

І.А. Климишин

**ОСНОВИ КОСМІЧНОЇ
ГАЗОДИНАМІКИ**

Івано-Франківськ
2014

УДК 533.1
ББК 22.6
К 49

Климишин І.А.
К 49 Основи космічної газодинаміки / І.А. Климишин. – Івано-
Франківськ, 2014. – 60 с.

УДК 533.1
ББК 22.6

Навчальне видання

Климишин Іван Антонович

ОСНОВИ КОСМІЧНОЇ ГАЗОДИНАМІКИ

Комп'ютерна верстка
Технічний редактор

Ю. М. Пунжин
Я. Ю. Семко

Підп. до друку 30.12.2013 р. Формат 60x84/16.
Папір офс. Друк різнографічний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. др. арк.3,49. Наклад 100 прим.

Надруковано в друкарні видавництва «Симфонія форте»:
76019, Івано-Франківськ, вул. Крайківського, 2

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців
та виготівників видавничої продукції: серія ДК № 3312 від 12.11. 2008 р.

© Климишин І.А., 2014

Зміст

1. Фізичні (зокрема, термодинамічні) співвідношення.....	5
2. Межі і масштаби застосування ідей та методів космічної газодинаміки.....	8
3. Рівняння газодинаміки. Закони збереження маси, імпульсу та енергії.....	11
4. Перетворення звукових хвиль в ударні в умовах земної і зоряних атмосфер.....	16
5. Закони збереження, що виконуються на фронті ударної хвилі. Число Маха.....	21
6. Ударна адіабата.....	25
7. Особливості руху сильних ударних хвиль у неоднорідних середовищах.....	27
8. Структура ударних хвиль. Теплові хвилі.....	31
9. Гравітаційна нестійкість. Критерії Джинса.....	36
10. Газодинамічні і фізичні проблеми пульсації зір.....	38
11. Вплив періодичної ударної хвилі на протяжність атмосфери зорі.....	43
12. Стаціонарні потоки газу в полі тяжіння зорі. Зоряний вітер.....	47
13. Спалах Наднової як газодинамічне явище. Роль корпускулярного потоку в динаміці оболонки зорі.....	50
14. Сильні ударні хвилі в однорідній атмосфері.....	53
15. Рух ударної хвилі в атмосфері з експоненціальним розподілом густини в ній.....	57

Передмова

Спецкурс «Основи космічної газодинаміки» є певною мірою доповненням до загального «Курсу астрономії». Сказане стає зрозумілим із співставлення таких чисел: 30 років тому на астрономію виділялось 72 лекційних і практично стільки ж лабораторних годин. В останні 10 років це відповідно 20 + 20 годин. Тому частину часу майже кожної лекції доводиться виділяти на обговорення окремих питань із загального «Курсу астрономії», які важливі передусім для майбутніх учителів.

До того ж, як виявилось зокрема, для позакласної роботи у школі ефективним є метод теорії розмірностей. Тож їй тут приділено належну увагу. Також у вкрай спрощеній формі подано постановку і розв'язки окремих інших задач, знову ж таки – для можливого їх аналізу в позаурочній роботі.

При кожній нагоді ми звертаємо увагу студентів на фундаментальну літературу, зокрема, на монографії Л.І.Сєдова, К.П. Станюковича, В.Г. Горбацького, Я.Б. Зельдовича і Ю.П. Райзера, як, зрештою, і на наші публікації 1972 і 1984 років.

Автор усвідомлює недосконалість окремих сторінок цього тексту. Але ж це – усього лише стислий конспект, тоді як реально кожна лекція буває повнішою, конкретнішою. І при цьому зазначимо: публікація цього матеріалу стала можливою завдяки допомозі передусім студентів-фізиків 5-го курсу (2012/2013 навчального року – староста Мар'яна Казюк), які підготували, при підготовці доповідей до семінарських занять, його електронний варіант. Значною була також допомога Ю.М.Пунжина та Л.М.Максимів. Усім висловлюю свою найщирішу подяку.

§ 1. Фізичні (зокрема термодинамічні) співвідношення

З назви курсу «газодинаміка» випливає, що йдеться про рухи і зміни параметрів газового середовища. Тож доречно передусім пригадати, що голландське *gas* фактично походить від грецького «хаос» – безформний стан. Маємо на увазі агрегатний (від латинського «зібраний») стан, в якому частинки слабо пов'язані між собою силами взаємодії, а їх кінетична енергія більша за потенціальну.

Першою характеристикою чи то оболонки зорі, чи міжзоряного середовища є *n-концентрація частинок в одиниці об'єму*. Далі – це хімічний склад і відповідна йому *молярна маса* μ . Для нейтрального водню $\mu = 1$, іонізованого – $\mu = 1/2$ (електрон у встановленні рівноважного стану відіграє таку ж роль, як і протон). Також це *густина* ρ , що для чисто водневого середовища визначається як $\rho = n m_H$ (m_H - маса атома водню).

Далі, незалежним параметром, яким описується стан системи частинок, є виміряна за шкалою Кельвіна *температура* T . В поєднанні ρ і T визначаємо *тиск* p за формулою Клапейрона – Менделєєва

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T, \quad (1)$$

де $R = 8,31$ Дж/моль. К – універсальна газова стала, μ – *молярна маса*. У випадку хімічно однорідної речовини $\mu = \frac{M}{v}$, де M – маса, v – кількість молів цієї речовини. Кількість однакових частинок, що містяться в одному їхньому молі, звать *сталом* (числом) *Авогадро* ($N_A = 8,022 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹).

Газ, у якому сили міжмолекулярної взаємодії відсутні, звать *ідеальним* газом. Одною із важливих його характеристик є *внутрішня енергія* ε :

$$\varepsilon = c_v T, \quad (2)$$

де c_v – *питома теплоємність*, визначена при сталому об'ємі V .

Тепловою функцією, або *ентропією*, ω звать функцію стану термодинамічної системи, що дорівнює сумі їх

внутрішньої енергії і добутку тиску на об'єм системи

$$\omega = \varepsilon + pV = c_p T, \quad (3)$$

тут c_p – теплоємність при сталому тиску. Величини c_p і c_v пов'язані співвідношенням Майєра $c_p - c_v = R$. Вводиться також показник адіабати $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, так що $c_v = \frac{R}{(\gamma-1)}$, $c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma-1)}$.

Параметри c_p і c_v визначаються через ступені свободи i : $c_v = \frac{i}{2}R$, $c_p = \frac{i+2}{2}R$. Для одноатомного газу $i = 3$, так що $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$, для двоатомного $i = 5$ і $\gamma = \frac{7}{5}$, для триатомного (і більше) $i = 6$, $\gamma = \frac{4}{3}$.

Зміна стану системи описується *першим законом термодинаміки*

$$\delta Q = d\varepsilon + \delta A = c_v T + p dV \quad (4)$$

– кількість теплоти δQ , наданої системі, витрачається на зміну її внутрішньої енергії $d\varepsilon$ і на виконання системою роботи δA проти зовнішніх сил. Якщо між системою і навколишніми тілами обміну тепловою енергією немає ($\delta Q = 0$), то процес є *адіабатним*. Тоді із співвідношення

$$c_v dT + p dV = 0 \quad (5)$$

отримаємо, використавши (1),

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0,$$

так що

$$PV^\gamma = \text{const}. \quad (6)$$

Це – *рівняння Пуасона*.

Записаний вище перший закон термодинаміки (4) не вказує і не дає змоги передбачити, в якому напрямку буде перетікати енергія. Зрозуміло – від тіла, яке має вищу температуру, до тіла менш нагрітого. Але з першого закону термодинаміки це не впливає. Про це говорить її *другий закон*: у всіх явищах природи тепло само собою передається від тіл із вищою температурою до тіл, де вона менша.

Для цього процесу введено поняття ентропії s : ентропія – це функція стану системи, диференціал якої в оборотному

процесі дорівнює відношенню нескінченно малої кількості теплоти, наданої системі, до температури цієї системи:

$$ds = \frac{dQ}{T}. \quad (7)$$

Отже, при переході системи зі стану 1 у стан 2 ентропія змінюється на величину

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Всі реальні процеси необоротні, тому ентропія s ізольованої системи може лише зростати. Статистичне формулювання другого закону термодинаміки дав Л. Больцман: у кожній ізольованій системі відбуваються такі зміни, які приводять систему до її найбільш імовірного стану.

Атмосфера Землі, структура зір, зокрема Сонця, їх зовнішніх шарів є неоднорідною, хоча й перебувають вони у стаціонарному стані. Визначальною тут є *масштабна висота* H (висота однорідної атмосфери, її виводять з рівняння гідростатичної рівноваги зорі), так що густина ρ зі зростанням відстані h від певного рівня (для Землі – від її поверхні) змінюється за законом

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{gh}{a^2}} = \rho_0 e^{-\frac{h}{H}}, \quad (8)$$

тут g -прискорення сили тяжіння, a -швидкість звуку. Отже, $H = a^2/g$. Біля поверхні Землі це 8,5 км, хоча, оскільки температура повітря з висотою змінюється, то насправді тут $H = 6 - 15$ км, а при $h > 150$ км параметр H ще більший. Для сонячної фотосфери $H \approx 200$ км.

У кількох підрозділах далі для наближених розв'язків окремих задач буде використано теорію розмірностей, конкретно – *П-теорему*. Суть її полягає в наступному. Нехай певна задача описується n параметрами A_1, A_2, \dots, A_n , розмірності яких позначимо через $[A_1], [A_2], \dots, [A_n]$. Нехай, далі, t параметрів із них мають незалежні розмірності (наприклад, маса зорі $[M] = \text{кг}$, її розмір $[R] = \text{м}$). Π – теорема стверджує, що зі згаданих n параметрів можна скласти $K = n - t$ безрозмірних величин («комплексів»), кожен із яких і буде, з точністю до сталого коефіцієнта, визначати певний закон природи. Тож

теорія розмірностей дає змогу отримати залежність між параметрами задачі з точністю до множника, величина якого здебільшого близька до одиниці.

§ 2. Межі і масштаби застосування ідей та методів космічної газодинаміки

Космічна газодинаміка (КГД) – один із найважливіших розділів теоретичної фізики. Її завдання – вивчати динаміку міжзоряного середовища, дослідження формування зір та певних етапів їх розвитку, стану в оболонках зір, пульсацій зір, явища спалахів Нових і Наднових зір.

Специфіка цієї галузі теоретичної фізики в тому, що тут йдеться про вкрай великі масштаби у просторі, йдеться про необхідність урахування впливу і ролі гравітації та магнітних полів. Її інструментом є нелінійні диференціальні рівняння, і тому вже від початку дослідження стає очевидним, що розв'язок якоїсь конкретної задачі далеко не завжди можливий.

На відміну від інших суцільних середовищ, газ здатний істотно змінювати свою густину ρ і внутрішню енергію ε . При розв'язанні задач доводиться (якщо стан не рівноважний) поруч із макроскопічними явищами враховувати й елементарні мікропроцеси. Тому є два підходи: 1) класичний гідродинамічний і 2) з точки зору кінетичної теорії – розглядати системи з дуже великою кількістю частинок.

Важливим є питання про межі застосування методів космічної газодинаміки. Відповідь тут наглядна: їх можна застосувати доти, доки довжина вільного пробігу частинки $l \ll d$, тут d – розмір системи (атмосфери зорі чи туманності), а $l \approx \frac{1}{\sigma \cdot n}$, де $\sigma = \pi r_k^2$ – ефективний переріз частинки (атома) і $n \approx 10^{-15} - 10^1 \text{ см}^{-3}$ – число частинок в одиниці об'єму. Так в атмосфері Землі (біля поверхні) $n = 10^{19} \text{ см}^{-3}$, у міжпланетному просторі на відстані 1 а.о. $\approx 10^4 \text{ см}^{-3}$. Загалом методами КГД можна вивчати і процеси в сонячній короні, де все ж $l \ll d$.

Про те, що вивчення усього цього кола задач є можливим завдяки адекватно сформульованим законам збереження маси, імпульсу та енергії, мова – попереду. Тут ще слід згадати ті аспекти космічної газодинаміки, які певною мірою стоять осторонь найважливіших її завдань. Це, передусім, *міжзоряна турбулентність* (з урахування впливу магнітних полів але й без них), як також – рухи в міжзоряному просторі *іонізаційних* та *рекомбінаційних* хвиль.

Пригадаємо: ще 1883р. англійський фізик-інженер Осборн Рейнольдс (1842-1912) з'ясував можливості переходу *ламінарної*, упорядкованої течії рідини, у якій рідина (газ) переміщується шарами, паралельними напрямку течії, у течію *турбулентну* – безладну, невпорядковану, коли частини рідини або газу рухаються складними траєкторіями. Визначальним тут є число *Рейнольдса*

$$Re = ul/\nu \quad (1)$$

де $\bar{u} = \frac{Q}{F}$ – середня швидкість течії в трубі (у каналі), d – її діаметр, Q – кількість речовини, що протікає за одиницю часу, F – площа поперечного перерізу труби, ν – кінематична в'язкість. Перехід від ламінарної течії до турбулентної відбувається при $Re_{\text{крит}} = 2300$.

З'ясовано, що рух міжзоряного газу аж ніяк не можна розглядати як рух нестискувальної рідини. Бо тут є випадки наявності швидкостей, які в багато разів перевищують швидкість звуку, є хмари міжзоряного газу із дуже значними флуктуаціями густини, є взаємодія із магнітними полями. Так виявляє себе турбулентність із надзвуковими швидкостями.

Найбільші масштаби турбулентного руху в міжзоряному середовищі сягають 300 світлових років. Вони підтримуються спалахами Наднових зір, зіткненнями міжзоряних газопилових хмар тощо. Дослідженнями цих рухів з урахуванням впливу магнітних полів займається *магнітна гідродинаміка*. У принципі методи досліджень тут такі ж, як і в звичайній газодинаміці, однак проблема отримання математичних розв'язків істотно ускладнюється.

Важливим є таке: рівняння газодинаміки – нелінійні. Тому рух більшого масштабу неминує породжує такий же хаотичний рух меншого масштабу, той іще меншого і т.д. Це супроводжується перетіканням кінетичної енергії до найменших масштабів із перетворенням її саме тут у тепло – в цих найменших масштабах. Це – феномен *дисипації енергії* при турбулентних рухах. Тому, якщо L – основний масштаб турбулентності і v_L – швидкість, відповідна йому, то на всій ієрархії масштабів правильним є співвідношення, яке пов’язує із цими величинами кількість кінетичної енергії ε , котру ці джерела передають одному граміві речовини міжзоряного середовища:

$$\varepsilon \sim \frac{v_L^3}{L} \sim \frac{v_e^3}{l}.$$

Звідси і випливає закон *Колмогорова-Обухова*, що визначає залежність швидкості руху від ε та l :

$$v_e \approx (\varepsilon l)^{1/3}. \quad (2)$$

З аналізу стану міжзоряного середовища, який визначається, зокрема, спалахами Наднових зір, випливає що $L \approx 100$ пк, $v_L \approx 7$ км/с і $\varepsilon \approx 10^{-3}/\text{г} \cdot \text{с}^3$. Тобто основна частина енергії спалаху дисипує безпосередньо в тепло чи переходить у випромінювання і лише близько 1% перетворюється в енергію міжзоряного газу.

Своєрідним виявом розривів у рухах міжзоряного газу є *іонізаційні фронти*, які відділяють ділянки нейтрального водню (HI) і водню іонізованого (HII). Ширина перехідного шару між зонами HI і HII відносно вузька – порядку $\frac{0,5}{n_H} nk$. І це дозволяє розглядати його як певну поверхню розриву. Особливим тут є різкий стрибок температури. Бо температура газу в HI здебільшого не перевищує 100 К, тоді як у HII вона сягає 1000 К. Відповідно і тиск у зоні HII навіть у 100 разів більший, ніж у HI . Отже, ідеться про розширення зони HII - про рух фронту іонізаційної хвилі в бік холодного середовища. І це – задача, яку також розглядає космічна газодинаміка. На фронті такої хвилі виконуються закони збереження маси, імпульсу та

енергії (див §§ 3 і 5). Є, однак, особливість у русі іонізаційної хвилі: відтік газу від іонізаційного фронту обумовлений лише тиском газу безпосередньо за фронтом. А тому він (газ) повинен рухатися із місцевою швидкістю звука a_2 . Це є умовою *точки Жуге*. Вона тут додаткова, четверта. Тому розв'язок системи рівнянь, які пов'язують параметри ρ , p і T перед і за фронтом, стає однозначним, якщо лише перед фронтом іонізаційної рухається *ударна хвиля* або, в інших випадках – *хвиля розрідження*.

Іншим виявом збурення середовища, який також вимагає застосування методів космічної газодинаміки, є *нестійкість Релея-Тейлора*. З'являється вона тоді, коли з якихось причин у газоподібному чи рідкому середовищі за наявності тяжіння або прискореного руху важчий шар (де більша густина) опиняється зверху. Тоді виникають відхилення від рівноважних значень густини, тиску і швидкості – $\Delta\rho$, Δp і Δu : розпочинається проникнення важчих елементів речовини вниз, внаслідок цього формуються її неоднорідності. Такі процеси регулярно трапляються в сонячній атмосфері.

Також слід згадати про *гравітаційну нестійкість*, що виникає в самогравітуючому середовищі внаслідок проходження через нього поздовжніх хвиль, які створюють епізодичні згущення та розрідження речовини. *Критерій Джинса*, яким визначається можливість розвалу спочатку однорідного середовища під дією двох сил – тяжіння і пружності, описаний далі в §9.

§3. Рівняння газодинаміки. Закони збереження маси, імпульсу та енергії

Система основоположних рівнянь газодинаміки – це закони збереження маси, імпульсу та енергії, записаних у диференціальній формі.

а) *Закон збереження маси*. Виділимо в газі довільний об'єм V , так що $m = V\rho$ – його маса. Її зміна з часом – $\frac{\partial m}{\partial t}$

обумовлена потоком речовини через поверхню S . Тож кількість речовини, що витікає зі швидкістю \vec{u} за одиницю часу з об'єму V , є

$$\oint \rho \vec{u} d\vec{S}.$$

Інтегрування проводиться по всій замкненій поверхні, яка охоплює цей об'єм.

Відповідне ж зменшення кількості речовини в цьому об'ємі V буде таким

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV.$$

Прирівнюючи ці вирази та використавши співвідношення переходу інтеграла по поверхні в інтеграл по об'єму – формулу *Остроградського – Гауса*

$$\oint_S \rho \vec{u} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \rho \vec{u} dV,$$

отримуємо

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} \right) dV = 0. \quad (1)$$

Звідси випливає, що підінтегральний вираз рівний нулю, тому й маємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0 \quad (2)$$

– рівняння неперервності чи, інакше, – **закон збереження маси**.

б) **Рівняння руху** (рівняння Ейлера (1755), закон збереження імпульсу).

Його можна вивести за зразком (1): з боку навколишнього середовища на елемент об'єму діє сила, обумовлена різницями тиску (передусім). Однак, більш наглядним є використання другого закону Ньютона:

$$F = ma. \quad (3)$$

Тобто,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{F}, \quad \vec{F} = -\nabla p - \rho \nabla \varphi,$$

де ∇p – градієнт тиску, φ – потенціал сили тяжіння. У свою чергу :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}. \quad (4)$$

Так отримуємо:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\varphi. \quad (5)$$

У простих випадках

$$\nabla p = \frac{dp}{dr}, \quad \nabla\varphi = \frac{Gm}{r^2},$$

тому рівняння руху набуває вигляду:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{Gm}{r^2}. \quad (6)$$

Зазвичай його виводять з тих же міркувань, що й закон збереження маси. Виділяють у речовині (газ, рідина) певний об'єм dV . Повна сила, що діє на нього, рівна інтегралу:

$$-\oint \rho d\vec{S},$$

взятому по поверхні цього об'єму. Перетворюючи його в інтеграл по об'єму, маємо:

$$-\oint \rho d\vec{S} = -\int \text{grad } \rho dV.$$

Як бачимо, на кожний елемент об'єму речовини dV з боку навколишнього середовища діє сила $-dV \text{ grad } p$, а на одиницю об'єму $-\text{grad } p$. Тож, прирівнюючи її до добутку маси ρ одиниці об'єму речовини на її прискорення $\frac{d\vec{u}}{dt}$, отримаємо (за відсутності тяжіння)

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\text{grad } p. \quad (a)$$

Тут важливе таке. Величина $\frac{d\vec{u}}{dt}$ відображає зміну швидкості речовини в процесі руху цього елемента маси (в цьому суть розгляду задачі «у формі Лагранжа»). Частіше використовується інший підхід («у формі Ейлера»): записується «явно» зміна тої чи іншої величини (швидкості, густини тощо) в «нерухомих

точках простору». Конкретно тоді враховують, що зміна $d\vec{u}$ швидкості елемента маси складається з двох частин: з її зміни упродовж часу dt у заданій точці простору (це $-\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}dt$) і з різниці швидкості в один і той же момент часу у двох точках, віддалених на відстань $d\vec{r}$, яку частинка маси проходить за час dt , так що

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}dx + \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}dy + \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}dz = (d\vec{r}\nabla)\vec{u}.$$

Тому маємо:

$$d\vec{u} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}dt + (d\vec{r}\nabla)\vec{u},$$

або

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}. \quad (6)$$

Підставляючи це співвідношення в (а), отримаємо:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}grad\ \rho. \quad (в)$$

З урахуванням же можливої наявності сили тяжіння $\rho\vec{g}$ (прискорення \vec{g}) і знаходимо рівняння руху у формі, аналогічній (б), – рівняння Ейлера.

в) **Закон збереження енергії.** У кожному випадку, розглядаючи задачу про рух речовини, слід приймати до уваги процеси дисипації енергії – її втрати внаслідок внутрішнього тертя (в'язкості), теплообміну між різними елементами речовини. Але тоді задача дуже ускладнюється, тому на першому етапі дослідження, де це лише можливе, вважають згадані процеси неістотними («мало визначальними»). Тоді йдеться про рух ідеального газу (рідини).

Інакше кажучи, розглядають стани адіабатичності процесу руху речовини. А тут ентропія s кожного елемента речовини залишається незмінною, тобто виконується співвідношення:

$$\frac{ds}{dt} = 0.$$

Або інакше:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u} grads = 0. \quad (7)$$

З використанням же рівняння неперервності (2) отримуємо, що

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \vec{u}) = 0. \quad (8)$$

Тут величина $\rho s \vec{u}$ є густиною потоку ентропії.

Як відомо з термодинаміки, ентропія s пов'язана з тепловою функцією ω (в розрахунку на одиницю маси) співвідношенням:

$$d\omega = Tds + Vdp, \quad (9)$$

де $V = \frac{1}{\rho}$ – питомий об'єм, T – температура. Оскільки $s = \text{const}$, то маємо:

$$d\omega = Vdp = \frac{1}{\rho} dp.$$

І отже:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \omega. \quad (10)$$

Це дає змогу переписати рівняння (в) так:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\operatorname{grad} \omega. \quad (11)$$

З векторного аналізу відоме таке співвідношення

$$[\vec{u} \operatorname{rot} \vec{u}] + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} u^2, \quad (12)$$

тому рівняння (11) можна записати і так:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - [\vec{u} \operatorname{rot} \vec{u}] = -\operatorname{grad} \left(\omega + \frac{u^2}{2} \right) \quad (13)$$

Як побачимо далі при розгляді умов збереження маси, імпульсу та енергії на фронті ударної хвилі, величини \vec{u} та ω пов'язані цими умовами. Це і дає безпосередній зв'язок правої частини рівняння (13) перед і за фронтом ударної хвилі, що рухається в середовищі зі швидкістю D .

Загалом можна зазначити, що рівняння енергії, записане для випадку руху речовини, еквівалентне *першому закону термодинаміки* – зміна внутрішньої енергії ε узятій частини речовини відбувається за рахунок роботи стиску, яку здійснює

над нею навколишнє середовище, а також внаслідок енергії Q , привнесеної зовнішніми джерелами або втраченої, зокрема, на висвічування

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{dV}{dt} = Q. \quad (14)$$

Розмірність Q очевидна: Дж/кг с.

З урахуванням співвідношення (4) рівняння (14) запишеться й так

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} \right) = \text{div} \left[\rho \bar{u} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \bar{u} \right] + \rho Q. \quad (15)$$

Підкреслимо: у випадку $Q \neq 0$ задача про рух речовини істотно ускладнюється.

§ 4. Перетворення звукових хвиль в ударні в умовах земної і зоряних атмосфер

Це питання було особливо актуальним у XIX столітті при з'ясуванні проблеми: “У фотосфері Сонця температура сягає 6000 K, у хромосфері ж – понад 10000 K і в короні – декількох мільйонів”, тож – яким є механізм нагріву (розігріву) ?

Здавалося, фактор очевидний. Зовнішні шари оболонки Сонця перебувають у стані своєрідного кипіння (*конвекції*): нагріті елементи речовини підіймаються вгору, вдаряють у “спокійний газ” і – породжують *звукові хвилі*. Ті, у свою чергу, рухаючись в хромосферу, перетворюються у *хвилі ударні*, які і передають, гальмуючись, свою енергію навколишньому середовищу (процес *дисипації*).

Згодом виявлено, що більш ефективними тут є *магнітогідродинамічні хвилі*, які, поширюючись уздовж магнітних силових ліній, що є у хромосфері Сонця, переносять енергію конвективних рухів у корону.

І все ж питання про “виродження”, про перетворення звукової хвилі в ударну заслугоує аналізу. Воно розширює наші уявлення про всю мозаїку процесів, які розігруються навколо нас і в більших масштабах.

Отже, розглянемо коротко основні типи хвильових рухів та умови їх поширення в неоднорідній атмосфері.

На кожен фіксований елемент газу при відхиленні його від положення рівноваги діє декілька сил. Це, передусім, сила пружності, сила тяжіння і, нарешті, архимедова сила плавучості. При адіабатичному відхиленні по вертикалі густина елемента газу відрізняється від густини навколишнього середовища. Коливання навколо положення рівноваги виникають, якщо різниця сил, діючих на елемент газу, змушує його повертатись у вихідне положення. Сумісна дія сил пружності, архимедової сили та сили тяжіння приводить до одночасного виникнення в зоряних атмосферах рухів, що відомі під назвою *акустичних* та *гравітаційних* хвиль.

Отже, припустимо, що в неоднорідній атмосфері виникло слабе збурення, для якого відхилення тиску й густини від їх рівноважних значень зв'язані між собою адіабатичним співвідношенням

$$\frac{dp}{dt} = a^2 \frac{d\rho}{dt}. \quad (1)$$

Беручи до уваги співвідношення (2),(3),(6) з §3 та здійснюючи операцію лінеаризації, отримуємо рівняння:

$$\rho_1 \frac{d\vec{u}}{dt} = -grad p' + \vec{g}, \quad (2)$$

$$\frac{d\rho'}{dt} + div(\rho_1 \vec{u}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dp'}{dt} + \rho_1 \vec{u} \cdot \vec{g} + \rho_1 a^2 div \vec{u} = 0. \quad (4)$$

Тут p' і ρ' – збурення тиску та густини, p_1 і ρ_1 – їх рівноважні значення, причому $p' \ll p_1$, $\rho' \ll \rho_1$.

Рівняння (4) випливає з (1) і (3) з урахуванням умови *гідростатичної рівноваги*.

Далі, вважається, що координатні осі x та y лежать у горизонтальній площині, а вісь z має напрямок уздовж дії сили тяжіння (вниз). Виключаючи з системи (2) – (4) величини p та ρ , знаходимо після нескладних перетворень рівняння для $\chi = div u$:

$$\frac{d^4 \chi}{dt^4} - a^2 \Delta \frac{d^2 \chi}{dt^2} - \left(\gamma g + \frac{da^2}{dz} \right) \frac{d^3 \chi}{dt^2 dz} - \left[g(\gamma - 1) - \frac{da^2}{dz} \right] g \Delta_1 \chi = 0, \quad (5)$$

де

$$\Delta_1 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}.$$

При цьому виконується також рівність

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{rot } \vec{u} = \left[(\gamma - 1)g - \frac{da^2}{dz} \right] \left(\vec{i} \frac{d}{dy} - \vec{j} \frac{d}{dx} \right) \text{div} \vec{u}, \quad (6)$$

де \vec{i} та \vec{j} – одиничні вектори в напрямках x та y відповідно.

З (6) випливає, що рух може бути безвихровим:

а) якщо виконується умова $\gamma = 1$, $a = \text{const}$, що можливе лише при ізотермічному русі в середовищі з постійною температурою;

б) якщо виконується умова $\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma A} g$, яка задовольняється у випадку конвективної рівноваги.

Для дальшого аналізу рівняння (5) зручно ввести змінну

$$\Psi = p_1^{1/2} \chi = p_1^{1/2} \text{div} \vec{u}, \quad (7)$$

що дозволяє звести його до вигляду

$$a^2 \Delta \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + \frac{da^2}{dz} \frac{d^3 \Psi}{dz dt^2} - \frac{g^2 \gamma^2}{4a^2} \frac{d^2 \Psi}{dt^2} - g \left[\frac{da^2}{dz} - (\gamma - 1)g \right] \Delta_1 \Psi - \frac{d^4 \Psi}{dt^4} = 0. \quad (8)$$

Якщо припустити, що атмосфера є ізотермічною ($a^2 = \text{const}$), то рівняння (8) істотно спрощується і набуває вигляду

$$a^2 \Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\gamma g^2}{2a} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + g^2 (\gamma - 1) \Delta_1 \psi - \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0. \quad (9)$$

Припустимо, що рух середовища можна розглядати як просте гармонічне коливання, коли величина χ змінюється за законом (літера ω вживається уже в цілком іншому значенні!)

$$\chi \sim e^{i(\omega t - \vec{k}r)} \sim \psi, \quad (10)$$

де ω – циклічна частота; k – хвильовий вектор із компонентами l , m та n . Проводячи звичайне в таких випадках диференціювання (10) та підставляючи похідні від ψ в (9), знаходимо дисперсійне рівняння у вигляді

$$\omega^4 - \left(\frac{\gamma g}{2a} \right)^2 \omega^2 = [a^2 \omega^2 - g^2 (\gamma - 1)](l^2 + m^2) + n^2 a^2 \omega^2. \quad (11)$$

Дослідження цього рівняння приводить до важливого висновку: частота ω та хвильове число k є дійсними величинами, якщо 1) $\omega > \omega_1$ або 2) $\omega < \omega_2$, де

$$\omega_1^2 = \left(\frac{\gamma g}{2a}\right)^2, \quad (12)$$

$$\omega_2^2 = \frac{g^2(\gamma-1)}{a^2}. \quad (13)$$

Це означає, що коливання з частотою $\omega_2 < \omega < \omega_1$ поглинається в атмосфері і не поширюється в ній. Справді, при уявному k ($k = -ix$) зміна величини x записується виразом

$$x \sim e^{-xz} e^{i\omega t},$$

в якому перший співмножник визначає закон зміни амплітуди з відстанню.

Тож в атмосфері зорі можуть існувати хвилі трьох типів: a (акустичні), g (гравітаційні) та проміжні s (стоячі хвилі). Це певною мірою описане у монографії “Ударні хвилі” (1972).

Прослідкуємо, як змінюється амплітуда коливання при поширенні його вгору у напрямку зменшення густини. Для простоти прийемо, що атмосфера є ізотермічною, так що розподіл густини в ній описується законом:

$$\rho_1 = \rho_{10} e^{-\frac{z}{H}}. \quad (14)$$

Позначимо вертикальне зміщення частинки через $\xi(z, t)$. Якщо ξ , Δp та $\Delta \rho$ невеликі, то рівняння газодинаміки лінеаризуються і можуть бути зведені до вигляду

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_1 = -\frac{\partial}{\partial z}(p - p_1); \quad (15)$$

$$\rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) = \rho_1. \quad (16)$$

Скористаємось умовою адіабатності процесу, для якого

$$\Delta p = a^2 \Delta \rho, \quad \Delta \rho = \rho \frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

Одержуємо:

$$p - p_1 = -\gamma \rho_1 \frac{\partial \xi}{\partial z}. \quad (17)$$

I, нарешті, знаходимо хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + g\gamma \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

розв'язок якого має вигляд

$$\xi = \xi_0 e^{2H} e^{i(\omega t - kz)}. \quad (19)$$

Як видно, амплітуда коливання зростає з висотою експоненціально. Це зрозуміло, бо такий закон є відображенням закону збереження енергії хвилі при русі її в бік зменшення густини. Однак при великих зміщеннях ξ вже необхідно переходити до нелінійного трактування задачі, що пов'язане з пошуками умов перетворення біжучих хвиль в ударні.

Отже, з лінеаризованих рівнянь газодинаміки випливає, що слабке збурення (для якого $\Delta\rho \ll \rho_1$ і $\Delta p \ll p_1$) поширюється в атмосфері зі швидкістю звука. Кожна частина середовища при цьому здійснює пружні коливання відносно положення рівноваги, а швидкість руху цієї частини пов'язана зі зміною густини середовища співвідношенням

$$u = \pm \frac{a_1}{\rho_1} \Delta\rho = \pm \frac{\Delta p}{\rho_1 a_1}. \quad (20)$$

Тут знак $\langle + \rangle$ належить до хвилі, що поширюється у напрямку додатніх x , і навпаки.

Звідси випливає також, що швидкість частинки спрямована в напрямку руху там, де речовина системи стиснена ($\Delta\rho > 0$).

Складнішою є картина, коли збурення має довільну, не безмежно малу амплітуду. Поширення такого збурення є біжучою з одного боку хвилею, яка описується так званими особливими розв'язками газодинаміки. Певна комбінація газодинамічних величин зберігає своє значення уздовж напрямку на площині x, t , який визначається умовою $\frac{dx}{dt} = u + a$.

Ця комбінація газодинамічних параметрів переноситься з швидкістю $u + a$. Якщо два стани характеризуються різними значеннями a (і, відповідно, u), то вони будуть з різними швидкостями. Припустимо, що початкове збурення мало синусоїдальний профіль. У процесі його поширення точки, що

знаходяться на гребені хвилі, де $\Delta\rho > 0$, у відповідності з (3) будуть рухатися швидше (тут a та u є більшими) від усіх інших точок хвилі. Внаслідок цього відбувається деформація хвилі: зона стиску наче намагається перегнати зону розрідження, що йде перед нею. Гребінь хвилі стає дедалі крутішим і перетворюється врешті у вертикальний – у фронт *ударної хвилі*.

Як відомо, звукова хвиля несе енергію. На фронті ударної хвилі ця енергія необоротно перетворюється в теплову. Газ за фронтом ударної хвилі нагрівається, а сама хвиля затухає.

Таким чином, можна уявити перенесення тепла від шарів зорі з розвиненою конвекцією в шари гарячого газу через відносно холодний «коридор». Саме так і побудована хромосфера Сонця і, мабуть, усіх інших зір, в яких є потужна конвективна оболонка. З цієї причини питання про довжину пробігу звукової хвилі до її перетворення в ударну і є цікавим, зокрема, з точки зору теорії зоряних атмосфер.

§ 5. Закони збереження, що виконуються на фронті ударної хвилі. Число Маха

На фронті ударної хвилі виконуються закони збереження маси, імпульсу та енергії. Їх отримують із обговорених і записаних у диференціальній формі тих же законів.

Зокрема, із закону збереження маси (3.2)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0. \quad (1)$$

у плоскому випадку маємо

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0. \quad (2)$$

Інтегруємо (2) в межах $[x_1, x_2]$, де x_1 та x_2 – точки, вибрані на осі x та відлічені вправо і вліво від $x=0$, що співпадає з положенням фронту ударної хвилі, яка рухається в напрямі точки x_1 зі швидкістю D , як це відображено на рисунку 1.

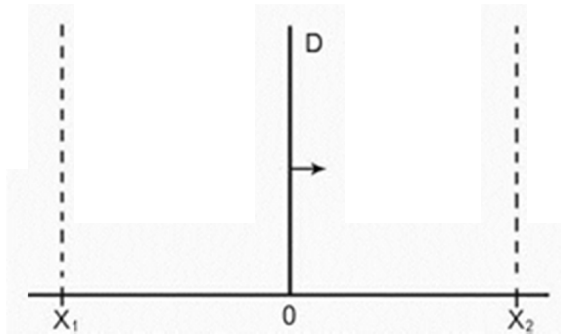


Рис. 1. Зображення руху ударної хвилі зі швидкістю D

Так отримуємо:

$$\int_{x_2}^{x_1} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_{x_2}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \rightarrow \rho u|_{x_1} = \rho u|_{x_2},$$

тобто при $x_2 - x_1 \rightarrow 0$ і отримуємо закон збереження маси:

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1. \quad (3)$$

У навчальному процесі іноді розглядають потоки величин через ударний фронт "в явному вигляді".

а) **Маси:** за 1 сек. через фронт UX проходить стовпчик висотою u_1 , об'ємом $u_1 \cdot 1 \text{ см}^2$, його маса $m = u_1 \cdot 1 \text{ см}^2 \cdot \rho_1$. Відносно фронту UX газ за ним віддаляється зі швидкістю u_2 . І тій же масі газу відповідає тепер об'єм $u_2 \cdot 1 \text{ см}^2$, так що $u_2 \cdot 1 \text{ см}^2 \cdot \rho_2$. Це й описується співвідношенням (3).

Загалом (і це слід пам'ятати) рух фронту ударної хвилі розглядається відносно певного нерухомого початку відліку координати x . Як ось: коли ударна хвиля рухається в оболонці зорі – то від її центра ($r=0$) або від нижнього рівня фотосферного шару зорі. Розглядаючи рис. 2 з тої точки зору, розрізняють швидкість u_2 відносно фронту UX , але і швидкість $u = D - u_2$, – швидкість газу, що за фронтом UX , відносно згаданого нерухомого центра.

Отже, фронт UX рухається "вправо" зі швидкістю $D = -u_1$, речовина за ним віддаляється від нього зі швидкістю $u_2 = D - u$. Їй відповідає за фронтом маса $m = u_2 \cdot 1 \text{ см}^2 \cdot \rho_2$. Що й відображене у формулі (1) та на рис. 2.

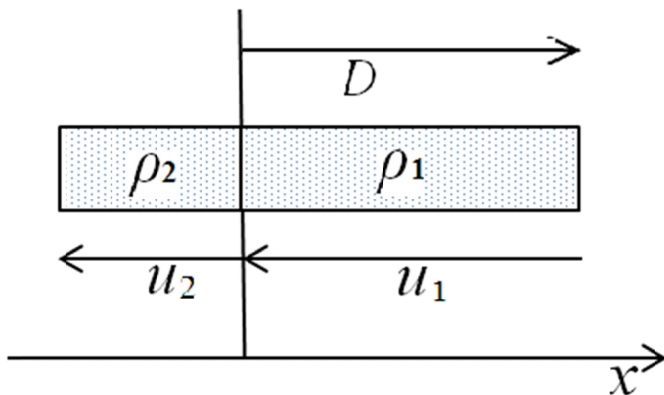


Рис. 2. До виведення закону збереження маси на фронті ударної хвилі, який рухається зі швидкістю D

б) **Закон збереження кількості руху.** Як знаємо, імпульс діючої сили $f\Delta t = tu$ кількості руху, набутого масою m за час Δt дії сили. Тут діючою силою є різниця тисків $p_2 - p_1$ при $\Delta t = 1\text{с}$. Швидкість, яку набуває газ масою $m_1 = \rho_1 D$, рівна u . Отже:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u D = \rho_1 D^2 - \rho_1 D(D - u),$$

Тобто
або ж

$$p_1 + \rho_1 D^2 = p_2(D - u)^2,$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \quad (4)$$

в) **Закон збереження енергії.** Нехай ε – внутрішня енергія, $\omega = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$ – теплова функція, $\frac{u^2}{2}$ – кінетична енергія в розрахунку на 1 грам. Робота ж на стиск газу тут рівна величині $p_2 u$, на один грам речовини – $\frac{p_2 u}{\rho_1 D}$, тому баланс енергії може бути записаний у вигляді:

$$\varepsilon_1 + \frac{p_2 u}{\rho(D-u)} = \varepsilon_2 + \frac{u^2}{2},$$

чи інакше

$$\varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{D_2}{2} = \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{(D-u)^2}{2}. \quad (5)$$

Маючи ж співвідношення, яке поєднує величини ε та ω , знаходимо, що

$$\omega_1 + \frac{u_1^2}{2} = \omega_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (6)$$

Так отримуємо сукупність законів збереження маси, імпульсу та енергії на фронті ударної хвилі у вигляді:

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2, \\ \omega_1 + \frac{u_1^2}{2} &= \omega_2 + \frac{u_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Використаємо наведені вже раніше співвідношення, що відображають зв'язки тиску p із густиною ρ ($\rho = \frac{1}{V}$, де V – питомий об'єм), внутрішньої енергії ε і теплової функції із ρ , в які входять як параметри молярна маса μ і відношення питомих теплоємностей при сталих тиску та об'ємі – c_p і c_v . Тобто при

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T, \quad \omega = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}, \quad M = \frac{D}{a_1}.$$

Так знаходимо послідовно, що

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \gamma M^2 \left[1 - \frac{u_2}{u_1} \right], \\ \frac{u_2}{u_1} &= \frac{V_2}{V_1} = 1 - \frac{2}{(\gamma+1)} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

І оскільки

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2 p_2 V_2}{\mu_1 p_1 V_1}, \quad (9)$$

то в решті-решт отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \frac{2\gamma M^2}{\gamma+1} - \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}, \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2+2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2(\gamma+1)^2 M^2}{\mu_1[2\gamma M^2 - (\gamma-1)][(\gamma-1)M^2 + 2]},$$

що у випадку сильних ударних хвиль зводиться до простих співвідношень

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M^2}{\gamma+1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2(\gamma-1)\mu_2 M^2}{(\gamma+1)^2 \mu_1}, \quad (11)$$

або, при $\gamma=5/3$:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 4, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{5}{4} M^2, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{16} \frac{\mu_2}{\mu_1} M^2. \quad (12)$$

Тут обмежуємось випадком, коли нехтуються, з одного боку, втрати енергії на іонізацію газу, на висвічування (наявність тиску та енергії випромінювання), як також можливої ролі магнітного поля.

§ 6. Ударна адіабата

Як уже згадано в §1, адіабатним є процес, який відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем.

Запишемо перший закон термодинаміки у звичайному вигляді:

$$dQ = dU + pdV. \quad (1)$$

Тут dQ – кількість теплоти, наданої системі, $dU = c_V dT$ – приріст внутрішньої енергії, pdV – робота, виконана при зміні об'єму на величину dV . Якщо процес адіабатний, то $dQ = 0$, і вираз (1) набуває вигляду:

$$c_V dT + pdV = 0, \quad (2)$$

а, використовуючи рівняння газового стану $pV = RT$ і рівняння Р.Маєра $c_p - c_V = R$, отримуємо рівняння *адіабати Пуасона*:

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (3)$$

Доречно нагадати, що $c_V = \frac{i}{2}R$, $c_P = (i + 2)R/2$, і що, отже, $\frac{c_P}{c_V} = \frac{i+2}{i}$, де i – ступінь свободи. Для одноатомного газу $i=3$, $\gamma = 5/3$, для двоатомного $i=5$ $\gamma = 7/5$, для трьохатомного $i=6$, $\gamma = 4/3$.

Перейдемо тепер до виведення рівняння ударної адіабати і подальшого стислого аналізу. Із наведених вище у § 5 законів збереження маси та імпульсу отримуємо, що

$$u_1^2 = V_1^2 \frac{p_1 - p_2}{(V_2 - V_1)},$$

$$u_2^2 = V_2^2 \frac{p_1 - p_2}{(V_2 - V_1)}.$$

Використовуючи їх та закони збереження енергії на фронті ударної хвилі, знаходимо

$$\omega_1 + \frac{u_1^2}{2} = \omega_2 + \frac{u_2^2}{2}.$$

А це – один із варіантів формули *ударної адіабати*, інакше *адіабати Гюгоніо*:

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_1 - V_2). \quad (4)$$

Підставляючи вирази для ω_1 та ω_2 , маємо

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} p_2 V_2 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} p_1 V_1 + p_1 V_1 - p_2 V_2 = 0. \quad (5)$$

На площині pV (рис.3) ударна адіабата є кривою, що проходить через точку (P_1, V_1) , яка відображає початковий стан. Вона ж поділяє адіабату Гюгоніо на дві частини: справа від точки (p_1, V_1) ентропія речовини менша, зліва – більша, ніж в 1.

При переході через фронт ударної хвилі газ нагрівається, а його ентропія зростає ($s_2 > s_1$). Тому реальний зміст має лише ліва частина адіабати Гюгоніо.

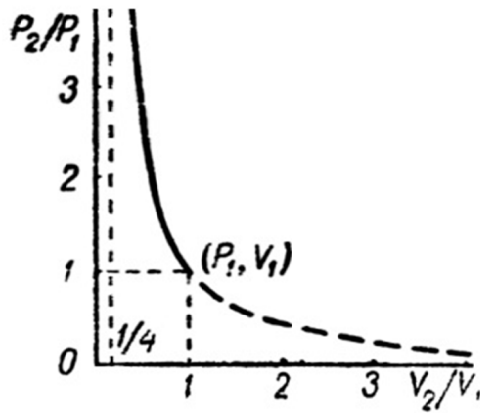


Рис.3 Ударна адиабата

З цієї формули випливає, що при досить великій амплітуді ударної хвилі ($p_2 \gg p_1$), тобто при $M \gg 1$, густина газу має певну межу: при $\gamma = \frac{5}{3}$ максимальний стиск $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 4$, тобто $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{4}$.

Співставляючи взаємно адиабати Гюгоніо і Пуассона на діаграмі pV , які мають спільну точку вихідного стану (p_1, V_1) , можна зорієнтуватися, що при зростанні густини ρ (зменшенні V) перша із них займає істотно вище положення. Це й зрозуміле: адже при переході через фронт ударної хвилі і стисканні газу відбувається його нагрівання, його ентропія зростає, при цьому для заданої зміни об'єму V необхідна більша зміна тиску p , ніж при адиабатичному стиску.

§ 7. Особливості руху сильних ударних хвиль у неоднорідних середовищах.

У наш час конкретні задачі формування і руху сильних ударних хвиль, зокрема в оболонках зір, розв'язують на потужних ЕОМ. Однак існує потреба попередньої оцінки (прикидки) окремих параметрів задачі, зокрема – початкової

швидкості УХ, очікуваних її змін у процесі розвитку явища. Як також, зрештою, – оцінки прикінцевих результатів. І те, і друге завжди було край нелегкою проблемою. Значною мірою це уже перевірене “експериментами” (так наближено можна назвати підриви атомних зарядів під, на і над поверхнею нашої планети). Певні деталі, що стосуються висвічування енергії ударної хвилі в процесі її руху в бік зовнішніх шарів оболонки (атмосфери) зорі обговоримо в §8.

Окремі грані питання про рух сильної ударної хвилі в неоднорідному середовищі (в оболонці зорі чи в атмосфері планети) вдалося поступово з’ясувати за допомогою наближених методів (їхній загальний аналіз викладено в наших монографіях 1972 і 1984 рр.). Це передусім методи Брінклі-Кірквуда, Чізнелла та Уізема, що є математично громіздкими і, як доведено нами, – дуже неточними. Їхні розв’язки у випадку центрально-симетричного руху дають майже однакову залежність швидкості фронту сферичної ударної хвилі D від густини ρ і відстані до центру симетрії r (апроксимація С.А.Каплана):

$$D = \text{const}(\rho_1 r^2)^{-1/4}. \quad (1)$$

Усвідомлюючи неточність цього співвідношення, її автор поставив перед нами задачу: уточнити (1), розв’язуючи систему диференціальних рівнянь, замінюючи їх системою різницевих рівнянь, за допомогою ЕОМ, що на той час (1979) вже були в Інституті Прикладних проблем математики і механіки (м. Львів). Конкретні обчислення провів Б.І.Гнатик для трьох випадків розподілу густини в оболонках зір:

- 1) оболонка зі степеневим законом зміни густини

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^m, \quad (2)$$

- 2) політропна оболонка

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{1-r}{r}\right)^n, \quad (3)$$

- 3) експоненціальна атмосфера, де

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{r-r_0}{H}\right). \quad (4)$$

Тут n – індекс політропи, $H = \frac{a^2}{g}$ – висота однорідної атмосфери (масштабна висота, відстань, на якій густина зменшується в $e = 2,71$ раза), g – прискорення сили тяжіння.

Для зорі, яка перебуває у стані променистої рівноваги, $n=3,25$; коли ж зоря повністю переміщується («кипить» – конвективна модель), $n = 1,5$.

Проведено значну кількість обчислень на ЕОМ для варіантів (1)-(3) з метою отримати наближений, але узагальнений розвиток задачі. Так знайдено, що для сферичної ударної хвилі

$$D = \text{const}(\rho_1 r^3)^{-1/5}. \quad (5)$$

Співставлення обчислень для двох типів оболонок зір дає (рис. 4): 1) у променистій оболонці градієнт швидкості УХ істотний. Ударна хвиля зриває оболонку і розпорошує її в міжзоряному просторі; 2) у конвективній оболонці цей градієнт швидкості УХ майже до поверхні зорі незначний ($\frac{dD}{dr} = 0$), і оболонка розширюється як компактний утвір.

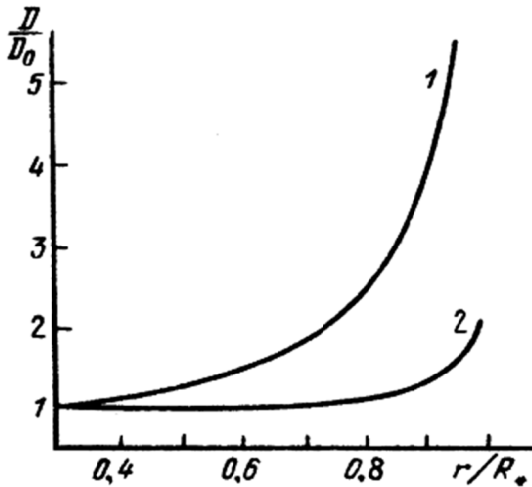


Рис.4. Рух сильної ударної хвилі в променистій (1) та конвективній (2) оболонках

Щодо результату для променистої оболонки в його співставленні з даними спостережень спалахів Нових і Наднових – узгодження безсумнівне: ці спалахи супроводжуються розльотом оболонки в міжзоряний простір. Водночас рух ударної хвилі в протяжній конвективній оболонці надгіганта, що є наслідком певного збурення у надрах зорі, може спричинити відділення оболонки з відносно малою швидкістю, отже, як цілого утвору – планетарної туманності.

Одночасно із розв’язуванням системи диференціальних рівнянь числовим методом для різних t (від 0 до 6) проведено також обчислення зміни параметрів ударної хвилі за методом Брінклі – Кірквуда та Уізема (метод Чізела дає той же результат). Для усіх трьох випадків будови оболонки зорі висновки однозначні, що й відображене на рис.5.

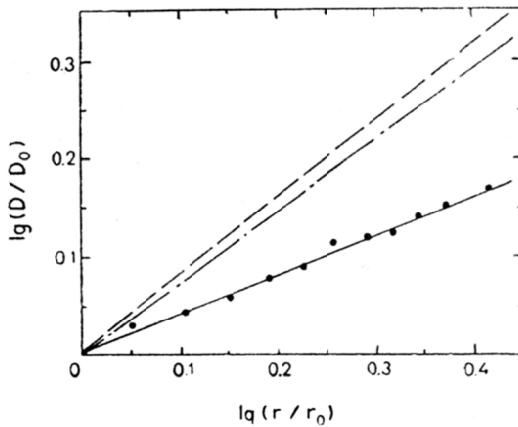


Рис 5. Результати обчислень руху ударної хвилі методами Брінклі-Кірквуда (верхня лінія), Уізема (середня) та числовим методом, суцільна лінія – апроксимація (5).

Складалося так, що той чи інший автор використовуючи метод Брінклі-Кірквуда чи Уізема при розв’язуванні певної газодинамічної задачі викладав передусім усі вихідні співвідношення методу (їх викладено у нашій монографії “Ударні хвилі”: аналіз методу Б.-К. займає 14 стор., Уізема -8!).

Після публікації нашої з Б. Гнатиком статті в журналі “Астрофізика” (т.17, вип. 3, серпень 1987, видавець АН Вірм. РСР), журнал зразу ж перевидавали англійською мовою, використання цих наближених методів (щороку “у світі” бувало по 5-10 статей) припинилося. Значною мірою, мабуть, і тому, що з появою все потужніших ЕОМ стало доступнішим проведення обчислень числовими методами (їх описав А.Г.Косовичев у н. кн. “Ударные волны в оболочках звезд”, с.116-154).

§ 8. Структура ударних хвиль. Теплові хвилі

Ударна хвиля – це своєрідний механізм стиску речовини. З точки зору її структури виділяють термодинамічно рівноважні стани перед і за фронтом УХ, як також проміжні зони 1, 2, 3 і 4, в яких параметри газу зазнають змін і де є певні відхилення від термодинамічної рівноваги (рис. б).

У цих проміжних зонах завдяки дисипативним процесам відбувається перетворення механічної енергії хвилі в теплову. Для слабких УХ визначальну роль відіграють процеси іонізації (якщо газ був іонізований, то лише зударення частинок і перерозподіл енергії між ними). Спочатку істотно зростає температура T_i , згодом же електронна температура T_e зрівнюється з нею ($T_e \sim T_i$). Зона іонізаційної релаксації (3), як і зона «в'язкого стрибка» (2), невелика, – усього кілька довжин вільного пробігу частинки l_q .

Протяжність зони іонізаційної релаксації знаходять розв'язуванням системи чотирьох диференціальних рівнянь, що описують елементарні процеси, які тут відбуваються (зміна n_e, T_e). При більших швидкостях УХ істотну роль уже відіграє потік випромінювання з-за фронту УХ, який прогріває і певною мірою іонізує газ перед фронтом. Довжина ж пробігу випромінювання визначається частотою ν випромінювання.

Зокрема, якщо йдеться про стан перед фронтом, коли в атомах водню електрони перебувають на рівні $n=1$, то коефіцієнт поглинання на одну частинку $k \sim 10^{-17} \text{ см}^{-2}$ і

довжина вільного пробігу $l_n \sim \frac{I}{kn} \sim 10l_q$. Але якщо газ уже іонізований і головну роль відіграють ефекти томсонівського розсіювання на вільних електронах, то $\sigma = 10^{-24} \text{см}^{-2}$ і $l_B = \frac{I}{\sigma_n} \sim 10^8 l_q$, фактично йдеться про певні середні значення.

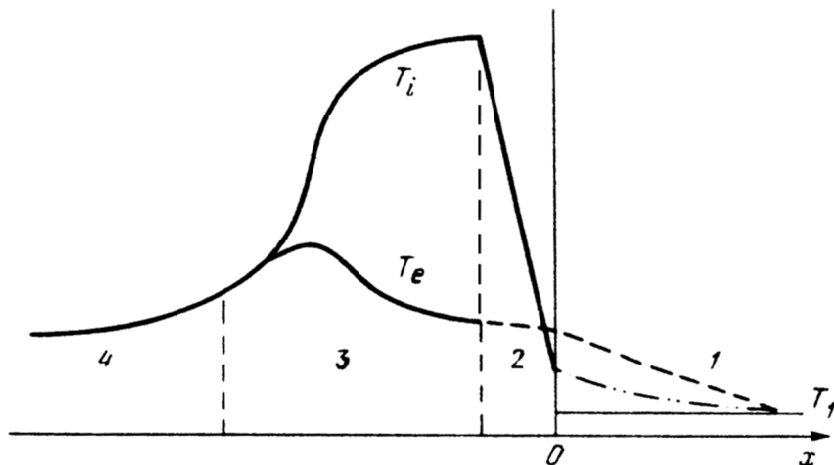


Рис.6. Схема структури ударної хвилі помірної інтенсивності: 1 – зона прогріву перед фронтом, 2 – в'язкий стрибок, 3 – зона релаксації, 4 – зона висвічування

Окремо виділяють питання про ефективну температуру зони прогріву та протяжність цієї зони. Тут прийнято розрізняти випадок слабких і окремо сильних ударних хвиль. У першому завдяки процесам поглинання і перевипромінювання квантів, які йдуть з-за фронту, температура експоненціально зростає від T_1 до T . Протяжність зони прогріву все ж відносно невелика.

У випадку сильної УХ ($M \gg 1$), особливо якщо йдеться про рух УХ в зоряних оболонках, зона прогріву може бути співмірна з радіусом зорі.

В обох випадках формуються зони прогріву, в яких відбуваються процеси розсіювання та перевипромінювання

квантів. І при обчисленні величин потоків випромінювання із цієї зони на безконечність доводиться порівнювати довжину

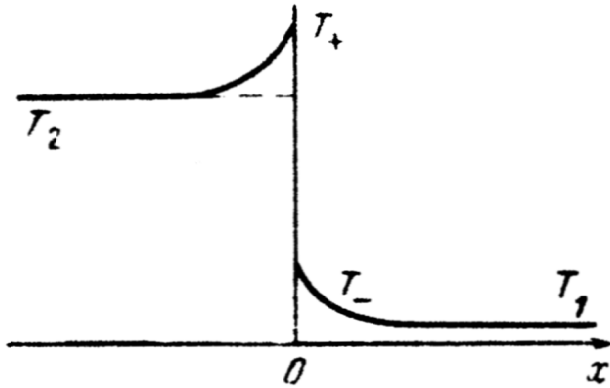


Рис 7. Розподіл температури перед і за фронтом слабкої ударної хвилі.

пробігу кванті випромінювання (з частотою ν) із усередненою по спектру їх довжиною пробігу. У підсумку зроблено висновок: незалежно від «сили» УХ (числа M) і температури T_2 за її фронтом на безконечність виходять кванти:

а) в земній атмосфері: з тієї частини зони прогріву, де $T=17000 - 20000\text{K}$, тобто $T_{ef} \approx 20000\text{K}$.

б) для атмосфери зорі, яка в основному складається з водню, T_{ef} не перевищує $12\,000\text{K}$.

Бо – за певних умов зону прогріву фактично можна розглядати як *теплову хвилю*. Тож було передусім з'ясовано, що конкретно в умовах земної атмосфери при раптовому виділенні великої енергії виникає передусім *теплова хвиля*, яка поширюється у практично нерухомому газі. Нагрітий нею газ починає рухатись у той же бік зі швидкістю звуку. Ударна хвиля ж формується і виривається вперед лише тоді, коли швидкість руху теплової хвилі зрівнюється зі швидкістю звуку в нагрітому газі. Теорія цих *теплових хвиль* (щоправда, без урахування тиску й густини випромінювання

в одиниці об'єму) є в монографії Я. Б. Зельдовича та Ю.П. Райзера (1966).

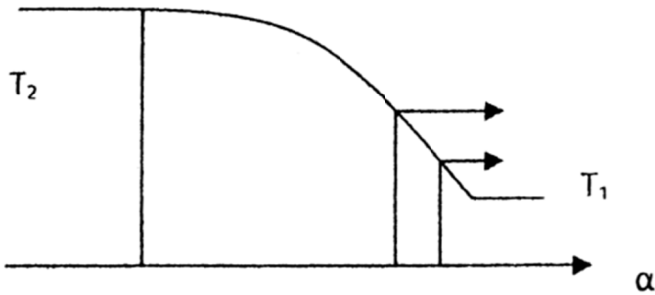


Рис.8. Теплова хвиля і зона висвічування перед фронтом сильної ударної хвилі.

В окремих випадках у надрах зір трапляється швидке виділення у невеликому об'ємі значної кількості енергії. Так, при спалахах Нових концентрація енергії сягає, мабуть, до 10^9 Дж/см³. Тому тут, очевидно, і формуються передусім теплові хвилі. Можливості їх перетворення в ударні залежать від кількості звільненої енергії, від густини середовища та його поглинальних властивостей (довжини вільного пробігу випромінювання).

За умов, що існують у надрах зір, важливу роль у тепловій хвилі відіграють тиск та густина енергії випромінювання. Тому і закони руху теплових хвиль є дещо іншими, особливо, якщо взяти до уваги неоднорідність середовища.

Важливою характеристикою тут є довжина вільного пробігу випромінювання. Якщо мова йде про однорідне середовище, то $l = A'T^s$, де A' – стала, s – показник степеня температури в коефіцієнті поглинання. Загалом же непрозорість речовини, якою визначається довжина вільного пробігу і яку в розрахунку на 1см³ описують формулою

$$\bar{\kappa} = \kappa_0 \frac{\rho^m}{T^s}, \tag{1}$$

в інтервалі температур $10000^\circ - 100000^\circ$ у зовнішніх шарах зорі може бути апроксимована так:

$$\bar{\kappa} = 1,12 \times 10^{17} \frac{\rho^2}{T^2}. \quad (2)$$

Рух теплової хвилі описується диференціальним рівнянням, яке виражає закон збереження енергії: зменшення енергії в одиниці об'єму дорівнює її потокові через поверхню, що обмежує цей об'єм:

$$\frac{dE}{dt} = -\text{div } \vec{F}. \quad (3)$$

Тут E – повна енергія, що дорівнює сумі енергії газу та випромінювання, які знаходяться в цьому об'ємі.

У свою чергу, потік тепла пропорціональний градієнтові густини енергії рівноважного випромінювання E_R та довжині вільного пробігу l :

$$\vec{F} = -\frac{lc}{3} \text{grad} E_R = -\frac{4a_R c}{3\kappa_0 \rho^m} T^3 \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (4)$$

Таким чином, рівняння теплопровідності у сферичному випадку записується у вигляді:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{16\sigma}{3(s+4)\kappa_0 \rho^m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T^{s+4}}{\partial r} \right), \quad (5)$$

де $\sigma = \frac{ca_R}{4}$. Розв'язують його за умови, що енергія, яка знаходиться у сфері зі змінним радіусом фронту теплової хвилі r_ϕ , залишається незмінною:

$$Q = 4\pi \int_0^{r_\phi} \left(\frac{\rho A}{\gamma - 1} T + a_R T^4 \right) r^2 dr \quad (6)$$

або

$$Q \cong \frac{3}{4} \pi r_\phi^3 \left[\frac{\rho A T_*}{\gamma - 1} + a_R T_*^4 \right] \quad (6')$$

Тут Q – загальна кількість виділеної енергії. Для запису останнього співвідношення використано таку властивість теплових хвиль із сильно залежним від температури коефіцієнтом теплопровідності: у всій нагрітій зоні температура

практично однакова і рівна T_* , а в тонкому шарі поблизу фронту вона швидко спадає до значення температури незбуреного середовища, початковою енергією якого тут знехтувано.

Закон руху фронту теплової хвилі знаходять за допомогою методу моментів. Рівняння (5) множимо на r^k ($k = 2, 3, 4 \dots$) та інтегруємо у межах від $r = 0$ до $r = r_\phi$ при межових умовах: потік тепла в центрі і на фронті хвилі рівний нулю:

$$r^2 \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_0 = r^2 \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_\phi} = T(r_\phi, t) = 0. \quad (7)$$

Наслідком цього є безмежна кількість еквівалентних (5) диференціальних рівнянь. Випадок $k = 2$ відповідає закону збереження енергії; при $k = 3$ маємо додаткову умову

$$\frac{d}{dt} \int_0^{r_\phi} \left[\frac{\rho A}{\gamma - 1} T + a_R T^4 \right] r^3 dr = \frac{32\sigma}{3(s+4)\kappa_0 \rho^m} \int_0^{r_\phi} r T^{s+4} dr. \quad (8)$$

Наші обчислення дали підставу стверджувати: за певних комбінацій параметрів зорі та звільненої при спалаху енергії її перенесення до поверхні зорі здійснюється тепловою хвилею. Розрахунки приводять також до висновку, що внаслідок прискорення газу за фронтом теплової хвилі відбувається відрив частини оболонки зорі та її подальше розпорощення в навколишньому просторі.

§ 9. Гравітаційна нестійкість. Критерій Джинса

За своєю глибинною суттю проблема гравітаційної нестійкості охоплює надзвичайно широкий діапазон явищ – від формування нашої планетної системи і аж до появи різних структур в Галактиці. Адже тут виділяють декілька їх окремих частин, тобто типів об'єктів у їх сукупності (кажуть типів населення). Беруть до уваги явний зв'язок сконденсованих форм речовини з її ж розпорощеним станом, тобто зір із різними типами туманностей. Такий підхід до проблеми є «зручнішим», оскільки йдеться про стійкість/нестійкість середовища, щодо

якого можна застосувати уже добре відомі співвідношення для ідеального газу.

Отже, йдеться про еволюцію явища – росту збурення густини речовини під дією сили тяжіння. Це – питання про гравітаційну нестійкість, про утворення фрагментів газопилової хмари, в подальшому – формування з них зір. Таку задачу кількісно розглянув у 1902 р. англійський фізик та астроном Джеймс Джинс (1877-1946). Він довів, що безконечне однорідне середовище є нестійким відносно поздовжніх хвиль: при певній великій довжині хвилі стиск, розпочавшись, буде продовжуватися під дією гравітації. Інакше кажучи, якщо через певне середовище проходить звукова хвиля і тому в ньому виникають згущення та розрідження, то при деякій її довжині λ_1 таке згущення стає зародком конденсації і далі вже притягує до себе навколишню речовину.

Цю, ще й тепер актуальну проблему, доцільно розглянути в рамках теорії розмірностей. Тут задача про гравітаційну нестійкість туманності характеризується параметрами λ , G , ρ , a , розмірності яких можна записати так:

$$[\lambda] = L; [G] = \frac{L^3}{MT^2}; [\rho] = \frac{M}{L^3}; [a] = \frac{L}{T}, \quad (1)$$

де L – розмірність довжини, T – часу, M – маси, a – швидкість звуку. З цих чотирьох параметрів задачі три мають незалежні розмірності. Тому, відповідно до П-теорему, з них можна скласти один безрозмірний комплекс:

$$\Pi = \lambda G^x \rho^y a^z,$$

де x , y , z – шукані показники степенів. Підставляючи розмірності кожного з параметрів, запишемо це співвідношення так:

$$\Pi = L \cdot \frac{L^{3x}}{M^x T^{2x}} \cdot \frac{M^y}{L^{3y}} \cdot \frac{L^z}{T^z} = L^{1+3x-3y+z} M^{y-x} T^{-2x-z}. \quad (2)$$

Оскільки Π – величина безрозмірна, то, прирівнявши показники степенів до нуля, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 1 + 3x - 3y + z = 0, \\ y = x, \\ z = -2x, \end{cases}$$

та їх розв'язки:

$$x = y = \frac{1}{2}; z = -1.$$

Отже, безрозмірний комплекс має вигляд

$$\Pi = \lambda(G\rho)^{1/2}a^{-1}.$$

Розв'язавши його відносно критичної довжини, знаходимо:

$$\lambda = \Pi \sqrt{\frac{a^2}{G\rho}}. \quad (3)$$

Таким чином, теорія розмірностей дає змогу отримати залежність між параметрами задачі – з точністю до множника, величина якого часто близька до одиниці.

Щоправда, при формуванні цієї задачі Джинс допустив певну некоректність. Адже нескінченне однорідне середовище може бути в початковий момент у статичній рівновазі лише у випадку, якщо його густина $\rho = 0$. (див. Я. Б. Зельдович: «Вопросы космологии», вип. 9, 1963; С. А. Каплан та С. Б. Пикельнер «Межзвездная среда», М, Наука, 1963, с. 447).

Згодом було з'ясовано, що певні уточнення та зміни не вплинули істотно на отриманий Джинсом розв'язок. Детально це питання обговорене в монографії Я. Б. Зельдовича та І. Д. Новикова «Строение и эволюция Вселенной» (М., Наука, 1975, с. 272-279).

§ 10. Газодинамічні і фізичні проблеми пульсації зір

Серед близько 30000 зір, яскравість (світність) яких з часом у той чи інший спосіб змінюється, виділяють довгоперіодичні цефеїди. У нашій Галактиці їх виявлено понад 800, ще десятки – в інших, близьких галактиках. Періоди зміни їх блиску є в межах від 1 до 130 діб при амплітудах від 0,06 до 1,5 (зміна блиску зоряної величини на 1 відповідає зміні потоку енергії в 2,5 раза). Ритмічні ж зміщення ліній у спектрах цих зір то в червоний, то в синій бік свідчать про розширення і стиск зір.

Для їх типового представника – зорі δ Цефея встановлено такі параметри: її середній радіус $R = 42R_{\odot}$, відхилення від цього середнього значення, $\Delta R \approx 2R_{\odot}$, тобто відносне зміщення

фотосферного шару $\Delta R/R \approx 0,05$. Зоря змінює свій блиск від $3,48^m$ до $4,37^m$ (тобто у 2,5 раза) з періодом у 5,366 доби.

Поєднання ж фотометричних спостережень зі спектрами (зміни яскравості зорі упродовж кожних 5,4 доби зі зміщеннями ліній в її спектрі) привело до висновку: найбільшою є яскравість зорі тоді, коли речовина її оболонки рухається з найбільшою швидкістю в бік спостерігача, у мінімумі ж блиску є найбільша швидкість стискання, тоді то радіус зорі близький до свого середнього значення.

Теорія пульсацій зір – один із найскладніших розділів астрофізики. В її основі лежать записані у диференціальній формі закони збереження імпульсу та енергії. Завданням теорії пульсацій є вивчення розподілу амплітуди коливань від центра зорі до її поверхні, узгодження отриманих результатів зі спостереженнями, а головне – пояснення самого *механізму* пульсацій.

Отже, тут – дві проблеми: є рух як газодинамічне явище і є причина ритмічного його повторювання. У намаганні збагнути суть і масштаби прийнято уявляти сферичну зорю маятником: вона ритмічно розширюється і стискається (легко допустити, що амплітуди зміщень найбільші в поверхневих шарах зорі).

Аналіз цього питання можна розпочати із відомої всім формули для періоду T коливань «звичайного» маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1)$$

Тут l – його довжина, g – прискорення сили тяжіння. Для пульсуючої зорі радіусом R і масою $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho}$, де $\bar{\rho}$ – середнє значення її густини, з (1), змінивши позначення T на P , матимемо:

$$P\sqrt{\bar{\rho}} = \sqrt{\frac{3}{\pi G}} = const. \quad (2)$$

Саме таке співвідношення $P\sqrt{\bar{\rho}} = const.$ і отримав у 1878 р. німецький фізик Г.Ріттер (1826-1908): період пульсації зорі P

обернено пропорційний квадратному кореневі з її середньої густини.

Річ ясна, є строгий шлях досліджень цієї проблеми, і полягає він у використанні методу лінеаризації диференціальних рівнянь, що описують закони збереження маси та імпульсу. Він детально описаний у книзі Дж. П. Кокса «Теория звездных пульсаций» (в-во Мир. 1983р. с. 19 і 156-160).

Зазначимо таке: природа дуже часто демонструє дослідникам (усім нам зрештою) дивовижну математичну простоту при з'ясуванні навіть дуже, здавалося б, складних процесів і явищ. Тому, як і раніше, знайдемо розв'язок задачі про період пульсації зорі методом теорії розмірностей. Отже, процес пульсації зумовлений тяжінням зорі і визначається величиною її маси M , радіусом R , сталою G . Запишемо розмірності згаданих величин:

$$[P] = T, \quad [M] = M, \quad [R] = L, \quad [G] = \frac{L^3}{MT^2}.$$

Параметрів у задачі всього чотири ($n = 4$), з них четвертий є конкретною комбінацією розмірностей, якими характеризуються перші три. Тому тут є три параметри із незалежними розмірностями ($n = 3$), і відповідно до П-теорема, з параметрів P , M , R і G можна скласти один безрозмірний комплекс: $\Pi = PG^x R^y M^z$ (не порушуючи загальності, приймають, що показник степеня P дорівнює одиниці).

Запишемо комплекс через розмірності кожного з параметрів:

$$\Pi = T \left(\frac{L^3}{MT^2} \right)^x L^y M^z = T^{1-2x} L^{3x+y} M^{z-x} . \quad (3)$$

Так отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$1 - 2x = 0,$$

$$3x + y = 0,$$

$$z - x = 0$$

та їх розв'язки : $x = z = 1/2, \quad y = -3/2$.

Шукане співвідношення для періоду пульсації P є таким:

$$P = \Pi (GM)^{-1/2} R^{3/2} = \Pi \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \quad (4)$$

Оскільки $\frac{M}{4/3\pi R^3} = \bar{\rho}$ – середня густина зорі, то це співвідношення зводиться до записаного вище у формі (2).

Числове значення константи Π є все ж неоднаковим для різних типів пульсуючих зір. Головне, однак, у встановленні наведеного тут, і спільного для всіх випадків, співвідношення між параметрами P і $\bar{\rho}$.

Для однорідної кулі стала $\Pi = 0,14$, якщо P виміряно в добах, а $\bar{\rho}$ у г/см^3 . Узагалі ж, як виявилось, вона залежить від структури зорі, а тому її числове значення при переході від цефеїд з $P = 2$ доби до 70 діб зменшується майже удвічі. Якщо ж знехтувати цим уточненням, то з формули (2) при $\Pi = 0,14$ отримуємо такі оцінки періодів пульсації. Для Сонця і подібних до нього зір $\rho = 1,41\text{г/см}^3$, тож $P = 3$ год, для цефеїд $\rho = 0,01\text{г/см}^3$, $P = 50$ діб, для лірид $\rho = 10^{-8}\text{г/см}^3$, $P = 1,4$ доби, для типу Міри Кита $P = 1400$ діб.

Співпадання теоретичних значень періодів зі спостережуваними підтверджує механічну природу пульсацій зір. Однак, як показує аналіз, зоря, яку виведено зі стану рівноваги, припинила б свої коливання через декілька діб. Тим часом зорі пульсують (змінюючи свій блиск) упродовж сотень тисяч років. Очевидно, ці коливання підтримуються енергією, яка звільняється в глибоких надрах зір унаслідок термоядерних реакцій. Важче було пояснити інше: яким чином промениста енергія, що повільно просочується до поверхні зорі, перетворюється в механічну. Цю проблему з'ясовано завдяки працям С.А. Жевакіна і Р. Крісті в 50-х роках ХХ ст.

В оболонці зорі температура і щільність в напрямі до центра зростають. Тому, починаючи з деякої глибини, водень і гелій поступово переходять в іонізований стан. «Неглибоко» під поверхнею зорі знаходиться зона іонізації гелію (зона He II). Дещо глибше – зона двократної іонізації (He III), в якій від атома гелію відривається другий електрон. Товщина зони He II у цефеїди при її радіусі близько $2 \cdot 10^{10}$ м, становить усього $0,01 \dots 0,02$ радіуса зорі, середня густина тут $\rho \approx 3 \cdot 10^{-8}\text{г/см}^3$,

середня температура $T=45000\text{K}$, маса зони He II сягає 10^{-6} маси зорі. Проте саме ця зона, що має незначну товщину і дуже малу масу, приводить у рух і підтримує коливання усієї поверхні зорі – завдяки ритмічній зміні непрозорості шару He II.

Річ у тім, що коефіцієнт непрозорості κ істотно залежить від густини і стану іонізації речовини. Як показують обчислення, у зоні повної іонізації гелію (у зоні He III) $\kappa \sim 1/\rho$, тоді як у зоні однократної іонізації гелію (зона He II) $\kappa \sim \rho^{0.7}$. Тому, як тільки відбувається випадкове стискування іонізованого газу, коефіцієнт поглинання зменшується, газ стає прозорішим. І тоді шар зорі посилено втрачає енергію. Якщо ж стискується неповністю іонізований газ, то коефіцієнт поглинання зростає, непрозорість газу збільшується, і шар зорі, в якому відбувається іонізація гелію, накопичує енергію.

За рахунок поглинання енергії тиск у зоні іонізації збільшується, і це змушує шар газу розширюватися. При цьому зменшується густина та непрозорість шару, і енергія, накопичена в шарі, посилено висвічується. Досягнувши найбільшого розширення, зовнішні шари під дією сили тяжіння падають униз, проходять через середнє, рівноважне положення і знов стискуються. Цикл розпочинається спочатку.

За таким же принципом працює звичайний поршневий двигун: енергія при згорянні пального (а це – набуття енергії системою) звільняється саме в момент найбільшого стиску газу в циліндрі.

Аналіз показав, що пульсувати можуть лише ті зорі, в яких зона іонізації He II перебуває на певній глибині і які здатні «настроюватись» на резонанс з усією зорею. Це виявилось можливим для зір – гігантів. При пересуванні вправо уздовж послідовності змінних зір ця настройка погіршується. У цьому випадку замість чітких пульсацій відбуваються неправильні коливання блиску зорі. Значення ж амплітуди коливань залежить від протяжності і маси He II.

§ 11. Вплив періодичної ударної хвилі на протяжність атмосфери зорі

У спектрах пульсуючих змінних зір типу *RR* Ліри, *W* Діви, *RV* Тельця періодично спостерігається короткочасне розщеплення ліній. Це явище свідчить про одночасну присутність в атмосфері зорі двох поглинаючих шарів, які рухаються з різними швидкостями. Очевидно, що таке періодичне повторення розщеплень у спектрах може бути пов'язане з рухом в атмосфері зорі ударних хвиль.

Ось як виглядають, наприклад, спостереження зорі *RR* Ліри. Практично в мінімумі блиску різко зміщуються у фіолетовий бік лінії металів. Через 10-15 хв роздвоюються лінії *H* і *K* кальцію, ще через 10-15 хв спостерігається роздвоєння вищих ліній серії Бальмера. Через 70 хв від початку цього явища (що становить 0,09 від періоду пульсації зорі) розщеплюється лінія H_{α} . Картина в цілому добре узгоджується з гіпотезою про проходження через атмосферу ударної хвилі.

Рухаючись у напрямку від центра зорі, ударна хвиля захоплює із собою газ атмосфери зорі, в нижніх шарах якої швидкість хвилі значно менша від параболічної. Тому в русі кожного елемента газу можна відзначити три істотні моменти: поштовх уверх при переході через нього ударної хвилі, досягнення найвищого положення відносно початкового рівня і рух із прискоренням униз до зустрічі з наступним ударним фронтом.

Однією з важливих задач газодинаміки пульсуючих атмосфер є розподіл густини в атмосфері, який встановлюється в ній під дією періодичної ударної хвилі. Ця задача є цікавою і з точки зору інтерпретації спектральних спостережень. Вона належить до так званих самопогоджених: тут густина залежить від швидкості руху, а швидкість визначається густиною середовища. Задача ця важко піддається дослідженню навіть за допомогою числового інтегрування рівнянь газодинаміки. Бо ж потік речовини перед фронтом хвилі тут є нестационарним, його

характеристики – густина і швидкість – змінюється в кожній точці з часом, тобто тут

$$\frac{dp}{dt} \neq 0, \quad \frac{du}{dt} \neq 0. \quad (1)$$

Наближений вираз для розподілу густини нам вдалося одержати, виходячи з припущення, що певна динамічна рівновага в атмосфері зорі вже встановилася, тобто що:

а) кожна наступна ударна хвиля рухається в конкретній точці атмосфери з тією ж швидкістю, що й попередня, але меншою від параболічної;

б) розподіл параметрів газу перед і за фронтом хвилі тотожно повторюється;

в) температура газу однакова уздовж усієї атмосфери і не змінюється при проходженні його через фронт ударної хвилі (припускається сильне висвічування);

г) параметри газу в заданій точці є лінійними функціями часу (зубчастий профіль хвилі):

$$p = p_2 - \frac{p_2 - p_1}{t_0} t; \quad u = u_2 - \frac{u_2 - u_1}{t_0} t; \quad \rho = \rho_2 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_0} t, \quad (2)$$

де t_0 – період ударної хвилі;

д) середній потік маси через фіксовану поверхню дорівнює нулю, тобто кожен елемент газу, що проходить через цю поверхню в нульовий момент часу вверх, повертається до неї безпосередньо перед проходженням наступної ударної хвилі;

е) початкова швидкість руху газу вверх u_2 дорівнює швидкості його падіння вниз u_1 і практично дорівнює швидкості руху ударної хвилі D у відповідності з умовами збереження на фронті, з яких при $T_2 = T_1$ випливає:

$$u_2 = D - \frac{a_s^2}{u_1 - D}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(u_1 - D)^2}{a_s^2}, \quad (3)$$

де a_s – ізотермічна швидкість звуку, а $p = a_s^2 \rho$;

є) енергія ударної хвилі затрачується на гальмування спадаючого потоку і на переміщення цього ж газу вверх.

Основне рівняння для визначення закону зміни густини з висотою можна одержати або на основі теорії дисипації ударних

хвиль, або усередненням рівнянь газодинаміки за період t_0 . Кінцевий результат, якщо прийняти наведені вище припущення, буде таким же.

Величину енергії ударної хвилі, що може бути перетворена в роботу, запишемо так:

$$W(r) = \int_0^{t_0} p' u' dt, \quad (4)$$

де r – лагранжова координата; p' і u' – тиск і швидкість руху в даній точці. Підставляючи (2) в (4) і враховуючи припущення (е), знаходимо, що

$$W(r) = \frac{t_0}{6} (p_2 - p_1) u_2, \quad (5)$$

У відповідності з припущенням (є) визначається втрата енергії на зміщення газу в полі тяжіння в розрахунку на одиницю об'єму за період:

$$A(r) = \frac{1}{2} \rho_1 (u_1^2 + u_2^2) \approx \rho_1 u_2^2 \approx \rho_1 D^2, \quad (6)$$

що відповідає зміні енергії ударної хвилі при переході від точки r до $r + dr$. Таким чином, диференціальне рівняння для закону збереження енергії ударної хвилі набуває вигляду:

$$\frac{dW}{dr} = -A(r). \quad (7)$$

Проміжок часу між двома проходженнями ударної хвилі є незмінним уздовж атмосфери зорі. Тому, співставляючи (5) і (6), знаходимо

$$\frac{t_0}{6} \frac{d}{dr} (p_2 - p_1) u_2 = \rho_1 u_2^2. \quad (8)$$

Звідси уже не важко одержати кінцеве диференціальне рівняння, яким описується розподіл густини в атмосфері зорі:

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \left[\frac{3}{2t_0 D(r)} - \frac{3q}{r} \right] dr, \quad (9)$$

де $q = \frac{d \ln D}{d \ln r}$ – показник степеня в законі зміни швидкості ударної хвилі. Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо формулу для

визначення густини безпосередньо перед фронтом ударної хвилі залежно від висоти h над деяким фіксованим рівнем атмосфери r_0 , на якому $D = D_0$ та $\rho = \rho_0$:

$$\rho_1(h) = \rho_0 e^{-\int_{r_0}^r \left[\frac{3}{2t_0 D} - \frac{3q}{r} \right] dr} \approx \rho_0 e^{-\frac{3h}{2t_0 D_0}}. \quad (10)$$

Значення густини безпосередньо за фронтом хвилі знаходиться зі співвідношення:

$$\rho_2 = \frac{4D^2}{a_s^2} \rho_1. \quad (11)$$

Скористаємось тепер припущенням д). У цьому випадку період ударної хвилі t_0 дорівнює часу, упродовж якого захоплений ударною хвилею елемент газу, досягнувши найвищого положення, повертається в положення рівноваги. Тобто

$$t_0 = \frac{2u_2}{g} \approx \frac{2D_0}{g_0} \quad (12)$$

і, таким чином,

$$\rho_1(h) = \rho_0 e^{-\frac{3g_0 h}{4D^2}} = \rho_0 e^{-\frac{3g_0 h}{4M^2 a_s^2}} = \rho_0 e^{-\frac{3h}{4H}}, \quad (13)$$

де $H = \frac{4D_0^2}{3a_s^2} H_0 = \frac{4}{3} M^2 H_0$ – висота однорідної атмосфери.

Розподіл густини в атмосфері зорі для довільного моменту часу можна знайти з (2) і (13) за допомогою нескладних додаткових обчислень. Спочатку за (13) знаходиться густина ρ_1 у кожній точці атмосфери безпосередньо перед проходженням через неї ударної хвилі. Далі, фіксуючи положення ударної хвилі на певному рівні і задаючи швидкість руху хвилі, розраховують проміжки часу, що відділяють переходи ударної хвилі через кожен точку від моменту її перебування на фіксованому рівні. Потім за формулами (11) та (2) знаходимо густину на певному рівні у конкретний момент часу.

Тут варто звернути увагу на факт, що коефіцієнт $\frac{3}{4}$ в рівнянні (13) є результатом прийнятих наближень і неточності

самого методу взагалі. Адже при $M \rightarrow 1$ повинно впливати очевидне $H \rightarrow H_0$. Така умова приводить до висновку, що цей коефіцієнт у розв'язку (13) слід взагалі відкинути. Тоді закон розподілу густини в атмосфері пульсуючої зорі набуває простого вигляду

$$\rho_1(h) = \rho_0 e^{-\frac{g_0 h}{M^2 a_s^2}}, \quad (14)$$

а для ефективної висоти однорідної атмосфери маємо вираз

$$H_{ef} = M^2 H_0. \quad (15)$$

У випадку зорі RR Ліри з останнього випливає:

$$H_{ef} \approx 36 H_0 \quad \text{або} \quad g_{ef} \approx \frac{1}{36} g_0.$$

Періодичність проходження ударної хвилі в атмосфері зорі визначається процесами, що відбуваються глибоко в її надрах, а період t_0 залишається сталим уздовж атмосфери. Проте як швидкість ударної хвилі, так і прискорення сили тяжіння з висотою змінюються. Тому у верхніх шарах атмосфери зорі, очевидно, наявна нерівність

$$t_0 < \frac{2D}{g}.$$

Тобто захоплений фронтом ударної хвилі газ не встигає повернутися в початкове положення до моменту проходження через нього наступної ударної хвилі. Унаслідок цього відбувається своєрідне пульсуюче витікання речовини в міжзоряне середовище.

§ 12. Стаціонарні потоки газу в полі тяжіння зорі. Зоряний вітер

Наявність потоків речовини від Сонця у міжпланетний простір підтверджувалася спостережуваним відхиленням хвостів комет у протисонячному напрямі. Перші експериментальні докази існування сонячного вітру було отримано завдяки космічним апаратам “Луна-2”, “Луна-3” і “Венера-1”, “Марінер-2”, “Експлорер-18” та ін.

Вже впевнено можна сказати: є неперервне витікання речовини від Сонця, середня швидкість якої близька до 450 км/с, при чому середня концентрація протонів на орбіті Земля сягає 5 см^{-3} . Середня температура протонів тут порядку $10^4 - 10^5 \text{ K}$, електронів – дещо вища.

Але і задовго до цих доказів існування *сонячного вітру* вже здійснювалися спроби теоретично довести його неминучість, виходячи зі встановлених даних про структуру сонячної і взагалі зоряних атмосфер за певних допусків щодо величин їх параметрів.

Приймається, що атмосфери деяких зір (і Сонця) перебувають у стані неперервного гідродинамічного розширення, що породжує *зоряний вітер*. Тобто, що тут гравітаційна сила зорі не цілком зрівноважує речовину оболонки, в якій встановився певний градієнт тиску.

З іншого боку, актуальною залишилася проблема планетарних туманностей, яких уже відомо 1500. Їх знайдено також у деяких близьких до нас галактиках, зокрема у Магеланових Хмарах. Було сформульовано 2 теорії: 1) ці об'єкти є наслідком відділення близько 10% маси зорі (її оболонки) на певному етапі еволюції (на стадії червоного гіганта) або ж 2) речовина туманності нагромадилася внаслідок тривалого її “відтоку” з поверхні зорі, тобто внаслідок зоряного вітру, швидкість якого на певній відстані від зорі зменшується навіть до $u=0$.

Сьогодні переконливішим вважають перший варіант. Проте актуальним залишається і другий. Тому доречним є і дослідження ролі зоряного вітру з огляду хоча б на масштабність впливу сонячного вітру на атмосферу Землі (та й на згадане формування кометних хвостів).

Йдеться, отже, про стаціонарні рухи газу в полі тяжіння зорі. Цю задачу першими розглянули Л.А.Вуліс та К.П.Станюкович (1954 р), виходячи із рівнянь газової динаміки з урахуванням факту сферичної симетрії та неадіабатичності руху (за наявності притоку тепла Q або його втрати одиницею

маси за одиницю часу). І оскільки тут йдеться про стаціонарний рух речовини, то частинні похідні по t в рівняннях законів збереження маси та імпульсу (§3, рівняння (2) і (6)) покладаються рівними нулю:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Для ідеального газу, коли $p = \frac{RT}{\mu} \rho$, закон збереження енергії записується так:

$$\frac{dp}{\rho} = a^2 \frac{d\rho}{\rho} + (\gamma - 1)dQ, \quad (1)$$

де

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (2)$$

так що

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{da^2}{a^2} = \frac{d\rho}{\rho} + \gamma \frac{dQ}{c^2}. \quad (3)$$

Записавши рівняння неперервності у вигляді:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = - \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dr} + \frac{2}{r} \right), \quad (4)$$

отримуємо після підстановки (3) і (4) у рівняння руху

$$u \frac{du}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = - \frac{GM}{r^2} \quad (5)$$

шукане співвідношення

$$\frac{1}{u} \left(\frac{u^2}{a^2} - 1 \right) \frac{du}{dr} = - \frac{GM}{a^2 r^2} + \frac{2}{r} - \frac{(\gamma - 1)Q}{a^2 u \rho}. \quad (6)$$

Тут виявляється те, що було назване *кризою течії*: як тільки швидкість газу досягає швидкості звуку a , множник при du/dr на певній відстані від поверхні зорі стає рівним нулю, а тоді ця величина перетворюється в ∞ . Зроблено також висновок, що при русі газу від поверхні зорі надзвуковий потік гальмується (дія гравітаційного поля), тоді як дозвуковий прискорюється.

Детальніший розгляд задачі вказав, однак, на дещо складнішу ситуацію. По-перше, протилежний за знаком ефект створює розширення потоку – дія другого справа у рівнянні (6) доданка. Цей же ефект посилює і третій доданок, якщо $Q < 0$,

тобто коли є втрати енергії (певне охолодження потоку), зокрема, внаслідок висвічування.

Проведені конкретні обчислення привели до висновку, що згадані тут обидва ефекти обумовлюють прискорення і надзвукового потоку, конкретно, при русі від $r = 1R_*$ до $r = 2R_*$ навіть у 5-15 разів. Після цього течія газу переходить у стаціонарний режим ($u = \text{const}$). Однак, якщо мати на увазі процес формування планетарних туманностей, то швидкості завеликі. Тож ці туманності, очевидно, формуються за першим зі згаданих вище сценаріїв.

Завеликими є ці швидкості і для пояснення даних про *сонячний вітер* в околі нашої планети. З одного боку, узяті при обчисленнях початкові швидкості газу $U_0 \geq a$ не суперечать уявленням про процеси, які відбуваються в приповерхневих шарах Сонця: їх нагрів відбувається за рахунок механічної енергії, що надходить із конвективної зони. З іншого ж боку, прискорений потік газу в подальшому може істотно гальмуватися під дією факту обертання Сонця, в'язкості газу, і ще внаслідок неоднорідності сонячної корони, як і наявності магнітних полів.

Тому задача про формування сонячного вітру з точки зору теоретичного аналізу і сьогодні є так же актуальною, як і 50 років тому.

§ 13. Спалах Наднової як газодинамічне явище. Роль корпускулярного потоку в динаміці оболонки зорі

Механізм спалаху Наднової певною мірою вже з'ясовано. У процесі синтезу все складніших ядер хімічних елементів зростають втрати енергії і на висвічування нейтрино. Кожен подальший процес синтезу проходить при все зростаючій температурі завдяки тому, що відбувається безперервна перебудова зорі. Її ядро стискається (радіус зменшується від R_1 до R_2) і при цьому звільнюється потенціальна енергія

$$\Delta E_{\text{п}} = \frac{3}{2} GM \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]. \quad (1)$$

Ці процеси супроводжуються одночасним “розбуханням” оболонки зорі.

Нагадаємо: синтез ядер хімічних елементів аж до заліза – процес *екзотермічний*, який супроводжується виділенням енергії. У подальшому ж “доводиться” втрачати енергію на “монтування” кожного з ядер аж до урану включно. Це якраз стає можливим завдяки стискуванню ядра.

І тут доречно поставити питання: “навіщо Природі нейтрини?”. Але й дати на нього відповідь: лише вони здатні миттєво виносити від центра зорі на безконечність практично половину усієї енергії, звільненої внаслідок стиску зорі. Внаслідок цього рівновага зорі все більше порушується (“градієнт тиску вже стає замалим, щоб зрівноважити тягар верхніх шарів зорі”). І – настає *колапс*, спадання речовини зорі до її центра з утворенням “подекуди” *нейтронної зорі* чи, “в інших випадках” навіть *чорної діри*. Реалізовується також можливість цілковитого розльоту речовини такої зорі. Це – *спалах Наднової*, коли зоря упродовж кількох тижнів світиться як 100 млрд. сонць.

Серед цього розмаїття варіантів чітко виділяється такий, важливий з точки зору космічної газодинаміки: оболонка зорі уже відокремилась і рухається зі швидкістю ϑ , а навздогін їй зі швидкістю $u > \vartheta$ летять від зорі потоки речовини – своєрідний, дуже пекучий зоряний вітер.

Отже, рівняння руху оболонки можна записати у формі:

$$\frac{d(m\vartheta)}{dt} = qu. \quad (2)$$

Тут q і u – маса речовини, що приєднується до оболонки за 1 с та її швидкість до зіткнення з оболонкою. Згадана зміна маси

$$q = \frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 \rho(u - \vartheta), \quad (3)$$

де r – радіус оболонки, ρ – густина речовини корпускулярного потоку на відстані r від центра зорі.

Прийmemo, що $u = const$ і що густина ρ змінюється з відстанню r неперервно. Тоді закон збереження маси набуває вигляду

$$q = 4\pi r_0^2 \rho_0 = 4\pi r^2 \rho \quad (4)$$

(ρ_0 – густина при $r = r_0$), так що потужність втрати речовини зорею

$$qu = 4\pi r_0 \rho u. \quad (5)$$

І оскільки $m(u - \vartheta) = m_0(u - \vartheta_0)$, то отримаємо при $a = 4\pi r_0^2 \rho_0 = 4\pi r^2 \rho$ таке рівняння:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u - \vartheta} \right) = \frac{a(u - \vartheta)}{m_0(u - \vartheta)}, \quad (6)$$

так що

$$\vartheta = u - \frac{u - \vartheta_0}{\sqrt{1 + \frac{2a}{m_0}(u - \vartheta_0)}}. \quad (7)$$

Інтегруючи (7) та використовуючи граничні умови, знаходимо

$$r = r_0 + ut - \frac{m_0}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{2a}{m_0}(u - \vartheta_0)t - 1} \right]. \quad (8)$$

Ці співвідношення повністю описують зміну з часом маси, швидкості розширення і радіуса оболонки. Зокрема, за час t маса оболонки зростає на величину

$$m = m_0 + \int_0^t q dt = m_0 + \frac{m(u - \vartheta_0)}{u - \vartheta_0}. \quad (9)$$

Водночас можемо говорити і про іншу грань розвитку цього явища – про гальмування оболонки Наднової міжзоряним середовищем.

Цю задачу формулюють, виходячи з таких міркувань.

Нехай ρ – густина речовини у міжзоряному середовищі, m – маса оболонки, скинутої зорею. Якщо покласти, що оболонка у своєму русі захоплює всю речовину і $r \gg R$, то її маса при радіусі r рівна

$$m(r) = m_0 + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho. \quad (10)$$

Нехтуючи притяганням зорі, можна закон збереження кількості руху записати у вигляді

$$m\vartheta_0 = \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho + m_0\right)\vartheta, \quad (11)$$

де $\vartheta = \frac{dr}{dt}$. Інтегруючи (11), знаходимо:

$$\frac{1}{3}\pi r^4 \rho + m_0 r = m_0 \vartheta_0 t, \quad (12)$$

так що при $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \gg m_0$ буде $\vartheta = \frac{3m_0 \vartheta_0}{4\pi r^3 \rho}$, чи інакше

$$r = \left(\frac{3m_0 \vartheta_0}{\pi \rho}\right)^{1/4}, \text{ або } r = 4\vartheta t. \quad (13)$$

Насправді реалізуються і проміжні варіанти.

§ 14. Сильні ударні хвилі в однорідній атмосфері

Це, значною мірою, ідеалізована задача, бо реально, в той чи інший спосіб, густина середовища (та й інші параметри), найчастіше змінюються від точки до точки. Але в "нульовому наближенні", при відносно невеликих масштабних вимірах така постановка задачі оправдана.

Аналіз проблеми став особливо актуальним у процесі підготовки і підриву перших атомних бомб. І першим кроком тут став метод теорії розмірностей, який був успішно використаний Л. Седовим (СРСР) ще в 1944 р.

Розглянемо застосування згаданого методу, почавши від сферичного випадку. Одним із визначальних параметрів тут є Q – величина звільненої внаслідок вибуху енергії. Тож задача загалом характеризується чотирма параметрами: r , t , Q , і ρ_1 . Їхні розмірності

$$[r] = L, [t] = T, [\rho_1] = M/L^3, [Q] = ML^2/T^2.$$

Отже, можемо скласти один безрозмірний комплекс

$$\Pi = rQ^x \rho^y t^z. \quad (1)$$

Підставимо розмірності:

$$\Pi = L \left(ML^2/T^2 \right)^x \left(M/L^3 \right)^y T^z = L^{1+2x-3y} M^{x+y} T^{z-2x}. \quad (2)$$

Так отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 1 + 2x - 3y = 0, \\ x + y = 0, \\ z - 2x = 0, \end{cases} \quad (3)$$

з якої знаходимо: $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$, $z = -\frac{2}{5}$. Приймаємо $\Pi \approx (1)$.

Таким чином закон руху сильної сферичної ударної хвилі, що рухається в однорідній атмосфері, записується так:

$$r = \left(\frac{Q}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}. \quad (4)$$

А що $D = \frac{dr}{dt}$, то знаходимо і формулу для швидкості ударної хвилі

$$D = \frac{2}{5} \left(\frac{Q}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \left(\frac{Q}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{3}{2}}. \quad (5)$$

Розв'язавши це рівняння відносно r і поклавши $D \rightarrow a_1$, оцінимо масштаб r_* зони, охопленої збуренням. Поділивши ж r_* на швидкість звуку a_1 , знаходимо t – орієнтовний час розвитку події.

Конкретно, бомба, підірвана над Хіросімою, мала еквівалент 20000 т тротилу. Бомба у 100 Мт має потужність у $z=5000$ разів більшу. Як згадано, радіус дії ударної хвилі r_* можна оцінити, підставивши в (5) $D \approx a_1 = 330$ м/с, задане Q і $\rho_1 = 1.2 \cdot 10^{-3}$ г/см³.

Для першої бомби знаходимо $r_* = 1$ км, для 100-мегатонної r_* буде у $\sqrt[3]{5000}$ разів більшим, тобто 17 км.

Довідка: 1 кг тротилу = $4,2 \cdot 10^6$ Дж = 1000 ккалорій.

Циліндричний випадок. Такий розвиток подій передбачає, що заряд підірвано вздовж осі z і до того ж у всіх точках одночасно. Розподіл заряду визначається концентрацією енергії в розрахунку на одиницю довжини.

$$Q = \left(\frac{ML}{T^2}\right). \quad (6)$$

Тож безрозмірний комплекс матиме вигляд

$$\Pi = L \left(\frac{ML}{T^2} \right)^x \left(\frac{M}{L^3} \right)^y T^z = L^{1+x-3y} M^{x+y} T^{z-2x}, \quad (7)$$

звідки отримуємо рівняння для визначення показників степенів:

$$\begin{cases} 1 + 2x - 3y, \\ x + y = 0, \\ z - 2x = 0, \end{cases} \quad (8)$$

так що, поклавши $\Pi = 1$, маємо

$$r = \left(\frac{Q}{\rho} \right)^y t^{-z}, \text{ тобто } r = \left(\frac{Q}{\rho} \right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Звідси знаходимо формулу для швидкості ударної хвилі D :

$$D = \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{\rho_1} \right)^{1/2} \frac{1}{r}. \quad (10)$$

У цьому випадку енергія витрачається на нагрівання газу і надання йому імпульсу значно "економніше", тому й залежність D від r істотно послаблена.

Плоский випадок. Тут енергія розподілена у площині і при складанні безрозмірного комплексу беремо до уваги, що розмірність $[Q_n] = \text{Дж/см}^2$, тобто $[Q_n] = \frac{M}{T^2}$

Складаємо безрозмірний комплекс

$$\Pi = L \left(\frac{M^2}{T^2} \right)^x \left(\frac{M}{L^3} \right)^y T^z, \text{ так що}$$

$$\Pi = L^{1+2x-3y} M^{x+y} T^{z-2x}. \quad (11)$$

Підставивши знайдені показники степенів, отримуємо

$$r = \left(\frac{Q_n}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}; \quad D = \frac{dr}{dt} = \frac{2}{3} \left(\frac{Q_n}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} t^{-\frac{1}{3}}; \quad D = \frac{2}{3} \left(\frac{Q_n}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (12)$$

Усі такі задачі сьогодні розв'язують за допомогою ЕОМ. Наведені тут розв'язки адекватно описують розвиток подій, доки D істотно перевищує a_1 .

Актуальною, важливою тут є задача про розподіл параметрів газу за фронтом ударної хвилі. При з'ясуванні її

певну роль відіграє уявлення про *автомодельний* рух, при якому розподіл параметрів при зміні часу залишається собі подібним.

У найпростішому випадку такого руху усі газодинамічні величини залежать від геометричної координати і часу лише в комбінації $\xi = \frac{r}{t}$, яка приймається за єдину незалежну змінну при розв'язуванні системи диференціальних рівнянь. При $\xi = \text{const}$ параметри $p(\xi)$, $\rho(\xi)$ і т. д. зберігають свої значення, тобто задане їх значення на момент часу $2t$, $3t$, $4t$ відповідає координатам $2r$, $3r$, $4r$ і т.д. Тобто форма розподілу параметрів уздовж координатних осей залишається незмінною.

Завдяки такому припущенню систему нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних зводять до системи звичайних диференціальних рівнянь, в яких єдиною незалежною змінною є змінна ξ .

Задача про рух газу є *автомодельною*, якщо вона характеризується не більше ніж двома параметрами з незалежною розмірністю. Тут – це Q і ρ_1 – виділена енергія і початкова густина. Типовим прикладом цього є рух, який виникає при сильному вибуху в повітрі.

Параметри газу безпосередньо за фронтом ударної хвилі визначаються зі співвідношень (§5.11). Їх розподіл уздовж радіуса об'єму, охопленого рухом, знаходиться під час розв'язування системи (§3: 2, 6, 11), при чому *автомодельну* зміну зручно подати у вигляді $\xi = \frac{r}{R_\phi}$. Як згадувалося, при *автомодельному* русі форма розподілу параметрів газу за фронтом з часом зберігається, змінюються лише їх масштаби внаслідок зміни цих величин на фронті ударної хвилі.

Як видно з рис. 9, внаслідок вибуху практично вся маса газу, що раніше рівномірно заповнювала сферу з радіусом R_ϕ , концентрується у тонкому шарі біля фронту хвилі. Тиск у всьому об'ємі збуреного газу залишається практично однаковим і рівним $\frac{1}{2}p_2$, тоді як температура в напрямку до центра зростає необмежено.

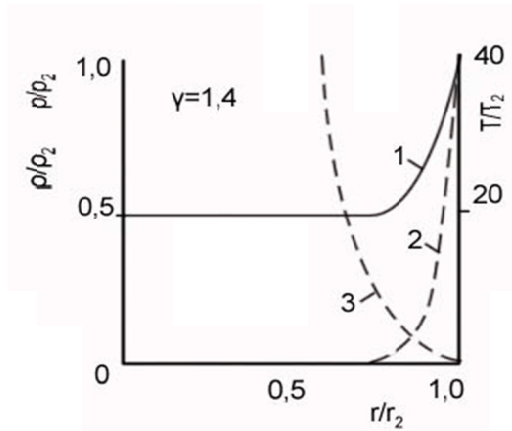


Рис 9. Розподіл тиску (1), густини (2) і температури (3) за фронтом сферичної ударної хвилі (автомодельний розв'язок)

§ 15. Рух ударної хвилі в атмосфері з експоненціальним розподілом густини в ній

Йдеться про розвиток явища миттєвого виділення енергії в нижніх шарах атмосфери Сонця, але і про підриг атомної бомби в атмосфері Землі. Задача ця не є автомодельною, оскільки доводиться враховувати зменшення густини атмосфери з висотою. Тут визначальним параметром є масштабна висота – висота, на якій густина зменшується в $e = 2,71$ раза:

$$H = \frac{a^2}{g},$$

де a – швидкість звуку, g – прискорення сили тяжіння.

Автомодельною є задача про рух хвилі до поверхні середовища, в якому густина змінюється за законом $\rho = Bx^n$, а відлік x здійснюється від поверхні всередину. А саме таким законом описується будова зовнішніх шарів зорі. Зокрема, якщо в оболонці наявний стан променистої рівноваги, то параметр $n = 3,25$ – *індекс політропи*. У задачі є ще один параметр із розмірністю маси, енергія ж вибуху не задається. Ударну

хвилю у цьому випадку можна розглядати як плоску, а за автомобельну змінну прийняти величину

$$\xi = \frac{x}{R_\phi} = \frac{x}{A_0 t^b}. \quad (1)$$

Тут A_0 – величина стала, b – показник автомобельності, який визначається з умови про існування фізично однозначного розв'язку системи після підстановки в неї (1) та зведення її до системи звичайних диференціальних рівнянь. Величина R_ϕ визначає положення фронту хвилі в заданий момент часу t . На фронті хвилі $\xi = 1$.

Швидкість фронту хвилі визначається співвідношенням

$$D = \frac{dR_\phi}{dt} = A_0 b t^{b-1} = b R_\phi \frac{b-1}{b} \quad (2)$$

Методика визначення показника автомобельності b детально викладена в монографії Я. Б. Зельдовича та Ю. П. Райзера (1966). У задачі про вихід ударної хвилі на поверхню середовища, яке характеризується індексом політропи $n = 3,25$, маємо $b = 0,59$. Отже, з (2) одержуємо закон зміни швидкості ударної хвилі при її виході на поверхню середовища у вигляді

$$D = \text{const} \rho_1^{\frac{b-1}{b}}, \quad (3)$$

або при $b = 0,59$ та $n = 3,25$

$$D = \text{const} \rho_1^{-\frac{1}{4,67}}. \quad (4)$$

Значення параметрів газу за фронтом у всій збуреній зоні знаходять числовим інтегруванням системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують закони збереження маси, імпульсу та енергії.

А ось результати, одержані А. С. Компанейцем (1960), Е. І. Андріанкіним, А. М. Коганом та В. П. Крайновим (1962), які стосуються закону руху ударної хвилі, що виникає при сильному точковому вибухові в неоднорідній атмосфері з розподілом густини $\rho_1 = \rho_{10} e^{-h/H}$.

Задача ця не є автотомодельною, бо крім величини виділеної енергії Q та густини в місці вибуху ρ_{10} рух характеризується ще й масштабною висотою H . Крім того, він є не одновимірним, а двовимірним, симетричним відносно вертикальної осі. Закон руху хвилі було одержано спочатку на підставі припущення, що, як і для сильного вибуху в однорідному середовищі, тиск є практично однаковим у всьому охопленому рухом об'ємі, а також у кожен момент часу є сталим уздовж поверхні фронту ударної хвилі. Система диференціальних рівнянь, що описує закони збереження маси, імпульсу та енергії при двох незалежних змінних – часу та полярного кута, розв'язувалась на ЕОМ. Характеристикою задачі є величина τ з розмірністю часу

$$\tau = \left(\frac{\rho_{10} H^5}{Q} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Переріз поверхонь фронту ударної хвилі вертикальною площиною, що проходить через точку вибуху, для моментів часу $t/\tau = 5,8; 12,2; 18,0; 21,4; 23,1$ при $\gamma = 1,2$ відображено на рис. 10. Як бачимо, форма фронту ударної хвилі увесь час змінюється. У момент $t \approx 24\tau$ настає «прорив» хвилі на безмежність. До цього часу ударна хвиля встигає пройти вниз відстань $2H$ і по горизонталі (на рівні точки вибуху) приблизно $3,5 H$.

Цей розв'язок, однак, можна використовувати доти, поки тиск на фронті ударної хвилі достатньо великий. У подальшому затухання хвилі за рахунок дисипації її енергії відіграє більшу роль, ніж неоднорідність середовища. Детальніше ця задача розглядається в монографії Я. Б. Зельдовича та Ю. П. Райзера (1966). І ось які висновки випливають із цього розв'язку. Якщо у хромосфері Сонця раптово виділилась енергія, типова для спалаху, то радіус затухання ударної хвилі значно перевищує масштабну висоту H . З (5) випливає, що повний час розвитку явища становить 1-2 сек. Далі приблизно за цей же час повинна відбутись гідродинамічна релаксація збуреного ударною хвилею газу.

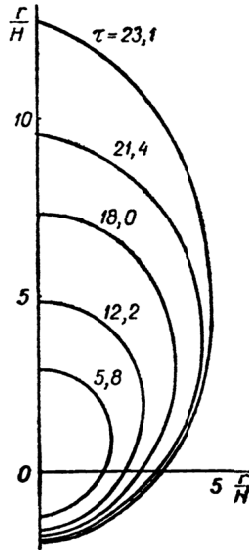


Рис. 10. Переріз поверхонь фронту ударної хвилі вертикальною площиною, що проходить через точку вибуху, для декількох моментів безрозмірного часу τ при поширенні ударної хвилі в неоднорідному середовищі

Крива блиску такого вибуху ще не розрахована. Проте очевидно, що її можна було б зіставити із даними спостережень спалахуючих зір типу *UV Кита*, але не із сонячними спалахами, де час зростання яскравості вимірюється сотнями секунд.

Загалом в останні роки розв'язки окремих задач космічної газодинаміки отримують за допомогою ЕОМ. Тож дані нових спостережень мають все надійніше обґрунтування.