Гой Т.П.
Казмерчук А.І.
Федак І.В.

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Частина I.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, ЯКІ ІНТЕГРУЮТЬСЯ У КВАДРАТУРАХ

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В.

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Частина 1.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, ЯКІ ІНТЕГРУЮТЬСЯ У КВАДРАТУРАХ

Навчально-методичний посібник для студентів
математичних та фізичних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
"ЛІК"
2005

Друкується відповідно до ухвали вченої ради Прикарпатського університету імені Василя Стефаника (протокол № 8 від 23 травня 2000 р.)

Рецензенти:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент *Р.І. Собкович*
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника),
кандидат фіз.-мат. наук, доцент *Гургула С.І.*
(Національний державний технічний університет нафти і газу)

Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В. Звичайні диференціальні рівняння. Частина 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються у квадратурах: Навчально-методичний посібник для студентів математичних та фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Івано-Франківськ, "ЛІК", 2005. – 120 с.

§ 1. Диференціальне рівняння та його розв'язок

Звичайним диференціальним рівнянням називається співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad \textbf{(1.1)}$$

де F – задана функція своїх аргументів, яка визначена в деякій області G та задовольняє в ній певні умови неперервності та диференційовності; x – незалежна скалярна змінна, y – шукана функція цієї змінної, $y', y'', ..., y^{(n)}$ – її похідні. Область G називається ***областю визначення*** рівняння (1.1).

Враховуючи співвідношення $d^j y = y^{(j)} dx^j$ між диференціалами і похідними функції $y = y(x)$, рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$\Phi\left(x, y, dx, dy, ..., d^n y\right) = 0. \qquad \textbf{(1.2)}$$

Якщо області визначення рівнянь (1.1) та (1.2) співпадають, то ці рівняння рівносильні, тобто мають одні й ті ж розв'язки.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної або диференціала, що входить у рівняння.

У рівняннях n-го порядку (1.1) або (1.2) вважається, що похідна або диференціал n-го порядку шуканої функції справді входить у рівняння, тоді як наявність решти аргументів необов'язкова.

Співвідношення між незалежними змінними $x_1, x_2, ..., x_m$, функцією u цих змінних та її частинними похідними за змінними $x_1, x_2, ..., x_m$ до порядку n включно називається ***диференціальним рівнянням з частинними похідними n-го порядку***.

Наприклад, рівняння з частинними похідними першого порядку має такий загальний вигляд

$$\Phi\left(x_1, x_2, ..., x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0,$$

де Φ – відома функція своїх аргументів, задана в деякій області, причому хоча б одна з частинних похідних входить у це співвідношення обов'язково.

Наведемо приклади диференціальних рівнянь:

1. $y' + ky = \cos x$,

2. $\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}\,x + xy\,\mathrm{d}\,y = 0$,

3. $x^2 y'' - 2xy' + 6y = e^x$,

4. $\frac{d^3 y}{dx^3} \cdot \frac{dy}{dx} - 2\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = 0$,

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$.

Рівняння 1-4 – звичайні диференціальні рівняння (рівняння 1, 2 – першого порядку, рівняння 3 і 4 – відповідно другого і третього порядків), рівняння 5 – рівняння з частинними похідними другого порядку.

Надалі розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння, причому як незалежну змінну, так і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Розв'язком рівняння (1.1) на деякому інтервалі (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, називається функція $y = y(x)$, яка:

1. має похідні до порядку n включно на інтервалі (a,b), причому

$$\forall x \in (a,b) \qquad \left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) \in G;$$

2. задовольняє рівняння (1.1), тобто для всіх $x \in (a,b)$ перетворює його у тотожність

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) \equiv 0.$$

Наприклад, функція $y = \cos x$ є розв'язком диференціального рівняння

$$y'' + y = 0$$

на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ (і на кожному скінченному інтервалі). Але крім неї розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є також функції

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

У загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку має сім'ю розв'язків, залежну від n довільних параметрів (сталих). Наприклад, всі розв'язки диференціального рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = 0$$

містяться у формулі

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

де $C_1, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

З геометричної точки зору розв'язку диференціального рівняння у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яка називається ***інтегральною кривою*** даного рівняння.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називається *інтегруванням* цього рівняння. Основна задача інтегрування диференціального рівняння полягає у знаходженні всіх розв'язків цього рівняння та дослідженні їх властивостей.

Якщо при цьому вдається виразити всі розв'язки рівняння через елементарні функції, то кажуть, що рівняння ***зінтегровано через елементарні функції***. Якщо ж рівняння не інтегрується через елементарні функції, але всі його розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій, то кажуть, що рівняння ***зінтегровано у квадратурах***. Наприклад, усі розв'язки диференціального рівняння першого порядку

$$y' = e^{-x^2}$$

виражаються формулою

$$y = \int e^{-x^2}\, \mathrm{d}x + C.$$

З курсу математичного аналізу відомо, що первісна $\int e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ не виражається через елементарні функції, однак вважаємо, що знайдені всі розв'язки даного рівняння.

Зауважимо також, що у теорії диференціальних рівнянь символом $\int f(x)\, \mathrm{d}x$, де $f(x)$ – задана неперервна функція на деякому інтервалі, прийнято позначати фіксовану первісну, на відміну від математичного аналізу, де цим символом позначають множину всіх первісних функції $f(x)$.

Якщо диференціальне рівняння вдається зінтегрувати через елементарні функції або у квадратурах, то кажуть, що воно зінтегроване у скінченному вигляді. Розглядатимемо, в основному, саме такі рівняння, однак значно більше диференціальних рівнянь не інтегруються у скінченному вигляді, й для аналітичного представлення їх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

§ 2. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної

2.1. Основні поняття й означення. Звичайне диференціальне рівняння першого порядку, згідно зі сказаним вище, має такий загальний вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.1}$$

Якщо рівняння (2.1) можна розв'язати відносно похідної, то його будемо записувати у вигляді

$$y' = f(x, y), \tag{2.2}$$

де $f(x, y)$ – задана функція, яку вважаємо однозначною та неперервною в деякій області $G \subset \mathbf{R}^2$ (обмеженій або ні). Таку форму запису рівняння першого порядку будемо називати ***нормальною.***

Розв'язком рівняння (2.2) на деякому інтервалі (a,b)[1)] називають функцію $y = y(x)$, якщо:

1) $y(x)$ є неперервно диференційовною (тобто має неперервну похідну $y'(x)$ в кожній точці інтервалу (a,b));

2) $(x, y(x)) \in G$ для всіх $x \in (a,b)$;

3) $y'(x) \equiv f(x, y(x))$ на інтервалі (a,b).

Якщо інтервал (a,b) містить лівий або правий кінець, то дане означення вимагає існування відповідної неперервної однобічної похідної функції $y(x)$ у цій точці.

Відзначимо й інші форми запису рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної.

[1)] Цей інтервал може бути як скінченним, так і нескінченним з одного чи іншого боку, а також замкненим з одного чи обох кінців.

У багатьох випадках разом з рівнянням (2.2) будемо розглядати так зване *перевернуте* рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}=\frac{1}{f(x,y)}, \qquad \textbf{(2.3)}$$

використовуючи його в околі тих точок площини Oxy, де функція $f(x,y)$ стає необмеженою. Рівняння (2.3) доцільно розглядати також і тоді, коли воно розв'язується легше, ніж рівняння (2.2).

Якщо функція $f(x,y)$ в області G не перетворюється в нескінченність, то рівняння (2.2) і (2.3) рівносильні в цій області.

Рівняння (2.2) та (2.3) можна замінити одним рівносильним рівнянням

$$\mathrm{d}\,y-f(x,y)\,\mathrm{d}\,x=0. \qquad \textbf{(2.4)}$$

До рівнянь вигляду (2.2) і (2.3) зводиться також рівняння більш загального вигляду

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x+N(x,y)\,\mathrm{d}\,y=0 \qquad \textbf{(2.5)}$$

і рівняння у симетричній формі

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{P(x,y)}=\frac{\mathrm{d}\,y}{Q(x,y)}. \qquad (2.6)$$

Зауважимо, що у рівнянні (2.2) шуканою функцією вважається *y*, у рівнянні (2.3) – *x*, а у рівняння (2.4), (2.5), (2.6) змінні *x* і *y* входять рівноправно.

Розв’язуючи питання про інтегрованість конкретного диференціального рівняння у скінченному вигляді, потрібно використовувати різні форми запису рівняння, розглядаючи в якості шуканої функції як $y=y(x)$, так і $x=x(y)$.

Не завжди вдається отримати розв'язок диференціального рівняння у явному вигляді, тобто у вигляді $y=y(x)$. Крім того, таке задання розв'язку не завжди зручне для його вивчення і використання.

Розв'язок диференціального рівняння (2.2) може бути заданий у неявному вигляді, тобто у вигляді, не розв’язаному відносно *y*.

Вважають, що співвідношення $\Phi(x,y)=0$ визначає розв'язок рівняння (2.2), якщо:

1) воно визначає y як неявну функцію від x, $y=y(x)$ [1)];

2) функція $y=y(x)$ є розв'язком рівняння (2.2), тобто для всіх $x\in(a,b)$ виконується тотожність

$$\Phi'_x(x,y(x))+\Phi'_y(x,y(x))\cdot f(x,y(x))\equiv 0.$$

У багатьох випадках розв'язок рівняння (2.2) може бути записаний у параметричній формі

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ t_0<t<t_1.$$

У цьому випадку для всіх $t\in(t_0,t_1)$ повинна виконуватись тотожність

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\equiv f(\varphi(t),\psi(t)),\qquad \varphi'(t)\neq 0.$$

Наприклад, функція $y=\sqrt{1-x^2}$, де $x\in(-1;1)$, є розв'язком рівняння $y'=-x/y$. Цей же розв'язок можна задати у неявному вигляді $x^2+y^2=1,\ y>0$, та у параметричній формі $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0<t<\pi$.

2.2. Задача Коші. У багатьох задачах теоретичного і прикладного характеру потрібно серед усіх розв’язків диференціального рівняння (2.2) відшукати розв'язок $y=y(x)$, який задовольняє умову

$$y(x_0)=y_0, \tag{2.7}$$

де x_0,y_0 – задані числа, тобто такий розв'язок, який при заданому значенні незалежної змінної $x=x_0$ набуває заданого значення y_0.

Задача знаходження розв'язку, який задовольняє початкову умову (2.7), називається ***задачею Коші*** [2)] (або ***початковою задачею***). Умову (2.7) нази-

---

[1)] Щоб існувала неявна функція $y'=f(x,y)$, яка визначена рівнянням $F(x,y,y')=0$ і набуває значення y'_0 при $x=x_0$ і $y=y_0$, досить, щоб виконувалась рівність $F(x_0,y_0,y'_0)=0$, існувала неперервна частинна похідна $F'_{y'}$ в околі значень x_0,y_0,y'_0 і щоб $F'_{y'}(x_0,y_0,y'_0)\neq 0$. Тоді співвідношення $F(x,y,y')=0$ визначає неперервну функцію $y'=f(x,y)$ в околі значень x_0,y_0 незалежних змінних, причому $f(x_0,y_0)=y'_0$.

[2)] КОШІ (Cauchy) Огюстен Луї (1789-1857) – французький математик.

вають ***початковою умовою*** (або ***умовою Коші***) розв'язку $y = y(x)$, а числа x_0, y_0 – ***початковими даними*** цього розв'язку.

З геометричної точки зору задача Коші (2.2), (2.7) полягає у відшуканні інтегральної кривої рівняння (2.2), яка проходить через наперед задану точку (x_0, y_0) площини Oxy.

Будемо говорити, що розв'язок задачі Коші з початковими даними x_0, y_0 єдиний, якщо існує такий окіл точки x_0, $|x - x_0| < h$, що:

1) у цьому околі визначений розв'язок $y = y(x)$, для якого $y(x_0) = y_0$;

2) не існує іншого розв'язку з початковими даними x_0, y_0, визначеного у цьому ж околі.

Якщо задача Коші (2.2),(2.7) має не один розв'язок або взагалі не має розв'язків, то кажуть, що у точці (x_0, y_0) порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

Якщо функція $f(x, y)$ в деякій точці $M(x_0, y_0)$ перетворюється в нескінченність, то розглядають рівняння (2.3) й шукають розв'язок $x = x(y)$, який задовольняє початкову умову $x(y_0) = x_0$.

Якщо ж у точці M функція $f(x, y)$ невизначена, то задача Коші формулюється так: знайти розв'язки $y = y(x)$ (або $x = x(y)$), які володіють властивістю:

$$y(x) \to y_0 \text{ при } x \to x_0 \quad (x(y) \to x_0 \text{ при } y \to y_0).$$

У всіх випадках задачі Коші основними питаннями є питання про існування, єдиність розв'язку та його властивості.

Наведемо основні твердження, які дають відповідь на питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння (2.2).

Розглянемо задачу Коші (2.2), (2.7) у замкненій обмеженій області (прямокутнику)

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\right\}, \; a > 0, b > 0,$$

і припустимо, що функція $f(x, y)$ в цій області неперервна за x та задовольняє ***умову Ліпшіца*** [1] за змінною y, тобто

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \, | \, y_1 - y_2 \, |,$$

де L – стала Ліпшіца, $0 \le L < \infty$, $(x, y_1), (x, y_2)$ – дві довільні точки прямокутника Q.

Очевидно, що функція $f(x, y)$ буде неперервною в області Q, а отже, й обмеженою в Q, тобто існує число $M > 0$ таке, що для всіх точок $(x, y) \in Q$

$$| \, f(x, y) | \le M < \infty .$$

Теорема 1 (Пікара [2]). *Якщо функція* $f(x, y)$ *в області Q неперервна за змінною x та задовольняє умову Ліпшіца за змінною y, то принаймні на відрізку* $G_1 = \{ x \in \mathbf{R} : | \, x - x_0 \, | \le h \}$, де

$$h = \min \left\{ a, {}^{b}\!/_{M} \right\},$$

існує єдиний .розв'язок $y = y(x)$ *задачі (2.2), (2.7).*

Є декілька способів доведення теореми 1. Найбільш конструктивним є метод Пікара, який дає можливість фактично побудувати розв'язок задачі як границю ***послідовних наближень*** $y_n(x)$, $n = 0,1,2,...$ (***наближень Пікара***), визначених рекурентними формулами

$$y_0(x) \equiv y_0, \qquad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) \mathrm{d}t, \quad n = 1,2,\ldots .$$

Ці наближення гарантовано збігаються до розв’язку задачі Коші (2.2), (2.7) на відрізку G_1. Однак у багатьох випадках розв'язок вдається продовжити за межі цього інтервалу.

Теорема Пікара має велике значення в теорії звичайних диференціальних рівнянь, бо дозволяє за виглядом диференціального рівняння відповісти про існування та єдиність розв'язку цього рівняння при заданих початкових умовах. Це особливо важливо у тих випадках, коли неможливо вказати точну

[1] ЛІПШІЦ (Lipchitz) Рудольф Отто (1832-1903) – німецький математик.
[2] ПІКАР (Picard) Шарль Еміль (1856-1941) – французький математик.

формулу, що визначає розв'язок рівняння, а тому потрібно застосовувати методи наближеного розв’язування диференціального рівняння. Важливо також наперед знати, що розв'язок існує (хоча часто його неможливо точно знайти), і тоді можна будувати тим чи іншим способом наближення до цього розв'язку.

Зауваження 1. Умова Ліпшіца є, взагалі кажучи, не досить конструктивною. Її важко перевіряти для функцій складної будови. Цю умову можна замінити більш жорсткою, але простішою і конструктивнішою. А саме – умова Ліпшіца завжди виконується, якщо функція $f(x,y)$ має в області Q обмежену частинну похідну $f'_y(x,y)$.

Покажемо це. Для цього до різниці $f(x,y_1)-f(x,y_2)$ застосуємо теорему Лагранжа [1)] про скінченні прирости:

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)=f'_y\big(x,y_1+\theta(y_1-y_2)\big)\cdot(y_1-y_2),$$

де $0<\theta<1$.

Якщо $\left|f'_y(x,y)\right|\le N$, то, очевидно,

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le N\left|y_1-y_2\right|.$$

Але з умови Ліпшіца не випливає умова обмеженості похідної $f'_y(x,y)$, більше того, остання може навіть не існувати. Наприклад, функція

$$f(x,y)=2|y|\cos x$$

недиференційовна за змінною y в точці

$$(x_0,0),\quad x_0\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

але умова Ліпшіца в околі цієї точки виконується. Справді,

$$\left|f(x,y_2)-f(x,y_1)\right|=2|\cos x|\,\big||y_2|-|y_1|\big|\le 2|y_2-y_1|,$$

оскільки $|\cos x|\le 1$, а

$$\big||y_2|-|y_1|\big|\le|y_2-y_1|.$$

Таким чином, дана функція задовольняє умову Ліпшіца зі сталою $L=2$.

[1)] ЛАГРАНЖ (Lagrange) Жозеф Луї (1736-1813) – французький математик і механік.

Зауваження 2. Теорема Пікара дає достатні умови існування єдиного розв'язку задачі Коші для рівняння (2.2), але ці умови не є необхідними. А саме – може існувати єдиний розв'язок задачі (2.2),(2.7), але у точці (x_0, y_0) не виконується хоч одна з двох умов, які накладаються на праву частину рівняння (2.2), або обидві ці умови разом.

Розглянемо приклади.

1. $y' = y\sin x + e^x$. Функція $f(x,y) = y\sin x + e^x$ неперервна, а похідна $f_y' = \sin x$ обмежена в усіх точках площини Oxy. Отже, згідно з теоремою Пікара та зауваження 1 до неї, через кожну точку площини Oxy проходить одна інтегральна крива даного диференціального рівняння.

2. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Права частина рівняння визначена і неперервна в усіх точках площини Oxy. Частинна похідна

$$f_y' = 2y^{-1/3}$$

стає необмеженою, якщо $y = 0$, тому в точках осі Ox може порушуватись єдиність розв'язку. Легко переконатись, що функція

$$y = (x+C)^3$$

є розв'язком даного рівняння. Крім того, маємо також очевидний розв'язок $y = 0$. Таким чином, через кожну точку осі Ox проходить принаймні дві інтегральні криві і, отже, справді в точках цієї осі порушується єдиність розв'язку. Інтегральними кривими даного рівняння будуть також лінії, складені з кусків кубічних парабол $y = (x+C)^3$ і відрізків осі Ox, тому через кожну точку осі Ox проходить безліч інтегральних кривих.

3. $y' = y^{-2}$. У точках $(x_0, 0)$ осі Ox функції

$$f(x,y) = y^{-2}, \quad f_y' = -2y^{-3}$$

розривні і необмежені при $y \to 0$, але через кожну точку цієї осі проходить єдина інтегральна крива $y = \sqrt[3]{3(x-x_0)}$.

Якщо на функцію $f(x,y)$ у рівнянні (2.2) накладати менш жорсткі умови, ніж у теоремі Пікара, то може виявитись, що розв'язок задачі Коші хоча й буде існувати, але його єдиність не гарантуватиметься. Наведемо теорему Пеано [1], яка за умови неперервності функції $f(x,y)$ в області Q гарантує існування, але не єдиність розв'язку задачі Коші (це яскраво ілюструє наведений вище приклад 2).

Теорема 2 (Пеано). *Якщо функція* $f(x,y)$ *у рівнянні (2.2) неперервна в області Q, то принаймні на відрізку* G_1 *існує щонайменше один розв'язок* $y = y(x)$ *задачі (2.2), (2.7).*

Теореми Пікара і Пеано встановлюють факт існування неперервно диференційовного розв'язку задачі (2.2), (2.7) лише в деякому околі точки x_0, тобто це теореми про існування розв'язку в локальному розумінні.

Існування розв'язку в наперед заданій області цими теореми не гарантується, тобто в усій області розв'язок задачі може й не існувати. Наприклад, рівняння $y' = 1 + y^2$ з початковою умовою $y(0) = 0$ має розв'язок $y = \operatorname{tg} x$. Він, очевидно, він існує лише на інтервалі $(-\pi/2, \pi/2)$, тоді як права частина рівняння є неперервно диференційовною функцією на всій площині Oxy, а отже, справджує умову Ліпшіца у будь-якій скінченній частині цієї площини.

Як вже згадувалось, умова Ліпшіца (2.6) є достатньою умовою єдиності розв'язку задачі Коші (2.2), (2.7). Є низка менш жорстких достатніх умов єдиності розв'язку цієї задачі. Одна з них – це ***умова Осгуда*** [2] :

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \le L \cdot \omega(|\, y_1 - y_2 \,|),$$

де функція $\omega(u)$ неперервна, $\omega(u) > 0$ при $|\, y_1 - y_2 \,| \in (0,\sigma)$ і справджує умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}u}{\omega(u)} = \infty .$$

---

[1] ПЕАНО (Peano) Джузеппе (1858-1932) – італійський математик.
[2] ОСГУД (Osgood) Вільям Фогг (1864-1943) – американський математик.

Такими функціями $\omega(u)$ можуть бути, наприклад, $\omega = u$ (в цьому випадку одержимо умову Ліпшіца),

$$\omega = u\,|\ln u|,\ \ \omega = u\,|\ln|\ln u\|\ \text{і т.д.}$$

Якщо ж функції $\omega(u)$ такі, що їх графіки опуклі вгору й інтеграл $\int_0^{\varepsilon}\frac{du}{\omega(u)}$ розбіжний, то умова Осгуда є не тільки достатньою, а й необхідною для єдиності розв'язку задачі (2.2), (2.7).

2.3. Загальний, частинний та особливий розв'язки. На прикладах, розглянутих раніше, ми бачимо, що диференціальне рівняння (2.2) може мати безліч розв'язків. Сім'ю розв'язків рівняння (2.2), залежну від однієї довільної сталої C:

$$y = \varphi(x, C) \tag{2.8}$$

називають ***загальним розв'язком*** цього рівняння.

Формула (2.8) дозволяє розв'язати задачу Коші для рівняння (2.2). Для цього потрібно визначити $C = C_0$ із рівності $y_0 = \varphi(x_0, C)$ і підставити знайдене значення у формулу (2.8). Тоді $y = \varphi(x, C_0)$ – розв'язок задачі Коші. Однак при цьому не гарантується ні розв'язність рівняння

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

відносно C, ні єдиність знайденого розв'язку задачі Коші.

У зв'язку з цим зручним є наступне означення загального розв'язку рівняння (2.2) [1)].

Нехай G – деяка область площини Oxy, через кожну точку якої проходить одна й тільки одна інтегральна крива рівняння (2.2) (наприклад, можемо вважати, що в околі кожної точки області G справджуються умови теореми Пікара). Тоді функцію (2.8), яка визначена в деякій області змінних x і C та має в цій області неперервну частинну похідну за змінною x, називають ***загальним розв'язком*** рівняння (2.2) в області G, якщо:

[1)] Формулювання цього означення належить російському математику М.П. Єругіну. Існують й інші означення загального розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ (див., наприклад, [7]).

1) співвідношення (2.8) розв'язне в G відносно довільної сталої C:

$$C = \psi(x, y); \tag{2.9}$$

2) функція (2.8) є розв'язком рівняння (2.2) для всіх значень довільної сталої C з формули (2.9), коли точка (x, y) пробігає область G.

Знаючи загальний розв'язок в області G, легко отримати з нього розв'язок задачі Коші з довільними початковими даними x_0, y_0 з області G за рахунок вибору відповідного значення довільної сталої C. Для цього потрібно замінити у формулі (2.8) змінні x і y числами x_0, y_0 відповідно, розв'язати отримане рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$ відносно C і підставити знайдене значення $C = C_0$ у формулу загального розв'язку (2.8). Отримана функція $y = \varphi(x, C_0)$ і буде шуканим розв'язком, бо вона є розв’язком рівняння (2.2) і $\varphi(x_0, C_0) = y_0$. Інших розв'язків немає.

Якщо у формулі (2.8) роль довільної сталої C відіграє початкове значення y_0 шуканої функції при деякому фіксованому значенні x_0 незалежної змінної:

$$y = \varphi(x, x_0, y_0),$$

то такий запис загального розв'язку будемо називати ***загальним розв'язком у формі Коші***.

Знання загального розв'язку у формі Коші дає можливість отримати розв'язок довільної конкретної задачі Коші простою заміною y_0 заданим початковим значенням шуканого розв'язку при $x = x_0$ і вивчати залежність розв'язку задачі Коші від початкового значення шуканої функції.

Загальний розв'язок рівняння (2.2), записаний у неявному вигляді (вигляді, не розв'язному відносно шуканої функції y):

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2.10}$$

будемо називати ***загальним інтегралом*** цього рівняння. При цьому вважають, що рівність (2.10) визначає загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ рівняння (2.2) в області G.

Часто загальний інтеграл одержують у вигляді, розв'язаному відносно довільної сталої C:

$$\Psi(x, y) = C .$$

Ліву частину цієї рівності називають ***інтегралом*** рівняння (2.2).

Аналогічно визначають сім'ю інтегральних кривих (розв'язків) рівняння (2.2), залежну від довільної сталої C, у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C), \\ y = \psi(t, C) \end{cases}$$

як ***загальний розв'язок у параметричній формі***. Якщо з цієї системи вдається виключити параметр t, то загальний розв'язок можна одержати у неявному чи навіть у явному вигляді.

Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2.2) називається ***частинним***, якщо у кожній його точці зберігається єдиність розв'язку задачі Коші. Розв'язок, який міститься у формулі (2.8) загального розв'язку, тобто одержується з нього при конкретному значенні довільної сталої C (включаючи $\pm\infty$), є частинним розв'язком.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називається ***особливим***. Його не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) при жодному конкретному значенні сталої C (включаючи $\pm\infty$).

З геометричної точки зору особливому розв'язку відповідає інтегральна крива, яка не міститься в сім'ї інтегральних кривих, що складають загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

Із теореми Пікара та зауваження 1 до неї випливає, що особливі розв'язки рівняння (2.2) потрібно шукати серед тих кривих, уздовж яких похідна $f'_y(x, y)$ необмежена. Такі криві називають ***підозрілими на особливий розв'язок***.

Крива, підозріла на особливий розв'язок, буде особливим розв’язком, якщо:

1) вона є інтегральною кривою;

2) в кожній її точці порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші. Звідси, зокрема, випливає, що рівняння (2.2), в якому $f(x,y)$ є многочленом відносно x і y, не може мати особливих розв'язків. Рівняння (2.2), права частина якого є відношенням многочленів, і рівняння

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0,$$

де M і N – многочлени щодо x і y, також не мають особливих розв'язків.

Приклад 2.1. Розв'язати рівняння $y' = 2\sqrt{y},\ y \geq 0$.

Розв'язання. Якщо $y \neq 0$, то одержуємо $\dfrac{y'}{2\sqrt{y}} = 1$ або $(\sqrt{y})' = 1$. Звідси $\sqrt{y} = x + C$, де $x \geq -C$. Таким чином, загальним розв'язком даного рівняння є

$$y = (x+C)^2,\ x \geq -C.$$

З геометричної точки зору отримали праві вітки парабол, вершини яких знаходяться на осі Ox, а вісь симетрії паралельна до осі Oy.

Оскільки $f_y' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, то похідна f_y' перетворюється в нескінченність лише при $y = 0$, тобто в точках осі абсцис. Легко бачити, що $y = 0$ теж є розв'язком даного рівняння, причому через будь-яку точку $(x_0, 0)$ проходить також інша інтегральна крива $y = (x - x_0)^2$. Отже,

$$y = 0,\ -\infty < x < +\infty,$$

є особливим розв'язком.

І, нарешті, розглядаючи функцію

$$y = \begin{cases} 0, -\infty < x \leq x_0, \\ (x - x_0)^2,\ x_0 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

переконуємось, що вона також є розв'язком рівняння (пропонуємо побудувати графік цієї функції самостійно). Цей розв'язок не буде ні частинним, ні особливим, оскільки умова єдиності порушується лише при $x \leq x_0$. ■

Як видно з прикладу 2.1, існують розв'язки диференціальних рівнянь, які не є ні частинними, ні особливими. Їх можна отримати "склеюванням" кусків частинних і особливих розв'язків. Можливе також “склеювання” двох частин розв’язків у точці неєдиності розв’язку задачі Коші. Надалі на розгляді таких розв'язків зупинятись не будемо.

§ 3. Розв'язування диференціальних рівнянь методом ізоклін

3.1. Метод ізоклін. Якщо рівняння (2.2) не інтегрується у квадратурах або його розв'язок має дуже складну будову і, отже, ним важко користуватись, наприклад, для аналізу поведінки інтегральних кривих, то можна скористатися геометричною інтерпретацією самого рівняння.

Диференціальне рівняння (2.2) встановлює зв'язок між координатами довільної точки $M(x, y)$ і кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ до інтегральної кривої у цій точці (рис. 3.1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y).$$

Якщо функція $f(x, y)$ визначена у деякій області G, то кожній точці $M(x, y) \in G$ відповідає деякий напрям, кутовий коефіцієнт якого дорівнює $f(x, y)$. Вказуючи цей напрям вектором (для визначеності вважатимемо його одиничним) з початком у точці M, отримаємо в області G ***поле напрямів***, визначене рівнянням (2.2) (рис. 3.2).

Як вже зазначалось, розв'язком рівняння (2.2) є крива, яку називають ***інтегральною кривою***. Отже, інтегральна крива, що проходить через точку $M(x, y) \in G$, відрізняється від усіх інших кривих, які проходять через цю точку, тим, що напрям дотичної у даній точці до інтегральної кривої збігається з напрямом поля, що його задає дане диференціальне рівняння. Тому геометрично інтегрування диференціального рівняння полягає у знаходженні кривих, дотичні до яких у кожній своїй точці збігаються з напрямом поля.

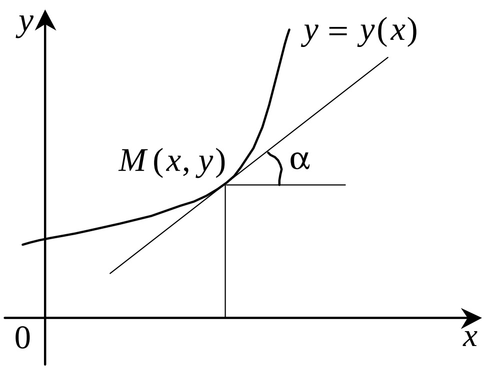


Рис. 3.1

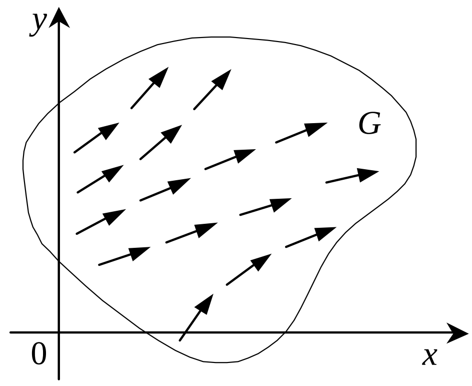


Рис. 3.2

Для побудови поля напрямів зручно розглядати геометричні місця точок, у яких дотичні до інтегральних кривих зберігають сталий напрям. Такі геометричні місця точок називають ***ізоклінами***.

Рівняння ізокліни для рівняння (2.2) має вигляд

$$f(x, y) = k\,, \qquad \textbf{(3.1)}$$

де k – довільна стала.

Змінюючи в (3.1) значення k, одержимо множину ізоклін на площині Oxy. За допомогою ізоклін і відомих сталих кутів $\alpha(x)$ $(k = \operatorname{tg}\alpha)$ нахилу дотичних до інтегральних кривих, які їх перетинають, можна відтворити якісну картину поля інтегральних кривих досліджуваного рівняння. Такий метод дослідження диференціальних рівнянь називається ***методом ізоклін***.

Очевидно, за допомогою цього методу можна визначити характерні лінії й області поля інтегральних кривих, такі, наприклад, як область зростання (при $k > 0$), спадання (при $k < 0$) інтегральних кривих, лінії екстремумів інтегральних кривих (при $k = 0$).

Якщо функція $f(x, y)$ у рівнянні (2.2) диференційовна, то за допомогою неявного задання другої похідної

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = f_x'(x, y) + f(x, y) \cdot f_y'(x, y)$$

можна визначити області опуклості, напрям опуклості та лінію точок перегину інтегральних кривих. Наприклад, якщо друга похідна y'' зберігає додатний (від'ємний) знак, то будь-яка інтегральна крива опукла вниз (вверх). Точки перегину, очевидно, належать лінії, рівняння якої

$$f_x'(x,y) + f(x,y) \cdot f_y'(x,y) = 0 .$$

Якщо у деякій точці $P(x_0, y_0)$ функція $f(x,y)$ стає нескінченно великою, то напрям поля буде паралельний до осі Oy. У цьому випадку замість рівняння (2.2) потрібно розглянути перевернуте рівняння (2.3).

Якщо функція $f(x,y)$ у деякій точці (x_0, y_0) перетворюється в невизначеність $0/0$ і не може бути довизначеною за неперервністю, то у цій точці поле невизначене і через неї не проходить жодна інтегральна крива. Але це не виключає можливості існування інтегральних кривих $y = y(x)$ $(x = x(y))$, які володіють властивістю:

$$y(x) \to y_0 \text{ при } x \to x_0, \ \left(x(y) \to x_0 \text{ при } y \to y_0\right).$$

Ізокліни разом з лініями екстремумів і точками перегину дають можливість схематично побудувати графіки інтегральних кривих даного рівняння. При цьому безпосередньою підстановкою потрібно перевірити, чи є ізокліни, лінії екстремумів і лінії точок перегину інтегральними кривими даного рівняння.

Приклад 3.1. За допомогою методу ізоклін зобразити картину інтегральних кривих диференціального рівняння $y' = 2\left(y - x^2 + x\right)$.

Розв'язання. Згідно з (3.2) рівняння ізоклін має вигляд

$$2\left(y - x^2 + x\right) = k, \ k \in \mathbf{R}, \quad \text{або} \quad y = x^2 - x + k/2 .$$

Ізоклінами є параболи з вертикальною віссю симетрії $x = 1/2$. Серед ізоклін немає інтегральних кривих, що легко перевірити підстановкою.

Ізокліною точок екстремуму є парабола

$$l_0 : \ y = x^2 - x .$$

Оскільки $f_x' = -4x + 2$, $f_y' = 2$, то з (3.2) одержуємо рівняння лінії точок перегину інтегральних кривих: $-4x+2+4(y-x^2+x)=0$, або

$$l_1: \ y = x^2 - 1/2.$$

Параболами l_0 і l_1 площина поділена на чотири області з певним характером монотонності й опуклості інтегральних кривих (рис. 3.3).

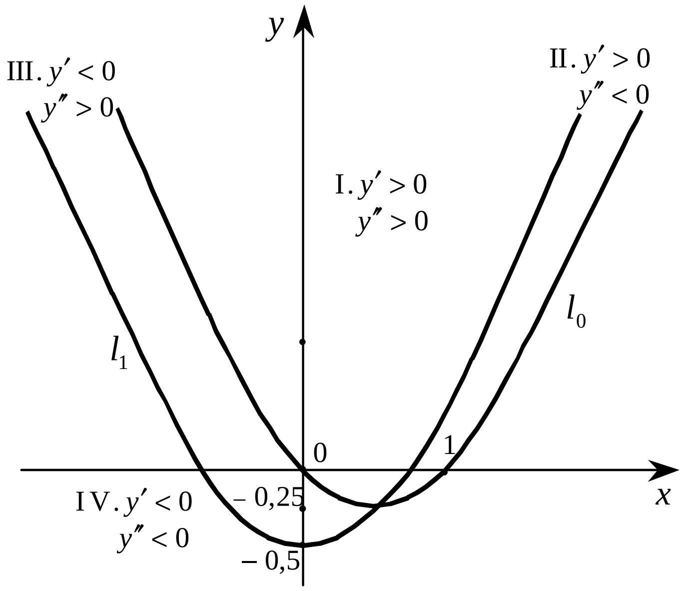


Рис. 3.3

Проведений попередній аналіз дозволяє побудувати фрагменти інтегральних кривих (рис. 3.4).

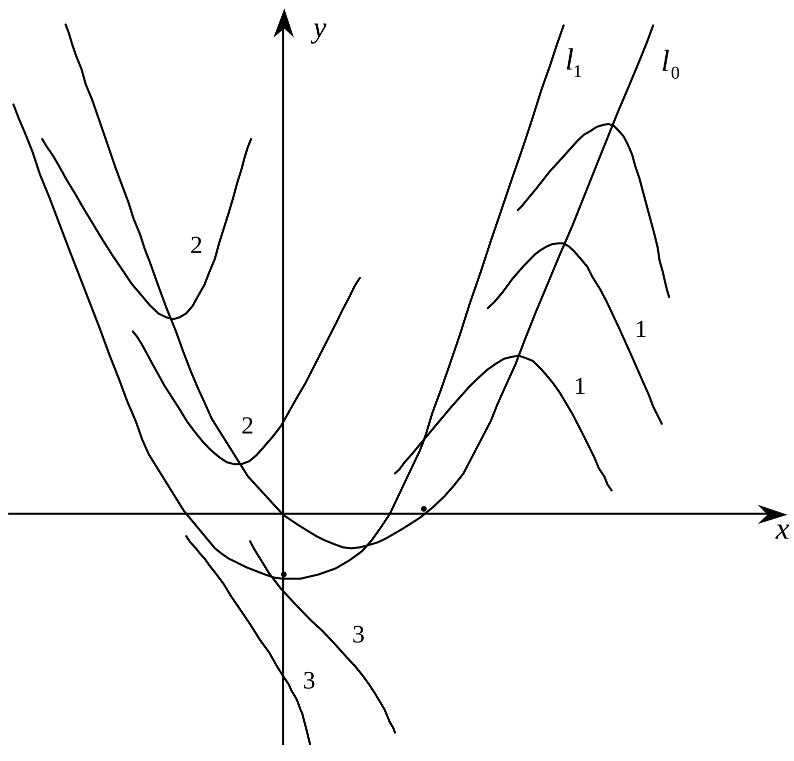


Рис. 3.4

Оскільки

$$y''' = 2y'' - 4 = 4\left(y' - 2x + 1\right) - 4 = 8\left(y - x^2 + x\right) - 8x = 8\left(y - x^2\right),$$

то у кожній з областей $y > x^2$ і $y < x^2$ уздовж розв'язку y'' – монотонна функція, а тому інтегральна крива має не більше однієї точки перегину.

При перетині інтегральних кривих з параболою $y = x^2$ маємо, що $2y'' - 4 = 0$, тобто $y'' = 2$. Тому $y = x^2$ – розв'язок.

Інтегральні криві 1 з області II при зменшенні x можуть вийти тільки через точки кривої l_1.

Інтегральні криві 2, які проходять через точки l_0 з $x_0 < 0$, залишаються в області $y > x^2$ і тому не перетинають криву l_1.

Інтегральні криві 3, які проходять через точки l_1 з $x_0 < \dfrac{1}{2}$ і через точки l_0 з $x_0 < \dfrac{1}{2}$, при $x < x_0$ не виходять за межі області III, а тому ті з них, які проходять через точки l_0 з $x_0 < 0$, при $x \to -\infty$ наближаються до параболи $y = x^2$ зверху, а інші – знизу.

Оскільки вздовж інтегральної кривої, відмінної від $y = x^2$, y'' змінюється монотонно, то інтегральна крива не може дотикатися з одного боку жодної з парабол

$$y = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{k}{4}.$$

Отже, інтегральні лінії, які проходять через точки параболи l_0 з $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$, при збільшенні x, перетинають криву l_1, а ті інтегральні криві, що проходять через точки області IV, при зменшенні x, входять в область II або в область III.

Проведений аналіз дозволяє побудувати наближену картину інтегральних кривих даного диференціального рівняння (рис. 3.5).

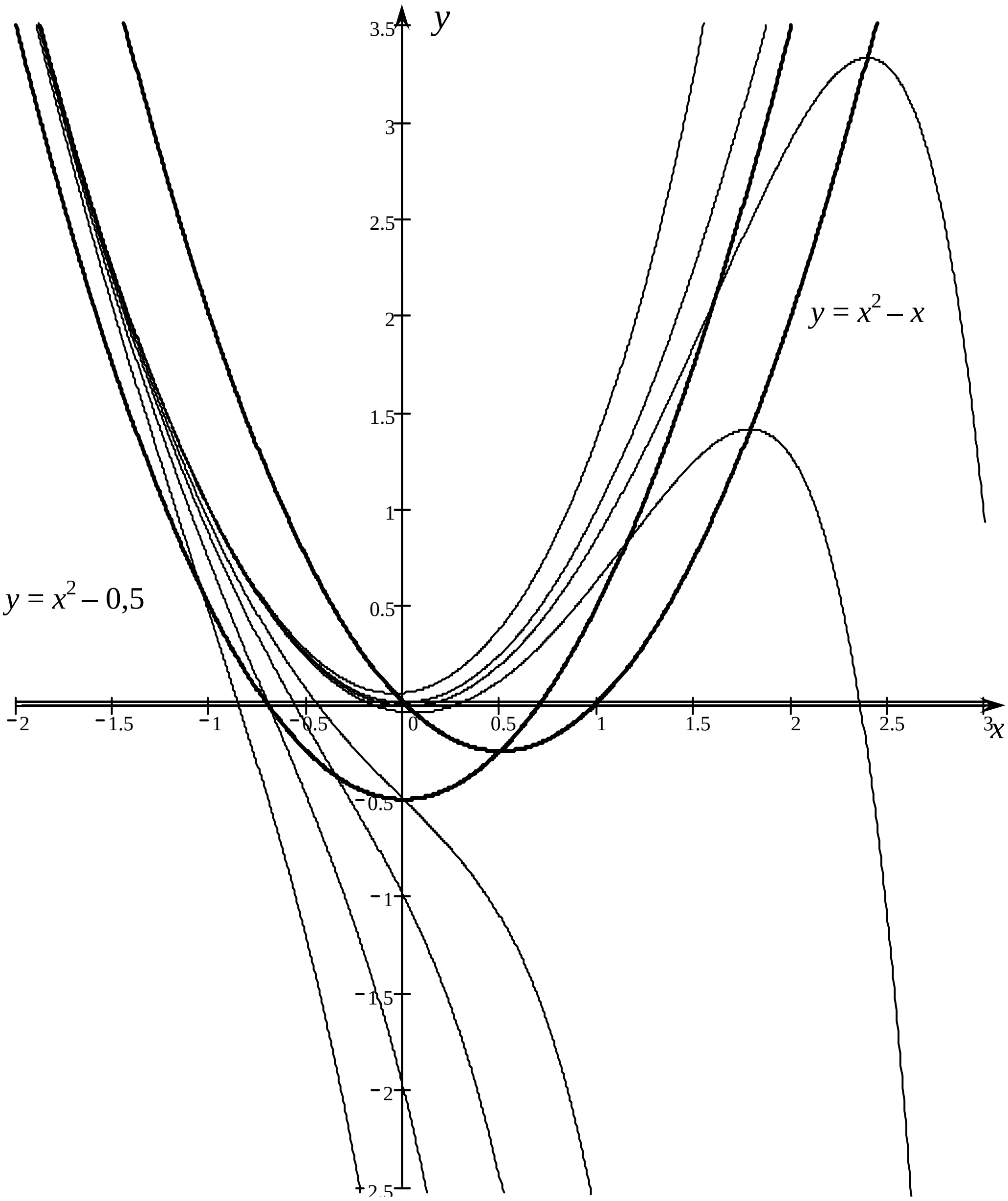


Рис. 3.5

3.2. Математична модель поширення світла. Побудова математичної моделі поширення світла в неоднорідному середовищі зводиться до звичайного диференціального рівняння. У випадку, коли характеристики середовища не задані в аналітичній формі, застосовують міркування, аналогічні до міркувань методу ізоклін.

Наведемо фізичні закони і принципи, на яких базується дана математична модель.

Фізичною характеристикою середовища у задачах про поширення світла є показник заломлення n, який пов'язаний зі "швидкістю" світла v

співвідношенням $n = \frac{1}{\nu}$, $n > 0$. У неоднорідному середовищі v і n, природно, залежать від просторових координат.

На площині $n = n(x, y)$ вздовж кожного променя виконується ***закон Снелліуса*** [1)]

$$n(x, y)\sin\alpha(x, y) = C, \qquad \textbf{(3.2)}$$

де C – довільна стала, $\alpha(x, y) \in [0; \pi/2]$ – кут між додатним напрямком осі Oy і дотичною до траєкторії променя в точці (x,y). Для різних променів сталі формулі (3.2), у загальному випадку, свої.

Принцип Ферма [2)] полягає в тому, що: 1) через кожну точку в кожному напрямку проходить рівно один промінь; 2) промені, які пов'язують точку A з точкою B і точку B з точкою A, співпадають (це можна трактувати так: якщо спостерігач A бачить спостерігача B, то спостерігач B також бачить спостерігача A, тобто промені, “по яких” спостерігачі A і B бачать один одного, співпадають).

З постановки задачі одержуємо диференціальне рівняння променів $y(x)$:

$$y' = \frac{1}{C}\sqrt{n^2(x, y) - C^2}\,. \qquad \textbf{(3.3)}$$

Розглянемо випадок, коли $n = n(y)$. Інтегруючи рівняння (3.3), знаходимо:

$$C\int \frac{\mathrm{d}\,y}{\sqrt{n^2(y) - C^2}} = x\,.$$

У більшості випадків для побудови картини променів зручніше використовувати міркування, подібні до міркувань методу ізоклін. При цьому, крім аналізу монотонності і опуклості, для визначення картини променів в околі точок (x, y_0), де $n(y_0) = C$, враховують також характер збіжності невласного інтеграла

[1)] СНЕЛЛІУС (Снелль) (латинізоване Snellius, нідерландське ван Снел ван Ройен, van Snel van Royen) Віллеброрд (1580-1626), нідерландський астроном і математик.
[2)] ФЕРМА (Fermat) Пьєр (1601-65) – французький математик, один з засновників аналітичної геометрії і теорії чисел.

$$\int\limits_{y_0} \frac{\mathrm{d}\,y}{\sqrt{n^2(y) - C^2}}, \qquad \textbf{(3.4)}$$

а саме:

1) $\left| \int\limits_{y_0} \frac{\mathrm{d}\,y}{\sqrt{n^2(y) - C^2}} \right| < +\infty \;\Leftrightarrow\; x \to x_0$ (рис. 3.6);

2) $\left| \int\limits_{y_0} \frac{\mathrm{d}\,y}{\sqrt{n^2(y) - C^2}} \right| = +\infty \;\Leftrightarrow\; x \to \pm\infty$ (рис. 3.7).

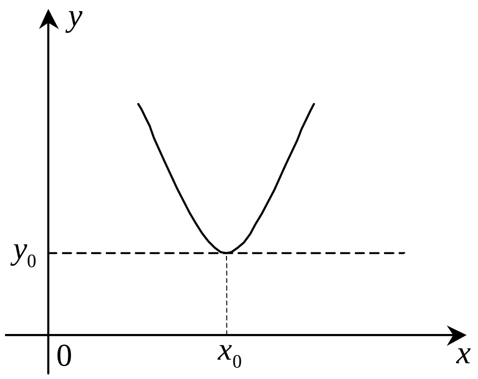


Рис. 3.6

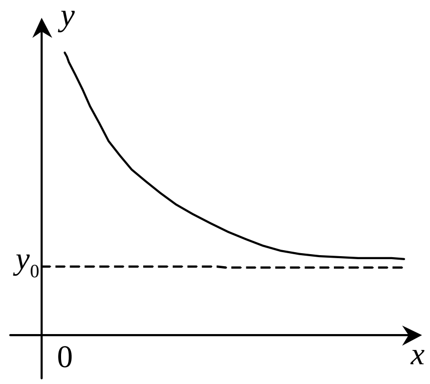


Рис. 3.7

Якщо функція $n(y)$ двічі неперервно диференційовна, то характер збіжності інтеграла (3.4) залежить від $n'(y_0)$, а саме:

$$1)\;\; n'(y) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \to x_0,$$

$$2)\;\; n'(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \to \pm\infty.$$

З автономності рівняння (3.3) і властивості інваріантності розв’язків диференціального рівняння відносно зсувів по осі Ox випливає, що якщо $y = \varphi(x)$ є розв’язком рівняння (3.3), то $y = \varphi(x + C)$ теж розв’язок цього рівняння.

Графік $n(y)$ і картину променів y доцільно будувати у сумісних осях.

Приклад 3.2. Побудувати картину променів у середовищі з показником заломлення $n(y)$, графік якого зображений на рис.3.8.

Розв'язання. Зрозуміло, що промені поширюються в області $n(y) > 0$, $y > y_2$. Із закону Снелліуса випливає такий зв'язок між монотонністю $n(y)$ та опуклістю графіка функції $y(x)$:

1. $n(y)\uparrow \Leftrightarrow y(x)$ опукла вниз; 2) $n(y)\downarrow \Leftrightarrow y(x)$ опукла вгору.

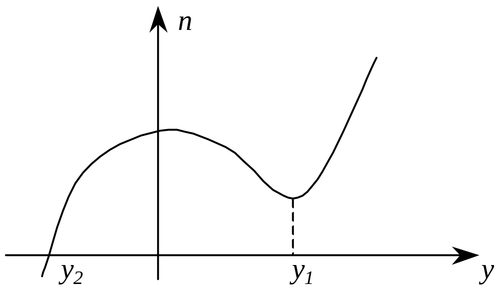


Рис. 3.8

Наявність прямолінійних променів 1,7 і 8 виявляється очевидно. Характер асимптотичного наближення променів 5 і 9 до прямої $y = y_1$ випливає з (3.3) (рис.3.9). Променю k відповідає стала c_k, де

$$0 = c_1 < c_6 < c_5 = c_7 = c_9 = n(y_1) < c_4 < c_{10} < c_3 < c_8 = n(y) < c_2.$$

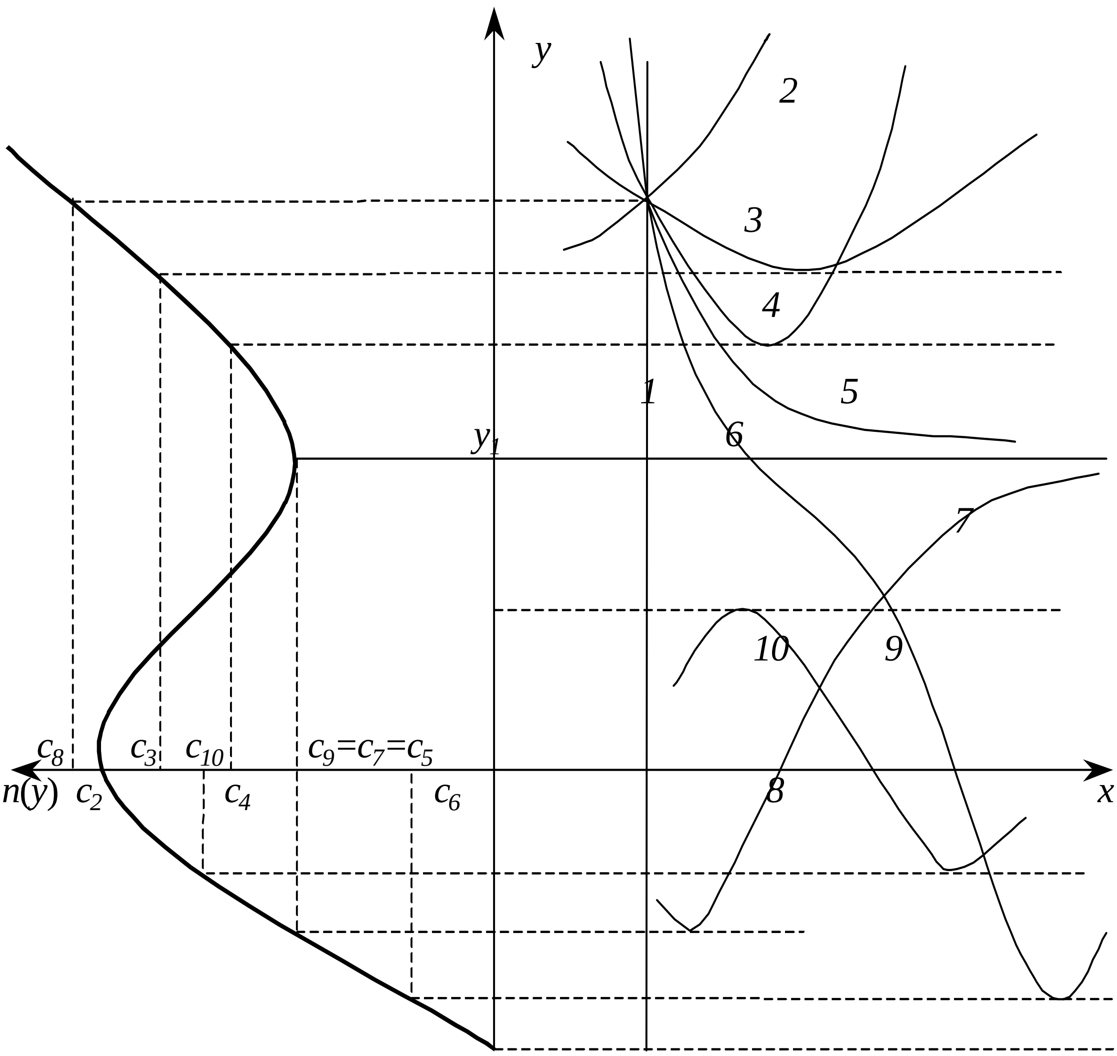


Рис. 3.9

§ 4. Основні класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратурах

4.1. Неповні диференціальні рівняння та звідні до них.

Диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції

$$y' = f(x), \tag{4.1}$$

у припущенні, що його права частина неперервна на інтервалі (a,b), завжди інтегрується у квадратурах. Його загальний розв'язок в області $a < x < b, |y| < +\infty$ має вигляд

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C, \quad a < x < b, \tag{4.2}$$

де C – довільна стала.

Ізоклінами рівняння (4.1) будуть прямі

$$x = x_0 \; (a < x_0 < b).$$

Усі інтегральні криві (4.2) перетинають кожну ізокліну під одним і тим же кутом і отримуються з будь-якої однієї з них зсувом уздовж осі Oy.

Якщо в якості первісної взяти визначений інтеграл зі змінною верхньою межею x:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

де нижня межа x_0 – деяке фіксоване число з інтервалу (a,b), тобто з інтервалу неперервності функції $f(x)$, то формула (4.2) набере вигляду

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + C. \tag{4.3}$$

Якщо покласти у формулі (4.3) $x = x_0$, $y = y_0$, то одержимо $C = y_0$ і, отже, можна записати:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + y_0. \tag{4.4}$$

Це є загальний розв'язок рівняння (4.1) у формі Коші.

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння $y' = e^{-x^2}$ і виділити ту інтегральну криву, яка проходить через початок координат.

Розв'язання. Скориставшись формулою (4.4), запишемо шуканий розв'язок у формі Коші:

$$y = \int_0^x e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Цей розв'язок є зростаючою функцією, адже $y' > 0$ для всіх *x*. Інтегральна крива (4.5) перетинає вісь Oy під кутом $\frac{\pi}{4}$ до осі Ox, бо в точці $x = 0$ $y' = 1$.

Легко переконатись, що розв'язок (4.5) є непарною функцією. Справді,

$$y(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \left| t = -p \right| = -\int_0^{x} e^{-p^2}\,\mathrm{d}\,p = -y(x).$$

Крім того, розв'язок (4.5) є обмеженою функцією, бо

$$\left| \int_0^x e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x \right| < \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Остання нерівність випливає з того, що

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \textbf{(4.6)}$$

а $y = \int_0^x e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$, як було з'ясовано, є зростаючою функцією.

З (4.6) випливає також, що прямі

$$y = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

є горизонтальними асимптотами кривої (4.5).

Оскільки

$$y'' = (-2x)e^{-x^2},$$

то інтегральна крива (4.5), так само, як і всі інтегральні криві даного рівняння, має перегин в точках перетину з віссю Oy. Справді, y'' перетворюється в нуль при $x = 0$ і змінює знак з + на –, переходячи через

$x = 0$. Отже, інтегральні криві зліва від осі Oy опуклі вверх, справа – вниз. Вісь Oy є лінією точок перегину інтегральних кривих.

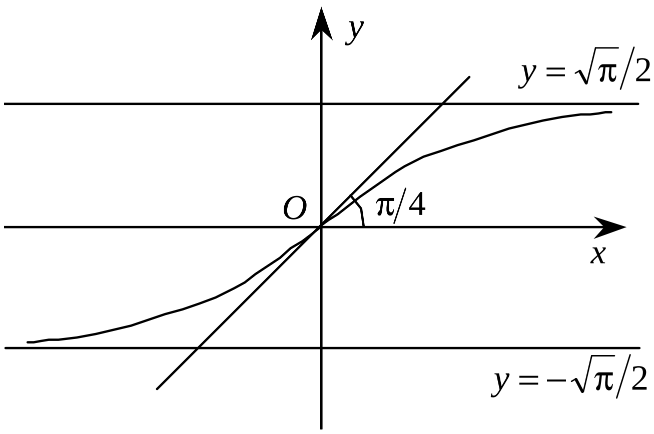


Рис. 4.1

Графік розв'язку (4.5) зображений на рис 4.1. ■

До неповних диференціальних рівнянь першого порядку, очевидно, належить також рівняння вигляду

$$y' = f(y), \tag{4.7}$$

яке явно не містить незалежної змінної x.

Припустимо спочатку, що функція $f(y)$ неперервна на деякому інтервалі (c,d) і відмінна на ньому від нуля. Тоді рівняння (4.7) рівносильне рівнянню

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \frac{1}{f(y)},$$

яке не містить шуканої функції $x = x(y)$. Отже, всі інтегральні криві рівняння (4.7) містяться у формулі

$$x = \int \frac{\mathrm{d}\,y}{f(y)} + C. \tag{4.8}$$

Це є загальний інтеграл рівняння (4.7). Його можна записати також у формі Коші:

$$x = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\,y}{f(y)} + x_0,$$

де x_0 відіграє роль довільної сталої, $y_0 \in (c,d)$ – деяке фіксоване число.

Ізоклінами рівняння (4.7) є прямі $y = y_0$ $(c < y_0 < d)$. Усі інтегральні криві сім'ї (4.8) отримуються з однієї інтегральної кривої цієї сім'ї зсувом уздовж осі Oy.

Якщо права частина рівняння (4.7) перетворюється в нуль при $y = m$, причому $c < m < d$, то функція $y = m$, очевидно, буде розв'язком рівняння (4.7). Цей розв'язок може виявитись особливим.

До рівняння вигляду (4.7), тобто до рівняння, яке не містить незалежної змінної, зводиться рівняння

$$y' = f(ax + by + c), \tag{4.9}$$

де a, b, c – задані сталі величини.

Справді, зробимо заміну

$$z = ax + by + c, \tag{4.10}$$

де $z = z(x)$ – нова шукана функція. Звідси

$$y = \frac{1}{b}(z - ax - c), \qquad y' = \frac{1}{b}(z' - a),$$

а тому

$$z' = bf(z) + a.$$

Це є рівняння вигляду (4.7). Знайшовши всі розв'язки цього рівняння, за формулою (4.10) будемо мати всі розв'язки рівняння (4.9). Якщо ж

$$bf(z) + a = 0,$$

то рівняння (4.6) матиме ще розв'язки вигляду $ax + by + c = \text{const}$.

Приклад 4.2. Розв'язати рівняння $y' = \cos(x - y)$.

Розв'язання. Нехай

$$z = x - y.$$

Тоді

$$z' = 1 - y', \quad z' = 1 - \cos z.$$

Звідси, за умови, що $1 - \cos z \neq 0$, одержуємо

$$\frac{\mathrm{d}\, z}{1-\cos z}=\mathrm{d}\, x, \quad \int \frac{\mathrm{d}\, z}{1-\cos z}=x+C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\, z}{2\sin^2(z/2)}=x+C, \quad -\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=x+C.$$

Отже, загальним інтегралом буде $x+\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=C_1$, де $C_1=-C$.

Якщо ж $1-\cos z=0$, тобто $z=2\pi n$, де $n\in\mathbf{Z}$, то $y=x-2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Але цей розв'язок не буде особливим, бо його можна отримати з загального розв'язку при $C_1=\infty$. ■

4.2. Рівняння з відокремленими змінними. Диференціальне рівняння вигляду

$$f_1(x)\,\mathrm{d}\, x+f_2(y)\,\mathrm{d}\, y=0 \qquad \mathbf{(4.11)}$$

називається ***рівнянням із відокремленими змінними***. Якщо $f_1(x)$, $f_2(y)$ – неперервні функції своїх аргументів, то рівняння (4.11) можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}\left(\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,\mathrm{d}\, x+\int_{y_0}^{y} f_2(y)\,\mathrm{d}\, y\right)=0,$$

а тому загальний інтеграл рівняння (4.9) запишеться у квадратурах

$$\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,\mathrm{d}\, x+\int_{y_0}^{y} f_2(y)\,\mathrm{d}\, y=C, \qquad \mathbf{(4.12)}$$

де C – довільна стала, x_0, y_0 – деякі фіксовані числа з області визначення та неперервності функцій $f_1(x)$ і $f_2(y)$. Особливих розв'язків немає.

У формулі (4.12) можна не писати меж інтегрування, бо числа, які одержимо після підставляння нижніх меж, можна включити в довільну сталу C.

Формула (4.12) дає можливість знайти розв'язок $y=y(x)$ або $x=x(y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0)=y_0$ або $x(y_0)=x_0$. Для цього досить покласти у формулі (4.12) $C=0$, після чого будемо мати

$$\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{y_0}^{y} f_2(y)\,\mathrm{d}\,y = 0. \qquad \textbf{(4.13)}$$

Якщо $f_1^2(x_0) + f_2^2(y_0) \neq 0$, тобто $f_1(x_0)$ і $f_2(y_0)$ одночасно не дорівнюють нулю, то формула (4.13) визначає шуканий розв'язок, причому він, при зроблених припущеннях відносно функцій $f_1(x)$ і $f_2(y)$, буде єдиним.

Приклад 4.3. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $(x-1)\,\mathrm{d}\,x + y\,\mathrm{d}\,y = 0$, яка проходить через початок координат.

Розв'язання. Скористаємося формулою (4.13). Замінивши числа x_0 і y_0 початковими даними шуканого розв'язку $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, одержимо

$$\int_{0}^{x} (x-1)\,\mathrm{d}\,x + \int_{0}^{y} y\,\mathrm{d}\,y = 0,$$

звідки $x^2/2 - x + y^2/2 = 0$, або

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Отримане коло і є шуканою інтегральною кривою. ■

4.3. Рівняння з відокремлюваними змінними.

До рівняння з відокремленими змінними зводиться рівняння вигляду

$$p(x)q(y)\,\mathrm{d}\,x + p_1(x)q_1(y)\,\mathrm{d}\,y = 0, \qquad \textbf{(4.14)}$$

яке називається ***рівнянням із відокремлюваними змінними***. Якщо функції $p(x)$, $p_1(x)$, $q(y)$, $q_1(y)$ неперервні, то загальний інтеграл рівняння (4.14) має вигляд

$$\int \frac{p(x)}{p_1(x)}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{q_1(y)}{q(y)}\,\mathrm{d}\,y = C, \quad (p_1(x) \neq 0,\ q(y) \neq 0)$$

або

$$\int_{x_0}^{x} \frac{p(x)}{p_1(x)}\,\mathrm{d}\,x + \int_{y_0}^{y} \frac{q_1(y)}{q(y)}\,\mathrm{d}\,y = C, \quad p_1(x_0) \neq 0, q(y_0) \neq 0. \qquad \textbf{(4.15)}$$

Якщо в (4.15) $C = 0$ і $p^2(x_0) + q_1^2(y_0) \neq 0$, то одержимо розв'язок задачі Коші із початковими даними x_0, y_0.

Рівняння (4.14) може мати також розв'язки $y = b$, де $q(b) = 0$, або $x = a$, де $p_1(a) = 0$. Якщо вони не входять у сім'ю (4.15), то такі розв'язки будуть особливими. При цьому із вказаних інтегральних кривих точка (a, b) повинна бути вилучена, оскільки у ній рівняння (4.14) не визначає напрямку поля y'.

Приклад 4.4. Розв'язати рівняння $x\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x + y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y = 0$ та виділити інтегральну криву, яка проходить через точку (0;1).

Розв'язання. Якщо $x \neq \pm 1$, $y \neq \pm 1$, то дане рівняння допускає відокремлення змінних:

$$\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Інтегруючи, знаходимо загальний інтеграл отриманого рівняння

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C, \quad C > 0.$$

Розв'язки $y = \pm 1$ $(-1 < x < 1)$ і $x = \pm 1$ $(-1 < y < 1)$ є особливими, оскільки їх не можна одержати із загального інтеграла при жодному значенні C і при кожному з них порушується єдиність розв'язку задачі Коші. Через точку (0;1), очевидно, проходять дві інтегральні криві $y = 1$ та $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$. ■

4.4. Однорідні рівняння. Диференціальне рівняння

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{4.16}$$

називається ***однорідним***, якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ – однорідні (додатно однорідні) функції одного і того ж виміру m, $m \in \mathbf{R}$.

Нагадаємо, що функцію $f(x, y)$ називають ***однорідною функцією виміру m***, якщо для довільних x, y, t вона справджує тотожність

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y). \tag{4.17}$$

Якщо рівність (4.17) виконується лише при $t \geq 0$, то функція $f(x, y)$ називається ***додатно однорідною***.

Наприклад, функції $\dfrac{x-y}{x+y}$, $\sqrt[3]{2x^3 + x^2 y + y^3}$, $x^{k-1} y + y^k$ є однорідними вимірів 0, 1, k відповідно; функція $\sqrt{x+y}$ – додатно однорідна виміру $1/2$.

Покажемо, що однорідне рівняння (4.16) завжди можна звести до вигляду

$$y' = \varphi\left({}^{y}\!/\!_{x}\right), \qquad \textbf{(4.18)}$$

де функція φ є, очевидно, однорідною функцією виміру 0. Справді, з (4.16) і (4.17) одержуємо

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{M\left(x, x \cdot {}^{y}\!/\!_{x}\right)}{N\left(x, x \cdot {}^{y}\!/\!_{x}\right)} = -\frac{x^m M\left(1, {}^{y}\!/\!_{x}\right)}{x^m N\left(1, {}^{y}\!/\!_{x}\right)} = -\frac{M\left(1, {}^{y}\!/\!_{x}\right)}{N\left(1, {}^{y}\!/\!_{x}\right)} \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Покажемо, що однорідне (додатно однорідне) рівняння (4.16) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Для цього запровадимо підстановку

$$y = zx,$$

де $z = z(x)$ – нова шукана функція. Тоді $\mathrm{d}\, y = x \,\mathrm{d}\, z + z \,\mathrm{d}\, x$ і після нескладних перетворень з (4.16) одержуємо

$$x^m \big((M(1, z) + z\, N(1, z)) \mathrm{d}\, x + x N(1, z) \,\mathrm{d}\, z \big) = 0.$$

Скорочуючи на x^m $(x \neq 0)$, одержимо рівняння з відокремлюваними змінними, загальний інтеграл якого

$$x = C e^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)},$$

де

$$\varphi(z) = -\int \frac{N(1, z)\,\mathrm{d}\, z}{M(1, z) + z N(1, z)}.$$

Розв'язками однорідного рівняння можуть бути також функції

$$y = ax,\ \ x \neq 0,$$

де $M(1,a) + N(1,a)a = 0$, та $x = 0$, $y \neq 0$, які могли бути втрачені при відокремленні змінних або при діленні на x^m. Ці розв'язки можуть міститися у формулі загального інтеграла, але можуть бути й особливими. Інших особливих розв'язків немає.

Приклад 4.5. Розв'язати рівняння $\underline{(y-x)\,y\,\mathrm{d}\,y + x^2\,\mathrm{d}\,y = 0}$.

Розв'язання. Нехай $y = zx$. Тоді $\mathrm{d}\,y = x\,\mathrm{d}\,z + z\,\mathrm{d}\,x$ і дане рівняння набере вигляду $\underline{x^2(z-1)z\,\mathrm{d}\,x + x^2(x\,\mathrm{d}\,z + x\,\mathrm{d}\,x) = 0}$, або

$$z^2\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,z = 0\,.$$

Після відокремлення змінних одержуємо:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{x} + \frac{\mathrm{d}\,z}{z^2} = 0\,, \quad z \neq 0\,,$$

звідки $\ln|\,x\,| - 1/z = C$. Повертаючись до змінної y, тобто замінюючи z на y/x, знаходимо загальний інтеграл

$$\ln|\,x\,| - \frac{x}{y} = C\,.$$

Крім того, розв’язком є також $z = 0$, звідки одержуємо особливий розв'язок $y = 0$. ■

4.5. Рівняння, звідні до однорідних. Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right), \tag{4.19}$$

де функція $f(u)$ визначена і неперервна на деякому проміжку, a_1, b_1, c_1, a, b, c – дійсні числа.

Вважаємо, що хоч одне з чисел c_1, c не дорівнює нулю, бо інакше права частина рівняння (4.19) є однорідною функцією нульового виміру, тобто це рівняння є однорідним.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

Тоді після заміни

$$z = ax + by$$

одержимо рівняння, яке явно не містить незалежної змінної

$$z' = a + bf\left(\frac{kz + c_1}{z + c}\right),$$

де

$$k = \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}, \quad a \neq 0.$$

Знайшовши його розв'язок і підставивши $ax + by$ замість z, одержимо загальний інтеграл рівняння (4.19) у розглянутому випадку.

Випадок 2. Нехай $\Delta \neq 0$.

Запровадимо заміну

$$x = \xi + \alpha, \; y = \eta + \beta,$$

де ξ, η – нові змінні, а числа α, β вибираємо так, щоб

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a\alpha + b\beta + c = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то ця система має єдиний розв'язок . Таким чином, одержимо рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right), \qquad \textbf{(4.20)}$$

яке є однорідним щодо змінних η і ξ, адже функція f – однорідна виміру 0.

Для знаходження загального інтеграла рівняння (4.19) потрібно у знайденому загальному інтегралі рівняння (4.20) повернутись до змінних x, y за формулами

$$\xi = x - \alpha, \; \eta = y - \beta.$$

Приклад 4.6. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{x+2y-3}{2x+y-3}$.

Розв'язання. Оскільки $\Delta \neq 0$, то запровадимо заміну

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta,$$

де α, β задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 3 = 0, \\ 2\alpha + \beta - 3 = 0, \end{cases}$$

тобто $\alpha = \beta = 1$. Таким чином, після заміни

$$x = \xi + 1, \; y = \eta + 1,$$

одержимо однорідне рівняння

$$\eta' = \frac{\xi + 2\eta}{2\xi + \eta}.$$

Введемо нову змінну z, підставивши $\eta = z\xi$. Тоді

$$z'\xi + z = \frac{1+2z}{2+z}, \quad \frac{2+z}{1-z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} \quad (z \neq \pm 1, \xi \neq 0).$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо:

$$\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1 - z^2\right| = \ln|\xi| + \ln|C_1|,$$

$$1 + z = C\xi^2(1-z)^3,$$

де $C = \pm C_1^2$. Звідси

$$1 + \frac{\eta}{\xi} = C\xi^2\left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right)^3, \qquad \xi + \eta = C(\xi - \eta)^3.$$

Отже, загальний інтеграл даного рівняння має вигляд

$$x + y - 2 = C(x-y)^3.$$

Якщо $z = 1$, то $\eta = \xi$, $\xi \neq 0$, тобто $y = x$, $x \neq 1$. Якщо ж $z = -1$, то $\eta = -\xi$, $\xi \neq 0$, тобто $y = -x + 2$, $x \neq 1$. Перший розв'язок є особливим, а другий – частинним для рівняння (4.12). І, нарешті, $\xi = 0$, тобто $x = 1$, дане рівняння не задовольняє. ■

Зауважимо, що введення допоміжних змінних ξ, η при інтегруванні рівнянь вигляду (4.19) не є обов'язковим. Можна безпосередньо скористатися заміною

$$y - \beta = z(x - \alpha).$$

4.6. Узагальнено-однорідні рівняння. Якщо функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ у рівнянні (4.16) для довільного t справджують умови

$$M(tx, t^k y) = t^m M(x, y), \quad N(tx, t^k y) = t^{m-k+1} N(x, y),$$

це називається ***узагальнено-однорідним*** рівнянням (при $k = 1$ маємо однорідне рівняння).

Інакше кажучи, якщо існує таке число k, що при підстановці у рівняння (4.16) замість x, y, $\mathrm{d}y$ відповідно $tx, t^k y, t^{k-1}\,\mathrm{d}\,y$ одержимо те саме рівняння, то рівняння (4.16) називається узагальнено-однорідним.

Узагальнено-однорідне рівняння завжди інтегрується в квадратурах, бо воно за допомогою підстановки

$$y = z^k, \ k \neq 0,$$

де $z = z(x)$ – нова шукана функція, зводиться до однорідного рівняння , а підстановка

$$y = zx^k \qquad \mathbf{(4.21)}$$

зводить узагальнено-однорідне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо $k = 0$, то узагальнено-однорідне рівняння вже є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Приклад 4.7. Розв'язати рівняння $4xy\,\mathrm{d}\,x + \left(y - x^2\right)\mathrm{d}\,y = 0$.

Розв'язання. Після заміни (4.21) дане рівняння набере вигляду

$$4xy^k\,\mathrm{d}\,x + k\left(z^k - x^2\right)z^{k-1}\,\mathrm{d}\,z = 0.$$

Воно буде однорідним у тому випадку, коли степені всіх його членів рівні між собою, тобто коли

$$k + 1 = 2k - 1 = k + 1.$$

Очевидно, що $k=2$, і після заміни $y=zx^2$ одержуємо

$$\mathrm{d}\,y = x^2\mathrm{d}\,z + 2xz\,\mathrm{d}\,x,$$

$$4x^3 z\,\mathrm{d}\,x + \left(zx^2 - x^2\right)\left(x^2\mathrm{d}\,z + 2xz\,\mathrm{d}\,x\right) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{x} + \frac{z-1}{2z(z+1)}\mathrm{d}\,z = 0.$$

Розв'язавши останнє рівняння та перейшовши до змінних x, y, одержуємо шуканий загальний інтеграл

$$\left(y + x^2\right)^2 = Cy. \blacksquare$$

4.7. Лінійні рівняння. Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{4.22}$$

називається ***лінійним*** диференціальним рівнянням першого порядку. При цьому, якщо функції $p(x)$ та $q(x)$ неперервні на (a, b), то згідно з теоремою Пікара через кожну точку смуги

$$a < x < b, \; -\infty < y < +\infty,$$

проходить одна і тільки одна інтегральна крива. Справді, права частина $f(x, y) = q(x) - p(x)y$ є неперервною функцією, а частинна похідна $f'_x(x, y) = -p(x)$ – обмежена в цій області (тому виконується умова Ліпшіца). Зокрема, якщо $p(x)$ і $q(x)$ – неперервні в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, то через кожну точку площини Oxy проходить одна і тільки одна інтегральна крива даного рівняння. У цьому випадку диференціальне рівняння (4.22) особливих розв'язків не має.

Якщо $q(x) \equiv 0$, то рівняння (4.22) набуває вигляду

$$y' + p(x)y = 0 \tag{4.23}$$

і називається ***лінійним однорідним*** [1)] рівнянням, а якщо $q(x)$ не дорівнює тотожно нулю, то – ***лінійним неоднорідним***.

[1)] Не потрібно плутати лінійне однорідне рівняння з однорідним рівнянням, розглянутим у п. 4.4. Термін “однорідне” стосовно лінійного рівняння використовується тому, що вираз $y' + p(x)y$ є однорідною функцією першого виміру відносно y і y'.

Розглянемо два способи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь (третій спосіб буде викладений у п. 4.10).

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Лінійне однорідне рівняння (4.23) є рівнянням з відокремлюваними змінними, а його загальний розв'язок, як легко переконатися, має вигляд

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}. \qquad \textbf{(4.24)}$$

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.15) будемо шукати у вигляді (4.24), замінивши довільну сталу C неперервно диференційовною функцією $C(x)$:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}. \qquad \textbf{(4.25)}$$

Підставляючи (4.25) у рівняння (4.22), будемо мати

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

звідки

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

і

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C,$$

де C – довільна стала.

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у (4.25), знаходимо загальний розв'язок рівняння (4.22):

$$y = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right). \qquad \textbf{(4.26)}$$

Розв'язок задачі Коші для рівняння (4.22) з початковими даними x_0, y_0 відповідно матиме вигляд

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,\mathrm{d}x}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right).$$

Метод підстановки (метод Бернуллі [1]). Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.22) шукаємо у вигляді добутку двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$:

$$y = uv. \tag{4.27}$$

Підстановка (4.27) у (4.22) дає

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

або

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x).$$

Виберемо тепер функції u і v так, щоб вони задовольняли систему

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи знаходимо функцію v:

$$v = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

і, підставляючи її при $C = 1$ в друге рівняння, одержуємо

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (4.22) згідно з (4.27) матиме вигляд:

$$y = uv = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right).$$

Приклад 4.8. Розв'язати рівняння

$$y' - \frac{2y}{x} = x. \tag{4.28}$$

Розв'язання. *Метод Лагранжа.* Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

має вигляд $z = Cx^2$. Тому розв'язок рівняння (4.28) шукаємо у вигляді $y = C(x)x^2$. Підставляючи його у (4.28), одержимо

---

[1] БЕРНУЛЛІ Йоганн (1667-1748) – швейцарський математик.

$$C'(x)x^2 + C(x)\cdot 2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = x,$$

$$C'(x) = \frac{1}{x}, \quad C(x) = \ln|x| + C.$$

Отже,

$$y = x^2(\ln|x| + C).$$

Метод Бернуллі. Нехай $y = uv$. Тоді

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x.$$

Складемо систему

$$\begin{cases} u' - \dfrac{2}{x}u = 0, \\ v'u = x. \end{cases}$$

З першого її рівняння знаходимо $u = C_1 x^2$. Покладемо $C_1 = 1$ і підставимо u у друге рівняння системи. Тоді

$$v' = \frac{1}{x}, \qquad v = \ln|x| + C,$$

а отже,

$$y = x^2(\ln|x| + C). \ ■$$

Відзначимо деякі властивості розв’язків лінійного неоднорідного рівняння.

1. Загальний розв'язок (4.26) рівняння (4.22) є сумою двох доданків: $Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (4.23), а $e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (4.22) (його одержуємо з загального розв'язку, якщо $C = 0$).

2. Якщо відомий один частинний розв'язок лінійного рівняння $y_1(x)$, то загальний розв'язок одержати за допомогою однієї квадратури за формулою

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}. \qquad \textbf{(4.29)}$$

Справді, функція $y_1(x)$ – розв'язок рівняння (4.22), справджує тотожність

$$y_1' + p(x)\,y_1 = q(x).$$

Віднімаючи обидві частини цієї тотожності з відповідних частин рівняння (4.22), одержуємо

$$\left(y' - y_1'\right) + p(x)\left(y - y_1\right) = 0,$$

або

$$(y - y_1)' + p(x)(y - y_1) = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язуючи яке одержуємо формулу (4.29).

3. Якщо ж відомі два не пропорційні між собою частинні розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (4.22), то його загальний розв'язок можна одержати і без квадратур за формулою

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1). \qquad \textbf{(4.30)}$$

Справді, якщо $y_1(x)$ – розв'язок рівняння (4.22), то, згідно з властивістю 2, загальний розв'язок записуємо у вигляді

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}.$$

У цьому інтегралі містяться всі частинні розв'язки, у тому числі і другий розв'язок $y_2(x)$, який одержуємо з загального інтеграла при певному значенні сталої *C*, наприклад при $C = C_2$. Отже, маємо тотожність

$$y_2 = y_1 + C_2 e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}.$$

Поділивши обидві частини загального інтеграла на відповідні частини цієї тотожності, одержимо формулу (4.30).

Описані вище методи розв'язування лінійних рівнянь застосовні також до рівнянь вигляду

$$x' + p(y)x = q(y),$$

якщо *y* прийняти за незалежну змінну, а *x* – за функцію цієї змінної. Наприклад, диференціальне рівняння

$$y = \left(x + y^3\right) \cdot y',$$

в якому y – функція змінної x, – нелінійне. Запишемо тепер його інакше:

$$y = \left(x + y^3\right)\frac{1}{x'}, \qquad x' - \frac{x}{y} = y^2.$$

Отримали лінійне рівняння, якщо x вважати шуканою функцією незалежної змінної y.

4.8. Диференціальні рівняння, звідні до лінійних. До лінійних рівнянь зводяться декілька типів диференціальних рівнянь першого порядку. Розглянемо їх:

$$f'(y)\,y' + p(x)\,f(y) = q(x), \tag{4.31}$$

$$y' + p(x) = q(x)e^{ny}, \tag{4.32}$$

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^m, \quad (m \neq 0, m \neq 1) \tag{4.33}$$

та

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y + R(x,y)(x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x) = 0, \tag{4.34}$$

де $M(x,y), N(x,y), R(x,y)$ – однорідні функції вимірів m, m, n відповідно.

Спинимось коротко на кожному з цих типів рівнянь.

Заміною $z = f(y)$ $\left(\text{тоді } z' = f'(y)\,y'\right)$ рівняння (4.31) відразу зводиться до лінійного

$$z' + p(x)\,z = q(x).$$

Якщо обидві частини рівняння (4.32) помножити на ne^{-ny}, то воно зведеться до рівняння вигляду (4.31), а саме:

$$ne^{-ny}y' + np(x)e^{-ny} = nq(x).$$

Поклавши $z = e^{-ny}$, матимемо лінійне рівняння

$$z' - np(x)z = -nq(x).$$

У рівнянні (4.33) (його називають ***рівнянням Бернуллі*** [1)]) випадки $m = 0$ та $m = 1$ виключені тому, бо при цих значеннях m відразу маємо лінійне рівнянням і будь-які перетворення зайві.

[1)] БЕРНУЛЛІ Якоб (1654-1705) – швейцарський математик, брат Йоганна Бернуллі (див. виноску на стр. 35).

При інших значеннях m воно заміною

$$z = y^{1-m}$$

зводиться до лінійного рівняння

$$z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x)$$

з невідомою функцією z. Враховуючи тепер формулу (4.26), можемо записати загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = \left(e^{(m-1)\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} \left(C + (1-m)\int q(x) e^{(m-1)\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x \right) \right)^{\frac{1}{1-m}}, \quad m \neq 1.$$

При цьому міг бути втрачений розв'язок $y = 0$, якщо $m > 0$. Якщо $0 < m < 1$, то цей розв'язок буде особливим, а якщо $m > 1$, то частинним. При $m \le 0$ функція $y = 0$ рівняння (4.33) не задовольняє.

Загальний розв'язок рівняння Бернуллі можна шукати також у вигляді добутку

$$y = uv,$$

де функції u, v визначаються із системи

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0, \\ v'u = q(x)u^m v^m. \end{cases}$$

Якщо $u(x)$ – деякий частинний розв'язок першого рівняння цієї системи, то для визначення функції v одержуємо рівняння $v' = q(x)u^{m-1}v^m$ з відокремлюваними змінними.

Приклад 4.9. Розв'язати рівняння $y' + 2y = y^3$.

Розв'язання. *1 спосіб.* Маємо рівняння Бернуллі, в якому $m = 3$. Зробимо заміну $z = y^{-2}$. Тоді

$$y = z^{-1/2}, \quad z' = -2y^{-3}y', \quad y' = -\frac{1}{2}y^3 z',$$

і після нескладних перетворень отримаємо лінійне рівняння

$$z' - 4z = -2.$$

Його загальний розв'язок:

$$z = Ce^{4x} + \frac{1}{2},$$

а тому загальним розв'язком заданого рівняння буде функція

$$y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{4x} + 1/2}}.$$

2 спосіб. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді

$$u'v + uv' + 2uv = u^3 v^3.$$

З першого рівняння системи

$$\begin{cases} u' + 2u = 0, \\ v'u = u^3 v^3, \end{cases}$$

знаходимо $u = e^{-2x}$.

Далі маємо:

$$v' = e^{-4x} v^3, \quad \frac{\mathrm{d}\,v}{v^3} = e^{-4x}\,\mathrm{d}\,x, \quad \frac{-1}{2v^2} = -\frac{e^{-4x}}{4} - \frac{C}{2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{e^{-4x}/2 + C}}.$$

Отже,

$$y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{4x} + 1/2}}$$

є загальним розв'язком даного рівняння. Відзначимо, що розв'язок $y = 0$ міститься у загальному розв'язку при $C = \infty$. ■

Рівняння (4.34) називають рівнянням ***Міндінга-Дарбу*** [1)]. Беручи до уваги, що $M(x, y), N(x, y)$, $R(x, y)$ є однорідними функціями, після заміни

$$y = ux,$$

$$\mathrm{d}\,u = \frac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2}, \quad \mathrm{d}\,y = x\,\mathrm{d}\,u + u\,\mathrm{d}\,x,$$

де *u* вважаємо незалежною змінною, одержимо

$$x^m \left(M(1,u)\,\mathrm{d}\,x + N(1,u)\,(x\,\mathrm{d}\,u + u\,\mathrm{d}\,x)\right) + x^{n+2} R(1,u)\,\mathrm{d}\,u = 0$$

або

[1)] МІНДІНГ Фердінанд Готлібович (1806-1885) – російський математик.
ДАРБУ (Darboux) Жан Гастон (1842-1917) – французький математик.

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,u}+\frac{N}{M+uN}x=-\frac{R}{M+uN}x^{n-m+2}.$$

Отримали рівняння Бернуллі (при $n=m-2$ – лінійне рівняння), способи розв’язування якого викладено вище.

Приклад 4.10. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-y\right)\mathrm{d}\,x+(x-1)\,\mathrm{d}\,y=0.$

Розв'язання. Це рівняння легко звести до рівняння

$$\sqrt{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}\,x-\mathrm{d}\,y+x\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,y=0,$$

яке є рівнянням Міндінга-Дарбу ($m=0,\ \ n=0$). Зробимо заміну

$$y=ux.$$

Тоді

$$\mathrm{d}\,y=u\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}u,\quad x\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x=x^2\,\mathrm{d}\,u,$$

$$\left(\sqrt{u}-u\right)\mathrm{d}\,x+\left(-x+x^2\right)\mathrm{d}\,u=0.$$

Останнє рівняння легко звести до рівняння Бернуллі з невідомою функцією $x=x(u)$:

$$\frac{dx}{du}-\frac{1}{\sqrt{u}-u}x=-\frac{1}{\sqrt{u}-u}x^2,\quad \sqrt{u}-u\neq 0.$$

Інтегруючи це рівняння, одержуємо

$$\frac{C}{x}=\left(1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+1.$$

З рівняння

$$\sqrt{u}-u=0$$

знаходимо $u_1=0$, $u_2=0$. Підставляючи ці значення u у формулу

$$y=ux,$$

отримаємо, що розглядуване рівняння має розв'язки $y=0$ $(x\neq 0)$ і $y=x$, $x\neq 1$, з яких перший – особливий, а другий – частинний. ■

4.9. Рівняння у повних диференціалах. Вже згадувалось, що диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0$$

за виконання умов теореми про неявну функцію можна записати у вигляді

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{4.35}$$

Розглянемо той випадок, коли ліва частина рівняння (4.35) є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$\mathrm{d}u = M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y\,.$$

У цьому випадку рівняння (4.35) називається ***рівнянням у повних диференціалах***. Оскільки тепер

$$\mathrm{d}u = 0\,,$$

то загальним інтегралом рівнянням у повних диференціалах (4.35) буде

$$u(x, y) = C\,.$$

Вкажемо на ознаку, за допомогою якої легко з’ясувати, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах. При цьому функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ будемо вважати неперервно диференційовними за обома змінними у деякій однозв'язній області D і такими, що в жодній точці цієї області одночасно не перетворюються у нуль.

Як відомо з курсу математичного аналізу, за умови неперервності похідних $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial N}{\partial x}$, необхідною та достатньою умовою для того, щоб рівняння (4.35) було рівнянням у повних диференціалах, є рівність

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{4.36}$$

При цьому загальний інтеграл рівняння (4.35) можна записати в одному з двох виглядів:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,\mathrm{d}y = C\,, \tag{4.37}$$

або

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,\mathrm{d}\,x + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\,\mathrm{d}\,y = C\,, \qquad \textbf{(4.38)}$$

де (x_0, y_0) – довільна фіксована точка з області D.

На практиці у багатьох випадках загальний інтеграл рівняння у повних диференціалах можна знайти простіше наступним чином.

Шукана функція $u(x, y)$ повинна задовольняти двом співвідношенням:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)\,. \qquad \textbf{(4.39)}$$

З першого з них одержуємо:

$$u(x, y) = \int M(x, y)\,\mathrm{d}\,x + \varphi(y)\,,$$

де інтеграл справа береться у припущенні, що y фіксоване, а $\varphi(y)$ – довільна функція від y, яку будемо вважати диференційовною. Диференціюючи обидві частина останньої рівності за змінною y і використовуючи той факт, що

$$u'_y = N(x, y)\,,$$

отримуємо $\varphi'(y) = \omega(y)$, звідки

$$\varphi(y) = \int \omega(y)\,\mathrm{d}\,y\,.$$

Отже, рівність

$$\int M(x, y)\,\mathrm{d}\,x + \int \omega(y)\,\mathrm{d}\,y = C$$

буде загальним інтегралом рівняння (4.35).

Приклад 4.11. Розв'язати рівняння $(2xy - 1)\mathrm{d}\,x + \left(3y^2 + x^2\right)\mathrm{d}\,y = 0$.

Розв'язання. *1 спосіб*. Це рівняння у повних диференціалах, бо умова (4.36), як легко перевірити, виконується. Знайдемо загальний інтеграл, користуючись формулою (4.37). Покладаючи $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, маємо:

$$\int_0^x (2xy - 1)\,\mathrm{d}\,x + \int_0^y 3y^2\,\mathrm{d}\,y = C\,,$$

або

$$x^2 y - x + y^3 = C\,.$$

2 спосіб. Маємо:

$$u(x,y)=\int(2xy-1)\,\mathrm{d}\,x+\varphi(y)=x^2y-x+\varphi(y),$$

$$(x^2y-x+\varphi(y))'_y=3y^2+x^2,$$

$$\varphi'(y)=3y^2,\quad \varphi(y)=y^3.$$

Отже,

$$x^2y-x+y^3=C$$

є шуканим загальним інтегралом. ■

Розв'язок задачі Коші з початковими даними x_0, y_0, які належать області D, і такими, що

$$M^2(x_0,y_0)+N^2(x_0,y_0)\neq 0,$$

задається однією з формул:

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,\mathrm{d}\,x+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\,\mathrm{d}\,y=0$$

або

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)\,\mathrm{d}\,x+\int_{y_0}^{y}N(x,y)\,\mathrm{d}\,y=0.$$

У випадку, коли

$$M(x_0,y_0)=N(x_0,y_0)=0,$$

інтегральні криві, які прилягають до (x_0,y_0), потрібно шукати із рівняння $u(x,y)=0.$ Але при цьому не гарантується ні існування, ні єдиність розв'язку задачі Коші .

Для розв'язування деяких рівнянь можна застосовувати ***метод виділення повних диференціалів***, використовуючи відомі формули, як-от

$$\mathrm{d}(xy)=y\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y,\quad \mathrm{d}\left(y^2\right)=2y\,\mathrm{d}\,y,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{y^2},\quad \mathrm{d}(\ln y)=\frac{\mathrm{d}\,y}{y}\quad \text{тощо.}$$

Проілюструємо цей метод на конкретному прикладі.

Приклад 4.12. Розв'язати рівняння

$$y\,\mathrm{d}\,x-\left(4x^2y+x\right)\mathrm{d}\,y=0.$$

Розв'язання. Виділимо спочатку групу членів, які є повними диференціалами. Оскільки

$$y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y=-x^2\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right),$$

то поділивши обидві частини даного рівняння на $(-x^2)$, одержимо

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)+4y\,\mathrm{d}\,y=0,\qquad \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)+\mathrm{d}\left(2y^2\right)=0.$$

Останнє рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Інтегруючи його безпосередньо (до вигляду (4.45) приводити не потрібно), одержуємо загальний інтеграл

$$\frac{y}{x}+2y^2=C.$$

Крім того, при діленні на $(-x^2)$ був втрачений розв'язок $x=0$, який є особливим. ■

Якщо у рівнянні (4.45) можна виділити повний диференціал деякої функції $\varphi(x,y)$, то інколи рівняння спрощується, якщо від змінних x,y перейти до змінних x,z або y,z, де $z=\varphi(x,y)$.

Приклад 4.13. Розв'язати рівняння $\left(xy+y^4\right)\mathrm{d}\,x+\left(x^2-xy^3\right)\mathrm{d}\,y=0.$

Розв'язання. Згрупуємо доданки так, щоб виділити повні диференціали:

$$x\left(y\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y\right)+y^3\left(y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y\right)=0,$$

$$x\,\mathrm{d}(xy)+y^5\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=0.$$

Поділимо на x і зробимо заміну

$$xy=u\,,\ \ \frac{x}{y}=v\,.$$

Отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\mathrm{d}u + \frac{u^2}{v^3}\mathrm{d}v = 0,$$

загальний інтеграл якого $\dfrac{2}{u} + \dfrac{1}{v^2} = C$.

Повертаючись до змінних x і y, одержимо

$$2x + y^3 = Cx^2.$$

Особливим розв'язком є $x = 0$. ■

4.10. Інтегрувальний множник. У багатьох випадках, коли рівняння (4.35) не є рівнянням у повних диференціалах, вдається знайти таку функцію $\mu = \mu(x, y)$, що

$$\mu\left(M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y\right) = 0 \qquad \textbf{(4.40)}$$

є рівнянням у повних диференціалах. Функція μ називається ***інтегрувальним множником*** [1)] рівняння (4.35).

Вкажемо способи відшукання інтегрувального множника. Припустимо, що μ є неперервно диференційовна функція змінних x і y. Тоді з тотожності

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

випливає, що μ є розв'язком наступного рівняння

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \qquad \textbf{(4.41)}$$

Як бачимо, задача відшукання інтегрувального множника $\mu(x, y)$ зводиться до розв'язання диференціального рівняння з частинними похідними, тобто, до задачі, взагалі кажучи, більш складної, ніж розв'язання рівняння (4.35). Але оскільки для нашої мети немає необхідності знаходити загальний розв'язок рівняння (4.42), а досить тільки мати будь-який його частинний розв'язок (дуже часто він буває очевидним), то на практиці для деяких типів рівнянь вдається, порівнюючи легко, знайти $\mu(x, y)$ і звести інтегрування таких рівнянь до квадратур.

[1)] Вперше інтегрувальний множник застосував Л. Ейлер у 1734 р.

Знайдемо умову, при якій рівняння (4.41) має розв'язок вигляду $\mu = \mu(\omega)$, де $\omega = \omega(x, y)$ – задана функція від x і y. Підставляючи функцію $\mu = \mu(\omega)$ в рівняння (4.41) і беручи до уваги, що

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y},$$

одержуємо

$$\left(N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Звідси зрозуміло, що якщо

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} \equiv \varphi(\omega), \tag{4.42}$$

тобто ліва частина є функцією тільки від ω, то існує інтегрувальний множник $\mu = \mu(\omega)$, який знаходиться з диференціального рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} = \varphi(\omega)\mu$$

і, отже, має вигляд

$$\mu = e^{\int \varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega} \qquad (C = 1). \tag{4.43}$$

На практиці потрібно спробувати підібрати функцію $\omega = \omega(x, y)$ так, щоб виконувалась умова (4.42), потім підставити функцію $\varphi(\omega)$ у формулу (4.43) і, виконавши обчислення, замінити ω на $\omega(x, y)$. При добиранні ω потрібно починати з найпростіших частинних випадків: $\omega = x$ і $\omega = y$. У цих випадках відповідно будемо мати:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv \varphi(x) \qquad \left(\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x}\right) \tag{4.44}$$

і

$$\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv \psi(y) \qquad \left(\mu(y) = e^{\int \psi(y)\,\mathrm{d}y}\right) \tag{4.45}$$

Приклад 4.14. Знайти інтегрувальний множник та розв'язати рівняння

$$y(1+xy)\,\mathrm{d}\,x+\left(\frac{1}{2}x^2y+y+1\right)\mathrm{d}\,y=0.$$

Розв'язання. Тут

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=1+xy\,.$$

Застосовуючи формули (4.44) і (4.45), бачимо, що не може існувати інтегрувального множника вигляду $\mu=\mu(x)$, у той час як $\mu=\mu(y)$ існує, бо умова (4.45), як легко перевірити, виконується, причому

$$\psi(y)=-\frac{1}{y}\,.$$

Отже,

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{\mathrm{d}\,y}{y}}=\frac{1}{y}.$$

Домножуючи обидві частини вихідного рівняння на знайдений інтегрувальний множник і використовуючи формулу (4.37), в якій покладемо $x_0=0$, $y_0=1$, отримуємо:

$$\int\limits_0^x(1+xy)\,\mathrm{d}\,x+\int\limits_1^y\frac{y+1}{y}\,\mathrm{d}\,y=C_1,$$

або

$$x+\frac{1}{2}x^2y+y+\ln y=C,$$

де $C=C_1+1$. ■

З розглянутих нами типів диференціальних рівнянь першого порядку рівняння з відокремлюваними змінними по суті інтегрується за допомогою інтегрувального множника, бо процес відокремлення змінних є множенням на інтегрувальний множний, який легко вказати.

Оскільки однорідні рівняння заміною $y=ux$ зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними, то їх також, очевидно, можна розв'язати за допомогою інтегрувального множника.

Якщо рівняння

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x+N(x,y)\,\mathrm{d}\,y=0,$$

є однорідним, то його інтегрувальний множник $\mu(x,y)$, як легко показати, має вигляд

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}.$$

Для лінійного рівняння також легко можна вказати інтегрувальний множник. Дійсно, запишемо рівняння

$$y'+p(x)y=q(x)$$

у вигляді

$$\big(yp(x)-q(x)\big)\mathrm{d}\,x+\mathrm{d}\,y=0.$$

Тоді

$$M(x,y)\equiv yp(x)-q(x),\ N(x,y)\equiv 1,$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=p(x)\equiv\varphi(x),$$

і, отже,

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=p(x)$$

а тому умова незалежності від y виконується. Таким чином, лінійне рівняння має інтегрувальний множник

$$\mu(x)=e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}.$$

Це дає ще один метод – ***метод Ейлера*** – інтегрування лінійного рівняння першого порядку.

Пропонуємо читачам, використовуючи метод Ейлера, самостійно зінтегрувати лінійне рівняння (4.28), загальний розв'язок якого нами був знайдений двома іншими способами.

Зауважимо, що криві, в точках яких μ перетворюється в нуль або у нескінченність, можуть виявитись відповідно сторонніми або особливими розв’язками рівняння (4.35).

Виникає питання: чи будь-яке диференціальне рівняння першого порядку має інтегрувальний множник? Відповідь на це дають дві наступні теореми, доведення яких можна знайти в [5].

Теорема 1. *Якщо у рівнянні (4.35) функції* $M(x,y)$ *і* $N(x,y)$ *визначені і неперервно диференційовні у заданому околі точки* (x_0, y_0)*, причому* $M^2(x_0,y_0)+N^2(x_0,y_0)\neq 0$*, то для цього рівняння існує інтегрувальний множник* $\mu=\mu(x,y)$*, визначений у деякому околі точки* (x_0, y_0)*.*

Теорема 2. *Якщо* $u(x,y)$ *є загальний інтеграл рівняння (4.35), а* $\mu(x,y)$ *– його інтегрувальний множник, то існує безліч інтегрувальних множників цього рівняння і всі вони виражаються формулою*

$$\mu_1(x,y)=\mu(x,y)F(u),$$

де F – довільна диференційовна функція.

Отже, коли форма інтегрального множника вказана (або її вдається легко підмітити), наприклад, дано, що

$$\mu=\varphi(xy),\ \mu=\varphi(x+y),\ \mu=\varphi\left(x^2+y^2\right)\ \text{тощо},$$

то, виходячи з рівняння (4.41), можна знайти і звести задане рівняння до квадратур.

Коли ж форма інтегрувального множника невідома, то для його відшукання можна використати такий прийом. Задане диференціальне рівняння розбиваємо на дві частини (групи) так, щоб для кожної з них інтегрувальний множник знаходився легко. Потім візьмемо загальний вираз інтегрувального множника для кожної частини і доберемо довільні функції, які входять у ці множники, так, щоб обидва інтегрувальні множники дорівнювали один одному. Якщо це вдається, задача розв’язана. Іноді розбиття рівняння роблять на декілька пар:

$$M\,dx+N\,dy=\left(M_1\,dx+N_1\,dy\right)+\left(M_2\,dx+N_2\,dy\right)+\ldots+\left(M_n\,dx+N_n\,dy\right).$$

Приклад 4.15. Розв'язати рівняння $y\,\mathrm{d}x + \left(x - x^2 y \ln y\right)\mathrm{d}y = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння інакше:

$$\left(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\right) - x^2 y \ln y\,\mathrm{d}y = 0.$$

Для рівняння

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$$

$\mu_1 = 1$, а його загальний інтеграл

$$u(x, y) \equiv xy = C.$$

Отже,

$$\mu_1(x, y) = 1 \cdot F_1(x, y).$$

Для рівняння

$$x^2 y \ln y\,\mathrm{d}y = 0$$

$\mu_2 = \dfrac{1}{x^2}$ і загальний інтеграл $y = C_1$. Загальний вигляд інтегрувального множника буде

$$\mu_2 = \frac{1}{x^2 F_2(y)}.$$

Тепер треба підібрати функції F_1 і F_2 так, щоб справджувалась тотожність

$$\mu_1 = \mu_2 \equiv F_1(xy) \equiv \frac{1}{x^2} F(y).$$

Це буде, наприклад, тоді, коли

$$F_1(xy) = \frac{1}{x^2 y^2} \text{ і } F_2(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Отже, інтегрувальний множник даного рівняння буде

$$\mu = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{x^2 y^2},$$

а загальний інтеграл

$$xy\left(C + \frac{\ln^2 y}{2}\right) + 1 = 0. \ \blacksquare$$

§ 5. Задачі на складання диференціальних рівнянь

5.1. Складання диференціальних рівнянь сімей кривих. Кожне диференціальне рівняння має, взагалі кажучи, сім'ю розв'язків, які задаються формулами, що містять довільні сталі.

Поставимо обернену задачу: побудувати диференціальне рівняння за відомим розв'язком

$$y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n),$$

який заданий співвідношенням

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0. \qquad (5.1)$$

З геометричної точки зору рівність (5.1) визначає *n*-параметричну сім'ю плоских кривих.

Припустимо, що функція Φ неперервна за усіма аргументами і диференційовна за змінними x і y достатню кількість разів. Для того, щоб скласти диференціальне рівняння заданої сім'ї кривих (5.1), здиференціюємо співвідношення (5.1) n разів (воно є тотожністю, якщо замість y підставити функцію $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$). Будемо мати:

$$\left.\begin{aligned}
&F_1 \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,\\
&F_2 \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0,\\
&\qquad\qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&F_n \equiv \frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n} + n\frac{\partial^n\Phi}{\partial x^{n-1}\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

Співвідношення (5.1) і (5.2) утворюють систему $n+1$ рівнянь, які містять n параметрів $C_1, C_2, ..., C_n$. Взагалі кажучи, з цієї системи можна виключити всі параметри, тобто знайти їх вирази через $x, y, y', ..., y^{(n)}$ з перших n рівнянь і підставити ці вирази в $(n+1)$-е рівняння. Ми прийдемо до співвідношення вигляду

$$f\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (5.3)$$

Рівняння (5.3) – диференціальне рівняння сім'ї кривих (5.1).

Приклад 5.1. Знайти диференціальне рівняння сім'ї лемніскат

$$\left(x^2+y^2\right)^2-C^2\left(x^2-y^2\right)=0.$$

Розв'язання. Розглядаючи y як неявну функцію від x і диференціюючи дане співвідношення за змінною x, будемо мати

$$2\left(x^2+y^2\right)(2x+2yy')-2C^2(x-yy')=0.$$

Визначаючи C^2 з рівняння сім'ї лемніскат і підставляючи знайдений для нього вираз в останню рівність, отримаємо шукане диференціальне рівняння

$$2\frac{x+yy'}{x^2+y^2}-\frac{x-yy'}{x^2-y^2}=0. \blacksquare$$

Приклад 5.2. Скласти диференціальне рівняння сім'ї всіх кіл на площині.

Розв'язання. Очевидно, дана сім'я є трипараметричною, а її рівняння

$$\Phi\equiv x^2+y^2+2Ax+2By+C=0.$$

Тричі диференціюючи функцію Φ за змінною x, отримуємо

$$x+yy'+A+By'=0,$$

$$1+y'^2+yy''+By''=0,$$

$$3y'y''+yy'''+By'''=0.$$

Виключаючи сталу B з двох останніх рівнянь, знаходимо шукане диференціальне рівняння третього порядку

$$y'''\left(1+y'^2\right)-3y'y''^2=0. \blacksquare$$

5.2. Ізогональні траєкторії. Як приклад одного з численних геометричних застосувань диференціальних рівнянь першого порядку розглянемо так звану ***задачу про траєкторії***.

Нехай маємо однопараметричну сім'ю кривих

$$\Phi(x,y,C)=0. \tag{5.4}$$

Лінії, які перетинають криві даної сім'ї під сталим кутом μ, називаються ***ізогональними траєкторіями***, або просто ***траєкторіями*** цієї сім'ї кривих. Якщо, зокрема, $\mu = \frac{\pi}{2}$, то траєкторії називають ***ортогональними*** траєкторіями.

Покажемо, що задача відшукання ізогональних (ортогональних) траєкторій зводиться до інтегрування диференціального рівняння першого порядку.

Позначимо через ξ, η координати точок шуканої траєкторії, а через μ – кут, під яким кожна траєкторія повинна перетинати кожну криву сім’ї (5.4). Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\varphi,$$

де θ і φ – відповідно кути, утворені з віссю Ox дотичними до кривої сім’ї і до траєкторії, проведеними в точці M перетину цих кривих (рис. 5.1).

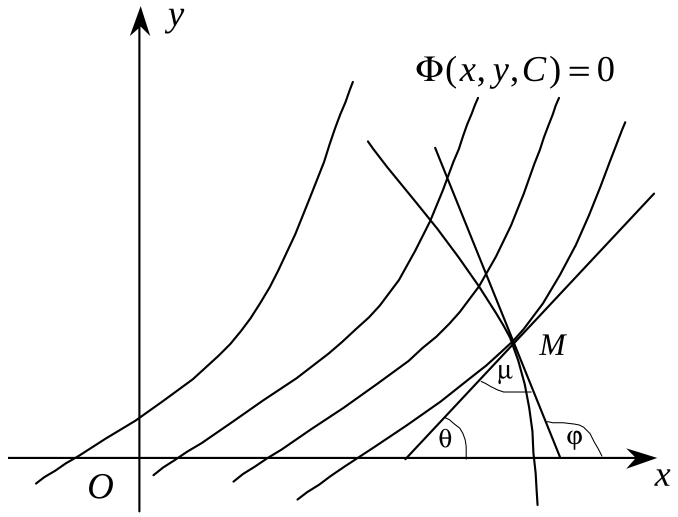


Рис. 5.1

Очевидно, що при переміщенні точки M по траєкторії виконується співвідношення

$$\mu + \theta = \varphi.$$

Припустимо, що $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ і позначимо $\operatorname{tg}\mu$ через m. Будемо мати:

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\varphi - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta},$$

$$m = \frac{\dfrac{d\eta}{d\xi} - \dfrac{dy}{dx}}{1 + \dfrac{d\eta}{d\xi} \cdot \dfrac{dy}{dx}},$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d\eta}{d\xi} - m}{1 + m \cdot \dfrac{d\eta}{d\xi}}. \qquad \textbf{(5.5)}$$

Рівність (5.5) встановлює зв'язок між напрямом дотичної у довільній точці M траєкторії і напрямом дотичної до кривої сім'ї (5.4), що проходить через цю точку.

Складемо тепер диференціальне рівняння сім'ї (5.4). Для цього, як це описано у п. 5.1, виключимо параметр C з рівнянь

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \Phi'_x + \Phi'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Отримаємо

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \qquad \textbf{(5.6)}$$

Ця рівність виконується для всіх точок області, заповненої кривими сім'ї (5.4), в тому числі і для точки M. Але в цій точці ми можемо замінити x і y на ξ і η відповідно, а $\dfrac{dy}{dx}$ – на її значення з (5.5), після чого отримаємо співвідношення

$$F\left(\xi, \eta, \frac{\dfrac{d\eta}{d\xi} - m}{1 + m\dfrac{d\eta}{d\xi}}\right) = 0, \qquad \textbf{(5.7)}$$

Якщо $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}},$$

і диференціальне рівняння (5.7) для ортогональних траєкторій набуде вигляду

$$F\left(\xi, \eta, -\frac{1}{\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}}\right) = 0. \qquad \textbf{(5.8)}$$

Отримавши диференціальне рівняння сім'ї ізогональних (ортогональних) траєкторій, ми можемо, звичайно, переписати його, замінивши ξ і η на x і y. Таким чином, приходимо до наступного правила знаходження диференціального рівняння сім'ї ізогональних (ортогональних) траєкторій:

1) утворити диференціальне рівняння даної сім'ї,

2) замінити в отриманому рівнянні $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ на

$$\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - m}{1 + m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \quad \text{у випадку } \varphi \neq \frac{\pi}{2} \ (m = \operatorname{tg}\varphi),$$

або на

$$-\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}, \quad \text{якщо } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 5.3. Скласти диференціальні рівняння ортогональних траєкторій сім'ї кривих (півкубічних парабол)

$$\Phi(x, y, C) \equiv y^2 - Cx^3 = 0.$$

Розв'язання. Складемо диференціальне рівняння цієї сім'ї. Маємо

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' \equiv 2yy' - 3Cx^2 = 0.$$

Вилучаючи параметр C, одержимо диференціальне рівняння сім'ї

$$2yy' - 3\frac{y^2}{x} = 0.$$

З формули (5.9) випливає, що шукане диференціальне рівняння ортогональних траєкторій має вигляд $-\frac{2}{y'}-\frac{3y}{x}=0$, або

$$2x\,\mathrm{d}\,x+3y\,\mathrm{d}\,y=0.\ ■$$

Приклад 5.4. Знайти траєкторії, які перетинають концентричні кола $x^2+y^2=R^2$ під кутом α.

Розв'язання. Диференціальне рівняння сім'ї кіл є, як легко переконатись,

$$x+yy'=0.$$

Диференціальне рівняння траєкторій, на підставі (5.8), буде:

$$\xi+\eta\frac{\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,\xi}-m}{1+m\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,\xi}}=0,$$

або

$$(m\xi+\eta)\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,\xi}+\xi-m\eta=0 \qquad (m=\mathrm{tg}\,\varphi).$$

Якщо позначити змінні через *x*, *y*, то рівняння траєкторій запишеться наступним чином:

$$(x-my)\mathrm{d}\,x+(mx+y)\mathrm{d}\,y=0.$$

Отримали однорідне рівняння (див. п. 4.5), загальний інтеграл якого

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}+m\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln C,$$

або

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{-m\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Отримали рівнянням шуканої сім'ї ізогональних траєкторій. Якщо перейти до полярної системи координат, то рівняння траєкторій запишеться так:

$$\rho=Ce^{-m\varphi}.$$

Отже, шукані траєкторії – логарифмічні спіралі. ■

5.3. Геометричні задачі. При відшуканні кривих $y = y(x)$, які задовольняють деяким умовам, потрібно встановити співвідношення між диференціалами змінних x і y, використовуючи геометричний зміст цих понять, і, отже, побудувати диференціальне рівняння для функції $y(x)$. Нагадаємо, що $y'(x_0)$ визначає кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = y(x)$ в точці $(x_0, y(x_0))$.

Задача 5.5. Знайти сім'ю кривих, які мають таку властивість, що відрізок дотичної, розміщений між осями координат, у точці дотику до кожної з кривих цієї сім'ї, ділиться навпіл.

Розв'язання. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка на шуканій кривій, AB – відрізок дотичної, проведеної через точку $M(x, y)$, розміщений між осями координат, α – кут між згаданою дотичною і віссю Ox (рис. 5.2).

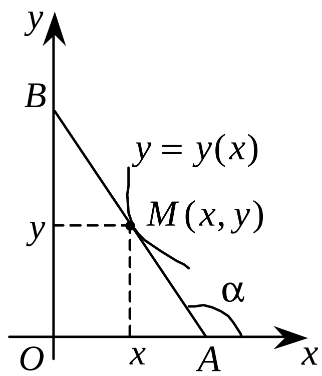


Рис. 5.2

Як відомо, $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$.

Розглянемо ΔAOB. У ньому

$$BO = 2y,\ AO = 2x.$$

Далі маємо:

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \angle OAB) =$$
$$-\operatorname{tg}\angle OAB = -\frac{BO}{AO} = -\frac{y}{x}.$$

Отже, для знаходження шуканої сім'ї кривих отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = -\frac{y}{x},$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$yx = C,\ C \neq 0.$$

Таким чином, шуканою сім'єю кривих є сім'я гіпербол. ■

Розв'язування деяких задач приводить до рівнянь, які містять невідомі функції під знаком інтеграла (такі рівняння називаються інтегральними).

Вони, зокрема, виникають, коли використовується геометричний зміст визначеного інтеграла як площі криволінійної трапеції та інші інтегральні формули (довжина дуги, площа поверхні, об'єм тіла тощо). У простіших випадках вдається шляхом диференціювання перетворити інтегральне рівняння в диференціальне, яке інтегрується відомими методами.

Приклад 5.6. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(2;4)$ і володіє такою властивістю: якщо через будь-яку точку кривої провести дві прямі, паралельні до координатних осей, до перетину з ними, то отриманий при цьому прямокутник ділиться кривою на дві частини, з яких одна (що примикає до осі Ox) за площею вдвічі більша, ніж інша.

Розв'язання. Через будь-яку точку $M(x,y)$ шуканої кривої проводимо дві прямі: MA паралельно до осі Oy і MB паралельно до осі Ox (рис. 5.3).

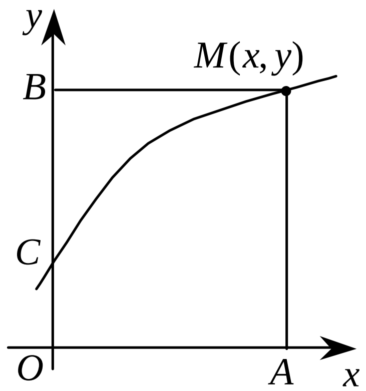


Рис. 5.3

Згідно з умовою задачі,

$$S_{OCMA} = 2S_{CBM}.$$

Оскільки $S_{OCMA} = \int_0^x y\,\mathrm{d}x$, а

$$S_{CBM} = S_{OBMA} - S_{OCMA} = xy - \int_0^x y\,\mathrm{d}x,$$

то дістанемо рівняння

$$\int_0^x y\,\mathrm{d}x = 2\left(xy - \int_0^x y\,\mathrm{d}x\right),$$

або

$$3\int_0^x y\,\mathrm{d}x = 2xy.$$

Здиференціювавши обидві частини цього інтегрального рівняння, отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними $2xy' = y$, загальний розв'язок якого $y^2 = Cx$. Таким чином, вказаною властивістю володіють параболи з вершинами в початку координат і з осями симетрії, які співпадають з віссю Ox. Використовуючи початкову умову, знаходимо, що шуканою кривою є парабола $y^2 = 8x$. ■

5.4. Задачі природничих наук. Під час вивчення багатьох явищ природи, розв'язування конкретних задач фізики, хімії та біології, інших наук, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність між величинами, які описують той чи інший процес. Однак у багатьох випадках можна виявити зв'язок між визначальними характеристиками процесу (функціями) і швидкостями їхньої зміни щодо деяких інших параметрів (незалежних змінних), тобто записати диференціальні рівняння, які пов'язують шукані функції та їхні похідні.

Для складання диференціальних задач природничих наук використовуються закони та закономірності, притаманні даній науці, як-от:

1) другий закон Ньютона $F = ma$, де m – маса тіла, a – прискорення руху, F – сума сил, що діють на тіло, і похідні від нього закони збереження енергії, кількості руху тощо;
2) закон всесвітнього тяжіння $F = \dfrac{km_1 m_2}{r^2}$, де m_1, m_2 – маси двох тіл, r – відстань між ними; k – коефіцієнт пропорційності;
3) закон Фур'є $q = -\lambda(T)\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$, де q – питомий потік теплоти; $\lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності середовища, $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ – швидкість зміни температури T, і аналогічний закон Нернста про дифузію речовини;
4) закон Гука (сила пружності пружини прямо пропорційна її видовженню);
5) закон Ньютона про охолодження тіла (швидкість охолодження тіла прямо пропорційна різниці температури тіла та температури оточуючого середовища);
6) закон розчинення речовин (швидкість розчинення речовини прямо пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини і різниці концентрації насиченого розчину та розчину у даний момент часу) тощо.

Приклад 5.7. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, яка обернено пропорційна до пройденого шляху. У початковий момент руху точка була на відстані 5 м від початку відліку шляху і мала швидкість $v_0 = 20$ м/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 10 с після початку руху.

Розв'язання. Позначимо через $s = s(t)$ відстань точки від початку відліку в момент часу t. Тоді $s(0) = 5$. За умовою зміна величини s від часу описується диференціальним рівнянням

$$s' = \frac{k}{s},$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Розв'язавши дане рівняння, знаходимо, що

$$s(t) = \sqrt{2kt + C}\,.$$

З умови $s(0) = 5$ знайдемо сталу інтегрування C: $5 = \sqrt{C}$, $C = 25$. Отже,

$$s = \sqrt{2kt + 25}.$$

Знайдемо швидкість руху точки в момент t:

$$v(t) = s'(t) = \frac{k}{\sqrt{2kt + 25}}.$$

Використовуючи умову $v(0) = v_0 = 20$ м/с, визначимо коефіцієнт пропорційності k:

$$v(0) = \frac{k}{5} = 20 \text{ м/с}, \quad k = 100.$$

Отже,

$$v(t) = \frac{100}{\sqrt{200t + 25}} = \frac{20}{\sqrt{8t + 1}}.$$

Після 10 с після руху

$$s(10) = \sqrt{200 \cdot 10 + 25} = 45 \text{ (м)}, \; v(10) = \frac{20}{9} \text{ (м/с)}.$$

Таким чином, через 10 с після початку руху швидкість становила $20/9$ м/с. За цей час точка пройшла відстань $s(10) - s(0) = 45 - 5 = 40$ (м). ■

Приклад 5.8. Знайти закон розпаду радію, якщо відомо, що швидкість розпаду прямо пропорційна його масі і через 1600 років маса радію зменшиться вдвічі.

Розв'язання. Нехай $x(t)$ – кількість радію в момент часу t. Швидкість розпаду радію як швидкість зміни функції є похідна. Отже, закон розпаду можна записати так:

$$x'(t) = -kx(t), k > 0,$$

де k – коефіцієнт пропорційності (знак мінус означає, що маса радію з часом зменшується, а тому $x'(t) < 0$). Розв'язавши отримане рівняння, знаходимо, що

$$x(t) = Ce^{-kt}.$$

Нехай початкова маса радію x_0, тобто

$$x(0) = x_0.$$

Використовуючи це, знайдемо сталу C: $C = x_0$.

Враховуючи тепер умову, що

$$x(1600) = \frac{1}{2}x(0) = \frac{1}{2}x_0,$$

знаходимо коефіцієнт k:

$$x(1600) = x_0 e^{-1600k}, \quad \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-1600k},$$

$$k = \frac{\ln 2}{1600} \approx 0{,}00043.$$

Отже, закон зміни початкової маси радію залежно від зміни часу має вигляд

$$x(t) = x_0 e^{-0{,}00043t}. \blacksquare$$

Приклад 5.9. Рідина витікає з деякої посудини через отвір у ній зі швидкістю $0{,}6\sqrt{2gh}$, де $g = 10$ м/с^2, h – висота рівня рідини над отвором.

За який час вся рідина витече з циліндричного бака з діаметром $2R = 1{,}8$ м і висотою $H = 2{,}45$ м через отвір у дні діаметром $2r = 6$ см? Вісь циліндра вертикальна.

Розв'язання. Нехай $h(t)$ – висота рівня рідини у баці у момент часу $t > 0$. Через проміжок часу Δt рівень рідини понизиться до значення $h(t + \Delta t)$. Отже, з бака витікає кількість рідини, яка рівна

$$\left(h(t) - h(t + \Delta t)\right)\pi R^2 .$$

З іншого боку, через отвір у баці витече

$$\pi r^2 v(t_1)\Delta t$$

рідини, де $t_1 \in (t, t + \Delta t)$, $v(t_1)$ – деяке проміжне значення швидкості витікання рідини на інтервалі $(t, t + \Delta t)$. Згідно з законом збереження маси маємо рівність:

$$h(t + \Delta t) - h(t) = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 v(t_1)\Delta t .$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на Δt і припустивши, що функція h неперервна, спрямуємо Δt до нуля. Тоді отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dh}{dt} = -k^2 v(t), \quad k = \frac{r}{R},$$

$$v = 0{,}6\sqrt{2gh} .$$

Розв'язок цього рівняння, як легко переконатись, має вигляд

$$h(t) = \left(C - 0{,}3\sqrt{2g}k^2 t\right)^2,$$

де C – довільна стала.

Оскільки $h(0) = H$, то звідси випливає, що $C = \sqrt{H}$. Очевидно, $h(t) = 0$ якщо

$$t = \frac{10\sqrt{H}}{3\sqrt{2g}} \cdot \frac{R^2}{r^2} \approx 1050 \text{ с} = 17{,}5 \text{ хв.} \blacksquare$$

6. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної

6.1. Основні поняття та означення. Досі ми припускали, що диференціальне рівняння першого порядку розв'язане відносно y'. Розглянемо тепер рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \textbf{(6.1)}$$

у загальному вигляді.

Будь-яка функція $y = y(x)$, визначена і неперервно диференційовна на деякому інтервалі (a, b), називається ***розв'язком*** рівняння (6.1) на цьому інтервалі, якщо вона перетворює рівняння (6.1) у тотожність

$$F\big(x, y(x), y'(x)\big) \equiv 0,$$

яка справджується для всіх значень x з інтервалу (a, b).

Проте частіше всього розв'язок будемо шукати у неявному вигляді $\Phi(x, y) = 0$ або у параметричній формі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (t – параметр).

Криву на площині Oxy, яка відповідає розв'язку, називають ***інтегральною кривою*** рівняння (6.1).

Припустимо, що в кожній точці $(x, y) \in D$ рівняння (6.1) визначає одне чи декілька дійсних значень y'. Якщо побудувати в кожній точці (x, y) області D вектори (для визначеності вважаємо їх одиничними), нахил яких до осі Ox визначається значенням y' в цій точці, то одержимо ***поле напрямів***.

Задача інтегрування рівняння (6.1) полягає в тому, щоб знайти всі гладкі криві, в кожній точці яких напрям дотичної співпав би з одним з напрямів поля в цій точці.

Однією з найважливіших задач інтегрування рівняння (6.1), як і у випадку рівняння, розв'язаного відносно похідної, є ***задача Коші*** – задача знаходження розв'язків, які набувають значення y_0 при $x = x_0$, що відповідає знаходженню інтегральних кривих, які проходять через точку (x_0, y_0).

Вважають, що розв'язок задачі Коші для рівняння (6.1) з початковими даними x_0 та y_0 єдиний, якщо через точку (x_0, y_0) у досить малому її околі проходить стільки інтегральних кривих, скільки напрямів поля визначає рівняння (6.1) у даній точці. В іншому випадку кажуть, що задача Коші має не єдиний розв'язок.

Вкажемо умови, які необхідно накласти на функцію $F(x, y, y')$, щоб через задану точку (x_0, y_0) у заданому напрямі y'_0 $\left(y'_0 = y'(x_0)\right)$ проходила одна і тільки одна інтегральна крива рівняння (6.1).

Теорема. *Нехай функція* $F(x, y, y')$ *задовольняє такі три умови:*

1) $F(x, y, y')$ *визначена і неперервно диференційовна разом зі своїми частинними похідними в деякому замкненому околі точки* $\left(x_0, y_0, y'_0\right)$*;*

2) $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$*;*

3) $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0.$

Тоді рівняння (6.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$*, визначений і неперервно диференційовний у деякому околі точки* $x = x_0$*, який задовольняє початкову умову* $y(x_0) = y_0$*, і такий, що* $y'(x_0) = y'_0$*.*

Загальний інтеграл рівняння (6.1) представляється у вигляді однопараметричної сім'ї розв'язків. Криві, підозрілі на особливі розв'язки, визначаються вилученням y' із системи

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(6.2)}$$

У результаті вилучення y' з системи (6.2) отримуємо, взагалі кажучи, деяку криву $R(x, y) = 0$. Ця крива називається ***дискримінантною кривою*** диференціального рівняння (6.1). Щоб дискримінантна крива (чи її частина) була особливим розв'язком рівняння (6.1), потрібно, щоб вона була розв'язком цього рівняння і щоб у кожній її точці порушувалась єдиність розв'язку задачі Коші.

6.2. Рівняння степеня *n*. ***Диференціальним рівнянням першого порядку степеня n*** називають рівняння вигляду

$$a_0(x,y)(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0, \qquad \textbf{(6.3)}$$

де $a_k(x,y),\ k = 0,1,\ldots,n,$ – функції, неперервні у деякій області $D,\ a_0(x,y) \neq 0.$

Згідно з основною теоремою алгебри, рівняння (6.3) для кожної пари x та y визначає n розв'язків y' (дійсних або комплексних). Відкидаючи комплексні значення, матимемо $m,\ m \le n,$ диференціальних рівняння першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = f_k(x,y),\ k = 1,2,\ldots,m. \qquad \textbf{(6.4)}$$

Сукупність загальних розв'язків

$$y = \varphi_k(x,C),\ \ k = 1,2,\ldots,m,$$

або загальних інтегралів

$$\Phi_k(x,y,C) = 0,\ \ k = 1,2,\ldots,m,$$

рівнянь (6.4) і є загальним інтегралом рівняння (6.3). Цю сукупність можна записати у вигляді однієї формули

$$\big(y - \varphi_1(x,C)\big)\big(y - \varphi_2(x,C)\big)\cdot\ldots\cdot\big(y - \varphi_m(x,C)\big) = 0,$$

або

$$\Phi_1(x,y,C)\cdot\Phi_2(x,y,C)\cdot\ldots\cdot\Phi_m(x,y,C) = 0.$$

Особливим розв'язком рівняння рівнянь (6.3) може бути тільки його дискримінантна крива.

Якщо хоч одне з рівнянь (6.4) має особливі розв'язки, то вони будуть особливими розв'язками і для всього рівняння (6.3).

Приклад 6.1. Розв'язати рівняння $(y')^2 + (y^2 - 1)y' - y^2 = 0.$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$y' = 1, \quad y' = -y^2,$$

загальні розв'язки яких $y = x + C$ та $y = \dfrac{1}{x+C}$ відповідно. Отже,

$$(y-x-C)\left(y-\frac{1}{x+C}\right)=0$$

є загальним інтегралом даного рівняння. ■

Зауважимо, що через точку (x_0, y_0) проходять дві інтегральні криві рівняння 6.1, а саме $y = x + y_0 - x_0$ та $y=\dfrac{1}{x+1/y_0-x_0}$, $y_0 \neq 0$, тобто розв'язок задачі Коші буде єдиним. Але у випадку, коли вздовж деяких ліній значення кількох з функцій $\varphi_k(x, y)$ співпадають, то в точках цих ліній може відбуватися порушення єдиності розв'язку задачі Коші. Такі лінії будуть підозрілими на особливі розв'язки. Наприклад, для рівняння

$$(y')^2 - 2xy' = 0 \qquad \textbf{(6.5)}$$

маємо $\varphi_1(x, y) = 0$, $\varphi_2(x, y) = 2x$. Тому підозрілою на особливий розв'язок буде вісь $0y$ $(x = 0)$. Проте, очевидно, вона не є інтегральною кривою рівняння.

Зауважимо, що вздовж таких ліній можливе так зване "склеювання" розв'язків. Так, через кожну точку $(0, y_0)$ осі Oy, окрім розв'язків $y = y_0$, $y = y_0 + x^2$ рівняння (6.5), проходять також інтегральні криві

$$y=\begin{cases} x^2+y_0, & x\le 0,\\ y_0, & x\ge 0,\end{cases} \quad \text{та} \quad y=\begin{cases} y_0, & x\le 0,\\ y_0+x^2, & x\ge 0.\end{cases}$$

6.3. Рівняння, яке містить тільки похідну. Розглянемо рівняння

$$F(y') = 0. \qquad \textbf{(6.6)}$$

Нехай рівняння (6.6) має деяку (скінченну або зліченну) кількість дійсних коренів

$$y' = k_j, \quad j = 1,2,\ldots, \qquad \textbf{(6.7)}$$

де k_j – деякі сталі, які не заповнюють суцільно деякий інтервал.

Інтегруючи (6.7), знаходимо

$$y = k_j x + C,$$

або

$$k_j = \frac{y - C}{x}.$$

Таким чином, диференціальне рівняння (6.6) має загальний інтеграл вигляду

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \qquad \textbf{(6.8)}$$

Приклад 6.2. Розв'язати рівняння $(y')^3 - 3(y')^2 + 2 = 0$.

Розв'язання. Розв'язуючи задане рівняння відносно y', за формулою (6.8) знаходимо

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + 2 = 0. \ ■$$

У випадку, коли корені (6.7) цілком заповнюють деякий інтервал, то диференціальне рівняння (6.6) матиме також розв'язки, відмінні від (6.8). Наприклад, коренями рівняння

$$y' + | y' | = 0$$

є $y' = k$, де $-\infty < k \le 0$, які повністю заповнюють проміжок $(-\infty, 0]$. Але крім інтегральних кривих $y = kx + c,\ k \le 0,$ розв'язком даного рівняння є також функція $y = -x^n,\ 0 \le x < +\infty$, яка при $n > 1$, очевидно, не входить до знайденої сім'ї інтегральних кривих.

6.4. Рівняння, яке явно не містить шуканої функції. Розглянемо диференціальне рівняння

$$F(x, y') = 0, \qquad \textbf{(6.9)}$$

яке явно не містить y.

Нехай рівняння (6.9) розв'язане відносно y', тобто

$$y' = f_k(x),\ k = 1,2,..., \qquad \textbf{(6.10)}$$

де $f_k(x), k = 1,2,...,$ – неперервні функції на деякому проміжку. Тоді сукупність загальних розв'язків рівнянь (6.10)

$$y = \int f_k(x)\,\mathrm{d}\,x + C,\ k = 1,2,...,$$

визначає загальний інтеграл рівняння (6.9).

Якщо ж рівняння (6.9) не розв’язується в елементарних функціях відносно y', але є можливість x та y' подати через параметр, наприклад,

$$x = \varphi(t),\ \ y' = \psi(t),$$

то загальний розв'язок рівняння (6.9) і у цьому випадку виражається у явній формі. Дійсно, маємо

$$\mathrm{d}\,x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t, \qquad \mathrm{d}\,y = \psi(t)\,\mathrm{d}\,x = \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t + C.$$

Отже, загальний розв'язок (у параметричній формі) буде

$$x = \varphi(t),\ \ y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t + C. \qquad \textbf{(6.11)}$$

У випадку, коли із (6.11) вдається вилучити параметр t, то одержуємо загальний розв'язок (загальний інтеграл) у звичайному вигляді.

Якщо рівняння (6.9) розв’язне відносно x, тобто його можна записати у вигляді

$$x = \varphi(y'),$$

то загальний розв'язок рівняння (6.9) можна записати у параметричній формі

$$x = \varphi(t),\ \ y = \int t\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t + C.$$

Приклад 6.3. Розв'язати рівняння $e^{y'} - y' - x = 0$.

Розв'язання. Задане рівняння можна розв'язати відносно x:

$$x = e^{y'} - y'.$$

Представимо його у параметричній формі $(y' = t)$:

$$x = e^t - t, \quad y' = t.$$

Звідси

$$\mathrm{d}\,y = y'\,\mathrm{d}\,x = t\left(e^t - t\right)\mathrm{d}\,t,$$

$$y = \int t\left(e^t - t\right)\mathrm{d}\,t + C = (t-1)e^t - \frac{t^2}{2} + C.$$

Загальним розв’язком заданого рівняння у параметричній формі буде

$$x = e^t - t, \qquad y = (t-1)e^t - \frac{t^2}{2} + C. \ \blacksquare$$

Приклад 6.4. Розв'язати рівняння $x^3 + (y')^3 - xy' = 0$.

Розв'язання. Покладемо $y' = tx$. Тоді

$$x^3 + t^3x^3 - x^2t = 0, \qquad x = \frac{t}{t^3+1},$$

$$\mathrm{d}x = \frac{(1-2t^3)\,\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2}, \qquad y' = tx = \frac{t^2}{t^3+1}.$$

Звідси, інтегруючи, знаходимо

$$y = \int \frac{t^2(1-2t^3)\,\mathrm{d}t}{(t^3+1)^3} + C.$$

Отже, загальний розв'язок у параметричній формі буде

$$x = \frac{t}{t^3+1}, \qquad y = \int \frac{t^2(1-2t^3)\,\mathrm{d}t}{(t^3+1)^3} + C. \ ■$$

6.5. Рівняння, яке явно не містить незалежної змінної. Нехай рівняння (6.1) має вигляд

$$F(y, y') = 0. \qquad \textbf{(6.12)}$$

Якщо (6.12) розв'язане відносно y', тобто

$$y' = f_k(y), \quad k = 1,2,..., \qquad \textbf{(6.13)}$$

і $f_k(y) \neq 0$, $k = 1,2,...,$ то сукупність рівностей

$$x = \int \frac{\mathrm{d}y}{f_k(y)} + C, \quad k = 1,2,..., \qquad \textbf{(6.14)}$$

визначає його загальний розв'язок.

Зрозуміло, що розв'язками рівняння (6.13) є також $y = b_j$, $j = 1,2,...,$ де b_j – корені рівняння $f_k(y) = 0$, які можуть виявитися особливими.

Якщо рівняння (6.12) не розв'язується відносно y', але допускає параметричне представлення

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0,$$

то аналогічно до того, як це робилось у попередньому пункті, знаходимо загальний розв'язок у параметричній формі

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+C,\quad y=\varphi(t). \qquad \textbf{(6.15)}$$

Зокрема, для рівняння

$$y=\varphi(y')$$

можна покласти $\psi(t)\equiv t$, причому підозрілими на особливі розв’язки будуть прямі $y=b$, де $b=\varphi(0)$.

Приклад 6.5. Розв'язати рівняння $y=y'^2+\ln y'$.

Розв'язання. Нехай $y'=t$. Тоді

$$y=t^2+\ln t.$$

Враховуючи, що $\mathrm{d}t=t\,\mathrm{d}x$, маємо

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{t}=\left(2+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Отже, остаточно,

$$x=2t-\frac{1}{t}+C,\qquad y=t^2+\ln t.\ ■$$

Приклад 6.6. Розв'язати рівняння $y^2(y'-1)=(2-y')^2$.

Розв'язання. Оскільки дане рівняння однорідне відносно y та $2-y'$, то покладемо

$$2-y'=yt.$$

Тоді

$$y^2(y'-1)=y^2t^2.$$

Оскільки $y=0$ не є розв'язком, то $y'=1+t^2$, а отже,

$$y=\frac{2-y'}{t}=\frac{1}{t}-t.$$

Тепер згідно з (6.15) знаходимо загальний розв'язок у параметричній формі

$$x=\frac{1}{t}+C,\ y=\frac{1}{t}-t.$$

Зауважимо, що параметр t легко виключається, після чого отримуємо загальний розв'язок у явному вигляді:

$$y = x - C - \frac{1}{x - C}.$$

Особливих розв'язків немає, бо рівність $b^2(0-1) = (2-0)^2$ не виконується при жодному дійсному b. ■

6.6. Узагальнено-однорідні рівняння. Нехай маємо рівняння

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6.1}$$

ліва частина якого є однорідною функцією усіх своїх аргументів, якщо рахувати x, y, y' відповідно величинами першого, k-го, (k–1)-го вимірів, тобто

$$F\left(tx, t^k y, t^{k-1} y'\right) = t^m F\left(x, y, y'\right). \tag{6.16}$$

Таке рівняння називають ***узагальнено-однорідним***.[1)]

Зробимо заміну незалежної змінної і шуканої функції за формулами

$$x = e^t,\ y = ze^{kt}, \tag{6.17}$$

де t – нова незалежна змінна, z – нова шукана функція. Будемо мати:

$$y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} \cdot e^{-t},$$

або

$$y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} \cdot e^{-t}. \tag{6.18}$$

Диференціюючи другу з формул (6.16) за змінною t, знаходимо:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} + kz\right) \cdot e^{kt}.$$

Підставляючи це в (6.18), будемо мати:

$$y' = \left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} + kz\right) \cdot e^{(k-1)t}.$$

[1)] У п. 4.4 вже розглядалися узагальнено-однорідні рівняння, але там ми припускали їх розв'язаними відносно похідної, у той же час тут розглядається загальний випадок.

Тому, виконуючи у рівнянні (6.1) підстановку (6.17), отримуємо:

$$F\left(e^t, ze^{kt}, \left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}+kz\right)\cdot e^{(k-1)t}\right)=0,$$

або, згідно з (6.16) (в якості t, x, y і y' беремо відповідно e^t, 1, z і z'_t+kz),

$$e^{mt}F\left(1, z, \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}+kz\right)=0.$$

Скорочуючи на e^{mt}, приходимо до рівняння, яке не містить незалежної змінної:

$$F\left(1, z, \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}+kz\right)=0,$$

схема розв'язування якого подано у п. 6.5.

6.7. Рівняння, розв'язане відносно незалежної змінної. Нехай рівняння (6.1) можна записати у вигляді

$$x = f(y, y'). \tag{6.19}$$

Покладаючи $y' = p$, отримуємо параметричне представлення рівняння (6.19):

$$x = f(y, p), \qquad y' = p.$$

Знайдемо

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = f'_y(y, p) + f'_p(y, p)\cdot\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}.$$

Оскільки

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)^{-1} = \frac{1}{p},$$

то

$$\frac{1}{p} = f'_y(y, p) + f'_p(y, p)\cdot\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}, \tag{6.20}$$

або

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y} = \frac{1/p - f'_y(y, p)}{f'_p(y, p)}. \tag{6.21}$$

Якщо розглядати p як функцію змінної y, то рівняння (6.21) розв'язане відносно похідної. Нехай $p = \omega(y, C)$ – загальний інтеграл цього рівняння, тоді співвідношення $x = \varphi(y, \omega(y, C))$ визначає загальний інтеграл рівняння (6.19).

Якщо $p = \gamma(y)$ – особливий розв'язок рівняння (6.20), то $x = \varphi(y, \gamma(y))$, може бути особливим розв'язком рівняння (6.19). Особливими можуть бути також розв'язки $y = b$, де $F(x, b, 0) = 0$.

Приклад 6.7. Розв'язати рівняння $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$.

Розв'язання. Розв'язавши рівняння відносно x і покладаючи $y' = p$, отримаємо

$$x = \frac{y}{p}\ln p.$$

Оскільки $\mathrm{d}\,y = p\,\mathrm{d}\,x$, то

$$\mathrm{d}\,y = p\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{p}\ln p\right) = \frac{y}{p}\mathrm{d}\,p + \ln p\,\mathrm{d}\,y - \frac{y}{p}\ln p\,\mathrm{d}\,p,$$

або

$$(1 - \ln p)\left(\mathrm{d}\,y - \frac{y}{p}\mathrm{d}\,p\right) = 0.$$

З останнього рівняння знаходимо $p = e$ і $p = Cy$. Таким чином, розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$x = \frac{y}{e} \quad \text{і} \quad Cx = \ln(Cy). \ \blacksquare$$

6.8. Рівняння, розв'язане відносно шуканої функції. Нехай рівняння (6.1) можна записати у вигляді

$$y = F(x, y'). \tag{6.22}$$

Позначимо $y' = p$. Тоді

$$y = F(x, p),$$

$$\mathrm{d}\,y = F'_x(x, p)\,\mathrm{d}\,x + F'_p(x, p)\,\mathrm{d}\,p, \tag{6.23}$$

або

$$p = F'_x + F'_p \cdot \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} = \frac{p - F'_x(x, p)}{F'_p(x, p)}. \qquad \textbf{(6.24)}$$

Якщо розглядати p як функцію змінної x, то рівняння (6.24) розв'язане відносно похідної. Нехай $p = \psi(y, C)$ – загальний інтеграл цього рівняння, то $y = F(x, \psi(y, C))$ – загальний інтеграл рівняння (6.22).

Рівняння (6.23) може мати особливий розв'язок $p = \gamma(x)$. Тоді розв'язок $y = \varphi(x, \gamma(x))$ може бути особливим.

Приклад 6.8. Розв'язати рівняння $y = xy' - y'^2$.

Розв'язання. Покладаючи $y' = p$ і диференціюючи обидві частини рівності

$$y = px - p^2,$$

отримуємо:

$$p\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\left(xp - p^2\right) = x\,\mathrm{d}\,p + p\,\mathrm{d}\,x - 2p\,\mathrm{d}\,p,$$

або

$$(x - 2p)\,\mathrm{d}\,p = 0.$$

Звідси знаходимо $p = C$ і $p = x/2$. Таким чином, розв'язки вихідного рівняння мають вигляд

$$y = Cx - C^2 \quad \text{і} \quad y = x^2/4. \ \blacksquare$$

6.9. Рівняння Лагранжа. Частковим випадком диференціального рівняння (6.22) є ***рівняння Лагранжа***

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \qquad \textbf{(6.25)}$$

де φ і ψ – диференційовні функції змінної y'.

Покажемо, що рівняння Лагранжа, на відміну від рівняння (6.22) загального вигляду, завжди інтегрується в квадратурах.

Позначимо

$$y' = p.$$

Тоді рівняння (6.25) набуде вигляду

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \qquad \textbf{(6.26)}$$

Диференціюючи обидві частини рівняння за змінною x, одержимо

$$p = \varphi(p) + \left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}. \qquad \textbf{(6.27)}$$

Якщо

$$\varphi(p) - p \neq 0,$$

то рівняння (6.27) можна записати у вигляді лінійного диференціального рівняння, яке визначає x як функцію змінної p, а саме

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,p} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\,x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Його розв'язок знаходиться за допомогою двох квадратур і має вигляд [1)]

$$x = C \cdot A(p) + B(p) \qquad \textbf{(6.28)}$$

Підставляючи цей вираз у (6.26), отримаємо:

$$y = C \cdot A_1(p) + B_1(p),$$

де

$$A_1(p) = A(p)\varphi(p),\ B_1(p) = B(p)\varphi(p) + \psi(p).$$

Рівняння (6.26) і (6.28) задають загальний розв'язок рівняння Лагранжа у параметричній формі.

Якщо числа $p_k, k = 1,2,...,$ – корені рівняння

$$\varphi(p) - p = 0,$$

то одержимо розв'язки рівняння Лагранжа

$$y = p_k x + \psi(p_k),\ \ k = 1,2,..., \qquad \textbf{(6.29)}$$

які можуть бути як частинними, так і особливими.

Таким чином, особливим розв'язками рівняння Лагранжа можуть бути тільки прямі (6.29), де p_k – корені рівняння $\varphi(p) - p = 0$.

[1)] Див. формулу (4.26) з п. 4.5.

Приклад 6.9. Розв'язати рівняння Лагранжа $y = xy'^2 + y'^2$.

Розв'язання. Нехай $y' = p$, тоді

$$y = xp^2 + p^2. \qquad \textbf{(6.30)}$$

Користуючись співвідношенням

$$\mathrm{d}\, y = y' \mathrm{d}\, x,$$

отримуємо:

$$p^2 \mathrm{d}\, x + (2xp + 2p)\mathrm{d}\, p = p \,\mathrm{d}\, x,$$

або

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, p} + \frac{2x}{p-1} = \frac{2}{1-p}, \quad \left(p^2 - p \neq 0\right).$$

Інтегруючи отримане лінійне відносно *x* рівняння, знаходимо:

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1.$$

Підставляючи знайдене значення для *x* у формулу (6.30), будемо мати:

$$y = \left(\frac{C}{(p-1)^2 - 1} - 1\right) p^2 + p^2 = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Таким чином, знайдено загальний розв'язок даного рівняння у параметричній формі:

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1, \quad y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Виключаючи параметр *p*, одержимо загальний розв'язок у вигляді

$$y = \left(\sqrt{x+1} + c\right)^2,$$

де $c = \sqrt{C}$.

Рівняння

$$p^2 - p = 0$$

має два корені $p = 0$ та $p = 1$. Підставляючи їх у рівняння (6.29), знаходимо два розв'язки вихідного рівняння: $y = 0$, $y = x + 1$. Перший з них є особливим, а інший – частинним. ■

6.10. Рівняння Клеро. Розглянемо тепер випадок, коли в рівнянні Лагранжа $\varphi(y') \equiv y'$. Тоді це рівняння набуде вигляду

$$y = xy' + \psi(y') \qquad \textbf{(6.31)}$$

і називається ***рівнянням Клеро*** [1)]. Вважатимемо, що функція $\psi(y')$ є нелінійною відносно y', інакше рівняння Клеро вироджується у рівняння з відокремлюваними змінними, яке легко інтегрується.

Так само, як і при інтегруванні рівняння Лагранжа, покладемо $y' = p$. Тоді

$$y = px + \psi(p). \qquad \textbf{(6.32)}$$

Диференціюючи це рівняння, одержимо

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} \cdot \left(x + \psi'(p)\right) = 0.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} = 0 \quad \text{або} \quad x + \psi'(p) = 0\,.$$

Розв'язком першого з цих рівнянь є $p = C$, що разом з (6.32) дає загальний розв'язок рівняння Клеро

$$y = Cx + \psi(C)\,, \qquad \textbf{(6.33)}$$

який з геометричної точки зору є сім'єю прямих. Порівнюючи (6.31) і (6.33), бачимо, що загальний розв'язок рівняння Клеро отримується, якщо замінити y' на C.

Рівняння $x + \psi'(p) = 0$ разом з диференціальним рівнянням $y = px + \psi(p)$ теж є розв'язком рівняння Клеро, але у параметричній формі.

Вилучивши з системи рівнянь

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = px + \psi(p), \end{cases}$$

параметр p, одержимо $F(x, y) = 0$. Це рівняння кривої, яка не належить сім'ї (6.31), а отже, є особливим розв'язком рівняння Клеро.

Приклад 6.10. Розв'язати рівняння Клеро $y = xy' - \frac{1}{2}y'^2$.

Розв'язання. Нехай $y' = p$, тоді

$$y = xp - p^2/2.$$

Диференціюючи цю рівність, одержуємо

$$(x - p)\,p' = 0.$$

Якщо $p' = 0$, то одержуємо загальний розв'язок

$$y = Cx - C^2/2,$$

а із рівняння $x - p = 0$ – розв'язок у параметричній формі

$$x = p, \quad y = px - p^2/2.$$

Цей розв'язок є особливим, він визначає параболу $y = x^2/2$ (це легко побачити, виключаючи параметр p). ■

[1)] КЛЕРО (Clairon) Алексі Клод (1713-65) – французький математик.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Довести, що задана функція є розв'язком вказаного диференціального рівняння (C – довільна стала).

1.1. $y = x + C\sqrt{1+x^2}$; $(xy+1)\,dx - (x^2+1)\,dy = 0$.

1.2. $y = x\cdot\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$; $xy' = y + \sin x$.

1.3. $\begin{cases} x = \ln t + \frac{1}{t}, \\ y = t - \ln t; \end{cases}$ $y'(x - \ln y') = 1$.

1.4. $x = e^{\sin y} - 2(1+\sin y)$; $(x\cos y + \sin 2y)\cdot y' = 1$.

1.5. $x = \sqrt[3]{Ce^y - y - 2}$; $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.

1.6. $y = x\ln\left|\frac{C}{x}\right|$; $(x-y)\,dx = -x\,dy$.

1.7. $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = t^2(2\ln t + 1); \end{cases}$ $y'\cdot\ln\frac{y'}{4} = 4x$.

1.8. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases}$ $x + y\cdot y' = 0$.

1.9. $y = \frac{\sec x}{x+C}$; $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -y^2\cos x$.

1.10. $y = \sqrt[3]{Cx^3 - 3x^2}$; $xy^2y' = x^2 + x^3$.

1.11. $y = x\left(\int\frac{e^x}{x}\,dx + C\right)$; $xy' = y + xe^x$.

1.12. $y = x\sqrt{1-x^2}$; $yy' = x - 2x^3$.

1.13. $x = y\ln y$; $y'(x+y) = y$.

1.14. $x = e^y + 2e^{-y}$; $(2e^y - x)y' = 1$.

1.15. $y = x(C + \sin x)$; $y = x(y' - x\cos x)$.

1.16. $y = e^x\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^x$; $y' = e^{x+x^2}$.

1.17. $y = \frac{(x+C)^2}{4x^2}$; $y = (xy' + 2y)^2$.

1.18. $y = Cx^2e^{-3/x}$; $x^2y' - 2xy = 3y$.

1.19. $\begin{cases} x = \frac{2t}{t^2-1}, \\ y = \frac{2}{t^2-1} - \ln|t^2-1|; \end{cases}$ $x(y'^2 - 1) = 2y'$.

1.20. $y = e^{\arcsin Cx}$; $xy' = y\,\mathrm{tg}(\ln y)$.

1.21. $\begin{cases} x = t^{-2}\ln t, \\ y = 2t^{-1}\ln t + t^{-1}; \end{cases}$ $xy' - 2xy'^2 = 1$.

1.22. $y = x\int\limits_0^x \sin t^2\,dt$; $xy' - y = x^2\sin x^2$.

1.23. $x = e^{-y}(1000 + \mathrm{tg}\,y)$; $(e^{-y}\sec^2 y - x)\,dy = dx$.

1.24. $y = \frac{-x}{\ln(Cx)}$; $x^2y' = y(x+y)$.

1.25. $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \\ y = \ln(1+t^2); \end{cases}$ $y' = \ln(1 + y'^2)$.

1.26. $y = -x\ln\ln x$; $xy' = y - xe^{y/x}$.

1.27. $y=\left(\cos\frac{C\pm x}{2}\right)^{-2}$; $y'^2=y^3-y^2$.

1.28. $y=x\,\mathrm{tg}\ln x$;
$x^2(\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)=(x+y)y\,\mathrm{d}x$.

1.29. $y=\ln\left(x^2\ln Cx\right)$; $xy'=x^2e^{-y}+2$.

1.30. $x=y^2(C-2\ln|y|)$;
$2\left(x-y^2\right)\mathrm{d}y=y\,\mathrm{d}x$.

1.31. $x=(C-\cos y)\sin y$;
$\left(\sin^2 y+x\,\mathrm{ctg}\,y\right)y'=1$.

1.32. $y=Ce^{x^2}-x^2-1$;
$y'=2x\left(x^2+y\right)$.

1.33. $\begin{cases} x=e^t, \\ y=(t-1)e^t; \end{cases}$ $y=(y'-1)e^{y'}$.

1.34. $x=C\left(e^{-y}-1\right)$; $xy'+1=e^y$.

1.35. $\begin{cases} x=2t-\ln t, \\ y=t^2-t; \end{cases}$ $2y'=x+\ln y'$.

Задача 2. Перевірити, чи є дане співвідношення інтегралом вказаного диференціального рівняння (C – довільна стала).

2.1. $\ln x\ln y=C$;
$y\ln y\,\mathrm{d}x+x\ln x\,\mathrm{d}y=0$.

2.2. $e^{-y}-Cx=1$; $xy'+1=e^y$.

2.3. $x=Ce^{-\sin y/x}$;
$\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$.

2.4. $\ln(xy)+x-y=C$;
$(1+x)y+(1-y)xy'=0$.

2.5. $y=\mathrm{arctg}(x+y)+C$;
$(x+y)^2y'=1$.

2.6. $x\cdot\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=y\ln y$;
$xy'+x\ln y=x\sin x+y\ln y$.

2.7. $\arcsin\frac{y}{x}=C-x$;
$xy'-y+\sqrt{x^2-y^2}=0$.

2.8. $2\sqrt{y-x^2}=x\ln(Cx)$;
$xy'=x\sqrt{y-x^2}+2y$.

2.9. $\sqrt{y-x}-\sqrt{x}=C$;
$y'\sqrt{x}=\sqrt{y-x}+\sqrt{x}$.

2.10. $y^4=\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}$;
$xy^3\,\mathrm{d}y+y^4\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

2.11. $x=Ce^{\mathrm{arcctg}\,y/x}$;
$\left(x^2+xy+y^2\right)\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0$.

2.12. $x=y\int_0^x\sin t^2\,\mathrm{d}t$;
$y=xy'+y^2\sin x^2$.

2.13. $(y-C)^2=\frac{4}{49}x^7$; $y'^2=x^5$.

2.14. $\arcsin\dfrac{y}{x}-\ln x=C$;
$\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0.$

2.15. $x^2+y^2=Cx^3$;
$\left(1+\dfrac{3y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2y}{x}\mathrm{d}y.$

2.16. $x^2=\left(x^2-y\right)\ln Cx$; $x^3(y'-x)=y^2.$

2.17. $x\cdot\int\limits_0^x\dfrac{\cos t}{t}\mathrm{d}t=y\ln y$;
$xy'-x\ln y=x\cos x+y\ln y.$

2.18. $x=-y^2\ln Cx$; $2x^2y'=y^3+xy.$

2.19. $x=Ce^{-\mathrm{arctg}\,y/x}$;
$x^2+xy+y^2=x^2y'.$

2.20. $Cy^2-y^4=x^2$;
$xy\,\mathrm{d}x+\left(y^4-x^2\right)\mathrm{d}y=0.$

2.21. $x^2-y^2=Cy^3$;
$2xy\,\mathrm{d}x+\left(y^2-3x^2\right)\mathrm{d}y=0.$

2.22. $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}-\ln\left(C^2\sqrt{x^2+y^2}\right)=0$;
$(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y=0.$

2.23. $3x+y^3-1=\mathrm{tg}\,3x$;
$y^2\,\mathrm{d}y=\left(3x+y^3-1\right)^2\mathrm{d}x.$

2.24. $3x^2y+x^3y^3=C$;
$\left(2y+xy^3\right)\mathrm{d}x+\left(x+x^2y^2\right)\mathrm{d}y=0.$

2.25. $x=C\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{y}{2x}+\dfrac{\pi}{4}\right)$;
$xy'-x\cos\dfrac{y}{x}-y=0.$

2.26. $y\sin x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{y^2}{2}=C$;
$(\sin x+y)y'+y\cos x-x^2=0.$

2.27. $y^2+\sqrt{x^4+y^4}=C$;
$y(y-xy')=\sqrt{x^4+y^4}.$

2.28. $y^2\left(Ce^{x^2}+1\right)=1$;
$\mathrm{d}y+\left(xy-xy^3\right)\mathrm{d}x=0.$

2.29. $x\ln Cx=2\sqrt{xy}$;
$\left(y+\sqrt{xy}\right)\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y.$

2.30. $1-xy=Cx^3(2+xy)$;
$y'=y^2-2x^{-2}.$

2.31. $\ln\left(x^2+y^2\right)+\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=C$;
$(y-xy')=2(x+yy').$

2.32. $\ln x=\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{x}\right)$;
$xy'=y\sin\ln\dfrac{y}{x}.$

2.33. $y^2(1-y)=(x+C)^2$;
$4(1-y)=(3y-2)y'^2.$

2.34. $\ln Cx=\mathrm{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{x}\right)$;
$xy'=y\cos\ln\dfrac{y}{x}.$

2.35. $x\left(e^y+xy\right)=C$;
$\left(e^y+2xy\right)\mathrm{d}x+\left(e^y+x\right)x\,\mathrm{d}y=0.$

Задача 3. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих.

3.1. $y = \mathrm{tg}(Cx)$.

3.2. $\sin Cy + \cos Cy = x^2$.

3.3. $y = Ce^{\mathrm{arctg}\,x} + \mathrm{arctg}\,x$.

3.4. $Cy = \sin Cx$.

3.5. $y = C_1 x^2 + C_2 e^x$.

3.6. $Ce^{-x} - x - \mathrm{tg}\dfrac{y}{2} + 1 = 0$.

3.7. $(x - C_1)^2 + C_2 y^2 = 1$.

3.8. $x^2 + y^2 = Ce^{\mathrm{arctg}(x/y)}$.

3.9. $y = C(x - C)^2$.

3.10. $y = \sin(x + C)$.

3.11. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

3.12. $y = x\,\mathrm{tg}(x + C)$.

3.13. $\ln y = C_1 x + C_2 y$.

3.14. $e^{Cy} + e^{-Cy} = 2x$.

3.15. $y = x\,\mathrm{ch}(x + C)$.

3.16. $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3$.

3.17. $y = \mathrm{ch}(x + C)$.

3.18. $x^2 + Cy^2 = 2y$.

3.19. $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$.

3.20. $y^2 + Cx = x^3$.

3.21. $x + y + C(1 - xy) = 0$.

3.22. $x = C\cos t,\ y = C\sin t$.

3.23. $\ln(C + y) = ye^{x^2}$.

3.24. $\cos y = C\cos x$.

3.25. $\arcsin\dfrac{y}{x} + x = C$.

3.26. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

3.27. $C^2 x^2 - 7Cxy + 12y^2 = 0$.

3.28. $x - y - Ce^{\frac{x}{y-x}} = 0$.

3.29. $y = x\,\mathrm{sh}(x + C)$.

3.30. $x^2 + 2Cx = \dfrac{y}{C} - C$.

3.31. $\dfrac{x^2}{1 + C_1} + \dfrac{y^2}{2 + C_2} = 1$.

3.32. $e^{2Cy} + e^{-2Cy} = 4x^2$.

3.33. $Cy^3 + 2x - y^2 = 0$.

3.34. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - C_3 x$.

3.35. $Cy^2 + \dfrac{x^2}{C} = 4$.

Задача 4. Скласти диференціальне рівняння сім'ї …

4.1. … парабол, які проходять через початок координат і для яких вісь абсцис є віссю симетрії.

4.2. … всіх кіл на площині.

4.3. … кіл радіуса 1, центри яких лежать на прямій $y = 2x$.

4.4. … всіх прямих на площині.

4.5. … парабол з віссю, паралельною осі Oy, і які одночасно дотичною до прямих $y = 0$ і $y = x$.

4.6. … кіл з радіусом r та центром на осі Ox.

4.7. … еліпсів, що мають сталу велику вісь, яка дорівнює $2a$.

4.8. … лемніскат Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, a – параметр.

4.9. … прямих, які проходять через задану точку з координатами (a, b).

4.10. … всіх парабол, осі симетрії яких паралельні осі Oy.

4.11. … кіл, які дотикаються до прямих $y = 0$ і $x = 0$ та розташовані у першому та третьому квадрантах.

4.12. … всіх парабол, які проходять через початок координат і мають вісь, паралельну осі Oy.

4.13. … кіл довільного радіуса, центри яких лежать на прямій, що з'єднує точки з координатами (–1,4) і (2,6).

4.14. … всіх кіл на площині, які дотикаються до осі абсцис.

4.15. … цисоїд $(2C - x)y^2 = x^3$.

4.16. … кіл радіуса r, центри яких лежать на прямій $y = 3x$.

4.17. … всіх парабол на площині.

4.18. … всіх кіл на площині, які дотикаються до осі ординат.

4.19. … циклоїд $x = C(t - \sin t)$, $y = C(1 - \cos t)$, $C \in \mathbf{R}$.

4.20. … кіл з радіусом r та центром у будь-якій точці площини.

4.21. … парабол, які проходять через початок координат і мають вісь, паралельну осі Oy.

4.22. … співфокусних парабол $y^2 = 2p\left(x + p/2\right)$, p – параметр.

4.23. … парабол, які проходять через початок координат, і для яких вісь ординат є віссю симетрії.

4.24. … кіл довільного радіуса, центри яких лежать на параболі $y = x^2$.

4.25. … еліпсів, що мають сталу малу вісь, яка дорівнює $2b$.

4.26. … кіл, що дотикаються одночасно прямих $y=0$ і $x=0$ та розташовані у другому та четвертому квадрантах.

4.27. … кіл на площині, які проходять через початок координат.

4.28. … кіл одиничного радіуса, центри яких лежать на прямій $y=1$.

4.29. … кіл з радіусом r та центром на осі Oy.

4.30. … строфоїд $x(x^2+y^2)=C(x^2-y^2)$.

4.31. … еліпсів, центри яких співпадають з початком координат, а осі симетрії співпадають з осями координат.

4.32. … кіл з радіусом r та центром у точці (2,4).

4.33. … логарифмічних спіралей, що мають полюс в початку координат $x^2+y^2=Ce^{\operatorname{arctg} x/y}$.

4.34. … кардіоїд $\rho=2r(1-\cos\varphi)$, r – параметр.

4.35. … еліпсів з даною фокусною відстанню $2C$.

Задача 5. Скласти диференціальне рівняння ортогональних траєкторій сім'ї кривих та траєкторій, що перетинають цю сім'ю під заданим кутом μ.

5.1. $x^2-y^2=a, \mu=45^\circ$.

5.2. $y=Cx^4, \mu=30^\circ$.

5.3. $e^{2Cy}+e^{-2Cy}=4x^2, \mu=\operatorname{arctg}4$.

5.4. $(x-\alpha)^2+y^2=4, \mu=45^\circ$.

5.5. $y^2=\ln\operatorname{tg}\theta+C, \mu=60^\circ$.

5.6. $y^2=x+C, \mu=45^\circ$.

5.7. $x^2+y^2=2ax, \mu=45^\circ$.

5.8. $Cy^2+\dfrac{x^2}{C}=4, \mu=45^\circ$.

5.9. $x^2+y^2=a^2, \mu=45^\circ$.

5.10. $y=kx, \mu=60^\circ$.

5.11. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), \mu=30^\circ$.

5.12. $3x^2+y^2=C, \mu=30^\circ$.

5.13. $y^2=2p\left(x+p/2\right), \mu=45^\circ$.

5.14. $r=a\cos^2\theta, \mu=30^\circ$.

5.15. $y=x\ln x+Cx, \mu=\operatorname{arctg}2$.

5.16. $y=Cx+C^3, \mu=30^\circ$.

5.17. $x^2+2cx=\dfrac{y}{C}-C, \mu=45^\circ$.

5.18. $y\ln(Cx)+x=0, \mu=30^\circ$.

5.19. $x^2 + C^2 = 2Cy, \mu = 60^\circ.$

5.20. $x^2 + y^2 = a^2, \mu = 45^\circ.$

5.21. $\ln(C + y) = ye^{x^2}, \mu = \operatorname{arctg} 3.$

5.22. $x^2 = y + C, \mu = 60^\circ.$

5.23. $(2a - x)y^2 = x^3, \mu = 60^\circ.$

5.24. $r = a\sin\theta, \mu = 45^\circ.$

5.25. $y^2 = 2p(x - a), \mu = 60^\circ.$

5.26. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 xy, \mu = 30^\circ.$

5.27. $xy = a, \mu = 30^\circ.$

5.28. $x^2 + y^2 = 2ax, \mu = 45^\circ.$

5.29. $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2),$ $\mu = 60^\circ.$

5.30. $x - y = x^2 + a^2, \mu = 45^\circ.$

5.31. $xy = a, \mu = 45^\circ.$

5.32. $\sin Cy + \cos Cy = x^2, \mu = 45^\circ.$

5.33. $e^{Cy} + e^{-Cy} = 2x, \mu = 45^\circ.$

5.34. $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{4} = 1, \mu = 45^\circ.$

5.35. $(x^3 - 4y^2)^3 - Cxy^4 = 0, \mu = 30^\circ.$

Задача 6. Використовуючи метод ізоклін, наближено побудувати інтегральні криві даного диференціального рівняння.

6.1. $yy' = 2x.$

6.2. $y' = y^2 - 2x^2.$

6.3. $y' = x^2 + y^2 - 4.$

6.4. $xy' = y - x.$

6.5. $y' = e^y + x.$

6.6. $y' = y - 2x.$

6.7. $y' = y + x^2.$

6.8. $y' = \operatorname{sh} y + x.$

6.9. $e^{y'} = x^2 + y^2.$

6.10. $\operatorname{sh} y' = 2x + y.$

6.11. $y'(y + x) = y - x.$

6.12. $y' = (y - 1)^2.$

6.13. $y' = 2y^2 + 3x^2 + 4.$

6.14. $y' = (y - 1)x.$

6.15. $y' = \cos(x - y).$

6.16. $yy' = x - 1.$

6.17. $y' = y - x^2 + 2x.$

6.18. $y' = 2x - e^{-y}.$

6.19. $y' = x + \operatorname{ch} y.$

6.20. $y' = y^2 + 5.$

6.21. $e^{-y'} = x - y.$

6.22. $3xy' = y.$

6.23. $y' = x^2 - 2y^2 + 1.$

6.24. $y' = \sqrt{x^2 + y^2}.$

6.25. $y'(2x - 3y) = x.$

6.26. $y' = e^{2y} - 4x.$

6.27. $y' = x + 2y^2.$

6.28. $yy' + x = 0.$

6.29. $e^{2y'} = x + y^2.$

6.30. $y' = xy - 1.$

6.31. $y' = x(y + 1).$

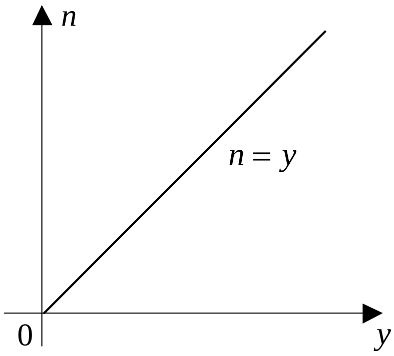
6.32. $y'(x + y) = y.$

6.33. $y' = 2y + 8x.$

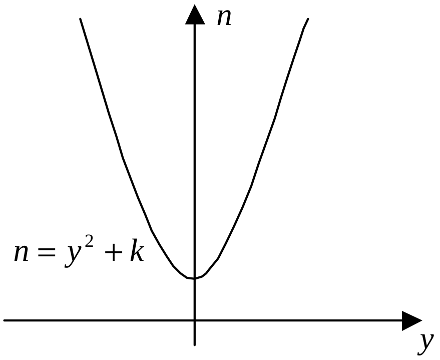
6.34. $2(y + y') = x + 3.$

6.35. $y' = y^2 - 2y - 2.$

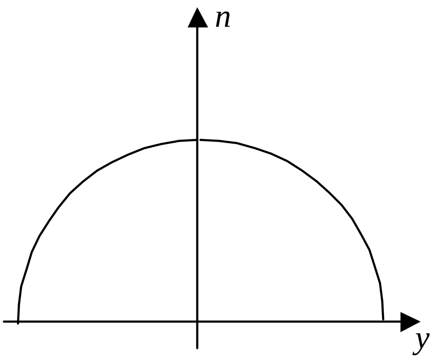
Задача 7. Побудувати картину променів в середовищі з показником $n(y)$, зображеним на рисунку.



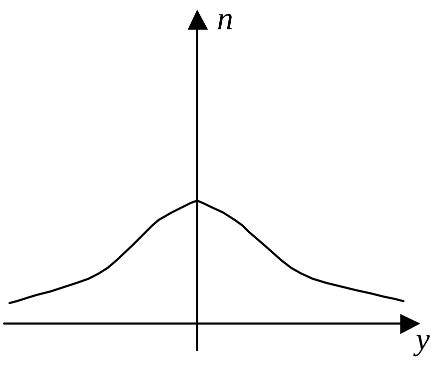
7.1.



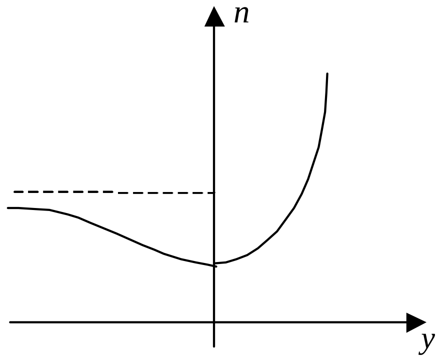
7.2.



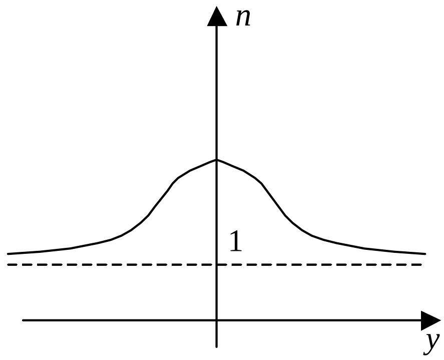
7.3.



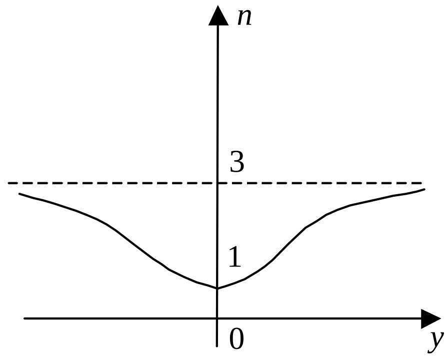
7.4.



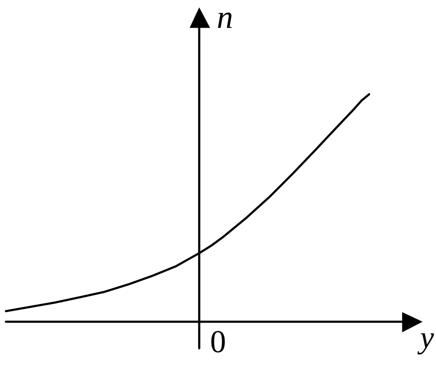
7.5.



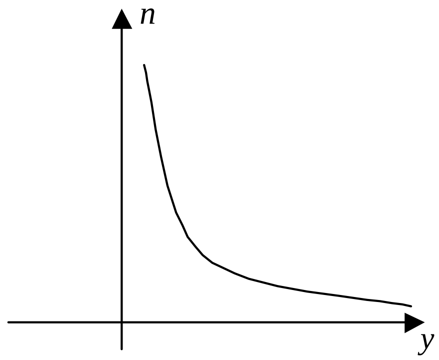
7.6.



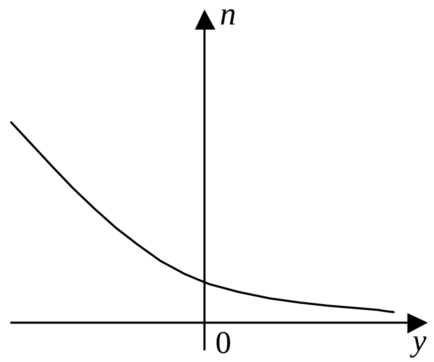
7.7.



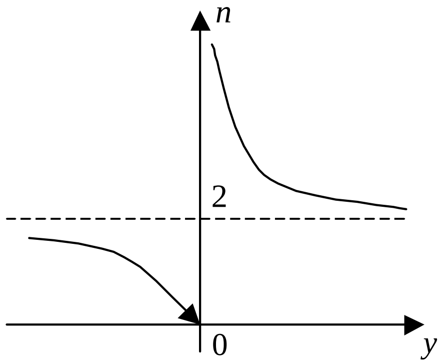
7.8.



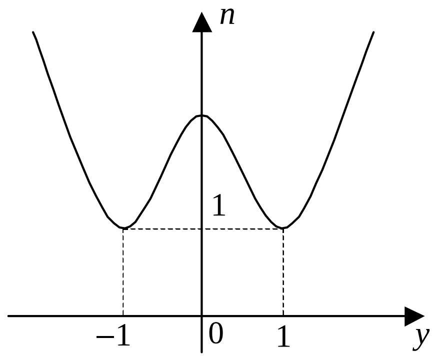
7.9.



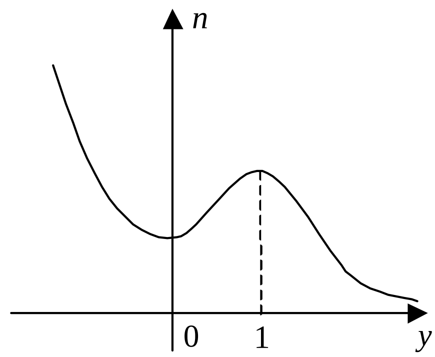
7.10.



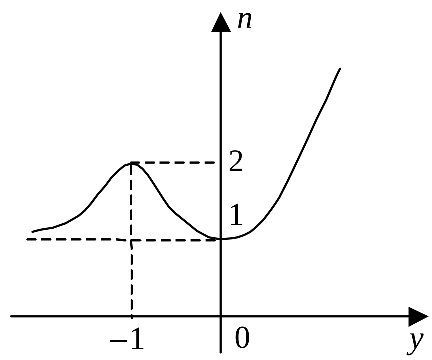
7.11.



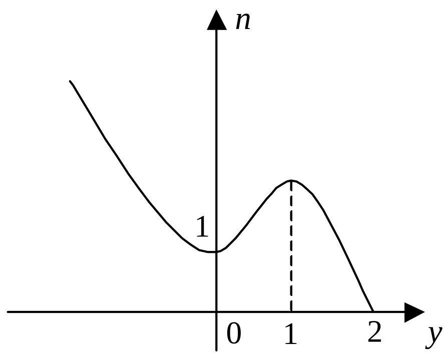
7.12.



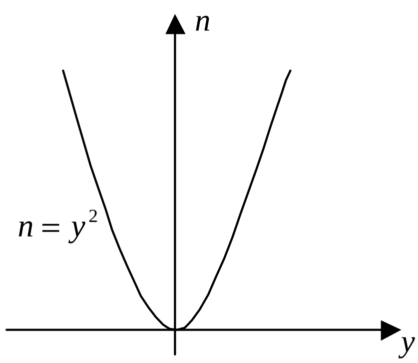
7.13.



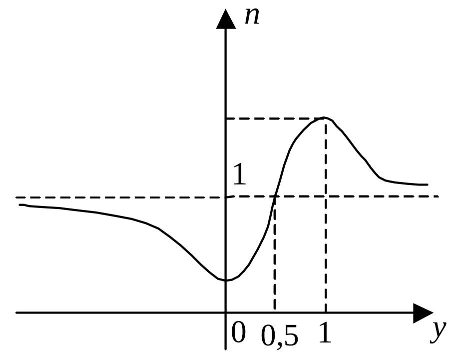
7.14.



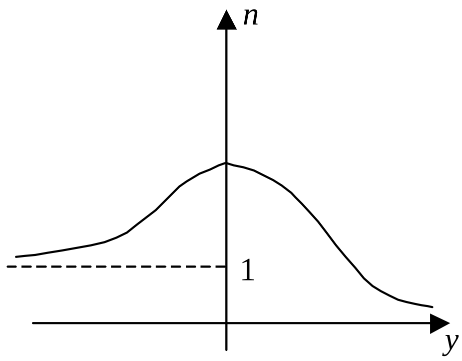
7.15.



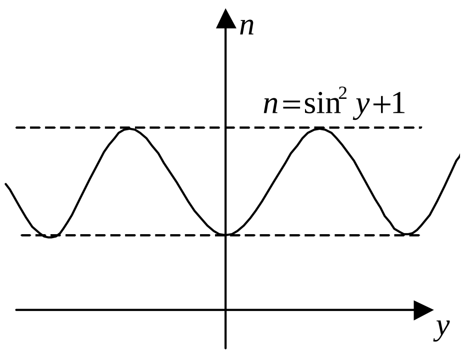
7.16.



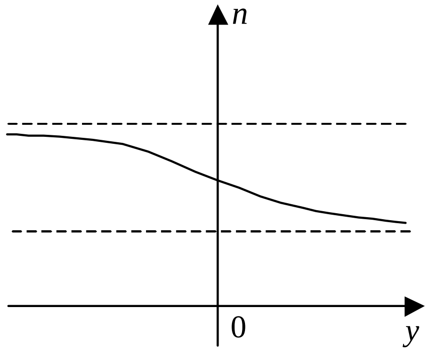
7.17.



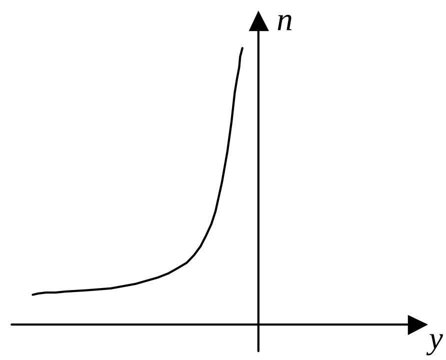
7.18.



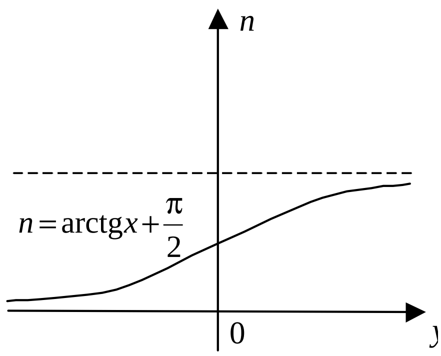
7.19.



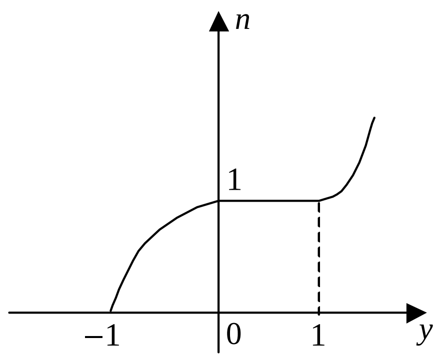
7.20.



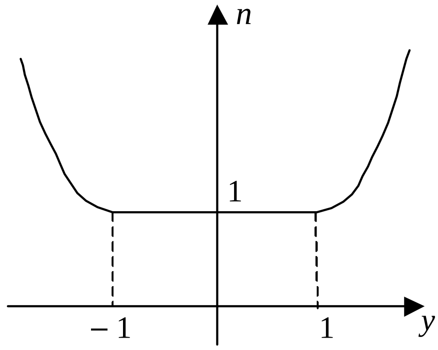
7.21.



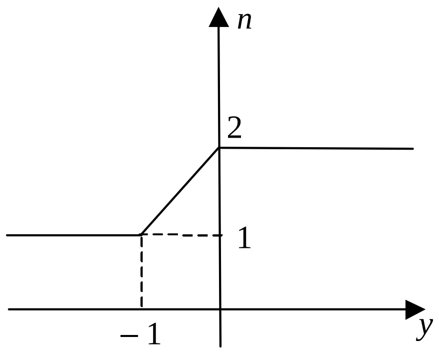
7.22.



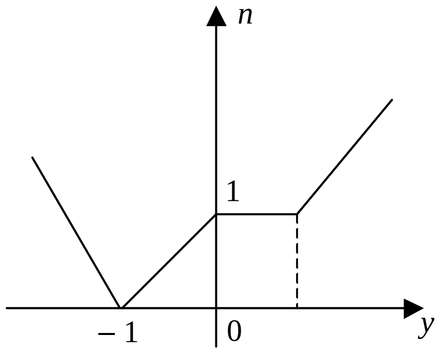
7.23.



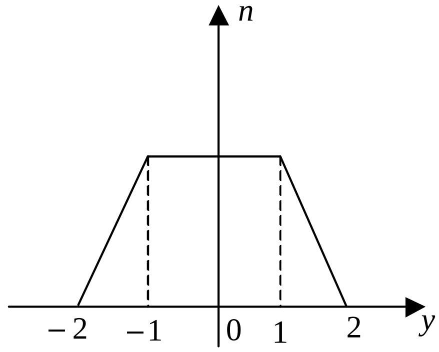
7.24.



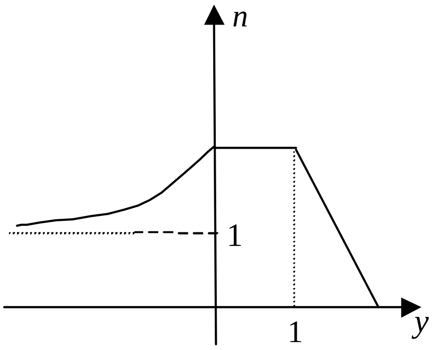
7.25.



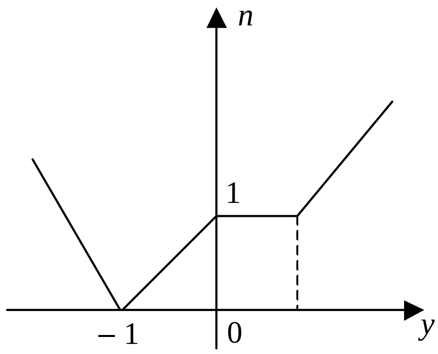
7.29.



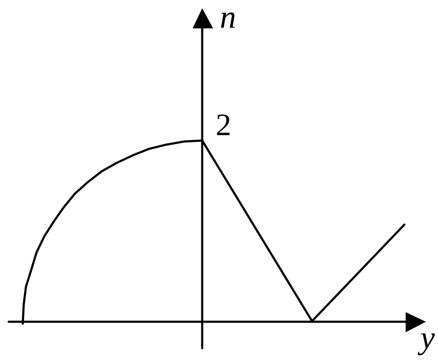
7.26.



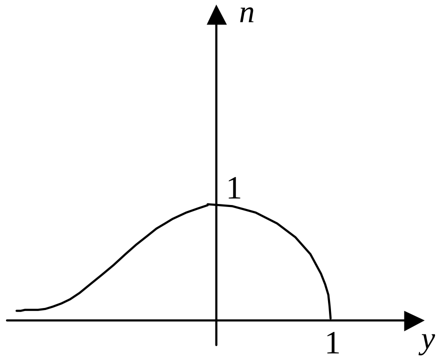
7.30.



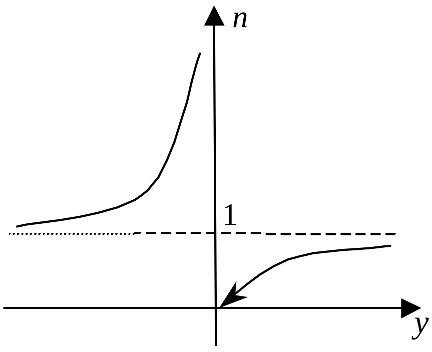
7.27.



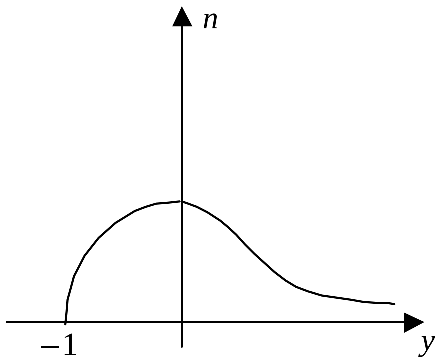
7.31.

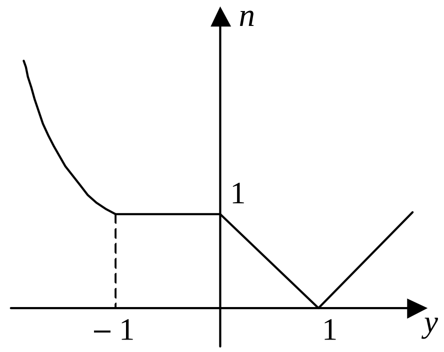


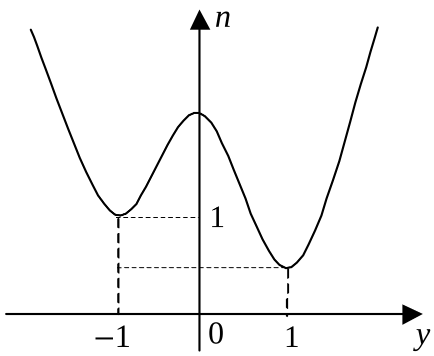
7.28.



7.32.

7.33. 

7.35. 

7.34. 

Задача 8. Розв'язати рівняння (рівняння з відокремленими змінними та звідні до них).

8.1. $(1+2y)x+(1+x^2)y'=0.$

8.2. $(1+y^3)x\,\mathrm{d}x-y(x^4+4)\,\mathrm{d}y=0.$

8.3. $y'=10^{x+y}.$

8.4. $x^2\,\mathrm{d}x+y^3e^{x+y}\,\mathrm{d}y=0.$

8.5. $y'=y+2x-3.$

8.6. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$

8.7. $2x^2yy'+y^2=2.$

8.8. $\left(\dfrac{\cos x}{\ln y}\right)^2\mathrm{d}x+\dfrac{y}{x^2}\,\mathrm{d}y=0.$

8.9. $y'=\mathrm{tg}(5x+y+1).$

8.10. $y'=(x+8y+3)^3.$

8.11. $(xy^2+x)\,\mathrm{d}x+(y-x^2y)\,\mathrm{d}y=0.$

8.12. $e^{-y}(y'+1)=1.$

8.13. $y'=\dfrac{\sin(\ln x)}{\cos(\ln y)}.$

8.14. $y'-xy^2=2xy.$

8.15. $x\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}x=(x^4+1)(1+y)\,\mathrm{d}y.$

8.16. $xy\,\mathrm{d}x=(a-x)(y+b)\,\mathrm{d}y.$

8.17. $y'=\sqrt{4x+2y-1}.$

8.18. $\dfrac{\cos(x^2)}{\sqrt[3]{y}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt[5]{2-3\sqrt[3]{y^4}}}{x}\,\mathrm{d}y.$

8.19. $y'=\cos(y-x).$

8.20. $(x+1)y-\sqrt{x^2+1}(y^3-1)y'=0.$

8.21. $y'=\sqrt[3]{x+y+1}.$

8.22. $xy' - y\ln y = 0$.

8.23. $xy^3\,\mathrm{d}x + (x^2-1)(y^2+1)\,\mathrm{d}y = 0$.

8.24. $\dfrac{e^x - 1}{e^y} = e^{e^y}(1+e^x)y'$.

8.25. $y' + \dfrac{x^3(y-1)^3}{(x+1)y} = 0$.

8.26. $(x+2)e^y\,\mathrm{d}x + y\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}y = 0$.

8.27. $\ln(1+x)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$.

8.28. $\dfrac{y\sqrt[3]{1+y}}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x\sqrt[3]{1-y}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}y = 0$.

8.29. $y' = (ax+by+c)^2$.

8.30. $(\sin x + \cos x)^2 y' = \sin y + \cos y$.

8.31. $\sqrt{\dfrac{1-y}{1+x^2}}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\arcsin\sqrt{y}}{x\,\mathrm{arctg}\,x}\,\mathrm{d}y = 0$.

8.32. $y' = \sin(x-y)$.

8.33. $y^{-3}\ln\ln x\,\mathrm{d}x + xe^{y^2}\,\mathrm{d}y = 0$.

8.34. $\dfrac{\sin y}{\sqrt{3}\cos x + \sin x} + y'\sqrt{1+\cos y} = 0$.

8.35. $\dfrac{1-\ln^2 y}{x\ln y}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\sqrt{3-\ln^2 x}}{y}\,\mathrm{d}y = 0$.

Задача 9. Розв'язати рівняння (однорідні рівняння).

9.1. $y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

9.2. $(x^3 - 3x^2y)\mathrm{d}x + (y^3 - x^3)\mathrm{d}y = 0$.

9.3. $(y^2 - 2xy)\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$.

9.4. $\left((x+y)^2 e^{-y/x} + y^2\right)\mathrm{d}x = xy\,\mathrm{d}y$.

9.5. $\dfrac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y^2 - 4xy}$.

9.6. $\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$.

9.7. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$.

9.8. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.

9.9. $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

9.10. $(xye^{x/y} + y^2)\mathrm{d}x - x^2e^{x/y}\,\mathrm{d}y = 0$.

9.11. $\dfrac{\mathrm{d}x}{y+x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y-x}$.

9.12. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

9.13. $x^3\,\mathrm{d}x + (y^3 - 2x^2y)\mathrm{d}y = 0$.

9.14. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.

9.15. $y' = \dfrac{4x^2 + xy - 3y^2}{5x^2 - 2xy - y^2}$.

9.16. $xy' = y\cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$.

9.17. $(2x+y)\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$.

9.18. $y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = xy\,\mathrm{d}y$.

9.19. $\left(x\,\mathrm{ctg}\dfrac{y}{x} - y\right)\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$.

9.20. $(3x^2 - y^2)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0$.

9.21. $xy' = y - xe^{y/x}$.

9.22. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\varphi(y/x)}{\varphi'(y/x)}$.

9.23. $y'=\dfrac{xy+y^2e^{-x/y}}{x^2}$.

9.24. $\left(2xy^2+2x^3\right)y'=y^3+2yx^2$.

9.25. $\left(y^2+x^2\right)y'=2xy$.

9.26. $(ax+y)\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y=0$.

9.27. $\left(x^2+xy+y^2\right)\mathrm{d}\,x-x^2\,\mathrm{d}\,y=0$.

9.28. $\left(\sqrt{xy}+y\right)\mathrm{d}\,x=x\,\mathrm{d}\,y$.

9.29. $(4x+3y)\,\mathrm{d}\,x+(x+y)\,\mathrm{d}\,y=0$.

9.30. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$.

9.31. $\left(2x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}\,x+y^3\,\mathrm{d}\,y=0$.

9.32. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{y+x}{x}$.

9.33. $\left(x-\sqrt{xy}-y\right)\mathrm{d}\,x+\sqrt{xy}\,\mathrm{d}\,y=0$.

9.34. $xy'-x\cos\dfrac{y}{x}-y=0$.

9.35. $\left(2\sqrt{xy}-y\right)\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y=0$.

Задача 10. Розв'язати рівняння (рівняння, звідні до однорідних).

10.1. $y'+\dfrac{2x+2y-1}{x+y-2}=0$.

10.2. $(x+y+1)\,\mathrm{d}\,x+(2x+y)\,\mathrm{d}\,y=0$.

10.3. $y'=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$.

10.4. $(6x+y-1)\,\mathrm{d}\,x=(2-4x-y)\,\mathrm{d}\,y$.

10.5. $y'=\dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$.

10.6. $y'=\dfrac{y+2}{x+1}+\mathrm{tg}\,\dfrac{y-2x}{x+1}$.

10.7. $(x-2)\,\mathrm{d}\,x+(y-2x+1)\,\mathrm{d}\,y=0$.

10.8. $x+2y+1=(2x+4y+3)y'$.

10.9. $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{11x+4y-11}=\dfrac{\mathrm{d}\,y}{8x+25y+62}$.

10.10. $(x+y+1)\,\mathrm{d}\,x=(1-2x-2y)\,\mathrm{d}\,y$.

10.11. $(x+y)^2y'=a^2$.

10.12. $(3-x+y)\,\mathrm{d}\,x=(3x+y+1)\,\mathrm{d}\,y$.

10.13. $y'=\dfrac{x+6y-7}{8x-y-7}$.

10.14. $(2x-2y-1)\,\mathrm{d}\,x=(1-x+y)\,\mathrm{d}\,y$.

10.15. $(x+2y+1)\,\mathrm{d}\,y=(2x+4y+3)\,\mathrm{d}\,x$.

10.16. $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{2x-y+4}=\dfrac{\mathrm{d}\,y}{2y-x-5}$.

10.17. $(2x-y-1)\,\mathrm{d}\,x=(1-2y+x)\,\mathrm{d}\,y$.

10.18. $x-2y+1+(y-x+2)y'=0$.

10.19. $(2x+y+1)\,\mathrm{d}\,x=(4x+2y-3)\,\mathrm{d}\,y$.

10.20. $(y+2)\,\mathrm{d}x=(2x+y-4)\,\mathrm{d}y$.

10.21. $y'=\dfrac{x+6y-7}{8x-y-7}$.

10.22. $(x+y+4)y'=2x+3y-5$.

10.23. $x-y-1+(y-x+2)y'=0$.

10.24. $2x+3y+1=(4x+2y-3)y'$.

10.25. $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{7y-3x+3}=\dfrac{\mathrm{d}\,y}{3y-7x+7}$.

10.26. $(x+4y)y'=2x+3y-5$.

10.27. $y'=\dfrac{2x+y-1}{2y-x-3}$.

10.28. $(x-y)\,\mathrm{d}x+(2y-x+1)\,\mathrm{d}y=0.$

10.29. $y'=\dfrac{3x+2y}{x+y-1}.$

10.30. $(x+2y+1)\,\mathrm{d}x+(3-2x)\,\mathrm{d}y=0.$

10.31. $(x+y-2)^2y'=2(y+1)^2.$

10.32. $(x+y-2)\,\mathrm{d}x=(y-x-4)\,\mathrm{d}y.$

10.33. $y'=\dfrac{x-2y+3}{2x-4y-1}.$

10.34. $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

10.35. $y'=\dfrac{x+2y-3}{2x-21}.$

Задача 11. Розв'язати рівняння (узагальнено-однорідні рівняння).

11.1. $\dfrac{2}{3}xyy'=\sqrt{x^6-y^4}+y^2.$

11.2. $4xy^2\,\mathrm{d}x+(3x^2y-1)\,\mathrm{d}y=0.$

11.3. $2xy^3+(x^2y^2+1)y'=0.$

11.4. $2y'+x=4\sqrt{y}.$

11.5. $y\,\mathrm{d}x+x(2xy+1)\,\mathrm{d}y=0.$

11.6. $y'=\dfrac{xy}{x^2-y^4}.$

11.7. $(x^2y^2-1)y'+2xy^3=0.$

11.8. $x^3(y'-x)=y^2.$

11.9. $2xy'+y=y^2\sqrt{x-x^2y^2}.$

11.10. $y(x^2y^2+1)\,\mathrm{d}x=(1-x^2y^2)\,\mathrm{d}y.$

11.11. $2x^2y'=y^3+xy.$

11.12. $2\left(\sqrt{x^4y^2+1}-x^2y\right)-x^3y'=0.$

11.13. $2x\,\mathrm{d}y+(x^2y^4+1)y\,\mathrm{d}x=0.$

11.14. $\left(\dfrac{2}{x^2}-y^2\right)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0.$

11.15. $y'=y^2-2x^{-2}.$

11.16. $\left(1+\sqrt{\dfrac{y^2}{x}-1}\right)\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y=0.$

11.17. $2y+(x^2y+1)xy'=0.$

11.18. $2(x^2-xy^2)y'+y^3=0.$

11.19. $(y^4-3x^2)\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}x=0.$

11.20. $(y^4-x^6)y'+3x^5y=0.$

11.21. $y\left(1+\sqrt{x^2y^4-1}\right)\mathrm{d}x+2x\,\mathrm{d}y=0.$

11.22. $y\left(1+\sqrt{x^2y^4+1}\right)\mathrm{d}x+2x\,\mathrm{d}y=0.$

11.23. $2x^2y'=y^3+4xy.$

11.24. $\left(2y^2-x\sqrt{x^2y^2-x^6}\right)\mathrm{d}x=xy\,\mathrm{d}y.$

11.25. $(x+y^3)\,\mathrm{d}x+3(y^5-y^2x)\,\mathrm{d}y=0.$

11.26. $2xy'+y=y\sqrt{x-x^2y^2}.$

11.27. $(6-x^2y^2)\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0.$

11.28. $9yy'-18xy+4x^3=0.$

11.29. $4xy\,\mathrm{d}x+(y-x^2)\,\mathrm{d}y=0.$

11.30. $2x^4yy'=4x^6-y^4.$

11.31. $y'=1+\sqrt{\dfrac{y^2-x}{x}}.$

11.32. $y\left(1+\sqrt{x^2y^4-3}\right)+xy'=0.$

11.33. $\left(1-x^2y^2\right)\mathrm{d}x+6\,\mathrm{d}y=0.$

11.34. $xy^2+\left(2x^2y-4\right)y'=0.$

11.35. $y(xy'-y)=\sqrt{x^6-y^4}.$

Задача 12. Розв'язати лінійне рівняння за допомогою методу Лагранжа.

12.1. $y'\left(x^2+1\right)-xy=\left(x^2-x+1\right)e^x.$

12.2. $y'-\dfrac{2y}{\sin 2x}=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}.$

12.3. $\left(y^2-6x\right)y'+2y=0.$

12.4. $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=x\cos^2 x.$

12.5. $(1-2xy)y'=y(y-1).$

12.6. $y'x\ln x-y=x(\ln x-1).$

12.7. $y'\sin x-y=2\sin^2\dfrac{x}{2}.$

12.8. $\left(2x-6y^4\right)\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=0.$

12.9. $\left(2xy^2-x-y^2\right)y'=y^3-y.$

12.10. $\sec y\,\mathrm{d}x-(x+\sin y)\,\mathrm{d}y=0.$

12.11. $(2x+y)\,\mathrm{d}y=y\,\mathrm{d}x+4\ln y\,\mathrm{d}y.$

12.12. $x^2y'+xy+1=0.$

12.13. $(2x+1)y'=4x+2y.$

12.14. $\left(2x-4y^2\right)\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=0.$

12.15. $xy'+(1+x)y=3x^2e^{-x}.$

12.16. $y'+y\cos x=e^{-\sin x}.$

12.17. $\left(x-2xy-y^2\right)y'+y^2=0.$

12.18. $y\,\mathrm{d}x+\left(2x-10y^3\right)\mathrm{d}y=0.$

12.19. $e^{x^2}y'=x\sin x-2xye^{x^2}.$

12.20. $y'=\dfrac{y}{3x-y^2}.$

12.21. $x\cos x\cdot y'+y(x\sin x+\cos x)=1.$

12.22. $\left(xy+e^x\right)\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0.$

12.23. $\mathrm{d}x+\left(x-e^{-y}\sec^2 y\right)\mathrm{d}y=0.$

12.24. $\left(x+y^2\right)\mathrm{d}y=y\,\mathrm{d}x.$

12.25. $\left(\sin^2 y+x\,\mathrm{ctg}\,y\right)y'=1.$

12.26. $y'-2xy=\cos x-2x\sin x.$

12.27. $y'+(y\,\mathrm{tg}\,x-\sec x)=0.$

12.28. $y'+2xy=e^{-x^2}.$

12.29. $\left(2e^y-x\right)y'=1.$

12.30. $y'+y\cos x=\sin x\cos x.$

12.31. $y'-y\,\mathrm{ctg}\,x=2x-x^2\,\mathrm{ctg}\,x.$

12.32. $y'x\ln x+y=2\ln x.$

12.33. $(xy'-1)\ln x=2y.$

12.34. $2\left(x^4+y\right)\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0.$

12.35. $y=x(y'-x\cos x).$

Задача 13. Розв'язати лінійне рівняння за допомогою методом Бернуллі та знайти частинний розв'язок, який задовольняє задану початкову умову.

13.1. $y'(x^2+1)-xy=(x^2-x+1)e^x$, $y(0)=1$.

13.2. $y'-\dfrac{2y}{\sin 2x}=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$, $y(\pi/4)=3$.

13.3. $(y^2-6x)y'+2y=0$, $x(1)=2$.

13.4. $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=x\cos^2 x$, $y(0)=1$.

13.5. $xy'+y=x\cos x$, $y(\pi/2)=1$.

13.6. $y'x\ln x-y=x(\ln x-1)$, $y(e)=e$.

13.7. $(2x-6y^4)\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=0$, $x(1)=3$.

13.8. $(2xy^2-x-y^2)y'=y^3-y$, $x(0)=5$.

13.9. $\sec y\,\mathrm{d}x=(x+\sin y)\,\mathrm{d}y$, $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$.

13.10. $(2x+y)\,\mathrm{d}y=y\,\mathrm{d}x+4\ln y\,\mathrm{d}y$, $x(e)=0$.

13.11. $y'+\dfrac{y}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$, $y(0)=4$.

13.12. $x^2y'+xy+1=0$, $y(e)=e^{-1}$.

13.13. $(2x+1)y'=4x+2y$, $y(0)=3$.

13.14. $(2x-4y^2)\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=0$, $x(1)=1$.

13.15. $xy'+(1+x)y=3x^2e^{-x}$, $y(-1)=e$.

13.16. $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$, $y(\pi/2)=2$.

13.17. $y\,\mathrm{d}x=(10y^3-2x)\,\mathrm{d}y$, $x(1)=0$.

13.18. $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$, $x(-1)=2$.

13.19. $e^{x^2}y'=x\sin x-2xye^{x^2}$, $y(0)=1$.

13.20. $y'=\dfrac{y}{3x-y^2}$, $x(1)=2$.

13.21. $x\cos x\cdot y'+y(x\sin x+\cos x)=1$, $y(0)=1$.

13.22. $(xy+e^x)\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0$, $y(1)=e$.

13.23. $1+(x-e^{-y}\sec^2 y)y'=0$, $x(0)=2$.

13.24. $(x+y^2)\,\mathrm{d}y=y\,\mathrm{d}x$, $x(1)=1$.

13.25. $(\sin^2 y+x\,\mathrm{ctg}\,y)y'=1$, $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$.

13.26. $y'-2xy=\cos x-2x\sin x$, $y(0)=1$.

13.27. $y'+2xy=e^{-x^2}$, $y(0)=2$.

13.28. $(2e^y-x)y'=1$, $x(0)=3$.

13.29. $y'x\ln x+y=2\ln x$, $y(e)=0$.

13.30. $(xy'-1)\ln x=2y$, $y(e)=1$.

13.31. $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\sec x$, $y(0)=3$.

13.32. $y'+y=\sin x+\cos x$, $y(0)=5$.

13.33. $xy'-2y=2x^4$, $y(1)=8$.

13.34. $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{2}{x^3}$, $y(1)=1$.

13.35. $(x+a)y'=5(x+a)^3-2y$, $y(1-a)=5$.

Задача 14. Розв'язати рівняння (рівняння, звідні до лінійних).

14.1. $y' - y\cos x = y^2 \cos x.$

14.2. $(x+1)(y' + y^2) = -y.$

14.3. $xy' + \dfrac{y}{x} = y^4(1 - x^2).$

14.4. $3y^2 y' + y^3 + x = 0.$

14.5. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2 \cos x = 0.$

14.6. $y' + 2xy = 2x^3 y^3.$

14.7. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{y^3}{x^3}.$

14.8. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

14.9. $x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = y^2\,\mathrm{d}x.$

14.10. $xy' - 4y - 2x^2\sqrt{y} = 0.$

14.11. $2y'\sin x + y\cos x = y^3 \sin^2 x.$

14.12. $x^2 y^2 y' + xy^3 = a^2.$

14.13. $xy\,\mathrm{d}y = (x + y^2)\,\mathrm{d}x.$

14.14. $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2 - 1}.$

14.15. $3y^2\,\mathrm{d}y = (x + y^3 + 1)\,\mathrm{d}x.$

14.16. $xy^2 y' = x^2 + y^3.$

14.17. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y.$

14.18. $y' + xy = y^2(\sin x + x\cos x).$

14.19. $\dfrac{y'}{\sqrt{y+1}} - \dfrac{2\sqrt{y+1}}{x} = 2(x+5).$

14.20. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0.$

14.21. $(x^2 + y^2 + 1)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}x = 0.$

14.22. $xy^3\,\mathrm{d}x = (x^2 y + 2)\,\mathrm{d}y.$

14.23. $(x^3 + e^y)\,\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x.$

14.24. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}.$

14.25. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y.$

14.26. $y' - y = xy^2.$

14.27. $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2)y^{2/3}.$

14.28. $(xy + x^2 y^3)y' = 1.$

14.29. $3y' - y\sin x + 3y^4 \sin x = 0.$

14.30. $\cos x \cdot y' - y\sin x = y^4.$

14.31. $xy' + y = xy^2 \ln x.$

14.32. $(1 + x^2)y' = xy + x^2 y^2.$

14.33. $\sec^2 y \cdot y' + x\,\mathrm{tg}\,y = x.$

14.34. $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + a\sin 2y}.$

14.35. $\dfrac{y'}{y} + (2 - x)\ln y = x\left(e^{2x} - e^{-x^2/2}\right).$

Задача 15. Перевірити, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах, та розв'язати його.

15.1. $\dfrac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0.$

15.2. $\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\left(y^3+\ln x\right)\mathrm{d}y=0.$

15.3. $\left(2x\sin y-y^2\sin x\right)\mathrm{d}x+$
$+\left(x^2\cos y+2y\cos x+1\right)\mathrm{d}y=0.$

15.4. $e^{-y}\,\mathrm{d}x-\left(2y+xe^{-y}\right)\mathrm{d}y=0.$

15.5. $\left(x^3+xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2y+y^3\right)\mathrm{d}y=0.$

15.6. $\sin xy+xy\cos xy+x^2y'\cos xy=0.$

15.7. $(2x\sin y-y\cos x+\ln x)\mathrm{d}x+$
$+\left(x^2\cos y-\ln y-\sin x\right)\mathrm{d}y=0.$

15.8. $\sin(x+y)\,\mathrm{d}x+$
$+x\cos(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=0.$

15.9. $(2x-y)\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0.$

15.10. $x\left(2-9xy^2\right)=y\left(6x^3-4y^2\right)y'.$

15.11. $\left(x\ln y-x^2+\cos y\right)\mathrm{d}y+$
$+\left(x^3+y\ln y-y-2xy\right)\mathrm{d}x=0.$

15.12. $\sqrt{a^2+y^2}+\dfrac{xy+a^2+2y^2}{\sqrt{a^2+y^2}}y'=0.$

15.13. $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}\mathrm{d}x-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}\mathrm{d}y=0.$

15.14. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\mathrm{d}x-$
$-\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y=0.$

15.15. $\dfrac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=0.$

15.16. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)\mathrm{d}x+$
$+\left(\dfrac{\sin^2 x}{y^2}-y\right)\mathrm{d}y=0.$

15.17. $\left(1+y^2\sin 2x\right)\mathrm{d}x+$
$+2y\cos^2 x\,\mathrm{d}y=0.$

15.18. $\left(1+e^{x/y}\right)\mathrm{d}x+$
$+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0.$

15.19. $3x^2(1+\ln y)\mathrm{d}x+$
$+\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)\mathrm{d}y=0.$

15.20. $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)\mathrm{d}x+$
$+\dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{\cos 2y-1}\mathrm{d}y=0.$

15.21. $\left(3x^2+\dfrac{1}{x^2}+2xy^2-\dfrac{2y^2}{x^3}\right)\mathrm{d}x+$
$+\left(3y^2+\dfrac{1}{y^2}+2x^2y+\dfrac{2y}{x^2}\right)\mathrm{d}y=0.$

15.22. $\left(x+\left(y^2-x^2\right)^{-1/2}\right)\mathrm{d}x+$
$+\left(y-\dfrac{x}{y}\left(y^2-x^2\right)^{-1/2}\right)\mathrm{d}y=0.$

15.23. $\left(xe^y+e^x\right)\mathrm{d}y+$
$+\left(e^y+ye^x\right)\mathrm{d}x=0.$

15.24. $x\left(2x^2+y^2\right)+$
$+y\left(x^2+2y^2\right)y'=0.$

15.25. $(2x\cos y - y^2\sin x)\,\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\,\mathrm{d}y = 0.$

15.26. $\dfrac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}x + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\,\mathrm{d}y = 0.$

15.27. $\dfrac{(x+2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} = 0.$

15.28. $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}y = 0.$

15.29. $\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{2y+x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = 0.$

15.30. $(\cos(x+y^2)+3y)\,\mathrm{d}x + (2y\cos(x+y^2)+3x)\,\mathrm{d}y = 0.$

15.31. $\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x - 2\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}y = 0.$

15.32. $(y+2\sin x)\,\mathrm{d}x + (x+9\cos y)\,\mathrm{d}y = 0.$

15.33. $(y\cos x + 2xy^2)\,\mathrm{d}x + (\sin x - a\sin y + 2x^2y)\,\mathrm{d}y = 0.$

15.34. $(x^3-3xy^2)\,\mathrm{d}x + (y^3-3x^2y)\,\mathrm{d}y = 0.$

15.35. $(x^2-4xy-2y^2)\,\mathrm{d}x + (y^2-4xy-2x^2)\,\mathrm{d}y = 0.$

Задача 16. Звести задане рівняння до рівняння у повних диференціалах, знаючи, що воно має інтегрувальний множник вигляду $\mu=\mu(x)$ або $\mu=\mu(y)$, та розв'язати його.

16.1. $(x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x)\sqrt{1+y^2} = y\,\mathrm{d}y.$

16.2. $(x^2+y^2+2x)\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0.$

16.3. $(2y+xy^3)\,\mathrm{d}x + (x+x^2y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.4. $(1+x^2y)\,\mathrm{d}x + x^2(x+y)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.5. $(2xy+ax)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0.$

16.6. $\left(1+\dfrac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2y}{x^2}\right)\mathrm{d}y = 0.$

16.7. $x(3y+2x)\,\mathrm{d}y + 3(x+y)^2\,\mathrm{d}x = 0.$

16.8. $2xy\,\mathrm{d}x + (y^2-3x^2)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.9. $y^2(x-3y)\,\mathrm{d}x + (1-3xy^2)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.10. $\cos x\,\mathrm{d}y + (\sin x + e^y)\,\mathrm{d}x = 0.$

16.11. $\left(\dfrac{y}{x}-3x\right)\mathrm{d}x - \left(\dfrac{4y}{x}-1\right)\mathrm{d}y = 0.$

16.12. $\left(\dfrac{y^3}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}y = \dfrac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

16.13. $\left(1+\dfrac{3y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{2y}{x}\,\mathrm{d}y.$

16.14. $(2xy+y^2)\,\mathrm{d}x + (2x^2+3xy+4y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.15. $2y\,\mathrm{d}x + (y^2-6x)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.16. $\mathrm{d}x + (x+e^{-y}y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.17. $(2xy^2-y)\,\mathrm{d}x + (y^2+x+y)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.18. $(1-x^2y)\,\mathrm{d}x + x^2(y-x)\,\mathrm{d}y = 0.$

16.19. $y(1-y\sin x)\cos^2 y\,\mathrm{d}x = = (y^2 + x\cos^2 y)\mathrm{d}y.$

16.20. $(x^2 + y)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0.$

16.21. $2xy\ln y\,\mathrm{d}x - -\left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = 0.$

16.22. $(x+\sin x+\sin y)\mathrm{d}x + +\cos y\,\mathrm{d}y = 0.$

16.23. $(x^2 + y^2 + 1)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0.$

16.24. $e^{y-x}\,\mathrm{d}x + \left(xe^{y-x} - 2ye^{-x}\right)\mathrm{d}y = 0.$

16.25. $yx^y\,\mathrm{d}x + x^{y+1}\ln x\,\mathrm{d}y = 0.$

16.26. $(x^2 + y^2 + x)\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0.$

16.27. $(y^2 e^x + y)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0.$

16.28. $(x^2 - \sin^2 y)\mathrm{d}x + x\sin 2y\,\mathrm{d}y = 0.$

16.29. $(7xy^3 + y - 5x)y' + y^4 - 5y = 0.$

16.30. $y' + P(x)y = Q(x)y^m, m \neq 0, m \neq 1.$

16.31. $ye^{-\cos x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\ln y}{\sin x}\mathrm{d}y = 0.$

16.32. $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x}{y}-1\right)\mathrm{d}y = 0.$

16.33. $xe^y\,\mathrm{d}x + (x^2 e^y - 2xy)\mathrm{d}y = 0.$

16.34. $xy' = (3x^2\cos y - \sin y)\cos y.$

16.35. $(y + \ln x)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y.$

Задача 17. Задане рівняння розв'язати відносно y', після чого загальний розв'язок шукати звичайними методами.

17.1. $y'^2 - (3x - 2y)y' + 2x^2 - -xy - 3y^2 = 0.$

17.2. $y'^3 - 7y' + 6 = 0.$

17.3. $8y'^3 = 27y.$

17.4. $y'^2 - (2x + y)y' + x^2 + xy = 0.$

17.5. $y'^2 - 2xy' = 0.$

17.6. $(y'+1)^3 = 27(x+y)^2.$

17.7. $y^2(y'^2 + 1) = 1.$

17.8. $y'^2 = 4y^3(1-y).$

17.9. $y'^3 - (x^2 + xy + y^2)y' + +xy(x+y) = 0.$

17.10. $xy'^2 = y.$

17.11. $y'^2 = y^3 - y^2.$

17.12. $yy'^3 + x = 1.$

17.13. $y'^3 + y^2 = yy'(y'+1).$

17.14. $4(1-y) = (3y-2)^2 y'^2.$

17.15. $y'^2 + xy = y^2 + xy'.$

17.16. $y'^3 - (a+b+1)y'^2 + +(ab+a+b)y' = ab.$

17.17. $xy'(xy' + y) = 2y^2.$

17.18. $xy'^2 - 2yy' + x = 0.$

17.19. $2yy'^3 - yy'^2 - 2x + x = 0.$

17.20. $(2xy - x^2)y'^2 - 2xyy' + +2xy - y^2 = 0.$

17.21. $xy'^2 = y(2y'-1)$.

17.22. $y - y'^3 - y'^2 = 0$.

17.23. $y'^2 + x = 2y$.

17.24. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$.

17.25. $y'^3 - (x+y+a)y'^2 + $
$+ (ax+ay+xy)y' - axy = 0$.

17.26. $(xy'+3y)^2 = 7x$.

17.27. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.

17.28. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$.

17.29. $y'^4 + y^2 = y^4$.

17.30. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$.

17.31. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.

17.32. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$.

17.33. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2 y =$
$= x^4 - 4x^2$.

17.34. $y(y - 2xy')^2 = 2y'$.

17.35. $y'^2 + 2xy' - 8x^2 = 0$.

Задача 18. Розв'язати рівняння методом введення параметру.

18.1. $y'^3 - xy^4 y' - y^5 = 0$.

18.2. $x = y'^3 + y'$.

18.3. $(y'+1)^3 = (y'-y)^2$.

18.4. $y = (y'-1)e^{y'}$.

18.5. $x^3 y'^2 + x^2 yy' + a = 0$.

18.6. $y'^4 - y'^2 = y^2$.

18.7. $y - y' = \sqrt{1 + y'^2}$.

18.8. $y'^2 - y'^3 = y^2$.

18.9. $y'^4 = 2yy' + y^2$.

18.10. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.

18.11. $9yy'^2 + 4x^3 y' - 4x^2 y = 0$.

18.12. $x(y'^2 - 1) = 2y'$.

18.13. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$.

18.14. $y'(x - \ln y') = 1$.

18.15. $y^{\frac{2}{5}} + y'^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$.

18.16. $y = y'^2 + 2y'^3$.

18.17. $y = \ln(1 + y'^2)$.

18.18. $5y + y'^2 = x(y' + x)$.

18.19. $(xy' + a)^2 - 2ay + x^2 = 0$.

18.20. $x(1 + y'^2)^{3/2} = a$.

18.21. $x^2 y'^2 = xyy' + 1$.

18.22. $3y'^5 - yy' + 1 = 0$.

18.23. $y'^3 + y^2 = xyy'$.

18.24. $2xy' - y = y'\ln(yy')$.

18.25. $y' = e^{xy'/y}$.

18.26. $8xy'^3 - 12yy'^2 + 9y = 0$.

18.27. $y = xy' - x^2 y'^3$.

18.28. $y = (2 + y')\sqrt{1 - y'}$.

18.29. $y = 2xy' + y^2 y'^3$.

18.30. $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

18.31. $y'^4 + y^2 = y^4$.

18.32. $(xy' + 5)^2 = 10y - x^2$.

18.33. $y = y'^2 e^{y'}$.

18.34. $y\sqrt{a^2 - y'^2} = y'$.

18.35. $y = y' \sin y' + \cos y'$.

Задача 19. Розв'язати рівняння (рівняння Лагранжа, рівняння Клеро).

19.1. $xy'^2 - 2yy' + a = 0$.

19.2. $y = -xy' + y'^2$.

19.3. $xy'(y' + 2) = y$.

19.4. $2xy' - y = \ln y'$.

19.5. $2y'^2(y - xy') = 1$.

19.6. $xy'^2 - 2y' - y = 0$.

19.7. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

19.8. $y = xy' + \dfrac{aby'}{ay' - b}$.

19.9. $y = xy' - y'^2$.

19.10. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

19.11. $y = x(1 + y') + y'^2$.

19.12. $y = xy'^2 - 2y'^3$.

19.13. $y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

19.14. $xy' - y = \ln y'$.

19.15. $y = 2xy' - 4y'^3$.

19.16. $2y(y' + 2) = xy'^2$.

19.17. $y = xy' - (2 + y')$.

19.18. $y'^3 + xy'^2 - y = 0$.

19.19. $y = xy' \sin y'$.

19.20. $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

19.21. $xy' - 2yy' + 4x = 0$.

19.22. $y = xy' + a\sqrt[3]{1 - y'^3}$.

19.23. $y'^3 = 3(xy' - y)$.

19.24. $y = xy' + \dfrac{2y'}{2y' - 1}$.

19.25. $xy'^3 - yy'^2 + 1 = 0$.

19.26. $y + xy' = 4\sqrt{1 - y'^2}$.

19.27. $xy' + y - 4\sqrt{y'} = 0$.

19.28. $2xy' - \ln y' - y = 0$.

19.29. $y - xy' - \dfrac{3y'}{3 - y'} = 0$.

19.30. $y + 2\sqrt{1 + y'^2} = xy'$.

19.31. $y'(xy' - 2y) + 5 = 0$.

19.32. $y = y'(x + y') + x$.

19.33. $y = y'^2(y' + x)$.

19.34. $y = xy' + \dfrac{y'}{y' - 1}$.

19.35. $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$.

Задача 20. Геометричні задачі на складання диференціальних рівнянь.

20.1. Знайти криві, в яких площа трикутника, обмеженого дотичною, віссю абсцис і відрізком від початку координат до точки дотику, є величина стала і дорівнює a^2.

20.2. Знайти криву, які проходить через початок координат і поділяє прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них з будь-якої точки кривої, у відношенні 2:1.

20.3. Знайти криву, в якій точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.

20.4. Знайти криву, в кожній точці якої довжина піднормалі є середнім арифметичним квадратів координат цієї точки.

20.5. Крива проходить через точку (1,1), а відрізок нормалі у довільній точці, розміщений між осями координат, ділиться точкою дотику у відношенні 2:3, рахуючи від осі абсцис. Знайти цю криву.

20.6. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина стала і дорівнює a^2.

20.7. Знайти криві, які володіють такою властивістю: відрізок осі абсцис, який відтинають дотична і нормаль, проведені з довільної точки кривої, дорівнює $2a$.

20.8. Площа фігури, обмеженої кривою, віссю Ox та довільною ординатою, дорівнює кубові цієї ординати. Знайти ту з інтегральних кривих, яка проходить через початок координат.

20.9. Знайти криві, для яких сума довжин катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина стала і дорівнює b.

20.10. Знайти криві, для яких площа фігури, обмеженої осями координат, кривою і прямою, яка паралельна до осі ординат та проходить через довільну точку кривої, дорівнює кубу ординати цієї точки.

20.11. Знайти криву, яка проходить через початок координат і таку, що відрізок нормалі до неї, який відтинають сторони першого координатного кута, має сталу довжину, яка дорівнює 2.

20.12. Знайти криві, якщо відомо, що їх нормалі збігаються з радіусом-вектором точки дотику.

20.13. Знайти криві, в яких точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу абсциси точки дотику.

20.14. Знайти криву, кожна дотична до якої утворює з осями координат трикутник, площа якого дорівнює $2a^2$.

20.15. Визначити криву, для якої відношення відрізка, утвореного дотичною на осі Oy, до відрізка, утвореного нормаллю на осі Ox, є величина стала.

20.16. Визначити криву, знаючи, що трикутник, утворений нормаллю в довільній її точці з осями координат, є рівновеликим трикутнику, утвореному віссю Ox, дотичною та нормаллю.

20.17. Знайти криві, які володіють такою властивістю: якщо через довільну точку кривої провести прямі, паралельні до осей координат, до зустрічі з цими осями, то площа отриманого прямокутника ділиться у відношенні 1:2.

20.18. Знайти криві, дотичні до яких в довільній точці утворюють рівні кути з полярним радіусом і полярною віссю.

20.19. Знайти криві, в яких тангенс кута між дотичною і додатнім напрямом осі Ox обернено дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

20.20. Крива проходить через точку (1,1), а відрізок дотичної у довільній точці, розміщений між осями координат, ділиться точкою дотику у відношенні 2:3, рахуючи від осі абсцис. Знайти цю криву.

20.21. Знайти криву, що має таку властивість: відстань будь-якої дотичної від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

20.22. Знайти криві, в яких площа трапеції, яка обмежена осями координат, дотичною і ординатою точки дотику, є величина стала і дорівнює $3a^2$.

20.23. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює сумі абсциси та ординати точки дотику.

20.24. Знайти криву, кожна дотична до якої відсікає на осях координат такі відрізки, що сума величин, обернених квадратам довжин цих відрізків, дорівнює 1.

20.25. Знайти криву, дотична до якої утворює на осі Oy відрізок, величина якого складає $\frac{1}{n}$ частину суми координат точки дотику.

20.26. Знайти криву, знаючи, що піднормаль будь-якої точки кривої є середнє арифметичне між координатами точки.

20.27. Знайти криву, піддотична якої є середнє арифметичне координат точки дотику.

20.28. Знайти криву, знаючи, що в кожній її точці довжина відрізка дотичної дорівнює довжині відрізка, який відтинає дотична на осі Ox.

20.29. Знайти криву, яка має таку властивість: відрізок осі Ox від початку координат до перетину з дотичною до кривої в будь-якій точці пропорційний ординаті цієї точки (k – коефіцієнт пропорційності).

20.30. Знайти криві, в яких величина піднормалі в усіх її точках однакова і рівна $a, a > 0$.

20.31. Знайти криву, кожна дотична до якої перетинає пряму $y = 1$ у точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

20.32. Знайти криву, дотична до якої в точці (x, y) проходить через точку (x^2, y^2).

20.33. Знайти криві, в яких тангенс кута між дотичною і додатнім напрямом осі Ox обернено пропорційний абсцисі точки дотику.

20.34. Знайти криві, у яких піддотична в усіх її точках має сталу довжину, яка дорівнює a.

20.35. Знайти криві, нормаль у кожній точці яких проходить через точку (a, b).

Задача 21. Задачі природничих наук на складання диференціальних рівнянь.

21.1. Посудину, що має форму півкулі радіуса 2 м, наповнено водою. За який час витече вода крізь круглий отвір радіуса 0,1 м, вирізаний у дні посудини?

21.2. На деяку кількість нерозчинної речовини, що містить у своїх порах 2 кг солі, діємо 30 л води. Через 5 хв розчиняється 1 кг солі. Через який час розчиниться 99% початкової кількості солі?

21.3. У чан налито 100 л ропи, що містить 10 кг розчинної солі. Зі швидкістю 3 л за хвилину в чан вливається вода, і суміш з такою ж швидкістю витікає з чана. Перемішуючи воду, у чані підтримують рівномірну концентрацію. Скільки солі залишиться у чані через годину?

21.4. Деяка кількість нерозчинної речовини містить у своїх порах 10 кг солі. Піддаючи її дії 90 л води, довідалися, що протягом години розчинилася половина наявної кількості солі. Скільки солі розчинилося б протягом того самого часу, коли б кількість води подвоїти?

Вказівка. Швидкість розчинення пропорційна кількості нерозчиненої солі та різниці між концентрацією розчину у даний момент і концентрацією насиченого розчину (1 кг на 3л). Концентрацією c даної речовини називають кількість її, що міститься в одиниці об'єму.

21.5. Рух пароплава уповільнюється силою опору води, пропорційному швидкості пароплава v. Початкова швидкість пароплава $v_0 = 10$ м/с, через 5 с v зменшується до $v_0 = 8$ м/с. Через який час швидкість зменшиться до 2 м/с ? до 1 м/с.

21.6. Швидкість розпаду радію пропорційна наявній його кількості. З досвіду відомо, що протягом року вага одного грама радію меншає на 0,435 мг. Визначити період піврозпаду (час, протягом якого початкова кількість зменшиться вдвоє).

21.7. У залі об'єму 10800 куб. м повітря містило після зборів 0,12% CO_2. Скільки куб. м повітря, що містить 0,04% CO_2, треба щохвилини подавати до залу, щоб через 10 хв у ній було 0,06% CO_2 ?

21.8. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла та температурою повітря. Температура повітря 20^0 С, тіло протягом 20 хв охолоджується від 100^0 до 60^0. Знайти залежність температури від часу та через який час температура тіла знизиться до 30^0.

21.9. Кількість світла, що поглинається під час проходження крізь тонкий шар води, пропорційна товщі шару й кількості світла, що падає на його поверхню. Якщо під час проходження крізь шар завтовшки 3 м поглинається половина початкової кількості світла, то яка частина цієї кількості дійде до глибини 30 м?

21.10. Швидкість розмноження деяких бактерій пропорційна кількості бактерій. Кількість бактерій подвоюється протягом трьох годин. Знайти: а) залежність кількості бактерій від часу; б) у скільки разів збільшиться кількість бактерій протягом 9 годин.

21.11. Припустимо, що у вертикальному повітряному стовпі тиск на кожному рівні обумовлений тиском шарів повітря, що лежать вище. Знайти залежність тиску від висоти, якщо відомо, що на рівні моря тиск дорівнює 1 кг на 1 кв. см та 0,92 кг на 1 кв. см на висоті 500 м.

21.12. Сповільнююча дія тертя на диск, що обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Диск, почавши обертання зі швидкістю 100 обертів за хвилину, після однієї хвилини обертається зі швидкістю 60 обертів за хвилину. Знайти залежність кутової швидкості від часу.

21.13. Деяка речовина перетворюється в іншу речовину зі швидкістю, пропорційною кількості неперетвореної речовини. Кількість неперетвореної речовини через годину була 31,4 г, через 3 години – 9,7 г. Знайти залежність між кількістю неперетвореної речовини x та часом t; встановити, скільки було речовини на початку процесу.

21.14. У культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості. Якщо ця кількість подвоюється протягом години, то в скільки разів вона збільшиться протягом 2,5 годин?

21.15. Парашутист спускається на парашуті. Сила ваги парашута $F_1=mg$, а сила опору повітря $F_2=kv^2$, k – стала. Знайти швидкість v парашута через t_0 секунд після початку спуску та шлях s, пройдений за той же час.

21.16. Встановлений вертикально чан циліндричної форми має отвір у дні. Половина води з повного чана витікає за 5 хв. За який час витече вся вода?

21.17. Човен уповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с, швидкість його через 4 с 1 м/с. Через який час швидкість зменшиться до 1 м/с? Який шлях може пройти човен до зупинки?

21.18. Посудина об'ємом в 20 л містить повітря (80 % азоту и 20 % кисню). У посудину втікає 0,1 л азоту в секунду, який неперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через скільки часу в посудині буде 99 % азоту?

21.19. У посудину, який містить 1 кг води при температурі 20^0, опустили алюмінієвий предмет з масою 0,5 кг, питомою теплоємністю 0,2 и температурою 75^0.

21.20. Матеріальна точка масою $m=2$ повільно занурюється у рідину. Виведіть закон руху, якщо опір рідини пропорційний до швидкості (коефіцієнт пропорційності $k=2$).

21.21. Парашутист стрибнув з висоти 1,5 км, а розкрив парашут на висоті 0,5 км. Скільки часу він летів до розкриття парашута? Допустима швидкість падіння людини у повітрі 50 м/с. Зміною густини повітря знехтувати. Опір повітря пропорційний до квадрата швидкості.

21.22. Якщо тіло повільно занурюється у воду, то його швидкість v і прискорення w наближено пов'язані рівнянням $w=g+kv$, де g, k – сталі. Визначте залежність між шляхом s і часом t, якщо $s(0)=v(0)=0$.

21.23. Матеріальна точка маси m притягується кожним з двох центрів з силою, пропорційною до відстані l. Відстань між центрами s. У початковий момент часу точка є на лінії центрів на відстані l_0 від її середини. Початкова швидкість дорівнює нулю. Виведіть закон руху точки.

21.24. Корабель сповільнює свій рух під дією сили опору води, що пропорційна до швидкості корабля. Початкова швидкість корабля 10 м/с, його швидкість через 5 с буде 8 м/с. Коли швидкість корабля зменшиться на 1м/с?

21.25. Циліндричний резервуар висотою 6 м і діаметром основи 4 м заповнений водою. За який час з нього витече через круглий отвір радіусом $1/12$ м у дні резервуара?

21.26. Диск обертається в рідині. Уповільнююючи сила тертя пропорційна до кутової швидкості обертання w. Визначте залежність кутової швидкості від часу, якщо $w(0) = w_0$.

21.27. Крапля початкової маси M_0 рівномірно випаровується з швидкістю m г/с і рухається за інерцією з початковою швидкістю v_0 см/с. Опір середовища пропорційний до швидкості руху краплі та її радіусу і в початковий момент часу дорівнює f_0. Визначте залежність швидкості руху краплі від часу.

21.28. Сила, що діє на точку, є функцією $f(x)$ відстані x, яку відлічують від початку координат. Побудуйте рівняння руху точки і поясніть фізичний зміст розв'язку.

21.29. Визначте швидкість v, з якою метеор вдариться об Землю, якщо він падає з необмежено великої відстані зі стану спокою і під час його руху до Землі прискорення w обернено пропорційне до квадрата його відстані r від центра Землі.

21.30. Маса ракети з повним запасом пального дорівнює M, без пального – m, швидкість виходу продуктів згорання із сопла ракети дорівнює v, а початкова швидкість ракети є нульовою. Нехтуючи силою тяжіння та опором повітря, визначте швидкість ракети після згорання пального.

21.31. Для середньої області інтенсивності відчуттів існує психофізичний закон співвідношення між відчуття E і подразненням s: $dE = k\,\dfrac{ds}{s}$, де k – стала. Визначте $E(s)$.

21.32. Відомо, що за рік з кожного грама радію розпадається 0,44 мг. За який час розпадається половина початкової кількості?

21.33. За 30 років розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини. За який час залишиться 1% від початкової кількості?

21.34. Футбольний м’яч вагою 0,4 кг кинуто вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 0,48 H при швидкості 1 м/с. Знайти час підняття м’яча і найбільшу висоту піднімання.

21.35. Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю $v = 10$ км/год. Через 20 хв після того, як вимкнули двигун, швидкість човна зменшилась до 6 км/год. Якою стала швидкість човна через 20 хв? Який шлях пройшов човен за 1 хв після зупинки двигуна? Вважати, що сила опору води рухові човна пропорційна його швидкості.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Боячук А.К., Головач Г.П.* Справочное пособие по высшей математике. Т.5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.
2. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высшая школа, 1978.
3. *Лавренюк С.П.* Курс диференціальних рівнянь. – Львів: Вид-во наук.-техн. літератури, 1997.
4. *Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф.* Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981.
5. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Мн.: Высшая школа, 1974.
6. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по дифференциальным уравнениям. – СПб.: Лань, 2002.
7. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1984.
8. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.
9. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
10. *Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін.* Збірник задач з диференціальних рівнянь. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2001.
11. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994.
12. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003.
13. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959.
14. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1992.
15. *Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф.* Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 1993.
16. *Шкіль М.І., Сотніченко М.А.* Звичайні диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1992.

ЗМІСТ