МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Прикарпатський національний університет
Імені Василя Стефаника

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки і завдання для самостійної роботи
для студентів спеціальності «Біологія»

м. Івано-Франківськ
2015р

Методичні вказівки призначені для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності «Туризм».

Упорядник: Кашуба Г. І.

Відповідальний за випуск асистент кафедри статистики і вищої математики Кашуба Г. І.

ЗАГАЛЬНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Самостійна робота є однією з форм навчання студента денної форми навчання . Студентам перш за все потрібно засвоїти теоретичний матеріал, а потім отримати навички в розв'язуванні задач. З метою полегшення цього процесу в методичному посібнику наведено приклади розв'язування типових задач.

Студент виконує завдання контрольної роботи свого варіанту, номер якого вказує викладач. При виконанні та оформленні контрольної роботи потрібно дотримуватись таких правил%

1. Кожна робота виконується в окремому зошиті.
2. На обкладинці чітко повинні бути написані: прізвище (в називному відмінку) та ініціали студента, академічна група, номер варіанту, навчальна дисципліна.
3. В роботу повинні бути включені всі завдання відповідного варіанту.
4. Перед розв'язком кожної задачі потрібно повністю переписати її умову.
5. Розв'язки задач потрібно розміщувати у порядку їх номерів.
6. Розв'язки задач повинні містити детальні пояснення і мотивації всіх дій в процесі розв'язку.

Робота, виконана без дотримання цих правил, не допускається до захисту і повертається студентові для переробки.

РОЗПОДІЛ ПУНКТІВ В ЗАДАЧАХ ЗА ВАРІАНТАМИ

№ варіанту	Номери задач			
	1	2	3	4
	Номери пунктів			
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9
10	10	10	10	10
11	11	11	11	11
12	12	12	12	12
13	13	13	13	13
14	14	14	14	14
15	15	15	15	15
16	16	16	16	16
17	17	17	17	17
18	18	18	18	18
19	19	19	19	19
20	20	20	20	20
21	21	21	21	21
22	22	22	22	22
23	23	23	23	23
24	24	24	24	24
25	25	25	25	25
26	26	26	26	26
27	27	27	27	27
28	28	28	28	28
29	29	29	29	29
30	30	30	30	30
31	1	2	3	4
32	2	3	4	5
33	3	4	5	6
34	4	5	6	7
35	5	6	7	8
36	6	7	8	9
37	7	8	9	10
38	8	9	10	11
39	9	10	11	12

№ варіанту	Номери задач			
	1	2	3	4
	Номери пунктів			
40	10	11	12	13
41	11	12	13	14
42	12	13	14	15
43	13	14	15	16
44	14	15	16	17
45	15	16	17	18
46	16	17	18	19
47	17	18	19	20
48	18	19	20	21
49	19	20	21	22
50	20	21	22	23
51	21	22	23	24
52	22	23	24	25
53	23	24	25	26
54	24	25	26	27
55	25	26	27	28
56	26	27	28	29
57	27	28	29	30
58	28	29	30	1
59	29	30	1	2
60	30	1	2	3
61	1	3	5	7
62	2	4	6	8
63	3	5	7	9
64	4	6	8	10
65	5	7	9	11
66	6	8	10	12
67	7	9	11	13
68	8	10	12	14
69	9	11	13	15
70	10	12	14	16
71	11	13	15	17
72	12	14	16	18
73	13	15	17	19
74	14	16	18	20
75	15	17	19	21
76	16	18	20	22

Приклади розв'язування завдань

Приклад 1.

Розв'язати систему рівнянь. в пункті а) методом Крамера, в пункті б) методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 2x+3y-z=8 \\ x-y+2z=-1 \\ 2x+3y+z=6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3 \\ 3x_1-x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=4 \\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4=7 \end{cases}$.

Розв'язання:

а) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-2-3+12-2-12-3=-10\neq 0.$$

Отже, система має єдиний розв'язок. Знайдемо допоміжні визначники системи Δ_i, які отримуємо з визначника системи заміною i-того стовпця стовпцем вільних членів.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-8+3+36-6-48+3=-20.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}=-2-6+32-2-24-8=-10.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}=-12+24-6+16+6-18=10.$$

Тоді за формулами Крамера отримаємо:

$x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-20}{-10}=2$, $y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-10}{-10}=1$, $z=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{10}{-10}=-1$.

б) Проведемо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи:

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right)\xrightarrow{ЕП1}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right)\xrightarrow{ЕП2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Зауваження: 1) При *ЕП*1 виконали такі дії: а) перший рядок помножили на число (-3) і додали до другого рядка; б) перший рядок помножили на число (-2) і додали до третього рядка; в) від четвертого рядка відняли перший рядок.

2) При *ЕП*2 виконали такі дії: від третього та четвертого рядків відняли другий рядок.

З останньої матриці маємо таку систему рівнянь: $\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3 \\ 5x_2-2x_3-3x_4=10 \end{cases}$. З другого рівняння системи отримаємо: $x_2=2+\dfrac{2}{5}x_3+\dfrac{3}{5}x_4$. Підставляємо знайдене значення змінної x_2 в перше рівняння і знаходимо: $x_1=1+\dfrac{4}{5}x_3+\dfrac{1}{5}x_4$.

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд $\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = 2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 \\ x_3, x_4 \in R \end{cases}$.

Приклад 2.

Знайти: *AB-3A+2B,* якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Спочатку знайдемо добуток матриць *A* та *B*. Це така матриця *C,* кожний елемент c_{ij} якої дорівнює сумі послідовних добутків елементів *i*-того рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-того стовпця матриці *B*. Таким чином отримаємо:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+3\cdot3+1\cdot2 & 2\cdot1+3\cdot0+1\cdot(-1) & 2\cdot3+3\cdot1+1\cdot0 \\ 4\cdot(-2)+1\cdot3+2\cdot2 & 4\cdot1+1\cdot0+2\cdot(-1) & 4\cdot3+1\cdot1+2\cdot0 \\ -2\cdot(-2)+1\cdot3+3\cdot2 & -2\cdot1+1\cdot0+3\cdot(-1) & -2\cdot3+1\cdot1+3\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & 13 \\ 13 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо матриці *3A* та *2B.* Для цього всі елементи матриці *A* помножимо на число 3, а всі елементи матриці *B* помножимо на число 2. Отримаємо: $3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 6 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $2B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді маємо:

$$AB - 3A + 2B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & 13 \\ 13 & -5 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 6 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 12 \\ -7 & -1 & 9 \\ 23 & -10 & -14 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.

Задано координати вершин трикутника ABC: *A(-2; -1), B(3; -2), C(2; 1)*. Знайти:

1) Рівняння сторони *AB*;

2) Рівняння і довжину медіани *BK*;

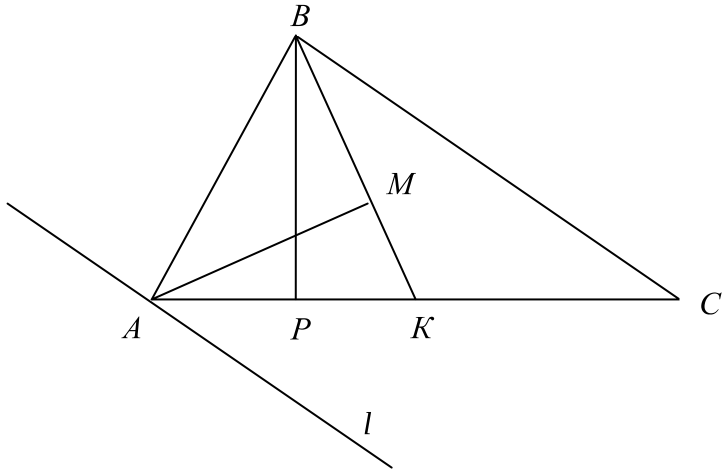
3) Рівняння і довжину висоти *BP*;

4) Рівняння перпендикуляра, проведеного з вершини *A* до медіани *BK*;

5) Рівняння прямої, що проходить через вершину *A* паралельно стороні *BC*.

Розв'язання:

Зробимо рисунок:



1) Рівняння сторони *AB* складаємо, як рівняння прямої, що проходить через дві точки за формулою:
$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, де (x_1,y_1) – координати точки *A,* а (x_2,y_2) – координати точки *B*. Отримаємо:
$\frac{x-(-2)}{3-(-2)}=\frac{y-(-1)}{-2-(-1)}$ або $\frac{x+2}{5}=\frac{y+1}{-1}$ звідси: $-1\cdot(x+2)=5\cdot(y+1)$ або $-x-2=5y+5$. Остаточно маємо: $x+5y+7=0$.

2) Оскільки *BK* – медіана трикутника *ABC,* то точка *K* є серединою відрізка *AC*. Знайдемо координати точки *K* за формулами: $x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}$, де (x_1,y_1) – координати точки *A,* а (x_2,y_2) – координати точки *C*. Тому маємо: $x=\frac{-2+2}{2}=0, y=\frac{-1+1}{2}=0$. Отже, *K(0; 0).* Тоді рівняння медіани *BK* складаємо, як рівняння прямої, що проходить через дві точки (*B* та *K*). Отримаємо:
$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-0}{-2-0};\frac{x}{3}=\frac{y}{-2};-2x=3y$ звідси $2x+3y=0$.

Довжину медіани *BK* знайдемо за формулою: $BK=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, де (x_1,y_1) – координати точки *B,* а (x_2,y_2) – координати точки *K*. Тому маємо: $BK=\sqrt{(0-3)^2+(0+2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

3) Рівняння висоти *BP* складаємо, як рівняння прямої, що проходить через точку *B* і має вектор нормалі $\vec{AC}=(4;2)$ за формулою $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, де (x_0,y_0) – координати точки *B,* $(a;b)$ – координати вектора $\vec{AC}$. Тоді отримаємо: $4\cdot(x-3)+2\cdot(y+2)=0$. Поділивши ліву і праву частини останнього рівняння на число 2, розкривши дужки і звівши подібні доданки остаточно отримаємо загальне рівняння прямої *BP* $2x+y-4=0$.

Довжину висоти *BP* обчислимо, як відстань від точки $B(x_0;y_0)$ до прямої *AC*, яка задається загальним рівнянням $ax+by+c=0$, за формулою: $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Складемо загальне рівняння прямої *AC*:
$\frac{x+2}{2+2}=\frac{y+1}{1+1};\frac{x+2}{4}=\frac{y+1}{2};2(x+2)=4(y+1);x+2=2(y+1)$ звідси $x-2y+1=0$.
Тоді $BP=\frac{|3-2\cdot(-2)+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|3+4+1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$.

4) З рівняння медіани *BK* маємо вектор нормалі цієї прямої $\vec{n}=(2;3)$. Тоді вектор $\vec{n}$ є напрямним вектором перпендикуляра, проведеного з вершини *A* до медіани *BK.* Тоді рівняння прямої *AM* складаємо, як рівняння прямої, що проходить через точку *A* і має напрямний вектор $\vec{n}$ за формулою: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$, де (x_0,y_0) – координати точки *A,* $(m;n)$ – координати вектора $\vec{n}$. Тоді маємо:
$\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}; \quad 3\cdot(x+2)=2\cdot(y+1); \quad 3x+6=2y+2; \quad 3x-2y+4=0$.

5) Нехай *l* – пряма, що проходить через вершину *A* паралельно стороні *BC*. Тоді вектор $\vec{BC}=(-1;3)$ є напрямним вектором цієї прямої. Тому її рівняння має вигляд:
$\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{3}; \quad 3\cdot(x+2)=-1\cdot(y+1); \quad 3x+6=-y-1; \quad 3x+y+7=0$.

Приклад 4:

Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1\left(3;6;-3\right)$, $A_2\left(0;1;2\right)$, $A_3\left(0;-1;-1\right)$, $A_4(4;0;-6)$ Знайти:

1) косинус кута $A_2A_1A_3$;
2) рівняння грані A_1A_4;
3) площу основи $\Delta\, A_1A_2A_3$;
4) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
5) об'єм піраміди;
6) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
7) кут між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$.

Розв'язання:

1) Нехай $\angle A_2A_1A_3=\alpha$. Тоді косинус цього кута знайдемо, як косинус кута між векторами $A_1\vec{A}_2$ та $A_1\vec{A}_3$ за формулою: $\cos\alpha=\dfrac{A_1\vec{A}_2\cdot A_1\vec{A}_3}{\left|A_1\vec{A}_2\right|\cdot\left|A_1\vec{A}_3\right|}$, де $A_1\vec{A}_2\cdot A_1\vec{A}_3$ –скалярний добуток, а $\left|A_1\vec{A}_2\right|$ та $\left|A_1\vec{A}_3\right|$ – довжини векторів $A_1\vec{A}_2$ та $A_1\vec{A}_3$. Знайдемо координати векторів $A_1\vec{A}_2$ та $A_1\vec{A}_3$: $A_1\vec{A}_2=(-3;-5;5)$, $A_1\vec{A}_3=(-3;-7;2)$.

Тоді $A_1\vec{A}_2\cdot A_1\vec{A}_3=-3\cdot(-3)+(-5)\cdot(-7)+5\cdot 2=9+35+10=54$.

$\left|A_1\vec{A}_2\right|=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+5^2}=\sqrt{59}$, $\left|A_1\vec{A}_3\right|=\sqrt{(-3)^2+(-7)^2+2^2}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$.

Отже, $\cos\alpha=\dfrac{54}{\sqrt{59}\cdot 2\sqrt{15}}=\dfrac{27}{\sqrt{885}}$.

2) Рівняння грані A_1A_4 шукаємо, як рівняння прямої, що проходить через дві точки $A_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ та $A_4\left(x_2,y_2,z_2\right)$ у вигляді $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Тоді маємо: $\dfrac{x-3}{4-3}=\dfrac{y-6}{0-6}=\dfrac{z+3}{-6+3}$ або $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-6}{-6}=\dfrac{z+3}{-3}$.

3) Площу трикутника $A_1A_2A_3$ обчислюємо за формулою $S_{\Delta A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[A_1\vec{A}_2\times A_1\vec{A}_3\right]\right\|$, де $\left[A_1\vec{A}_2\times A_1\vec{A}_3\right]$ – векторний добуток векторів $A_1\vec{A}_2$ та $A_1\vec{A}_3$. Якщо $A_1\vec{A}_2\left(x_1,y_1,z_1\right)$ та $A_1\vec{A}_3\left(x_2,y_2,z_2\right)$, то їх векторний добуток знаходять за формулою: $\left[A_1\vec{A}_2\times A_1\vec{A}_3\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$. Оскільки $A_1\vec{A}_2=(-3;-5;5)$ та $A_1\vec{A}_3=(-3;-7;2)$, то отримаємо:

$$\left[A_1\vec{A}_2\times A_1\vec{A}_3\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -5 & 5\\ -3 & -7 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 5\\ -7 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 5\\ -3 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-3 & -5\\ -3 & -7\end{vmatrix}=25\vec{i}-9\vec{j}+6\vec{k}.$$

Тоді $S_{\Delta A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\sqrt{25^2+(-9)^2+6^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{742}$ (кв. од. довж.).

4) Рівняння площини, що проходить через три точки $A_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $A_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ та $A_3\left(x_3,y_3,z_3\right)$ складаємо за формулою: $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$.

Отримаємо: $\begin{vmatrix}x-3 & y-6 & z+3\\ 0-3 & 1-6 & 2+3\\ 0-3 & -1-6 & -1+3\end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix}x-3 & y-6 & z+3\\ -3 & -5 & 5\\ -3 & -7 & 2\end{vmatrix}=0$;

Розкладаємо останній визначник за першим рядком:

$$(x-3)\cdot\begin{vmatrix}-5 & 5\\ -7 & 2\end{vmatrix}-(y-6)\cdot\begin{vmatrix}-3 & 5\\ -3 & 2\end{vmatrix}+(z+3)\cdot\begin{vmatrix}-3 & -5\\ -3 & -7\end{vmatrix}=0;$$

$$25(x-3)-9(y-6)+6(z+3)=0;\ 25x-9y+6z-3=0.$$

5) Об'єм піраміди обчислюємо за формулою: $V_{A_1A_2A_3A_3}=\frac{1}{6}\left|\vec{A_1A_2}\cdot\vec{A_1A_3}\cdot\vec{A_1A_4}\right|$, де $\vec{A_1A_2}\cdot\vec{A_1A_3}\cdot\vec{A_1A_4}$ – векторний добуток векторів $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_3}$ та $\vec{A_1A_4}$. Якщо $\vec{A_1A_2}\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\vec{A_1A_3}\left(x_2,y_2,z_2\right)$ і $\vec{A_1A_4}\left(x_3,y_3,z_3\right)$, то їх векторний добуток обчислюється за формулою: $\vec{A_1A_2}\cdot\vec{A_1A_3}\cdot\vec{A_1A_4}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$. Тоді маємо:

$$\vec{A_1A_2}\cdot\vec{A_1A_3}\cdot\vec{A_1A_4}=\begin{vmatrix}-3 & -5 & 5\\ -3 & -7 & 2\\ 1 & -6 & -3\end{vmatrix}=-63+90-10+35-36+45=61.$$

Отже, $V_{A_1A_2A_3A_3}=\frac{1}{6}\left|61\right|=\frac{61}{6}$.

6) Нормальний вектор $\vec{n}$ площини $A_1A_2A_3$ є напрямним $\vec{s}$ вектором для довільної прямої, яка перпендикулярна до цієї площини. Тому рівняння висоти, проведеної з вершини A_4 складаємо, як рівняння прямої, що проходить через точку $A_4\left(x_0,y_0,z_0\right)$ і має напрямний вектор $\vec{s}=(m;n;p)$ за формулою: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$. В нашому випадку $\vec{s}=\vec{n}=(25;-6;9)$. Тому рівняння висоти A_4O має вигляд: $\frac{x-4}{25}=\frac{y}{-6}=\frac{z+6}{9}$.

Довжину висоти A_4O знайдемо, використавши формулу для об'єму піраміди $V_{A_1A_2A_3A_3}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot A_4O$.

Звідси маємо: $A_4O=\frac{3V_{A_1A_2A_3A_3}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}}=\frac{3\cdot\frac{61}{6}}{\frac{1}{2}\sqrt{742}}=\frac{61}{\sqrt{742}}$.

7) Нехай φ – кут між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$. Знайдемо синус цього кута за формулою: $\sin\varphi=\frac{\left|\vec{s}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$, де $\vec{s}=\overrightarrow{A_1A_4}=(1;-6;-3)$ – напрямний вектор прямої A_1A_4, $\vec{n}=(25;-6;9)$ – нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$. Тоді маємо: $\sin\varphi=\frac{\left|1\cdot25+(-6)\cdot(-9)+(-3)\cdot6\right|}{\sqrt{1^2+(-6)^2+(-3)^2}\sqrt{25^2+(-9)^2+6^2}}=\frac{61}{\sqrt{46}\sqrt{472}}=\frac{61}{4\sqrt{1357}}$.

Завдання для самостійного розв'язування

Завдання 1

Розв’язати систему рівнянь. В пункті а) методом Крамера та матричним методом, в пункті б) методом Гаусса.

1.1. а) $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+2y+3z=1\\ x+4y+9z=1\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=-1\\ 2x_1+x_2-x_3-4x_4=-4\\ 3x_1-x_2+2x_3=1\\ x_1+2x_2+x_3-4x_4=1\end{cases}$.

1.2. а) $\begin{cases} 5x-3y+z=8 \\ x+y-z=0 \\ 2x-4y+z=6 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_4=0 \\ 3x_1+x_2+6x_3-3x_4=3 \\ 4x_1-x_2+8x_3-4x_4=-3 \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=3 \end{cases}$.

1.3. а) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ x+4y+9z=4 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ x_1-3x_2-3x_3+4x_4=-1 \\ 2x_1+3x_2-6x_3-x_4=-2 \\ 2x_1-x_2-6x_3+3x_4=-2 \end{cases}$.

1.4. а) $\begin{cases} 3x-3y+z=4 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=6 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 3x_1-x_2-5x_3+5x_4=1 \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1 \\ x_1-2x_2+5x_4=2 \\ x_1+x_2-3x_3-x_4=-1 \end{cases}$.

1.5. а) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=3 \\ x+4y+9z=9 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=6 \end{cases}$.

1.6. а) $\begin{cases} 8x-3y+z=14 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=6 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+3x_4=-4 \\ x_1+2x_2-2x_3-2x_4=4 \\ x_1-x_2-2x_3+x_4=-2 \\ 2x_1+x_2-4x_3-x_4=2 \end{cases}$.

1.7. а) $\begin{cases} 7x-3y+z=12 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=6 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-6x_4=4 \\ x_1-4x_2-3x_3=-8 \\ x_1-2x_2-3x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1-5x_2-6x_3-3x_4=-10 \end{cases}$.

1.8. а) $\begin{cases} 13x-3y+z=24 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=6 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7 \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9 \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4=2 \end{cases}$.

1.9. а) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \\ x+4y+9z=16 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-5x_4=2 \\ x_1+2x_2-5x_3-2x_4=-10 \\ 3x_1-5x_2+x_4=0 \\ x_1+x_2-3x_3-2x_4=-6 \end{cases}$.

1.10. а) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=5 \\ x+4y+9z=25 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_4=4 \\ x_1+x_2-3x_3-x_4=2 \\ 3x_1+x_2-5x_3-3x_4=6 \\ x_1-x_3-x_4=2 \end{cases}$.

1.11. а) $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-5x_4=0 \\ 3x_1-4x_3-x_4=-4 \\ 2x_1-3x_2-3x_3=0 \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=-4 \end{cases}$.

1.12. а) $\begin{cases} 13x-3y+z=16 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=6 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-x_4=1 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+3x_4=-3 \\ 3x_1-x_2+3x_3+x_4=-1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=-1 \end{cases}$.

1.13. а) $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-3x_4=-1 \\ 2x_1-4x_2-x_3=1 \\ 3x_1-5x_2-x_4=0 \\ 4x_1-6x_2-3x_3-2x_4=3 \end{cases}$.

1.14. а) $\begin{cases} 16x-3y+z=30 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=6 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3-3x_4=-3 \\ x_1-x_2-2x_4=-3 \\ x_1+x_2-3x_3-x_4=3 \\ 2x_1+x_2-4x_3-2x_4=3 \end{cases}$.

1.15. а) $\begin{cases} 15x-3y+z=28 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=6 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+x_2-7x_3-2x_4=-1 \\ x_1-2x_2+5x_3+7x_4=5 \\ 2x_1+x_2-10x_3-x_4=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+9x_4=7 \end{cases}$.

1.16. а) $\begin{cases} 17x-3y+z=32 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=6 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3-x_4=1 \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=-3 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$.

1.17. а) $\begin{cases} x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=-8 \\ 2y+7z=17 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ 2x_1-x_3-x_4=-2 \\ 3x_1+x_2-2x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3-4x_4=4 \end{cases}$.

1.18. а) $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=-1 \\ 2x_1-3x_2-2x_3+3x_4=8 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=3 \\ 3x_1+2x_2-3x_3-2x_4=-1 \end{cases}$.

1.19. а) $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3-3x_4=2 \end{cases}$.

1.20. а) $\begin{cases} x+3y-2z=1 \\ x+4y+z=-7 \\ 3x+10y-4z=-3 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1 \\ x_1+3x_2-13x_3-22x_4=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4=5 \\ 2x_1+3x_2+4x_3-7x_4=4 \end{cases}$.

1.21. а) $\begin{cases} -3x+3y-z=-4 \\ 4x-5y+2z=5 \\ -x+y+3z=2 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=-3 \end{cases}$.

1.22. а) $\begin{cases} 3x+y-z=-7 \\ 2x+2y+3z=5 \\ x-4y-z=0 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-3x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$.

1.23. а) $\begin{cases} 3x-y+z=1 \\ 5x+2y-z=2 \\ 11x-y-2z=-11 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2 \\ 4x_1+x_3-7x_4=3 \\ 2x_2-3x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3 \end{cases}$.

1.24. а) $\begin{cases} 5x+8y+z=2 \\ 3x-2y+6z=-7 \\ 2x+y-z=-5 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5 \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1 \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12 \end{cases}$.

1.25. а) $\begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ x+4y+2z=-1 \\ x-4y=-5 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-7 \\ 3x_1-7x_2+x_3-5x_4=-8 \\ x_2-x_3-x_4=-1 \end{cases}$.

1.26. а) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+2y-z=-2 \\ y+z=-2 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3 \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3 \end{cases}$.

1.27. а) $\begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ x+2y+z=1 \\ y-z=-3 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=-2 \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5 \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1 \\ x_1+2x_2+2x_3-5x_4=-9 \end{cases}$.

1.28. а) $\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 4x_1+x_2-2x_3+x_4=3 \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+5x_2-x_4=-1 \\ 3x_1+3x_2-x_3-3x_4=1 \end{cases}$.

1.29.а) $\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$. б) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4 \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+x_4=2 \end{cases}$.

1.30.а) $\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_4=-4 \\ 5x_1+4x_2+x_3+3x_4=-5 \\ 2x_1+x_2+x_3+4x_4=2 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-3 \end{cases}$.

Завдання 2

Знайти: *AB-3A+2B,* якщо

2.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

2.6. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.7. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.10. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2.11. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2.12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.13. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.14. $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2.15. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.16. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2.17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.18. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.19. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-1&3\\3&5&-2\end{pmatrix}$.

2.20. $A=\begin{pmatrix}2&6&3\\-4&2&-3\\5&8&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&5\\6&2&0\\-1&-2&3\end{pmatrix}$.

2.21. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&2&3\\2&-4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-3&2\\3&4&5\end{pmatrix}$

2.22. $A=\begin{pmatrix}5&4&3\\4&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\3&2&1\\0&1&5\end{pmatrix}$.

2.23. $A=\begin{pmatrix}-1&3&2\\3&2&3\\2&3&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&-1&6\\0&6&0\\6&-1&6\end{pmatrix}$.

2.24. $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\3&0&3\\-1&3&-1\end{pmatrix}$.

2.25. $A=\begin{pmatrix}6&5&4\\1&2&3\\-5&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5&4&-5\\0&6&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.

2.26. $A=\begin{pmatrix}3&6&4\\-5&0&1\\1&2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$.

2.27. $A=\begin{pmatrix}6&5&4\\1&2&3\\-5&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}$.

2.28. $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&0&3\\6&4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5&4&-5\\0&6&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.

2.29. $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&3&3\\-6&2&-6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&2&3\\0&1&6\end{pmatrix}$.

2.30. $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-6&0&-6\\2&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Завдання 3

Задано координати вершин трикутника АВС. Знайти:

1) Рівняння сторони АВ;
2) Рівняння і довжину медіани ВК;
3) Рівняння і довжину висоти ВР;
4) Рівняння перпендикуляра, проведеного з вершини А до медіани ВК;
5) Рівняння прямої, що проходить через вершину А паралельно стороні ВС.

3.1. *A(-4; 2), B(1; 5), C(-1; 5).*
3.2. *A(4; 1), B(2; 3), C(1; -2).*
3.3. *A(-6; 1), B(3; 7, C(-2; 5).*
3.4. *A(-1; 6), B(3; 3), C(8; 0).*
3.5. *A(1; -1), B(2; 5), C(4; -1).*
3.6. *A(4; -3), B(-1; 5), C(5; -1).*
3.7. *A(3; 0), B(1; 6), C(7; -2).*
3.8. *A(0; 2), B(-1; 6), C.(-4; -2)*
3.9. *A(2; 1), B(3; -1), C(9; -1).*
3.10. *A(-1; 2), B(1; 8), C(4; 4).*
3.11. *A(2; -3), B(-1; -1), C(-5; 1).*
3.12. *A(4; 1), B(-8; 7), C(4; -5).*
3.13. *A(2; 3), B(-2; 5), C(-1; 7).*
3.14. *A(4; -3), B(-1; 5) C(1; -3).*
3.15. *A(-2; 5), B(4;7), C(2; -3).*
3.16. *A(2; 0), B(8; -3) C(-2; -3).*
3.17. *A(2; 4), B(-2; 8), C(-8; 3).*
3.18. *A(6; 2), B(9; 5), C(10; 2).*
3.19. *A(-2; 2), B(1; 5), C(2;2).*
3.20. *A(-6; 2), B(-3; 5), C(-2; 2).*
3.21. *A(-3; 6), B(4; -1), C(-3; -5).*
3.22. *A(-2; 6), B(5; -1), C(-2; -5).*
3.23. *A(4; -4), B(8; 2), C(3; 8).*
3.24. *A(3; 7), B(5; 3), C(-4; 0).*
3.25. *A(-2; 5), B(-4; 1), C(5; -2).*
3.26. *A(-3; 9), B(4; 2), C(-3; -2).*
3.27. *A(5; 8), B(7; 4), C(-2; 1).*
3.28. *A(-3; 10), B(4; 3), C(-3; -1).*
3.29. *A(1; -6), B(3; 4), C(-3; 3).*
3.30. *A(-3; -3), B(5; -7), C(7; 7).*

Завдання 4

Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти:

8) косинус кута $A_2A_1A_3$;
9) рівняння грані A_1A_4;
10) площу основи $\Delta\, A_1A_2A_3$;
11) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
12) об’єм піраміди;
13) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
14) кут між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$.

4.1. $A_1(2; 0; 0)$, $A_2(-2; 0; 1)$, $A_3(1; 4; 2)$, $A_4(3; 0; 6)$.
4.2. $A_1(-2; 0; 2)$, $A_2(0; 0; 4)$, $A_3(3; 2; 5)$, $A_4(1; 3; 2)$.
4.3. $A_1(3; 0; 6)$, $A_2(1; -3; 2)$, $A_3(3; 2; 5)$, $A_4(2; 2; 5)$.
4.4. $A_1(1; 2; 3)$, $A_2(2; 0; 0)$, $A_3(3; 2; 5)$, $A_4(4; 0; 0)$.
4.5. $A_1(-2; 0; -1)$, $A_2(0; 0; 4)$, $A_3(1; 3; 2)$, $A_4(3; 2; 7)$.
4.6. $A_1(1; -2; 1)$, $A_2(0; 0; 4)$, $A_3(1; 4; 2)$, $A_4(2; 0; 0)$.
4.7. $A_1(-2; 1; 0)$, $A_2(3; 2; 7)$, $A_3(2; 2; 5)$, $A_4(6; 1; 5)$.
4.8. $A_1(-1; 3; 0)$, $A_2(2; 0; 0)$, $A_3(4; -1; 2)$, $A_4(3; 2; 7)$.
4.9. $A_1(6; 1; 5)$, $A_2(5; 1; 0)$, $A_3(-4; 1; -2)$, $A_4(-6; 0; 5)$.
4.10. $A_1(1; -1; 6)$, $A_2(-5; -1; 0)$, $A_3(4; 0; 0)$, $A_4(2; 2; 5)$.
4.11. $A_1(-2; 0; 2)$, $A_2(0; 0; 4)$, $A_3(3; 2; 5)$, $A_4(1; 3; -)$.
4.12. $A_1(-1\ -2; -3)$, $A_2(2; 0; 0)$, $A_3(-3; -2; -5)$, $A_4(4; 0; 0)$.
4.13. $A_1(-3; 0; -6)$, $A_2(-1; 3; -2)$, $A_3(-3; -2; -5)$, $A_4(-2; -2; -5)$.
4.14. $A_1(2; 0; 1)$, $A_2(0; 0; -4)$, $A_3(-1; -3; -2)$, $A_4(3; -2; -7)$.
4.15. $A_1(-1; 2; -1)$, $A_2(0; 0; -4)$, $A_3(-1; -4; -2)$, $A_4(-2; 0; 0)$.
4.16. $A_1(2; -1; 0)$, $A_2(-3; -2; -7)$, $A_3(-2; -2; -5)$, $A_4(-6; -1; -5)$.
4.17. $A_1(1; -3; 0)$, $A_2(-2; 0; 0)$, $A_3(-4; 1; -2)$, $A_4(-3; -2; -7)$.
4.18. $A_1(-6; -1; -5)$, $A_2(-5; -1; 0)$, $A_3(4; -1; 2)$, $A_4(-3; -2; -7)$.
4.19. $A_1(-1; 1; -6)$, $A_2(5; 1; 0)$, $A_3(-4; 0; 0)$, $A_4(-2; -2; -5)$.
4.20. $A_1(2; -1; 1)$, $A_2(5; 5; 4)$, $A_3(3; 2; -1)$, $A_4(4; 1; 3)$.
4.21. $A_1(2; 3; 1)$, $A_2(4; 1; -2)$, $A_3(6; 3; 7)$, $A_4(-5; -4; 8)$.
4.22. $A_1(2; 1; -1)$, $A_2(3; 0; 1)$, $A_3(2; -1; 3)$, $A_4(0; 8; 0)$.
4.23. $A_1(-2; 1; -1)$, $A_2(-5; -5; -4)$, $A_3(-3; -2; 1)$, $A_4(-4; -1; 3)$.

4.24. $A_1(-2; -1; 1)$, $A_2(-3; 0; -1)$, $A_3(-2; 1; -3)$, $A_4(0; 7; 0)$.
4.25. $A_1(1; 3; 6)$, $A_2(2; 2; 1)$, $A_3(-1; 0; 1)$, $A_4(-4; 6; -3)$.
4.26. $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 7)$, $A_4(1; 5; 0)$.
4.27. $A_1(4; 4; 10)$, $A_2(4; 10; 2)$, $A_3(2; 8; 4)$, $A_4(9; 6; 9)$.
4.28. $A_1(4; 6; 5)$, $A_2(6; 9; 4)$, $A_3(2; 10; 10)$, $A_4(7; 5; 9)$.
4.29. $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(8; 7; 4)$, $A_3(5; 10; 4)$, $A_4(4; 7; 8)$.
4.30. $A_1(10; 6; 6)$, $A_2(-2; 8; 2)$, $A_3(6; 8; 9)$, $A_4(7; 10; 3)$.