>0, B>0, n\in\mathbf{N}$. Доведення випливає з відповідної властивості для числової нерівності.

Обидві частини нерівності з додатними членами можна підносити до степеня з натуральним показником.

17º. $A=B \Leftrightarrow \frac{1}{A}=\frac{1}{B}$, тут $A\neq 0, B\neq 0$. Доведення випливає з відповідної властивості для числової рівності.

18º. $A>B \Leftrightarrow \frac{1}{A}<\frac{1}{B}$, тут $A\neq 0, B\neq 0, A\cdot B\neq 0$. Доведення випливає з відповідної властивості для числової нерівності.

Відношення рівності числових виразів має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності, тобто є відношенням еквівалентності і тому множина усіх числових виразів розбивається на класи еквівалентності, що складаються з виразів, що мають те саме значення. Наприклад, у той самий клас еквівалентності входять вирази 5 + 1, 9 – 3, 2 · 3, 12 : 2 і т. д. – усі вони мають значення 6.

6. Методи швидкого виконання арифметичних дій.

1). Методи швидкого додавання і віднімання.

Метод округлення. Цей метод ґрунтується на зміні суми чи різниці у залежності від зміни компонентів і застосовується у тому випадку, коли хоча б один із компонентів є числом, близьким до круглої десятки, сотні, тисячі і т. д.

1. Якщо один з доданків, округлюючи, збільшити на декілька одиниць, то **з** одержаної суми треба відняти стільки ж одиниць.

Наприклад.
549 + 1998 = 549 + (1998 + 2) – 2 = 549 + 2000 – 2 = 2549 – 2 = 2547.

2. Якщо один доданок збільшити на декілька одиниць, а другий зменшити на стільки ж одиниць, то сума не зміниться.

Наприклад. 524 + 1998 = 522 + 2000 = 2522.

3. Якщо від'ємник збільшити (зменшити) на декілька одиниць, то щоб різниця не змінилась, треба і зменшуване збільшити (зменшити) на стільки ж одиниць.

Наприклад. 54 – 39 = 54 + 1 – (39 + 1) = 55 – 40 = 15;

944 – 537 = 944 + 3 – (537 + 3) = 947 – 540 = 407.

4. Якщо зменшуване зменшити (збільшити) на декілька одиниць, то одержану різницю треба збільшити (зменшити) на стільки ж одиниць.

Приклади.

1128 – 700 = (1000 – 700) + 128 = 300 + 128 = 428;

243 – 150 = 250 – 150 – 7 = 100 – 7 = 93.

Використання властивостей додавання і віднімання. Цей метод ґрунтується на відповідних законах.

Приклади

258 + 579 + 142 = (258 + 142) + 579 = 400 + 579 = 979;

1294 + 875 – 184 = (1294 – 184) + 875 = 1110 + 875 = 1985;

508 – 152 – 36 = 508 – (152 + 36) = 508 – 188 = 408 – 8 – 80 = 320;

2). Методи швидкого множення і ділення.

Множення на число, яке близьке до одиниці деякого розряду.

Приклади

$245 \cdot 98 = 245 \cdot (100 - 2) = 24500 - 490 = 24010$;

$432 \cdot 198 = 432 \cdot (200 - 2) = 86400 - 864 = 85536$;

$1264 \cdot 101 = 1264 \cdot (100 + 1) = 126400 + 1264 = 127664$;

$231 \cdot 302 = 231 \cdot (300 + 2) = 69300 + 462 = 69762$.

Множення на 9, 99 і 999. Щоб помножити число *a* на число, записане дев'ятками, можна до *a* дописати справа стільки нулів, скільки дев'яток у множнику, і від результату відняти *a*.

Приклади.

$897 \cdot 9 = 897 \cdot (10 – 1) = 8970 – 897 = 8073$;

$248 \cdot 99 = 248 \cdot (100 – 1) = 24800 – 248 = 24552$;

$87 \cdot 999 = 87 \cdot (1000 – 1) = 87000 – 87 = 86913$.

Множення двозначного числа на 11:

а) щоб помножити двозначне число, сума цифр якого менша 10, на 11, досить між цифрами числа записати суму його цифр.

Приклади. $53 \cdot 11 = 583$; $72 \cdot 11=792$; $26 \cdot 11=286$.

б) щоб помножити на 11 двозначне число, сума цифр якого більша або дорівнює 10, досить між цифрою десятків, збільшеною на 1, і цифрою одиниць написати число, що є різницею між сумою цифр числа і числом 10.

Приклади $47 \cdot 11 = 517$; $98 \cdot 11 = 1078$; $99 \cdot 11 = 1089$.

Множення на 5, 25, 125. Щоб помножити деяке число на 5, 25 чи 125, досить розділити його відповідно на 2, 4, чи 8 і результат перемножити відповідно на 10, 100, 1000.

Приклади.

$28 \cdot 5 = 28 : 2 \cdot 10 = 140$; $36 \cdot 25 = 36 : 4 \cdot 100 = 900$;

$72 \cdot 125 = 72 : 8 \cdot 1000 = 9000$; $4081 \cdot 125 = 4057 : 8 \cdot 1000 = 507000$.

Якщо число не ділиться без остачі на 2, 4, 8, то його записують у вигляді суми чи різниці двох чисел, перше з яких є число близьке до даного і ділиться без остачі на 2, 4 чи 8, а друге – залишок, і виконують відповідне множення.

Приклади.

$29 \cdot 5 = (28 + 1) \cdot 5 = 28 \cdot 5 + 5 = 140 + 5 = 145$;

$39 \cdot 25 = (40 – 1) \cdot 25 = 40 \cdot 25 – 25 = 1000 – 25 = 975$;

$69 \cdot 125 = (72 – 3) \cdot 125 = 72 \cdot 125 – 3 \cdot 125 = 9000 – 375 = 8625$.

Щоб розділити деяке число на 5, 25 чи 125, досить помножити його відповідно на 2, 4, 8 і поділити відповідно на 10, 100, 1000.

Приклади.

$345 : 5 = 345 \cdot 2 : 10 = 690 : 10 = 69;$

$2125 : 25 = 2125 \cdot 4 : 100 = 8500 : 100 = 85;$

$1125 : 125 = 1125 \cdot 8 : 1000 = 9000 : 1000 = 9.$

Використання властивостей множення та ділення.

Приклади.

$20 \cdot 31 \cdot 5 = (20 \cdot 5) \cdot 31 = 100 \cdot 31 = 3100;$

$25 \cdot 14 \cdot 8 = (25 \cdot 8) \cdot 14 = 200 \cdot 14 = 2800;$

$31 \cdot 39 : 3 = 31 \cdot (39 : 3) = 31 \cdot 13 = 31 \cdot (10 + 3) = 310 + 93 = 403;$

$46 \cdot 7 : 2 = (46 : 2) \cdot 7 = 23 \cdot 7 = 161.$

Піднесення до квадрата двозначного числа, яке містить цифру 5:

а) щоб піднести до квадрата двозначне число, яке закінчується цифрою 5, можна число його десятків помножити на число десятків, збільшене на одиницю, і до добутку справа дописати 25.

Приклад.

Обчислити 65^2. Хід міркування: $6(6 + 1) = 6 \cdot 7 = 42$, дописавши 25, одержимо результат 4225;

б) щоб піднести до квадрата двозначне число, яке має 5 десятків, можна до 25 додати цифру одиниць і до результату дописати справа квадрат числа одиниць так, щоб в результаті вийшло чотиризначне число.

Приклади.

Обчислити 57^2. Хід міркувань: а) $25 + 7 = 32$, $7^2 = 49$, одержимо результат 3249.

Обчислити 53^2. $25 + 3 = 28$, $3^2 = 9$, оскільки має бути чотиризначне число, то одержимо результат 2809.

7. Вирази зі змінними. Деякі дані задачі можуть бути позначені не числами, а буквами. Наприклад, якщо в задачі з п. 1 відстань між містами дорівнює *a* км, то відповідь прийме вигляд:

$(a - 25 \cdot 4) : (25 + 100)$. (1)

Якщо ж відстань дорівнює *a* км, а швидкості велосипедиста й автомобіля відповідно рівні *b* і *c*, то відповідь прийме вигляд:

$(a - 4b) : (b + c)$. (2)

Ми отримали вирази з змінними. У вираз (1) входить одна змінна і, а у вираз (2) – три змінні *a*, *b* і *c*. Придаючи цим буквам різні значення, одержимо однотипні задачі з різними даними. Щоб одержати відповідь на кожну з цих задач, треба підставити відповідні значення змінних (букв) у вираз (1) або (2). Наприклад, якщо відстань між містами 240 км, швидкість велосипедиста дорівнює 15 км/год, автомобіля 45 км/год, то треба замінити у виразі (2) букву *a* на 240, букву *b* на 15, а букву *c* на 30. Отримаємо числовий вираз $(240 - 4 \cdot 15) : (15 + 45)$, значення якого дорівнює 3. У цьому випадку зустріч відбудеться через 3 год. після виїзду автомобіля.

Загальне поняття виразу зі змінними визначається точно так само, як і поняття числового виразу, тільки, крім чисел, вирази з змінними містять і букви. Якщо дано вираз, що містить, наприклад, змінні x і y, то кожному кортежу $(a; b)$, що складається з чисел, які замінюють змінних x і y, відповідає числовий вираз (числовий вираз виходить з буквеного виразу, якщо замінити букву x числом a, а букву y числом b). Якщо отриманий числовий вираз має значення, то це значення називають значенням виразу при $x = a$ і $y = b$. Вирази з змінними позначають так: $A(x)$, $B(x; y)$ і т. д. Якщо у виразі $B\,(x; y)$ замінити x числом 9, а y числом 2, то отриманий числовий вираз позначають B (9; 2).

Вирази зі змінними не є предикатами, тому що при підстановці в вирази зі змінними замість букв числових значень виходять не висловлення, а числові вирази. Значенням кожного з цих виразів є не „істина” або „хибність”, а деяке число.

Кожному виразу, що містить одну букву x, відповідає множина, що складається з чисел, які можна підставляти в цей вираз, тобто чисел, при яких цей вираз має визначене значення. Цю множину чисел називають областю визначення даного виразу. Інакше кажучи, ***областю визначення виразу*** (областю допустимих значень) називають сукупність усіх тих і тільки тих значень змінної x, для яких значення виразу буде певним дійсним числом.

Область визначення позначають D.

Наприклад, область визначення виразу 7 : (5 – x) складається з усіх чисел, крім числа 5, тобто $D=\left\{\, x \mid x \neq 5 \,\right\}$. Область же визначення виразу $\sqrt{x-3}$ складається з усіх чисел x, при яких $x-3 \geq 0$, тобто з усіх дійсних чисел, що є більшими або рівними числа 3, $D=\left\{\, x \mid x \geq 3 \,\right\}$.

В деяких випадках область X значень x заздалегідь обмежена деякими умовами. Наприклад, може бути, що x – натуральне число (наприклад, число голів худоби). Тоді й у відповідний вираз з змінною можна підставляти лише значення, що належать відповідній множині (наприклад, множині натуральних чисел), тобто значення з *природної області визначення* виразу. Отже, область визначення може бути заданою самим виразом, а може ще залежати і від умови відповідної задачі.

Наприклад, областю визначення частки $\dfrac{5}{4-x^2}$ є всі дійсні числа, крім чисел $x_{1,2}=\pm 2$, а якщо з умови задачі слідує, що x змінюється тільки на множині натуральних чисел, то областю визначення частки $\dfrac{5}{4-x^2}$ є всі натуральні числа, крім числа $x=2$.

Областю значень виразу називають сукупність усіх його значень, що відповідають значенням змінних x з області визначення цього виразу.

Якщо вираз містить дві букви (змінні), наприклад букви x і y, то під областю визначення цього виразу розуміють множину пар чисел (a; b) таких, що при заміні x на a й y на b виходить числовий вираз, що має значення.

Якщо вираз містить n букв (змінних), наприклад $x_1, x_2, ..., x_n$, то під областю визначення цього виразу розуміють множину n-ок (кортежів довжиною n) чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ таких, що при заміні всіх x_i на a_i, $i=1,2,...,n$ виходить числовий вираз, що має значення.

Наприклад: область визначення виразу $3/(2x-2y)$ складається з усіх пар чисел $(x; y)$ таких, що $x \neq y$; область визначення виразу $\dfrac{3x^2-2y+y^4}{(2x-4)(y^2-2y)}$ складається з усіх пар чисел $(x; y)$ таких, що $x \neq 2$ або $y \neq 2$ або $y \neq 0$. При будь-яких x і y пари $(2; y), (x; 2), (x; 0)$ не належать області визначення даного виразу.

У буквених виразах можна заміняти змінні не тільки числами, але й іншими буквеними виразами. Наприклад, якщо у виразі $7x + 8y$ замінити x на $2a - 3b$, а y на $9a + 5b$, вийде буквений вираз: $7(2a - 3b) + 8(9a + 5b)$.

Його значення при заданих значеннях a і b можна порахувати, спочатку знайшовши значення x і y, а потім підставивши ці значення у вихідний вираз. Наприклад, якщо $a = 7$, $b = 3$, то спочатку знаходимо, що $x = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 3 = 5$, $y = 9 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 3$, а потім, що $3x + 2y = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 21$.

Два вирази зі змінними $A(x)$ і $B(x)$ називаються тотожно рівними (утворюють *тотожність*), якщо їх області визначення співпадають і якщо при будь-якому значенні змінної x з їх області визначення, вони приймають однакові значення. Наприклад, пари тотожно рівних виразів: $(x-7)^2$ і $x^2 - 14x + 49$; $7+2x$ і $\frac{14+4x}{2}$. Вирази $\frac{x^3}{8}$ і $\frac{x^4}{8x}$ не є тотожно рівними, бо в них різні області визначення і якщо $x = 0$, то перший з них приймає значення 0, а другий не має числового значення. Але на області відмінних від нуля чисел ці два вирази тотожно рівні. Такі вирази, якщо їх прирівняти, утворюють *квазітотожність*.

Так, наприклад, рівності: $(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$; $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$; $(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$; $(a+1)(1+a) = a^2 + 2a + 1$ – тотожності, а рівності $(a+1) = \frac{a^2+2a+1}{a+1}$, $x - 3 = \frac{x^2+12x-45}{x+15}$ – квазітотожності.

Твердження про тотожну рівність двох виразів зі змінною є висловленням. Наприклад, твердження, що вираз $(2x+5)^2$ тотожно дорівнює виразу $4x^2 + 20x + 25$, можна записати так: $(\forall x):\left((2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25\right)$. Якщо в даному записі опустити квантор загальності $(\forall x)$, отримаємо: $(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$. Цей запис вже можна розглядати і як одномісний предикат (рівняння з однією змінною), про що ми поговоримо в наступному розділі.

Заміна одного виразу іншим, тотожно-рівним йому на даній множині на якій ми розглядаємо цей вираз (області визначення), називається тотожним перетворенням виразу.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: поняття числового виразу, числової рівності, числової нерівності, нестрогої нерівності ($\leq$, $\geq$) і подвійної нерівності виразу зі змінною, області визначення виразу зі змінною; властивості числових рівностей і нерівностей;

у м і т и: виділяти серед наведених записів висловлення, числові вирази, вирази зі змінною, предикати; виділяти серед наведених числових рівностей і нерівностей істинні і хибні; знаходити область визначення виразів; знаходити значення виразу; доказувати тотожності; виділяти серед наведених рівностей тотожності і квазітотожності; подавати нестрогу і подвійну числові нерівності у вигляді відповідно диз'юнкції і кон'юнкції числових нерівностей.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент в результаті вивчення даної теми:

1. Серед нижче наведених записів виділити висловлення, числові вирази, вирази зі змінною, предикати: а) $5y-7z=4$; б) $25x-4\geq 0$; в) $(40-10)/2+5\cdot 2=20+5$; г) $24/6=4x/x$; д) $2-\frac{5}{7}$; е) $84-45<40$; є) $x<y+2$; ж) $7x+6$; з) $\exists x\forall y: x+y=y$; к) $7x/3$; л) $x\cdot 0=1$; м) $\forall x\exists y: x+y=x$; н) $\exists x\forall y: x+y=x$; о) $25/5=4$; п) $\exists x: x+y=x$.

2. Знайти область визначення виразів: а) $x-4$; б) $5y-z$; в) $4/x$; г) $\dfrac{4}{x-2}$; д) $\dfrac{2}{x+y}$; е) $\dfrac{84-45}{x^2-4}$; є) $\dfrac{y^2+2}{2y}$; ж) $\dfrac{7x+6}{2x-6}$; з) $\dfrac{5/x}{2}$; к) $7x^3/3$; л) $\sqrt{x}$; м) $\sqrt{x+y}$; н) $\sqrt[4]{x+y}$; о) $\sqrt[5]{x}$; п) $\dfrac{3}{xy}$; р) $\sqrt[3]{x+y}$; с) $\dfrac{\sqrt{x+y}}{xy}$.

3. Знайти значення виразу: а) $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{5x}{1}+90$ при $x=2$; б) $y:(3-y)$ при $y=3$; в) $z:(3-x)+x^2z^3+z/(x+z-1)$ при $x=1, z=4$; г) $y^4-z/(3-y)^2+(x+z)^2$ при $x=1, y=2, z=4$.

4. Чи існує числове значення виразу, якщо в якості допустимих результатів всіх проміжкових дій розглядати лише цілі невід'ємні числа: а) $(5-4)\cdot 3+(2\cdot 3\cdot 8-4\cdot 4\cdot 3)-(35-6\cdot 5-2^2)+(26:13-2)\cdot 1-2$; б) $(111-4)\cdot 23+\left((2^3\cdot 3\cdot 8-4\cdot 4^2\cdot 3)-(35-6\cdot 5-2^2)\right)+(44:11-4)\cdot 4-22$; в) $(6-3)\cdot 9+\left((2\cdot 3\cdot(8-4)\cdot 4\cdot 3)-((35-6)\cdot 5-2^2)\right)+88:\left((22:(13-2))\cdot 1^2\right)$.

5. На якій з множин N, R, Z чи Z_0^+(множина цілих невід'ємних чисел) є тотожністю рівність: а) $\dfrac{x-2}{x}=1-\dfrac{2}{x}$; б) $\dfrac{z^2-z}{z}=z-1$; в) $(3-y)^2=9-6y+y^2$; г) $z^4-\sqrt{z^2}=z^4-z$; д) $\sqrt{(y+y)^2}=|y+y|$?

6. При яких значеннях x є тотожністю наступна рівність: а) $\dfrac{2x-3}{x}=-\dfrac{3}{x}+2$; б) $\dfrac{x^2-x}{x}=x-1$; в) $(2-x)^2+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x}=4-4x+x^2$; г) $\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)/\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{1}{x}$; д) $\dfrac{(x+3)(x-5)}{(x-5)}=(x+3)$?

7. Докажіть тотожність: а) $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$; б) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(z+y+x)(-yz-xz-xy+z^2+y^2+x^2)$.

8. Означте (назвіть) числовий вираз і знайдіть його значення:

а) $0{,}125+\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{7}{9}-(0{,}6/6)^2$; б) $(0{,}25-0{,}05)\cdot\frac{5}{8}+\frac{7}{9}-\left(\frac{11}{21}+\frac{15}{6}\right)\cdot\frac{1}{9}$;

в) $\frac{125}{25}+\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}-\frac{4}{12}\right)\right)$; г) $(0{,}05-0{,}05)\cdot\frac{5}{8}+\frac{7}{9}-\left(\frac{11}{21}+\frac{15}{6}\right)\cdot\frac{1}{9}$;

д) $16{,}445:2{,}3+(4{,}142-3{,}392):1{,}875$; е) $2{,}33-1{,}002:0{,}2\cdot(1/4+1/4)^2$;

є) $\frac{7}{34}-\frac{8}{5}:\frac{3}{7}+\frac{34}{68}:\frac{56}{28}+\frac{75}{125}:\frac{39}{130}$; ж) $(5{,}245-1{,}5)^2\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{2}-\left(\frac{110}{55}+\frac{105}{35}\right)$;

з) $1\frac{3}{5}+\left(2\frac{1}{12}-5\cdot\frac{3}{4}+1\right)=2\frac{14}{15}$; к) $\left(\left(1\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)\cdot1\frac{8}{19}+\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)\cdot21\frac{1}{3}$.

9. Перевірте істинність даної числової рівності і помноживши почленно обидві її частини на заданий в дужках множник, перевірте істинність отриманої числової рівності. Поясніть відповідь. а) $4\cdot36=16\cdot9\,\big|(4)$; б) $1+3=4\,\big|(2)$; в) $8{,}7\cdot123{,}789=4{,}35\cdot247{,}578\big|(2)$;

г) $4+306=290+20\;\Big|(\frac{1}{31})$; д) $8{,}7+123{,}789=-115{,}089+247{,}578\;\Big|(\frac{1}{2})$;

е) $36:4=81:9\,\big|(-2)$; є) $8+88{,}7\cdot1123{,}789=2\cdot4+44{,}35\cdot2247{,}578\big|(-2)$;

ж) $2^3\cdot3+5^2\cdot4\cdot6=2^2\cdot6+(2\cdot3)\cdot(2\cdot5)\;\Big|(-\frac{1}{12})$; з) $\frac{306}{9}=\frac{1496}{44}\;\Big|(-\frac{1}{2\cdot17})$.

10. Сформулюйте властивості істинних числових рівностей і запишіть їх з допомогою символів логіки висловлень.

11. Придумайте будь-яку істинну числову рівність. Додайте до обох її частин число: а) 2; б) –3; в) 0; г) d; д) $-d$. Чи є отримана рівність істинною?

12. Придумайте будь-яку істинну числову рівність. Помножте обидві її частини на число: а) 3; б) –4; в) 0; г) q; д) $-q$. Чи є отримана рівність істинною?

13. Які з висловлень є істинними: 1) $3>1$; 2) $3<5$; 3) $3>4$; 4) $4<2$; 5) $-2>-5$; 6) $-1<-3$; 7) $-11<-30$; 8) $7\ge 7$; 9) $7\ge 5$; 10) $3\le 12$; 11) $4\le 4$; 12) $7\ge 8$; 13) $7\le 5$; 14) $8\ge 9$; 15) $4\ge 4$; 16) $2+1>2-1$; 17) $1+2<5+0$; 18) $3\cdot 1>2^2$; 19) $4<\sqrt{4}$; 20) $-1\cdot 2>-1-4$; 21) $-1\cdot 1<-1\cdot 3$; 22) $-10-1<-3\cdot 10$; 23) $\sqrt{49}\ge 3+4$; 24) $6+1\ge 8-3$; 25) $64/16-1\le 4$; 26) $7-3\le\sqrt[3]{64}$; 27) $5{,}5+1{,}5\ge 10-2$; 28) $7{,}3-0{,}3\le 5{,}55-0{,}55$; 29) $2^3\ge 3^2$; 30) $2^2\ge\sqrt{16}$.

14. Порівняйте значення числових виразів і поставте один зі знаків „<”, „>” так, щоб отримати істинну числову нерівність (спробуйте спочатку порівняти не виконуючи точних обрахунків): а) $4\cdot 35$ і $16\cdot 9$; б) $1+3$ і 5; в) $-8{,}7\cdot 123{,}788$ і $-4{,}35\cdot 247{,}578$; г) $4+306$ і $289+20$; д) $2\cdot(8{,}7+123{,}789)$ і $(-6)\cdot(-115{,}089-247{,}578)$; е) $36:4-1$ і $72:9+1$; є) $-8+88{,}7\cdot 1123{,}789$ і $2\cdot 4-44{,}35\cdot 2247{,}578$; ж) $2^3\cdot 3+5^2\cdot 4\cdot 6$ і $2^3\cdot 3+(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 5)-1$; з) $9+306/9$ і $1496/22+9$; к) $1+\dfrac{2^3}{4}\cdot 3+\dfrac{5^4\cdot 4\cdot 6}{5^2}$ і $\dfrac{2^2}{2}\cdot 3+\dfrac{(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 5^5)}{5^4}$; л) $\dfrac{1+306/9}{27}$ і $\dfrac{1496/22+1}{27}$; м) $2^3\cdot 3+5^2\cdot 4\cdot 6$ і $2^3\cdot 3+(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 5)-1$; н) $9+306/9$ і $1496/22+9$; о) $1+\dfrac{2^3}{4}\cdot 3+\dfrac{5^4\cdot 4\cdot 6}{5^2}$ і $\dfrac{2^2}{2}\cdot 3+\dfrac{(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 5^5)}{5^4}$; п) $\dfrac{1+306/9}{27}$ і $\dfrac{1496/22+1}{27}$; р) $\dfrac{3}{5}$ і $\dfrac{2}{4}$; с) $\dfrac{2}{3}$ і $\dfrac{4}{6}-1$; т) $\dfrac{1}{5}:\dfrac{3}{5}$ і $\left(\dfrac{2}{4}:\dfrac{6}{4}\right)^2$; у) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}+1$ і $1+\dfrac{17}{35}+\dfrac{1}{3}\cdot 2$.

15. Сформулюйте властивості істинних числових нерівностей і запишіть їх з допомогою символів логіки висловлень.

16. Перевірте істинність даної числової нерівності і помноживши почленно обидві її частини на множник, поставте знак „<” або „>”, так, щоб отримати істинну числову нерівність. Поясніть відповідь.
а) $4\cdot36<16\cdot10\,\big|\cdot(4)$; б) $3<4\,\big|\cdot(-2)$; в) $8{,}7\cdot125>4{,}35\cdot248\,\big|\cdot(200)$;

г) $4+306+2>290+20+1\ \Big|\cdot(\frac{1}{31})$; д) $8{,}7+123<-115+247\ \Big|\cdot(-\frac{1}{2})$;

е) $36:4<81{,}001:9\,\big|\cdot(-2)$; є) $9+88{,}7\cdot1123>2\cdot4+44{,}35\cdot2246\,\big|\cdot(-18)$;

ж) $2^3\cdot3+5^2\cdot4\cdot6+12>2^2\cdot6+(2\cdot3)\cdot(2\cdot5)\ \Big|\cdot(-\frac{1}{12})$; з) $\frac{306}{9}>\frac{1496}{50}\ \Big|(-\frac{1}{2})$.

17. Придумайте будь-яку істинну числову нерівність. Додайте до обох її частин число: а) 2; б) –3; в) 0; г) d; д) $-d$. Чи є отримана нерівність істинною?

18. Придумайте будь-яку істинну числову нерівність. Помножте обидві її частини на число: а) 3; б) –4; в) 0; г) q; д) $-q$. Чи є отримана нерівність істинною?

19. Подайте висловлення в вигляді диз’юнкції двох елементарних висловлень і знайдіть його значення істинності: а) $2\le3$; б) $7\ge7-1$; в) $2\cdot3\ge1\cdot3$; г) $67\le6\cdot11$; д) $-4\ge-5$; е) $-2\le-3$; є) $-7\ge-7-1$; ж) $-2\cdot3\ge-1\cdot3$; з) $-65\le-6\cdot11$; к) $-4\cdot(-2)\ge-5\cdot(-2)$; л) $-8\ge-2\cdot2^2$; м) $-2/3\ge-1/3$; н) $-6/5\le-6/11$; о) $-4/(-2)\ge-5/(-2)$; п) $2/3\ge4/6$.

20. Подайте висловлення в вигляді кон’юнкції двох елементарних висловлень і знайдіть його значення істинності: а) $2<3<4$; б) $7>7-1>5$; в) $2\cdot3<6\le7$; г) $67<6\cdot12<72$; д) $-6<-5<-4$; е) $-2/2<-3/2<-4/2$; є) $-7/5<(-7-1)/5<8/5$; ж) $-2\cdot3<-1\cdot5<-4$; з) $-2/3<-1/3<0$; к) $6/5<6/11<6/30$; л) $-2/5<-2/11<-2/30$.

21. Подайте висловлення в вигляді кон'юнкції двох диз'юнкцій і знайдіть його значення істинності: а) $2 \le 3 \le 4$; б) $8-1 \le 7+1 \le 8$; в) $-2 \cdot 3 \le -6 \le -5$; г) $67 \le 6 \cdot 12 < 72$; д) $-6 \le -5 \le -4$; е) $-2 \le -3 \ge -4$.

22. Якими по відношенню до нуля повинні бути окремо дві зміні a і b, щоб вираз $a \cdot b$ був: а) <0; б) >0; в) ≤ 0; г) ≥ 0; д) $=0$.

23. Якими по відношенню до нуля повинні бути окремо дві зміні a і b, щоб вираз a/b був: а) <0; б) >0; в) ≤ 0; г) ≥ 0; д) $=0$.

24. Змінна x набуває значень із множини $X=\{-1,\ 0,\ 0{,}25,\ 1,\ 11\}$. Знайти множину значень виразів: а) x^2-1; б) $(x^2-1)x$; в) $\dfrac{1}{(x^2-1)x}$;

г) $\dfrac{1}{x-11}+\dfrac{1}{(x^2-1)x}$; д) $\left(\dfrac{1}{x-11}+\dfrac{1}{(x^2-1)x}\right)^2$; е) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x-11)(x-0{,}25)}$;

є) $\sqrt{x-10}$; ж) $\sqrt[4]{x}$; з) $\sqrt{x-10}+1/(x-11)$; к) $\sqrt{(x+5)(x-10)}\cdot\sqrt[3]{x-3}$.

25. Подайте вираз у вигляді суми:

а) $(a-b)(a+b)$; б) $(a^2-b^3)(a^2+b^3)$; в) $(a+1)(a-3)$; г) $(2a^2-b)^2$; д) $(1-x)(1+x)$; е) $(x-3)(x+4)$; є) $(a+b)(c+d)$; ж) $(2x-y)^3$.

26. Подайте вираз у вигляді добутку:

а) $a^2+(-b)^2$; б) $1-x^2$; в) $x^2-2xy+y^2$; г) a^2+2a-8; д) t^2-2t-3; е) x^4+x^2-12; є) $ac+ad+bc+bd$; ж) $625-100x^2$ з) $2+y+2x+xy$.

27. Доведіть тотожність:

а) $(a-b)(a+b)=a^2+(-b)^2$; б) $x^2-2x+1=2(x-1)(x-1)-(x-1)(x-1)$; в) $2-2x^2-1+x^2=(2-3x+2x-1)(4+5x-3-4x)$; г) $x^4+x^2-12=$ $=(x^2-3)(x^2+4)$; є) $ac+ad+bc+bd=(a+b)(c+d)$.

28. Від числа 7234 відняти різницю чисел 3445 та 2776 і подвоєний результат зменшити на це число.

29. Частку від ділення добутку чисел 486 і 540 на добуток чисел 535 і 27 збільшити на різницю між числом 6367 і сумою чисел 1858 і 4367.

30. Число 480000 поділити на добуток чисел 16 і 15, з одержаної частки відняти зменшений у 125 раз добуток чисел 375 і 128 і одержану різницю збільшити в 56 раз.

31. Добуток суми чисел 626 і 624 на їх різницю збільшити на частку від ділення різниці чисел 7174 і 4798 на найбільше двозначне число.

32. Чому дорівнює різниця добутку квадрата різниці найбільшого і найменшого цілого трицифрового числа на найменше просте число і суми добутків частки найбільшого цілого двоцифрового числа на найбільше ціле одноцифрове число на різницю найменшого натурального і найменшого цілого невід'ємного чисел і найбільшого одноцифрового простого числа на найбільше ціле від'ємне число.

Підказка запису: $(999-100)^2 \cdot 2-\left(\frac{99}{9}(1-0)+(7\cdot(-1))\right)$.

33. Записати словесно числовий вираз: $\left(7+999\right)^3 \cdot \left(2-1\right)$. Порахувати його значення.

34. Перевірити якому числовому виразу відповідає словесний запис: добуток суми найбільшого одноцифрового простого числа і квадрата різниці суми найбільшого цілого від'ємного числа і найбільшого цілого трицифрового числа з найменшим цілим

трицифровим числом на різницю найменшого простого числа і добутку частки найбільшого цілого двоцифрового числа на найбільше ціле одноцифрове число на різницю найменшого натурального і найменшого цілого невід'ємного чисел.

$$\left(7+(-1+999-100)^2\right)\cdot\left(2-\frac{99}{9}(1-0)\right),$$

$$\left(7+(-1-999+100)^2\right)\cdot\left(2-\frac{99}{9}(1-0)\right),$$

$\left(7+(-1+999-100)^2\right)\cdot\left(2-\dfrac{99}{9(1-0)}\right)$. Сформулювати словесно інші числові вирази і записати за допомогою звичайних розмовних речень.

35. Виконати обрахунки використовуючи методи швидкого виконання дій додавання і множення:

627 + 5998; 529 + 91; 798 + 456; 789 + 19998; 854 – 349; 944 – 537; 1345 – 600; 843 – 650; 48 + 579 + 52; 1294 + 875 – 184; 508 – 52 – 36.

35. Виконати обрахунки використовуючи методи швидкого виконання дій множення і ділення:

324 · 98; 412 · 198; 1264 · 101; 231 · 302; 987 · 9; 248 · 99; 87 · 999; 42 · 11; 61 · 11; 63 · 11; 58 · 11; 97 · 11; 49 · 11; 36 · 5; 136 · 25; 472 · 125; 321 · 125; 39 · 5; 139 · 25; 869 · 125; 545 : 5; 2125 : 25; 1125 : 125; 25 · 69 · 4; 125 · 14 · 8; 25 · 138 · 40; 125 · 4 · 80; 91 · 39 : 3; 58 · 7 : 2; 15^2; 75^2; 58^2; 95^2; 54^2.

36. Записати розв'язок задачі за допомогою числового виразу: за перший рік було побудовано $4/9$ дороги від колгоспу до шосе, за наступний – $8/27$ дороги, а за третій рік – останні $5\frac{1}{4}$ *км*. Яка довжина дороги?

Тема № 2.

Рівняння з однією змінною. Рівносильні рівняння

1. Рівняння як предикати. Область визначення і множина розв'язків рівняння.
2. Рівносильні рівняння.
3. Теореми про рівносильність рівнянь.
4. Способи розв'язування рівнянь з однією змінною.

1. Поняття рівняння тісно пов'язане з поняттям виразу, змінної, рівності, предиката. Як відомо, предикати – це твердження зі змінною, які при підстановці замість змінної певного елемента з їх області визначення перетворюються в хибні або ж істинні висловлення. У попередньому курсі ми розглядали різні предикати, а також такі, які являлися двома виразами (хоча б одне з яких зі змінними) сполученими знаком дорівнює. Наприклад, $2x-4=0$, $4x+5=8+x$, $3/x=1$. Їх областю визначення як відомо є певні числові множини. Серед цього типу предикатів є такі, які перетворюються в:

1) істинні висловлення при всіх значеннях змінної, – *квазітотожно істинні* (наприклад, $2x+3x+4x=9x$, $(x-1)(x+1)=x^2-1$, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$);

2) істинні висловлення при всіх допустимих значеннях змінної, – *тотожно істинні* (наприклад, $\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x^2-4}{x+2}=x-2$, $\sqrt{x}=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x}$);

3) істинні висловлення при деяких допустимих значеннях змінної (наприклад, $2x-2=x$, $4x+5=8+x$, $(x^2-4)/5=1$, $x^2+4/x=2$, $\left(x(x+2)\right)/\left((x-1)(x+2)\right)=0$, $3/x=1$);

4) хибні висловлення при всіх значеннях змінної – *тотожно* (або *квазітотожно*) *хибні* (наприклад, $\sin x = -2$, $\sqrt{x} = -4$, $x^4 = -16$, $1/x = 0$, $x^2 + (x+1)^2 = 0$).

Детально розглядатимемо в даному розділі як же визначити, які з предикатів тотожно істинні чи хибні, або якщо ні ті ні ті, то як знайти їх області визначення і їх області істинності.

Введемо означення. Два вирази A, B (вимагається щоб хоча б один з них був з однією змінною, а інший може бути як з однією змінною, так і числовим) сполучені знаком дорівнює утворюють одномісний предикат визначений на певній числовій множині і називають ***рівнянням з однією змінною***, яке переважно позначають $A(x) = B$ (в даному випадку можливі і такі позначення: $B(x) = A$, $A(x) = B(x)$). Інакше, *рівність* **(**два числа чи які-небудь вирази, що з'єднані між собою знаком рівності (=)), *що містить одну змінну (невідому), називається* ***рівнянням з однією змінною.***

Узагалі в залежності від кількості змінних, рівняння поділяються на рівняння з однією, двома, трьома і т. д. змінними. Та в цьому параграфі ми зупинимося на рівняннях з однією змінною.

Ще рівняння поділяють на різні види за характером дій над невідомими. Так є *алгебраїчні, дробові, ірраціональні, трансцендентні* рівняння. Наприклад, рівняння:

$2x = \frac{1}{2}x - x$; $2x^2 + x - 0{,}8 = 0$ – алгебраїчні;

$x - \frac{1}{x+1} = 2$; $\frac{a}{3x} - \frac{1}{x+4} = \frac{x}{2}$ – дробові;

$\sqrt{x+1} = 0$ – ірраціональні;

$2^x = 2x$; $\sin x + 3\cos x = 0$; $\log_3 x = 4$ – трансцендентні.

У залежності від степенів многочленів, що входять у рівняння, алгебраїчні рівняння поділяються на рівняння першого, другого, третього і т. д. степеня. Наприклад, рівняння:

$2x-1=0$; $2y=3(x+1)$ – є рівняннями першого степеня;

$2x^2-1=0$; $2x^2-3x+5=0$; $2y=3(xy+1)-3$ – є рівняннями другого степеня;

$5x^3+2x^2-3x+5=0$; $2y=3z(xy+1)-3$ – є рівняннями третього степеня.

Крім цього, алгебраїчні рівняння виду $ax+by=c$, $ax+by+cz=d$ називають також *лінійними рівняннями,* а рівняння другого, третього і вищих степенів – *нелінійними.*

Областю визначення (*ОВ*), *або* ***областю*** (***множиною***) ***допустимих значень*** (*ОДЗ*) *рівняння з однією змінною називається множина усіх значень змінної, при яких всі вирази, що входять у це рівняння, мають смисл. Інакше кажучи,* ***областю визначення*** *рівняння з однією змінною є переріз областей визначення кожного з виразів з яких складається це рівняння*. Якщо ж область визначення додатково обмежується якимись умовами (наприклад, при підрахунку числа якихось об'єктів ця область буде підмножиною натуральних чисел), то беруть ще і переріз з областю (множиною), яка задовольняє цим додатковим умовам.

Область визначення рівняння переважно позначають – M або D.

Одним розв'язком (***коренем***) рівняння з однією змінною називається таке значення цієї змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну рівність (істинну числову рівність). ***Множиною розв'язків*** (***коренів***) рівняння або, як говорять, ***розв'язком рівняння*** є множина тих і тільки тих допустимих значень змінної рівняння, при кожному з яких рівняння перетворюється в істинну числову рівність (істинне висловлення).

Рівняння може мати один розв'язок, декілька розв'язків, нескінченну множину розв'язків або не мати жодного розв'язка.

Якщо рівняння не має жодного розв'язка (кореня), то говорять, що рівняння має порожню множину розв'язків (коренів).

Розв'язати рівняння – означає знайти множину усіх його розв'язків (коренів) або показати, що воно їх не має (має порожню множину розв'язків).

Для рівнянь з декількома змінними не вживається термін "корінь", а говорять про розв'язок.

Множину розв'язків рівняння переважно позначають так як і множину істинності – T.

Множина розв'язків рівняння є підмножиною області його визначення. Тобто $T \in M$.

Отже, будь-яке рівняння з однією змінною являє собою одномісний предикат, заданий на певній множині (множині допустимих значень) множина істинності якого і множина розв'язків є одним і тим самим поняттям для даного рівняння.

Наприклад, предикат (рівняння) $x + 2 = 8$ при $x = 6$ перетворюється в істинне висловлення, при всіх інших $x \in \mathrm{R}$ і $x \neq 6$ – в хибне. Отже, множина істинності даного рівняння (предиката) є одноелементна множина $T = \{2\}$, яка і є множиною розв'язків даного рівняння, тобто його розв'язком.

Наприклад, для рівняння $x^2 - 6x = x - 12$ множина істинності T якого складається з двох чисел 3 і 4, бо $3^2 - 6 \cdot 3 = 3 - 12$, тобто $9 - 18 = 3 - 12$ і $-9 = -9$, а також $4^2 - 6 \cdot 4 = 4 - 12$, тобто $16 - 24 = 4 - 12$ і $-8 = -8$. При будь-якому іншому значенні x істинної рівності не отримаємо. Отже, $T = \{3, 4\}$ – множина розв'язків даного рівняння.

Для рівняння $x^2 + 1 = 0$ в області дійсних чисел не має розв'язку. Отже, його множиною істинності є порожня множина: $T = \varnothing$ – множина розв'язків даного рівняння, якщо $x \in \mathbf{R}$ (x належить множині дійсних чисел, бо на множині комплексних чисел, яких ми не вивчаємо, це рівняння матиме розв'язком уявну одиницю i, де $i^2 = -1$).

Для рівняння $x = |x|$ множина T складається з усіх невід'ємних чисел (бо тільки якщо $x \geq 0$, то $x = |x|$; а якщо $x < 0$, то $x = -|x|$, що не задовольняє умову). Тобто, $T = \{x | x \geq 0\}$ – множина розв'язків даного рівняння.

Для рівняння $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ множина T складається з усіх дійсних чисел, тобто $T = \mathbf{R}$ – множина розв'язків даного рівняння.

Перед тим як розв'язувати те чи інше рівняння, доцільно спочатку знайти множину допустимих значень змінної (або допустиму область значень змінної, область визначення рівняння), а потім дослідити, чи серед цих значень змінної рівняння має розв'язки, тобто на області визначення рівняння пошукати ті значення, які перетворюють даний предикат в істинне висловлення.

Наприклад, для рівняння $\dfrac{(x^2+4)\sqrt{x-1}}{x-1} = 0$ область визначення змінної задається такою кон'юнкцією: $x - 1 \neq 0$ і $x - 1 \geq 0$. Отже, $M = \{x \mid x - 1 > 0\}$. Як бачимо, вираз, що стоїть в лівій стороні рівняння, набуватиме при всіх допустимих значеннях змінної додатних значень (знаменник при всіх допустимих значеннях змінної більший нуля і також кожен із двох множників добутку, що і є чисельником при всіх допустимих значеннях змінної більший нуля, а отже і добуток, і в результаті і частка завжди більша нуля). Тобто дане рівняння не має розв'язків, або інакше, має порожню множину розв'язків.

Можна і інакше розв'язувати будь-яке рівняння. Спочатку розв'язати рівняння, а потім перевірити чи всі отримані розв'язки належать області визначення рівняння і ті що не належать, до множини розв'язків рівняння не включати.

Наприклад, розглянемо рівняння $\frac{2x^2-12x+18}{x-3}=3x-9$.

Перетворимо дане рівняння до звичайного квадратного рівняння:

$2x^2-12x+18=(3x-9)(x-3) \Leftrightarrow 2x^2-12x+18=3x^2-18x+27 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=3$. Але $x=3$ не є розв'язком вихідного рівняння, бо $x=3$ виходить за межі області визначення вихідного рівняння (при $x=3$ знаменник перетворюється в нуль і вираз в лівій стороні рівняння не матиме змісту), тобто вихідне рівняння не має розв'язків, або $x \in \varnothing$.

Часто через уважність путають поняття множини допустимих значень змінної (область визначення) з поняттям множини розв'язків рівняння. Цього не слід робити, адже це зовсім різні поняття (див. означення).

Молодші школярі з рівняннями ознайомлюються аж у 3 класі, але ще з першого класу діти виконують вправи з «віконцями» та на знаходження невідомого компонента арифметичних дій використовуючи зв'язок між компонентами та результатами арифметичних дій, тобто вже тоді відбувається відповідна підготовча робота до розв'язування рівнянь.

2. Рівносильні рівняння.

Нехай над певним числовим полем задано два рівняння з однією змінною: $f(x)=\varphi(x)$; $f_1(x)=\varphi_1(x)$.

Рівняння $f_1(x)=\varphi_1(x)$, *множина розв'язків якого включає всі розв'язки рівняння* $f(x)=\varphi(x)$, *називається наслідком рівняння* $f(x)=\varphi(x)$, *або вивідним із рівняння* $f(x)=\varphi(x)$.

Якщо множина розв'язків рівняння $f(x) = \varphi(x) \in A,$ а множина розв'язків $f_1(x) = \varphi_1(x) \in B$, то $A \subset B$ (A є підмножиною B).

З цього означення випливає, що рівняння $f_1(x) = \varphi_1(x)$ має своїми розв'язками всі розв'язки рівняння $f(x) = \varphi(x)$, але, крім того, може мати ще й інші розв'язки, які для рівняння $f(x) = \varphi(x)$ є сторонніми.

Два рівняння, множини розв'язків яких на певній множині M збігаються, називаються ***рівносильними*** (еквівалентними) *на цій множині.*

Інакше кажучи, ***рівносильними*** на деякій множині M називаються два рівняння, кожне з яких є наслідком іншого з них, тобто $A \subset B$ і $B \subset A,$ отже, $A = B.$

Рівносильність рівнянь, як і рівносильність будь-яких предикатів, позначають знаком $\Leftrightarrow$ напрямленим від одного рівняння до другого, і навпаки.

Знак $\Rightarrow$ напрямлений тільки від одного рівняння до другого вказує лише на те, що друге рівняння є наслідком першого.

Із означення рівносильності рівнянь випливає, що *два рівняння, множина розв'язків кожного з яких на спільній області їх визначення порожня, є рівносильними.*

Зауваження. Надалі під множиною визначення M розумітимемо множину дійсних чисел **R,** не повторюючи кожного разу слів, що вказують на множину, за винятком випадків, коли $M \neq \mathbf{R}$, що буде спеціально зазначено чи задаватиметься самим рівнянням.

Відношення рівносильності на множині рівнянь є відношенням еквівалентності, воно має три основні властивості еквівалентних відношень:

1) *рефлексивність:* кожне рівняння рівносильне само собі;

2) *симетричність:* якщо одне з двох рівнянь рівносильне другому, то і, навпаки, друге рівняння рівносильне першому;

3) *транзитивність:* якщо одне рівняння рівносильне другому, а друге рівносильне третьому, то перше з них рівносильне третрьому.

Дані властивості явно чи неявне використовуються при розв'язуванні рівнянь, коли доводиться заміняти одне рівняння іншим.

При цьому трапляються грубі помилки внаслідок того, що властивості відношення «бути рівносильним» на множині рівнянь інколи механічно переносять на *відношення «бути наслідком», яке транзитивне, але не симетричне: якщо одне рівняння є наслідком другого, то друге може і не бути наслідком першого* (приклад несиметричного, але не антисиметричного відношення).

3. Теореми про рівносильність рівнянь.

Теорема 1.*Якщо до обох частин рівняння додати вираз, визначений при будь-яких значеннях змінної із області визначення рівняння, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.*

Тобто

$$f(x) = \varphi(x), \qquad (*)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) + g(x) = \varphi(x) + g(x), \qquad (**)$$

якщо $g(x)$ є певне число при всіх $x \in M$, де M – область визначення рівняння (*).

Доведення складається з двох частин.

1) Доведемо, що рівняння (**) є наслідком рівняння (*), тобто що всі розв'язки (*) є також розв'язками (**).

Нехай $x = a$ є будь-який із розв’язків (*), тоді $f(a) = \varphi(a)$ – числова рівність, що є істинним висловленням.

Разом з тим g(a) = m – цілком певне число і рівняння (**) при $x = a$ матиме вигляд

$$f(a) + m = \varphi(a) + m$$

– також істинне висловлення на основі відповідної властивості числових рівностей. Отже, будь-який розв'язок рівняння (*) є також розв'язком рівняння (**). Достатність доведена.

2) Доведемо, що рівняння (*) є наслідком рівняння (**). Нехай $x = b$ – будь-який із розв'язків рівняння (**), тоді

$$f(b) + g(b) = \varphi(b) + g(b)$$

– числова рівність, що є істинним висловленням, причому $g(b)$ – цілком певне число $g(b) = n$.

На основі відповідної властивості числових рівностей, віднявши це число від обох частин останньої рівності, дістанемо істинне висловлення

$$f(b) = \varphi(b),$$

яке показує, що b є також розв'язком рівняння (*). Необхідність доведена.

Отже, рівняння (*) і (**) рівносильні.

Теорема доведена.

Умова, щоб функція g була визначена при всіх допустимих значеннях змінної рівняння, є лише достатньою, але не є необхідною для рівносильності рівнянь $f(x) = \varphi(x)$ і $f(x) + g(x) = \varphi(x) + g(x)$. Так, наприклад, розглянемо три рівняння:

– перше: $\frac{3x-7}{x}=\frac{-1}{x}$. Його область визначення – всі дійсні числа крім 0 і множиною розв’язків є множина $\{2\}$ (при $x=2$ матимемо істинну числову рівність $\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}$);

– друге: $\frac{5x-7}{4-x}=\frac{-2}{4-x}$. Його область визначення – всі дійсні числа крім 4 і множиною розв’язків є множина $\{1\}$ (при $x=1$ матимемо істинну числову рівність $\frac{-2}{3}=\frac{-2}{3}$);

– третє: $3x+7=7$. Його область визначення – всі дійсні числа і множиною розв’язків є множина $\{0\}$ (при $x=0$ матимемо істинну числову рівність 7=7).

Розглянемо функцію g таку: $\frac{3+x}{x}$. Областю її визначення є всі дійсні числа крім 0, тобто область її визначення співпадає з областю визначення першого рівняння і відрізняється від області визначення другого і третього рівняння.

Додамо функцію g до двох сторін першого рівняння і отримаємо рівняння $\frac{3x-7}{x}+\frac{3+x}{x}=\frac{-1}{x}+\frac{3+x}{x}$, яке є рівносильне першому рівнянню (його множиною розв’язків є множина $\{2\}$).

Додамо функцію g до двох сторін другого рівняння і отримаємо рівняння $\frac{5x-7}{4-x}+\frac{3+x}{x}=\frac{-2}{4-x}+\frac{3+x}{x}$, яке є рівносильне другому рівнянню (його множиною розв’язків є множина $\{1\}$).

Додамо функцію g до двох сторін третього рівняння і отримаємо рівняння $3x+7+\frac{3+x}{x}=7+\frac{3+x}{x}$, яке не є рівносильне другому рівнянню (отримане рівняння не має розв’язків).

Тобто умова, щоб функція g була визначена при всіх допустимих значеннях змінної рівняння, є лише достатньою, але не є необхідною для рівносильності рівнянь $f(x)=\varphi(x)$ і $f(x)+g(x)=\varphi(x)+g(x)$. Так, додаючи функцію g яка не є визначена при всіх допустимих значеннях другого рівняння до двох сторін другого рівняння ми все одно отримали рівняння рівносильне другому рівнянню. Але це є не у всіх випадках. Так, додаючи функцію g яка не є визначена при всіх допустимих значеннях третього рівняння до двох сторін третього рівняння ми не отримали рівняння рівносильне третьому рівнянню.

Наслідок з теореми 1. Якщо деякий член рівняння перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши знак цього члена (на протилежний), то отримаємо рівняння рівносильне попередньому.

Теорема 2. *Якщо обидві частини рівняння помножити на вираз, що має смисл при всіх значеннях змінної із області визначення рівняння і при жодному з цих значень не дорівнює нулю, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.*

Тобто

$$f(x)=\varphi(x), \qquad (*)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)g(x)=\varphi(x)g(x), \qquad (**)$$

якщо $g(x)$ набуває цілком певних, відмінних від нуля числових значень при всіх $x \in M$, де M – множина визначення рівняння (*).

Доведення аналогічне доведенню теореми 1. Попробуйте, не читаючи дальше, виконати доведення самостійно.

Доведення складається з двох частин.

1) Доведемо, що рівняння (**) є наслідком рівняння (*), тобто що всі розв'язки (*) є також розв'язками (**).

Нехай $x = a$ є будь-який із розв’язків (*), тоді $f(a) = \varphi(a)$ – числова рівність, що є істинним висловленням.

Разом з тим g(а) = m – цілком певне число і рівняння (**) при $x = a$ матиме вигляд

$$f(a) \cdot m = \varphi(a) \cdot m$$

– також істинне висловлення на основі відповідної властивості числових рівностей. Отже, будь-який розв'язок рівняння (*) є також розв'язком рівняння (**).

2) Доведемо, що рівняння (*) є наслідком рівняння (**). Нехай $x = b$ – будь-який із розв'язків рівняння (**), тоді

$$f(b) \cdot g(b) = \varphi(b) \cdot g(b)$$

– числова рівність, що є істинним висловленням, причому $g(b)$ – цілком певне число $g(b) = n \neq 0$.

На основі відповідної властивості числових рівностей, поділивши на це число дві частини останньої числової рівності, дістанемо істинне висловлення

$$f(b) = \varphi(b),$$

яке показує, що b є також розв'язком рівняння (*).

Отже, рівняння (*) і (**) рівносильні.

Теорема доведена.

Наслідок з теореми 2. Якщо обидві частини рівняння помножити на довільне число, що не дорівнює нулю, то одержиться рівняння рівносильне попередньому.

Щоб показати застосування наслідків з теорем 1 і 2 розв’яжемо, наприклад, наступне рівняння: $\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2} - 2x$.

На підставі наслідку з теореми 1 маємо: $\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2} - 2x \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 3\frac{1}{2} - 2x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{3} + 2x = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{7x}{3} = 3\frac{1}{4}$.

На підставі наслідку з теореми 2 маємо: $\frac{7x}{3}=3\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{7x}{3}\cdot\frac{3}{7}=3\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{7} \Leftrightarrow x=\frac{13}{4}\cdot\frac{3}{7}=\frac{39}{28}=1\frac{11}{28}$. Відповідь. $x=1\frac{11}{28}$.

Теорема 3. *Рівняння* $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ (*)

рівносильне диз'юнкції (*сукупності*) *рівнянь*

$f_1(x)=0 \vee f_2(x)=0 \vee \ldots \vee f_n(x)=0$ (**)

на множині M, *якщо кожен з виразів* $f_i(x)$ *визначений на цій множині.*

Доведення: 1) Нехай $a\in M$ є розв'язок рівняння (*), тоді $f_1(a)\cdot f_2(a)\cdot\ldots\cdot f_n(a)=0$, а отже, хоча б один із співмножників дорівнює нулю, тобто a є розв'язком хоча б одного з рівнянь (**). В свою чергу, те що a є розв'язком хоча б одного з рівнянь означає, що a є розв'язком сукупності даних рівнянь.

2) Нехай $a\in M$ є розв'язком одного із рівнянь (**), тоді a – належить області визначення рівняння (*), причому якщо один із співмножників лівої частини рівняння (*) при $x = a$ перетворюється в нуль (так воно і є якщо $a\in M$ є розв'язком одного із рівнянь (**)), то й добуток дорівнює нулю, тобто a є розв'язком рівняння (*).

Теорема доведена.

При переході від рівняння (*) до диз'юнкції рівнянь (**) на практиці інколи допускають помилку, не враховуючи всіх умов цієї теореми, вважаючи, що рівняння (*) рівносильне диз'юнкції рівнянь (**) без будь-яких обмежень. Насправді ж в загальному випадку диз'юнкція рівнянь (**) є наслідком рівняння (*), тобто кожен розв'язок рівняння (*) є розв'язком одного із рівнянь (**), але обернене твердження неправильне.

Так, наприклад, розглянемо рівняння $\frac{6-3x}{3x-1}\cdot\frac{2x+3}{2-x}=0$.

Сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l}\frac{6-3x}{3x-1}=0\\ \frac{2x+3}{2-x}=0\end{array}\right.$ не рівносильна даному рівнянню, бо одним із розв’язків сукупності є число 2, яке не є розв’язком даного рівняння бо не входить до його області визначення.

Звідси випливає, що коли знайдемо всі розв’язки рівнянь (**), то серед них будуть всі розв’язки рівняння (*) і можуть бути деякі сторонні для нього розв’язки – це значення x, для яких хоча б один з виразів $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ невизначений.

Із теореми 2 випливає, що перехід від рівняння $f(x)g(x)=\varphi(x)g(x)$ до рівняння $f(x)=\varphi(x)$ у загальному випадку недопустимий (такий перехід доступний коли відомо, що $g(x)\neq 0$ ні при якому x з області визначення вихідного рівняння). Але в загальному випадку, коли невідомо яких значень набуватиме функція $g(x)$, краще зробити так:

$$f(x)g(x)=\varphi(x)g(x) \Leftrightarrow f(x)g(x)-\varphi(x)g(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)\big(f(x)-\varphi(x)\big)=0 \Rightarrow g(x)=0 \vee f(x)-\varphi(x)=0.$$

Слід звернути увагу, що не всі перетворення є рівносильні (останнє перетворення, в силу вище обговорених причин, не є рівносильним, тобто не дає рівняння рівносильне попередньому), а тому, знайшовши розв'язки диз'юнкції двох рівнянь, після перевірки відкидаємо ті з них, які не є розв’язками вихідного рівняння.

Так, наприклад, розглянемо рівняння $\frac{6-3x}{10x-4}\cdot\frac{2-5x}{x-9}=\frac{2x+3}{x}\cdot\frac{2-5x}{x-9}$. Наслідком з цього рівняння є така диз'юнкція: $\frac{2-5x}{x-9}=0 \vee \frac{6-3x}{10x-4}-\frac{2x+3}{x}=0$. Як відомо областю істинності диз'юнкції є об'єднання областей істинності кожного із предикатів. В даному випадку – це є об'єднання розв'язків двох рівнянь $\frac{2-5x}{x-9}=0$, $\frac{6-3x}{10x-4}-\frac{2x+3}{x}=0$. Серед цих розв'язків є число $\frac{2}{5}$, яке не є розв'язком рівняння $\frac{6-3x}{10x-4}\cdot\frac{2-5x}{x-9}=\frac{2x+3}{x}\cdot\frac{2-5x}{x-9}$, бо при $x=\frac{2}{5}$ знаменник $10x-4$ перетворюється в нуль. Тобто сторонній розв'язок $x=\frac{2}{5}$ виник внаслідок нерівносильного перетворення рівняння до диз'юнкції рівнянь. Аналогічно слід перевірити і інші отримані розв'язки і аж після того твердити про множину розв'язків вихідного рівняння.

Теорема 4. 1) *При будь-якому натуральному n рівняння*

$$\left(f(x)\right)^n=\left(\varphi(x)\right)^n \qquad (*)$$

є наслідком, рівняння

$$f(x)=\varphi(x); \qquad (**)$$

2) *якщо n – непарне, рівняння* (*) і (**) *рівносильні*;

3) *якщо n – парне, рівняння* (*) *рівносильне рівнянню*

$$|f(x)|=|\varphi(x)|, \qquad (3)$$

яке, *в свою чергу, рівносильне диз'юнкції рівнянь*

$$\left(f(x)=\varphi(x)\right)\vee\left(f(x)=-\varphi(x)\right). \qquad (4)$$

Якщо рівняння $f(x)=-\varphi(x)$ не має розв'язку, то (*) і (**) – рівносильні.

Цю теорему пропонуємо довести самостійно.

Доведення: 1) Нехай $a\in M$ є розв'язок рівняння (**), тобто $f(a)=\varphi(a)$ – істинна числова рівність. Тоді згідно відповідної властивості числових рівностей, отримаємо істинну числову рівність $\left(f(a)\right)^n = \left(\varphi(a)\right)^n$ при будь-якому натуральному *n*. Тобто рівняння (*) є наслідком, рівняння (**) при будь-якому натуральному *n*;

2) Згідно аналогічних міркувань, а також згідно відповідної властивості числових рівностей, отримаємо: якщо *n* – непарне, то рівняння (*) і (**) рівносильні;

3) Згідно аналогічних міркувань, а також згідно відповідної властивості числових рівностей, отримаємо: якщо *n* – парне, то рівняння (*) рівносильне рівнянню (3), яке, в свою чергу, рівносильне диз'юнкції рівнянь (4).

Так, наприклад, розглянемо рівняння $(6-3x)^2 = (2x+3)^2$. Дане рівняння можна звести до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$ і розв'язати за допомогою дискримінанта. А саме: $(6-3x)^2 = (2x+3)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (6-3x)(6-3x) = (2x+3)(2x+3) \Leftrightarrow 36 - 36x + 9x^2 = 4x^2 + 12x + 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x^2 - 48x + 27 = 0$; $D = b^2 - 4ac = 2304 - 540 = 1764 = 42^2$;
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; $x_1 = \dfrac{48+42}{10} = 9$, $x_2 = \dfrac{48-42}{10} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

Але з іншої сторони, дане рівняння $(6-3x)^2 = (2x+3)^2$ рівносильне диз'юнкції рівнянь: $6 - 3x = 2x + 3$ або $6 - 3x = -(2x+3)$. Розв'яжемо використовуючи рівносильні перетворення кожного із них. $6 - 3x = 2x + 3 \Leftrightarrow -5x = -3 \Leftrightarrow x = 3/5$;
$6 - 3x = -(2x+3) \Leftrightarrow 6 - 3x = -2x - 3 \Leftrightarrow -x = -9 \Leftrightarrow x = 9$. Оскільки, розв'язком диз'юнкції є об'єднання множин розв'язків кожного з рівнянь, отримаємо таку множину розв'язків диз'юнкції: $\{3/5, 9\}$, що і є множиною розв'язків квадратного рівняння $(6-3x)^2 = (2x+3)^2$. Ми розглянули випадок коли степінь парне число. Розглянемо коли непарне. Наприклад, рівняння $(2x)^3 = \left(x^4\right)^3$

є рівносильне рівнянню $2x = x^4$. Оскільки $2x = x^4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ або $x = \sqrt[3]{2}$.

Теорема 5. 1) *Рівняння*

$$f(x) = \varphi(x), \tag{*}$$

є *наслідком рівняння*

$$g\bigl(f(x)\bigr) = g\bigl(\varphi(x)\bigr), \tag{**}$$

якщо функція g має смисл не на всій області визначення рівняння (*). *Якщо ж g визначена на всій області визначення* (*), *крім того, g – монотонна* (спадна, незростаюча, зростаюча, неспадна)*, то рівняння* (*) і (**) *рівносильні.*

Наприклад, рівняння $2x = x^4$ є наслідком рівняння $\ln 2x = \ln x^4$.

Теорема 4 є окремим випадком даної теореми, коли *g* є степенева функція з показником *n*.

4. Способи розв'язування рівнянь з однією змінною.

Розглянемо різні способи розв'язування деяких рівнянь з однією змінною.

Перш за все розглядатимемо лінійні рівняння на одну дію. Їх можна розв'язувати так як і в початкових класах школи – методом підбору або використовуючи співвідношення між компонентами та результатами дій, а можна як в середніх класах школи за допомогою рівносильних перетворень посилаючись на відповідні вищедоведені теореми, або графічно.

Для того щоб розв'язувати способом яким розв'язують в початкових класах, потрібно постійно використовувати наступні правила знаходження невідомих компонентів арифметичних дій.

Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок. Якщо $a+b=c$, то $b=c-a$, $a=c-b$. Наприклад. Якщо $2+3=5$, то $2=5-3$, $3=5-2$.	*Щоб знайти невідоме зменшуване, треба до різниці додати від'ємник.* Якщо $a-b=c$, то $a=c+b$. Якщо $5-3=2$, то $5=2+3$. *Щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю.* Якщо $a-b=c$, то $b=a-c$. Якщо $5-3=2$, то $3=5-2$.
Щоб знайти невідомий множник, треба добуток поділити на відомий множник. Якщо $a\cdot b=c$, то $b=c/a$, $a=c/b$. Наприклад. Якщо $2\cdot 3=6$, то $2=6:3$, $3=6:2$.	*Щоб знайти невідоме ділене, треба частку помножити на дільник.* Якщо $a:b=c$, то $a=c\cdot b$. Якщо $6:3=2$, то $6=2\cdot 3$. *Щоб знайти невідомий дільник, треба ділене поділити на частку.* Якщо $a:b=c$, то $b=a:c$. Якщо $6:3=2$, то $3=6:2$.

Наприклад, таке просте рівняння як $5-x=4$ можна розв’язати такими способами:

– підбором. Так при $x=1$ рівняння $5-x=4$ перетворюється в істинну числову рівність, тобто $x=1$ є його розв’язком. Відповідь можна подати і у вигляді множини розв’язків, а саме $\{1\}$;

– використовуючи співвідношення між компонентами та результатами дій, а саме шукаючи невідому як невідомий від’ємник. Тоді, оскільки, щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю, отримаємо: $x=5-4=1$;

– за допомогою рівносильних перетворень. В даному рівнянні біля невідомої стоїть знак ”–”, то простіше буде перенести невідому вправо, а відомі – вліво. Отримаємо: $5-4=x$. Звідси $1=x$ або $x=1$;

– графічним способом. Перенести всі члени рівняння в ліву сторону ($5-x-4=0$, тобто $1-x=0$), побудувати графік функції $f(x)=1-x$ (це буде лінія $y=-x$ паралельно зміщена на одну одиницю вгору) і знайти розв’язок як абсцису точки перетину графіка з віссю Ox (це буде точка $x=1$, а отже відповідь $x=1$) (до цього способу ми повернемося в наступних параграфах цього курсу).

Подібним чином цими трьома способами можна розв’язати кожне з таких наприклад рівнянь: $5+x=12$, $x+4=12$, $x-5=4$, $5-x=4$, $5\cdot x=40$, $x\cdot 7=14$, $x:5=4$, $60:x=4$ (для полегшення розв’язку підбором (підбору) дані рівняння складені так, що розв’язком кожного з них буде відповідне йому натуральне число. Але в загальному серед цих рівнянь можуть бути і такі наприклад рівняння $5+x=-3$, $x\cdot 7=10$).

Розглянемо лінійні рівняння виду $ax+b=0$, де a, b – будь-які числа, x – змінна. Це рівняння:

1) має один корінь $x=-\frac{b}{a}$, якщо $a \neq 0$;

2) має безліч коренів, якщо $a=b=0$;

3) не має коренів, якщо $a=0, b \neq 0$.

В загальному лінійні рівняння виду $ax+b=0$ містять дві дії. В початкових класах школи їх розв'язують методом підбору або використовуючи співвідношення між компонентами та результатами дій. Також їх можна розв'язувати так як в середніх класах школи, тобто за допомогою рівносильних перетворень посилаючись на відповідні вищедоведені теореми, або графічно.

Наприклад, таке лінійне рівняння як $3x-42=0$ можна розв'язати такими способами:

– підбором. Так при $x=14$ рівняння $3x-42=0$ перетворюється в істинну числову рівність $3 \cdot 14-42=0$, тобто $x=14$ є його розв'язком. Відповідь можна подати і у вигляді множини розв'язків, а саме $\{14\}$;

– використовуючи співвідношення між компонентами та результатами дій, а саме: спочатку шукаємо невідоме зменшуване $3x$ (до різниці додаємо від'ємник) $3x=0+42=42$, а потім шукаємо невідоме x як невідомий множник (добуток ділимо на відомий множник) $x=42:3=14$;

– за допомогою рівносильних перетворень. В даному рівнянні –42 перенесемо вправо та отримаємо $3x=42$. Отримане рівняння почленно розділимо на 3, отримаємо: $x=14$;

– графічним способом. Побудувати графік функції $f(x)=3x-42$ і знайти розв'язок як абсцису точки перетину графіка з віссю Ox (до цього способу ми повернемося в наступних параграфах цього курсу).

Будь-яке лінійні рівняння з однією невідомою, наприклад рівняння $633-45(74(x-110)+24)/10=3$ можна спростити відкривши дужки і звівши подібні використовуючи рівносильні перетворення та привести до лінійного рівняння виду $ax+b=0$ (як його розв’язати після цього відомо з попередніх пунктів), а можна розв’язати використовуючи співвідношення між компонентами та результатами дій.

Спочатку покажемо як його спрощувати до виду $ax+b=0$.

$$633-45(74(x-110)+24)/10=3\,\big|:3 \Leftrightarrow 211-\frac{15(74(x-110)+24)}{10}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 211-\frac{1110(x-110)+360}{10}=1 \Leftrightarrow 211-\big(111(x-110)+36\big)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 211-\big(111x-12210+36\big)=1 \Leftrightarrow 211-111x+12210-36=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 211-111x+12210-36-1=0 \Leftrightarrow -111x+12384=0$$

От ми прийшли до лінійного рівняння виду $ax+b=0$. Розв’яжемо його: $-111x=-12384\,\big|:(-3) \Leftrightarrow 37x=4128\,\big|:37 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4128}{37}=111\frac{21}{37}=111,(567).$$

Зробимо перевірку. $633-45(74(111\frac{21}{37}-110)+24)/10=3;$

$$633-45(74(1\frac{21}{37})+24)/10=3;\ 633-\frac{45(74\cdot\frac{58}{37}+24)}{10}=3;$$

$$633-\frac{9(74\cdot\frac{58}{37}+24)}{2}=3;\ \ 633-9(37\cdot\frac{58}{37}+12)=3;\ \ 211-3(58+12)=1;$$

$$211-3\cdot 70=1;\ 211-210=1;\ 1=1.$$

Тепер розв’яжемо це рівняння використовуючи співвідношення між компонентами та результатами дій.

Розглянемо саме рівняння $633-45(74(x-110)+24)/10=3$. Ліва сторона цього рівняння – це вираз із змінною (невідомим рівняння) і цей вираз є різницею, бо остання дія яка в ньому виконується є віднімання. Зменшуване – це число 633 (відоме зменшуване), від'ємник – це вираз із змінною (невідомим рівняння) $45(74(x-110)+24)/10$ (невідомий від'ємник), різниця – це число 3 (відома різниця). Оскільки, щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю, отримаємо: $45(74(x-110)+24)/10=633-3=630$. Ми отримали рівняння $45(74(x-110)+24)/10=630$ ліва сторона якого – це вираз, який є часткою, бо остання дія яка в ньому виконується є ділення. Ділене – це вираз з невідомим, а саме $45(74(x-110)+24)$ (невідоме ділене), дільник – це число 10 (відомий дільник), частка – це число 630 (відома частка). Оскільки, щоб знайти невідоме ділене, треба частку помножити на дільник, отримаємо: $45(74(x-110)+24)=630\cdot 10=6300$. Ми отримали рівняння $45(74(x-110)+24)=6300$ ліва сторона якого – це вираз, який є добутком, бо остання дія яка в ньому виконується є множення. Перший множник – це число 45 (відомий перший множник), другий множник – це вираз $74(x-110)+24$ (невідомий другий множник), добуток – це число 6300 (відомий добуток). Оскільки, щоб знайти невідомий множник треба добуток поділити на відомий множник, отримаємо: $74(x-110)+24=6300/45=140$. Ми отримали рівняння $74(x-110)+24=140$ ліва сторона якого – це вираз, який є сумою, бо остання дія яка в ньому виконується є додавання. Перший доданок – це вираз $74(x-110)$ (невідомий перший доданок), другий доданок – це число 45 (відомий другий доданок), сума – це число 140 (відома сума). Оскільки, щоб знайти невідомий доданок треба від суми відняти відомий доданок, отримаємо: $74(x-110)=140-24=116$. Ми отримали рівняння $74(x-110)=116$ ліва сторона якого – це вираз, який є добутком, бо остання дія яка в ньому виконується є множення. Перший множник – це число 74 (відомий перший множник), другий множник – це вираз $x-110$ (невідомий другий множник), добуток – це число 116 (відомий добуток). Оскільки, щоб знайти невідомий множник треба добуток поділити на відомий множник, отримаємо: $x-110=116:74=1\frac{42}{74}=1\frac{21}{37}$. Ми отримали рівняння $x-110=1\frac{21}{37}$ ліва сторона якого – це вираз, який є різницею, бо там виконується віднімання. Зменшуване – це вираз x (невідоме зменшуване), від'ємник – це число 110 (відомий від'ємник), різниця – це раціональне число $1\frac{21}{37}$ (відома різниця). Оскільки, щоб знайти невідоме зменшуване, треба до різниці додати від'ємник, отримаємо: $x=1\frac{21}{37}+110=111\frac{21}{37}$. Отже, ми отримали $x=111\frac{21}{37}=111,(567)$. Як бачимо двома різними способами ми досягли правильного результату.

Якщо в рівнянні є дробові вирази (дроби) і в знаменниках числа без невідомих, то таке рівняння можна почленно помножити на найменший спільний знаменник, спростити і отримати звичайне лінійне рівняння.

Розглянемо як розв'язується, наприклад, таке лінійне рівняння: $\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2x+1}{5}$. Розв'язок. 1 спосіб:

$$\left.\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2x+1}{5}\right| \cdot 30 \Leftrightarrow (x-1)\cdot 15+2\cdot 10=(2x+1)\cdot 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x-15+20=12x+6 \Leftrightarrow 15x-12x=6-5 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=1/3.$$

2 спосіб розв’язку: $\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2x+1}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2x}{5}+\frac{1}{5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{2x}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{5x-4x}{10}=\frac{1\cdot 6+1\cdot 15-2\cdot 10}{30} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{10}=\frac{1}{30} \Leftrightarrow x\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{30} \Leftrightarrow x=\frac{1}{30}:\frac{1}{10}=\frac{1}{30}\cdot\frac{10}{1}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

Перш ніж розглядати квадратні рівняння з однією змінною, розглянемо вираз, який є одним із двох складових цього рівняння (другим складовим є число нуль), а саме вираз вигляду ax^2+bx+c, який називають ***квадратним тричленом*** (тут x – змінна, a, b і c – дійсні числа, причому $a \neq 0$).

Коренем квадратного тричлена називається значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю.

Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного тричлена, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ – *розклад тричлена на множники.* Наприклад, $2(x-3)(x-(-4))=2(x-3)(x+4)=2\left(x^2+4x-3x-12\right)=$ $=2(x^2+x-12)=2x^2+2x-24$. Перевіримо, чи числа 3 і -4 є коренями квадратного тричлена, тобто чи вони перетворюють квадратний тричлен $2x^2+2x-24$ в нуль. Підставляємо ці числа по черзі в вираз квадратного тричлена $2x^2+2x-24$ замість x. Отримаємо: $2\cdot 3^2+2\cdot 3-24=2\cdot 9+6-24=18+6-24=24-24=0$, $2\cdot(-4)^2+2\cdot(-4)-24=2\cdot 16-8-24=32-8-24=24-24=0$. Отже дійсно числа 3 і -4 є коренями даного квадратного тричлена (оскільки вирази $2(x-3)(x-(-4))$ і $2x^2+2x-24$ тотожньо рівні (вони отримані шляхом тотожних перетворень), тобто при однакових значеннях змінних набувають теж однакового значення, то ми могли би підставляти числа 3 і -4 в вираз $2(x-3)(x-(-4))$ і відразу переконуватися, що вони є коренями тотожного квадратного тричлена).

Тепер розглянемо безпосередньо ***квадратні рівняння з однією змінною*,** тобто рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де a, b, c – деякі фіксовані числа, $a\neq 0$, x – змінна. Коефіцієнт a називається *першим коефіцієнтом,* b *– другим,* а c *– вільним членом.*

Якщо $b\neq 0$ і $c\neq 0$, то рівняння називається *повним квадратним рівнянням* загального вигляду. Якщо $c=0$ або $b=0$, то рівняння називається *неповним.*

Розв'язування неповних квадратних рівнянь можливі такі випадки:

1) якщо $b=0$, $c\neq 0$, тоді $ax^2+c=0$ має корені $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (корені будуть дійсні, якщо a і c різних знаків, бо якщо a і c однакових знаків, то $\frac{c}{a}>0$ і вираз $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ не має змісту, а неповне квадратне рівняння $ax^2+c=0$ не має розв’язків);

2) якщо $b\neq 0$, $c=0$, тоді $ax^2+bx=0$ має корені $x_1=0, x_2=-b/a$;

3) якщо $b=0$, $c=0$, тоді $ax^2=0$ має два однакові корені $x_1=x_2=0$.

Приклади.

1. Розв’язати рівняння $5x^2-11=0$.

Розв’язок. Це неповне квадратне рівняння. $5x^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5x^2 = 11 \Leftrightarrow x^2 = \frac{11}{5}$. Отже рівняння має два розв’язки, які дорівнюють: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{11}{5}}$. Відповідь. $\left\{-\sqrt{\frac{11}{5}},\ \sqrt{\frac{11}{5}}\right\}$.

2. Розв’язати рівняння $4x^2 + 27x = 0$.

Розв’язок. Це неповне квадратне рівняння. $4x^2 + 27x = 0 \Leftrightarrow x(4x+27) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x + 27 = 0 \end{array}\right.$, тобто $x = 0$ або $4x + 27 = 0$. Оскільки $4x + 27 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{27}{4}$, то вихідне неповне квадратне рівняння має два розв’язки: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{27}{4}$. Відповідь. $\left\{0,\ -\frac{27}{4}\right\}$.

3. Розв’язати рівняння $16x^2 = 0$.

Розв’язок. Це неповне квадратне рівняння. $16x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Відповідь. $\{0\}$.

Розглянемо повне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Виразимо невідому x через коефіцієнти a, b, c. Виконаємо наступні перетворення.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c \,\Big|\, \cdot 4a \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2ax+b)^2 - b^2 = -4ac \Leftrightarrow (2ax+b)^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Для побудови теорії розв'язування повних квадратних рівнянь $ax^2+bx+c=0$ ввели *дискримінант* $D=b^2-4ac$ квадратного рівняння. При цьому, якщо:

1) $D>0$, то рівняння має два дійсні корені, які обчислюються за формулами: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

2) $D=0$, то рівняння має один дійсний корінь (два рівні дійсні корені), який обчислюється за формулою: $x=\dfrac{-b}{2a}$;

3) $D<0$, то рівняння не має дійсних коренів (розв’язків не має).

Приклади.

1. Розв’язати рівняння $5x^2+6x-11=0$. Розв’язок. В цьому рівнянні $a=5,\quad b=6, c=-11,\quad D=b^2-4ac=6^2-4\cdot5\cdot(-11)=$ $=36+220=256>0$. Отже рівняння має два розв’язки, які обчислюються за формулами: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-6\pm\sqrt{256}}{2\cdot5}$, $x_1=\dfrac{-6+16}{10}=1$, $x_2=\dfrac{-6-16}{10}=-2{,}2$. Відповідь. $\{1;\ -2{,}2\}$.

2. Розв’язати рівняння $9x^2+6x+1=0$. Розв’язок. В цьому рівнянні $a=9, b=6, c=1,\quad D=b^2-4ac=6^2-4\cdot9\cdot1=36-36=0$. Отже рівняння має один розв’язок, який обчислюється за формулою: $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-6}{2\cdot9}=\dfrac{-6}{18}=-\dfrac{1}{3}$. Відповідь. $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

3. Розв’язати рівняння $2x^2+4x+9=0$. Розв’язок. В цьому рівнянні $a=2, b=4, c=9,\quad D=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot9=16-72<0$. Отже рівняння має не має розв’язків. Відповідь. Ø.

4. Розкласти вираз на множники $a(x-x_1)(x-x_2)$ (перетворити на добуток): а) $21x^2-112x-84$; б) $322x^2+18x-4$.

а) $21x^2-112x-84$. Розв'язок. Для розкладу виразу на множники слід спочатку знайти корені цього квадратного тричлена.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-112)\pm\sqrt{(-112)^2-4\cdot21\cdot(-84)}}{2\cdot21}=$$

$$=\frac{112\pm\sqrt{12544+7056}}{2\cdot21}=\frac{112\pm\sqrt{19600}}{2\cdot21}=\frac{112\pm140}{2\cdot7\cdot3}=\frac{56\pm70}{7\cdot3}=\frac{8\pm10}{3},$$

$x_1=\frac{8+10}{3}=\frac{18}{3}=6$, $x_2=\frac{8-10}{3}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$. Отже,

$21x^2-112x-84=21(x-6)\left(x-(-\frac{2}{3})\right)$. Зробимо перевірку виконавши тотожні перетворення. $21(x-6)\left(x-(-\frac{2}{3})\right)=$

$$=21\left(x^2+\frac{2}{3}x-6x-4\right)=21\left(x^2+\frac{2-18}{3}x-4\right)=21\left(x^2-\frac{16}{3}x-4\right)=$$

$=21x^2-112x-84$. Відповідь. $21x^2-112x-84=21(x-6)\left(x-(-\frac{2}{3})\right)$.

б) $322x^2+18x-4$. Розв'язок. Винесемо в даному виразі число 2 за дужки і отримаємо вираз $2(161x^2+9x-2)$. Для розкладу виразу на множники слід спочатку знайти корені квадратного тричлена $161x^2+9x-2$. $x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot161\cdot(-2)}}{2\cdot161}=\frac{-9\pm\sqrt{81+1288}}{2\cdot161}=$

$=\frac{-9\pm\sqrt{1369}}{2\cdot161}=\frac{-9\pm37}{322}$, $x_1=\frac{-9+37}{322}=\frac{28}{322}=\frac{2}{23}$,

$x_1=\frac{-9-37}{322}=\frac{-46}{322}=-\frac{1}{7}$. Отже, $322x^2+18x-4=$

$= 322\left(x-\frac{2}{23}\right)\left(x-(-\frac{1}{7})\right) = 322\left(x-\frac{2}{23}\right)\left(x+\frac{1}{7}\right)$. Зробимо перевірку виконавши тотожні перетворення. $322\left(x-\frac{2}{23}\right)\left(x+\frac{1}{7}\right) =$

$$= 322\cdot\left(x^2+\frac{1}{7}x-\frac{2}{23}x-\frac{2\cdot 1}{23\cdot 7}\right) = 322\cdot\left(x^2+\frac{1\cdot 23-2\cdot 7}{23\cdot 7}x-\frac{2}{161}\right) =$$

$$322\cdot\left(x^2+\frac{9}{161}x-\frac{2}{161}\right) = 322x^2+18x-4.$$

Відповідь. $322x^2+18x-4 = 322\left(x-\frac{2}{23}\right)\left(x+\frac{1}{7}\right)$.

В випадку, якщо всі коефіцієнти біля членів квадратного рівняння (числа a, b, c) подільні націло на деяке ціле число (модуль якого дорівнює НСД їх модулів), то їх всіх слід поділити на це ціле число, тобто скоротити. В результаті цього отримують простіше рівносильне попередньому квадратне рівняння, яке і розв'язують виконуючи простіші ніж були би без скорочення розрахунки.

Приклад.

1. Розв'язати рівняння $-9x^2+12x+12=0$. Розв'язок. Спочатку поділимо дане рівняння почленно на -3 (можна було і на 3). Отримаємо простіше рівносильне попередньому квадратне рівняння $3x^2-4x-4=0$. В цьому рівнянні $a=3, b=-4, c=-4$, $D=(-4)^2-4\cdot 3\cdot(-4)=16+48=64>0$, $x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{64}}{2\cdot 3}$, $x_1=\frac{4+8}{6}=2$, $x_2=\frac{4-8}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$. Зробимо перевірку. Підставимо по черзі отримані корені в вихідне рівняння. $-9\cdot 2^2+12\cdot 2+12=0$. Звідси $-36+24+12=0$, або $0=0$ – істинна числова рівність, а

отже перший розв'язок (корінь) задовольняє. Другий: $-9\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2+12\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+12=0$. Звідси: $-9\cdot\frac{4}{9}-8+12=0$, $-4-8+12=0$, або $0=0$ – істинна числова рівність, а отже другий розв'язок (корінь) теж задовольняє. Відповідь. $\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}$.

Якщо в спрощеному квадратному рівнянні коефіцієнт при x^2 дорівнює 1, то таке квадратне рівняння називають – ***зведене квадратне рівняння*** і позначають $x^2+px+q=0$. Формула коренів зведеного квадратного рівняння приймає вигляд: $x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$. Якщо ж p парне, то корені зручніше обчислювати за формулою: $x_{1,2}=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

Приклади. Розв'язати рівняння

1. $-2x^2-18x-36=0$. Розв'язок. Спочатку поділимо дане рівняння почленно на -2. Отримаємо простіше рівносильне попередньому квадратне рівняння $x^2+9x+18=0$. В цьому рівнянні коефіцієнт при x^2 дорівнює 1, тобто воно зведене. В ньому $p=9$, $q=18$. Шукаємо розв'язки за формулою: $x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot18}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{81-72}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{9}}{2}$, $x_1=\frac{-9+3}{2}=\frac{-6}{2}=-3$, $x_2=\frac{-9-3}{2}=\frac{-12}{2}=-6$. Перевірка. $-2\cdot(-3)^2-18\cdot(-3)-36=0 \Leftrightarrow -18+54-36=0 \Leftrightarrow 0=0$.

$-2\cdot(-6)^2-18\cdot(-6)-36=0 \Leftrightarrow -72+108-36=0 \Leftrightarrow 0=0$.

Відповідь. $\{-6,-3\}$.

2. $-9x^2-81x+27=0$. Розв'язок. Спочатку поділимо дане рівняння почленно на -3 (можна було і на 3). Отримаємо простіше рівносильне попередньому квадратне рівняння $x^2+9x-3=0$. В цьому рівнянні коефіцієнт при x^2 дорівнює 1, тобто воно зведене. Шукаємо розв'язки за формулою: $x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot(-3)}}{2}=$ $=\dfrac{-9\pm\sqrt{93}}{2}$. Відповідь. $x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{93}}{2}$.

3. $-5x^2-30x+35=0$. Розв'язок. Оскільки модулі коефіцієнтів рівняння подільні націло (кратні) числу 5 і два з них від'ємні, то спочатку, для спрощення, поділимо дане рівняння почленно на -5. Отримаємо простіше рівносильне попередньому квадратне рівняння $x^2+6x-7=0$. В цьому рівнянні коефіцієнт при x^2 дорівнює 1, тобто воно зведене. Оскільки $p=6$ – парне, то шукаємо розв'язки за формулою: $x_{1,2}=\dfrac{-p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}=$ $=\dfrac{-6}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{6}{2}\right)^2-(-7)}=-3\pm\sqrt{3^2+7}=-3\pm\sqrt{16}$, $x_1=-3+4=1$, $x_2=-3-4=-7$. Перевірка. $-5\cdot1^2-30\cdot1+35=0 \Leftrightarrow 0=0$, $-5\cdot(-7)^2-30\cdot(-7)+35=0 \Leftrightarrow -245+210+35=0 \Leftrightarrow 0=0$.

Відповідь. $\{-7,1\}$.

Також зведене квадратне рівняння можна розв'язувати використовуючи теорему Вієта: корені і тільки корені зведеного квадратного рівняння задовольняють систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$, де p, q – коефіцієнти зведеного квадратного рівняння.

Приклади. Розв'язати рівняння.

1. $7x^2 - 35x + 42 = 0$. Розв'язок. Оскільки модулі коефіцієнтів рівняння кратні числу 7, то спочатку, для спрощення, поділимо дане рівняння почленно на 7. Отримаємо простіше рівносильне попередньому квадратне рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$. Розв'яжемо його використовуючи формули теореми Вієта. Зідно них корені даного рівняння мають задовольняти наступним рівностям: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases}$. Легко підбираються числа 2 і 3 які задовольняють даним рівностям і отже ці числа є розв'язками даного зведеного квадратного рівняння. Перевірка. $7 \cdot 2^2 - 35 \cdot 2 + 42 = 0 \Leftrightarrow 28 - 70 + 42 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, $7 \cdot 3^2 - 35 \cdot 3 + 42 = 0 \Leftrightarrow 63 - 105 + 42 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Відповідь. $\{\, 5,\ 6 \,\}$.

Розглянемо розв'язування деяких найпростіших видів ***цілих раціональних рівнянь вищих степенів***.

Багаточлен $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, де $a_0 \neq 0$ називається *цілим раціональним* багаточленом *n-го степеня.*

Наприклад багаточлен $P_3(x) = 5x^3 - 8x^2 + 2x - 7$ є багаточлен 3-го *степеня.*

Рівняння $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$, де $a_0 \neq 0$ називається рівнянням *n-го степеня.*

Розглянемо деякі найпростіші види таких рівнянь обмежившись випадком, коли коефіцієнти $a_i \in Z$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Справедливі такі твердження:

а) якщо рівняння $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, де $a_0 \neq 0$ $a_i \in Z$, i = 0, 1,..., n, має цілі корені, то вони є дільниками вільного члена та серед раціональних коренів цього рівняння при a_0 = 1 цілими коренями можуть бути лише ті, які є дільниками вільного члена;

б) багаточлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на лінійний двочлен $x - a$ тоді і тільки тоді, коли $x = a$ є коренем рівняння $P_n(x) = 0$;

в) якщо нескоротний дріб $\dfrac{p}{q}$ є коренем рівняння $P_n(x) = 0$, то q є дільником старшого коефіцієнта a_0, а p – дільником вільного члена a_n.

Проілюструємо метод розв'язання алгебраїчних рівнянь на таких наступних прикладах.

Приклад.

Розв'язати рівняння $P_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$.

Розв'язок. Дільниками модуля вільного члена – 3 є числа 1 і 3. Отже цілий корінь первинного (вихідного) рівняння слід шукати серед чисел ± 1, ± 3:

$x = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 5 - 5 = 0$.

Таким чином, $x_1 = 1$.

Поділимо багаточлен $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ на двочлен $x - 1$:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 & x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^3 - 2x^2} & 2x^2 + 5x + 3 \\
\qquad 5x^2 - 2x & \\
\qquad \underline{5x^2 - 5x} & \\
\qquad\qquad 3x - 3 & \\
\qquad\qquad \underline{3x - 3} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Решту коренів первинного рівняння можна знайти розв’язавши квадратне рівняння $2x^2 + 5x + 3 = 0$ за допомогою дискримінанта. Та ми спробуємо підбором та діленням тричлена на двочлен знайти відповідно 2-ий та 3-ий розв’язки первинного рівняння. Розглянемо дільники вільного члена цього рівняння ± 1, ± 3 і серед них будемо шукати його цілий корінь:

$$x = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 2 + 5 + 3 \neq 0;$$

$$x = -1 \Rightarrow 2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 3 = 2 - 5 + 3 = 0.$$

Таким чином, $x_2 = -1$. Поділимо квадратний тричлен $2x^2 + 5x + 3$ на двочлен $x - (-1)$, тобто на $x + 1$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + 5x + 3 & x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^2 + 2x} & 2x + 3 \\ \quad\quad 3x + 3 & \\ \quad\quad \underline{3x + 3} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Оскільки коренем рівняння $2x + 3$ є число $-\dfrac{3}{2}$, то $x_3 = -\dfrac{3}{2}$.

Перевіримо чи дійсно числа $-\dfrac{3}{2}, -1, 1$ є розв’язками первинного рівняння.

$$x_1 = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 5 - 5 = 0;$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = -2 + 3 + 2 - 3 = 0;$$

$$x_3 = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 = -\frac{27}{4} + \frac{27}{4} + 3 - 3 = 0.$$

Відповідь. $\left\{-\dfrac{3}{2}, -1, 1\right\}$.

Для того, щоб розв’язати ***дробове рівняння***, слід звести його до спільного знаменника і помножити його почленно на цей спільний знаменник. Після цього розв'язати отримане рівняння, але знайдені корені перевірити (щоб уникнути сторонніх).

Розв'язати рівняння

$$\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+12}{x-3}+\frac{x-12}{x+3}+16\frac{2}{3}$$

Розв'язання. 1-ий спосіб.

$\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+12}{x-3}+\frac{x-12}{x+3}+16\frac{2}{3}$. Область визначення даного рівняння $D=R\setminus\{\pm1,\pm3\}$. Помножимо почленно дане рівняння на найменший спільний знаменник $3(x^2-1)(x^2-9)$.

$$(x-3)3(x+1)(x^2-9)+(x+3)3(x-1)(x^2-9)=$$

$$=3(x^2-1)(x+3)(x+12)+3(x^2-1)(x-3)(x-12)+50(x^2-1)(x^2-9)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-3)(x^2-9)=3(x^2-1)(x^2+36)+25(x^2-1)(x^2-9)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25x^4-109x^2+36=0\Leftrightarrow \left|x^2=t\right| 25t^2-109t+36=0\Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} D=(-109)^2-4\cdot25\cdot36=8281=91^2 \\ t_1=\frac{109+91}{50}=4,\ t_2=\frac{109-91}{50}=\frac{9}{25}\end{array}\right| \left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=\frac{9}{25}.\end{array}\right.$$

Отже, $\left[\begin{array}{l} x^2=4, \\ x^2=\frac{9}{25},\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-2$ або $x=2$, або $x=-\frac{3}{5}$, або $x=\frac{3}{5}$.

Перевіримо чи дійсно числа $-2,-\frac{3}{5},\frac{3}{5},2$ є розв'язками первинного рівняння.

$$x_1=-2\Rightarrow\frac{-2-3}{-2-1}+\frac{-2+3}{-2+1}=\frac{-2+12}{-2-3}+\frac{-2-12}{-2+3}+16\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-5}{-3}+\frac{1}{-1}=\frac{10}{-5}+\frac{-14}{1}+16\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{5}{3}-1=-2-14+16+\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{3}=\frac{2}{3};$$

$$x_2=-\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{-3/5-3}{-3/5-1}+\frac{-3/5+3}{-3/5+1}=\frac{-3/5+12}{-3/5-3}+\frac{-3/5-12}{-3/5+3}+16\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-18/5}{-8/5}+\frac{12/5}{2/5}=\frac{57/5}{-18/5}+\frac{-63/5}{12/5}+16\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{9}{4}+6=-\frac{19}{6}-\frac{21}{4}+16+\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{45}{6}=-\frac{19}{6}+10+\frac{2}{3}\Leftrightarrow 0=0;$$

$$x_3=2\Rightarrow\frac{2-3}{2-1}+\frac{2+3}{2+1}=\frac{2+12}{2-3}+\frac{2-12}{2+3}+16\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-1}{1}+\frac{5}{3}=\frac{14}{-1}+\frac{-10}{5}+16+\frac{2}{3}\Leftrightarrow-1+\frac{5}{3}=-14-2+16+\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{3}=\frac{2}{3};$$

$$x_4=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{3/5-3}{3/5-1}+\frac{3/5+3}{3/5+1}=\frac{3/5+12}{3/5-3}+\frac{3/5-12}{3/5+3}+16\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-12/5}{-2/5}+\frac{18/5}{8/5}=\frac{63/5}{-12/5}+\frac{-57/5}{18/5}+16\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6+\frac{9}{4}=-\frac{21}{4}-\frac{19}{6}+16+\frac{2}{3}\Leftrightarrow 6+\frac{27}{12}=-\frac{63}{12}-\frac{38}{12}+16+\frac{8}{12}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6+\frac{27}{12}=-\frac{93}{12}+16\Leftrightarrow 6+\frac{120}{12}=16\Leftrightarrow 16=16.$$

Відповідь. $\left\{-2,-\frac{3}{5},\frac{3}{5},2\right\}$.

Розв'язання. 2-ий спосіб.

Область визначення даного рівняння $D=R\setminus\{\pm1,\pm3\}$. Запишемо первинне рівняння у вигляді

$$\frac{{}^{x+1/}x-3}{x-1}+\frac{{}^{x-1/}x+3}{x+1}=\frac{{}^{x+3/}x+12}{x-3}+\frac{{}^{x-3/}x-12}{x+3}+16\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(x^2-3)}{x^2-1}=\frac{2(x^2+36)}{x^2-9}+\frac{50}{3}\Leftrightarrow\frac{x^2-3}{x^2-1}=\frac{x^2+36}{x^2-9}+\frac{25}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-1-2}{x^2-1}=\frac{x^2-9+45}{x^2-9}+\frac{25}{3}\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x^2-1}=1+\frac{45}{x^2-9}+\frac{25}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{2}{x^2-1}=\frac{45}{x^2-9}+\frac{25}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{x^2-1}=-\frac{45}{x^2-9}-\frac{25}{3}$$

Зробимо підстановку $x^2-1=t$, тоді

$$\frac{2}{x^2-1}=-\frac{45}{x^2-1-8}-\frac{25}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{t}=-\frac{45}{t-8}-\frac{25}{3}\quad\left|\times 3\cdot t\cdot(t-8)\right.\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 3(t-8)=-45\cdot 3t-25t(t-8)\Leftrightarrow 6t-48=-135t-25t^2+200t\Leftrightarrow$$

$$25t^2-59t-48=0\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}D=(-59)^2-4\cdot 25\cdot(-48)=\\ =3481+4800=8281=91^2\\ t_1=\dfrac{59+91}{50}=3,\ t_2=\dfrac{59-91}{50}=-\dfrac{16}{25}\end{array}\right|\left[\begin{array}{l}t=3,\\ t=-\dfrac{16}{25}.\end{array}\right.$$

Отже,

$$\left[\begin{array}{l}x^2-1=3,\\ x^2-1=-\dfrac{16}{25},\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=3+1,\\ x^2=-\dfrac{16}{25}+\dfrac{25}{25},\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4,\\ x^2=\dfrac{9}{25},\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 2,\\ x=\pm\dfrac{3}{5}.\end{array}\right.$$

Відповідь. $\left\{-2,-\frac{3}{5},\frac{3}{5},2\right\}$.

Розв’язання. 3-ій спосіб. Отримавши шляхом рівносильних перетворень рівняння $25x^4-109x^2+36=0$, шукаємо перший корінь серед дільників вільного члена 36, тобто серед чисел $\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 6,\pm 9,\pm 12,\pm 18,\pm 36$. Оскільки всі показники степеня парні числа, то якщо додатне число буде коренем, то і протилежне, від’ємне, теж буде коренем цього рівняння.

$$x=1\Rightarrow 25\cdot 1^4-109\cdot 1^2+36=25-109+36\neq 0;$$

$$x=2\Rightarrow 25\cdot 2^4-109\cdot 2^2+36=25\cdot 16-109\cdot 4+36=400-436+36=0.$$

Отже, $x=\pm 2$ – корені рівняння $25x^4-109x^2+36=0$. А тому рівняння $25x^4-109x^2+36=0$ слід поділити на $x-2$ та ще і на $x+2$, тобто на x^2-4. Проробимо це.

$$\begin{array}{r|l} 25x^4-109x^2+36 & x^2-4 \\ \cline{2-2} \underline{25x^4-100x^2} \quad\quad\;\; & 25x^2-9 \\ -9x^2+36 & \\ \underline{-9x^2+36} & \\ 0 & \end{array}$$

Отже, $25x^4-109x^2+36=(x^2-4)(25x^2-9)$, а тому

$$25x^4-109x^2+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4=0 \\ 25x^2-9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ або } x=-2 \\ x=\dfrac{3}{5} \text{ або } x=-\dfrac{3}{5} \end{array}\right..$$

Відповідь. $\left\{-2,-\dfrac{3}{5},\dfrac{3}{5},2\right\}$.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: означення рівняння з однією змінною як одномісного предиката; означення області визначення та множини розв’язків рівняння; поняття про рівносильні рівняння, теореми про рівносильність рівнянь; означення системи рівнянь; її множини розв’язків, способи розв’язування системи рівнянь з однією змінною;

у м і т и: розв’язувати рівняння з однією змінною; знаходити область визначення і множину розв’язків рівняння з однією змінною; аналітико-синтетичним методом аналізувати сюжетні задачі, складаючи при цьому рівняння з однією змінною.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент в результаті вивчення даної теми:

1. Розв’язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами дій:

а) $633-45(74(x-110)+24)/7=3$; б) $\left(32/(2(x-220)-2)\right)/8+5=7$;
в) $633-\left(45/(x-324)\right)\cdot 8=593$; г) $\left((x-437)/7-1\right)\cdot 581+75=75$;
д) $\left((5(x-546)+24)/23+15\right)/3=6$; е) $\left(7(3(x-664)+2)-35\right)/7=3$;
є) $\left(5(74(x-110)+24)-246909\right)\cdot 3=3$. Зробити перевірку.

2. Розв'язати рівняння: а) $633-45x(74(111-110)+24)/7=3$; б) $\left((x(555-546)+24)/23+15\right)/3=6$; в) $211x-\left(45/(333-324)\right)\cdot 8=593$; г) $\left((444-437)/(3+x)-1\right)\cdot 581+75=75$; д) $\left(32/(x(222-220)-2)\right)/8+5=7$; е) $\left(7(3(666-664)+2)-35\right)/(x+1)=3$; є) $\left((74(21-11)+24)-764\right)\cdot x=1$. Зробити перевірку.

3. Розв'язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами дій:

а) (74 · 33 : 6 – x : 5) · 29 – 3 120 = 2 680;
б) 512 = (1024 ·729 ·21) : (243 · y);
в) x ·8248 : 1031 = 0;
г) [7x + 222171 : (100000 – 97843)] :33 = 64;
д) (4300 – 650 ·144 : x) ·84 : 165 – 105 = 595;
е) 564 – {48 ·[1683 – (197 + 7x)] : 1516} = 540;
є) {742 – [(180 – 5y) ·320] : 128} : 14 ·107 = 2996;
ж) {[9138x – 5859) : 39 + 28604] : 403} ·29 – 1059 = 1000;
з) {[(7008 – 52 · 14) : (314 · R)] · 425 · 60 – 305000} : 4100 = 50;
и) 2020 – [28836 : (3060 – (780 : v) · 208) + 5319] : 135 = 1980;
і) {[(1500 + 2x : 28) · 48 – 85776] · 24 + 608} · 202 = 6173120;
ї) {[223440 : ((72 · Q) : 252 + 239) + 8268] : 108 – 59} · 403 = 10478.
Зробити перевірку.

4. Навести приклади тотожностей і тотожних перетворень, застосування яких у процесі розв'язування рівнянь може призвести до помилок.

5. Розв'язати по три рівняння підставивши коефіцієнти з таблиці. Зробити перевірку. Всі обчислення, включаючи знаходження кореня з дискримінанта, виконувати без калькулятора (і м.т.!).

№ п.	$ax^2+bx+c=0$			$ax^2+bx+c=0$			$x^2+px+q=0$	
	a	b	c	a	b	c	p	q
1	-40	20	200	-2845	680	12740	-3	2
2	-45	40	260	-3015	700	13460	-8	15
3	-55	60	340	-3190	720	14200	-6	8
4	-70	80	440	-3370	740	14960	-14	45
5	-90	100	560	-3555	760	15740	-71	448
6	-115	120	700	-3745	780	16540	-7	10
7	-145	140	860	-3940	800	17360	-58	216
8	-180	160	1040	-4140	820	18200	-68	256
9	-220	180	1240	-4345	840	19060	-6	9
10	-265	200	1460	-4555	860	19940	-48	92
11	-315	220	1700	-4770	880	20840	-55	516
12	-370	240	1960	-4990	900	21760	-49	258
13	-430	260	2240	-5215	920	22700	-48	135
14	-495	280	2540	-5445	940	23660	-154	5529
15	-565	300	2860	-5680	960	24640	-820	26724
16	-640	320	3200	-5920	980	25640	-80	304
17	-720	340	3560	-6165	1000	26660	-60	224
18	-805	360	3940	-6415	1020	27700	-91	2070
19	-895	380	4340	-6670	1040	28760	-8	16
20	-990	400	4760	-6930	1060	29840	-70	325
21	-1090	420	5200	-7195	1080	30940	-98	2176
22	-1195	440	5660	-7465	1100	32060	-91	178
23	-1305	460	6140	-7740	1120	33200	-82	312
24	-1420	480	6640	-8020	1140	34360	-74	469
25	-1540	500	7160	-8305	1160	35540	-64	448
26	-1665	520	7700	-8595	1180	36740	-54	405
27	-1795	540	8260	-8890	1200	37960	-79	1530
28	-1930	560	8840	-9190	1220	39200	-99	1748
29	-2070	580	9440	-9495	1240	40460	-90	936
30	-2215	600	10060	-9805	1260	41740	-110	1869
31	-2365	620	10700	-10120	1280	43040	-66	989
32	-2520	640	11360	-10440	1300	44360	-99	2210
33	-2680	660	12040	-10765	1320	45700	-132	3915

6. Навести приклади, що показуватимуть важливість вивчення теорем про рівносильність рівнянь.

7. Розв'язати рівняння найбільш раціональним способом:

а) $x+\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\right)=\frac{34}{35}$; б) $\frac{4}{17}-(x-\frac{5}{51})=\frac{1}{6}$; в) $\frac{5}{8}z-\frac{1}{2}=\frac{7}{15}$;

г) $5/(x-45)+15=20$; д) $x\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{7}$; е) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}t-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{7}$.

Зробити перевірку.

На яких властивостях ґрунтується спосіб виконання дій. Обґрунтувати кожен його пункт.

8. Розв'язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами дій: а) $\frac{4}{9}:3\frac{2}{3}-5x=\frac{1}{6}$; б) $x+3\frac{2}{3}\cdot3\frac{1}{4}-2\frac{1}{4}=7$. Зробити перевірку.

9. Дано суму двох чисел: 36 + 14 = 50. Як зміниться сума якщо: 1) перший доданок збільшити в 2, 3, 4, 5, ..., *n* раз? 2) другий доданок збільшити в 2, 3, 4, 5, ..., *n* раз? 3) обидва доданки одночасно збільшити в 2, 3, 4, 5, ..., *n* раз? Чи пропорційна зміна суми до зміни одного з доданків? Чи пропорційна зміна суми до зміни обох доданків?

10. Другого дня магазин продав у 2 рази більше цукру ніж першого, а третього – у три рази більше ніж першого дня. Скільки магазин продав цукру за три дні разом, якщо першого дня він продав на 36 кг цукру менше, ніж третього?

11. Протягом літнього періоду видали путівок в санаторії в 3 рази менше, ніж в будинки відпочинку але на 88 більше, ніж у туристські походи. Скільки всього видано путівок, якщо в будинки

відпочинку видано на 312 путівок, більше, ніж в санаторії? (Скласти перевірну задачу).

12. На книжковому складі задачників з арифметики було в 4 рази більше, ніж з алгебри, а з геометрії в 2 рази менше, ніж з алгебри. Задачників з геометрії, було на 30450 менше, ніж з арифметики. Скільки задачників з арифметики відправлено зі складу в магазини, якщо після відправки їх лишилось на 28620 менше, ніж відправлено? (Пояснення – у формі викладу).

13. Перебуваючи в поході, учні за 3 дні пройшли 27 км. За перший день вони пройшли відстань у 2 рази більшу, ніж за третій, а за другий день на 3 км менше, ніж за перший. Скільки пройшли учні за кожний з трьох днів?

14. Для туристського походу, в якому брало участь 42 чоловіки, заготовили шестимісні і чотиримісні човни. Скільки було і тих і других човнів, якщо всі туристи розмістилися в 8 човнах і вільних місць не залишилося? (Підказка: нехай x – чотиримісні човни, тоді $(8 - x)$ – шестимісні човни.)

15. Штучна водойма має форму прямокутника з різницею сторін в 3 *км*. Площа водойми в 1,8 рази більша, ніж його периметр. Знайти довжини сторін водойми.

16. Учневі треба було знайти добуток числа 136 на деяке двоцифрове число, в якому цифра одиниць в два рази більша, ніж цифри десятків. Випадково він переставив цифри десятків двоцифрового числа і одержав добуток на 1224 більше істинного. На яке число повинен учень помножити 136?

17. В двох коробках 12,8 *кг* чаю. Якщо із першої коробки перекласти в другу 0,4 *к*г чаю, то чаю в двох коробках буде порівно. Скільки чаю в кожній коробці?

18. Добуток двох послідовних натуральних чисел дорівнює 1056. Знайдіть ці числа.

19. Різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює 29. Знайти ці числа.

20. Квадрат суми двох послідовних парних натуральних чисел дорівнює 2116. Знайти ці числа.

21. Турист за 3 дні пройшов 48 *км*. За перший день він пройшов на 6 км менше, ніж за другий, а за третій день – 0,7 шляху, пройденого за другий день. Скільки проходив турист кожного дня?

22. Відстань між пристанями М і К катер проходить за течією за 6 год. Одного разу, не дійшовши 40 *км* до пристані *К* він повернув назад і повернувся до *М*, витративши на весь цей шлях 9 *год*. Знайти швидкість катера в стоячій воді, якщо швидкість течії річки 2 *км/год*.

23. Хлібина коштує 8 коп. та ще половину своєї ціни. Скільки коштує хлібина?

24. За 4 *м* шерстяної тканини і 6 *м* сукна заплатили 182 крб. 1 *м* шерстяної тканини коштує 23 крб. Яка ціна 1 *м* сукна?

25. Відстань між двома пунктами *А* і *В* дорівнює 18 *км*. З *А* в *В* вийшов турист, а через 20 *хв* назустріч йому вийшов другий турист, а ще через 1 *год* 39 *хв* вони зустрілися. Якби вони вийшли одночасно, то зустрілися б через 1 *год* 48 *хв*. Знайти швидкість кожного туриста.

26. В перший день продали $2/5$ всієї тканини, яка є в магазині, в другий день $7/12$ того, що продали в перший день, а в третій день решту тканини. Скільки всього метрів тканини продали, якщо в третій день було продано на 192 *м* більше, ніж в другий день.

27. Розв'язати задачу, склавши числовий вираз: Дві машиністки повинні передрукувати рукописну роботу. Перша машиністка може виконати цю роботу за $3\frac{1}{3}$ дня, а друга – за $2\frac{2}{9}$. За скільки днів виконають роботу машиністки, якщо вони будуть працювати одночасно?

28. Два хлопчики зібрали 96 грибів. $\frac{2}{3}$ числа грибів, зібраних першим хлопчиком, чисельно рівна $\frac{2}{5}$ числа грибів, зібраних другим хлопчиком. Скільки грибів зібрав кожен хлопчик? (підказка: $\frac{2}{3}x = \frac{2}{5}(96 - x)$).

29. Відстань між двома містами – 150 *км*. О 9 *год*. ранку з першого міста виїхав велосипедист, а о 10 *год*. того ж ранку назустріч йому з другого міста виїхав другий велосипедист, який проїжджав за годину на 5 *км* менше ніж перший. Визначити швидкість кожного велосипедиста, якщо другий велосипедист зустрівся з першим через дві години після свого виїзду.

30. Магазин за 4 дні продав кусок ситцю по 86 коп. за метр. В перший день продали 16 м., в другий – $\frac{2}{9}$ остачі, в треті день на 50 % більше, ніж в другий день, а в четвертий день – останню частину куска. Скільки метрів ситцю було в куску, якщо вартість ситцю, проданого в четвертий день, була 10 крб. 32 коп.?

31. Басейн, який мав форму паралельного паралелепіпеда, наповнюється водою чотирма насосами за 5 хв. Перший вливає за цей час 33 $м^3$ води, другий за одну хвилину наповнює $\frac{2}{45}$ басейна, третій за одну хвилину вливає води в $1\frac{1}{2}$ рази більше, ніж другий насос, а четвертий може один заповнити басейн за 36 хв. Визначити ємність басейна і площу його основи, якщо висота його дорівнює $1\frac{4}{5}$ $м$.

32. Розв'язати рівняння і зробити перевірку:

а) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$; б) $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$;

в) $\frac{2\cdot(2x+1)}{4x^2-1}+\frac{3}{2x+1}=3-\frac{2}{1-2x}$; г) $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}$;

д) $2x^3+3x^2-8x-12=0$; е) $2x^4-7x^3-13x^2+78x+11=-7x^3+78x$.

Системи та сукупності рівнянь та нерівностей

1. Рівняння з двома змінними. Поняття про системи та сукупності рівнянь.
2. Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.
3. Способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими.
5. Нерівності із змінною. Множина допустимих значень змінної і множина розв'язків нерівності.
6. Рівносильні нерівності, теореми про рівносильність нерівностей.

1. Розглянемо таку задачу. Перший токар за день може виточити 27 деталі, а другий – 25. Перший токар працює цей тиждень за станком три дні, а другий – два дні. Скільки деталей виточать токарі за цей тиждень? Відповідь. $27 \cdot 3 + 25 \cdot 2 = 131$ (дет.). Розглянемо що буде відбуватися, якщо умови задачі будуть дещо змінені. Якщо перший токар працював цей тиждень x днів виточуючи в день 27 деталей, а другий токар працював цей тиждень y днів виточуючи в день 25 деталей і за цей тиждень вони обоє виточили 131 деталь, то можна записати $27 \cdot x + 25 \cdot y = 131$. Дістали рівняння яке містить дві змінні. На попередньому занятті ми розглядали рівняння з однією змінною. Як відомо, рівняння, яке містить дві змінні є ***рівнянням з двома змінними***. Рівняння з двома змінними є *двомісним* предикатом. Нехай рівняння містить змінні x і y. Пара чисел (a, b) з області визначення цього рівняння є розв'язком цього рівняння, якщо при підстановці чисел a, b в рівняння замість змінних x, y відповідно, отримують істинну рівність. Таких пар (a, b), що утворюють певну множину A, є переважно безліч, але можлива і деяка певна кількість в залежності від областей визначення однієї, чи іншої змінної. Тобто, якщо попередньо задано множини X і Y можливих значень відповідно змінних x і y, рівняння, яке містить дві змінні x і y, то розв'язками цього рівняння можуть бути лише пари (a, b) множини A, яка є підмножиною множини декартового добутку $X \times Y$.

Так, наприклад, в рівнянні $27 \cdot x + 25 \cdot y = 131$ з попередньої задачі змінні x та y можуть набувати лише цілих невід'ємних значень, бо вони є числами робочих днів робітників (рівність нулю певної змінної вказуватиме на те, що відповідний токар цього тижня не працював ні дня). Поставимо задачу знайти область визначення даного рівняння. Для спрощення будемо вважати, що робочих днів всього п'ять. Оскільки $0 \le x \le 5$ і $0 \le y \le 5$, то областю визначення буде множина всіх можливих пар чисел (x, y), таких, що $0 \le x \le 5$ і $0 \le y \le 5$ (декартовий добуток): $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 0), (1, 1), (1, 2),$ $(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 0), (3, 1),$ $(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 0),$ $(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$.

Аналогічно як і для рівнянь з однією змінною, два рівняння, що мають однакові множини розв'язків називаються ***рівносильними***. *Теореми про рівносильність рівнянь та наслідки з них* що були сформульовані і доведені для рівнянь з однією змінною переносяться і на рівняння з двома змінними.

Повернемося до попередньої задачі. Рівносильні перетворення дають змогу рівняння з двома невідомими $27 \cdot x + 25 \cdot y = 131$ переписати в рівносильному, але зручнішому для знаходження розв'язку вигляді $y = \dfrac{131 - 27x}{25}$. Тут легко видно, що для того, щоб число y було ціле невід'ємне, має бути $27x \le 131$ і $(131 - 27x)\vdots 25$. Оскільки $(131 - 27x) = $ $= (125 + 6) - (25 + 2)x = (125 - 25x) + (6 - 2x) = 25(5 - x) + 2(3 - x)$ і перший доданок суми $25(5 - x) + 2(3 - x)$ завжди кратний числу 25, то для того, щоб сума була кратна числу 25 необхідно і достатньо щоб і другий доданок, а саме $2(3 - x)$, був кратний числу 25, а для цього в свою чергу необхідно і достатньо щоб $x = 3$. Якщо $x = 3$, то $y = \frac{131 - 27 \cdot 3}{25} = \frac{25(5-3) + 2(3-3)}{25} = \frac{25 \cdot 2}{25} = 2$. Інших розв'язків не має, бо при $x > 4$ не виконується нерівність $27x \le 131$, а при $x = 0, 1, 2, 4$ вираз $2(3 - x)$ не кратний числу 25. Отже пара (3, 2) є єдиним розв'язком рівняння $27 \cdot x + 25 \cdot y = 131$ і ця єдиність розв'язку зумовлена накладеними згідно умови задачі обмеженнями на множину значень змінних.

Для того, щоб показати на прикладі скільки переважно має розв'язків будь-яке рівняння з двома змінними на які не накладені обмеження розглянемо це саме рівняння $27 \cdot x + 25 \cdot y = 131$, за умови, що змінні x та y можуть набувати будь-яких дійсних значень ($x \in R, y \in R$). Оскільки $27 \cdot x + 25 \cdot y = 131 \Leftrightarrow y = \frac{131 - 27x}{25}$, то розв'язком даного рівняння буде множина всіх пар $\left(t, \ \frac{131 - 27t}{25}\right)$, де $t \in R$.

Приклади.

1. У Василька були монети по 25 і по 50 копійок. Скільки було тих, а скільки інших, якщо всього в Василька було 1 грн. 25 коп.

Розв'язок. Нехай було x монет по 25 коп. і y монет по 50 коп. Тоді $25x$ коп. складають всі монети по 25 коп. і $50y$ коп. складають всі монети по 50 коп., а разом всі монети складають $25x+50y$. Оскільки всього в Василька було 1 грн. 25 коп. = 125 коп., то запишемо рівняння: $25x+50y=125$. Спростимо дане рівняння поділивши його почленно на 25 і отримаємо рівняння рівносильне попередньому: $x+2y=5$. З цього рівняння виразимо x через y і отримаємо: $x=5-2y$. Оскільки x та y це кількості а значить – цілі невід'ємні числа (0 в випадку коли відповідних монет немає), то $x=5-2y\geq 0, y\geq 0 \Rightarrow 2y\leq 5, y\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq y\leq 5/2$, тобто y може набувати одного із наступних трьох значень $0,1,2$. При цьому, оскільки $x=5-2y$, то x буде набувати наступні значення $5,3,1$ відповідно. Перевірка. $x=5, y=0 \Rightarrow 25\cdot 5+50\cdot 0=125$; $x=3, y=1 \Rightarrow 25\cdot 3+50\cdot 1=125$; $x=1, y=2 \Rightarrow 25\cdot 1+50\cdot 2=125$.

Відповідь. 5 і 0, або 3 і 1, або 1 і 2.

2. Записати координати точки A, якщо відомо, що її координати задовольняють рівнянню $2x+y=5$.

Розв'язок. Рівняння $2x+y=5 \Leftrightarrow 2x+y-5=0$ і це рівняння деякої прямої на площині. Якщо координати точки A задовольняють рівнянню $2x+y=5$, то ця точки A лежить на прямій $2x+y=5$. Точок на прямій, так як і розв'язків рівняння $2x+y=5$ є безліч, а отже, оскільки $2x+y=5 \Leftrightarrow y=5-2x$, то одна, будь-яка пара з множини всіх пар чисел $(t, 5-2t)$, де $t\in R$ і є координатами точки A.

Якщо ж в прямокутній системі координат відобразити точкою кожну пару множини A (множини пар (a, b), що задовольняють рівняння), то отримаємо *графік* цього рівняння.

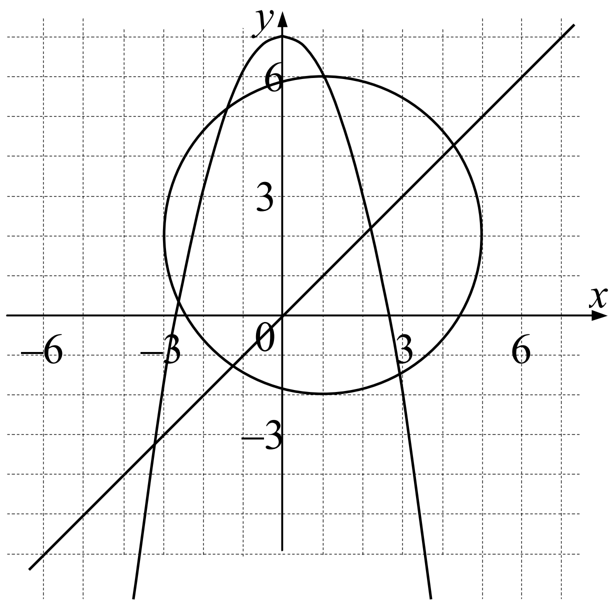


Рис. 3.1

Наприклад, графіком рівняння $x - y = 0$, яке є рівносильне рівнянню $y = x$, є бісектриса першого і третього координатних кутів (рис. 3.1); графіком рівняння $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$, яке є рівносильне рівнянню $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4^2$, є коло з центром в точці $(1, 2)$ і радіусом 4 (рис. 3.1); графіком рівняння $x^2 + y - 7 = 0$ є парабола $y = -x^2 + 7$ з вершиною в точці $(0, 7)$ і вітками напрямленими вниз (рис. 3.1).

Перейдемо до розгляду ***системи рівнянь*** з двома невідомими.

Для цього розглянемо таку задачу.

Щоб в поході можна було розмістити в наметах точно 394 людини, військовими було взято чотиримісні та шестимісні намети, всього разом 80 наметів. Скільки було взято тих, а скільки інших наметів?

Для розв’язку задачі алгебраїчним способом слід ввести невідому (змінну) чи декілька їх. Нехай чотиримісних наметів взяли x, а шестимісних наметів взяли y. Тоді, оскільки наметів за умовою задачі разом було 80, то складаємо рівняння $x+y=80$. В одному чотиримісному наметі можна розмістити 4 людини, а в одному шестимісному – 6 людей. Тоді в x чотиримісних наметах можна розмістити $4x$ людини, а в y шестимісних – $6y$ людей, а разом 394, тобто складаємо друге рівняння $4x+6y=394$. Отже, щоб розв'язати цю задачу, потрібно знайти таку пару чисел (x, y), яка б задовольняла двом рівнянням $x+y-80=0$ і $4x+6y-394=0$.

Цю задачу можна розв'язувати і в початкових класах арифметичним способом за допомогою певних *припущень*, або *підбором*, а в середніх класах за допомогою складання рівняння з однією змінною, або системи рівнянь з двома змінними
$$\begin{cases} x+y-80=0 \\ 4x+6y-394=0 \end{cases}.$$

Кожне з цих рівнянь містять дві змінні x і y, є двомісним предикатом і може бути позначене в загальному через рівняння $f(x, y)=0$ і $g(x, y)=0$ відповідно.

Попередня сюжетна задача (про намети) приводить нас до необхідності введення такого *поняття* стосовно певних двох рівнянь з двома невідомими, яке б вимагало визначити, при яких значеннях цих невідомих *кожне* з цих рівнянь перетворюється в істинну рівність.

Системою рівнянь $f(x, y)=0$ і $g(x, y)=0$ *називається множина цих рівнянь при умові, що вимагається визначити, при яких значеннях змінних* x, y *кожне з цих рівнянь* $f(x, y)=0$ і $g(x, y)=0$ *перетворюється в істинну рівність.*

Із означення видно, що системою рівнянь $f(x, y) = 0$ і $g(x, y) = 0$ є їх *кон'юнкція*, тобто запис $f(x, y) = 0 \wedge g(x, y) = 0$ рівносильний запису $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$.

Областю визначення системи (кон'юнкції) рівнянь називається множина, що є *перерізом* областей визначення усіх рівнянь, що входять до системи.

Так, наприклад областю визначення системи $\begin{cases} x + y - 80 = 0 \\ 4x + 6y - 394 = 0 \end{cases}$ в загальному є множина всіх пар дійсних чисел. Але, якщо пригадати, що ця система з попередньої задачі, тобто що x і y – кількості наметів, то її областю визначення є множина всіх пар цілих невід'ємних чисел ((0, 0) означатиме, що немає ні тих ні інших наметів).

Множиною розв'язків системи *називається множина всіх пар чисел* (a, b), *при підстановці яких у кожне рівняння системи замість x і y дістанемо істинні рівності.* Інакше кажучи, *множиною розв'язків системи рівнянь* є множина, що являє собою ***переріз*** множин розв'язків кожного з рівнянь системи.

Способи розв'язуванням систем рівнянь з двома невідомими розглянемо пізніше.

Отож розв'язати систему рівнянь означає знайти розв'язок який буде розв'язком кожного рівняння. А чи існують задачі, які вимагатимуть знайти розв'язок хоча б одного з рівнянь до яких можна прийти в процесі розв'язування задачі? Існують. Такою задачею буде, наприклад, наступна задача.

Василько і Марійка вдома разом читають книжку ”Пригоди Тома Соєра” . Спочатку вголос прочитав Василько певне число повних сторінок, а потім Марійка. Йдучи зі школи Василько і

Марійка не могли пригадати скільки сторінок книжки прочитав кожен з них а лише пам’ятали, що разом вони прочитали 56 або 65 сторінок. Яке число сторінок міг прочитати Василько, а яке – Марійка?

Для розв’язку задачі алгебраїчним способом слід ввести невідому (змінну) чи декілька їх. Нехай x – число сторінок, які прочитав Василько, а y – число сторінок, які прочитала Марійка. Оскільки за умовою задачі сказано, що разом діти прочитали 56 або 65 сторінок, то складаємо два рівняння: $x+y=56$, або $x+y=65$. Логічно, що відповіддю на запитання задачі буде множина пар цілих невід’ємних чисел, що кожна з цих пар задовольняє хоча б одне з наступних двох рівнянь: $x+y-56=0$, $x+y-65=0$.

Ця задача приводить нас до необхідності введення такого *поняття* стосовно певних двох рівнянь з двома невідомими, яке б вимагало визначити, при яких значеннях цих невідомих *хоча б одне* з цих рівнянь перетворюється в істинну рівність.

Сукупністю рівнянь $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ *називається множина цих рівнянь при умові, що вимагається визначити, при яких значеннях змінних* x, y *хоча б одне з цих рівнянь* $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ *перетворюється в істинну рівність.*

Із означення видно, що *сукупністю* рівнянь $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ є їх *диз’юнкція*, тобто запис $f(x,y)=0 \vee g(x,y)=0$ рівносильний запису $\left[\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right.$.

Областю визначення сукупності (диз'юнкції) рівнянь називається множина, що є *об’єднанням* областей визначення усіх рівнянь, що входять до системи.

Множиною розв'язків сукупності *називається множина всіх пар чисел* (*a*, *b*), *при підстановці яких у кожне рівняння системи замість x і y дістанемо хоча б одну істинну рівність.* Інакше кажучи, *множиною розв'язків* сукупності рівнянь є множина, що являє собою ***об'єднання*** множин розв'язків кожного з рівнянь системи.

Оскільки переважно кожне з рівнянь з двома невідомими має безліч розв'язків, то сукупність таких рівнянь тим більше матиме в переважній більшості (якщо не накладено певні обмеження на саму область визначення кожного із рівнянь) *безліч розв'язків*.

Так задача про число сторінок прочитаних кожним із дітей має, хоч і багато, але не безліч розв'язків, бо тут x та y – цілі невід'ємні числа такі що в сумі дають або 56 або 65. Згідно цього, логічно, що Васильком і Марійкою окремо може бути прочитано два числа сторінок відповідно (пара відповідно), тобто пара, яка рівна одній будь-якій з множини 123-ьох наступних пар: {(0, 56); (1, 55); (2, 54); (3, 53); (4, 52); (5, 51); (6, 50); (7, 49); (8, 48); (9, 47); (10, 46); (11, 45); (12, 44); (13, 43); (14, 42); (15, 41); (16, 40); (17, 39); (18, 38); (19, 37); (20, 36); (21, 35); (22, 34); (23, 33); (24, 32); (25, 31); (26, 30); (27, 29); (28, 28); (29, 27); (30, 26); (31, 25); (32, 24); (33, 23); (34, 22); (35, 21); (36, 20); (37, 19); (38, 18); (39, 17); (40, 16); (41, 15); (42, 14); (43, 13); (44, 12); (45, 11); (46, 10); (47, 9); (48, 8); (49, 7); (50, 6); (51, 5); (52, 4); (53, 3); (54, 2); (55, 1); (56, 0); (0, 65); (1, 64); (2, 63); (3, 62); (4, 61); (5, 60); (6, 59); (7, 58); (8, 57); (9, 56); (10, 55); (11, 54); (12, 53); (13, 52); (14, 51); (15, 50); (16, 49); (17, 48); (18, 47); (19, 46); (20, 45); (21, 44); (22, 43); (23, 42); (24, 41); (25, 40); (26, 39); (27, 38); (28, 37); (29, 36); (30, 35); (31, 34); (32, 33); (33, 32); (34, 31); (35, 30); (36, 29); (37, 28); (38, 27); (39, 26); (40, 25); (41, 24); (42, 23); (43, 22); (44, 21); (45, 20); (46, 19); (47, 18); (48, 17); (49, 16); (50, 15); (51, 14); (52, 13); (53, 12); (54, 11); (55, 10); (56, 9); (57, 8); (58, 7); (59, 6); (60, 5); (61, 4); (62, 3); (63, 2); (64, 1); (65, 0)}. Дана множина і є розв’язком задачі про число сторінок прочитаних кожним із дітей.

2. Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Розглянемо систему $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, де коефіцієнти a_1, b_1 одночасно не нулі і a_2, b_2 теж одночасно не нулі (коефіцієнти системи задовольняють умовам $a_1{}^2 + b_1{}^2 \neq 0$ і $a_2{}^2 + b_2{}^2 \neq 0$).

Оскільки обидва рівняння такої системи є рівняннями прямих ліній, то така система називається *системою двох лінійних рівнянь з двома невідомими*.

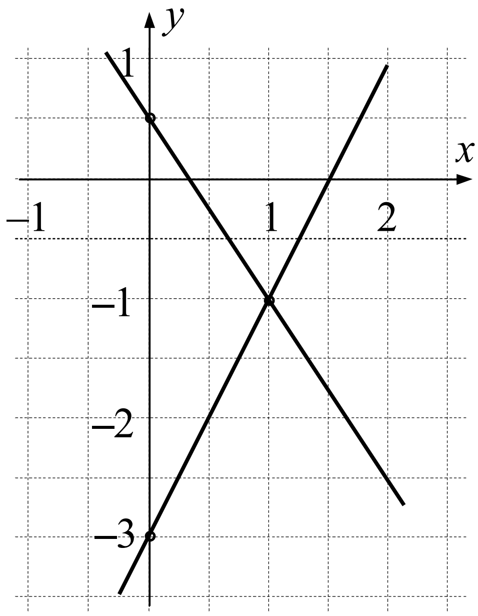


Рис. 3.2

З геометричної точки зору розв'язок такої системи – це координати точки перегину цих прямих.

Можливі три випадки.

1). *Прямі перетинаються.* Система має *єдиний* розв'язок. У цьому випадку кутові коефіцієнти прямих не рівні, тобто $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ або, як наслідок, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Тобто якщо коефіцієнти при невідомих пропорційні, то система має *єдиний* розв'язок.

Наприклад, система двох лінійних рівнянь з двома невідомими $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ має розв’язок $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, тобто $(1, -1)$ (розв’язок знайдений методом підбору) і притому єдиний, бо виконується умова $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, бо $\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{2}$. І дійсно пара чисел $(1, -1)$ є координатами єдиної точки перетину двох прямих ліній з рівняннями $2x - y = 3$ і $3x + 2y = 1$ відповідно (рис. 3.2). Розв’язок такої системи може бути поданий у вигляді одноелементної множини $\{(1, -1)\}$.

2). *Прямі паралельні* (але не накладаються). В цьому випадку розв'язків *немає*. Виконується умова $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Наприклад, система двох лінійних рівнянь з двома невідомими $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ розв'язків немає, бо виконується умова $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$,

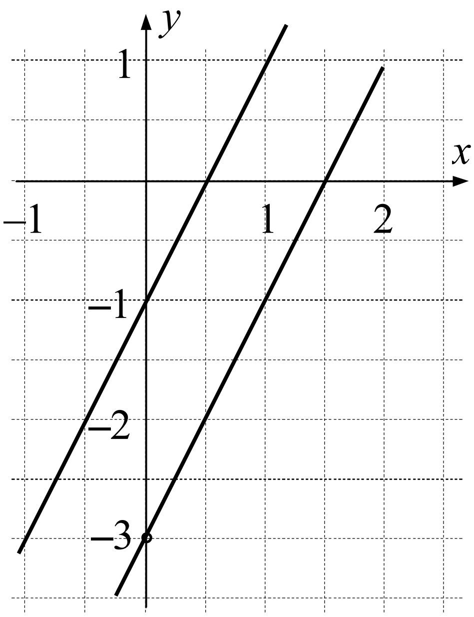


Рис. 3.3

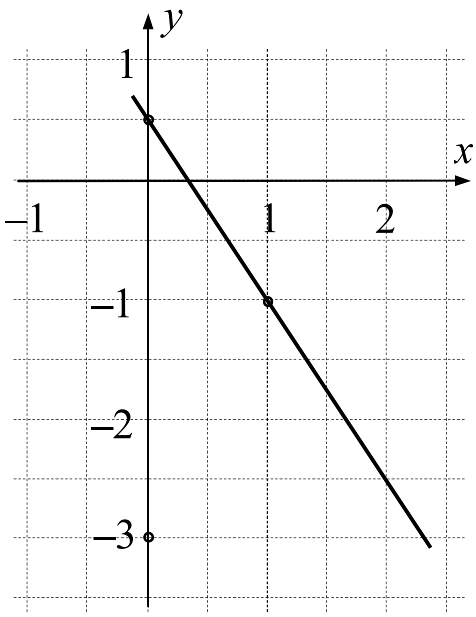


Рис. 3.4

бо $\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{3}{1}$. І дійсно дві прямі лінії з рівняннями $2x-y=3$ і $2x-y=1$ відповідно є паралельні, тобто не перетинаються в жодній точці площини (рис. 3.3). Іноді говорять що така система має порожню множину розв'язків Ø.

3). *Прямі збігаються.* В цьому випадку система має безліч розв'язків. Виконується умова $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

Наприклад, система двох лінійних рівнянь з двома невідомими $\begin{cases}3x+2y=1\\9x+6y=3\end{cases}$ має безліч розв'язків, бо виконується умова $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, бо $\frac{9}{3}=\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$. І дійсно дві прямі лінії з рівняннями $3x+2y=1$ і $9x+6y=3$ відповідно накладаються (рис. 3.4), бо ці рівняння є рівносильними (достатньо друге рівняння почленно поділити на 3 щоб отримати перше). Координати кожної точки прямої $3x+2y=1$ (рис. 3.4) є розв'язками системи $\begin{cases}3x+2y=1\\9x+6y=3\end{cases}$. Сам розв'язок може бути записаний у вигляді нескінченної множини пар кожна з яких виду $\left(x=t,\ y=\frac{1-3t}{2}\right)$, де $t\in R$.

3. Способи розв'язування систем рівнянь з двома невідомими.

Спочатку розглянемо способи розв'язування систем двох ***лінійних*** *рівнянь з двома невідомими.*

Існує ряд способів розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Нами вивчатимуться деякі з цих способів, а саме: підбору, підстановки, алгебраїчного додавання, графічний (інші (метод Крамера, матричний метод, метод Жордана-Гаусса) вивчаються в курсі вищої математики та їх розгляд виходить за межі нашої задачі).

Детальніше зупинимося на кожному з чотирьох згаданих способів.

Нехай ми маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Метод підстановки полягає в визначенні з одного з рівнянь однієї невідомої через іншу і підстановці отриманого виразу в інше рівняння. При цьому отримують рівняння з однією невідомою, яку легко знайти. Після цього числове значення цієї невідомої підставляють в вираз для іншої невідомої і обчислюють іншу невідому. Проробимо це.

З першого рівняння виразимо x через y: $x = \dfrac{c_1 - b_1y}{a_1}$.

Підставимо в інше рівняння і отримаємо: $a_2\dfrac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y = c_2$.

Отримали рівняння з однією невідомою y. Знайдемо її. Виконаємо рівносильне перетворення даного рівняння, а саме почленно помножимо його на a_1. Отримаємо:

$$a_2\frac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y = c_2 \;\Bigg|\; \times a_1 \quad \Leftrightarrow \quad a_2(c_1 - b_1y) + a_1b_2y = a_1c_2.$$

Для знаходження y, відкриємо дужки, зведемо подібні, тобто спростимо дане рівняння і виконавши рівносильні перетворень перепишемо спрощене рівняння так, щоб отримати вираз для невідомої y. Отримаємо:

$$a_2(c_1 - b_1y) + a_1b_2y = a_1c_2 \;\Leftrightarrow\; a_2c_1 - a_2b_1y + a_1b_2y = a_1c_2 \;\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1\ \Leftrightarrow\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. Оскільки всі коефіцієнти $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – відомі числа, то можна обчислити значення невідомої y: $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = y_0$.

Підставивши отримане значення в вираз для *x* через *y*, а саме в вираз $x = \dfrac{c_1 - b_1y}{a_1}$, отримаємо: $x = \dfrac{c_1 - b_1y_0}{a_1}$. Після обчислення отримаємо: $x = \dfrac{c_1 - b_1y_0}{a_1} = x_0$. Пара чисел (x_0, y_0), або як іноді кажуть, одноелементна множини $\{(x_0, y_0)\}$ і є розв'язком системи.

Приклади.

Розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими *методом підстановки*: 1) $\begin{cases} 9x + 11y = 25 \\ 2x + 8y = 14 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 4x + 5y = 8 \\ 9x + 11y = 25 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 7x + 9y = 8 \\ 14x + 18y = 21 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x + 5y = 8 \\ 9x + 45y = 72 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 14x + 9y = 2 \\ 28x + 18y = 4 \end{cases}$.

1) $\begin{cases} 9x + 11y = 25 \\ 2x + 8y = 14 \end{cases}$. Розв'язок.

Оскільки кожен член другого рівняння кратний числу 2, то поділимо це рівняння почленно на два. Тепер поміняємо рівняння місцями і отримаємо систему рівносильну до вихідної, але вже записану в простішому вигляді:

$$\begin{cases} x + 4y = 7 \\ 9x + 11y = 25 \end{cases}$$

З першого рівняння виразимо *x* через *y*: $x = 7 - 4y$. Підставимо в друге рівняння і отримаємо: $9(7 - 4y) + 11y = 25$. Отримали рівняння з однією невідомою y. Знайдемо її.

$$63-36y+11y=25 \Leftrightarrow -25y=25-63 \Leftrightarrow -25y=-38 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-38/-25 \Leftrightarrow y=38/25 \Leftrightarrow y=1\frac{13}{25}.$$

В вираз $x=7-4y$ замість y підставимо його знайдене числове значення, тобто число 38/25 і обчислимо іншу невідому:

$$x=7-4\cdot\frac{38}{25}=7-\frac{4\cdot 38}{25}=7-\frac{152}{25}=\frac{7\cdot 25-152}{25}=\frac{7\cdot 25-152}{25}=$$

$$=\frac{175-152}{25}=\frac{23}{25}.$$

Отже, ми отримали $x=\frac{23}{25}$, $y=1\frac{13}{25}$.

Зробимо перевірку:

$$\begin{cases} 9\cdot\frac{23}{25}+11\cdot\frac{38}{25}=25 \\ 2\cdot\frac{23}{25}+8\cdot\frac{38}{25}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{207}{25}+\frac{418}{25}=25 \\ \frac{46}{25}+\frac{304}{25}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{625}{25}=25 \\ \frac{350}{25}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25=25 \\ 14=14 \end{cases}.$$

Отримали обидві істинні рівності, то розв'язок знайдено правильно.

Відповідь. $\{(\frac{23}{25}, 1\frac{13}{25})\}$ – множина розв'язків системи.

2) $\begin{cases} 4x+5y=8 \\ 9x+11y=25 \end{cases}$. Розв'язок.

З першого рівняння виразимо x через y: $4x=8-5y$ і $x=\frac{8-5y}{4}$.

Підставимо в друге рівняння і отримаємо: $9\left(\frac{8-5y}{4}\right)+11y=25$.

Отримали рівняння з однією невідомою y. Знайдемо її. Оскільки, при множенні числа на дріб, потрібно число помножити на чисельник дробу, отримаємо:

$$\frac{9(8-5y)}{4}+11y=25 \Leftrightarrow \frac{72-45y}{4}+11y=25.$$

Для того, щоб позбутися знаменника, помножимо цей дріб почленно на 4 і отримаємо:

$72-45y+44y=100 \Leftrightarrow -y=100-72 \Leftrightarrow -y=28 \Leftrightarrow y=-28$.

В вираз $x=\dfrac{8-5y}{4}$ замість y підставимо його знайдене числове значення, тобто число -28 і обчислимо іншу невідому: $x=\dfrac{8-5\cdot(-28)}{4}=\dfrac{8+140}{4}=\dfrac{148}{4}=\dfrac{100+48}{4}=25+12=37$.

Отже, ми отримали $x=37$, $y=-28$.

Зробимо перевірку:

$$\begin{cases} 4\cdot 37+5\cdot(-28)=8 \\ 9\cdot 37+11\cdot(-28)=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 120+28-140=8 \\ 270+63-280-28=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8=8 \\ 25=25 \end{cases}.$$

Отримали обидві істинні рівності, то розв'язок знайдено правильно.

Відповідь. {(37, –28)} – множина розв'язків системи.

Іноді буває, що система не має розв'язків.

3) $\begin{cases} 7x+9y=8 \\ 14x+18y=21 \end{cases}$. Розв'язок способом підстановки.

$7x+9y=8 \Leftrightarrow x=\dfrac{8-9y}{7}$. Підставляємо в друге рівняння і виконуємо рівносильні перетворення: $14\cdot\dfrac{8-9y}{7}+18y=21 \,\Big|\, \times 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14(8-9y)+7\cdot 18y=7\cdot 21 \Leftrightarrow 112-126y+126y=147 \Leftrightarrow 112=147$ – завжди хибна числова рівність, а отже система розв'язків не має.

Відповідь. Ø, порожня множина розв'язків системи.

4) $\begin{cases} x+5y=8 \\ 9x+45y=72 \end{cases}$. Розв'язок способом підстановки.

$x+5y=8 \Leftrightarrow x=8-5y$. Підставляємо в друге рівняння і виконуємо рівносильні перетворення: $9(8-5y)+45y=72 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 72-45y+45y=72\ \Leftrightarrow\ 45=45$ – завжди істинна числова рівність, а отже система розв'язків має безліч. Сам розв'язок може бути записаний у вигляді нескінченної множини пар кожна з яких виду $(x=8-5t,\ y=t)$, де $t\in R$ або $(8-5t,\ t)$, де $t\in R$.

Відповідь. $\{(x,\ y)\mid x=8-5t,\ y=t,\ t\in R\}$, нескінченна множина розв'язків системи.

5) $\begin{cases}14x+9y=2\\28x+18y=4\end{cases}$. Розв'язок способом підстановки.

$14x+9y=2\Leftrightarrow y=\dfrac{2-14x}{9}$. Підставляємо в друге рівняння і виконуємо рівносильні перетворення: $28x+18\cdot\dfrac{2-14x}{9}=4\ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ 28x+\dfrac{18\cdot(2-14x)}{9}=4\ \Leftrightarrow\ 28x+2\cdot(2-14x)=4\ \Leftrightarrow\ 4=4$ – завжди істинна числова рівність, а отже система розв'язків має безліч. Сам розв'язок може бути записаний у вигляді нескінченної множини пар кожна з яких виду $\left(x=t,\ y=\dfrac{2-14t}{9}\right)$, де $t\in R$ або $\left(t,\ \dfrac{2-14t}{9}\right)$, де $t\in R$.

Відповідь. $\left\{(x,\ y)\mid x=t,\ y=\dfrac{2-14t}{9},\ t\in R\right\}$, нескінченна множина розв'язків системи.

Розглянемо ***метод алгебраїчного додавання***. Нехай ми маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$.

Метод алгебраїчного додавання полягає в послідовних рівносильних перетвореннях системи лінійних рівнянь, виключенні однієї з двох невідомих і зведенні системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими до трикутного вигляду: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ \qquad\quad y = y_0 \end{cases}$

(трикутного, бо $\begin{cases} a_1x + b_1y & = c_1 \\ \qquad\quad y & = y_0 \end{cases}$). У трикутному вигляді вже знайдено числове значення однієї з невідомих системи (це може бути і невідома x). Якщо систему не можливо звести до трикутного вигляду (при вилученні однієї невідомої вилучається і інша), то в залежності від того яку отримують *хибну* чи *істинну* числову рівність (в результаті вилучення обох невідомих), система буде мати *порожню* чи *нескінченну* відповідно множину розв'язків.

Для перетвореннях системи лінійних рівнянь над системою виконують наступні рівносильні перетворення (їх часто називаються *елементарними*):

а) почленне множення будь-якого рівняння системи на будь-яке дійсне число, відмінне від нуля;

б) почленне додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число;

в) перестановка рівнянь у системі;

г) вилучення із системи тотожності $0 \equiv 0$.

Як відомо, ці операції не порушують рівносильності (не змінюють множину розв'язків) системи рівнянь.

За допомогою операції б) можна вилучити будь-яке невідоме з одного з двох рівнянь системи. Проробимо це.

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$. До обох частин другого рівняння почленно помножених на коефіцієнт a_1 почленно додамо відповідні частини першого рівняння, почленно помноженого на коефіцієнт $-a_2$. В результаті отримаємо систему:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ (a_1a_2-a_2a_1)x+(a_1b_2-a_2b_1)y=(a_1c_2-a_2c_1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ y=y_0 \end{cases},$$

де y_0 – дійсне число, значення числового виразу $\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$. Отже ми отримали систему рівносильну первинній, але в трикутному вигляді. Підставивши в рівняння $a_1x+b_1y=c_1$ замість y його знайдене числове значення y_0, отримаємо рівняння з однією невідомою: $a_1x+b_1y_0=c_1$. З цього рівняння знаходимо числове значення невідомої x: $x=\dfrac{c_1-b_1y_0}{a_1}$.

Якщо отримують систему $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ 0=a_1c_2-a_2c_1 \end{cases}$ і якщо:

– вираз $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$, то система має порожню множину розв’язків (система не має розв’язків бо хибна числова рівність не стане істинною ні при яких значеннях змінних);
– вираз $a_1c_2-a_2c_1=0$, то система має нескінченну множину розв’язків (оскільки друге рівняння є істинною числовою рівністю, то всі розв’язки першого рівняння і будуть розв’язками системи).

Приклади.

Розв’язати систему лінійних рівнянь *методом алгебраїчного додавання*:

1) $\begin{cases} 9x+11y=25 \\ 2x+8y=14 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 4x+5y=8 \\ 9x+11y=25 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 7x+9y=8 \\ 14x+18y=21 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 9x+45y=72 \\ x+5y=8 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 14x+9y=2 \\ 28x+18y=4 \end{cases}$.

1) $\begin{cases} 9x+11y=25 \\ 2x+8y=14 \end{cases}$. Розв’язок.

Друге рівняння почленно поділимо на два. Тепер поміняємо рівняння місцями і отримаємо: $\begin{cases} x+4y=7 \\ 9x+11y=25 \end{cases}$. В отриманій системі перше рівняння почленно помножимо на 9. Отримаємо таку систему: $\begin{cases} 9x+36y=63 \\ 9x+11y=25 \end{cases}$. Віднімемо від другого рівняння перше: $\begin{cases} 9x+36y=63 \\ 9x-9x+11y-36y=25-63 \end{cases}$. Звідси $\begin{cases} 9x+36y=63 \\ -25y=-38 \end{cases}$. З другого рівняння отримаємо $y=\frac{-38}{-25}=\frac{38}{25}=1\frac{13}{25}$. Підставимо в рівняння $x+4y=7$ замість змінної y його числове значення 38/25 і отримаємо: $x+4\cdot\frac{38}{25}=7$. Звідси $x=7-4\cdot\frac{38}{25}=\frac{23}{25}$. Отже, ми отримали $x=\frac{23}{25}$, $y=1\frac{13}{25}$.

Відповідь. $\{(\frac{23}{25}, 1\frac{13}{25})\}$ – множина розв’язків системи.

2) $\begin{cases} 4x+5y=8 \\ 9x+11y=25 \end{cases}$. Розв’язок.

Перше рівняння почленно помножимо на 9, друге рівняння почленно помножимо на 4 і отримаємо: $\begin{cases} 36x+45y=72 \\ 36x+44y=100 \end{cases}$. Віднімемо від першого рівняння друге рівняння і отримаємо рівняння без невідомої x, а лише з однією невідомою y: $36x-36x+45y-44y=72-100 \Leftrightarrow 45y-44y=72-100$. З цього рівняння: $y=-28$. Підставимо в одне із рівнянь вихідної системи, наприклад перше, замість змінної y його числове значення -28 і отримаємо: $4x+5\cdot(-28)=8$. Звідси: $4x-140=8 \Leftrightarrow 4x=148 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{148}{4} \Leftrightarrow x=3$. Отже, ми отримали $x=37$, $y=-28$.

Відповідь. {(37, –28)} – одноелементна множина розв'язків системи.

3) $\begin{cases}7x+9y=8\\14x+18y=21\end{cases}$. Розв'язок.

Від другого рівняння почленно віднімемо перше рівняння почленно помножене на 2. Отримаємо:

$$\begin{cases}7x+9y=8\\14x+18y=21\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+9y=8\\14x-14x+18y-18y=21-16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+9y=8\\0=5\end{cases} -$$

система не має розв'язків бо хибна числова рівність не стане істинною ні при яких значеннях змінних.

Відповідь. Ø, порожня множина розв'язків.

4) $\begin{cases}9x+45y=72\\x+5y=8\end{cases}$. Розв'язок.

Переставимо місцями рівняння системи: $\begin{cases}x+5y=8\\9x+45y=72\end{cases}$. Від другого рівняння почленно віднімемо перше рівняння почленно помножене на 9. Отримаємо:

$$\begin{cases}x+5y=8\\9x+45y=72\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+5y=8\\9x-9x+45y-45y=72-72\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+5y=8\\0=0\end{cases}.$$

Остання система містить рівняння і завжди істинну числову рівність, а отже рівносильна рівняння, тобто:

$\begin{cases} x+5y=8 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+5y=8$. Система має ті розв'язки, які має рівняння $x+5y=8$, тобто система розв'язків має безліч. Оскільки $x+5y=8 \Leftrightarrow x=8-5y$, то і сам розв'язок може бути записаний у вигляді нескінченної множини пар кожна з яких виду $(x=8-5t,\ y=t)$, де $t \in R$ або $(8-5t,\ t)$, де $t \in R$.

Відповідь. $\{(x,\ y) \mid x=8-5t,\ y=t,\ t \in R\}$, нескінченна множина розв'язків системи.

5) $\begin{cases} 14x+9y=2 \\ 28x+18y=4 \end{cases}$. Розв'язок алгебраїчним додаванням.

Від другого рівняння почленно віднімемо перше рівняння почленно помножене на 2. Отримаємо:

$$\begin{cases} 14x+9y=2 \\ 28x+18y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x+9y=2 \\ 28x-28x+18y-18y=4-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x+9y=2 \\ 0=0 \end{cases}.$$

Друга з двох рівностей – завжди істинна числова рівність, а отже система рівносильна рівнянню $14x+9y=2 \Leftrightarrow y=\dfrac{2-14x}{9}$, а отже система розв'язків має безліч. Сам розв'язок може бути записаний у вигляді нескінченної множини пар кожна з яких виду $\left(x=t,\ y=\dfrac{2-14t}{9}\right)$, де $t \in R$ або $\left(t,\ \dfrac{2-14t}{9}\right)$, де $t \in R$.

Відповідь. $\left\{(x,\ y) \mid x=t,\ y=\dfrac{2-14t}{9},\ t \in R\right\}$, нескінченна множина розв'язків системи.

Графічний метод полягає в тому, що кожне рівняння з системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими є рівнянням прямої лінії на площині і координати точки перетину цих прямих ліній і будуть розв'язком системи. Для цього нам потрібно:

по-перше – скласти таблички для першого та для другого рівняння. В кожній табличці достатньо взяти лише дві пари чисел (вони є координатами двох точок, через які можна однозначно провести пряму лінію відповідного рівняння);

по-друге – зобразити на координатній площині обидві прямі лінії;

по-третє – знайти координати точки перетину прямих ліній, спроектувавши з отриманої в результаті перетину точки перпендикуляри на координатні осі.

Проробимо це використовуючи загальний вигляд системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Спочатку розглянемо всі можливі випадки самого розв’язку. Як вже відомо можливі три випадки. Якщо:

– $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$, то *прямі перетинаються і* система має *єдиний* розв'язок;

– $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то *прямі паралельні* (але не накладаються) і система розв'язків *немає* (має порожню множину розв’язків Ø);

– $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то *прямі збігаються* і система має безліч розв'язків.

Розглянемо детальніше кожен із випадків.

Якщо $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$, то щоб знайти той єдиний розв’язок потрібно графічно на прямокутній системі координат *Oxy* зобразити дві прямі лінії $a_1x + b_1y = c_1$ і $a_2x + b_2y = c_2$. Для цього слід намалювати табличку, взявши два різних значення для кожного рівняння.

Приклад.

Розв'язати рівняння графічним способом: 1). $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-4y=-5 \end{cases}$;

2). $\begin{cases} 9x+11y=25 \\ 2x+8y=14 \end{cases}$; 3). $\begin{cases} 4x+5y=8 \\ 9x+11y=25 \end{cases}$.

1). $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-4y=-5 \end{cases}$. Розв'язок *графічним методом*.

Розглянемо спочатку перше рівняння: $x+2y=5$. Намалюємо табличку і візьмемо, для простоти, в першому випадку $x=0$, а в другому $y=0$.

x	0	
y		0

Обчислимо y, якщо $x=0$: $0+2y=5 \Leftrightarrow y=5/2=2{,}5$.

Обчислимо x, якщо $y=0$: $x+2\cdot 0=5 \Leftrightarrow x=5$.

Підставимо в табличку:

x	0	5
y	2,5	0

Отже, (0, 2,5) і (5, 0) – координати двох точок, що лежать на першій прямій.

Розглянемо друге рівняння: $3x-4y=-5$. Намалюємо табличку і візьмемо аналогічно до попереднього, для простоти, в першому випадку $x=0$, а в другому $y=0$.

x	0	
y		0

Обчислимо y, якщо $x=0$, то $0-4y=-5 \Leftrightarrow y=-5/-4=1{,}25$.

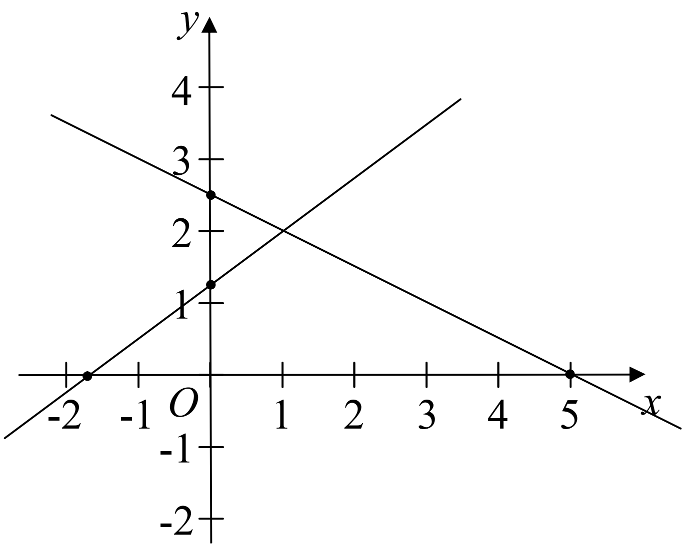
Обчислимо x, якщо $y=0$: $3x-0=-5 \Leftrightarrow x=-5/3=-1\dfrac{2}{3}$.

Підставимо в табличку:

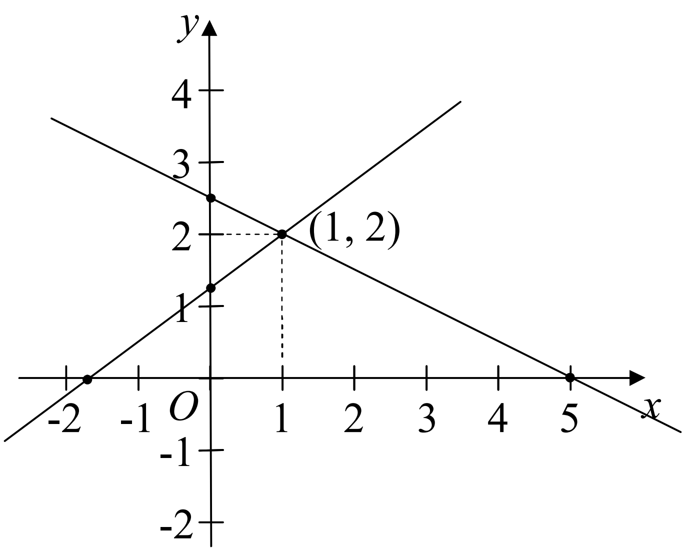
x	0	–5/3
y	1,25	0

Отже, (0, 1,25) і (–5/3, 0) – координати двох точок, що лежать на другій прямій.

Зобразимо обидві прямі на прямокутній системі координат.



Знайдемо координати точки їх перетину, провівши з неї перпендикуляри на осі системи координат.



Отже, ми отримали $x = 1,\ y = 2$.

Відповідь. $\{(1, 2)\}$ – множина розв'язків системи.

2). $\begin{cases} 9x+11y=25 \\ 2x+8y=14 \end{cases}$. Розв’язок *графічним методом*.

Розглянемо спочатку перше рівняння: $9x+11y=25$. Намалюємо табличку і візьмемо, для простоти, в першому випадку $x=0$, а в другому $y=0$.

x	0	
y		0

Обчислимо y, якщо $x=0$: $9\cdot 0+11y=25 \Leftrightarrow y=25/11=2\frac{3}{11}$.

Обчислимо x, якщо $y=0$: $9x+11\cdot 0=25 \Leftrightarrow x=25/9=2\frac{7}{9}$.

Підставимо в табличку:

x	0	$2\frac{7}{9}$
y	$2\frac{3}{11}$	0

Отже, $(0,\ 2\frac{3}{11})$ і $(2\frac{7}{9},\ 0)$ – координати двох точок, що лежать на першій прямій.

Розглянемо друге рівняння: $2x+8y=14$. Намалюємо табличку і візьмемо аналогічно до попереднього, для простоти, в першому випадку $x=0$, а в другому $y=0$.

x	0	
y		0

Обчислимо y, якщо $x=0$, то $2\cdot 0+8y=14 \Leftrightarrow y=14/8=7/4=1\frac{3}{4}=1{,}75$.

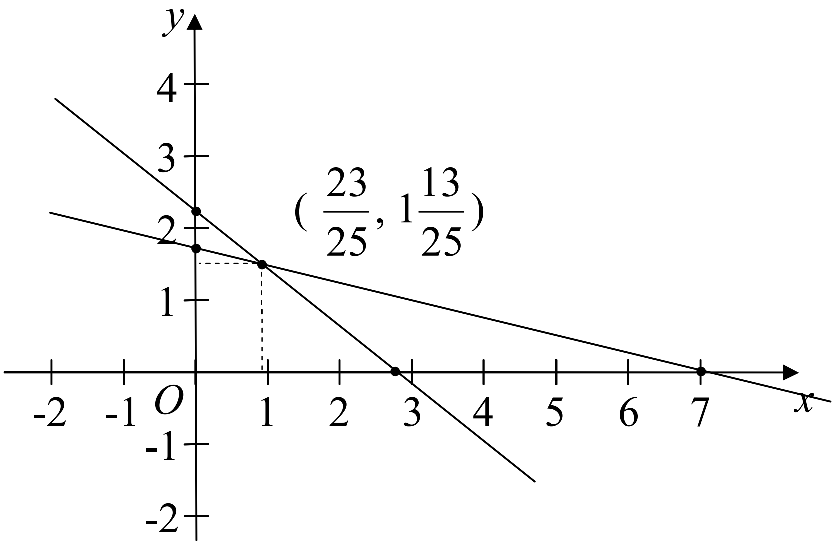
Обчислимо x, якщо $y=0$: $2x+8\cdot 0=14 \Leftrightarrow x=14/2=7$.

Підставимо в табличку:

x	0	7
y	1,75	0

Отже, (0, 1,75) і (7, 0) – координати двох точок, що лежать на другій прямій.

Зобразимо обидві прямі на прямокутній системі координат і знайдемо координати точки їх перетину.



Отже, ми отримали $x = \frac{23}{25}$, $y = 1\frac{13}{25}$.

Відповідь. $\{(\frac{23}{25}, 1\frac{13}{25})\}$ – множина розв'язків системи.

3). $\begin{cases} 4x + 5y = 8 \\ 9x + 11y = 25 \end{cases}$. Розв'язок *графічним методом*.

Розглянемо спочатку перше рівняння: $4x + 5y = 8$. Намалюємо табличку і візьмемо, для простоти, в першому випадку $x = 0$, а в другому $y = 0$.

Обчислимо y, якщо $x = 0$: $4 \cdot 0 + 5y = 8 \Leftrightarrow y = 8/5 = 1\frac{3}{5}$.

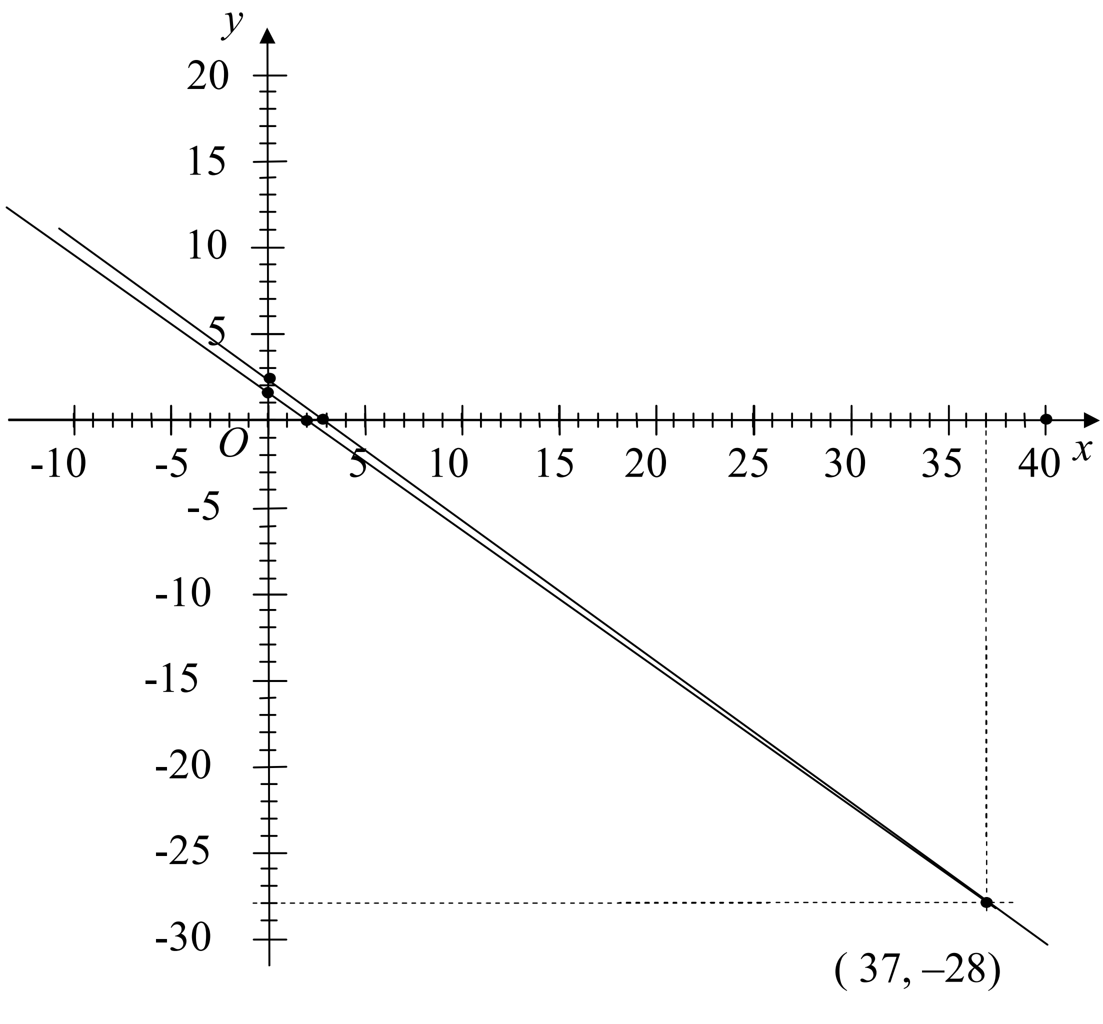
Обчислимо x, якщо $y = 0$: $4x + 5 \cdot 0 = 8 \Leftrightarrow x = 8/4 = 2$.

Підставимо в табличку:

x	0	2
y	$1\frac{3}{5}$	0

Отже, $(0,\ 1\frac{3}{5})$ і $(2,\ 0)$ – координати двох точок, що лежать на першій прямій.

Розглянемо друге рівняння: $9x+11y=25$. Намалюємо табличку і візьмемо, для простоти, в першому випадку $x=0$, а в другому $y=0$. Якщо $x=0$: $9\cdot 0+11y=25 \Leftrightarrow y=25/11=2\frac{3}{11}$. Обчислимо x, якщо $y=0$: $9x+11\cdot 0=25 \Leftrightarrow x=25/9=2\frac{7}{9}$. Підставимо в табличку:



x	0	$2\frac{7}{9}$
y	$2\frac{3}{11}$	0

Отже, $(0,\ 2\frac{3}{11})$ і $(2\frac{7}{9},\ 0)$ – координати двох точок, що лежать на другій прямій.

Зобразимо обидві прямі на прямокутній системі координат і знайдемо координати точки їх перетину. Для цього через точки $(0,\ 1\frac{3}{5})$ і $(2,\ 0)$ проведемо першу пряму, а через точки $(0,\ 2\frac{3}{11})$ і $(2\frac{7}{9},\ 0)$ проведемо другу пряму.

Отже, ми отримали $x = 37$, $y = -28$.

Відповідь. $\{(37, -28)\}$ – множина розв’язків системи.

4. Нерівності зі змінною. Множина допустимих значень змінної і множина розв'язків нерівності.

При розв'язуванні рівнянь, щоб знайти їх область визначення іноді доводиться мати справу з нерівностями, що містять змінну.

Серед нерівностей, що містять змінну, є такі, які перетворюються в істинне висловлення при всіх допустимих значеннях змінної, – тотожні нерівності.

Означення. *Два вирази* $f(x)$ *і* $g(x)$, *з'єднані одним із знаків* «>», «≥», «>», «≤», *називаються нерівністю з однією змінною, якщо ставиться вимога, знайти, при яких значеннях змінної дана нерівність перетворюється в істинне висловлення.*

Інакше кажучи, як уже зазначали, кожну нерівність із змінною можна розглядати як предикат на множині, де вирази, що входять в ці нерівності, мають цілком певний зміст.

Множиною, або областю визначення нерівності (предиката), *називається множина М, що є спільною областю визначення виразів $f(x)$ і $g(x)$.*

Множина Х значень $x \in M$, при яких дана нерівність перетворюється в істинне висловлення, називається множиною розв'язків нерівності, або множиною (областю) *істинності предиката.*

5. Рівносильні нерівності, теореми про рівносильність нерівностей.

Дві нерівності з однією змінною називаються рівносильними (еквівалентними) *на множині М, якщо множини їх розв'язків, що належать М, збігаються.*

Теорема 1. *Якщо до обох частин, нерівності із змінною додати. вираз, що має смисл при всіх значеннях змінної із області визначення нерівності, то дістанемо нерівність, еквівалентну даній* (на множині її визначення).

Тобто

$f(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) + g(x) > \varphi(x) + g(x);$

$f(x) < \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) + g(x) < \varphi(x) + g(x),$

якщо $g(x)$ має смисл для всіх $x \in M$, де M – область визначення даної нерівності.

Доведення аналогічне доведенню відповідної теореми для рівнянь і ґрунтується на властивості числових нерівностей.

Як наслідок з цієї теореми випливає можливість перенесення з протилежними знаками членів нерівності із однієї частини нерівності в другу.

Теорема 2. *Якщо обидві частини нерівності із змінною помножити на вираз, що набуває лише додатних значень при всіх* *значеннях змінної із області визначення нерівності, то дістанемо нерівність, еквівалентну даній* (на множині її визначення).

Тобто

$f(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow f(x)\, g(x) > \varphi(x)\, g(x)$;

$f(x) < \varphi(x) \Leftrightarrow f(x)\, g(x) < \varphi(x)\, g(x)$,

якщо $g(x) > 0$ для всіх $x \in M$, де M – область визначення даної нерівності.

Доведення аналогічне доведенню відповідної теореми для рівнянь і грунтується на властивості числових нерівностей.

Теорема 3. *Якщо обидві частини нерівності із змінною помножити на вираз, що набуває від'ємних значень при всіх x із області визначення даної нерівності, то, змінивши знак нерівності на протилежний, дістанемо нерівність, еквівалентну даній* (на множині її визначення).

Тобто

$f(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow f(x)\, g(x) < \varphi(x)\, g(x)$;

$f(x) < \varphi(x) \Leftrightarrow f(x)\, g(x) > \varphi(x)\, g(x)$,

якщо $g(x) < 0$ для всіх $x \in M$, де M – область визначення даної нерівності.

Доведення також аналогічне.

Теорема 4. *Якщо в обох частинах нерівності стоять вирази, значення яких при всіх значеннях змінної з області визначення додатні, то, піднісши обидві частини до степеня з натуральним показником n або добувши корінь n*-го *степеня з обох частин, дістанемо нерівність, рівносильну даній.*

Теорема 5 (узагальнення теореми 4). *Якщо до обох частин нерівності із змінною застосувати функцію g, яка має смисл на* *множині визначення нерівності і строго монотонна, то дана нерівність $f(x) > \varphi(x)$ буде рівносильна таким:*

$g(f(x)) > g(\varphi(x))$, *якщо* g *– зростаюча функція*;

$g(f(x)) < g(\varphi(x))$, *якщо* g *– спадна функція.*

Системи та сукупності нерівностей розглядають майже аналогічно як і системи та сукупності рівнянь.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: означення рівняння з двома змінними як двомісного предиката; означення області визначення та множини розв'язків рівняння з двома змінними; поняття про рівносильні рівняння з двома змінними; означення системи та сукупності рівнянь як відповідно кон'юнкції та диз'юнкції предикатів; означення множини розв'язків системи та сукупності рівнянь (чи нерівностей); способи розв'язування системи рівнянь; способи розв'язування системи та сукупності нерівностей;

у м і т и: знаходити на записувати область визначення і множину розв'язків рівняння з двома змінними; розв'язувати системи рівнянь з двома змінними різними способами; розв'язувати сукупність рівнянь з двома змінними; аналітико-синтетичним методом аналізувати сюжетні задачі, складаючи при цьому систему рівнянь з двома змінними.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент в результаті вивчення даної теми:

1. Знайти множини істинності кон'юнкції предикатів: 1). $4x - 3y = 5 \wedge 7x - 8y = -16$; 2). $2x + 3y = 48 \wedge 3x - 5y = -23$; 3). $5x - 8y = -38 \wedge 4x + 7y = 117$; 4). $x + 2y = 3 \wedge 6x + 5y = 4$.

2. Розв’язати систему рівнянь всіма можливими способами.

1. $\begin{cases}5x+12y=29\\3x-7y=-11\end{cases}$ (1;2); 2). $\begin{cases}7x+4y=26\\5x-11y=-23\end{cases}$ (2;3); 3). $\begin{cases}2x+17y=74\\9x-4y=11\end{cases}$ (3;4);

4). $\begin{cases}3x+5y=37\\11x-2y=34\end{cases}$ (4;5); 5). $\begin{cases}13x+9y=119\\2x-3y=-8\end{cases}$ (5;6);

6). $\begin{cases}4x-3y=3\\11x+9y=129\end{cases}$ (6;7); 7). $\begin{cases}5x-4y=3\\8x-7y=0\end{cases}$ (7;8); 8). $\begin{cases}4x-3y=5\\7x-8y=-16\end{cases}$ (8;9);

9). $\begin{cases}2x+3y=48\\3x-5y=-23\end{cases}$ (9;10); 10). $\begin{cases}5x-8y=-38\\4x+7y=117\end{cases}$ (10;11);

11). $\begin{cases}x+2y=3\\6x+5y=4\end{cases}$ (-1;2); 12). $\begin{cases}3x+4y=14\\6x+5y=4\end{cases}$ (-6;8);

13). $\begin{cases}3x+4y=140\\9x+6y=30\end{cases}$ (-40;65); 14). $\begin{cases}5x+12y=60\\9x+6y=30\end{cases}$ (0;5);

15). $\begin{cases}5x+12y=6\\3x-7y=32\end{cases}$ (6;-2); 16). $\begin{cases}6x+7y=22\\3x-7y=32\end{cases}$ (6;-2);

17). $\begin{cases}6x+7y=22\\3x+6y=6\end{cases}$ (6;-2); 18). $\begin{cases}12x+32y=40\\3x+6y=60\end{cases}$ (70;-25);

19). $\begin{cases}12x+32y=40\\2x+12y=40\end{cases}$ (-10;5); 20). $\begin{cases}x+3y=2\\2x+12y=4\end{cases}$ (2;0);

21). $\begin{cases}x+3y=2\\12x+23y=11\end{cases}$ (-1;1); 22). $\begin{cases}23x+34y=11\\12x+23y=11\end{cases}$ (-1;1);

23). $\begin{cases}23x+34y=1100\\24x+32y=1200\end{cases}$ (70;-15); 24). $\begin{cases}4x+5y=20\\24x+32y=120\end{cases}$ (5;0);

25). $\begin{cases}4x+5y=200\\4x+6y=300\end{cases}$ (-75;100); 26). $\begin{cases}9x+12y=60\\4x+6y=30\end{cases}$ (0;5);

27). $\begin{cases}9x+12y=6\\6x+7y=8\end{cases}$ (6;-4) ;

28). $\begin{cases}6x+3y=3000\\6x+7y=8000\end{cases}$ (-125;1250); 29). $\begin{cases}6x+3y=3\\3x+6y=6\end{cases}$ (0;1);

30). $\begin{cases}12x+4y=4\\3x+6y=6\end{cases}$ (0;1); 31). $\begin{cases}12x+4y=40\\2x+2y=40\end{cases}$ (-5;25);

32). $\begin{cases}x+7y=20\\2x+2y=4\end{cases}$ (-1;3); 33). $\begin{cases}x+7y=20\\12x+19y=110\end{cases}$ (6;2);

34). $\begin{cases}7x+34y=110\\12x+19y=110\end{cases}$ (6;2); 35). $\begin{cases}7x+34y=110\\x+6y=10\end{cases}$ (40;-5).

3. Розв’язати нерівність виконуючи мінімум обчислень:

а) $854 \cdot 5 - 854 \cdot 2 > 854x$; б) $84 \cdot 42 + 84 \cdot 47 > 84x$;

в) $27 \cdot 15 - 27 \cdot 7 < 27x$; г) $56 \cdot 142 + 56 \cdot 147 < 56x$.

4. Скласти систему двох лінійних рівнянь з двома змінними, що має єдиний розв'язок. Замінити одне з рівнянь цієї системи так, щоб дістати систему, яка має безліч розв'язків або не має розв'язків. Проілюструвати це графічно.

5. Розв'язати трьома способами (складанням рівняння, за допомогою системи та арифметичним способом) задачу:

«Батькові і синові разом 36 років. Скільки років синові і скільки батькові, якщо батько у 5 разів старший за сина?».

6. Чи рівносильні наступні нерівності: 1) на множині R; 2) на множині N:

а) $4x(x^6+27) > 7(x^6+27)$ і $4x > 7$; б) $\frac{3x+5}{7x-4} > \frac{8}{7x-4}$ і $3x+5 > 8$.

7. Розв’яжіть нерівності, множину розв’язків позначте на числовій осі: а) $2x+5 < 3-7x$; б) $\frac{17-5x}{5} > \frac{2x+5}{5/2}$;

в) $\frac{2x+5}{3} + 5 \le \frac{3-7x}{9}$; г) $\frac{17-5x}{5} + \frac{x-1}{10} \ge \frac{2x+5}{5/2} - 3$.

8. Доведіть, що множина дійсних розв’язків наступних нерівностей порожня: а) $25(2{,}4 + 11{,}8x) < 118(2{,}5x + 1) + 0{,}7$;

б) $\frac{76x+8}{4} - \frac{38x-1}{2} \ge 2$; в) $\frac{76x+8}{4} - \frac{38x-1}{2} \ge \frac{2x^2}{8} + \frac{3}{2}$.

9. Знайдіть множину істинності кожної з наступних кон’юнкцій і диз’юнкцій нерівностей: а) $(x > 2) \wedge (x > 7) \wedge (x > 3)$;

б) $(x > 2) \wedge (x < 8) \wedge (x < 0)$; в) $(x > 3) \vee (x > 5)$; г) $(x < 4) \vee (x < 2)$.

10. Розв’яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 0{,}2\cdot(x+38)-1{,}2\cdot(x-5)>0 \\ 1{,}3\cdot(2-x)+7{,}4\cdot(3+x)<6{,}5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{3x}{2}+(2-x)\cdot 5<\dfrac{1}{3}\cdot(x-2)+1 \\ \dfrac{1-3x}{2}+\dfrac{1}{4}x>3x-\dfrac{5}{3}\cdot(x+1) \end{cases}$.

11. Розв’яжіть сукупність нерівностей:

а) $\left[\begin{array}{l} 0{,}3\cdot(x^2-5)+2{,}8\cdot(4-7x)>(3x-2)\cdot 0{,}1x \\ \dfrac{1}{3}\cdot(2x+11)-\dfrac{1}{4}\cdot(x+12)\le 3 \end{array}\right.$;

б) $\begin{cases} 2-\dfrac{x-3}{3}+\dfrac{x+8}{8}\le 1 \\ 7(0{,}1-x)+x(7x+8)<3x^2+4x(x-1) \end{cases}$.

12. Розв’яжіть наступні нерівності, використовуючи операції кон’юнкції і диз’юнкції: а) $6x^2+x>0$; б) $15x^2+5x>0$; в) $4x^2+4x+1>0$; г) $16x^2+8x+1\le 0$.

13. Розв’яжіть задачі, склавши нерівності.

а) Відстань між двома пунктами дорівнює 400 *км*. З одного пункту в другий виїхав автомобіль зі швидкість 50 *км/год*, а через 2 *год* вслід за ним виїхав мотоцикліст. З якою швидкістю повинен їхати мотоцикліст для того, щоб приїхати до місця призначення першим?

б) Сторона прямокутника дорівнює 12 *см* якою повинна бути друга сторона, щоб периметр прямокутника був більший за площу прямокутника?

14. При яких значеннях у дроби: $-\dfrac{1}{5y}$; $\dfrac{y^2+3}{y+4}$; $\dfrac{7}{y+1}$ приймають:

а) додатні значення; б) від’ємні значення?

15. Доведіть, що множини істинності кон’юнкції предикатів $x-4<8$, $2x+5<13$; $3-x>0$ є множина $\{\,x\mid x<3\,\}$.

16. Знайти множину істинності диз'юнкції предикатів. $3x + 7 < 22$, $17 – 22x > 1$, якщо вони задані на множині:

а) {-5, -4, -3, …, 3, 4, 5}; б) натуральних чисел; в) дійсних чисел.

17. Розв'яжіть наступні нерівності: $\dfrac{9-3x}{5x-10} > 0$; $\dfrac{8x-1}{4x} \le 0$.

18. Розв'яжіть задачу, склавши нерівність. З міста A з швидкістю V км/год. виїхав велосипедист. Через 3 год. Слідом за ним відправився мотоцикліст з швидкістю 50 км/год. Знайти значення V, при яких мотоциклісту знадобиться менше ніж 2 год. для зустрічі з велосипедистом.

19. Розв'яжіть задачу, склавши систему. Кожна з двох друкарок передруковувала рукопис, що містить 72 сторінки. Перша друкарка друкувала 6 сторінок за той самий час, за який друга друкувала 5 сторінок. Скільки сторінок друкувала кожна друкарка за годину, якщо перша закінчила роботу на 1,5 години швидше другої?

20. Розв'яжіть задачу, склавши систему. Грошова премія булла розділена між трьома винахідниками: перший отримав половину всієї премії без 3/22 того, що отримали двоє інших разом. Другий отримав ¼ всієї премії і 1/56 грошей, отриманих разом двома іншими. Третій отримав 300 грн. Наскільки великою булла премія і скільки отримав кожний винахідник?

21. Розв'яжіть задачу, склавши систему. Дано два двозначні числа, з яких друге позначене тими самими цифрами, що й перше, але написане в оберненому порядку. Частка від ділення першого числа на друге дорівнює 1,75. Добуток першого числа на цифру його десятків в 3,5 рази більший другого числа. Знайти ці числа.

Список рекомендованої літератури

1. Кужель О.В. Елементи теорії множини і математичної логіки. – К.: Радянська школа, 1977.

2. Пышкало А.М. и др. Теоретические основы начального курса математики. – М.: Просвещение, 1974.

3. Архипов Б.М. Математика. – Минск.: Вышэйш. школа, 1976.

4. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б. Математика. – М.: Просвещение, 1977.

5. Столяр А.А, Лельчук М.П. Математика. Минск.: Вышэйш. школа, 1975.

6. Виленкин Н. Я., Лаврова Н, Н., Рождественская В. Б. и др. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1977.

7. Кухар В. М., Білий Б. М. Теоретичні основи початкового курсу математики. 2-е вид. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1987.

8. Боровик В. Н. та ін. Математика. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1980.

9. Пышкало А. М., Стойлова Л, М., Лаврова Н. Н.и др. Сборник задач по математике – М.: Просвещение, 1979.

10. Довгий О.Я., Межиловська Л.Й., Ткачук О.М., Файчак З.Є. Курс математики: Навч.-метод. посібник для студентів спеціальності ”Початкове навчання” . – Івано-Франківськ: Плай, 2005.

Навчальне видання

Довгий Олег Ярославович

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИВЧЕННЯ РОЗДІЛУ
”ВИРАЗИ. РІВНЯННЯ. НЕРІВНОСТІ”
КУРСУ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ
СПЕЦІАЛЬНОСТІ ”ПОЧАТКОВЕ НАВЧАННЯ”

В авторській редакції

Головний редактор – Василь Головчак

Комп’ютерна верстка – Олег Довгий

Навчально-методичний посібник

Здано до набору 9.01.08 р. Підписано до друку 14.01.08 р.

Формат 60х84/$_{16}$. Папір офсетний.

Гарнітура ”Times New Roman”. Ум. друк. арк.: 7,8.

Тираж 300 прим. Зам. № 7.

Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ

Прикарпатського національного університету

імені Василя Стефаника

76000, м. Івано-Франківськ, вул.. Бандери, 1.

Тел. 71-56-22.

E-mail: vdvcit@pu.if.ua

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру

від 12.12.2006. Серія ДК 2718