1. Поняття про множину і її елементи. Способи задання множин. Відношення між множинами. Універсальна множина. Діаграми Ейлера-Венна

Множина відноситься до неозначуваних понять математики. Воно береться безпосередньо з досвіду і не зводиться до простіших понять.

Множина складається з об’єктів, об’єднаних за деякими характерними ознаками (потік, група, клас тощо). Кожна множина об’єднує певні об’єкти за якоюсь спільною ознакою. Ці об’єкти, які входять до множини, називають її елементами.

Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи – малими буквами латинського алфавіту.

Наприклад: $a \in M$ (означає, що елемент a належить множині M);

$a \notin M$ (означає, що елемент a не належить множині M).

Множини, які складаються з чисел, називаються ***числовими множинами.*** З шкільного курсу математики відомі основні числові множини, які мають загальноприйняті позначення і назви:

N – множина натуральних чисел ($\mathbf{N_0}$ – множина цілих невід’ємних чисел);

Z – множина цілих чисел;

Q – множина раціональних чисел;

R – множина дійсних чисел.

Розрізняють *одноелементні*, *двоелементні* множини, множини, що містять багато елементів, безліч їх.

Множина, що складається із обмеженого числа елементів, називається ***скінченною.*** Наприклад: множина студентів групи, множина вершин квадрата. Множина, яка містить необмежену кількість елементів, називається ***нескінченною*** (числові множини **R**, **Z**...).

Множина, яка не містить жодного елемента, називається ***порожньою*** і позначається символом Ø.

Множину можна задати двома способами:

1. *Переліком елементів.* Наприклад, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Причому порядок елементів у запису множини значення не має. Вважається, що всі елементи множини різні.

Наприклад: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. *За допомогою характеристичних властивостей, які* мають всі елементи даної множини. Наприклад, цю ж множину A можна записати так: $A = \{x \mid x$ – парні числа першого десятка$\}$, або $A = \{\ x \mid x \in N, x \le 10, x \vdots 2\ \}$.

Наприклад: $A = \{\ x \mid x \in N, x \le 5\ \}$.

З елементів будь-якої непорожньої множини можна утворити нові множини, які є частинами початкової множини або, її ***підмножинами*** (розглядаючи множину учнів школи, можна виділяти такі її частини: множина окремих класів, множина відмінників, множина учасників художньої самодіяльності тощо).

Множина B називається ***підмножиною*** множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Наприклад: нехай множина $M = \{a, b, c\}$. Запишемо всі підмножини цієї множини:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Число всіх підмножин множини, яка містить n елементів, дорівнює 2^n. Множину всіх підмножин M позначають через $P(M)$ і називають *булеаном* множини M (на честь англійського математика Д. Буля). Таким чином, якщо $M = \{a, b, c\}$, то

$$P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Якщо множина A є підмножиною множини B, то говорять, що множина A включається в множину B, або позначають на письмі $A \subset B$ (A включається в B, B містить A).

Підмножина B множини A називається ***власною підмножиною*** або ***правильною частиною*** множини A, якщо B є непорожня множина і в A знайдеться хоча б один елемент, якого немає в B.

Власними підмножинами множини M є всі її підмножини, крім $\varnothing$ і самої множини M, які називають ***невласними*** ще одне з важливих понять.

Дві множини A і B називаються ***рівними***, тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A є елементом множини B і навпаки, тобто якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Рівність множин A і B записують так: $A = B$. Тоді означення рівності двох множин можна записати так:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ і } B \subset A,$$

де символ $\Leftrightarrow$ означає “тоді і тільки тоді”.

Якщо множини A і B не рівні, то пишуть $A \neq B$.

Будь-які дві множини можуть перебувають між собою в одному з таких ***відношень***:

1. ***Виключення*** – обидві множини не порожні і не містять спільних елементів.

Наприклад: $A = \{1, 2, 5, n\}$ і $B = \{a, в, r\ 7, 9\}$.

2. ***Перерізу*** – обидві множини не порожні, містять хоча б один спільний елемент, а також кожна з множин містить хоча б один елемент, якого немає в іншій з двох розглядуваних.

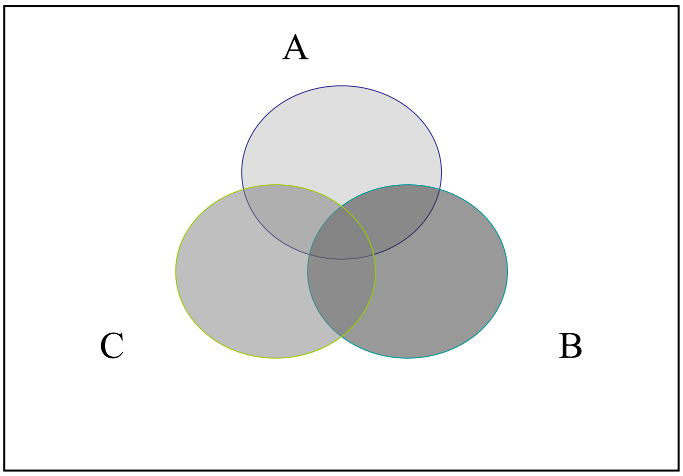
Наприклад: $A = \{1, 2, 5, r, z, c\}$ $B = \{1, 5, c, 9, 15\}$.

3. ***Включення*** – коли одна з них є власною підмножиною іншої. Наприклад: $A = \{a, d, c, 7, 19\}$ і $B = \{7, 19, a\}$.

4. ***Рівності*** – коли в кожній з них немає такого елемента, якого немає в іншій, тобто, коли кожен елемент однієї множини є елементом іншої. Наприклад: $A = \{a, d, c, 7, 9\}$ і $B = \{7, 9, d, c, a\}$.

Універсальною множиною називається множина, яка є постачальником елементів для тієї сукупності множин, які в даний час розглядаються. ***Універсальну множину*** позначають U. Це поняття має відносний характер і є стабільним тільки для певної ситуації в певний час. Одна й та сама множина M в одних випадках може бути підмножиною однієї універсальної множини, а в інших – універсальною множиною.

Для унаочнення деяких міркувань про множини користуються геометричними схемами, які називаються ***діаграмами Ейлера-Венна.***

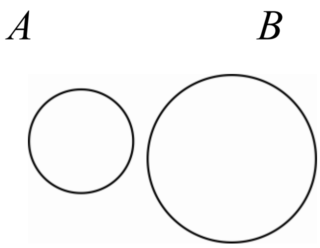


Множину на діаграмі Ейлера-Венна позначатимемо кругом. Універсальну множину U на діаграмі Ейлера-Венна позначатимемо прямокутником.

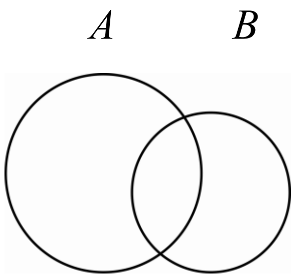
Підмножини універсальної множини U зображуватимемо кругами, розміщеними всередині прямокутника.

За допомогою кругів Ейлера-Венна представимо випадки відношень двох множин.

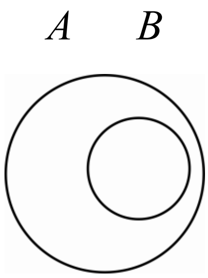
Виключення



Переріз

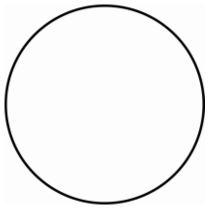


Включення



Рівність

A *B*



2. Операції над множинами. Основні властивості операцій над множинами.

Об'єднанням (додаванням) множин A і B називається множина, яка містить усі ті і тільки ті елементи, які належать хоча б одній із множин A або B. Позначається $A \cup B$.

За означенням: $A \cup B = \{x \mid x \in A,$ або $x \in B\}$.

Об'єднанням скінченої кількості множин (більше двох) називається результат послідовного об'єднання: другої множини з першою, третьої з об'єднанням перших двох і т.д.

Перерізом множин A і B називається множина, що містить усі ті і тільки ті елементи, які належать кожній із цих множин одночасно. Позначається: $A \cap B$. Отже, за означенням запишемо:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Поняття "переріз множин" можна поширити на будь-яку кількість множин. Перерізом скінченої кількості множин (більше двох) називається результат послідовного перерізу: другої множини з першою, третьої з перерізом перших двох і т.д.

Різницею множин A і B називається множина, яка складається з елементів множини A, які не належать B. Позначаємо $A \setminus B$. За означенням $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$. Результат знаходження різниці двох множин називають *відніманням* множин. Різниця універсальної множини U і її будь-якої підмножини називається *доповненням* підмножини A до універсальної множини і позначається $U \setminus A$ або $\overline{A}$.

Якщо $B \subset A$, то різниця множин A і B називається доповненням підмножини B до множини A і позначають $\overline{B_A}$, тобто $A \setminus B = \overline{B_A}$.

Над множинами можна проводити операції об'єднання, перерізу і різниці. Якщо у виразі відсутні дужки, то спочатку виконують операції перерізу, а потім об'єднання і різницю.

Властивості операцій над множинами:

1. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення;

2. $A \cup B = B \cup A$ – переставна (комутативна) властивість операції об'єднання;

3. $A \cap B = B \cap A$ – переставна (комутативна) властивість операції перерізу;

4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – сполучна (асоціативна) властивість операції об'єднання;

5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – сполучна (асоціативна) властивість операції перерізу;

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – розподільна (дистрибутивна) властивість операції перерізу відносно об єднання;

7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – розподільна (дистрибутивна) властивість операції об'єднання відносно перерізу;

8. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ – І-ий закон де-Моргана;

9. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – ІІ-ий закон де-Моргана;

10. $A \cup \overline{A} = U$;

11. $A \cup \varnothing = A$;

12. $A \cup A = A$;

13. $A \cap \varnothing = A$;

14. $A \cap A = A$.

Всі властивості і закони можна довести за допомогою кругів Ейлера-Венна.

3. Поняття кортежу. Декартовий добуток множин.

Два елементи a і b, розміщені в певному порядку, називають ***впорядкованою парою*** (a, b). Елементи упорядкованої пари називаються її ***компонентами,*** або ***координатами.*** Елемент a *називають першою компонентою*, а елемент b – *другою компонентою.*

Пари (a_1, b_1) і $(a_2,\ b_2)$ називаються рівними тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Упорядковану пару називають ***кортежем довжини* 2** і позначають (a, b).

Існує поняття упорядкованої трійки (a, b, c), упорядкованої n-*ки* (a_1, a_2, a_3, ..., a_n). Упорядкована n-ка елементів множини A називається кортежем довжини n, складеним з елементів даної множини A.

Приклади кортежів: слово – кортеж, складений із букв; запис числа – кортеж із цифр; речення – кортеж зі слів; ще може бути кортеж машин і т. д.

Якщо компоненти кортежу (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) є елементи множини M. то його називають *кортежем над множиною M*. Кортеж довжиною 0 називають *порожнім кортежем*.

Утворення впорядкованих пар відбувається з допомогою операції, яку називають знаходженням ***декартового добутку***.

Декартів добуток називають прямим добутком.

Декартовим добутком двох множин A і B називається множина всіх пар (a, b), де перша компонента належить множині A, а друга – множині B ($a \in A$ і $b \in B$). Позначається $A \times B$.

Множину декартового добутку скорочено записують так:

$$A{\times}B = \{(a, b) | \, a \in A, b \in B\}.$$

Якщо $A = B$, то *декартовий* добуток $A \times A$ позначають через A^2 і називають декартовим або прямим квадратом множини A.

Якщо хоча б одна з множин A або B нескінченна, то $A{\times}B$ є також нескінченною множиною.

За аналогією з декартовим добутком двох множин можна розглядати декартові добутки довільного скінченого числа m множин.

Декартовим добутком трьох множин A, B і C називається множина всіх кортежів (a, b, c), де $a \in A$, $b \in B$ і $c \in C$. Позначається декартовий добуток трьох множин A, B і C так $A \times B \times C$, тобто:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \, | \, a \in A, b \in B, c \in C \}.$$

Якщо $A = B = C$, то декартовий добуток $A \times A \times A$ позначають через A^3 і називають декартовим або прямим кубом множини A.

Число елементів $n(A \times B)$ декартового добутку двох множин A і B дорівнює добутку чисел елементів першої і другої множини, тобто:

$$n(A\times B)=n(A)\times n(B).$$

Аналогічно, число елементів $n(A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_m)$ декартового добутку будь-якої скінченої кількості множин $A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_m$ дорівнює добутку чисел елементів всіх цих множин, тобто:

$$n(A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_m) = n(A_1)\times n(A_2)\times n(A_3)\times\ldots\times n(A_m).$$

3. Декартів добуток не комутативний:

$A\times B\neq B\times A$, якщо $A\neq B$.

Декартів добуток має такі властивості:

1. $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$;
2. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$;
3. $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$;
4. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$;
5. $(A\setminus B)\times C = (A\times C)\setminus(B\times C)$;
6. $A\times(B\setminus C) = (A\times B)\setminus(A\times C)$.

Всі ці властивості доводяться на основі означення рівності множин і відповідних операцій над множинами.

При зображенні результатів декартового добутку двох множин доцільно користуватися такою **пам'яткою**;

1. $\left.\begin{array}{l} A=\{\,x\mid x\in R,\ldots\} \\ B=\{\,y\mid y\in R,\ldots\}\end{array}\right\} - \textit{площини, напівплощини.}$

2. $$\left.\begin{array}{l} A=\{\,x\mid x\in Z,\ldots\} \\ B=\{\,y\mid y\in R,\ldots\} \\ A=\{\,x\mid x\in N,\ldots\} \\ B=\{y\mid y\in R,\ldots\} \\ A=\{x\mid x\in R,\ldots\} \\ B=\{y\mid y\in Z,\ldots\} \\ A=\{x\mid x\in R,\ldots\} \\ B=\{y\mid y\in N,\ldots\} \end{array}\right\} - \textit{відрізки}.$$

3. $$\left.\begin{array}{l} A=\{\,x\mid x\in N,\ldots\} \\ B=\{\,y\mid y\in Z,\ldots\} \\ A=\{\,x\mid x\in Z,\ldots\} \\ B=\{y\mid y\in N,\ldots\} \end{array}\right\} - \textit{точки}.$$

4. Відповідності між елементами двох множин. Відношення на множині. Властивості і типи відношень. Відношення еквівалентності. Відношення порядку.

Слово "бінарний" від латинського слова "bis" означає "двічі". Будемо розглядати дві множини *A* і *B*.

Бінарною відповідністю, визначеною у множинах *A* і *B*, називається кожна підмножина декартового добутку $A \times B$.

Якщо відповідність позначить через α, то множина *A* називається *множиною відправлення*, а *B* – *множиною прибуття відповідності* α. Множини *A* і *B* називають базовими множинами відповідності α. Дану відповідність позначають так: $A \xrightarrow{\alpha} B$ ($\alpha \subset A \times B$).

Якщо між елементами a, b існує відповідність α, то позначають це так: $(a, b) \in \alpha$, або $a\ \alpha\ b$, або $\alpha(a) = b$.

Множину всіх перших компонентів пар відповідності α називають ***областю визначення*** відповідності α. Множину всіх других компонентів пар відповідності α називають ***областю значень*** відповідності α.

Якщо дві множини A і B співпадають, тобто $A = B$, то між двома елементами однієї множини A встановлюється ***відношення на множині.***

Відповідність можна задати трьома **способами**:

1) у вигляді множини пар, які можна зобразити на графіку;
2) за допомогою матриць (таблиць);
3) за допомогою графів.

Приклад. Нехай дані множини A і B, A = {2, 3, 4, 7} і B = {1, 2, 4, 8, 21},

де $a \in$ A і $b \in$ B встановлена відповідність $a \vdots b$.

Розв'язання. Знайдемо результат декартового добутку $A \times B$.

$A \times B$ = {($\underline{2,\ 1}$), ($\underline{2,\ 2}$), (2, 4), (2, 8), (2, 21),

($\underline{3,\ 1}$), (3, 2), (3, 4), (3, 8), (3, 21),

($\underline{4,\ 1}$), ($\underline{4,\ 2}$), ($\underline{4,\ 4}$), (4, 8), (4, 21),

($\underline{7,\ 1}$), (7, 2), (7, 4), (7, 8), (7, 21)}.

Отже, $\alpha \subset A \times B$ = {(2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (7, 1)}.

Випишемо по вертикалі всі елементи множини A, а по горизонталі – множини B.

A	1	2	4	8	21
2	1	1	0	0	0
3	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0
7	1	0	0	0	0

Якщо пара, де $(a, b) \in \alpha$, де $a \in A$ $b \in B$, то на перетині відповідного рядка і стовпця записуємо 1, у протилежному разі записуємо 0. Одиниця і нуль тут визначають істинність висловлень про належність пар даній відповідності. Таку прямокутну таблицю з нулів і одиниць називають ***матрицею даної відповідності.***

Графом називають систему точок (вершин графа) і стрілок (орієнтовних ребер графа), які сполучають деякі з цих точок. Як подання відповідностей за допомогою графів розглянемо попередній приклад. Випишемо елементи множини *A*, а під ними елементи множини *B*. Якщо $(a, b) \in \alpha$, то проводимо стрілку від *a* до *b*. Виконавши таку побудову для всіх пар з *a*, дістанемо граф відповідності α.

Граф відповідності будують ще й так. Зображують елементи множин *A* і *B* на площині не в лінійній послідовності, а, наприклад, точками на колі, і сполучають стрілками елементи, які перебувають у даній відповідності α. При цьому спільні елементи (якщо такі є) множин *A* і *B* виписують один раз. Парі виду (*a*, *a*) відповідатиме стрілка від *a* до *a* (петля графа).

Серед різних відповідностей розрізняють такі **типи**.

1. ***Порожня відповідність*** ($a = \varnothing$). Матриця цієї відповідності складається тільки з нулів, а граф – з одних точок (жодної стрілки немає).

2. ***Повна відповідність*** ($\alpha = A \times B$), її матриця немає жодного нуля, у графі від кожного елемента множини A йдуть стрілки до кожного елемента множини B.

3. ***Відповідність всюди визначена у множині відправлення.*** Це відповідність $\alpha \subset A \times B$, причому усі елементи множини A є першими компонентами пар відповідності α. Область визначення такої відповідності співпадає з її множиною відправлення.

4. ***Сюр'єктивна відповідність.*** Це відповідність на всю множину прибуття $\alpha \subset A \times B$, причому усі елементи множини B є другими компонентами пар відповідності α.

5. ***Ін'єктивна відповідність.*** Це така відповідність, що елементи з множини прибуття містять не більше одного елемента з множини А.

6. ***Функціональна відповідність* або *функція.*** Це така відповідність, коли кожному елементу з множини відправлення відповідає не більше як один елемент.

7. ***Відображення.*** Це всюди визначена функціональна відповідність.

8. ***Бієктивна відповідність.*** Це сюр'єктивне відображення, яке є ще ін'єктивним. Тобто це одночасно всюди визначена і сюр'єктивна, і ін'єктивна, і функціональна відповідність.

Оберненою відповідністю до відповідності $\alpha \subset A \times B$, називають таку відповідність, яка є підмножиною декартового добутку $B \times A$ і складається з тих і тільки тих пар (b, a), для яких (a,

$b) \in \alpha$.

Відповідність, обернену до α, позначають через α^{-1}. Таким чином,

$$(b, a) \in \alpha^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in \alpha .$$

Оберненим відображенням до відображення $A \xrightarrow{f} B$, називають таке відображення f^{-1}, що коли для кожного $x \in A$ і кожного $y \in B$ виконується

$$f(x) = y \text{, то } f^{-1}(y) = x \text{, тобто } f^{-1}(f(x)) = x .$$

Ті відображення, які мають обернені відображення називають *оборотними відображеннями.* Кожне бієктивне відображення є оборотним і навпаки.

Відповідність, в якій множини відправлення і прибуття збігаються називають ***відношеннями***, і при цьому говорять про відношення у множині.

Аналогічно, як і при відповідності, множину перших компонентів пар даного відношення називають областю визначення даного відношення, а множину других компонентів пар – областю його значень.

Бінарним відношенням, визначеним у множині *M*, називають кожну підмножину декартового добутку $M \times M$, або декартового квадрата M^2.

Відношення можна задати одним з **трьох** способів:

1. На скінченій множині – ***переліком пар***, які задає дана відповідність. Цей спосіб задання відповідності називають матрицею, графіком або таблицею.

2. Вказавши на ***характеристичну властивість*** усіх пар, які задає

дана відповідність. Наприклад, “ $x < y$” на множині чисел.

3. На числових множинах – ***графіком*** на координатній площині.

Коли графіком є не ізольовані точки і не лінія, а частина площини, її заштриховують.

Відношення α, визначене у деякій множині M, називають:

рефлексивним, якщо для кожного $a \in M$ виконується $(a, a) \in \alpha$ (a знаходиться у відношенні α само до себе).

антирефлексивним, якщо для кожного $a \in M$ не виконується твердження $(a, a) \in \alpha$ (a не знаходиться у відношенні α само до себе).

арефлексивним (нерефлексивним), якщо деякі елементи $a \in$ M не знаходиться у відношенні $(a, a) \in \alpha$, а деякі елементи $a \in$ M знаходиться у відношенні $(a, a) \in \alpha$.

симетричним, якщо для будь-яких a, $b \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha \Rightarrow (b, a) \in \alpha$ (якщо a перебуває у відношенні α до b, то b також перебуває у відношенні α до a).

антисиметричним, якщо для кожних a, $b \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha$ і $a \neq b \Rightarrow (b, a) \notin \alpha$ (якщо a перебуває у відношенні α до b і $a \neq b$, то b не перебуває у відношенні α до a).

асиметричним, якщо для кожних a, $b \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha \Rightarrow (b, a) \notin \alpha$ (якщо a перебуває у відношенні α до b, то b не перебуває у відношенні α до a).

транзитивним, якщо для будь-яких a, b, $c \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha$ і $(b, c) \in \alpha \Rightarrow (a, c) \in \alpha$ (якщо a знаходиться у відношенні α до b, а b – у відношенні α до с, то a перебуває у відношенні α до c).

антитранзитивним, якщо для будь-яких a, b, $c \in M$

виконується властивість $(a, b) \in \alpha$ і $(b, c) \in \alpha \Rightarrow (a, c) \notin \alpha$ (якщо a знаходиться у відношенні α до b, а b – у відношенні α до c, то a не перебуває у відношенні α до c).

транзитивним, якщо для будь-яких $a, b, c \in M$ виконується властивість $(a, b) \in \alpha$ і $(b, c) \in \alpha \Rightarrow (a, c) \in \alpha$ (якщо a знаходиться у відношенні α до b, а b – у відношенні α до с, то a перебуває у відношенні α до c).

атранзитивним, якщо відношення не є ні транзитивним ні антитранзитивним.

зв'язним, якщо для будь-яких $a, b \in M$ виконується властивість $a \neq b \Rightarrow (a, b) \in \alpha$, або $(b, a) \in \alpha$ (якщо $a \neq b$, то a перебуває у відношенні α до b, або навпаки).

Отже, різні за змістом відношення можуть мати спільні властивості. Це дає змогу класифікувати певні відношення за тими або іншими властивостями.

Розрізняти найважливіші групи відношень: відношення еквівалентності, відношення порядку, функціональне відношення (функція).

Відношення α, визначене у множині М, називають *відношенням* ***еквівалентності*** або ***еквівалентністю*** в множині М, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Для того щоб відношення α було відношенням еквівалентності, повинні визначеним: елементами декартового добутку $A \times B$ є такі пари елементів, у яких перший компонент обов'язково належить множині A, а другий – B. Тобто, в будь-якій такій парі елемент множини A передує елементу множини B.

Якщо між елементами множини M встановлено відношення “передує”, тобто елементи множини розміщено так, що для будь-якої пари елементів x і y можна вказати, який із них передує іншому, то на множині установлене ***відношення строгого порядку.***

Замість “x передує” коротко пишуть $x < y$ і тоді “y слідує за x”,

$y > x$, тобто відношення строгого порядку антисиметричне. Оскільки в множині елементи різні (не повторюються), то цілком зрозуміло, що ніякий елемент не передує сам собі. Отже, це відношення антирефлексивне. Якщо ж один елемент передує другому, а другий – третьому, то тим більше перший з цих елементів передує третьому, тобто відношення транзитивне.

Таким чином, відношення строгого порядку на множині A визначається трьома умовами:

1) *антирефлексивність*: для будь-якого $x \in A$ не має місця нерівність виду

$x < x$;

2) *антисиметричність*: для будь-яких $x \in A$ і $y \in A$, таких, що

$x < y$ і $x \neq y$, не має місця $y < x$;

3) *транзитивність*: для будь-яких $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$ таких, що $x < y$, а $y < z$, має місце $x < z$.

Відношення α, визначене у множині M, називають відношенням ***строгого порядку***, якщо воно транзитивне і асиметричне, і відношенням ***нестрогого порядку,*** якщо воно транзитивне і антисиметричне.

З означення випливає, що відношення строгого порядку – антирефлексивне, а нестрогого – рефлексивне.

Відношення подільності у множині N натуральних чисел є також відношенням нестрогого порядку.

5. Поняття висловлення. Логічні операції над висловленнями. Таблиці істинності. Тотожності. Рівносильні формули, їх доведення. Логічне слідування.

Поняття – форма наукового пізнання. Поняття відображає істотні ознаки у виучуваних об’єктах.

Існують означувані і не означувані математичні поняття.

В математиці до початкових, тобто неозначуваних понять належать поняття “точка”, “пряма”, “площина”, “множина” та інші. Решта понять означаються.

Люди, висловлюючись, передають свої судження і фіксують їх за допомогою речень. Висловлення – основний об’єкт вивчення математичної логіки. ***Висловленням*** називається твердження, про яке можна сказати істинне (правильне) воно чи хибне (неправильне).

Висловлення поділяються на **елементарні** і **складені**.

Елементарними (простими) називають короткі неподільні висловлення.

Прості висловлення позначають великими буквами латинського алфавіту.

З простих висловлень за допомогою сполучників “і”, “або”, “якщо..., то...” можна утворити ***складені*** висловлення.

При утворенні складених висловлень найчастіше вживають сполучники “і”, “або”, “якщо ..., то ...”, “тоді і тільки тоді, якщо ...” і частку “не”. Розглянемо ***логічні операції,*** які дають змогу з одних висловлень утворювати інші, більш складні висловлення. Оскільки нас цікавить тільки значення істинності висловлень, то означення логічних операцій дає метод встановлення значення істинності складеного висловлення за значенням істинності його складових частин (компонентів).

Заперечення. Цю операцію позначають знаком “ ‾”. У звичайній мові цій операції відповідає частка “не’. Запис $\overline{A}$ читається: “не *A*”, “неправильно, що *A*”.

Запереченням висловлення *A* називається висловлення “не *A*”, яке істинне тоді і тільки тоді, коли *A* хибне. Таблиця істинності заперечення висловлення має вигляд:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Ди’юнкція. Ця операція позначається знаком $\vee$. У звичайній і мові їй відповідає сполучник “або”. Запис $A \vee B$ читається як “*A* диз’юнкція *B*”, або “*A* або В”. ***Диз’юнкцією*** двох висловлень *A* і *B* називається таке висловлювання (“*A* або *B*”), яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення хибні. Таблиця істинності диз’юнкції, двох висловлень має такий вигляд:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операцію диз'юнкції іноді називають ***логічним додаванням.***

Множиною істинності диз'юнкції "$\vee$" висловлень є об'єднання "$\cup$" множин істинності даних висловлень. Знак диз'юнкції "$\vee$" схожий із знаком об'єднання множин "$\cup$".

Кон'юнкція. Цю операцію позначають знаком $\wedge$. У звичайній мові їй відповідає сполучник "і". Запис $A \wedge B$ читається як "А кон'юнкція В" або як "A і B". ***Кон'юнкцією*** двох висловлень A і B називається висловлення $A \wedge B$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення A і B істинні.

Таблиця істинності кон'юнкції двох висловлень має вигляд:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Операцію кон'юнкції іноді називають *логічним добутком.*

Множиною істинності кон'юнкції "$\wedge$" висловлень є переріз множин істинності даних висловлень "$\cap$". Знак кон'юнкції "$\wedge$" схожий із знаком перерізу множин "$\cap$".

Імплікація. Операція імплікації позначається знаком $\Rightarrow$. Запис $A \Rightarrow B$ читається: "A імплікує В". Часто для читання цієї операції застосовують словосполучення: "Якщо A, то B", "з A слідує B". ***Імплікацією*** двох висловлень A і B називають висловлення $A \Rightarrow B$

(“Якщо *A*, то *B*”), яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли *A* істинне, а *B* – хибне. Таблиця істинності імплікації двох висловлень має вигляд:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Еквіеаленція. Цю операцію позначають символом $\Leftrightarrow$. Запис А$\Leftrightarrow$ В читається: “А еквівалентне В”. У звичайній мові цій операції відповідають словосполучення “*A* тоді і тільки тоді, коли *B*”.

Еквіваленцією двох висловлень *A* і *B* називається таке висловлення $A \Leftrightarrow B$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти *A* і *B* істинні, або одночасно хибні.

Таблиця істинності еквіваленції двох висловлень має вигляд:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Аналогічно тому, як з чисел і букв (під якими також розуміють числа) за допомогою арифметичних операцій додавання, віднімання, множення і ділення складають певні вирази, перетворюють їх, спрощують, знаходять їхнє числове значення, у математичній логіці з одних висловлень за допомогою скінченого числа застосувань логічних операцій утворюють нові, складніші висловлення.

Кожне складене висловлення зображується певним логічним виразом тобто – ***формулою.*** При цьому треба вказати правила однозначного порядку читання таких формул, тобто ***правила однозначного порядку виконання*** *відповідних логічних операцій,* які застосовано в даній формулі :

1. Порядок виконання логічних операцій визначають дужками, які називають ***технічними символами***.

2. Якщо у формулі відсутні дужки, то *порядок виконання логічних операцій такий*: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

3. Вираз, що міститься під знаком операції заперечення, в дужки не беруть, але вважають його таким, який знаходиться в дужках, і обчислення його виконують окремо.

Кожне з елементарних висловлень є **формулою**. Кожній формулі алгебри висловлень можна поставити у відповідність її таблицю істинності.

Дві формули називають ***рівносильними,*** якщо вони набувають однакових значень істинності при однакових значеннях компонентів.

Якщо формули F і H рівносильні, то пишуть $F = H$.

Випишемо ряд рівносильностей, справедливість яких можна довести за допомогою таблиць істинності, або які просто випливають із відповідних означень. Ці рівносильності характеризують основні властивості операцій $\bar{\ }$, $\wedge$, $\vee$.

Інші рівносильності можна дістати з них методом алгебраїчних перетворень.

1. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення.

2. $A \vee B = B \vee A$ – переставна (комутативна) властивість.

3. $A \wedge B = B \wedge A$ – переставна (комутативна) властивість.

4. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ – сполучна (асоціативна) властивість.

5. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ –сполучна (асоціативна) властивість.

6. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – перша розподільна (дистрибутивна) властивість.

7. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – перша розподільна властивість.

8. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ – закон де Моргана.

9. $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ – закон де Моргана.

10. $A \vee \overline{A} = 1$ – закон виключеного третього.

11. $A \vee 0 = A$.

12. $A \vee A = A$.

13. $A \wedge 0 = 0$.

14. $A \wedge A = A$.

15. $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$.

16. $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

17. A = A – закон тотожності.

18. $A \wedge \overline{A}$ – закон несуперечливості.

19°. Закон двоїстості – якщо в тотожностях замінити $\wedge$ на $\vee$ (і навпаки), то тотожність не порушиться.

20. $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – закон контрапозиції.

21. $A \wedge (A \Rightarrow B) = B$ – стверджувальний модус.

22. $\overline{B} \wedge (A \Rightarrow B) = \overline{A}$ – заперечливий модус.

23. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ – закон силогізму.

Дані властивості можна довести з допомогою таблиць істинності.

Сукупність усіх висловлень разом з визначеними на ній логічними операціями $\bar{\ }$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ і основними властивостями цих операцій називають ***алгеброю висловлень.***

Формули, які набувають тільки значення 1 (істина) при будь яких значеннях істинності *A*, *B*, *C* називаються ***тотожно істинними*** або ***тавтологіями.*** Вони мають особливе значення для логіки. Кожна така формула є логічним законом, яким користуються при утворенні правильних, логічно грамотних умовиводів.

Розглянемо тотожно істинні формули, які визначають логічні закони:

$A \vee A$ – *закон виключеного третього:* кожне висловлення або істинне, або хибне і третього бути не може.

$A \Rightarrow A$ – *закон тотожності:* кожне висловлення є логічним висновком із самого себе.

$\overline{A \wedge \overline{A}}$ – *закон протиріччя:* кожне висловлення не може бути одночасно і істинним, і хибним.

$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ – *правило висновку.*

$\overline{B} \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \overline{A}$ – *правило заперечення умови.*

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ – *закон силогізму:* якщо з A виходить B, з B виходить C, то з A виходить C.

Формула називається ***тотожно хибною*** або ***суперечністю,*** якщо вона при всіх можливих наборах значень компонентів набуває значення 0 (хибність).

Формула B називається *логічним наслідком* з формули A (або B логічно виходить з формули A), якщо B набуває значення 1 на всіх тих наборах значень логічних змінних, на яких формула A набуває значення 1.