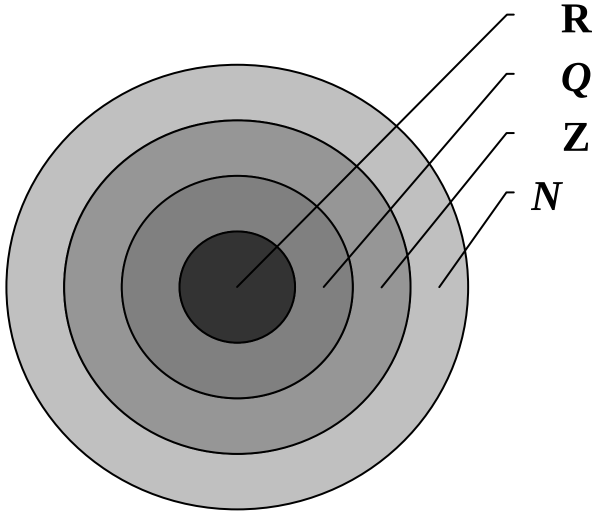
1. Необхідність розширення множини N_0. Від'ємні числа. Цілі числа. Протилежні числа. Модуль числа.

На основі множини **N** натуральних чисел шляхом послідовних розширень можна побудувати такі числові множини: множина **Z** – цілих чисел, множина **Q** – раціональних чисел, множина **R** – дійсних чисел.



Необхідність розширення множин чисел обумовлено теорією і практичними задачами.

Розширення множини **N** до множини **Z** здійснюють, для того, щоб можна було охарактеризувати будь-яку зміну чисельності, користуючись лише одними числами.

Необхідність більш точного вимірювання величини (порівняно з вимірюваннями, що базуються на натуральних числах) привела до поняття дробового числа, на основі якого будується множина **Q**, яка є розширенням множини **Z**.

Для розв'язування інших задач раціональних чисел не досить. їх недостатньо, зокрема, для вимірювання довжин довільних відрізків. Розв'язування цієї проблеми привело до розширення множини **Q**, яким стала множина **R**.

При розширенні будь-якої числової множини до іншої повинна задовольнятися така вимога: *відношення і операції, які виконувалися на розширюваній множині, повинні виконувалися і на розширеній множині*.

Числа – протилежні до натуральних називають *від'ємними*.

Від'ємним цілим числом називають число виду $-n$ (читають: "мінус n"), де $n \in$ **N**. Множину від'ємних цілих чисел позначають $\mathbf{Z}_-$.

Після введення від'ємних цілих чисел натуральні числа природно назвати додатними цілими числами. Для множини додатних цілих чисел, крім позначення **N**, застосовують позначення $\mathbf{Z}_+$.

Отже, розширення множини **N** здійснюється приєднанням до неї від'ємних цілих чисел і числа 0.

Об'єднання множин цілих додатних чисел ($\mathbf{Z}_+$), цілих від'ємних (Z_-) і нуля ($\{0\}$) називають *множиною цілих чисел* і позначають **Z**.

$$Z = \mathbf{Z}_+ \cup Z_- \cup \{0\},$$

причому дані множини попарно не перетинаються.

Додатне ціле число a та від'ємне ціле число $-a$ називають *протилежними*, причому $-(-a) = a$.

Наприклад: $-(-3) = 3$.

Число 0 є протилежним самому собі: $-0 = 0$.

Буквами без знака позначають не тільки додатні, але й від'ємні цілі числа та нуль. Тоді та сама буква зі знаком мінус означає протилежне ціле число.

Наприклад: якщо $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$, то $-a = -2$, $-b = 3$, $-c = 0$.

Два цілі числа називають *числами одного і того самого знака*, якщо вони обидва або додатні, або від'ємні.

Наприклад: -4 і -13 – числа одного й того самого знака.

Два цілі числа називають *числами різних знаків*, якщо одне з них додатне, а інше – від'ємне.

Наприклад: -3 і 5 – числа різних знаків.

Модулем (абсолютною величиною) цілого числа a називають число (позначають $|a|$ і читають "модуль a"), яке визначається різностями:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \in Z_+ \cup \{0\}; \\ -a, \text{ якщо } a \in Z_-. \end{cases}$$

Наприклад: $|5| = 5$, $|-7| = -7$.

2. Додавання, віднімання, множення, ділення цілих чисел, їх закони.

Сумою цілих чисел a і b називають ціле число c і записують $a + b = c$. Числа a і b називають *доданками,* а операцію знаходження суми – *додаванням.*

Правила додавання цілих чисел можна сформулювати так:

- *При додаванні двох цілих чисел одного й того самого знака одержують ціле число, що має той самий знак, модуль якого дорівнює сумі модулів доданків.*

Наприклад: $(-4) + (-5) = -9$.

- *При додаванні цілих чисел протилежних знаків одержують ціле число, знак якого збігається зі знаком доданка, що має більший модуль, а модуль його дорівнює різниці більшого і меншого модулів доданків.*

Наприклад: $6 + (-2) = 4$.

- *Сума протилежних цілих чисел дорівнює нулю.*

Наприклад: $(-5) + 5 = 0$.

- *Додавання нуля не змінює цілого числа.*

Наприклад: $0 + (-3) = -3$.

Операція додавання цілих чисел має ***властивості***:

- *комутативності* $(\forall a)\ (\forall b)\ (a + b = b + a)$, $a, b \in Z$;
- *асоціативності* $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ ((a + b) + c = a + (b + c))$, $a, b, c \in Z$.

Операція віднімання є оберненою до операції додавання.

Різницею цілих чисел a і b називають таке ціле число $c = a - b$, що $c + b = a$. Число a називають *зменшуваним,* b – *від'ємником,* а операцію знаходження різниці – *відніманням.*

У множині цілих чисел (Z) різниця існує не завжди.

Теорема. Для будь-яких цілих чисел a і b різниця $a - b$ існує і є єдиною.

Доведення.

Спочатку покажемо, що справедливе таке допоміжне твердження: для будь-яких цілих чисел a і b виконується рівність $a - b = a + (-b)$.

Оскільки для кожного цілого числа b існує протилежне ціле число $-b$ і $b + (-b) = 0$, то $(a + (-b)) + b = a$.

Це означає, що $a - b = a + (-b)$.

Це твердження дає змогу операцію віднімання цілих чисел звести до операції додавання.

Наприклад: $3 - (-8) = 3 + 8 = 11$.

Добутком цілих чисел a і b називають ціле число $c = a \cdot b$, або $c = a\,b$, що задовольняє такі умови:

1) $a \cdot 0 = 0$ при $b = 0$,
2) $a \cdot 1 = a$ при $b = 1$,
3) $ab = \underbrace{a + a + \dots a}_{b\ доданків}\ при\ b > 1,$
4) $a\,b = -a \cdot |\,b\,|$ при $b < 0$.

Числа a і b називають *множниками*, а операцію знаходження добутку – *множенням.*

Залежно від значень множників a і b можуть бути такі випадки застосування цього означення:

1. $a > 0,\ \ b > 0$.
2. $a < 0,\ \ b < 0$.
3. $a > 0,\ \ b < 0$.
4. $a < 0,\ \ b > 0$.
5. $a = 0,\ \ b \neq 0$.
6. $a \neq 0,\ \ b = 0$.
7. $a = 0,\ \ b = 0$.

З розгляду цих вказаних випадків дістаємо ***правила множення*** цілих чисел.

При множенні двох цілих чисел одержують ціле число, модуль якого дорівнює добутку модулів множників: це число додатне, якщо множники мають однакові знаки, і від'ємне, якщо множники мають різні знаки.

Добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли принаймні один з множників дорівнює нулю.

Операція множення цілих чисел має ***властивості*** :

- *комутативності* $(\forall a)\,(\forall b)\,(ab = b\,a),\ a,\ b \in$ Z.
- *асоціативності* $(\forall a)\,(\forall b)\,(\forall c)\,((ab)\,c = a\,(bc)),\ a,\ b, c \in$ Z.
- *дистрибутивності відносно додавання*

$$(\forall a)\,(\forall b)\,(\forall c)\,((a + b)\,c = ac + bc),\ a,\ b, c \in \mathrm{Z}.$$

Операція ***ділення*** цілих чисел є оберненою до дії множення.

Часткою цілих чисел a і b називають таке ціле число $c = a : b$, що $c\ b = a$. Число a називають *діленим*, b – *дільником* а операцію знаходження частки – *діленням.*

- Якщо $a = 0$, то для довільного цілого числа $b \neq 0$ частка існує і $0 : b = 0$, що випливає з рівності $0 \cdot b = 0$.

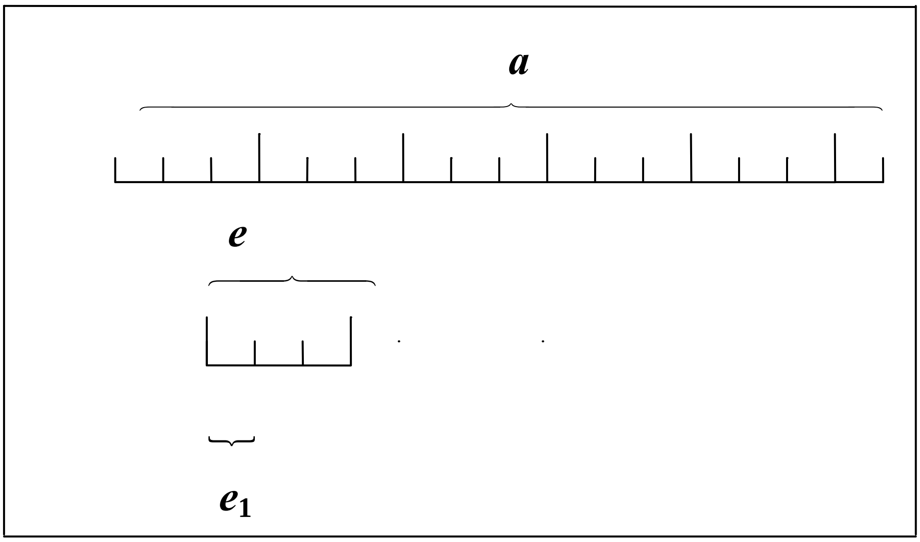
- Якщо $a = 0$, $b = 0$, то, оскільки $(\forall c)$ $(c \cdot 0 = 0)$, $c \in Z$, виразу 0 : 0 можна надати будь-якого значення. Тому вираз 0 : 0 не має смислу.
- Якщо ціле число $a \neq 0$, $b = 0$, то ні для жодного $c \in Z$ не може виконуватися рівність $c \cdot 0 = a$, тому частка $a : 0$ не існує. Отже, ділення на нуль неможливе.

3. Необхідність розширення множини Z. Поняття простого дробу. Основна властивість дробу. Додатні раціональні числа. Відношення порядку на множині Q_+.

Виникнення дробів було обумовлено вимірюванням величин. Покажемо необхідність виникнення дробів при вимірюванні, наприклад, довжини відрізка.

Нехай дані одиничний відрізок ***e*** і відрізок ***a***. Якщо існує натуральне число q таке, що $\boldsymbol{a} = q\,\boldsymbol{e}$, то $m(\boldsymbol{a}) = q$ ($m(a)$ – довжина відрізка a при одиничному відрізку ***e***.

Рис. 1.



Відрізок a (рис. 1) довший ніж 5***e***, але коротший піж 6*e*. Тому його довжину при одиничному відрізку *e* не можна виразити натуральним числом. Проте якщо розглянути відрізок $\boldsymbol{e_1}$, для якого $3\,\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{e}$, то виявиться, що $\boldsymbol{a} = 16\boldsymbol{e_1}$, тобто $m_{e_1}(a) = 16$, де $m_{e_1}(a)$ – довжина відрізка ***a*** при одиничному відрізку $\boldsymbol{e_1}$. Якщо ж повернутись до початкового одиничного відрізка ***e***, то треба вказати, ще відрізок ***a*** складається з 16 відрізків, кожен з яких дорівнює третій частині відрізка ***e***, тобто, говорячи про довжину відрізка ***a***, оперують двома натуральними числами 16 і 3. При цьому вважають, що m (***a***) = $\frac{16}{3}$, де m (***a***) – довжина відрізка ***a***, а символ $\frac{16}{3}$ – називають *дробом.*

Символ виду $\frac{p}{n}$, в якому p і n – натуральні числа, називають ***дробом*** з чисельником p і знаменником n.

Дроби, сумірні з довжиною відрізка мають такі **властивості**:

- Довжина одного й того самого відрізка при заданому одиничному відрізку може виражатися різними способами.
- Для того, щоб дроби $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{k}$ виражали довжину одного й того самого відрізка, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність $pk = nq$.
- Дроби $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{k}$ називають *рівними* і записують $\frac{p}{n} = \frac{q}{k}$, якщо $pk = nq$.
- Два дроби рівні тоді і тільки тоді, коли вони виражають довжину одного й того самого відрізка.
- **Основна властивість дробу.**

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити на довільне натуральне число або розділити на довільний їхній спільний дільник, то дістанемо дріб, що дорівнює даному.

На цій властивості ґрунтується скорочення дробів і зведення їх до спільного знаменника.

Скорочення дробів – це заміна даного дробу іншим, що дорівнює даному, але з меншими чисельником і знаменником.

Щоб одержати дріб, що дорівнює даному з якомога меншими чисельником і знаменником, то, очевидно, треба поділити чисельник і знаменник на їхній НСД.

Дріб, у якого чисельник і знаменник взаємно прості, називають ***нескоротним***.

Відношення рівності дробів є *рефлексивним, симетричним* і *транзитивним*, тобто воно є відношенням *еквівалентності.* Дане відношення розбиває множину дробів на класи еквівалентності: дроби, що належать до одного класу, дорівнюють, один одному; дроби, що належать до різних класів, не дорівнюють один одному.

Кожен з класів еквівалентності, на які відношення різності дробів розбиває множину дробів, називають *додатним раціональним числом.* Множину додатних раціональних чисел позначають Q_+.

4. Додавання, віднімання, множення, ділення простих дробів, їх закони.

Нехай a, $b \in Q_+$ і нехай ці числа зображуються дробами $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{n}$. *Сумою* $a + b$ називається додатне раціональне число, що зображується дробом $\frac{p+q}{n}$. Числа a і b називають *доданками*, а операцію знаходження суми – *додаванням*.

Операція додавання додатних раціональних чисел має **властивості**:

комутатизності

$$(\forall a)\ (\forall b)\ (a + b = b + a),\ a,\ b \in Q_+;$$

асоціативності

$$(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ ((a + b) + c = a + (b + c),\ a,\ b, c \in Q_+.$$

Дріб $\frac{p}{n}$ називають *правильним*, якщо $p < n$, *і неправильним* – якщо $p \geq n$.

Якщо дріб $\frac{p}{n}$ можна представити у вигляді суми

$$\frac{p}{n} = q + \frac{r}{n},$$

де q – натуральне число, а $\frac{r}{n}$ – правильний дріб, то число q називають *цілою частиною дробу* $\frac{p}{n}$. Отже, будь-який неправильний дріб, в якому чисельник не кратний знаменнику, можна зобразити єдиним способом у вигляді суми його цілої частини та правильного дробу з тим самим знаменником, що й даний неправильний дріб. Цю операцію називають *виділенням цілої частини* з неправильного дробу.

Різницею додатних раціональних чисел a і b називають таке додатне раціональне число $c = a - b$, що $c + b = a$. Число a наливають *зменшуваним*, b – *від'ємником*, а операцію знаходження різниці – *відніманням*.

Справді, якщо $\frac{p}{n}$ – зменшуване, $\frac{q}{n}$ – від'ємник, то дріб виду $\frac{p-q}{n}$ – різниця.

Нехай $a, b \in Q_+$ і нехай ці числа зображуються дробами $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{k}$. Добутком ab називається додатне раціональне число, що зображується дробом $\frac{pq}{nk}$. Числа a і b називають *множниками*, а операцію знаходження добутку – *множенням*.

Операція множення додатних раціональних чисел має такі властивості:

комутативності

$$(\forall a)\ (\forall b)\ (a\ b = b\ a),\ \ a,\ \ b \in Q_+;$$

асоціативності

$$(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ ((ab)\ c = a\ (bc)),\ \ a,\ \ b,\ c\ \in Q_+;$$

дистрибутивності відносно додавання

$$(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ ((a + b)\ c = ac + bc),\ \ a,\ \ b,\ c\ \in Q_+;$$

монотонності

$$(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ (a < b\ \Rightarrow ac < \ bc),\ \ a,\ \ b,\ c\ \in Q_+.$$

Часткою додатних раціональних чисел a і b називають таке додатне раціональне число $c = a : b$, що $c\ b = a$. Число a називають *діленим*, b – *дільником*, *а* операцію знаходження частки – *діленням.*

При виконанні ділення двох дробів користуються формулою:

$$\frac{p}{n} : \frac{q}{k} = \frac{pk}{nq}.$$

5. Десяткові дроби. Дії додавання, віднімання, множення, ділення над десятковими дробами.

Дріб $\frac{p}{10^k}$, записаний у позиційній десятковій системі числення, називається *десятковим*.

Позиційний принцип запису десяткових дробів полегшує виконання арифметичних операцій над ними, причому сума, різниця (якщо вона існує) і добуток десяткових дробів є також десятковим дробом. Але частка десяткових дробів не завжди буде десятковим дробом.

Розглянемо два довільних десяткові дроби. Можна вважати, що у них однакова кількість десяткових знаків:

$$a = \overline{a_k a_{k-1} ... a_0, b_1 b_2 ... b_n} \text{ і } b = \overline{c_m c_{m-1} ... c_0, d_1 d_2 ... d_n}$$

Якщо записати десяткові дроби у вигляді звичайних, то матимемо:

$$a + b = \frac{\overline{a_k a_{k-1} ... a_0 b_0 b_1 ... b_n}}{10^n} + \frac{\overline{c_m c_{m-1} ... c_0 d_0 d_1 ... d_n}}{10^n} =$$

$$= \frac{\overline{a_k a_{k-1} ... a_0 b_0 b_1 ... b_n} + \overline{c_m c_{m-1} ... c_0 d_0 d_1 ... d_n}}{10^n}.$$

Одержаний у результаті додавання дріб матиме чисельником натуральне число, записане у десятковій системі числення, а знаменник дорівнює натуральному степеню числа 10, тобто є десятковим дробом, що має стільки ж десяткових знаків, що й дроби-доданки. На практиці урівнювання десяткових знаків зайве, оскільки приписування нулів не відіграє значної ролі при додаванні.

Додаючи два або більше десяткових дробів потрібно підписати їх один під одним так, щоб цілі частини і відповідні десяткові знаки знаходились один під одним. Потім слід виконати додавання написаних чисел як натуральних і в одержаній сумі відокремити справа стільки десяткових знаків, скільки їх має доданок з найбільшою кількістю десяткових знаків.

Наприклад: 2,347 + 0,4235 + 15,624 = 18,3945

$$\begin{array}{r} 2{,}347 \\ {}^{+}\,0{,}4235 \\ \underline{15{,}624} \\ 18{,}3945 \end{array}$$

Віднімаючи десяткові дроби, якщо різниця існує, можна робити так, як і при відніманні натуральних чисел, при цьому немає необхідності урівнювати кількість десяткових знаків у дробів.

Щоб знайти різницю двох десяткових дробів, підписують їх один під одним так, щоб цілі частини і відповідні десяткові знаки знаходились один під одним. Потім потрібно виконати віднімання записаних чисел як натуральних і в одержаній різниці відділити справа стільки десяткових знаків, скільки їх у дробі з найбільшою кількістю десяткових знаків.

Наприклад: 5,243 – 2,5678 = 2,6752

$$\begin{array}{r} -\,5{,}243 \\ \underline{2{,}5678} \\ 2{,}6752 \end{array}$$

Знайдемо тепер добуток десяткових дробів

$$a = \overline{a_k a_{k-1} ... a_0 , b_1 b_2 ... b_n} \text{ і } b = \overline{c_m c_{m-1} ... c_0 , d_1 d_2 ... d_n}$$

$$a \cdot b = \frac{\overline{a_k a_{k-1} ... a_0 b_0 b_1 ... b_n}}{10^n} \cdot \frac{\overline{c_m c_{m-1} ... c_0 d_0 d_1 ... d_n}}{10^n} =$$

$$= \frac{\overline{a_k a_{k-1} ... a_0 b_0 b_1 ... b_n} \cdot \overline{c_m c_{m-1} ... c_0 d_0 d_1 ... d_n}}{10^{n+n}} .$$

У результаті отримали десятковий дріб з $n + n$ десятковими знаками.

Щоб знайти *добуток* двох десяткових дробів, потрібно перемножити їх як натуральні числа, не звертаючи уваги на коми, а потім у добутку відділити комою справа стільки десяткових знаків, скільки їх є в обох множниках разом.

Наприклад:

$$3{,}524 \cdot 0{,}23 = 0{,}81052,$$

Знайдемо частку двох десяткових дробів:

$$a = \overline{a_k a_{k-1} ... a_0 , b_1 b_2 ... b_n} \text{ і } b = \overline{c_m c_{m-1} ... c_0 , d_1 d_2 ... d_n}$$

$$a : b = \frac{\overline{a_k a_{k-1} ... a_0 b_0 b_1 ... b_n}}{10^n} : \frac{\overline{c_m c_{m-1} ... c_0 d_0 d_1 ... d_n}}{10^n} =$$

$$= \frac{\overline{a_k a_{k-1} ... a_0 b_0 b_1 ... b_n}}{\overline{c_m c_{m-1} ... c_0 d_0 d_1 ... d_n}} .$$

Цим самим частка двох десяткових дробів виражається за допомогою звичайного дробу. Цей факт часто трактується так: ділення десяткових дробів зводиться до ділення натуральних чисел.

Ділення десяткових дробів виконується за таким правилом: ділення двох десяткових дробів зводиться до ділення десяткового дробу на натуральне число шляхом множення діленого і дільника на знаменник дільника, тобто на 10^n, де n – кількість десяткових знаків дільника.

Наприклад: 0,3424 : 0,08 = 4,28.

Помножимо ділене і дільник на $10^2 = 100$ і поділимо одержані числа: 0,3424 ; 0,08 = 34,24 : 8 = 4,28.

6. Перетворення звичайних дробів у десяткові

Ділення десяткових дробів потребує відповіді на питання про те, чи завжди частка від ділення двох десяткових дробів буде десятковим дробом, інакше кажучи, чи завжди у класі рівних дробів знайдеться десятковий дріб.

Знаходження десяткового дробу, що дорівнює заданому звичайному дробу, називається *перетворенням звичайного дробу в десятковий.*

Має місце теорема.

Теорема. Нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ перетворюється у десятковий дріб тоді і тільки тоді, коли канонічний розклад знаменника дробу містить лише прості множники 2 або 5.

Доведення.

Необхідність. Нехай нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ перетворюється у десятковий, тобто $\frac{m}{n} = \frac{c}{10^{\alpha}}$. Виходячи з рівності дробів,

$10^{\alpha} \cdot m = n\,c$. Звідси, за означенням подільності, $10^{\alpha}\, m \,\vdots\, n$. З того, що m і n взаємно прості, випливає, що $10^{\alpha} \vdots n$. Тому простими дільниками числа n можуть бути лише 2 або 5.

Доведення достатності теореми може бути покладене в основу методу перетворення звичайного дробу в десятковий.

Наприклад:

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

Перетворення звичайного дробу в десятковий можна здійснити і по-іншому. Нехай дріб $\frac{m}{n}$ перетворюється у десятковий, тобто $\dfrac{m}{n} = \dfrac{c}{10^{\alpha}}$. Тоді за основною властивістю дробів $10^{\alpha} \cdot m = n \cdot c$. Отже, число c є часткою від ділення $10^{\alpha} m$ на n.

Таким чином, для перетворення дробу $\dfrac{m}{n}$ у десятковий слід до числа m дописати α нулів справа, одержане число поділити на n і у частці відокремити комою справа α десяткових знаків. На практиці виконують ділення чисельника на знаменник, дописуючи до чисельника нулі по одному, доки ділення не завершиться.

Наприклад, дріб $\dfrac{7}{40}$ перетвориться у десятковий, бо він нескоротний і $40 = 2^{3} \cdot 5$.

$$\begin{array}{l|l}
\ \ 7 & \underline{40} \\
-70 & 0{,}175 \\
\ \ \underline{40} & \\
-300 & \\
\ \ \underline{280} & \\
\ \ -200 & \\
\ \ \ \ \underline{200} & \\
\ \ \ \ \ \ 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
7 = 40 \cdot 0 + 7 \\
70 = 40 \cdot 1 + 30 \\
300 = 40 \cdot 7 + 20 \\
200 = 40 \cdot 5 + 0
\end{array}$$

Отже, $\dfrac{7}{40} = 0{,}175$.

Розглянутий метод перетворення звичайних дробів у десяткові називається *методом ділення*.

7. Нескінченні десяткові дроби

Розглянемо більш детально перетворення звичайного дробу в десятковий методом ділення. При цьому будемо вважати, що використовуються тільки правильні дроби. Справді, якщо дріб $\dfrac{s}{n}$ неправильний, то, поділивши s на n з остачею, матимемо

$$s = n \cdot q + m, \quad 0 < m < n.$$

Тоді $\frac{s}{n} = q\,\frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ – правильний дріб.

Теорема. Якщо до звичайного дробу $\frac{m}{n}$ застосувати метод ділення для перетворення його у звичайний дріб і на *k*-ому кроці остача буде відмінною від нуля, то

$$\overline{q_0,q_1q_2\ldots q_{k-1}q_k} < \frac{m}{n} < \overline{q_0,q_1q_2\ldots q_{k-1}q_k} + \frac{1}{10^k}.$$

Якщо при застосуванні методу ділення на певному кроці виявиться, що $r_k = 0$, тоді і решта остач будуть рівні 0, а тому дріб перетворюється у десятковий дріб. Методом ділення можна користуватись у разі довільного звичайного дробу. Розглянемо два приклади застосування методу ділення до звичайних дробів, які не перетворюються у десяткові дроби.

Наприклад, для дробів $\frac{9}{37}$ і $\frac{13}{22}$

9 | 37	13 | 22
_90	_130 0,5909090
74	110
_160	_200
148	198
_120	_200
111	198
9	200
……	……

У цих прикладах одержуємо нескінченні десяткові дроби. Якщо ділення припинити на *k*-ому кроці, то отримаємо десятковий дріб, який є наближенням з недостачею даного дробу з точністю $\frac{1}{10^k}$, а тому можемо припустити, що $\frac{9}{37}$ = 0,243243243… і

$\frac{13}{22}$ = 0,5909090…

Розгляд цих прикладів показує, що через скінченну кількість кроків одержуємо остачу, яка дорівнює або чисельнику дробу (9), або одній з попередніх остач (20).

Нескінченний десятковий дріб називається ***періодичним***, якщо він утворюється повторенням кортежу цифр, починаючи з певного десяткового знаку.

Якщо повторюється кортеж цифр довжиною *k*, то повторюватимуться і кортежі цифр з довжиною 2 *k*, 3 *k*, 4 *k*.

Число, десятковий запис якого є кортежем найменшої довжини, що за допомогою нього утворюється періодичний дріб, називається ***періодом***, а довжина кортежу – ***довжиною періоду*** періодичного дробу.

Періодичний дріб називається:

1) ***чистим***, якщо період починається зразу після коми;
2) ***мішаним***, якщо між комою і періодом є десяткові знаки.

Десяткові знаки між комою і періодом утворюють доперіодичну частину.

За символічного запису періодичних дробів замість десяткових знаків, що повторюються, вказується лише період, який береться у дужки. Так, періодичний дріб 0,243243243... запишеться 0,(243) (читається "нуль цілих двісті сорок три у періоді"), а дріб 0,590909090,.. є мішаним періодичним дробом і запишеться 0,5(90) (читається "нуль цілих п'ять десятих до періоду і дев'яносто у періоді").

Теорема. Кожний нескоротний звичайний дріб перетворюється у періодичний дріб, якщо канонічний розклад знаменника містить хоча б один простий множник, відмінний від 2 і 5.

8. Перетворення періодичних дробів у звичайні

Розглянемо обернену задачу: знайти звичайний дріб, у який перетворюється заданий періодичний дріб. Не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати, що ціла частина періодичного дробу дорівнює 0, бо коли це не так, то достатньо записати періодичний дріб як суму його цілої частини і періодичного дробу з цілою частиною, рівною 0.

Нехай задано чистий періодичний дріб $\overline{0,(a_1 a_2 ... a_k)}$.

Припустимо, що він дорівнює звичайному дробові *x*, і знайдемо його. Маємо

$$x = \overline{0,(a_1 a_2 ... a_k)}. \qquad (1)$$

Враховуючи означення періодичного дробу, одержимо

$$x = \overline{0,a_1a_2...a_k(a_1a_2...a_k)}.$$

Помножимо рівність на 10^k

$$10^k x = \overline{0,a_1a_2...a_k(a_1a_2...a_k)}.$$

На основі рівності (1) одержимо

$$10^k x = \overline{a_1a_2...a_k} + x.$$

Звідси

$$(10^k - 1)\,x = \overline{a_1a_2...a_k} \text{ і } x = \frac{\overline{a_1a_2...a_k}}{10^k - 1}$$

Очевидно, що число $10^k - 1$ записується k дев'ятками.

Аналіз рівності (2) дає таке **правило**.

Щоб перетворити чистий періодичний дріб у звичайний, потрібно записати цілу частину, якщо вона відмінна від 0, і до неї дописати дріб, чисельник якого є періодом дробу, а знаменник є числом, записаним стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді.

Для заданого мішаного періодичного дробу існує таке **правило**: щоб перетворити мішаний періодичний дріб у звичайний, потрібно записати цілу частину, якщо вона відмінна від нуля, і до неї додати звичайний дріб, чисельником якого є різниця між числами, зображеними кортежами десяткових знаків між комою і другим періодом та комою і першим періодом, а знаменником є число, записане стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді, до яких справа приписано стільки нулів, скільки десяткових знаків є у доперіодичній частині.

Наприклад:

1. $2,(36) = 2\frac{39}{99} = 2\frac{4}{11}$
2. $0,12(135) = \frac{12135 - 12}{99900} = \frac{12123}{99900} = \frac{1347}{11100} = \frac{449}{3700}$

9. Зображення додатних раціональних чисел періодичними дробами

За означенням кожне додатне раціональне число є класом ріпних дробів. У цьому класі виділяється єдиний нескоротний дріб, останній перетворюється або у десятковий дріб, або у періодичний десятковий дріб діленням чисельника на знаменник. За основною властивістю частки цілих невід'ємних чисел усі рівні звичайні дроби перетворюються в один і той же десятковий дріб. А тому кожне додатне раціональне число перетворюється або у десятковий дріб, або у періодичний десятковий дріб, причому при перетворенні методом ділення такий дріб буде єдиним.

Кожний десятковий дріб можна записати у вигляді періодичного дробу з різними періодами. Розглянемо це на прикладі: 0,5 =0,500000... 0,5(0).

неважко переконатися, що 0,5 = 0,49999... = 0,4(9), бо

$$0{,}4(9) = \frac{49-4}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Покажемо, що при перетворенні звичайного дробу у десятковий не може утворитися періодичний десятковий дріб, період якого складається з однієї цифри 9. Користуючись властивостями періодичних дробів, це твердження достатньо довести для нескоротного правильного звичайного дробу $\frac{m}{n}$, який перетворюється у чистий періодичний дріб, тобто в якого 10 і n взаємно прості.

Справді, припустимо, що існує нескоротний правильний дріб $\frac{m}{n}$ який методом ділення перетворюється у періодичний дріб, період якого складається з однієї цифри 9.

Маємо 10 m = 9 n + r_1 де r_1 = m.

Звідси одержуємо, що 10 m = 9 n + m , тобто $9m$ = 9 n і $m = n$,

що суперечить тому, що дріб $\frac{m}{n}$ правильний. Отже, такого робу не існує.

Зі сказаного вище випливає теорема.

Теорема. Кожне додатне раціональне число однозначно зображається періодичним десятковим дробом, якщо не користуватися періодичними дробами, період яких складається з однієї цифри 9.

Зображення додатних раціональних чисел за допомогою періодичних десяткових дробів не єдине. Аналогічно тому, як побудовано теорію десяткових дробів, можна побудувати теорію системних дробів з довільною основою $q > 1$ і одержати теорему, аналогічну даній теоремі.

Теорема. Кожне додатне раціональне число однозначно зображається періодичним системним дробом з основою q >1, якщо не користуватися системними періодичними дробами, період яких складається з однієї цифри $q-1$.

При виконанні операцій з періодичними десятковими дробами їх перетворюють у звичайні.

10. Додатні дійсні числа. Додатні ірраціональні числа. Відношення порядку на множині R₊. Додавання, віднімання, множення, ділення дійсних чисел, їх властивості

Нескінченний десятковий дріб, який не є періодичним, називають *нескінченним неперіодичним десятковим дробом.*

Наприклад, 0,10100100010000... і 5,252255222555 ... – нескінченні неперіодичні десяткові дроби.

Нехай дано одиничний відрізок $\boldsymbol{e}$ і відрізок $\boldsymbol{a}$, несумірний з відрізком $\boldsymbol{e}$. Покажемо, що результат вимірювання довжини відрізка $\boldsymbol{a}$ можна виразити тільки нескінченним неперіодичним десятковим дробом.

<u>Перший крок</u>. Порівняємо відрізки $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{e}$. Якщо $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{e}$, то зазначимо, кількість вміщень $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{a}$ $n_0 = 0$ і $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}$ і перейдемо до другого кроку. Якщо $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{e}$, то знайдеться таке натуральне число n_0, що

$$n_0\,\boldsymbol{e} < \boldsymbol{a} < (n_0 + 1)\,\boldsymbol{e}.$$

Натуральне число n_0 називають *цілою частиною довжини* відрізка $\boldsymbol{a}$. Відрізок, що доповнює $n_0\,\boldsymbol{e}$ до відрізка $\boldsymbol{a}$, позначимо через a_1. Тоді

$\boldsymbol{a} = n_0\,\boldsymbol{e} + a_1$.

<u>Другий крок</u>. Порівняємо відрізки a_1 і e_1 де $e_1 = \frac{1}{10}\,e$.

Якщо $a_1 < e_1$, то визначимо, що $n_1 = 0$ та $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1$ і перейдемо до третього кроку. Якщо $\boldsymbol{a}_1 > \boldsymbol{e}_1$, то знайдеться натуральне число n_1, яке менше від 10, таке, що $n_1\,\boldsymbol{e}_1 < \boldsymbol{a}_1 < (n_1 + 1)\,\boldsymbol{e}_1$.

Беручи до уваги рівність $\boldsymbol{a}_0 = n_0\,\boldsymbol{e} + a_1$ дістаємо

$$\left(n_0 + \frac{n_1}{10}\right)\boldsymbol{e} < \boldsymbol{a} < \left(n_0 + \frac{n_1 + 1}{10}\right)\boldsymbol{e}.$$

Відрізок, що доповнює $n_1\,\boldsymbol{e}_1$ до різка $\boldsymbol{a}$, позначимо через $\boldsymbol{a}_2$. Тоді

$$\boldsymbol{a}_1 = n_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2 \text{ і } \boldsymbol{a}_0 = n_0\,\boldsymbol{e} + n_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2.$$

<u>Третій крок</u>. Порівняємо відрізки a_2 і e_2 де $e_2 = \frac{1}{10}\,e_1 = \frac{1}{10^2}\,e$.

Якщо $a_2 < e_2$, то визначимо, що $n_2 = 0$ та $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2$ і перейдемо до четвертого кроку. Якщо $\boldsymbol{a}_2 > \boldsymbol{e}_2$, то знайдеться натуральне число n_2, яке менше від 10, таке, що $n_2\,\boldsymbol{e}_2 < \boldsymbol{a}_2 < (n_2 + 1)\,\boldsymbol{e}_2$.

Беручи до уваги рівність $\boldsymbol{a} = n_0\,\boldsymbol{e} + n_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2$ дістаємо

$$\left(n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n^2}{10^2}\right)\boldsymbol{e} < \boldsymbol{a} < \left(n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_1 + 1}{10}\right)\boldsymbol{e}.$$

Відрізок, що доповнює $\boldsymbol{n_2\,e_2}$ до відрізка $\boldsymbol{a}_2$ позначимо через $\boldsymbol{a}_3$. Тоді

$$\boldsymbol{a}_2 = n_2\,\boldsymbol{e}_2 + a_3 \text{ і } \boldsymbol{a} = n_0\,\boldsymbol{e} + n_1\,\boldsymbol{e}_1 + n_2\,\boldsymbol{e}_2 + a_3\,.$$

Оскільки відрізок $\boldsymbol{a}$ несумірний з одиничним відрізком $\boldsymbol{e}$, то такий процес нескінченний. В результаті дістанемо: n_0 – цілу частину довжини відрізка $\boldsymbol{a}$ (невід'ємне ціле число), нескінченну числову послідовність n_1, n_2,..., n_k,..., значення членів якої вичерпуються числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, і послідовність нерівностей

$$\left(n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n^2}{10^2} + \ldots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{n_k}{10^k}\right)\boldsymbol{e} < \boldsymbol{a} < \left(n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n^2}{10^2} + \ldots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{n_k + 1}{10^k}\right)\boldsymbol{e},$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

При $n_0 = k = 0$ ця нерівність у нерівність $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{e}$. Отже,

$$n_0,\overline{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k}\;\boldsymbol{e} < \boldsymbol{a} < \left(n_0,\overline{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k} + \frac{1}{10^k}\right)\boldsymbol{e}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Результат, здобутий у процесі вимірювання, можна виразити нескінченним десятковим дробом

$$n_0,\overline{n_1 n_2 \ldots n_k \ldots}$$

Справді, завжди можна знайти нескінченний десятковий дріб і при тому єдиний. Навпаки, маючи нескінченний десятковий дріб, завжди можна побудувати послідовність нерівностей.

Якщо в нескінченному десятковому дробі відкинути всі цифри після коми, починаючи з деякої, то дістанемо десятковий дріб $\overline{n_0, n_1 n_2 \ldots n_k}$, менший від довжини вимірюваного відрізка $\boldsymbol{a}$. Якщо до здобутого десяткового дробу додати $\frac{1}{10^k}$, то дістанемо десятковий дріб, який більше за довжину відрізка ***a***. Тому говорять, що довжина відрізка а виражається нескінченним десятковим дробом , тобто

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}) = n_0,\overline{n_1 n_2 ... n_k ...}$$

Доведемо, що нескінченний десятковий дріб $n_0,\overline{n_1 n_2 ... n_k ...}$ – неперіодичний. Це справді так, оскільки протилежне твердження суперечить тому, що відрізок ***a*** несумірний з одиничним відрізком ***e***.

Таким чином, кожному відрізку, несумірному з одиничним відрізком, можна поставити у відповідність нескінченний неперіодичний десятковий дріб. Навпаки, для кожного нескінченного неперіодичного десяткового дробу Існує відрізок, довжина якого виражається цим дробом. (Це твердження доводиться в геометрії).

Нескінченний неперіодичний десятковий дріб називають *ірраціональним числом.*

За останнім твердженням, нескінченні неперіодичні десяткові дроби зображують довжини відрізків, несумірних з одиничним відрізком. Оскільки довжина відрізка є число додатне для будь-якого відрізка, то означене вище ірраціональне число називається *додатним ірраціональним числом.* Множину додатних ірраціональних чисел позначають I_+. Нескінченність множини I_+ очевидна.

Додатні ірраціональні числа можна дістати також при вимірюванні площ, об’ємів, мас тощо. Із шкільного курсу математики відомі ірраціональні числа π і e.

Об’єднання множин Q_+ і I_+ називають *множиною додатних дійсних чисел* і позначають R_+. Таким чином,

$R_+ = Q_+ \cup I_+$, причому множини Q_+ і I_+ не перетинаються.

Оскільки множини Q_+ і I_+ – нескінченні, то множина R_+ також нескінченна.

Тепер, використовуючи викладені вище результати і означення, можна стверджувати, що множину R_+ додатних дійсних чисел можна розглядати як множину нескінченних десяткових дробів, відмінних від 0,00 ... 0... і тих, що є періодичними з періодом 9.

Нехай задано два додатні дійсні числа α і β:

$$\alpha = a_0,\overline{a_1 a_2 ... a_k ...},\ \beta = b_0,\overline{b_1 b_2 ... b_k ...}\ .$$

Число *α дорівнює числу β*, і пишуть $\alpha = \beta$, якщо $\alpha_j = \beta_j$ для всіх $j \in N_0$.

Говорять, що число *α менше від числа β,* або число *β більше за число α*, і записують відповідно $\alpha < \beta$, або $\beta > \alpha$, якщо $a_0 < b_0$ або знайдеться таке натуральне число k,

що $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ .... $a_{k-1} = b_{k-1}$, але $a_k < b_k$.

Це означення є перенесенням на додатні дійсні числа відповідного означення для додатних раціональних чисел.

Приклад. Порівняти два додатні дійсні числа

$$\alpha = 12{,}348447... \text{ і } \beta = 12{,}343502...$$

Розв'язання. У цих числах однакові цілі частини, однакові й перші три десяткові знаки. Четвертий десятковий знак числа α менший від четвертого десяткового знака числа β. Тому $\beta > \alpha$.

Можна показати, що система (R_+, <) лінійно впорядкована множина, у множині (R_+, <) немає ні найменшого, ні найбільшого числа і між будь-якими двома різними додатними дійсними числами міститься безліч додатних раціональних чисел.

Відношення "менше" на множині R_+ дає змогу ввести так звані *десяткові наближення* додатних дійсних чисел.

Нехай дано два додатні дійсні числа:

$$\alpha = a_0,\overline{a_1a_2...a_k...},\ \beta = b_0,\overline{b_1b_2...b_k...}$$

Для десяткових наближень цих чисел з недостачею і надлишком справедливі нерівності

$$\alpha_k \le \alpha < \alpha'_k \text{ і } \beta_k \le \beta < \beta'_k,\ k = 1, 2, \ldots$$

Якби числа α і β були раціональними, то з останніх нерівностей випливали б такі нерівності:

$$\alpha_k + \beta_k \le \beta + \alpha < \beta'_k + \alpha'_k$$

Сумою додатних дійсних чисел α і *β* називають число $\alpha + \beta$, що відокремлює множини $\{\alpha_k + \beta_k\}$ і $\{\beta'_k + \alpha'_k\}$, де a_k і β_k – десяткові наближення цих чисел з недостачею, а α'_k і β'_k – з надлишком.

Можна довести, що

1) для будь-яких додатних дійсних чисел α і β їхня сума $\alpha + \beta$ існує і єдина;

2)операція додавання (відшукання суми) у множині R_+ комутативна й асоціативна;

3)операція додавання у множині R_+ має властивість монотонності.

Розглянемо тепер віднімання додатних дійсних чисел. Операція віднімання вводиться як обернена до операції додавання.

Різницею додатних дійсних чисел α і р називають таке додатне дійсне число $\gamma = \alpha - \beta$, що $\gamma + \beta = \alpha$. Операцію знаходження різниці називають *відніманням.*

Можна довести, що різниця $\alpha - \beta$, де $\alpha, \beta \in R_+$, існує тоді і тільки тоді, коли $\alpha > \beta$. Якщо різниця існує, то вона єдина.

Нехай α і β – дійсні додатні числа, що визначаються як

$$\alpha = a_0,\overline{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}, \ \beta = b_0,\overline{b_1 b_2 \ldots b_k \ldots}.$$

Тоді мають місце нерівності $\alpha_k \le \alpha < \alpha'_k$ і $\beta_k \le \beta < \beta'_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Якби числа α і β були раціональними, то з зазначених нерівностей випливали б нерівності

$$\alpha_k \ \beta_k \le \beta \, \alpha < \beta'_k \, \alpha'_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Добутком додатних дійсних чисел α і β називають число $\alpha \beta$, що відокремлює множини $\{\alpha_k \ \beta_k, \}$і $\{\beta'_k \, \alpha'_k\}$, де a_k і β_k – десяткові наближення цих чисел з недостачею, а α'_k і β'_k – з надлишком.

Можна довести, що

1) для будь-яких додатних дійсних чисел α і β їхній добуток $\alpha \beta$ існує і єдиний;

2)операція множення (знаходження добутку) у множині R_+ комутативна, асоціативна і дистрибутивна відносно додавання, а також має властивість монотонності.

Ділення додатних дійсних чисел вводиться як операція, обернена до операції множення.

Часткою додатних дійсних чисел α і β називають таке додатне дійсне число $\gamma = \alpha : \beta$, що $\gamma \ \beta = \alpha$. Операцію знаходження частки називають *діленням.*

Можна довести, що для будь-яких додатних дійсних чисел а і їхня частка $\alpha : \beta$ існує і єдина.