Кількісна теорія цілих невід'ємних чисел.

Лекція .

1. Поняття про натуральні, цілі невід'ємні числа і нуль.

2. Два підходи до побудови теорії цілих невід'ємних чисел

1. Всі скінченні непорожні множини розбиваються на підмножини, які називаються *класами еквівалентних множин*, причому будь-які дві множини одного класу є еквівалентними, а різних класів – не еквівалентними. Між множиною всіх класів множин і множиною всіх натуральних чисел встановлено взаємно однозначну відповідність.

Довільні множини A і B називаються *рівнопотужними*, якщо вони порожні, або існує бієктивне відображення множини A на множину B, яке позначається $A \sim B$ і читається "множина A рівнопотужна множині B" ("множини A і B рівнопотужні").

Натуральним числом називається клас рівнопотужних скінченних непорожніх множин.

Оскільки кожний клас еквівалентних множин визначається будь-якою множиною класу, то натуральне число визначається будь-якою множиною даного класу. Число, що визначає деяка множина M, називається *потужністю множини M* і позначається $n(M)$ або $|M|$.

Натуральному числу можна дати і таке означення: *натуральним числом* називається потужність скінченної непорожньої множини.

Доповнивши будь-яку скінченну множину M новим елементом, дістанемо нову множину, не еквівалентну даній множині. Продовживши цей процес далі, отримаємо нескінченну послідовність попарно не еквівалентних множин і відповідний їй ряд натуральних чисел 1, 2, 3, ... n, ...

Число "нуль" з теоретико-множинної точки зору відповідає порожній множині: $n(\varnothing) = 0$.

Під натуральним числом будемо розуміти спільну властивість рівнопотужних скінченних непорожніх множин, яка не залежить ні від природи елементів цих множин, ні від порядку елементів у них. Ця властивість є чисельністю або кількістю елементів скінченної непорожньої множини.

Натуральні числа, які є потужностями скінченних непорожніх множин *A, B, C, ...* позначають відповідно малими буквами латинського алфавіту *a, b, c,...* . Це записують так $a = |A|$, $b = |B|$, $c = |C|$, ... і читають, наприклад, $a = |A|$: "число *a* є потужністю множини *A*".

Потужність одиничної множини називається *одиницею* і позначається 1. Отже, $1 = |E|$, де *E* – одинична множина.

Всі натуральні числа становлять множину натуральних чисел, яку в математиці позначають буквою *N*.

Потужність порожньої множини називається *нулем* і позначається 0. Отже, $0 := |\varnothing|$.

Множина, елементами якої є всі натуральні числа і число нуль (утворена приєднанням до множини N натуральних чисел числа "нуль"), називається *множиною цілих невід'ємних чисел* і позначається *No,* а її елементи – *цілими невід'ємними числами.* Таким чином,

$$No := N \cup \{0\}.$$

Отже, *цілим невід'ємним числом* називається потужність скінченної множини.

Відносно будь-яких двох нерівних чисел множини цілих невід'ємних чисел вважають, що менше число передує більшому, а більше слідує за меншим. Оскільки порожня множина є підмножиною кожної множини, то число нуль, що їй відповідає, є число, яке менше від будь-якого натурального числа.

Множина цілих невід'ємних чисел утворює зростаючу послідовність 0, 1, 2, 3, ... , … обмежену зліва нулем, тобто вона має початок. У цій послідовності кожне наступне число більше за попереднє. Справа така множина є необмежена, тому вона є *нескінченною*.

У множині натуральних чисел не існує найбільшого числа, бо яке б не взяти натуральне число n, безпосередньо за ним йде наступне натуральне число виду $n' = n + 1$, яке є кількісною характеристикою множини M', утвореної з множини M приєднанням до неї ще одного елемента.

Множина No цілих невід'ємних чисел має єдине найменше число. За кожним числом у множині No безпосередньо йде єдине число і кожне ціле невід'ємне число, крім нуля, безпосередньо йде не більше, ніж за одним цілим невід'ємним числом. Для жодної пари чисел n і n' не можна вказати ніякого третього числа x такого, що $n < x < n'$. Цю властивість називають *дискретністю* послідовності цілих невід'ємних чисел.

Наочно цю властивість можна проілюструвати за допомогою числового променя, початку якого відповідає число нуль, і при вибраній одиниці масштабу кожному натуральному числу відповідає єдина точка променя.

Цілі невід'ємні числа a і b називаються рівними ($a = b$), якщо множини, для яких ці числа є потужностями, рівнопотужні, і нерівними ($a \neq b$), якщо відповідні їм множини нерівнопотужні.

Теорема. Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням еквівалентності.

У шкільному курсі математики поняття натурального числа розглядається як спільна властивість класу скінченних рівнопотужних непорожніх множин, а нуль – як потужність порожньої множини. Коли учні вивчають число "один", для прикладу на сторінках підручника даються зображення одного яблука, одного кружечка тощо; коли вивчають число "два", даються зображення різних сукупностей, які містять два елементи: два круги, два кубики і т. д. Це повторюється при вивченні всіх чисел першого десятка, і кількість елементів у сукупностях встановлюється за допомогою лічби.

2. Поняття про натуральне число розвивалося у двох напрямках. Один напрямок — через безпосереднє встановлення взаємно однозначної відповідності між скінченними множинами. Він привів до поняття натурального числа як кількісної характеристики певного класу скінченних еквівалентних множин. При цьому натуральне число називають *кількісним* або *кардинальним.* Так, число «п'ять»є кількісною характеристикою всіх множин, еквівалентних множині пальців однієї руки. Число «нуль» є кількісною характеристикою порожньої множини — множини, що не містить жодного елемента.

Оскільки кожному класу еквівалентних скінченних множин відповідає одне і тільки одне натуральне число і навпаки, кожному натуральному числу відповідає один і тільки один клас еквівалентних скінченних множин, то множина всіх натуральних чисел еквівалентна множині всіх класів еквівалентних скінченних множин.

Другий напрямок розвитку поняття натурального числа пов'язано з визначенням за допомогою натурального числа місця знаходження елементів будь-якої зчисленної впорядкованої множини. Він привів до поняття *порядкового натурального числа,* або до *ординального числа*.

Відповідно до двох функцій натурального числа існує теоретико-множинна, або кількісна, теорія натурального числа і порядкова, або аксіоматична, теорія.

Обидві функції поняття натурального числа тісно пов'язані між собою. Справді, рахуючи елементи даної множини *M,* говоримо; «перший», «другий» І т. д. Якщо при цьому вичерпані всі елементи множини *M,* то процес лічби закінчується і останнє назване порядкове натуральне число *m* вказує на кількісну характеристику даної множини — число ЇЇ елементів. Як бачимо, для встановлення числа елементів даної множини *M* була використана множина 1, *2*, ..., яка е відрізком натурального ряду.

Означення1. Відрізком N_m натурального ряду називається множина всіх послідовних натуральних чисел, які не перевищують натурального числа т.

Поняття відрізка натурального ряду дає змогу уточнити поняття лічби елементів даної множини. Оскільки в процесі підрахунку елементів множини *М* кожному її елементу ставиться у відповідність єдине число з відрізка N_m, то природне таке означення.

Означення 2. Лічбою елементів множини *М* називається встановлення взаємно однозначної відповідності між множиною *М* і відрізком N_m натурального ряду.

Число *т* називають *числом елементів* у множині *М* і пишуть: *п (М) = т.* Число *т* є кількісним натуральним числом.

Таким чином, під час лічби елементи скінченної множини *М* не тільки розміщуються в певному порядку (при цьому використовуються порядкові натуральні числа, що виражаються числівниками «перший», «другий» і т. д.}, а й встановлюється також, скільки елементів має множина *М* (при цьому використовуються кількісні натуральні числа, що виражаються числівниками «один», «два» і т. д.).

Порядкове число вказує на місце, яке займає предмет під час лічби, і відповідає на запитання: «Яким по порядку е даний предмет?» Кількісне натуральне число відповідає на запитання: «Скільки елементів має дана множина?»

Лекція 2.

1. Відношення рівності, відношення «менше» та їх властивості.

2.Додавання та їх властивості.

3. Віднімання та їх властивості.

4. Множення та їх властивості.

5. Ділення та їх властивості.

1. Нехай A і B – дві скінченні множини, а $n(A) = a$ і $n(B) = b$ – відповідні їм натуральні числа. Множини A і B можуть бути як еквівалентними ($A \sim B$), так і не еквівалентними ($\overline{A \sim B}$). Якщо $A \sim B$, то вони належать одному й тому ж класу, і тому відповідні їм числа **рівні,** тобто $a = b$. Отже, $(a = b) \Leftrightarrow (A \sim B)$, де $a = n(A)$, $b = n(B)$.

Означення. Якщо множина A еквівалентна власній підмножині множини B, то число a менше від числа b $(a < b)$. Отже,

$$(a < b) \Leftrightarrow (A \sim B_1 \wedge B_1 \subset B \wedge B_1 \neq B \wedge B_1 \neq \varnothing).$$

Розглянемо скінченні множини A і B, які можуть бути еквівалентними, або не еквівалентними. Для будь-яких натуральних чисел a і b, які належать цим множинам завжди виконується одне із співвідношень: $a = b$, або $a \neq b$.

Для будь-яких цілих невід'ємних чисел a і b число a, яке є потужністю множини A, називається *меншим* за число b, що є потужністю множини B (позначається $a < b$), якщо у множині B знайдеться відмінна від неї підмножина B_1 рівнопотужна множині A.

Відношення "менше" на множині цілих невід'ємних чисел має наступні **властивості**:

- Відношення "менше" на множині цілих невід'ємних чисел транзитивне:

$$\forall\ a, b \in N_0 :\ (a < b)\ \wedge\ (b < c) \Rightarrow (a < c).$$

- Відношення "менше" на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням строгого лінійного порядку, а сама множина N_0 з цим відношенням є строго лінійно впорядкованою множиною.

- Відношення, обернене до відношення “менше” на множині цілих невід’ємних чисел, називається відношенням *“більше”* (позначається “ > “):

$$\forall\ a, b \in N_0 : a > b : \Leftrightarrow\ b < a.$$

- Відношення “менше” і “більше” – взаємно обернені і мають однакові властивості.
- Відношення *“менше або рівне”* (позначається “$\leq$”) можна розглядати як об’єднання відношень “менше” і “рівне”:

$$\forall\ a, b \in N_0\ : (a \leq b)\ : \Leftrightarrow\ (a = b) \vee (a\ < b).$$

- Відношення *“більше або рівне”* (позначається “>”) можна розглядати і як об’єднання відношень “більше” і “рівне”, і як обернене до відношення “менше або рівне”:

$$\forall\ a, b \in N_0\ : (a \geq b)\ : \Leftrightarrow\ (a = b) \vee (a\ > b).$$

- Відношення “менше або рівне” і “більше або рівне” на множині цілих невід’ємних чисел є відношеннями нестрогого лінійного порядку.

2. Серед вивчених операцій над множинами (об’єднання, переріз, різниця) найпростішою є об’єднання скінчених множин, які не мають спільних елементів. Операція додавання цілих невід’ємних чисел пов’язана з об’єднанням множин.

Сумою цілих невід’ємних чисел a і b (позначається $a + b$), що є кількісною характеристикою множин A і B, називається число елементів цих множин, якщо вони не мають спільних елементів.

$$\forall\ a, b \in N_0 : a + b = n\,(A \cup B),\ \text{де}\ A \cap B = \varnothing,\ n\,(A) = a\ \text{і}\ n\,(B) = b.$$

Операція на множині цілих невід’ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх сума $a + b$, називається *додаванням цілих невід’ємних чисел.* Компоненти додавання називаються *доданками*, а результат – *сумою.*

На основі властивостей операції об’єднання множин можна сформулювати наступні **властивості**.

► Сума довільних двох цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом. Така сума завжди існує і визначена однозначно.

► За властивостями скінчених множин об'єднання двох скінчених множин є скінченною множиною, а тому сума довільних двох цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом.

► Оскільки об'єднання множин завжди існує і визначається однозначно, то й сума двох довільних цілих невід'ємних чисел завжди існує і визначається однозначно.

► Сума довільного цілого невід'ємного і натурального чисел є натуральним числом.

► При додаванні виконується така властивість для нуля:

$$\forall a \in N_0 : a + 0 = 0 + a = a.$$

На основі означення додавання і властивостей операції об'єднання множин сформульовані властивості додавання.

Операція додавання цілих невід'ємних чисел:

- комутативна: $\forall\ a, b \in N_0 : a + b = a + b$;
- асоціативна: $\forall\ a, b, c \in N_0 : (a + b) + c = a + (b + c)$;
- монотонна відносно відношення рівності:

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$$

Якщо до обох частин рівності цілих невід'ємних чисел додати одне й те саме ціле невід'ємне число, то рівність не порушиться.

Теорема. Для додавання цілих невід'ємних чисел мають місце правила скорочення:

- відносно відношення рівності

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : a + c = b + c \Leftrightarrow a = b .$$

- відносно відношення "менше" порядку

$$\forall\ a, b, c \in N_0 : a + c < b + c \Leftrightarrow a < b.$$

Поняття суми двох цілих невід'ємних чисел можна розповсюдити на довільну скінченну сукупність чисел.

Сумою довільних цілих невід'ємних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ (позначається $a_1 + a_2 + ... + a_n$ або $\sum_{i=1}^{n} a_i$) називається кількісна характеристика об'єднання множин A_1 A_2, ..., A_n, які попарно не перетинаються і які мають своїми кількісними характеристиками відповідно числа $a_1, a_2, ..., a_n$.

3. Операція віднімання цілих невід'ємних чисел у кількісній теорії цілих невід'ємних чисел пов'язана з доповненням підмножини до множини, тобто з відніманням множин.

Різницею цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a - b$) називається число елементів у доповненні множини B до множини A, тобто $a - b = n\ (A \setminus B)$.

$$\forall\ a, b \in N_0 : a - b = n\ (A \setminus B),\ \text{де}\ a = n\ (A),\ b = n\ (B),\ B \subset A.$$

Знаходження за даними двома числами a і b їхньої різниці $a - b$ називається *відніманням* і позначається $a - b = c$. Число a називається *зменшуваним*, b – *від'ємником.*

Різницею цілих невід'ємних чисел a і b називається таке число c, сума якого з числом b дорівнює a:

$$b - c = a.$$

Обидва означення різниці цілих невід'ємних чисел рівносильні:

$$(a - b = c\ ) \Leftrightarrow (a = b + c).$$

На основі даного значення встановлено, що дія віднімання є оберненою до дії додавання: дія, яка полягає в знаходженні невідомого доданка за відомою сумою і другим доданком:

$$(x + b = \text{a}) \Rightarrow (x = a - b).$$

Теорема. Для будь-яких цілих невід'ємних чисел a і b таких що $a \geq b$

існує єдине число c таке, що є різницею чисел a і b. Якщо різниця цілих невід'ємних чисел існує, то вона єдина.

З теореми одержуємо наслідок.

Наслідок.

$$\forall\ a \in N_0 : a - 0 = a;$$

$$\forall\ a \in N_0 : a - a = 0.$$

► Основна властивість різниці: якщо зменшуване і від'ємник одночасно збільшити або зменшити па одне й те саме число, то різниця не зміниться: $(a - b = c) \Leftrightarrow ((a + k) - (a + k) = c)$.

4. Дію знаходження суми рівних між собою доданків називають *множенням,* а результат множення – *добутком.*

Означення. Суму n доданків ($n > 1$), кожний з яких є цілим невід'ємне число m, називають *добутком* m на натуральне число n і позначають mn.

Означення добутку пов'язано з об'єднанням скінчених еквівалентних між собою множин:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$n(S) = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n} = mn \Leftrightarrow n(S) = nm.$$

Дію, за допомогою якої знаходять добуток двох чисел n і m називають *множенням*; числа, які перемножують – *множниками*, число m називають *множеним,* а число n – *множником,* вираз mn називають *добутком*, або результатом множення.

Наслідки:

- властивість нуля при множенні:

$\forall\ a \in N_0 : a \cdot 0 = 0 \cdot a;$

- властивість одиниці при множенні:

$\forall\ a \in N_0 : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$

Наслідок. Добуток двох довільних натуральних чисел є натуральним числом.

Теорема. Операція множення цілих невід'ємних чисел:

1) комутативна: $\forall\ a, b \in N_0 : a \cdot b = b \cdot a$;

2) асоціативна: $\forall\ a, b, c \in N_0 : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

3) дистрибутивна відносно додавання:

$\forall\ a, b, c \in N_0 : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

З комутативного й асоціативного законів множення випливають такі **наслідки**:

1. Щоб помножити добуток на число або навпаки число на добуток, досить помножити на це число один із множників і результат помножити на інший множник і т. д.

$$(abc)\, d = (a\, d)\, bc = (b\, d)\, ac = \ldots$$

2. Щоб помножити добуток на добуток, досить один з множників першого добутку помножити на будь-який множник другого добутку, знайдений результат помножити на інший множник з добутку і т. д.

3. Якщо один з множників збільшити (зменшити) в кілька разів, то й добуток відповідно збільшиться (зменшиться) в стільки ж разів, тобто

$$(ab = c) \Leftrightarrow ((am)\, b = cm).$$

Теорема. Обидві частини рівності або нерівності цілих невід'ємних чисел можна помножити на одне й те саме натуральне число після чого знак рівності, або нерівності не зміниться.

Доведення.

Справді, якщо $a = b$, то за законом існування і єдиності добутку ac і bc дістаємо $ac = bc$.

Якщо $a < b$, то за означенням "менше" $a + k = b$. Тоді $ac + kc = bc$. Звідси $ac < bc$.

За законом монотонності множення та властивостей відношень " = " і " < ", " > " випливає такий **наслідок**:

Наслідок.

На множині цілих невід'ємних чисел рівності та нерівності однакового смислу можна почленно перемножати, тобто, якщо

а) $a = b$ і $c = d$, то $ac = bd$;

б) $a < b$ і $c < d$, то $ac < bd$.

Теорема. Обидві частини рівності або нерівності цілих невід'ємних чисел можна поділити на одне й те саме натуральне число після чого знак рівності, або нерівності не зміниться.

$\forall\ a, b, c \in N_0 :\ a \cdot c = b \cdot c,\ \wedge\ c \neq 0\ \Rightarrow\ a = b.$

$\forall\ a, b, c \in N_0 : a \cdot c < b \cdot c,\ \wedge\ c \neq 0\ \Rightarrow\ a < b.$

Поняття добутку двох цілих невід'ємних чисел можна розповсюдити на довільну скінченну сукупність чисел.

Добутком довільних цілих невід'ємних чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ (позначається $a_1 a_2 \ldots a_n$ або $\prod_{i=1}^{n} a_i$) називається кількісна характеристика декартового добутку множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, кількісними характеристиками яких є відповідно числа $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Означення. Добуток n множників, де $n > 1$, кожен з яких дорівнює a, називається n-м степенем числа a (позначається a^n).

Знаходженя n-го степеня числа a називається *піднесенням до степеня*: a називається основою, n – показником степеня.

Означення. Число a в першому степені дорівнює самому числу a.

З означення степеня та властивостей дії множення випливають такі **властивості:**

► При множенні з однаковими основами степені додаються (адитивність показників степенів при однаковій основі)

$$a^{n} \cdot a^{k} = a^{n+k}.$$

► При піднесенні до степеня добутку до степеня підноситься кожен з множників (дистрибутивність піднесення до степеня відносно множення)

$$(a - b)^{n} = a^{n} \cdot b^{n}.$$

► При піднесенні степеня до степеня степені перемножуються (мультиплікативність показників при піднесенні степеня до степеня) $(a^{n})^{k} = a^{nk}$.

► Властивість монотонності (якщо $a > 1$ і $n > k$, то $a^{n} > a^{k}$).

► Для випадку, коли основою є нуль за означенням степеня отримаємо: $0^{n} = 0 \cdot 0 \cdot ... \cdot 0 = 0$. Отже, будь-яке натуральне число в нульовому степені дорівнює одиниці: $a^{0} = 1$.

5. Операція ділення цілих невід'ємних чисел у кількісній теорії пов'язана з розбиттям множини на класи. Для цього розглядаються задачі такого виду:

1) визначити кількість підмножин, які не містять спільних елементів, еквівалентних підмножині *B* множини *A*, що є у множині *A* (задача *ділення на вміщення*);

2) множину *A* розбити на певне число еквівалентних між собою підмножин і визначити чисельність них підмножин (задача *ділення на частини*).

Ділення є дія, обернена до множення. Внаслідок її виконання знаходять частку чисел *a* і *b*.

Означення. Розділити ціле невід'ємне число *a* на натуральне число *b* означає знайти таке число c, що $a = b \cdot c$. Число a називається *діленим*, b – *дільником*, c – *часткою* ($c = a : b$).

$$\forall\ a \in N_0\ \forall\ b \in N:\ a : b = c \Leftrightarrow\ b \cdot c = a.$$

На основі означення дії ділення та властивостей множення можна встановити такі **властивості ділення**:

► Ділення, як і віднімання, неасоціативне.

► Якщо $a < b$ *і* $a \vdots b$, то $a = 0$.

Припустимо, що $a \neq 0$, тоді $0 < a < b$, тобто a не знаходиться серед кратних числа b. Це суперечить означенню відношення
$a \vdots b$.

► Ділення комутативне лише у випадку $a = b$.

► Якщо $c > 0$, то $ac = b\,c \Rightarrow a = b$.

За означенням ділення $ac : c = a$ і $bc : c = b$ ($ac = bc$). Тому з теореми про єдиність частки випливає, що $a = b$.

► Якщо $c > 0$, то $a : b = ac : bc$, тобто частка не зміниться, якщо дільник і ділене помножити або розділити на одне й те саме натуральне число.
Нехай $ac : b\,c = x$, тоді $ac = bcx$. Звідси $a = bx \Rightarrow a : b = x$.

► Ділення на добуток можна виконати послідовним діленням на окремі множники $a : b\,d = (a : b) : d$.

► Ділення добутку на число можна виконати, поділивши на це число, якщо можливо, один із множників, і результат помножити на другий множник: $a\,b : c = (a : c)\,b = (b : c)\,a$.

► Ділення частки на число: $a : b : c = a : c : b = a : bc$.

► Ділення частки па частку виконують так:

$$a : (b : c) = (a : b)\,c.$$

За означенням ділення:

$$((a : b) \cdot c)\,(b : c) = (a : b)\,((b : c) \cdot c) = (a : b) \cdot b = a.$$

► Розподільна властивість ділення відносно суми:

$(a + b) : c = a : c + b : c$, якщо ділення можливе.

► Розподільна властивість ділення відносно різниці:

$(a – b) : c = a : c – b : c$, якщо ділення можливе.

Операція у множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b, де $b \neq 0$, ставиться у відповідність їх частка $a : b$, називається *діленням цілих невід'ємних чисел.* При діленні перша компонента називається *діленим,* друга – *дільником,* а результат – *часткою.*

Операція ділення на основі другого означення частки є оберненою до операції множення, при якій за добутком двох чисел і одним із множників визначається другий множник. Безпосередньо з другого означення частки одержуємо такі **наслідки**.

Властивість нуля при діленні:

$$\forall a \in N: \ 0 : a = 0.$$

Властивість одиниці при діленні:

$$\forall a \in N_0: \ a : 1 = a.$$

$$\forall a \in N: \ a : a = 1.$$

Системи числення.

Лекція

1. Ділення з остачею.

2. Поняття про позиційні і непозиційні системи числення.

3. Запис цілого невід'ємного числа в позиційній системі числення.

4. Правила переходу від однієї позиційної системи числення до іншої.

5. Арифметичні дії над числами в позиційних системах числення.

1. Деяке ціле число a може бути чи не бути кратним натуральному числу

b (ділитися на число). Якщо a кратне b, то $a = bq$. Якщо a не кратне b, то це означає, що при діленні a на b з'являється відмінна від нуля і менша від дільника остача, тобто $a = bq + r$, де $0 < r < b$.

Наприклад, 15 : 4. Маємо 15 : 4 = 3 (остача 3), або $15 = 3 \cdot 4 + 3$.

Означення 13. Говорять, що ціле невід'ємне число a *ділиться* на натуральне число b з остачею, якщо існують такі цілі невід'ємні числа q і r, що $a = bq + r$, де $0 \leq r < b$.

Існування та єдиність неповної частки (q) і остачі (r) встановлюється такою теоремою.

Теорема. Для будь-яких цілого невід'ємного числа a і натурального числа b існує і причому єдина пара цілих невід'ємних чисел q і r таких, що $a = bq + r$, де $0 \leq r < b$.

Теорему про ділення з остачею застосовують в арифметиці і в багатьох інших розділах математики. На ній ґрунтується подання натуральних чисел системними числами, перехід від однієї позиційної системи числення до іншої, алгоритм Евкліда, а також техніка ділення натуральних чисел «кутом».

2. Діяльність людини сприяла появі все нових і нових чисел, які потрібно було не тільки називати і записувати, але й виконувати над ними різні операції. За тривалий період розвитку у різних народів були створені різні системи найменування і позначення чисел.

Системою числення називається сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле неід'ємне число.

Перед кожною системою числення ставляться такі три вимоги:

1) будь-яке ціле невід'ємне число однозначно записується у даній системі числення;

2) числа легко порівнювати на основі їх запису;

3) алгоритми виконання арифметичних операцій над числами, записаними у даній системі числення, порівняно прості.

Для деяких цілих невід’ємних чисел є індивідуальні спеціальні знаки для їх позначення і запису. Ці знаки називаються *цифрами,* а самі числа, що позначаються цими знаками, називаються *вузловими,* усі інші числа записуються за допомогою арифметичних операцій над вузловими числами і називаються *алгоритмічними.*

Системи числення поділяються на *позиційні* і *непозиційні.* У непозиційних системах числення значення цифри не залежить від того, яке місце (позицію) вона займає у запису числа. З непозиційних систем числення на даний час найбільш відомою є римська, якою іноді користуються і нині. Основні її цифри – I, V, X, L, C, D, M, якими зображаються відповідно вузлові числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Інші числа можна одержати у результаті додавання і віднімання вузлових чисел за певними правилами.

У позиційних системах числення, на відміну від непозиційних, числове значення кожної цифри змінюється зі зміною її положення (позиції) у запису числа, що значно полегшує його запис, а також порівняння чисел і виконання арифметичних операцій над ними. Тому позиційні системи числення набули широкого вжитку. У них використовується розрядний принцип запису чисел: число g одиниць одного розряду становить одну одиницю наступного вищого розряду. Інакше кажучи число g, яке називається *основою системи числення,* вказує на те, що при зміні положення цифри у запису числа на одну одиницю вліво (вправо) числове значення її збільшується (зменшується) у g разів. За основу системи числення може бути вибране довільне натуральне число $g > 1$. Для запису чисел у позиційній системі числення з основою g потрібно g цифр, кожна з яких позначає одне з цілих невід'ємних чисел від 0 до $g - 1$, які називаються *одноцифровими числами.* Зокрема, при $g = 10$ одержуємо позиційну систему числення, яка називається *десятковою.*

3. Десяткова система числення є одним із видів позиційних систем числення. Широке впровадження її у практику обумовлено наявністю у людини найпростішого лічильного пристрою – 10 пальців рук. Вивчення десяткової системи числення – одне з основних завдань курсу математики сучасної школи.

У десятковій системі числення для запису перших десяти цілих невід'ємних чисел використовуються десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Десятковим записом натурального числа a називається подання його у вигляді

$a = a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$, (1)

де $a_0, a_1, ..., a_n$ – цифри десяткової системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a = a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$ коротко записується $\overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0}$.

Числа $1 = 10^0, 10^1, 10^2, ..., 10^n$, тобто 1, 10, 100, ..., $1\underbrace{00...0}_{n\ нулів}$

(у числі n нулів) називаються розрядними одиницями відповідно першого, другого, ..., (n + 1) – розрядів, причому 10 одиниць одного розряду становлять одну одиницю наступного вищого розряду.

У запису (1) доданки a_0, $a_1\, 10^1$, $a_2\, 10^2$,…, $a_{n-1}\, 10^{n-1}$, $a_n\, 10^n$ називають *розрядними доданками.*

Десятковий запис числа показує, скільки одиниць найнижчого розряду є у числі і як вони розподілені як одиниці вищих розрядів.

У шкільному, зокрема, початковому курсі математики під десятковим записом часто розуміють суму його розрядних доданків, тобто, коли у запису

$$a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + ... + a_1\, 10^1 + a_0$$

операції множення і піднесення до степеня замінити їх результатами.

Наприклад.

$43075 = 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 5 = 40000 + 3000 + 70+5.$

Для читання числа його розряди, починаючи з найнижчого, діляться на *класи* по три розряди у кожному, причому останній клас може включати і менше розрядів. Перший розряд (найнижчий) кожного з класів називається *розрядом одиниць*, другий – *розрядом десятків,* третій – *розрядом сотень* відповідного класу.

Перший клас (найнижчий) називається *класом одиниць,* другий – *класом тисяч,* третій – *класом мільйонів,* четвертий – *класом мільярдів,* п’ятий – *класом трильйонів* і т. д.

Позиційні системи числення з довільною основою
та запис чисел у них

У практичній діяльності люди користувалися різними системами числення, особливо позиційними, бо, як уже зазначалося, вони дають можливість досить просто записувати, порівнювати і виконувати над числами арифметичні операції. Поділ року на 12 місяців, години на 60 хв. підтверджують існування позиційних систем числення з різними основами. З часом найбільш вживаною серед них виявилася десяткова система.

Для запису чисел у різних позиційних системах числення користуються цифрами десяткової системи числення. Наприклад, цифрами системи числення з основою $g = 2$ є 0 і 1, а при $g = 5$ числа 0, 1, 2, 3 і 4. Якщо ж основа системи числення $g > 10$, то її цифри як багатоцифрові числа десяткової системи числення беруться в дужки.

Наприклад, якщо основа системи числення $g = 12$, то цифрами її будуть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (10), (11).

З розвитком обчислювальної техніки для зображення чисел потрібно було використовувати якнайменше стійких станів, а для цього потрібна система числення з малою кількістю цифр. Такою системою є двійкова система, якою найчастіше користуються при роботі на сучасних ЕОМ.

Записом натурального числа у позиційній системі числення з основою $g \geq 2$ називається подання його у вигляді

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + ... + a_1 \cdot g + a_0,$$

де $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ – цифри системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + ... + a_1 \cdot g + a_0$ коротко записується $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}_g$.

Числа $1 = g^0, g^1, g^2, ..., g^{n-1}, g^n$ називаються *розрядними одиницями*, а доданки

$a_1 \cdot g^1, a_2 \cdot g^2, ..., a_{n-1} \cdot g^{n-1}, a_n \cdot g^n$ – *розрядними доданками.*

При читанні числа, записаного у позиційній системі числення з основою g, послідовно називають цифри числа, починаючи з найвищого розряду, і основу системи числення. Наприклад, число 25064_8 читається: “два п’ять нуль шість чотири у системі числення з основою вісім”.

Запис числа у позиційній системі числення з основою g показує, скільки одиниць найнижчого розряду містить дане число і як вони розподілені у числі як одиниці вищих розрядів.

Порівняння цілих невід’ємних чисел і алгоритми виконання арифметичних операцій над ними у різних позиційних системах числення здійснюються так само, як і у десятковій системі числення, при цьому тільки потрібно враховувати основу системи числення і пам’ятати, що g одиниць нижчого розряду дорівнюють одній одиниці наступного вищого розряду, і, навпаки, одна одиниця вищого розряду дорівнює g одиницям сусіднього нижчого розряду.

Зручність двійкової системи числення полягає не тільки у тому, що у ній запис чисел здійснюється за допомогою лише двох цифр, а й у тому, що все це може бути просто реалізовано в електронних пристроях.

Перехід від запису чисел в одній позиційній системі числення до запису в іншій

Одне й те ж число може бути записане у різних позиційних системах числення. Часто потрібно, знаючи запис числа у системі числення з основою g, записати його у системі числення з основою h. Способи переходу від однієї системи числення до іншої ґрунтуються на тому, що у кожному числі всіх одиниць найнижчого розряду у будь-якій системі числення – однакова кількість, тільки як одиниці вищих розрядів у них вони розподілені по-різному. Найбільш вживані два способи переходу – ділення і множення. Розглянемо їх.

Нехай натуральне число $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_g$ записано у системі числення з основою g і потрібно записати його у системі числення з основою h. За теоремою такий запис існує і єдиний. Отже,

$$a = b_k \cdot h^k + b_{k-1} \cdot h^{k-1} + \dots + b_1 \cdot h + h_0, \qquad (1)$$

де $b_k, b_{k-1}, \dots, b_1, b_0$ – цифри позиційної системи числення з основою h.

Скориставшись законами операцій додавання і множення цілих невід'ємних чисел, рівність (1) можна записати

$$a = (b_k \cdot h^{k-1} + b_{k-1} \cdot h^{k-2} + \dots + b_2 \cdot h + b_l) \cdot h + b_0,\ b_0 < h. \qquad (2)$$

Позначимо

$$q_0 = b_k \cdot h^{k-1} + b_{k-1} \cdot h^{k-2} + \dots + b_2 \cdot h + b_l.$$

Тоді рівність (2) запишеться

$$a = h \cdot q_0 + b_0,\ b_0 < h,\ q_0 < a. \qquad (3)$$

Відношення (3) показують, що b_0 є остачею, а q_0 – неповною часткою при діленні a на h з остачею.

Застосуємо до числа q_0 ті ж міркування, що й до числа a, і будемо мати

$$q_0 = (b_k \cdot h^{k-2} + b_{k-1} \cdot h^{k-3} + \dots + b_3 \cdot h + b_2) \cdot h + b_l,\ b_l < h. \qquad (4)$$

Якщо ввести позначення

$$q_1 = b_k \cdot h^{k-2} + b_{k-1} \cdot h^{k-3} + \dots + b_3 \cdot h + b_2,$$

то відношення (4) запишуться

$$q_0 = h \cdot q_1 + b_l,\quad b_l < h_1,\quad q_1 < q_0. \qquad (5)$$

Відношення (5) показують, що числа q_1 і b_l є відповідно неповною часткою і остачею при діленні числа q_0 на h з остачею.

Такі міркування проводяться, поки на кроці з номером $k-1$ не одержимо $q_{k-1} < h$, і будемо мати $b_k = q_{k-1}$.

Отже, можемо визначити всі цифри запису числа a у системі числення з основою h.

Таким чином, ***метод ділення*** виконується за такою схемою.

1. Якщо дане число менше від основи h нової системи числення, то воно запишеться у ній як одноцифрове число.

2. Якщо число не менше від основи h нової системи числення, то воно у цій системі містить і одиниці вищих розрядів. Щоб знайти їх кількість, потрібно поділити дане число на h. Частка від ділення вказує, скільки одиниць другого розряду є у числі, а остача – скільки одиниць першого розряду. Якщо одержана частка не менша від h, то дане число містить одиниці ще вищого третього розряду. Щоб знайти їх кількість, слід одержану частку поділити на h. Цей процес продовжується, поки не одержимо частку, яка менша від h. Вона буде вказувати кількість одиниць найвищого розряду, а всі остачі вказуватимуть кількість одиниць наступних нижчих розрядів у запису даного числа у позиційній системі числення з основою h.

3. Усі операції виконуються у старій системі числення з основою g, а тому цим способом зручно користуватися, коли $g > h$, бо тоді h записується як одноцифрове число у системі числення з основою g, і остачі від ділення будуть менші від h, отже, вони будуть одноцифровими числами у новій системі числення.

Методом ділення зручно користуватися також, коли $g = 10$, бо тоді добре відомі алгоритми виконання операцій.

Теоретичною основою *способу множення* є таке представлення числа *а,* записаного у позиційній системі числення з основою g*:*

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + a_{n-2} \cdot g^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g + a_0 =$$

$$= ((\ldots(a_n \cdot g^n + a_{n-1}) \cdot g + a_{n-2}) \cdot g + \ldots + a_2) \cdot g + a_1) \cdot g + a_0.$$

Якщо виконати усі зазначені тут операції у системі числення з основою h, то одержане число буде також записане у системі числення з основою h.

Суть ***методу множення можна*** викласти так:

1. Якщо дане число менше h, то воно запишеться у системі числення з цією основою як одноцифрове.

2. Якщо дане число у системі числення з основою g має вищі розрядні одиниці, то множимо його кількість одиниць найвищого розряду на g і до одержаного добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Одержану суму множимо на g і до добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Ці операції проводимо доти, поки не додамо кількість одиниць найнижчого розряду даного числа, і на цьому процес закінчено.

3. Обчислення проводяться у новій системі числення. А тому методом множення користуються тоді, коли $g < h$, бо тоді всі цифри і основа старої системи числення є цифрами нової системи числення, або ж коли переходять від будь-якої системи числення до десяткової.

5. Арифметичні дії над числами в позиційних системах числення.

Алгоритми додавання у десятковій системі числення

1. Записати перший доданок і під ним підписати другий доданок так, щоб одиниці однойменних розрядів знаходились одні під одними.

2. Доданки від суми відділити горизонтальною рискою.

3. Додати одиниці найнижчих розрядів. Якщо їх сума – одноцифрове число, то записати її під одиницями цього розряду і перейти до додавання

одиниць наступного розряду.

4. Якщо сума одиниць найнижчого розряду є двоцифровим числом, то його подати у вигляді 10 + c_0, де c_0 – одноцифрове число, записати c_0 під одиницями найнижчого розряду, а число 1 додати до суми одиниць наступного розряду і перейти до знаходження цієї суми.

5. Повторювати ці ж операції з одиницями кожного наступного розряду.

Процес закінчиться після того, як будуть додані одиниці найвищого розряду, причому їх сума повністю записується під рискою.

Алгоритми віднімання у десятковій системі числення

(будемо вважати, що числа мають однакову кількість цифр):

1. Записати зменшуване і під ним від’ємник так, щоб одиниці однойменних розрядів знаходилися одні під одними.

2. Від’ємник і зменшуване відділити від різниці горизонтальною рискою.

3. Якщо число одиниць найнижчого розряду зменшуваного не менше числа одиниць від’ємника, то виконати їх віднімання, результат записати під одиницями цього розряду і перейти до віднімання одиниць наступного розряду.

4. Якщо ж у зменшуваному число одиниць найнижчого розряду менше числа одиниць цього розряду від’ємника, а число одиниць наступного розряду відмінне від нуля, то одночасно у зменшуваному число одиниць наступного розряду зменшити на одиницю, а число одиниць найнижчого розряду збільшити на 10, тепер виконати віднімання одиниць цього розряду, результат записати під ним і перейти до віднімання одиниць наступного розряду.

5. Якщо у зменшуваному число одиниць найнижчого розряду менше числа одиниць цього розряду від’ємника, а число одиниць наступного

розряду в зменшуваному рівне нулю, то у першому з наступних вищих розрядів, число одиниць якого відмінне від нуля, число одиниць зменшити на одиницю, число одиниць всіх нижчих розрядів, крім останнього, збільшити на 9, а число одиниць останнього розряду збільшити на 10 і виконати віднімання одиниць цього розряду. Результат записати під ним і перейти до віднімання одиниць наступного розряду.

6. У наступному розряді повторити описаний процес.

7. Віднімання закінчити після того, як буде здійснено віднімання одиниць найвищого розряду.

8. Число, записане під рискою, буде різницею даних чисел.

Алгоритми множення у десятковій системі числення

- Записати першим багатоцифрове число а і під його одиницями найнижчого розряду підписати число b.
- Множники від добутку відділити горизонтальною рискою.
- Помножити число одиниць найнижчого розряду числа а на число b. Якщо добуток $a_0 \cdot b$ менший від десяти, то записати його під числом b і перейти до множення числа одиниць наступного розряду числа а на число b.
- Якщо добуток $a_0 \cdot b$ не менший від десяти, то потрібно представити його у вигляді $c_1 \cdot 10 + c_0$, де c_1 і c_0 – цифри десяткової системи числення. Число c_0 записати як одиницю найнижчого розряду шуканого добутку, а число c_1 *і* запам'ятати і перейти до множення одиниць наступного розряду числа a на число b. До добутку $a_1 \cdot b$ додати число c_1. Якщо одержана сума менша 10, то її записати як другу розрядну одиницю добутку. Якщо ж одержана сума не менша від десяти, то її потрібно записати у вигляді $d_1 \cdot 10 + d_0$, де d_1 і d_0 – цифри десяткової системи числення, при цьому число d_0 записати під рискою як цифру наступного розряду добутку чисел a і b, а число d_1 запам'ятати і перейти до множення одиниць наступного розряду

числа a на число b, до якого потім додати число d_1.

- Процес множення закінчити після того, як помножаться одиниці найвищого розряду числа a на число b.

- Число, записане під рискою, буде добутком чисел a і b. Враховуючи закони арифметичних операцій над цілими
Невід’ємними числами, запис їх у десятковій системі числення, таблицю множення одноцифрових чисел, алгоритм множення багатоцифрового числа на одноцифрове число та множення числа на натуральний степінь десяти, можна сформулювати алгоритм множення у десятковій системі числення багатоцифрового числа на багатоцифрове:

1. Записати перший множник і під ним підписати другий множник так, щоб однойменні розрядні одиниці були підписані одні під одними. Як правило, першим береться той множник, у якого більша кількість цифр.

2. Множники a і b від добутку відділити горизонтальною рискою.

3. Помножити число a на число одиниць найнижчого розряду числа b і записати добуток $a \cdot b_0$ (перший неповний добуток) під рискою.

4. Помножити число a на число одиниць наступного розряду числа b і записати добуток $a \cdot b_1$ (другий неповний добуток) під числом $a \cdot b_0$, але із зсувом на один розряд вліво, що відповідає множенню на число 10.

5. Процес обчислення неповних добутків закінчиться після того, як помножиться число a на число одиниць найвищого розряду числа b.

6. Всі знайдені неповні добутки додати.

7. Одержана сума є добутком чисел a і b.

Аналіз алгоритму множення та властивості множення цілих невід’ємних чисел на нуль дають можливість зробити такі два **зауваження:**

8. Якщо у другому множнику одна із цифр дорівнює нулю, то на неї можна і не множити, а наступний неповний добуток потрібно зсунути вліво на дві цифри.

9. Якщо хоч один з множників закінчується нулями, то при підписуванні множників один під одним і множенні нулі не враховуються.

Лише після виконання множення до одержаного добутку дописується стільки нулів, скількома нулями закінчуються обидва множники разом.

Алгоритми ділення у десятковій системі числення

1. Записати ділене $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1\, 10 + a_0$, потім дільник b з невеликим проміжком між ними в одному рядку.

2. Між діленим і дільником спочатку провести вертикальну риску, а потім під дільником провести горизонтальну риску до перетину з вертикальною.

3. Якщо $a_n \geq b$, то неповну частку q_n від ділення числа a_n на число b записують під горизонтальною рискою відразу після вертикальної, добуток $b \cdot q_n$ підписують під a_n і знаходять їх різницю r_n.

4. До числа r_n дописують a_{n-1} і неповну частку q_{n-1} від ділення числа $\overline{r_n\, a_{n-1}}$ на число b записують справа від q_n, добуток $b\; q_{n-1}$ підписують під $\overline{r_n\, a_{n-1}}$ і знаходять їх різницю r_{n-1}.

5. Процес продовжують, поки при діленні на число b не будуть використані всі цифри числа a.

6. Якщо ж $a_n < b$, то замість числа a_n розглядають число $\overline{a_n\, a_{n-1}}$ і діють згідно з пунктом 3.

7. Число, записане під горизонтальною рискою, є неповною часткою, а остання остача r_0 – остачею від ділення числа a на число b.

Сформульований алгоритм ділення прийнято називати “ділення кутом”.