Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Педагогічний інститут
Кафедра математичних і природничих дисциплін початкової освіти

Кількісна теорія множини цілих невід'ємних чисел. Системи числення

(Методичні рекомендації для студентів спеціальності "Початкове навчання")

Івано-Франківськ – 2009

УДК 378.14:510.8
ББК 22.128
Р – 64

Романишин Р.Я., Файчак З.Є. Кількісна теорія множини цілих невід'ємних чисел. Системи числення (Методичні рекомендації для студентів спеціальності "Початкове навчання") / Івано-Франківськ: Видавець Кушнір Г.М. – 2009. – 44 с.

Рецензенти:

Кульчицька Н.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри статистики і вищої математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Бігун М.І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри менеджменту та освітніх інновацій Івано-Франківського обласного ІППО.

Рекомендовано до друку Вченою Радою
Педагогічного інституту
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника
(*протокол № 2 від 21. 10.09 р.*)

Передмова

Запропонований збірник розроблений для студентів другого курсу спеціальності “Початкове навчання” і передбачає методичну допомогу при розв’язанні задач з тем “Кількісна теорія множини цілих невід’ємних чисел. Системи числення” відповідно до діючих програмами з математики.

Методичні рекомендації складаються з двох розділів (“Кількісна теорія множини цілих невід’ємних чисел” та “Системи числення”), кожен з яких містить достатній за обсягом теоретичний матеріал, який дозволяє студенту за умови правильного його застосування досягти поставленої мети – розв’язати запропоновані завдання. Особливу цінність вони складатимуть для студентів заочної, екстернатної та заочної форми навчання..

Значна кількість запропонованих розв’язків завдань дозволять студентам самостійно працювати, використовуючи запропоновані методичні рекомендації для самостійної роботи. Наявність вказаних в кінці відповідей до завдань сприяє самоконтролю студентів під час вивчення тем “Кількісна теорія множини цілих невід’ємних чисел. Системи числення”.

Представлені у збірнику розв’язки прикладів ілюструють різні підходи до вирішення математичних задач а також правильного їх оформлення. Запропоновані завдання для самостійної роботи мають засвідчити ти не тільки про вміння студентів користуватися необхідним теоретичним матеріалом і використовувати отримані знання для розв’язку конкретних завдань, але й працювати з тестами.

До кожного завдання подано п’ять варіантів відповідей (а, б, в, г, та “інша відповідь”) і тільки одна з них є правильною. Якщо перші чотири відповіді на думку студенти не є правильними, то слід вибрати варіант “інша відповідь”.

Наявні в методичних рекомендаціях вибіркові відповіді дозволяють студентам самостійно підготуватися до контрольних робіт.

1. Виконання дій у множині цілих невід'ємних чисел

1.1. Додавання цілих невід'ємних чисел

Серед вивчених операцій над множинами (об'єднання, переріз, різниця) найпростішою є об'єднання скінчених множин, які не мають спільних елементів. Операція додавання цілих невід'ємних чисел пов'язана з об'єднанням множин.

Сумою цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a + b$), що є кількісною характеристикою множин A і B, називається число елементів об'єднання цих множин, якщо вони не мають спільних елементів.

$$\forall\ a, b \in N_0 : a + b = n\,(A \cup B), \text{ де } A \cap B = \varnothing,\ n\,(A) = a \text{ і } n\,(B) = b.$$

Операція на множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх сума $a + b$, називається ***додаванням цілих невід'ємних чисел.*** Компоненти додавання називаються ***доданками***, а результат – ***сумою***.

На основі властивостей операції об'єднання множин можна сформулювати наступні ***властивості.***

► Сума довільних двох цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом. Така сума завжди існує і визначена однозначно.

► За властивостями скінчених множин об'єднання двох скінчених множин є скінченною множиною, а тому сума довільних двох цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом.

► Оскільки об'єднання множин завжди існує і визначається однозначно, то й сума двох довільних цілих невід'ємних чисел завжди існує і визначається однозначно.

► Сума довільного цілого невід'ємного і натурального чисел є натуральним числом.

► При додаванні виконується така властивість:

$$\forall\, a \in N_0 : a + 0 = 0 + a = a.$$

На основі означення додавання і властивостей операції об'єднання множин сформульовані ***властивості додавання***.

Операція додавання цілих невід'ємних чисел:

► Комутативна: $\forall\ a, b \in N_0 : a + b = a + b$;

► Асоціативна: $\forall\ a, b, c \in N_0 : (a + b) + c = a + (b + c)$;

Ця властивість характеризує властивість додавання цілих невід'ємних чисел. Тобто: сума трьох цілих невід'ємних чисел не зміниться, якщо будь-які два доданки замінити на їх суму. Цю властивість можна застосувати не тільки до трьох доданків, але й до скінченої кількості доданків розташованих у будь-якому порядку.

З цієї властивості випливає правило додавання числа до суми і суми до числа. Щоб додати число до суми або суму до числа треба знайти суму і до неї додати число, або додати це число до одного з доданків і до отриманого результату додати другий доданок.

Приклад. Виконати додавання 12 + 6.

Розв'язання.

$$12 + 6 = (10 + 2) + 6 = 10 + (2 + 6) = 10 + 8 = 18.$$

Відповідь. 18.

► Монотонна відносно відношення рівності:

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$$

Якщо до обох частин рівності цілих невід'ємних чисел додати одне й те саме ціле невід'ємне число, то рівність не порушиться.

► Для множин, які не мають спільних елементів, справедлива *адитивна властивість* рівностей невід'ємних цілих чисел.

Для додавання цілих невід'ємних чисел мають місце ***правила скорочення*****:**

► Якщо від обох частин рівності відняти одне і те ж число, то рівність не порушиться.

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : a + c = b + c \Leftrightarrow a = b.$$

► Якщо від обох частин нерівності відняти одне і те ж число, то нерівність не порушиться.

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : a + c < b + c \Leftrightarrow a < b.$$

Поняття суми двох цілих невід'ємних чисел можна розповсюдити на довільну скінченну сукупність чисел.

Сумою довільних цілих невід'ємних чисел a_1, a_2, ..., a_n (позначається $a_1 + a_2 + ...+ a_n$ або $\sum_{i=1}^{n} a_i$) називається кількісна характеристика об'єднання множин A_1 A_2, ..., A_n, які попарно не перетинаються і які мають своїми кількісними характеристиками відповідно числа a_1, a_2, ..., a_n.

1.2. Віднімання цілих невід'ємних чисел

Різницею цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a - b$) називається число елементів у доповненні множини B до множини A, тобто $a - b = n\ (A \setminus B)$.

$$\forall\ a, b \in N_0 : a - b = n\ (A \setminus B), \text{ де } a = n\ (A),\ b = n\ (B),\ B \subset A.$$

Знаходження за даними двома числами a і b їхньої різниці $a - b$ називається ***відніманням*** і позначається $a - b = c$. Число a називається ***зменшуваним***, b – ***від'ємником***.

Існує ще одне означення різниці через суму.

Різницею цілих невід'ємних чисел a і b називається таке число c, сума якого з числом b дорівнює a:

$$b - c = a.$$

Обидва означення різниці цілих невід'ємних чисел рівносильні:

$$(a - b = c\ ) \Leftrightarrow (a = b + c).$$

На основі даного значення встановлено, що дія віднімання є оберненою до дії додавання: дія, яка полягає в знаходженні невідомого доданка за відомою сумою і другим доданком:

$$(x + b = a) \Rightarrow (x = a - b).$$

Для дії віднімання існують такі ***властивості***:

► Якщо від будь-якого цілого невід'ємного числа відняти нуль, то одержимо саме ціле невід'ємне число:

$$\forall\ a \in N_0 :\ a - 0 = a.$$

► Якщо від будь-якого цілого невід'ємного числа відняти це ж ціле невід'ємне число, то одержимо нуль:

$$\forall\ a \in N_0 :\ a - a = 0.$$

► Основна властивість різниці: якщо зменшуване і від'ємник одночасно збільшити або зменшити па одне й те саме число, то різниця не зміниться: $(a - b = c) \Leftrightarrow ((a + k) - (a + k) = c)$.

1.3. Множення цілих невід'ємних чисел.

Дію знаходження суми рівних між собою доданків називають ***множенням***, а результат множення – ***добутком***. Операція множення у множині цілих невід'ємних чисел пов'язана зі знаходженням декартового добутку.

Означення. Суму n доданків ($n > 1$), кожний з яких є цілим невід'ємне число m, називають *добутком* m на натуральне число n і позначають mn.

Дію, за допомогою якої знаходять добуток двох чисел n і m називають *множенням*; числа, які перемножують – *множниками*, число m називають *множеним,* а число n – *множником,* вираз mn називають *добутком*, або результатом множення.

Означення добутку цілих невід'ємних вводиться через поняття декартового (прямого) добутку множин. Нехай задані дві множини A і B, і $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$, тоді декартів добуток

$$A \times B = \{ (a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}.$$

Як бачимо, число елементів у декартовому добутку $A \times B$ дорівнює з одного боку, $2 + 2 + 2 = 6$. З іншого боку, якщо $n(A) = 2$, $n(B) = 3$, тоді $2 \cdot 3 = 6$. Отже, у випадку скінченних множин A і B маємо: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

Означення. Добутком цілих невід'ємних чисел m *і* n називається число елементів декартового добутку множини, що має m елементів, на множину, що має n елементів.

Для дії множення існують такі ***властивості*:**

► Якщо будь-яке ціле невід'ємне число помножити на нуль, то одержимо нуль:

$$\forall\ a \in N_0 : a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$$

► Якщо будь-яке ціле невід'ємне число помножити на одиницю, то одержимо саме ціле невід'ємне число:

$$\forall\ a \in N_0 : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

► Добуток двох довільних натуральних чисел є натуральним числом.

► Операція множення цілих невід'ємних чисел комутативна: $\forall\ a, b \in N_0 : a \cdot b = b \cdot a$;

► Операція множення цілих невід'ємних чисел асоціативна: $\forall\ a, b, c \in N_0 : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

► Операція множення цілих невід'ємних чисел дистрибутивна відносно додавання:

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

З комутативного й асоціативного законів множення випливають такі ***властивості***:

► Щоб помножити добуток на число або навпаки число на добуток, досить помножити на це число один із множників і результат помножити на інший множник і т. д.

$$(abc)\ d = (a\ d)\ bc = (b\ d)\ ac = \ldots$$

► Щоб помножити добуток на добуток, досить один з множників першого добутку помножити на будь-який множник другого добутку, знайдений результат помножити на інший множник з добутку і т. д.

► Якщо один з множників збільшити (зменшити) в кілька разів, то й добуток відповідно збільшиться (зменшиться) в стільки ж разів, тобто

$$(ab = c) \Leftrightarrow ((am)\ b = cm).$$

► Обидві частини рівності або нерівності цілих невід'ємних чисел можна помножити на одне й те саме натуральне число після чого знак рівності, або нерівності не зміниться.

За законом монотонності множення та властивостей відношень " = " і " < ", " > " випливають такі властивості:

► На множині цілих невід'ємних чисел рівності та нерівності однакового смислу можна почленно перемножати, тобто, якщо

а) $a = b$ і $c = d$, то $ac = bd$;

б) $a < b$ і $c < d$, то $ac < bd$.

► Обидві частини рівності або нерівності цілих невід'ємних чисел можна поділити на одне й те саме натуральне число після чого знак рівності, або нерівності не зміниться.

а) $\forall\ a, b, c \in N_0 :\ a \cdot c = b \cdot c,\ \wedge\ c \neq 0\ \Rightarrow\ a = b.$

б) $\forall\ a, b, c \in N_0 : a \cdot c < b \cdot c,\ \wedge\ c \neq 0\ \Rightarrow a < b.$

Поняття добутку двох цілих невід'ємних чисел можна розповсюдити на довільну скінченну сукупність чисел.

Добутком довільних цілих невід'ємних чисел a_1, a_2, … a_n (позначається $a_1a_2...a_n$ або $\prod_{i=1}^{n} a_i$) називається кількісна характеристика декартового добутку множин A_1, A_2, ..., A_n, кількісними характеристиками яких є відповідно числа a_1, a_2, … a_n.

Означення. Добуток n множників, де $n > 1$, кожен з яких дорівнює a, називається n-м степенем числа a (позначається a^n).

Знаходженя n-го степеня числа a називається *піднесенням до степеня*: a називається основою, n – показником степеня.

Означення. Число a в першому степені дорівнює самому числу a.

З означення степеня та властивостей дії множення випливають такі ***властивості степеня*:**

► При множенні з однаковими основами степені додаються (адитивність показників степенів при однаковій основі)

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

► При піднесенні до степеня добутку до степеня підноситься кожен з множників (дистрибутивність піднесення до степеня відносно множення)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

► При піднесенні степеня до степеня степені перемножуються (мультиплікативність показників при піднесенні степеня до степеня) $(a^n)^k = a^{nk}$.

► Властивість монотонності (якщо $a > 1$ і $n > k$, то $a^n > a^k$).

► Для випадку, коли основою є нуль за означенням степеня отримаємо: $0^n = 0 \cdot 0 \cdot ... \cdot 0 = 0$. Отже, будь-яке натуральне число в нульовому степені дорівнює одиниці: $a^0 = 1$.

► Якщо один з множників дорівнює нулю, то і добуток дорівнює нулю.

► Якщо один з множників дорівнює одиниці, то добуток дорівнює іншому множнику.

1.4. Ділення цілих невід'ємних чисел

Означення. Розділити ціле невід'ємне число a на натуральне число b означає знайти таке число c, що $a = b \cdot c$. Число a називається *діленим*, b – *дільником*, c – *часткою* ($c = a : b$).

$$\forall\ a \in N_0\ \forall\ b \in N:\ a : b = c \Leftrightarrow\ b \cdot c = a.$$

З даного означення випливає, що ділене дорівнює частці, помноженій на дільник: $(a : b) \cdot b = a$. З означення частки та дії ділення випливає рівність $(a \cdot b) : b = a$.

Оскільки дія ділення зводиться до розв'язування рівняння виду

$$b \cdot x = a,$$

то необхідно запам'ятати, що на множині цілих невід'ємних чисел вираз

0 : 0 не має смислу. **Тому ділити нуль на нуль не можна**.

Операція ділення є оберненою до операції множення, при якій за добутком двох чисел і одним із множників визначається другий множник. З другого означення частки одержуємо такі ***властивості.***

► Якщо нуль розділити на будь-яке натуральне число, то в результаті одержимо нуль:

$$\forall\, a \in N:\ 0 : a = 0.$$

► Якщо будь-яке натуральне число розділити на одиницю, то в результаті одержимо те саме натуральне число:

$$\forall\, a \in N_0:\ a : 1 = a.$$

► Якщо будь-яке натуральне число розділити на те саме натуральне число, то одержимо одиницю:

$$\forall\, a \in N:\ a : a = 1.$$

► Ділення неасоціативне.

$$(30 : 3) : 5 \neq 30 : (3 : 5)$$

► Якщо $a < b$ і $a \vdots b$, то $a = 0$.

► Ділення комутативне лише у випадку $a = b$.

► Якщо обидві частини рівності поділити на натуральне число, то рівність не порушиться ($c > 0$, то $a\,c = b\,c \Rightarrow a = b$).

За означенням ділення $ac : c = a$ і $bc : c = b$ ($ac = bc$). Тому з теореми про єдиність частки випливає, що $a = b$.

► Якщо ділене і дільник помножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то частка не зміниться
($c > 0$, то $a : b = a\,c : b\,c$).
Нехай $a\,c : b\,c = x$, тоді $a\,c = b\,c\,x$. Звідси $a = b\,x \Rightarrow a : b = x$.

► Ділення на добуток можна виконати послідовним діленням на окремі множники $a : b\,d = (a : b) : d$.

$$12 : (6 \cdot 2) = 12 : 6 : 2.$$

► Ділення добутку на число можна виконати, поділивши на це число, якщо можливо, один із множників, і результат помножити на другий множник: $a\,b : c = (a : c)\,b = (b : c)\,a$.

$$16 \cdot 2 : 4 = (16 : 4) \cdot 2.$$

► Ділення частки на число: $a : b : c = a : c : b = a : b\,c$.

$$12 : 6 : 2 = 12 : 2 : 6 = 12 : 6 \cdot 2.$$

► Ділення на частку можна виконати за таким правилом:

$$a : (b : c) = (a : b)\,c.$$

За означенням ділення:

$$((a : b) \cdot c)\,(b : c) = (a : b)\,((b : c) \cdot c) = (a : b) \cdot b = a.$$

► Розподільна властивість ділення відносно суми:

$(a + b) : c = a : c + b : c$, якщо ділення можливе.

► Розподільна властивість ділення відносно різниці:

$(a - b) : c = a : c - b : c$, якщо ділення можливе.

► За умови існування відповідних часток частка не зміниться, якщо ділене і дільник поділити або помножити на те саме число.

► За умови існування відповідних часток, щоб поділити суму кількох цілих невід'ємних чисел на натуральне число, потрібно поділити на це число кожен із доданків і одержані частки додати.

► За умови існування відповідних часток, щоб поділити добуток кількох цілих невід'ємних чисел на натуральне число, достатньо поділити на це число один із множників і одержану частку помножити на добуток решти множників.

ВПРАВИ

Приклад 1.А. На основі залежності між компонентами і результатами дій знайти невідоме x

$$((56\cdot(666+x)+12\,600):40-700)\cdot 24=21000.$$

Розв’язання. Пронумеруємо порядок виконання дій у лівій частині рівняння:

$$\underbrace{((56\overset{2}{\cdot}(666\overset{1}{+}x)\overset{3}{+}12\,600)\overset{4}{:}40\overset{5}{-}700)}_{\text{НЕВІДОМИЙ МНОЖНИК}}\overset{6}{\cdot}\underbrace{24}_{\text{МНОЖНИК}}=\underbrace{21\,000}_{\text{ДОБУТОК}}.$$

Розгляд почнемо з останньої дії.

Невідомий множник дорівнює добутку поділеному на відомий множник:

$$(56\cdot(666+x)+12\,600):40-700=21\,000:24=875;$$

$$\underbrace{(56\overset{2}{\cdot}(666\overset{1}{+}x)\overset{3}{+}12\,600)\overset{4}{:}40}_{\text{ЗМЕНШУВАНЕ}}\overset{5}{-}\underbrace{700}_{\text{ВІД'ЄМНИК}}=\underbrace{875}_{\text{РІЗНИЦЯ}}.$$

Невідоме зменшуване дорівнює сумі різниці і від’ємника:

$$(56\cdot(666+x)+12\,600):40=875+700=1575;$$

$$\underbrace{56\overset{2}{\cdot}(666\overset{1}{+}x)\overset{3}{+}12\,600}_{\text{ДІЛЕНЕ}}\overset{4}{:}\underbrace{40}_{\text{ДІЛЬНИК}}=\underbrace{1\,575}_{\text{ЧАСТКА}}.$$

Невідоме ділене дорівнює добутку частки і дільника:

$$56\cdot(666+x)+12\,600=1575\cdot 40=63\,000;$$

$$\underbrace{56\overset{2}{\cdot}(666\overset{1}{+}x)}_{\text{НЕВІДОМИЙ ДОДАНОК}}\overset{3}{+}\underbrace{12\,600}_{\text{ДОДАНОК}}=\underbrace{63\,000}_{\text{СУМА}}.$$

Щоб знайти невідомий доданок треба від суми відняти відомий доданок:

$$56\cdot(666+x)=63\,000-12\,600=50\,400;$$

$$\underbrace{56}_{\text{МНОЖНИК}}\overset{2}{\cdot}\underbrace{(666\overset{1}{+}x)}_{\text{НЕВІДОМИЙ МНОЖНИК}}=\underbrace{50\,400}_{\text{ДОБУТОК}}.$$

Щоб знайти невідомий множник треба добуток поділити на відомий множник:

$$666+x=50400:56=900;$$

$$\underbrace{666}_{\text{ДОДАНОК}}+\underbrace{x}_{\substack{\text{НЕВІДОМИЙ}\\ \text{ДОДАНОК}}}=\underbrace{900}_{\text{СУМА}}.$$

Щоб знайти невідомий доданок треба від суми відняти відомий доданок:

$$x = 900 - 666 = 234.$$

Відповідь: $x = 234$.

Приклад 1.Б. На основі залежності між компонентами і результатами дій знайти невідоме x

$$24\,960 : \left(3\,360 - \frac{300 \cdot (200 - 6x)}{115}\right) = 8.$$

Розв'язання. Пронумеруємо порядок виконання дій у лівій частині рівняння:

$$\underbrace{24\,960}_{ДІЛЕНЕ} \overset{6}{:} \underbrace{3\,360 \overset{5}{-} \frac{300 \overset{3}{\cdot} (200 \overset{2}{-} 6 \overset{1}{\cdot} x)}{115}\,^{4}}_{ДІЛЬНИК} = \underbrace{8}_{ЧАСТКА}.$$

Щоб знайти невідомий дільник треба ділене поділити на частку:

$$3\,360 - \frac{300 \cdot (200 - 6 \cdot x)}{115} = 24\,960 : 8 = 3120;$$

$$\underbrace{3\,360}_{ЗМЕНШУВАНЕ} \overset{5}{-} \underbrace{\frac{300 \overset{3}{\cdot} (200 \overset{2}{-} 6 \overset{1}{\cdot} x)}{115}\,^{4}}_{ВІД'ЄМНИК} = \underbrace{3120}_{РІЗНИЦЯ}.$$

Щоб знайти невідомий від'ємник треба від зменшуваного відняти різницю:

$$\frac{300 \cdot (200 - 6 \cdot x)}{115} = 3\,360 - 3120 = 240;$$

$$\underbrace{300 \overset{3}{\cdot} (200 \overset{2}{-} 6 \overset{1}{\cdot} x)}_{ДІЛЕНЕ} \overset{4}{:} \underbrace{115}_{ДІЛЬНИК} = \underbrace{240}_{ЧАСТКА}.$$

Щоб знайти невідоме ділене треба частку помножити на дільник:

$$300 \cdot (200 - 6 \cdot x) = 240 \cdot 115 = 27\,600;$$

$$\underbrace{300}_{МНОЖНИК} \overset{3}{\cdot} \underbrace{(200 \overset{2}{-} 6 \overset{1}{\cdot} x)}_{\substack{НЕВІДОМИЙ \\ МНОЖНИК}} = \underbrace{27\,600}_{ДОБУТОК}.$$

Щоб знайти невідомий множник треба добуток поділити на відомий множник:

$$(200 - 6 \cdot x) = 27\,600 : 300 = 92;$$

$$\underbrace{200}_{\text{ЗМЕНШУВАНЕ}} \overset{2}{-} \underbrace{6 \overset{1}{\cdot} x}_{\text{ВІД'ЄМНИК}} = \underbrace{92}_{\text{РІЗНИЦЯ}}.$$

Щоб знайти невідомий від’ємник треба від зменшуваного відняти різницю:

$$6 \cdot x = 200 - 92 = 108;$$

$$\underbrace{6}_{\text{МНОЖНИК}} \overset{1}{\cdot} \underbrace{x}_{\substack{\text{НЕВІДОМИЙ}\\ \text{МНОЖНИК}}} = \underbrace{108}_{\text{ДОБУТОК}}.$$

Щоб знайти невідомий множник треба добуток поділити на відомий множник:

$$x = 108 : 6 = 18.$$

Відповідь: $x = 18$.

На основі залежності між компонентами і результатами дій знайти невідоме:

1.1. $(7x + 222\,171 : (100\,000 - 97\,843)) : 33 = 64.$

а) 27
б) 287
в) 872
г) 782
д) інша відповідь.

1.2. $(4\,300 - 650 \cdot 144 : x) \cdot 84 : 165 - 105 = 595.$

а) 32
б) 23
в) 2 925
г) 1 375
д) інша відповідь.

1.3. $564 - (48 \cdot (1\,683 - (197 + 7x)) : 1\,516) = 540.$

а) 401
б) 14
в) 104
г) 728
д) інша відповідь.

1.4. $\left(742 - \dfrac{(180 - 5y) \cdot 320}{128}\right) : 14 \cdot 107 = 2\,996.$

а) 8
б) 18
в) 40
г) 48
д) інша відповідь.

1.5. $(((138x-5\,859):39+28\,604):403)\cdot 29-1\,059=1000.$

а) 45　　г) 452

б) 6 210　　д) інша відповідь.

в) 23

1.6. $\left(\dfrac{7\,008-52\cdot 14}{314\cdot x}\cdot 425\cdot 60-305\,000\right):4\,100=50.$

а) 12　　г) 1

б) 20　　д) інша відповідь.

в) 8 500

1.7. $2\,020-\left(28\,836:\left(3\,060-\dfrac{780}{x}\cdot 208\right)\right)+5\,319:135=1\,980.$

а) 13　　г) 60

б) 780　　д) інша відповідь.

в) 6

1.8. $(((1\,500+2x:28)\cdot 48-85\,776)\cdot 24+608)\cdot 202=6\,173\,120.$

а) 8 764　　г) 54

б) 4 382　　д) інша відповідь.

в) 38

1.9. $\left(\left(223\,440:\left(\dfrac{72\cdot x}{252}+239\right)+8\,268\right):108-59\right)\cdot 403=10\,478.$

а) 12　　г) 21

б) 45　　д) інша відповідь.

в) 1 512

1.10. $(111\,111\,000:(3\,150+9\,000\,000:x)+10\,912):407=76.$

а) 3 750　　г) 543

б) 375　　д) інша відповідь.

в) 345

1.11. $(9\,564-(8\,352-(848-21)+(8x-41)))-211=1813.$

а) 17　　г) 9

б) 7　　д) інша відповідь.

в) 56

1.12. $(((750+x:28)\cdot 24-21144)\cdot 12+38)\cdot 101=192910.$

а) 850　　г) 3 850

б) 12　　д) інша відповідь.

в) 350

1.13. $282-(72\cdot(1548-(x\cdot 13+62)):4548)=270.$

а) 56
б) 506
в) 65
г) 605
д) інша відповідь.

1.14. $(14\,972\,580 : (250\,000 - 52 \cdot (4\,881 - x)) \cdot 1\,024 - 590\,000) : 376 = 1\,003$.

а) 873
б) 378
в) 305
г) 213
д) інша відповідь

1.15. $(((134 \cdot x - 3\,179) + 856) \cdot 81) : 333 = 315$.

а) 3 618
б) 27
в) 74
г) 567
д) інша відповідь

1.16. $((56 \cdot (666 + x) + 12\,600) : 400 - 700) \cdot 24 = 21\,000$

а) 103 590
б) 1 339
в) 10 359
г) 1 056
д) інша відповідь

1.17. $1889118 : \dfrac{\dfrac{2x + 125}{111} + 1025}{150} - 36268 = 233606$

а) 15
б) 1325
в) 123
г) 52
д) інша відповідь

1.18. $\dfrac{2114 \cdot (x + 1005 \cdot 120)}{151} + 21170 = 1712552$

а) 213
б) 320
в) 219
г) 321
д) інша відповідь

1.19. $\left(\dfrac{x \cdot 115 - 1325}{350} \cdot 7124\right) - 16884 = 1700000$

а) 125
б) 765
в) 345
г) 745
д) інша відповідь

1.20. $\left(\left(\left(35224 + \left(x - 96\right)\right) - 1230\right) : 379\right) + 1245 = 1335$

а) 116
б) 121
в) 212
г) 216
д) інша відповідь

1.21. $\left(\left(3514-\frac{x}{311}\right):73+2752\right):140+15280=15300$

а) 3504 г) 2800
б) 1232 д) інша відповідь
в) 3110

1.22. $(((x\cdot 15+1225):50)-22)\cdot 1278=8946$

а) 15 г) 43
б) 134 д) інша відповідь
в) 510

1.23. $(1224-(15432:(5x-127))):120=10$

а) 453 г) 643
б) 154 д) інша відповідь
в) 234

1.24. $\left(230+\frac{4x+13032}{140}\right):110+12787=12790$

а) 242 г) 1231
б) 968 д) інша відповідь
в) 349

1.25. $\left(8956:\frac{\frac{x}{201}+1996}{1003}-478\right)\cdot 161=644000$

а) 210 г) 2010
б) 1023 д) інша відповідь
в) 1201

1.26. $(56830+(17x-85):100):57=1000$

а) 1005 г) 2712
б) 515 д) інша відповідь
в) 105

1.27. $\left(3560+\frac{(x-108)\cdot 27}{81}\right):51+18125=18195$

а) 138 г) 701
б) 293 д) інша відповідь
в) 467

1.28. $\left(23160 : \dfrac{131 \cdot x - 41}{70} - 1008\right) \cdot 123 = 18450$

а) 110
б) 121
в) 11
г) 130
д) інша відповідь

1.29. $\left(329190 + \dfrac{363206 - 6x}{200}\right) - 330000 = 1000$

а) 201
б) 211
в) 112
г) 124
д) інша відповідь

1.30. $27562 - \left(\dfrac{4x - 212}{25} + 2660\right) = 24862$

а) 1000
б) 214
в) 140
г) 303
д) інша відповідь

2. Системи числення.
2.1. Поняття про системи числення та їх види

Діяльність людини сприяла появі нових чисел, які потрібно було не тільки називати і записувати, але й виконувати над ними різні операції. За тривалий період розвитку у різних народів були створені різні системи найменування і позначення чисел.

Системою числення називається сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід'ємне число.

Перед кожною системою числення *ставляться такі три вимоги*:

1) будь-яке ціле невід'ємне число однозначно записується у даній системі числення;

2) числа легко порівнювати на основі їх запису;

3) алгоритми виконання арифметичних операцій над числами, записаними у даній системі числення, порівняно прості.

Для деяких цілих невід'ємних чисел є індивідуальні спеціальні знаки для їх позначення і запису. Ці знаки називаються ***цифрами***, а самі числа, що позначаються цими знаками, називаються ***вузловими***, усі інші числа записуються за допомогою арифметичних операцій над вузловими числами і називаються ***алгоритмічними***.

Системи числення поділяються на ***позиційні*** і ***непозиційні***. У непозиційних системах числення значення цифри не залежить від того, яке місце (позицію) вона займає у запису числа. З непозиційних систем числення на даний час найбільш відомою є римська, якою іноді користуються і нині. Основні її цифри – I, V, X, L, C, D, M, якими зображаються відповідно вузлові числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Інші числа можна одержати у результаті додавання і віднімання вузлових чисел за певними правилами. Наприклад, у римській системі числення записом числа 1996 буде MCMXCVI. Одним із недоліків непозиційних систем числення є те, що у них для запису великих чисел потрібно вводити все нові і нові вузлові числа, а, отже, нові цифри.

У позиційних системах числення, на відміну від непозиційних, числове значення кожної цифри змінюється зі зміною її положення (позиції) у запису числа, що значно полегшує його запис, а також порівняння чисел і виконання арифметичних операцій над ними. Тому позиційні системи числення набули широкого вжитку. У них використовується розрядний принцип запису чисел: число g одиниць одного розряду становить одну одиницю наступного вищого розряду. Інакше кажучи число g, яке називається ***основою системи числення***, вказує на те, що при зміні положення цифри у запису числа на одну одиницю вліво (вправо) числове значення її збільшується (зменшується) у g разів. За основу системи числення може бути вибране довільне натуральне число $g > 1$. Для запису чисел у позиційній системі числення з основою g потрібно g цифр, кожна з яких позначає одне з цілих невід'ємних чисел від 0 до $g – 1$, які називаються ***одноцифровими числами***. Зокрема, при $g = 10$ одержуємо позиційну систему числення, яка називається ***десятковою.***

2.2. Десяткова система числення

Зокрема, десяткова система числення є одним із видів позиційних систем числення. Широке впровадження її у практику обумовлено наявністю у людини найпростішого лічильного пристрою – 10 пальців рук. Вивчення десяткової системи числення – одне з основних завдань курсу математики сучасної школи.

У десятковій системі числення для запису перших десяти цілих невід'ємних чисел використовуються десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Десятковим записом натурального числа a називається подання його у вигляді

$$a = a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0, \qquad (1)$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ – цифри десяткової системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a = a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$ коротко записується $\overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0}$.

Числа $1 = 10^0, 10^1, 10^2, ..., 10^n$, тобто 1, 10, 100, ..., $1\underbrace{00...0}_{n\ нулів}$

(у числі n нулів) називаються розрядними одиницями відповідно першого, другого, ..., $(n + 1)$ – розрядів, причому 10 одиниць одного розряду становлять одну одиницю наступного вищого розряду.

У запису (1) доданки a_0, $a_1\, 10^1$, $a_2\, 10^2$,…, $a_{n-1}\, 10^{n-1}$, $a_n\, 10^n$ називають ***розрядними доданками***.

Десятковий запис числа показує, скільки одиниць найнижчого розряду є у числі і як вони розподілені як одиниці вищих розрядів.

► Десятковий запис натурального числа завжди існує і єдиний.

Десятковим записом називають суму його розрядних доданків, тобто, коли у запису

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} +... + a_1 10^1 + a_0$$

операції множення і піднесення до степеня замінити їх результатами.

Наприклад.
43075 = $4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 5$ = 40000 + 3000 + 70+5.

Для читання числа його розряди, починаючи з найнижчого, діляться на *класи* по три розряди у кожному, причому останній клас може включати і менше розрядів. Перший розряд (найнижчий) кожного з класів називається *розрядом одиниць,* другий – *розрядом десятків*, третій – *розрядом сотень* відповідного класу.

Перший клас (найнижчий) називається *класом одиниць*, другий – *класом тисяч,* третій – *класом мільйонів,* четвертий – *класом мільярдів*, п'ятий – *класом трильйонів* і т. д.

Для найменування чисел у межах трильйона потрібно знати лише 18 слів: нуль, один, два, три, чотири, п'ять, шість, сім, вісім, дев'ять, десять, сорок, дев'яносто, сто, тисяча, мільйон, мільярд і трильйон.

Назва чисел другого десятка, крім десяти, тобто чисел виду $\overline{1\,a_0}$ = 10 + a_0, утворюється із поєднання назв одноцифрового числа і слова "десять" (десять є першим двоцифровим числом).

Наприклад, число 13 читається: "три-на-дцять" (три на десять). У цих назвах природно вживати сполучник "і" (три і десять), але наші пращури вживали прийменник "на", що й залишилося у мові.

Числа від 21 до 999, в основному, читаються так: послідовно називається число одиниць, якщо воно є у запису, третього, другого і першого розрядів, причому назва останнього розряду не вказується.

Наприклад, число 254 читається: двісті п'ятдесят чотири.

Для читання чисел, записи яких містять більше як три цифри, їх спочатку ділять на класи, а потім послідовно читають числа кожного класу, починаючи з найвищого, причому вказується найменування кожного класу, за винятком класу одиниць. Наприклад, число 34 605 328 006 670 містить п'ять класів і читається: тридцять чотири трильйони шістсот п’ять мільярдів триста двадцять вісім мільйонів шість тисяч шістсот сімдесят.

Порівняння чисел, записаних у десятковій системі числення, ґрунтується на таких теоремах.

► Одна одиниця вищого розряду більша за число, яке складається з одиниць нижчих розрядів:

$$\forall k \in N : 10^k > \overline{a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0}\ .$$

► З двох чисел більшим буде те, у десятковому записі якого раніше зустрічається більша кількість одиниць відповідного розряду.

Розгляд попереднього матеріалу показує, що у десятковій системі числення:

1) кожне ціле невід’ємне число записується однозначно;

2) легко порівнювати числа на основі їх запису.

2.3. Позиційні системи числення з довільною основою та запис чисел у них

У практичній діяльності люди користувалися різними системами числення, особливо позиційними, бо, як уже зазначалося, вони дають можливість досить просто записувати, порівнювати і виконувати над числами арифметичні операції. Поділ року на 12 місяців, години на 60 хв. підтверджують існування позиційних систем числення з різними основами. З часом найбільш вживаною серед них виявилася десяткова система.

Для запису чисел у різних позиційних системах числення користуються цифрами десяткової системи числення. Наприклад, цифрами системи числення з основою $g = 2$ є 0 і 1, а при $g = 5$ числа 0, 1, 2, 3 і 4. Якщо ж основа системи числення $g > 10$, то її цифри як багатоцифрові числа десяткової системи числення беруться в дужки. Наприклад, якщо основа системи числення $g = 12$, то цифрами її будуть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (10), (11).

З розвитком обчислювальної техніки для зображення чисел потрібно було використовувати якнайменше стійких станів, а для цього потрібна система числення з малою кількістю цифр. Такою системою є двійкова система, якою найчастіше користуються при роботі на сучасних ЕОМ.

Записом натурального числа у позиційній системі числення з основою g ≥ 2 називається подання його у вигляді

$$a = a_n \cdot g^{n} + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – цифри системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a_n \cdot g^{n} + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0$ коротко записується $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_g$.

Числа $1 = g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{n-1}, g^{n}$ називаються *розрядними одиницями*, а доданки

$a_1 \cdot g^1, a_2 \cdot g^2, \ldots, a_{n-1} \cdot g^{n-1}, a_n \cdot g^{n}$ – *розрядними доданками.*

При читанні числа, записаного у позиційній системі числення з основою g, послідовно називають цифри числа, починаючи з найвищого розряду, і основу системи числення. Наприклад, число 25064_8 читається: “два п’ять нуль шість чотири у системі числення з основою вісім”.

Запис числа у позиційній системі числення з основою g показує, скільки одиниць найнижчого розряду містить дане число і як вони розподілені у числі як одиниці вищих розрядів.

Теорема. Запис натурального числа у позиційній системі числення з основою $g > 1$ завжди існує і єдиний.

Доведення.

I. Доведення існування запису числа у позиційній системі числення з основою $g > 1$ проведемо методом математичної індукції.

Твердження істинне для натурального числа $a = 1$ і для всіх натуральних чисел, які менші від основи системи числення, бо вони записуються цифрами даної позиційної системи числення: $a = a_0$.

Припустимо, що твердження істинне для всіх натуральних чисел b таких, що $g - 1 \leq b < a$.

Доведемо, що твердження істинне і для натурального числа a.

Поділимо a на g з остачею:

$$a = g \cdot q + a_0, \quad a_0 < g. \qquad (1)$$

Оскільки за властивістю ділення $q < a$, то за припущенням

$$q = g_k \cdot q^{k} + g_{k-1} \cdot q^{k-1} + \ldots + g_1 \cdot q + q_0 .$$

Звідси, користуючись (1), одержуємо

$$a = (g_k \cdot q^{k} + g_{k-1} \cdot q^{k-1} + \ldots + g_1 \cdot q + q_0) \cdot g + a_0.$$

А тому за дистрибутивним законом множення відносно додавання

$$a = g_k \cdot g^{k+1} + g_{k-1} \cdot q^k + ... + g_1 \cdot g^2 + q_0 \cdot g + a_0,$$

де q_k, q_{k-1}, ..., q_0, a_0 – цифри даної системи числення і $q_k \neq 0$. Отже, твердження істинне і для числа a.

Тоді за принципом математичної індукції зазначене вище твердження буде істинним для будь-якого натурального числа a.

II. Доведемо тепер єдиність запису натурального числа у позиційній системі числення з основою g .

Припустимо, що існує принаймні два записи числа a:

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + ... + a_1 \cdot g + a_0 \text{ і}$$
$$a = a_s \cdot g^s + a_{s-1} \cdot g^{s-1} + ... + a_1 \cdot g + a_0 .$$

На основі транзитивності відношення рівності маємо

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + ... + a_1 \cdot g + a_0 =$$
$$= a_s \cdot g^s + a_{s-1} \cdot g^{s-1} + ... + a_1 \cdot g + a_0.$$

Користуючись законами операцій додавання і множення, рівність (2) можна записати

$$(a_n \cdot g^{n-1} a_{n-1} \cdot g^{n-2} + ... + a_2 \cdot g + a_1) \cdot g + a_0 =$$
$$= (c_s \cdot g^{s-1} + c_{s-1} \cdot g^{s-2} + ... + c_2 \cdot g + c_1) \cdot g + c_0.$$

Числа

$$a_n \cdot g^{n-1} a_{n-1} \cdot g^{n-2} + ... + a_2 \cdot g + a_1 \text{ і}$$
$$c_s \cdot g^{s-1} + c_{s-1} \cdot g^{s-2} + ... + c_2 \cdot g + c_1$$

є неповними частками, a_0 і c_0 – остачами при діленні a на g . За теоремою про ділення з остачею неповна частка і остача єдині, отже,

$$a_n \cdot g^{n-1} a_{n-1} \cdot g^{n-2} + ... + a_2 \cdot g + a_1 =$$
$$= c_s \cdot g^{s-1} + c_{s-1} \cdot g^{s-2} + ... + c_2 \cdot g + c_1 = c_0.$$

Міркуючи аналогічно, через скінченну кількість кроків отримаємо

$$n = s, a_0 = c_0, a_1 = c_1, ... , a_{n-1} = c_{n-1}, \ a_n = c_n.$$

Сам спосіб доведення теореми дає можливість переходу від запису числа в одній позиційній системі числення до його запису в іншій системі числення, якщо відомі алгоритми виконання арифметичних операцій у першій системі числення.

2.4. Порівняння цілих невід'ємних чисел і алгоритми виконання арифметичних операцій над ними у різних позиційних системах числення

Порівняння цілих невід'ємних чисел і алгоритми виконання арифметичних операцій над ними у різних позиційних системах числення здійснюються так само, як і у десятковій системі числення, при цьому тільки потрібно враховувати основу системи числення і пам'ятати, що g одиниць нижчого розряду дорівнюють одній одиниці наступного вищого розряду, і, навпаки, одна одиниця вищого розряду дорівнює g одиницям сусіднього нижчого розряду.

Наприклад,

число $32405_7 > 32366_7$, бо 3 = 3, 2 = 2, а 4 > 3.

Для полегшення обчислення часто складають таблиці додавання і множення одноцифрових чисел у позиційній системі числення, в якій проводять обчислення. Щоб записи не були громіздкими при виконанні операцій в одній і тій же системі числення, її основу можна не вказувати у проміжних результатах.

2.5. Перехід від запису чисел в одній позиційній системі числення до запису в іншій

Одне й те ж число може бути записане у різних позиційних системах числення. Часто потрібно, знаючи запис числа у системі числення з основою g, записати його у системі числення з основою h. Способи переходу від однієї системи числення до іншої ґрунтуються на тому, що у кожному числі всіх одиниць найнижчого розряду у будь-якій системі числення – однакова кількість, тільки як одиниці вищих розрядів у них вони розподілені по-різному. Найбільш вживані два способи переходу – ділення і множення. Розглянемо їх.

Нехай натуральне число $a = \overline{a_n\, a_{n-1} \dots a_1\, a_{0}}_g$ записано у системі числення з основою g і потрібно записати його у системі числення з основою h. За теоремою такий запис існує і єдиний. Отже,

$$a = b_k \cdot h^k + b_{k-1} \cdot h^{k-1} + \ldots + b_1 \cdot h + h_0, \qquad (1)$$

де b_k, b_{k-1}, ..., b_1, b_0 – цифри позиційної системи числення з основою h.

Скориставшись законами операцій додавання і множення цілих невід'ємних чисел, рівність (1) можна записати

$$a = (b_k \cdot h^{k-1} + b_{k-1} \cdot h^{k-2} + \ldots + b_2 \cdot h + b_1) \cdot h + b_0,\ \ b_0 < h. \qquad (2)$$

Позначимо

$$q_0 = b_k \cdot h^{k-1} + b_{k-1} \cdot h^{k-2} + \ldots + b_2 \cdot h + b_1.$$

Тоді рівність (2) запишеться

$$a = h \cdot q_0 + b_0,\ \ b_0 < h,\ \ q_0 < a. \qquad (3)$$

Відношення (3) показують, що b_0 є остачею, а q_0 – неповною часткою при діленні a на h з остачею.

Застосуємо до числа q_0 ті ж міркування, що й до числа a, і будемо мати

$$q_0 = (b_k \cdot h^{k-2} + b_{k-1} \cdot h^{k-3} + \ldots + b_3 \cdot h + b_2) \cdot h + b_1,\ \ b_1 < h. \qquad (4)$$

Якщо ввести позначення

$$q_1 = b_k \cdot h^{k-2} + b_{k-1} \cdot h^{k-3} + \ldots + b_3 \cdot h + b_2,$$

то відношення (4) запишуться

$$q_0 = h \cdot q_1 + b_1,\ \ b_1 < h_1,\ \ q_1 < q_0. \qquad (5)$$

Відношення (5) показують, що числа q_1 і b_1 є відповідно неповною часткою і остачею при діленні числа q_0 на h з остачею.

Такі міркування проводяться, поки на кроці з номером $k - 1$ не одержимо $q_{k-1} < h$, і будемо мати $b_k = q_{k-1}$.

Отже, можемо визначити всі цифри запису числа a у системі числення з основою h.

Таким чином, *метод ділення* виконується за такою схемою.

1. Якщо дане число менше від основи h нової системи числення, то воно запишеться у ній як одноцифрове число.

2. Якщо число не менше від основи h нової системи числення, то воно у цій системі містить і одиниці вищих розрядів. Щоб знайти їх кількість, потрібно поділити дане число на h. Частка від ділення вказує, скільки одиниць другого розряду є у числі, а остача – скільки одиниць першого розряду. Якщо одержана частка не менша від h, то дане число містить одиниці ще вищого третього розряду. Щоб знайти їх кількість, слід одержану частку поділити на h. Цей процес продовжується, поки не одержимо частку, яка менша від h. Вона буде вказувати кількість одиниць найвищого розряду, а всі остачі

вказуватимуть кількість одиниць наступних нижчих розрядів у запису даного числа у позиційній системі числення з основою h.

3. Усі операції виконуються у старій системі числення з основою g, а тому цим способом зручно користуватися, коли $g > h$, бо тоді h записується як одноцифрове число у системі числення з основою g, і остачі від ділення будуть менші від h, отже, вони будуть одноцифровими числами у новій системі числення.

Методом ділення зручно користуватися також, коли $g = 10$, бо тоді добре відомі алгоритми виконання операцій.

Теоретичною основою *способу множення* є таке представлення числа a, записаного у позиційній системі числення з основою g:

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + a_{n-2} \cdot g^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g + a_0 =$$
$$= ((\ldots(a_n \cdot g^n + a_{n-1}) \cdot g + a_{n-2}) \cdot g + \ldots + a_2) \cdot g + a_1) \cdot g + a_0.$$

Якщо виконати усі зазначені тут операції у системі числення з основою h, то одержане число буде також записане у системі числення з основою h.

Суть *методу множення можна* викласти так:

1. Якщо дане число менше h, то воно запишеться у системі числення з цією основою як одноцифрове.

2. Якщо дане число у системі числення з основою g має вищі розрядні одиниці, то множимо його кількість одиниць найвищого розряду на g і до одержаного добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Одержану суму множимо на g і до добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Ці операції проводимо доти, поки не додамо кількість одиниць найнижчого розряду даного числа, і на цьому процес закінчено.

3. Обчислення проводяться у новій системі числення. А тому методом множення користуються тоді, коли $g < h$, бо тоді всі цифри і основа старої системи числення є цифрами нової системи числення, або ж коли переходять від будь-якої системи числення до десяткової.

ВПРАВИ

Приклад 2.А. Число 3586_7 записати у десятковій системі числення.

Розв'язання.

Перейдемо до десяткової системи числення і скористаємося методом множення. Обчислення проводяться у десятковій системі числення.

$$
\begin{array}{l}
3 \cdot 5 + 5 = 26 \\
\qquad\qquad \underline{\times\ \ 7} \\
\qquad\qquad 182 + 8 = 190 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\times\ \ 7} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 1330 + 6 = 1336.
\end{array}
$$

Відповідь. 1336.

Приклад 2.Б. Число 2011_6 записати за основою $g = 7$.

$$
\begin{array}{l}
\times\ 2011 \\
\quad \underline{3\qquad} \\
\quad 6 + 0 = 6 \\
\qquad\quad \times\ \underline{\ \ 3} \\
\qquad\qquad 18 + 1 = 19 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \times\ \underline{\ \ 3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 57 + 1 = 58.
\end{array}
$$

Відповідь. 58.

Приклад 2.В. Число 55288 записати в вісімковій системі числення.

Розв'язання. Скористаємося способом ділення (“кутом”), де дільником буде виступати задана нова система числення, тобто число 8. Будемо шукати остачу від ділення, а одержану частку знову ділити на 8 доки одержана частка буде меншою за дільник (число 8). Одержані остачі прочитаємо у зворотньому порядку.

```
_55288  | 8
  48      _6911  | 8
  _72      64     _863  | 8
   72      _51     8     _107  | 8
    _8      48     _63    8     _13  | 8
     8      _31     56   _27     8     1
     _8      24     7     24     5
      8       7            3
      0
```

Отже, 55288 = 153770 $_8$

Відповідь. 55288 = 153770 $_8$.

Приклад 2.Г. Число 42757 записати в сімнадцятковій системі числення.

Розв'язання. Використаємо ділення "кутом", де дільником буде число 17. Як бачимо отримані остачі є числа 2, 16, 11, 8. У записі сімнадцяткової системи запишемо всі отримані остачі від ділення з кінця на перед, як показано на схемі. Двозначні остачі записують в дужках.

```
_42757  | 17
  34     _2515  | 17
  _87      17    _147  | 17
   85     _81     136    8
   _25     68      11
     17    _135
    _87     119
      85     16
       2
```

Отже, 42757 = 8(11)(16)2_{17}

Відповідь. 42757 = 8(11)(16)2_{17}

2.1. Число 548 записати в п’ятірковій системі числення

а) 4143_5 г) 3414_5

б) 1434_5 д) інша відповідь

в) 3434_5

2.2. Число 545 записати в двійковій системі числення

а) 1000010001_2 г) 1100010001_2

б) 1000110001_2 д) інша відповідь

в) 1000100001_2

2.3. Число 17283 записати в четвірковій системі числення

а) 30023001_4 г) 10032003_4

б) 10023003_4 д) інша відповідь

в) 30032001_4

2.4. Число 1398 записати в трійковій системі числення

а) 120120_3 г) 120210_3

б) 120210_3 д) інша відповідь

в) 102120_3

2.5. Число 95713 записати в сімковій системі числення

а) 230644_7 г) 446032_7

б) 446023_7 д) інша відповідь

в) 320644_7

2.6. Число 544736 записати в двійковій системі числення

а) 1101110100011100000_2 г) 11011101000111_2

б) 11100010111011_2 д) інша відповідь

в) 1101110100011111000_2

2.7. Число 25312 записати в п’ятірковій системі числення

а) 4302222_5 г) 2220231_5

б) 2222031_5 д) інша відповідь

в) 1302222_5

2.8. Число 24517 записати в вісімковій системі числення

а) 50777_5 г) 57037_5

б) 57705_5 д) інша відповідь

в) 56743_5

2.9. Число 24517 записати в шістковій системі числення

а) 324001_6 г) 140432_6

б) 234041_6 д) інша відповідь

в) 334044_6

2.10. Число 105591 записати в дев'ятковій системі числення

а) 170753_9 г) 270553_9

б) 307001_9 д) інша відповідь

в) 357071_9

2.11. Число 9466 записати в п'ятірковій системі числення

а) 133003_5 г) 313003_5

б) 300331_5 д) інша відповідь

в) 130331_5

2.12. Число 2745 записати в шістковій системі числення

а) 21431_6 г) 13402_6

б) 31402_6 д) інша відповідь

в) 20413_6

2.13. Число 13499 записати в сімковій системі числення

а) 54333_7 г) 53343_7

б) 54373_7 д) інша відповідь

в) 33245_7

2.14. Число 29154 записати в шістковій системі числення

а) 055243_6 г) 342550_6

б) 55243_6 д) інша відповідь.

в) 324550_6

2.15. Число 49915 записати в четвірковій системі числення

а) 32332003_4 г) 30223323_4

б) 30023323_4 д) інша відповідь

в) 33332003_4

2.16. Число 85675 записати в дев'ятковій системі числення

а) 464041_9 г) 140464_9

б) 104464_9 д) інша відповідь

в) 464014_9

2.17. Число 29123 записати в п’ятнадцятковій системі числення

а) 8698_{15}

б) 8968_{15}

в) $8(11)68_{15}$

г) $89(13)8_{15}$

д) інша відповідь

2.18. Число 61472 записати в одинадцятковій системі числення

а) $422(10)4_{11}$

б) 40224_{11}

в) 42204_{11}

г) $4(10)224_{11}$

д) інша відповідь

2.19. Число 22683 записати в тринадцятковій системі числення

а) $(11)24(10)_{13}$

б) $(10)14(11)_{13}$

в) $(10)42(11)_{13}$

г) $(11)34(10)_{13}$

д) інша відповідь

2.20. Число 24242 записати в двадцять першій системі числення

а) $2(12)(20)8_{21}$

б) $8(20)(12)2_{21}$

в) $82(12)(20)_{21}$

г) $(12)2(20)8_{21}$

д) інша відповідь

2.21. Число 67199 записати в дев’ятнадцятковій системі числення

а) $(18)3(14)9_{19}$

б) $9(15)2(15)_{19}$

в) $(15)7(15)8_{19}$

г) $(15)2(15)9_{19}$

д) інша відповідь

2.22. Число 52475 записати в двадцятковій системі числення

а) $(15)3(11)6_{20}$

б) $6(11)3(15)_{20}$

в) $(15)116_{20}$

г) $(15)516_{20}$

д) інша відповідь

2.23. Число 7415 записати в п’ятнадцятковій системі числення

а) $5(14)22_{15}$

б) $145(12)_{15}$

в) $15(13)4_{15}$

г) $22(14)5_{15}$

д) інша відповідь

2.24. Число 24719 записати в тринадцятковій системі числення

а) $139(11)_{13}$

б) $633(11)_{13}$

в) $(11)336_{13}$

г) $(12)336_{13}$

д) інша відповідь

2.25. Число 24111 записати в одинадцятковій системі числення

а) $1712(10)_{11}$ г) $1217(10)_{11}$

б) $(10)7121_{11}$ д) інша відповідь

в) $(10)2171_{11}$

2.26. Число 1824 записати в чотирнадцятковій системі числення

а) 494_{14} г) $9(12)4_{14}$

б) 944_{14} д) інша відповідь

в) 449_{14}

2.27. Число 17284 записати в п’ятнадцятковій системі числення

а) $4(12)15_{15}$ г) $51(12)4_{15}$

б) $13(14)9_{15}$ д) інша відповідь

в) $14(13)5_{15}$

2.28. Число 17547 записати в тринадцятковій системі числення

а) $7(12)(10)(10)_{13}$ г) $(11)(12)(11)7_{13}$

б) $(10)(10)(12)7_{13}$ д) інша відповідь

в) $7(11)(12)(10)_{13}$

2.29. Число 95435 записати в дванадцятковій системі числення

а) $(10)8234_{12}$ г) $(11)2874_{12}$

б) $(11)8274_{12}$ д) інша відповідь

в) $4728(11)_{12}$

2.30. Число 81271 записати в одинадцятковій системі числення

а) 56037_{11} г) 37065_{11}

б) 56073_{11} д) інша відповідь

в) 34065_{11}

3. Перевести число з заданої системи числення в будь-яку іншу систему числення

Приклад 3.А.

Число 50213_6 записати в десятковій системі числення.

Розв’язання.

$$\overset{4}{5}\overset{3}{0}\overset{2}{2}\overset{1}{1}\overset{0}{3}$$

$$5 \cdot 6^4 + 0 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 =$$
$$= 5 \cdot 1296 + 0 + 2 \cdot 36 + 1 \cdot 6 + 3 =$$
$$= 6480 + 0 + 72 + 6 + 3 = 6561$$

Отже, $50213_6 = 6561$.

Відповідь. $50213_6 = 6561$.

Приклад 3.Б.

Число 12243_5 записати в одинадцятковій системі числення.

Розв'язання.

$$\overset{4}{1}\overset{3}{2}\overset{2}{2}\overset{1}{4}\overset{0}{3}{}_5$$

Представимо у вигляді суми розрядних доданків

$1 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 625 + 250 + 50 + 20 + 3 = 948.$

$$\begin{array}{rrrr}
-948 & |\underline{11} & & \\
\underline{88} & -86 & |\underline{11} & \\
-68 & \underline{77} & 7 & \\
\underline{66} & 9 & & \\
2 & & &
\end{array}$$

Отже, $12243_5 = 792_{11}$

Відповідь. $12243_5 = 792_{11}$

3.1. Число 21514_6 записати в десятковій системі числення

а) 3 016 г) 5327

б) 44512 д) інша відповідь.

в) 1544

3.2. Число 75144_8 записати в десятковій системі числення

а) 1332 г) 2175

б) 3452 д) інша відповідь.

в) 31332

3.3. Число 1512_7 записати в десятковій системі числення

а) 597 г) 1597

б) 795 д) інша відповідь.

в) 1243

3.4. Число 3401_5 записати в шістковій системі числення

а) 1221_6 г) 2112_6

б) 2341_6 д) інша відповідь.

в) 4324_6

3.5. Число 26554_7 записати в п’ятірковій системі числення

а) 430212_5
б) 212034_5
в) 130212_5
г) 202034_5
д) інша відповідь.

3.6. Число 71732_8 записати в одинадцятковій системі числення

а) 21302_{11}
б) 31220_{11}
в) 20312_{11}
г) 12302_{11}
д) інша відповідь.

3.7. Число 2455_7 записати в дванадцятковій системі числення

а) $64(10)_{12}$
б) 6410_{12}
в) $64(11)_{12}$
г) $56(10)_{12}$
д) інша відповідь.

3.8. Число 44512_9 записати в тринадцятковій системі числення

а) $(10)601_{13}$
б) 13601_{13}
в) 23601_{13}
г) 10601_{13}
д) інша відповідь.

3.9. Число 71125_8 записати в дев’ятковій системі числення

а) 44131_9
б) 33131_9
в) 41131_9
г) 41341_9
д) інша відповідь.

3.10. Число 43301_5 записати в сімковій системі числення

а) 14405_7
б) 10445_7
в) 44510_7
г) 45410_7
д) інша відповідь.

3.11. Число 24133_5 записати в дев’ятковій системі числення

а) 1042_9
б) 4201_9
в) 2401_9
г) 1024_9
д) інша відповідь.

3.12. Число 35711_8 записати в п’ятірковій системі числення

а) 424201_5
б) 10244_5
в) 442010_5
г) 110244_5
д) інша відповідь.

3.13. Число 43312_5 записати в четвірковій системі числення

а) 232031_4
б) 130232_4
г) 132032_4
д) інша відповідь.

в) 31232_4

3.14. Число 22211_5 записати в трійковій системі числення

а) 2210102_3
б) 1012220_3
в) 2010122_3
г) 1210120_3
д) інша відповідь.

3.15. Число 25125_6 записати в сімковій системі числення

а) 13601_7
б) 10631_7
в) 14523_7
г) 32541_7
д) інша відповідь.

3.16. Число 13332_4 записати в п’ятірковій системі числення

а) 2242_5
б) 3243_5
в) 3423_5
г) 4020_5
д) інша відповідь.

3.17. Число 75110_8 записати в п’ятірковій системі числення

а) 4020002_5
б) 2000204_5
в) 2000402_5
г) 4002000_5
д) інша відповідь.

3.18. Число 5243_6 записати в одинадцятковій системі числення

а) 829_{11}
б) 982_{11}
в) 282_{11}
г) 928_{11}
д) інша відповідь.

3.19. Число 35422_7 записати в п’ятірковій системі числення

а) 103042_5
б) 402032_5
в) 10342_5
г) 243010_5
д) інша відповідь.

3.20. Число 42242_5 записати в одинадцятковій системі числення

а) 3123_{11}
б) 6312_{11}
в) 2136_{11}
г) 1242_{11}
д) інша відповідь.

3.21. Число 62551_7 записати в дванадцятковій системі числення

а) $8(10)91_{12}$
б) 19108_{12}
в) $19(10)8_{12}$
г) 19108_{12}
д) інша відповідь.

3.22. Число 5243_6 записати в трійковій системі числення

а) 21211_3
б) 1121200_3
в) 200112_3
г) 1200112_3
д) інша відповідь.

3.23. Число 24621_8 записати в тринадцятковій системі числення

а) 41027_{13}
г) 410127_{13}

б) 712104_{13}

в) $4(10)(12)7_{13}$

д) інша відповідь.

3.24. Число 32421_5 записати в вісімковій системі числення

а) 4274_8

б) 4327_8

в) 4372_8

г) 4727_8

д) інша відповідь.

3.25. Число 12311_4 записати в сімковій системі числення

а) 3611_7

б) 6321_7

в) 2312_7

г) 1163_7

д) інша відповідь.

3.26. Число 22131_4 записати в п’ятірковій системі числення

а) 43212_5

б) 31012_5

в) 43231_5

г) 10134_5

д) інша відповідь.

3.27. Число 42231_5 записати в одинадцятковій системі числення

а) 6721_{11}

б) 2176_{11}

в) 6217_{11}

г) 3214_{11}

д) інша відповідь.

3.28. Число 27116_8 записати в дев’ятковій системі числення

а) 13217_9

б) 13523_9

в) 13271_9

г) 17231_9

д) інша відповідь.

3.29. Число 45111_6 записати в тринадцятковій системі числення

а) $2(11)42_{13}$

б) 21142_{13}

в) 24112_{13}

г) 42143_{13}

д) інша відповідь.

3.30. Число 55512_7 записати в чотирнадцятковій системі числення

а) 5142_{14}

б) 1242_{14}

в) $5(14)2_{14}$

г) 2141_{14}

д) інша відповідь.

Приклад 4.А.

У яких системах числення справджуються рівність

$$456_x - 165_x = 261_x$$

Розв’язання. Представимо у вигляді суми розрядних доданків.

$$\overset{2}{4}\overset{1}{5}\overset{0}{6}_x - \overset{2}{1}\overset{1}{6}\overset{0}{5}_x = \overset{2}{2}\overset{1}{6}\overset{0}{1}_x$$

$$4x^2 + 5x + 6 - (1 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 5) = 2x^2 + 6x + 1.$$

Зведемо подібні доданки:

$$4x^2 + 5x + 6 - x^2 - 6x - 5 - x^2 - 6x - 1 = 0,$$

$$x^2 + 7x = 0,$$

$$x(x - 7) = 0,$$

$$x = 0 \text{ або } x = 7.$$

Значення $x = 0$ не задовольняє умову задачі. Тому, дана рівність справджується у сімковій системі числення.

Відповідь. $x = 7$.

Приклад 4.Б.

Розв'язати рівняння $x_5 \cdot 24_5 - 114_5 = 2310_5$

Розв'язання. Визначимо порядок виконання дій у рівнянні.

$$x_5 \overset{1}{\cdot} 24_5 \overset{2}{-} 114_5 = 2310_5$$

$$x_5 \cdot 24_5 = 2310_5 + 114_5.$$

$$\begin{array}{r} 2310_5 \\ +\ \underline{114_5} \\ 2424_5 \end{array}$$

$$x_5 \cdot 24_5 = 2424_5,$$

$$x_5 = 2424_5 : 24_5,$$

$$x_5 = 101_5.$$

Відповідь. $x_5 = 101_5$.

Приклад 4.В.

Обчислити значення виразу, який складений з чисел, що записані у системі числення з основою 5:

$$(2342_5 + 342_5 - 442_5) \cdot 32_5$$

Розв'зання:

1) $\begin{array}{r} 2342_5 \\ +\ \underline{342_5} \\ 3234_5 \end{array}$

При додаванні користуємося таким алгоритмом:

• 2 + 2 = 4, а 4 у п'ятірковій системі числення буде 4

• в числі 8 міститься одна "п'ятірка" і 3 одиниці

$8 = 1 \cdot 5 + 3$

• 3 + 3 = 6 і ще одна "п'ятірка", 6 + 1 = 7

$7 = 1 \cdot 5 + 2$

• тому до 2 додаємо ще 1

$2 + 1 = 3$

2) $\begin{array}{r} \_\ 3234_5 \\ \underline{442_5} \end{array}$

Будемо міркувати так:

• у п'ятірковій системі числення 4 – 2 = 2

2242_5 • у п'ятірковій системі числення від 3 відняти 4 неможна, тому з вищого розряду позичаємо одну "п'ятірку" і отримуємо: $3 + 5 = 8$, а $8 - 4 = 4$

• від залишеної одиниці не можемо відняти 4, тому знову з вищого розряду позичаємо "п'ятірку" і отримуємо: $1 + 5 = 6$, а $6 - 4 = 2$

• у цьому розряді після позичання залишається 2.

3)
$$\begin{array}{r} 2234_5 \\ \times \underline{\quad 32_5} \\ 10023 \\ + \underline{12312\ \ } \\ 133123_5 \end{array}$$

Продовжимо міркування:

• $2 \cdot 4 = 8$, $8 = 1 \cdot 5 + 3$

• $2 \cdot 3 = 6$, з нижчого розряду додамо 1: $7 = 1 \cdot 5 + 2$

• $2 \cdot 2 = 4$, $4 = 1 = 5$, $5 = 1 \cdot 5 + 0$

• аналогічно: $2 \cdot 2 = 4$, $4 = 1 = 5$, $5 = 1 \cdot 5 + 0$;

• $3 \cdot 4 = 12$, $12 = 2 \cdot 5 + 2$;

• $3 \cdot 3 = 9$, $9 + 2 = 11$, $11 = 2 \cdot 5 + 1$;

• $3 \cdot 2 = 6$, $6 + 2 = 8$, $8 = 1 \cdot 5 + 3$;

• $3 \cdot 2 = 6$, $6 + 1 = 7$, $7 = 1 \cdot 5 + 2$

• Виконавши додавання в п'ятірковій системі числення одержимо: 133123_5.

Відповідь. 133123_5.

4.1. Обчислити: $10013_5 - 4234_5 + 40432_5$;

4.2. Обчислити: $425_6 \cdot 54_6 + 43_6$;

4.3. У яких системах числення справджуються рівності

$$306_x + 124_x = 220;$$

4.4. Обчислити: $1201_3 - 201_3 + 22001_3$;

4.5. Обчислити: $(42_8 + 135_8) \cdot 44_8 - 124_8$;

4.6. Обчислити: $(1155_6 - 24_6) \cdot 12_6 + 135_6$;

4.7. Розв'язати рівняння

$$x_8 : 621_8 + 431_8 = 1252_8;$$

4.8. Обчислити: $(76_8 \cdot 64_8 - 57_8 \cdot 38_8) \cdot 44_8$;

4.9. У яких системах числення справджуються рівності

$$342_x + 44_x = 441_x;$$

4.10. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення:

$$13223_5 - 22_5 \cdot 43_5;$$

4.11. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення:

$$3245_6 \cdot 201_6 - 542_6 \cdot 201_6;$$

4.12. У яких системах числення справджується рівність

$$15_x = 12;$$

4.13. У яких системах числення справджується рівність

$$30_x : 2_x = 12_x;$$

4.14. У яких системах числення справджується рівність

$$507_x + 436_x = 1145_x;$$

4.15. У яких системах числення справджується рівність

$$102_x + 212_x = 34;$$

4.16. Обчислити: $(523_7 - 21_7 \cdot 11_7) + 3411_7$;

4.17. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення:

$$101101_2 \cdot 101_2 + 111_2 \cdot 10_2;$$

4.18. У яких системах числення справджується рівність

$$29 = 104_x;$$

4.19. Обчислити: $1002_3 \cdot (1110_3 - 121_3)$;

4.20. У яких системах числення справджується рівність

$$55_x : 13_x = 4_x;$$

4.21. У яких системах числення справджуються рівності

$$321_x + 122_x = 1103_x;$$

4.22. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення:

$$1515_8 \cdot 15_8 - 31_8;$$

4.23. Обчислити: $3421_5 - (32_5 \cdot 12_5 + 1213_5)$;

4.24. У яких системах числення справджується рівність.

$$1520_x : 12_x = 123_x;$$

4.25. При якому значенні *p* виконується рівність.

$$236_p = 1240_5;$$

4.26. У яких системах числення справджується рівність

$$626_x : 123_x = 5;$$

4.27. При якому значенні *p* виконується рівність

$$102_p + 212_p = 34;$$

4.28. Обчислити значення виразу у позиційній системі числення з основою g, якщо

$$3203_4 \cdot 43_5 - 42323_5 + 8105_9 \text{ і } g = 5;$$

4.29. У яких системах числення справджується рівність

$$752_x - 647_x = 67;$$

4.30. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення:

$$232212_4 \cdot 131_4 \cdot 2_4 + 201_4 \cdot 1323_4$$

ВІДПОВІДІ

1.2. 32. **1.4.** 8. **1.6.** 1. **1.8.** 4382.
1.10. 3750. **1.11.** 7. **1.13.** 56. **1.15.** 27.
1.17. 1325. **1.19.** 745. **1.21.** 3110. **1.22.** 15.
1.23. 154. **1.25.** 2010. **1.27.** 138. **1.28.** 11.
1.30. 303.

2.1. 4143_5. **2.4.** 1220210_3. **2.5.** 546022_7. **2.7.** 1302222_5.
2.9. 305301_6. **2.11.** 300331_5. **2.13.** 54233_7. **2.18.** 42204_{11}.
2.20. $2(12)(20)8_{21}$. **2.22.** $6(11)3(15)_{20}$. **2.24.** $(11)336_{13}$. **2.26.** 944_{14}.
2.29. $4728(11)_{12}$.

3.1. 2998. **3.4.** 2112_6. **3.7.** $64(10)_{12}$. **3.10.** 11414_7.
3.13. 232031_4. **3.14.** 2010122_3. **3.16.** 4020_5. **3.18.** 982_{11}.
3.20. 2136_{11}. **3.21.** $8(10)91_{12}$. **3.24.** 4274_8. **3.28.** 17231_9.
3.30. 5142_{14}.

4.1. 41211_5 **4.2.** 41245_6 **4.3.** 7 **4.5.** 10734_8
4.7. 472041_8 **4.9.** 5 **4.10.** 787 **4.13.** 4
4.14. 8 **4.15.** 3 **4.24.** 4003_7 **4.20.** 7
4.29. 7

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра і теорія чисел / [С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Г. І. Хацет]. – Ч. 1. – К. : Вища шк. Головне вид-во, 1974. – 464 с.
2. Бельский А. А. Деление с остатком / А. А. Бельский, Л. А. Калужнин. – К. : Выща школа, 1977. – 71 с.
3. Бородін О. І. Основні поняття сучасної алгебри : посіб. для самоосвіти вчителів / О. І. Бородін, Л. В. Потьомкін, А. К. Сліпенко. – 2-е вид., перер. – К. : Радянська школа, 1983. – 112 с.
4. Бородін О. І. Теорія чисел / О. І. Бородін. – Вид. 3-тє. – К. : Вища шк., 1970. – 275с.
5. Вивальнюк Л. М. Числові системи / Л. М. Вивальнюк, В. К. Григоренко, С. С. Левіщенко. – К. : Вища шк. Головне вид-во, 1988. – 282 с.
6. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах / А. О. Гельфонд. – М. : Наука, 1983. – 63 с.
7. Гребенча М. К. Арифметика : пособ. для учительських ин-тов / М. К. Гребенча, С. Е. Ляпин. – М. : Учпедгиз, 1952. – 280 с.
8. Задачник-практикум по математике / [Н. Я. Виленкин, Н. Н. Ларова и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 205 с.
9. Збірник задач з арифметики для педагогічних училищ / [В. А. Ігнатьев, М. І. Ігнатьєв, О. Я. Шор]. – Вид. 3-тє. – К. : Рад. шк., 1964. – 263 с.
10. Ковриженко Г. А. Системы счисления и двоичная арифметика: от счёта на пальцах до ЭВМ / Г. А. Ковриженко. – К. : Рад. шк., 1984. – 72 с.
11. Косаткин В. Н. Новое о системах счисления / В. Н. Косаткин. – К. : Выща школа, 1982. – 94 с.
12. Курс математики : навчальний посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк та ін. – К. : Вища шк. – 1995. – 392 с.
13. Кухар В. М. Математика: множини: логіка: цілі числа : практикум / В. М. Кухар, С. І. Тадіян, В. П. Тадіян. – К. : Вища шк., Головне вид-во. – 1989. – 333 с.
14. Кухар В. М. Теоретичні основи початкового курсу математики : навч. посіб. для педагог. училищ / В. М. Кухар, Б. М. Білий. – Вид. 2-ге, – К. : Вища шк., Головне вид-во. – 1987. – 319 с.
15. Лаврова Н. Н. Задачник-практикум по математике : учеб. пособие для студентов-заочн. I-III курсов фак-тов педагогики и методики начальн. обуч. педагог. ин-тов / Н. Н. Лаврова, Л. П. Стойлова. – М. : Просвещение, 1985. – 183 с.
16. Математика : навч. посібник / [Н. І. Затула, А. М. Зуб, Г. І. Коберник, А. Ф. Нещадим]. – К. : Кондор, 2006. – 560 с.
17. Математика : посібник для педінститутів / [В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, В. Н. Костарчук та ін.]. – К. : Вища шк., Головне вид-во, 1980. – 400 с.

18. Математика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. № 2121 “Педагогика и методика начального обучения” / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало и др. – М. : Просвещение, 1977. – 352 с.
19. Пономарёв С. А. Задачник-практикум по арифметике : пособие для фак-та начальных классов педагог. ин-тов / С. А. Пономарёв. – Изд. 2-е., доп. – М. : Просвещение, 1966. – 223 с.
20. Сборник задач по математике : пособие для педагог. училищ / А. М. Пышкало, Л. П. Стойлова и др. – М. : Просвещение, 1979. – 208 с.
21. Стойлова Л. П. Основи начального курса математики : учеб. пособие для учащихся педагог. училищ по специальности № 2001 "Преподавание в начальных классах общеобразоват. шк." / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1988. – 320 с.
22. Теоретические основы начального курса математики : учеб. пособие для учащихся школьных отделений педагог. училищ / А. М. Пышкало, Л. П. Стойлова др. – М. : Просвещение, 1974. – 368 с.
23. Феферман С. Числовые системы: основания алгебры и анализа / С. Феферман : [пер. с анг. А. А. Мальцева]. – М. : Наука, 1971. – 440 с.
24. Фомин С. В. Системы счисления / С. В. Фомин. – 4-е изд. – М. : Наука, 1980. – 47 с.