Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра диференціальних рівнянь і прикладної математики

ГОЙ ТАРАС ПЕТРОВИЧ

КУРС ЛЕКЦІЙ

з навчальної дисципліни "Диференціальні рівняння" для студентів напряму підготовки "Математика"

(ІІІ семестр)

2008

ЗМІСТ

Лекція 1.
Вступ. Задачі, що приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

Сучасна теорія диференціальних рівнянь займає чільне місце серед інших математичних дисциплін. Гармонійне поєднання як теоретичного, так і прикладного аспектів робить її однаково привабливою й цікавою як для суто математиків, так і для тих, хто займається застосуванням математики в різноманітних галузях знань. Механіка, радіоелектроніка, хімія, біологія, економіка – це далеко не повний перелік наук, у яких знаходять широке застосування диференціальні рівняння.

Звичайним диференціальним рівнянням називають співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

де F – задана функція своїх аргументів, яка визначена в деякій області G простору $G \subset \mathbf{R}^{n+2}$ та задовольняє в ній певні умови неперервності й диференційовності; x – незалежна скалярна змінна, $y = y(x)$ – шукана функція цієї змінної, $y, y', \ldots, y^{(n)}$ – її похідні. Область G називають ***областю визначення*** рівняння (1).

Враховуючи співвідношення

$$\mathrm{d}^j y = y^{(j)} \, \mathrm{d} x^j$$

між диференціалами і похідними функції $y = y(x)$, рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\Phi\left(x, y, \mathrm{d} x, \mathrm{d} y, \ldots, \mathrm{d}^n y\right) = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо область визначення рівнянь (1) та (2) при цьому та сама, то ці рівняння еквівалентні. Звичайно, позначення, які використані у цих означеннях, не є суттєвими: незалежна змінна може позначатися через t, шукана функція – через s, f, F тощо.

Порядком звичайного диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної (або диференціала) невідомої функції.

У рівняннях n-го порядку (1) і (2) вважається, що похідна або диференціал n-го порядку функції y справді входить у рівняння, тоді як наявність у ньому решти аргументів не обов'язкова.

Аналогічне співвідношення між незалежними змінними $x_1, x_2, ..., x_m$, функцією u цих змінних та її частинними похідними за цими змінними до порядку n включно називають ***диференціальним рівнянням з частинними похідними n-го порядку***. Наприклад, рівняння з частинними похідними першого порядку можемо записати у такому загальному вигляді:

$$\Phi\left(x_1, x_2, ..., x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0,$$

причому хоч одна з частинних похідних входить у це співвідношення обов'язково.

Приклади диференціальних рівнянь:

$$y' = x + y + 1, \quad (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\,x + 3xy\,\mathrm{d}\,y = 0, \quad y''^2 - y^2x^2 = 0,$$

$$y''' - 2y' + y = xe^x, \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Перші чотири рівняння є звичайними диференціальними рівняннями, п'яте і шосте рівняння – рівняння з частинними похідними.

Всюди надалі, якщо не сказано про інше, розглядатимемо саме звичайні диференціальні рівняння, причому як незалежну змінну, так і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Будь-яка функція, визначена разом з відповідними похідними у деякій області, називають ***розв'язком*** диференціального рівняння в цій області, якщо вона перетворює його в тотожність, яка прав справджується для всіх точок згаданої області.

Зокрема, ***розв'язком*** рівняння (1) називатимемо функцію $y = y(x)$, яка має на деякому проміжку (a,b), $a \ge -\infty$, $b \le +\infty$, похідні $y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)$ та задовольняє тотожність

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)\right) \equiv 0, \quad x \in (a,b).$$

Наприклад, функція $y = \cos x$ є розв'язком рівняння $y'' + y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ (і на кожному скінченному інтервалі). Але, крім неї, розв'язками цього рівняння є також функції $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, де C_1, C_2 – довільні сталі. Отже, диференціальне рівняння $y'' + y = 0$ має безліч розв'язків (при кожному значенні C одержуємо свій розв'язок). Пізніше буде встановлено, що диференціальне рівняння n-го порядку має сім'ю розв'язків, залежну від n довільних параметрів (сталих). Наприклад, усі розв'язки рівняння $y^{(n)} = 0$ містяться у формулі

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + \ + C_{n-1} x + C_n,$$

де $C_1, \ldots, C_n$, – довільні сталі.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають його ***інтегруванням***. При цьому рівняння вважається зінтегрованим, якщо воно зведене до квадратур, тобто до скінченної кількості операцій знаходження невизначених інтегралів. Наприклад, усі розв'язки диференціального рівняння $y' = \dfrac{\sin x}{x}$ можуть бути описані формулою $y = \int \dfrac{\sin x}{x} \mathrm{d}\, x + C$. Тут і надалі під символом $\int f(x) \mathrm{d}\, x$ будемо розуміти будь-яку фіксовану первісну, а сталу інтегрування писатимемо окремо.

Рівняння, інтегровані у квадратурах, складають лише незначну частину всіх диференціальних рівнянь і на початок двадцятого століття задача відшукання тих диференціальних рівнянь, які можуть бути зінтегровані, була в основному розв'язана. На перший план вийшла задача встановлення за властивостями рівнянь певних властивостей їх розв'язків. Ці дві задачі – вивчення методів інтегрування диференціальних рівнянь і дослідження різноманітних властивостей їх розв'язків становлять предмет теорії диференціальних рівнянь як самостійної галузі математики.

До диференціальних рівнянь приводять багато задач з механіки, фізики та інших природничих наук. Розглянемо декілька з них.

Задача 1. *Знайти диференціальне рівняння сім'ї усіх кіл на площині.*

Розв'язання. Задану сім'ю можна описати формулою

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \qquad (3)$$

де a, b, R – дійсні параметри. Здиференціюємо (3) тричі за змінною x, враховуючи, що y є функцією від x:

$$\begin{cases} x-a+(y-b)y'=0, \\ 1+y'^2+(y-b)y''=0, \\ 3y'y''+(y-b)y'''=0. \end{cases} \qquad (4)$$

Після вилучення з (3), (4) усіх параметрів одержуємо таке диференціальне рівняння третього порядку:

$$3y'y''^2-(1+y'^2)y'''=0. \ \blacksquare$$

Задача 2. *Знайти сім'ю кривих, які мають таку властивість: відрізок дотичної, розміщений між осями координат, у точці дотику до кожної з кривих цієї сім'ї, ділиться навпіл.*

Розв'язання. Нехай $M(x,y)$ – довільна точка кривої, AB – відрізок дотичної, проведеної через точку $M(x,y)$, розміщений між осями координат, α – кут між згаданою дотичною і віссю Ox (рис.1). Як відомо, $\operatorname{tg}\alpha = y'$ (геометричний зміст похідної). Розглянемо ΔAOB. В ньому $AO=2x$, $BO=2y$ Далі маємо:

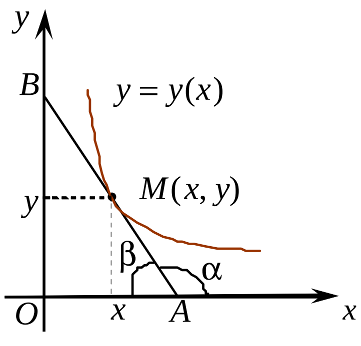

Рис. 1

$$y'=\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}(\pi-\beta)=-\operatorname{tg}\beta=-\frac{BO}{AO}=-\frac{y}{x}.$$

Отже, для знаходження шуканої сім'ї кривих маємо диференціальне рівняння $y'=-y/x$. Зінтегруємо його:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0 \;\Rightarrow\; d\left(\ln|y|+\ln|x|\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\ln|y|+\ln|x|=C \;\Rightarrow\; \ln|y|+\ln|x|=\ln C_1,\ \text{де}\ C=\ln C_1 \;\Rightarrow$$

$$yx=C,\quad C\neq 0.$$

Отже, шуканою сім'єю кривих є сім'я гіпербол. ■

Задача 3. *Визначити форму дзеркала, яке збирає паралельні промені в одну точку.*

Розв'язання. Зробимо переріз дзеркала площиною xOy, щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат, а вісь Ox – паралельною до променів, які падають на дзеркало (рис. 2). Одержуємо в перерізі деяку криву $y=f(x)$. Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя дорівнює куту його відбиття (кут α). Нехай $M(x,y)$– довільна точка дзеркала. Проведемо дотичну MA в точці M.

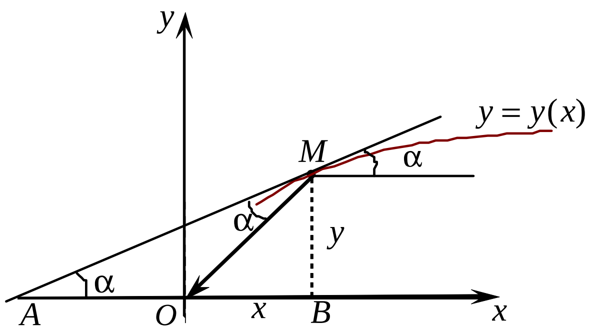

Рис. 2

Трикутник MOA рівнобедрений. Далі маємо:

$$y'=\operatorname{tg}\alpha=\frac{MB}{AB},\quad AB=AO+OB=\sqrt{x^2+y^2}+x.$$

Отже, одержали звичайне диференціальне рівняння

$$y'=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

яке описує форму перерізу дзеркала площиною xOy. Це рівняння можна записати у вигляді $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+y^2}=1$ (***довести самостійно!***).

Позначивши $u=\sqrt{x^2+y^2}$, одержимо рівняння $u'=1$. Зінтегрувавши його, маємо, що $u=\sqrt{x^2+y^2}=x+C$, де C – довільна стала.

Таким чином, одержали рівняння осьового перерізу у площині xOy:

$$y^2 = 2Cx + C^2 \text{ (сім'я парабол з фокусом } (-C/2;0)).$$

Отже, поверхня дзеркала як поверхня обертання осьового перерізу навколо осі Ox матиме вигляд $y^2 + z^2 = 2Cx + C^2$. Шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання. ■

Задача 4. *Знайти закон розпаду радію, якщо відомо, що швидкість розпаду прямо пропорційна його масі і через 1600 років маса радію зменшиться вдвічі.*

Розв'язання. Нехай $x(t)$ – кількість радію в момент часу t. Швидкість розпаду радію як швидкість зміни функції є похідна. Отже, закон розпаду можна записати у вигляді диференціального рівняння першого порядку

$$x'(t) = -kx(t),\ k > 0,$$

де k – коефіцієнт пропорційності (знак мінус означає, що маса радію з часом зменшується, а тому $x'(t) < 0$).

Далі маємо:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}x}{x} + k\,\mathrm{d}t = 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{d}\left(\ln|x| + kt\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\ln|x| + kt = \ln|C| \ \Rightarrow\ \ln\left|\frac{x}{C}\right| = -kt \ \Rightarrow\ x(t) = Ce^{-kt}.$$

Нехай початкова маса радію x_0, тобто $x(0) = x_0$. Використовуючи це, знайдемо сталу C: $C = x_0$.

Враховуючи тепер умову, що $x(1600) = \frac{1}{2}x(0) = \frac{1}{2}x_0$, знайдемо коефіцієнт k:

$$x(1600) = x_0e^{-1600k}, \quad \frac{x_0}{2} = x_0e^{-1600k}, \quad k = \frac{\ln 2}{1600} \approx 0{,}00043.$$

Отже, закон зміни початкової маси радію залежно від зміни часу має вигляд $x(t) = x_0e^{-0{,}00043t}$. ■

Задача 5. *Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною до пройденого шляху. У початковий момент руху точка була на відстані 5 м від початку відліку шляху і мала швидкість v_0=20 м/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 10 с після початку руху.*

Розв'язання. Позначимо через $s = s(t)$ відстань точки від початку відліку в момент часу t. Тоді $s(0) = 5$. За умовою зміна величини s від часу описується диференціальним рівнянням

$$s'(t) = \frac{k}{s(t)},$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Далі маємо:

$$s's = k \quad \Rightarrow \quad (s^2)' = (2kt)' \quad \Rightarrow \quad s^2 = 2kt + C \quad \Rightarrow$$

$$s(t) = \sqrt{2kt + C}\,.$$

З умови $s(0) = 5$ знайдемо сталу інтегрування C: $5 = \sqrt{C}$, C = 25. Отже,

$$s(t) = \sqrt{2kt + 25}.$$

Знайдемо швидкість руху точки в момент t:

$$v(t) = s'(t) = \frac{k}{\sqrt{2kt + 25}}.$$

Використовуючи умову $v(0) = v_0 = 20$ м/с, визначимо коефіцієнт пропорційності k:

$$v(0) = \frac{k}{5} = 20 \text{ м/с}, \quad v(t) = \frac{100}{\sqrt{200t + 25}}.$$

Після 10 с після руху маємо:

$$s(10) = \sqrt{200 \cdot 10 + 25} = 45 \text{ (м)}, \qquad v(10) = \frac{100}{45} = \frac{20}{9} \text{ (м/с)}.$$

Отже, через 10 с після початку руху швидкість становила $20/9$ м/с. За цей час точка пройшла відстань

$$s(10) - s(0) = 45 - 5 = 40 \text{ (м/с)}. \blacksquare$$

Лекція 2.
Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної.

План.

1. Основні поняття й означення.
2. Задача Коші. Існування та єдиність розв'язку.
3. Класифікація розв'язків.

1. Основні поняття й означення. Диференціальне рівняння першого порядку має такий загальний вигляд:

$$F(x, y, y') = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно похідної, то його записуватимемо у вигляді

$$y' = f(x, y), \qquad \textbf{(2)}$$

де $(x, y) \in G$, $G \subset \mathbf{R}^2$ – деяка область (обмежена або ні), f – неперервна функція, задана у кожній точці області G.

Відзначимо й інші форми запису диференціального рівняння першого порядку. У багатьох випадках разом з рівнянням (2) розглядатимемо "перевернуте" рівняння

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(x, y)}, \qquad \textbf{(3)}$$

використовуючи його в околі тих точок площини, де функція $f(x, y)$ є необмеженою. Рівняння (3) доцільно розглядати також тоді, коли воно розв'язується легше, ніж рівняння (2). Якщо функція $f(x, y)$ в області G не перетворюється в нескінченність, то рівняння (2) і (3) рівносильні в цій області.

Рівняння (2), (3) можна замінити одним рівносильним рівнянням

$$\mathrm{d}y - f(x, y)\,\mathrm{d}x = 0,$$

яке є частковим випадком рівняння

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0. \qquad \textbf{(4)}$$

У рівнянні (2) шуканою функцією вважається $y(x)$, у рівнянні (3) – $x(y)$, у рівняння (4) змінні x і y входять рівноправно. Розв'язуючи диференціальне рівняння, можна використовувати різні форми його запису, розглядаючи в якості шуканої функції $y = y(x)$ або $x = x(y)$.

Функцію $y = y(x)$, визначену на деякому інтервалі (a,b), називають ***розв'язком*** рівняння (2), якщо для всіх $x \in (a,b)$:

1) існує похідна $y'(x)$; 2) $\left(x, y(x)\right) \in G$; 3) $y'(x) \equiv f\left(x, y(x)\right)$.

Розв'язок $y = y(x)$ може бути означений і на проміжках $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$. Якщо розв'язок означений на проміжку, який замкнений з одного чи обох кінців, то під похідною $y'(x)$ на кінці проміжку будемо розуміти відповідну однобічну похідну.

Розв'язок рівняння (2) може бути заданий також у неявному вигляді (у вигляді, не розв'язаному відносно y). Вважають, що співвідношення

$$\Phi(x, y) = 0$$

задає розв'язок рівняння (2), якщо:

1) воно визначає y як неявну функцію від x, $y = y(x)$;

2) функція $y = y(x)$ є розв'язком рівняння (2), тобто для всіх $x \in (a,b)$ маємо тотожність

$$\Phi'_x\left(x, y(x)\right) + \Phi'_y\left(x, y(x)\right) \cdot f\left(x, y(x)\right) \equiv 0.$$

У багатьох випадках розв'язок рівняння (2) можна одержати у параметричній формі, тобто як

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 < t < t_1.$$

Це означає, що на інтервалі (t_0, t_1) маємо

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f\left(\varphi(t), \psi(t)\right).$$

2. Задача Коші. Існування та єдиність розв'язку. Однією з найважливіших задач теорії диференціальних рівнянь є ***задача Коші***[1] ***(початкова задача).*** Для рівняння (2) вона формулюється так: серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок $y = y(x)$, для якого функція $y(x)$ набуває заданого значення y_0 при $x = x_0$, тобто

$$y(x_0) = y_0. \qquad \textbf{(5)}$$

Числа x_0, y_0 називають ***початковими даними,*** умову (5) – ***початковою.***

З геометричної точки зору задача Коші полягає у відшуканні серед усіх інтегральних кривих рівняння (2) тієї кривої, яка проходить через задану точку (x_0, y_0) площини Oxy.

У кожному конкретному випадку задача Коші може мати розв'язок або не мати його. Якщо вона має розв'язок, то важливо з'ясувати, чи він єдиний.

Розглянемо задачу Коші (2), (5) у замкненій області (прямокутнику)

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\right\},\ a > 0,\ b > 0,$$

і припустимо, що функція $f(x, y)$ у цій області неперервна та задовольняє ***умову Ліпшица***[2] за змінною y, тобто

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L\, |y_1 - y_2|,$$

де L – стала Ліпшица, $L > 0$, (x, y_1), (x, y_2) – дві довільні точки з Q.

Очевидно, що функція $f(x, y)$ є обмеженою в області Q, тобто

$$|f(x, y)| \le M$$

для всіх точок $(x, y) \in Q$.

---

[1] КОШІ (Cauchy) Огюстен Луї (1789-1857) – французький математик.
[2] ЛІПШІЦ (Lipchitz) Рудольф Отто (1832-1903) – німецький математик.

Теорема 1 (Пікара[1]). *Якщо функція* $f(x,y)$ *в області Q неперервна та задовольняє умову Ліпшіца за змінною y, то принаймні на відрізку* $G_1=\{x\in\mathbf{R}:|x-x_0|\le h\}$, де

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},$$

існує єдиний розв'язок $y=y(x)$ *задачі (2),(5).*

Є декілька способів доведення теореми 1. Найбільш конструктивним є метод Пікара, який дає можливість побудувати розв'язок задачі Коші як границю послідовних наближень $y_n(x),\ \ n=0,1,2,\ldots$, визначених рекурентними формулами

$$y_0(x)\equiv y_0,\qquad y_n(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f\left(t,y_{n-1}(t)\right)\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\ldots$$

На лекції 8 буде показано, що ці наближення гарантовано збігаються до розв'язку задачі Коші (2), (5) на відрізку G_1.

Теорема Пікара має велике значення в теорії звичайних диференціальних рівнянь, бо дозволяє за виглядом рівняння відповісти про існування та єдиність розв'язку для заданих початкових умов. Це особливо важливо у тих випадках, коли неможливо вказати точну формулу для розв'язку рівняння, а тому потрібно застосовувати методи наближеного розв'язування.

Зауваження. Умова Ліпшіца є досить неконструктивною, бо її нелегко перевіряти для функцій складної будови. Але цю умову можна замінити більш жорсткою, але простішою. А саме: *умова Ліпшіца завжди виконується, якщо функція* $f(x,y)$ *має в області Q обмежену частинну похідну* $f'_y(x,y)$. Щоб показати це, до різниці $f(x,y_1)-f(x,y_2)$ застосуємо відому з курсу математичного аналізу теорему Лагранжа[2] про скінченні прирости:

[1] ПІКАР (Picard) Шарль Еміль (1856-1941) – французький математик.
[2] ЛАГРАНЖ (Lagrange) Жозеф Луї (1736-1813) – французький математик і механік.

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)=f'_y\big(x,y_1+\theta(y_1-y_2)\big)\cdot(y_1-y_2),\quad 0<\theta<1.$$

Якщо $\left|f'_y(x,y)\right|\le N$, то, очевидно,

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le N\left|y_1-y_2\right|.$$

Але з умови Ліпшіца не випливає умова обмеженості $f'_y(x,y)$, більш того, ця похідна може навіть не існувати. Наприклад, функція $f(x,y)=2\,|\,y\,|\cos x$ недиференційовна за змінною y в точці $(x_0,0)$, $x_0\ne\pi/2+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, але умова Ліпшіца в околі цієї точки виконується. Справді,

$$\left|f(x,y_2)-f(x,y_1)\right|=2\,|\cos x\,|\cdot\big\|\,y_2\,|-|\,y_1\,\big\|\le 2\,|\,y_2-y_1\,|,$$

оскільки $|\cos x\,|\le 1$, а

$$\big\|\,y_2\,|-|\,y_1\,\big\|\le|\,y_2-y_1\,|.$$

Таким чином, задана функція задовольняє умову Ліпшіца зі сталою $L=2$.

Відзначимо, що теорема Пікара дає достатні умови існування єдиного розв'язку задачі Коші для рівняння (2), але ці умови не є необхідними. А саме: *може існувати єдиний розв'язок задачі (2),(5), але у точці* (x_0,y_0) *не виконується одна з двох умов, які накладаються на праву частину рівняння (2), або обидві ці умови.*

Розглянемо приклади.

1. $y'=y\sin x+e^x$. Функція $f(x,y)==y\sin x+e^x$ неперервна, а похідна $f'_y=\sin x$ обмежена в усіх точках площини Oxy. Отже, згідно з теоремою Пікара та зауваження до неї, через кожну точку площини Oxy проходить одна інтегральна крива.

2. $y'=3\sqrt[3]{y^2}$. Права частина рівняння визначена і неперервна в усіх точках площини Oxy. Похідна $f'_y=2y^{-1/3}$ стає необмеженою, якщо $y=0$, тому в точках осі Ox може порушуватись єдиність розв'язку. Легко бачити, що $y=(x+C)^3$ – розв'язок. Окрім того, маємо розв'язок $y=0$. Таким чином, через кожну точку осі Ox проходить принаймні дві інтегральні криві і, отже, у точках цієї осі порушується єдиність розв'язку. Інтегральними кривими є також лінії, складені з кусків кубічних парабол $y=(x+C)^3$ і відрізків осі Ox, тому через кожну точку осі Ox проходить безліч інтегральних кривих.

3. $y'=y^{-2}$. У точках $(x_0,0)$ осі Ox функції $f(x,y)=y^{-2}$, $f'_y=-2y^{-3}$ розривні і необмежені при $y\to 0$, але через кожну точку цієї осі проходить єдина інтегральна крива $y=\sqrt[3]{3(x-x_0)}$.

Якщо на функцію $f(x,y)$ у рівнянні (2) накладати менш жорсткі умови, ніж у теоремі Пікара, то може виявитись, що розв'язок задачі Коші хоча й буде існувати, але його єдиність не гарантуватиметься. Наведемо теорему Пеано[1)], яка за умови неперервності функції $f(x,y)$ в області Q гарантує існування, але не єдиність розв'язку задачі Коші (це ілюструє наведений вище приклад 2).

Теорема 2 (Пеано). *Якщо функція* $f(x,y)$ *з рівняння (2) неперервна в області Q, то принаймні на відрізку* G_1 *існує щонайменше один розв'язок* $y=y(x)$ *задачі Коші (2),(5).*

Теореми Пікара і Пеано встановлюють існування неперервно диференційовного розв'язку задачі Коші (2), (5) лише в деякому околі точки x_0, тобто це теореми про існування розв'язку в локальному розумінні. Існування розв'язку в наперед заданій області цими теореми не гарантується, тобто в усій області розв'язок задачі може й не існувати. Наприклад, рівняння $y'=1+y^2$ з початковою умовою $y(0)=0$ має розв'язок $y=\operatorname{tg}x$, який, очевидно, існує лише на інтервалі $(-\pi/2,\pi/2)$, тоді як права частина

[1)] ПЕАНО (Peano) Джузеппе (1858-1932) – італійський математик.

рівняння є неперервно диференційовною функцією на всій площині Oxy, а отже, справджує умову Ліпшіца у будь-якій скінченній частині цієї площини.

3. Класифікація розв'язків. На прикладах, які розглядалися раніше, переконалися, що рівняння (2) може мати безліч розв'язків.

Сім'ю розв'язків диференціального рівняння (2), залежну від однієї довільної сталої C:

$$y = \varphi(x, C) \tag{6}$$

називають ***загальним розв'язком*** цього рівняння. Формула (6) дозволяє розв'язати задачу Коші для рівняння (2). Для цього потрібно визначити $C = C_0$ з рівності $y_0 = \varphi(x_0, C)$ і підставити знайдене значення у (6). Тоді $y = \varphi(x, C_0)$ буде розв'язком задачі Коші. Однак при цьому не гарантується ні розв'язність рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$ відносно C, ні єдиність знайденого розв'язку задачі Коші.

У зв'язку з цим зручним є таке означення загального розв'язку рівняння (2). Нехай G – деяка область площини Oxy, через кожну точку якої проходить єдина інтегральна крива рівняння (2) (наприклад, можемо вважати, що в околі кожної точки області G справджуються умови теореми Пікара). Тоді функцію (6), яка визначена в деякій області змінних x і C та має в цій області неперервну частинну похідну за змінною x, називають ***загальним розв'язком*** рівняння (2) в області G, якщо:

1) співвідношення (6) можна розв'язати в G відносно довільної сталої C:

$$C = \psi(x, y); \tag{7}$$

2) функція (6) є розв'язком рівняння (2) для всіх значень сталої C з формули (7), коли точка (x, y) пробігає область G.

Знаючи загальний розв'язок в області G, з нього легко отримати розв'язок задачі Коші з довільними початковими даними

$(x_0, y_0) \in G$ за рахунок вибору відповідного значення довільної сталої *C*. Для цього потрібно замінити у формулі (7) змінні *x* і *y* числами x_0, y_0 відповідно, розв'язати одержане рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$ відносно *C* і підставити знайдене значення $C = C_0$ у формулу загального розв'язку (6). Отримана функція $y = \varphi(x, C_0)$ буде шуканим розв'язком, бо вона є розв'язком рівняння (2) і $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Якщо у формулі (6) замість довільної сталої *C* взяти початкове значення y_0 шуканої функції при деякому фіксованому значенні x_0 незалежної змінної: $y = \varphi(x, x_0, y_0)$, то такий запис загального розв'язку називають ***загальним розв'язком у формі Коші***.

Загальний розв'язок рівняння (2), записаний у неявному вигляді (вигляді, не розв'язному відносно шуканої функції *y*):

$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

називають ***загальним інтегралом*** цього рівняння. При цьому вважають, що рівність (8) визначає загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ рівняння (2) в області *G*.

Часто загальний інтеграл одержують у вигляді, розв'язаному відносно довільної сталої *C*, тобто $\Psi(x, y) = C$. Ліву частину цієї рівності називають ***інтегралом*** рівняння (2).

Аналогічно визначають сім'ю інтегральних кривих (розв'язків) рівняння (2), залежну від довільної сталої *C*, у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C), \\ y = \psi(t, C) \end{cases}$$

як ***загальний розв'язок у параметричній формі***.

Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2) називають ***частинним***, якщо у кожній його точці зберігається єдиність розв'язку задачі Коші. Розв'язок, який міститься у формулі (6) загального розв'язку, тобто одержується з нього при конкретному значенні довільної сталої C (включаючи $\pm\infty$), є, очевидно, частинним розв'язком.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називають ***особливим***. Його не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) при жодному конкретному значенні сталої C (включаючи $\pm\infty$). З геометричної точки зору особливому розв'язку відповідає інтегральна крива, яка не міститься в сім'ї інтегральних кривих, що складають загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

З теореми Пікара та зауваження до неї випливає, що особливі розв'язки рівняння (2) потрібно шукати серед тих кривих, уздовж яких похідна $f_y'(x,y)$ необмежена. Такі криві називають ***підозрілими на особливий розв'язок***. Ця крива буде особливим розв'язком, якщо вона є інтегральною кривою і в кожній її точці порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші.

Приклад. Зінтегрувати рівняння $y' = 2\sqrt{y},\ \ y \ge 0$.

Розв'язання. При $y \ne 0$ одержуємо

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{y}\right)' = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = x + C,\ x > -C,\ \Rightarrow$$

$$y = (x+C)^2 \ \ (x \ge -C).$$

Отже, $y = (x+C)^2$ $(x \ge -C)$ – загальний розв'язок (точка $x = -C$ включена, бо у ній також виконується рівність $y' = 2\sqrt{y}$).

З геометричної точки зору маємо праві вітки парабол, в яких вісь симетрії паралельна до осі Oy, а вершини знаходяться на осі Ox (рис. 1). Легко бачити, що $y = 0$ (вісь Ox) також є розв'язком рівняння, причому особливим.

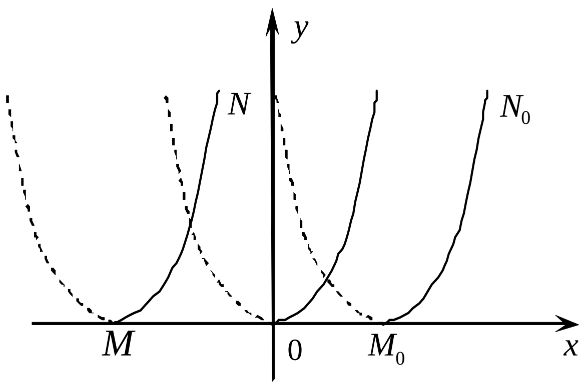

Рис. 1

Справді, через будь-яку точку $M(x_0,0)$ проходить розв’язок $y=0$, півпарабола MN: $y=(x-x_0)^2$, $x \ge x_0$, і, крім того, безліч розв’язків вигляду MM_0N_0, які можна скласти з відрізків MM_0 ($M_0 \equiv M_0(x_1,0)$) особливого розв’язку $y=0$ і частинних розв’язків – півпарабол M_0N_0: $y=(x-x_1)^2$, $x > x_1$.

Зауважимо, що розв’язки вигляду MM_0N_0, тобто функції

$$y=\begin{cases} 0, & -\infty < x \le x_0, \\ (x-x_0)^2, & x_0 \le x < +\infty, \end{cases}$$

не є ні частинними, ні особливими, оскільки умова єдиності задачі Коші порушується лише для $x \le x_0$. ■

Надалі розв’язки, які одержуються “склеюванням” частинних і особливих розв’язків, вивчати не будемо.

Лекція 3.
Найпростіші класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегрованих у квадратурах.

План.

1. Рівняння з відокремленими, відокремлюваними змінними та звідні до них.
2. Однорідні рівняння.

1. Рівняння з відокремленими, відокремлюваними змінними та звідні до них. Диференціальне рівняння першого порядку

$$f_1(x)\,\mathrm{d}x + f_2(y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

називають ***рівнянням з відокремленими змінними***. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(y)$ неперервні, то рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}\left(\int_{x_0}^{x} f_1(x)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} f_2(y)\mathrm{d}y\right) = 0,$$

а тому

$$\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} f_2(y)\mathrm{d}y = C \tag{2}$$

є загальним інтегралом рівняння (1). Особливих розв'язків рівняння (1) не має.

У формулі (2) можна не писати меж інтегрування, бо числа, які отримаємо після підставляння нижніх меж інтегралів у формулі Ньютона-Лейбніца, можна включити у сталу C. Тому загальний інтеграл рівняння (1) часто записуватимемо у вигляді

$$\int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(y)\,\mathrm{d}y = C. \tag{3}$$

Відповідь на питання про існування розв'язку рівняння (1), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0, \tag{4}$$

дає така теорема.

Теорема. *Нехай функції* $f_1(x)$ і $f_2(y)$ *у рівнянні (1) визначені і неперервні в околах точок* $x = x_0$ *і* $y = y_0$ *відповідно, причому* $f_1^2(x_0) + f_2^2(y_0) \neq 0$. *Тоді в деякому околі точки* $x = x_0$ *існує єдиний розв'язок* $y = y(x)$ *задачі Коші (1),(4) і його можна знайти за формулою*

$$\int_{x_0}^{x} f_1(x)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} f_2(y)\mathrm{d}\,y = 0. \qquad \textbf{(5)}$$

Доведення. Нехай, наприклад, $f_2(y_0) \neq 0$. Позначимо ліву частину рівності (5) через $F(x, y)$. Тоді

$$F(x, y) = 0. \qquad \textbf{(6)}$$

Функція $F(x, y)$ задовольняє всі умови теореми про існування неявної функції $y = y(x)$, яка визначається рівнянням (6). Справді:

1. Можна вказати такий прямокутник D:

$$|x - x_0| \leq A,\ \ |y - y_0| \leq B,\ \ A, B > 0,$$

з центром у точці (x_0, y_0), в якому функція $F(x, y)$ буде визначена і неперервна разом з частинними похідними F'_x і F'_y. Для цього досить взяти числа A і B такими малими, щоб функції $f_1(x)$ і $f_2(y)$ були визначеними і неперервними на відрізках $|x - x_0| \leq A$ і $|y - y_0| \leq B$ відповідно, після чого неперервність $F(x, y)$ випливає з її вигляду. Похідні F'_x і F'_y існують і неперервні в прямокутнику D, бо $F'_x = f_1(x)$, $F'_y = f_2(y)$, а $f_1(x)$ і $f_2(y)$ неперервні для всіх значень x і y (за припущенням);

2. $F(x_0, y_0) = 0$ (це випливає з (5));

3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ (бо $F'_y(x_0, y_0) = f_2(y_0)$, а $f_2(y_0) \neq 0$).

Тому існує єдина функція $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна на деякому відрізку $|x - x_0| \leq a$, $0 < a \leq A$, для якої $F\left(x, y(x)\right) \equiv 0$ на цьому відрізку, а також $y(x_0) = y_0$.

Функція $y = y(x)$ є розв’язком рівняння (1). Це випливає з того, що згідно з правилом диференціювання неявної функції маємо

$$y'(x) \equiv -\frac{F'_x\left(x, y(x)\right)}{F'_y\left(x, y(x)\right)} \quad \Rightarrow \quad y'(x) \equiv -\frac{f_1(x)}{f_2(y(x))} \quad \Rightarrow$$

$$f_1(x)\,\mathrm{d}\,x + f_2\left(y(x)\right)\mathrm{d}\left(y(x)\right) \equiv 0,$$

а це й означає, що $y = y(x)$ є розв’язком задачі Коші (1), (4). Цей розв’язок єдиний. ►

До рівняння з відокремленими змінними зводиться рівняння вигляду

$$f(x)\,g(y)\,\mathrm{d}\,x + f_1(x)\,g_1(y)\,\mathrm{d}\,y = 0, \tag{7}$$

яке називають ***рівнянням з відокремлюваними змінними*****.** Вважатимемо, що функції $f(x)$, $f_1(x)$, $g(y)$, $g_1(y)$ неперервні для всіх x, y з області визначення рівняння (7).

Для тих (x, y), де $g(y) \cdot f_1(x) \neq 0$, поділимо на цей добуток обидві частини рівняння (7). Одержуємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}\mathrm{d}\,x + \frac{g_1(y)}{g(y)}\mathrm{d}\,y = 0,$$

загальний інтеграл якого можна записати у вигляді

$$\int \frac{f(x)}{f_1(x)}\mathrm{d}\,x + \int \frac{g_1(y)}{g(y)}\mathrm{d}\,y = C$$

або

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f(x)}{f_1(x)}\mathrm{d}\,x + \int_{y_0}^{y} \frac{g_1(y)}{g(y)}\mathrm{d}\,y = C$$

де $f_1(x_0) \neq 0,\ g(y_0) \neq 0$.

Якщо $f^2(x_0) + g_1^2(y_0) \neq 0$, то одержуємо розв’язок задачі Коші з початковими даними x_0, y_0:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{f(x)}{f_1(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}\frac{g_1(y)}{g(y)}\,\mathrm{d}y=0.$$

Відокремлюючи змінні, ми поділили обидві частини рівняння (7) на добуток $g(y)\,f_1(x)$. Розв'язки $y=b$, де $g(b)=0$, або $x=a$, де $f_1(a)=0$, можуть бути особливими.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $x\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x+y\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}y=0$ та знайти інтегральну криву, яка проходить через точку $(0,1)$.

Розв'язання. Відокремлюючи змінні, одержуємо

$$\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=0\quad(y\neq\pm1)\quad\Rightarrow\quad\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=C\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}}=C\quad\Rightarrow\quad\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-y^2}=C.$$

Остання формула визначає загальний інтеграл заданого рівняння.

Розв'язки $y=\pm1$ є особливими, бо їх не можна одержати із загального інтегралу при жодному значенні сталої C. Через точку $(0,1)$ проходять інтегральні криві $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$ та $y=1$. ■

До рівнянь з відокремлюваними змінними зводяться рівняння вигляду

$$y'=f(ax+by+c),\tag{8}$$

де a, b, c – деякі числа. Справді, якщо виконати заміну

$$z=ax+by+c,$$

де $z=z(x)$ – нова функція, то

$$y=\frac{z-ax-by}{b},\qquad y'=\frac{z'-a}{b},$$

а тому рівняння (8) набуває вигляду

$$z'=bf(z)+a,$$

тобто є рівнянням з відокремлюваними змінними. Якщо $bf(z)+a\neq0$, то загальний інтеграл останнього рівняння має вигляд

$$\int \frac{\mathrm{d}\, z}{bf(z)+a} = x + C.$$

Якщо $\Phi(z)$ – первісна функції $\dfrac{1}{b\, f(z)+a}$, то $\Phi(z) = x + C$, тобто приходимо до загального інтеграла $\Phi(ax+by+c) - x = C$.

Якщо $b\, f(z)+a=0$, то рівняння (8) матиме ще розв'язки вигляду $ax+by+c=\mathrm{const}$.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $y' = \cos(x+y)$.

Розв'язання. Нехай $z = x+y$. Тоді $z' = 1+y'$ і для знаходження функції z одержуємо рівняння $z' = 1+\cos z$. Якщо $1+\cos z \neq 0$, то

$$\frac{\mathrm{d}\, z}{1+\cos z} = \mathrm{d}\, x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}\, z}{1+\cos z} = x + C \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\, z}{2\cos^2(z/2)} = x + C \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\frac{z}{2} = x + C.$$

Отже, загальним інтегралом є

$$\mathrm{tg}\frac{x-y}{2} - x = C.$$

Якщо $1+\cos z = 0$, тобто $z = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, то $y = -x + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Ці розв'язки є особливими, бо їх не можна отримати з загального розв'язку при жодному значенні сталої C. ■

2. Однорідні рівняння. Функцію $f(x,y)$ називають ***однорідною виміру m***, якщо для довільних x, y і t

$$f(tx,ty) = t^m f(x,y). \tag{9}$$

Наприклад, функції

$$\frac{2x-y}{x+5y},\ \sqrt[3]{x^3+2x^2y+y^3},\ x^{k-1}y + y^{k-2}x^2$$

є однорідними вимірів 0, 1, k відповідно.

Підставимо в (9) $t = \dfrac{1}{x}$. Тоді

$$f\left(1, y/x\right) = \frac{1}{x^m} \cdot f(x, y),$$

звідки випливає, що однорідна функція $f(x, y)$ задовольняє співвідношення

$$f(x, y) = x^m \cdot f\left(1, y/x\right). \quad \textbf{(10)}$$

Диференціальне рівняння першого порядку

$$M(x, y)\,\mathrm{d}\,x + N(x, y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \quad \textbf{(11)}$$

називають ***однорідним***, якщо функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – однорідні однакового виміру m (m може бути довільним дійсним числом).

Покажемо, що однорідне рівняння (11) завжди можна записати у вигляді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad \textbf{(12)}$$

Справді, використовуючи формулу (10), одержуємо:

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{x^m \cdot M\left(1, \dfrac{y}{x}\right)}{x^m \cdot N\left(1, \dfrac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1, \dfrac{y}{x}\right)} \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

З формули (12) випливає, що через початок координат не проходить жодна інтегральна крива однорідного рівняння (інтегральні криві можуть лише примикати до точки (0,0)).

З (12) випливає також, що однорідне рівняння може бути записане у вигляді

$$y' = f(x, y),$$

де $f(x, y)$ – однорідна функція виміру 0.

Покажемо, що однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Для цього зробимо заміну

$$y = zx,$$

де $z = z(x)$ – нова шукана функція. Тоді

$$\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}(zx) = x\,\mathrm{d}\,z + z\,\mathrm{d}\,x$$

і рівняння (11) набирає вигляду

$$M(x,zx)\,\mathrm{d}x+N(x,zx)\cdot\left(z\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}z\right)=0. \qquad \textbf{(13)}$$

Оскільки функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ – однорідні виміру m, то згідно з (10) маємо

$$M(x,zx)=x^m\cdot M(1,z), \qquad N(x,zx)=x^m\cdot N(1,z).$$

Враховуючи ці формули, рівняння (13) можна записати тепер так:

$$x^m\cdot M(1,z)\,\mathrm{d}x+x^m N(1,z)\cdot(z\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}z)=0$$

або, після скорочення x^m $(x\neq 0)$ і перегрупування доданків, у вигляді

$$\left(M(1,z)+z\cdot N(1,z)\right)\mathrm{d}x+x\cdot N(1,z)\,\mathrm{d}z=0. \qquad \textbf{(14)}$$

Інтегруючи рівняння (14) (це рівняння з відокремлюваними змінними), одержуємо:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{N(1,z)}{M(1,z)+z\cdot N(1,z)}\mathrm{d}z=0 \quad \Rightarrow$$

$$\ln|x|+\int\frac{N(1,z)\,\mathrm{d}z}{M(1,z)+z\cdot N(1,z)}=\ln|C| \quad \Rightarrow$$

$$x=Ce^{\varphi(z)}, \qquad \textbf{(15)}$$

де

$$\varphi(z)=-\int\frac{N(1,z)\,dz}{M(1,z)+z\cdot N(1,z)}.$$

Замінивши в (15) z на y/x, одержимо загальний інтеграл однорідного рівняння (11) у вигляді

$$x=Ce^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Однорідне рівняння може мати особливі розв'язки, адже відокремлюючи змінні у рівнянні (14), можна втратити розв'язки вигляду $z=a$, де a – корінь рівняння

$$M(1,z)+z\cdot N(1,z)=0.$$

Підставляючи ці значення z у формулу $y=xz$, одержуємо, що півпрямі $y=ax$, $x\neq 0$, які примикають до початку координат, є розв'язками однорідного рівняння. Ці розв'язки можуть бути особливими. Особливими розв'язками можуть бути також півосі Oy: $x=0$ $(y\neq 0)$.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Розв'язання. Оскільки права частина рівняння є однорідною функцією виміру 0, то це рівняння є однорідним. Зробимо заміну $y=zx$. Тоді $y'=z'x+z$ і для знаходження функції $z=z(x)$ одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$z'=\frac{1}{x}\left(\frac{z+z^3}{1-z^2}\right).$$

Зінтегруємо його:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\left(\frac{z+z^3}{1-z^2}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{1-z^2}{z+z^3}dz=\frac{dx}{x} \quad (z\neq 0) \quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{(1-z^2)dz}{z(1+z^2)}-\int\frac{dx}{x}=C \quad\Rightarrow\quad -\ln(z^2+1)+\ln|z|-\ln|x|=-\ln|C| \quad\Rightarrow$$

$$\frac{x(z^2+1)}{z}=C.$$

Відокремлюючи змінні, був втрачений розв'язок $z=0$, тобто $y=0$. Отже, повертаючись до функції y, одержує всі розв'язки вихідного рівняння:

$$x^2+y^2=Cy, \quad y=0. \blacksquare$$

Зауваження. Якщо функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ додатно однорідні функції одного й того ж виміру m, тобто рівності

$$M(tx,ty)=t^mM(x,y), \quad N(tx,ty)=t^mN(x,y).$$

виконуються тільки для всіх додатних значеннях t, то рівняння (11) називають ***додатно однорідним***. Воно інтегрується так само, як і однорідне рівняння.

Лекція 4.
Деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегрованих у квадратурах (частина 1).

План.

1. Найпростіші рівняння, звідні до однорідних.
2. Узагальнено однорідні рівняння.
3. Лінійні рівняння.

1. Найпростіші рівняння, звідні до однорідних. Розглянемо рівняння

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \qquad \textbf{(1)}$$

де $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2, b_2, c_2$ – деякі числа, $f(u)$ – неперервна функція свого аргумента. Вважаємо, що $c_1^2+c_2^2 \neq 0$, тобто хоч одне з чисел $c_1,\ c_2$ не дорівнює нулю, бо інакше рівняння (1) є однорідним (його права частина буде однорідною функцією виміру 0).

Розглянемо два випадки.

Випадок 1: $\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Зробимо заміну змінних

$$x=\xi+\alpha,\ \ y=\eta+\beta, \qquad \textbf{(2)}$$

де ξ, η – нові змінні, α, β – поки що довільні сталі. Якщо підставити (2) в рівняння (1) та врахувати, що

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\eta+\beta)}{\mathrm{d}(\xi+\alpha)} = \frac{\mathrm{d}\eta+\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\xi+\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi},$$

то одержимо рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a_2\xi+b_2\eta+a_2\alpha+b_2\beta+c_2}\right). \qquad \textbf{(3)}$$

Виберемо тепер сталі $\alpha,\ \beta$ так, щоб вони були розв'язком системи

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0, \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0. \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Оскільки за припущенням $\Delta \neq 0$, то неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь (4) має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера.

Враховуючи (4), з (3) маємо однорідне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right). \qquad \textbf{(5)}$$

Зінтегрувавши (5) за допомогою заміни $\eta = z\xi$, де $z = z(\xi)$ – нова функція, і повернувшись до змінних x і y за формулами $\xi = x - \alpha$, $\eta = y - \beta$, які одержуємо з (2), знайдемо загальний інтеграл рівняння (1).

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $y' = \dfrac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$.

Розв'язання. Оскільки $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, $\Delta \neq 0$, то сталі α, β можна однозначно знайти з системи $\begin{cases} \alpha + 2\beta - 3 = 0, \\ 2\alpha + \beta - 3 = 0. \end{cases}$ Легко перевірити, що $\alpha = \beta = 1$. Після заміни $x = \xi + 1$, $y = \eta + 1$ одержуємо однорідне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + 2\eta}{2\xi + \eta}.$$

Зробимо заміну $\eta = z\xi$. Далі маємо:

$$z'\xi + z = \frac{1 + 2z}{2 + z} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 + z}{1 - z^2}dz = \frac{d\xi}{\xi} \quad (z \neq \pm 1,\ \xi \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$2\int \frac{dz}{1 - z^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1 - z^2)}{1 - z^2} = \int \frac{d\xi}{\xi} \quad \Rightarrow$$

$$-\ln\left|\frac{z - 1}{z + 1}\right| - \frac{1}{2}\ln|1 - z^2| = \ln|\xi| + C \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(z - 1)^3}{z + 1} = \frac{C}{\xi^2} \quad \Rightarrow \quad z + 1 = C\xi^2(1 - z)^3.$$

Оскільки $z = \eta/\xi$, то

$$\eta/\xi+1=C\xi^2(1-\eta/\xi)^3 \quad \Rightarrow \quad \xi+\eta=C(\xi-\eta)^3.$$

Враховуючи, що $\xi=x-1$, $\eta=y-1$, одержуємо загальний інтеграл

$$x+y-2=C(x-y)^3\ .$$

З'ясуємо можливість появи особливих розв'язків. Якщо $z=1$, то $\eta=\xi$, $\xi\neq 0$, тобто $y=x$, $x\neq 1$. Якщо $z=-1$, то $\eta=-\xi$, $\xi\neq 0$, тобто $y=-x+2$, $x\neq 1$. Перший розв'язок особливий, а другий – частинний. І нарешті, $\xi=0$, тобто $x=1$, не є розв'язком рівняння. ■

Випадок 2: $\boldsymbol{\Delta=0}$. Тоді $a_1b_2-a_2b_1=0$ або $a_1/a_2=b_1/b_2$. Якщо позначити $k=a_1/a_2=b_1/b_2$, то $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$, а тому рівняння (1) можна записати у вигляді

$$y'=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\equiv f_1(a_2x+b_2y). \qquad \textbf{(6)}$$

Рівняння (6) – це рівняння вигляду $y'=f(ax+by+c)$, яке вивчалось на лекції 3, і інтегрується за допомогою заміни

$$z=a_2x+b_2y\,.$$

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$(x+y+1)\,\mathrm{d}x+(2x+2y-1)\,\mathrm{d}y=0.$$

Розв'язання. Задане рівняння легко записати у вигляді (1), але робити цього не обов'язково. Оскільки $\Delta=0$, то виконаємо заміну $z=x+y$. Тоді $\mathrm{d}y=\mathrm{d}z-\mathrm{d}x$, і підставляючи у задане рівняння, одержуємо:

$$(z+1)\,\mathrm{d}x+(2z-1)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}x)=0 \quad\Rightarrow\quad (2-z)\,\mathrm{d}x+(2z-1)\,\mathrm{d}z=0 \quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2z-1}{z-2}\,\mathrm{d}z \quad (z\neq 2) \quad\Rightarrow\quad \int\mathrm{d}x=\int\frac{2z-4}{z-2}\,\mathrm{d}z+3\int\frac{\mathrm{d}z}{z-2} \quad\Rightarrow$$

$$x=2z+3\ln|z-2|+C\,.$$

Повертаючись до змінних x, y за формулою $z=x+y$, знаходимо загальний інтеграл

$$x+2y+3\ln|x+y-2|=C\,.$$

Якщо $z=2$, то $y=2-x$. Цей розв'язок є особливим. ■

2. Узагальнено однорідні рівняння. Рівняння

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x+N(x,y)\,\mathrm{d}\,y=0 \qquad \textbf{(7)}$$

називають ***узагальнено однорідним,*** якщо існує таке число k, що ліва частина рівняння є однорідною функцією величин x, y, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ за умови, що вони є величинами відповідно першого, k-го, нульового і $(k-1)$-го вимірів, тобто якщо рівність

$$M(tx,t^k y)\,\mathrm{d}\,x+N(tx,t^k y)t^{k-1}\,\mathrm{d}\,y=t^m\cdot\left(M(x,y)\,\mathrm{d}\,x+N(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right) \qquad \textbf{(8)}$$

виконується для всіх t тотожно відносно x, y, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ (при $k=1$ маємо означення однорідного рівняння).

З (8) випливає, що для всіх t виконуються тотожності:

$$M(tx,t^k y)=t^m\cdot M(x,y),\qquad N(tx,t^k y)=t^{m-k+1}\cdot N(x,y). \qquad \textbf{(9)}$$

Якщо в (9) підставити $t=1/x$, то

$$M\left(1,\frac{1}{x^k}\cdot y\right)=\frac{1}{x^m}\cdot M(x,y),\quad N\left(1,\frac{1}{x^k}\cdot y\right)=\frac{1}{x^{m-k+1}}\cdot N(x,y),$$

звідки знаходимо, що

$$M(x,y)=x^m\cdot M\left(1,y/x^k\right),\quad N(x,y)=x^{m-k+1}\cdot N\left(1,y/x^k\right). \qquad \textbf{(10)}$$

Покажемо, що узагальнено однорідне рівняння для будь-якого $k\neq 0$ зводиться до однорідного рівняння, якщо зробити заміну

$$y=z^k, \qquad \textbf{(11)}$$

де $z=z(x)$ – нова шукана функція. Тоді

$$\mathrm{d}\,y=\mathrm{d}(z^k)=kz^{k-1}\,\mathrm{d}\,z$$

і рівняння (7) з урахуванням формул (10) набирає вигляду

$$x^m\cdot M\left(1,z^k/x^k\right)\mathrm{d}\,x+k\,x^{1-k+m}z^{k-1}\cdot M\left(1,z^k/x^k\right)\mathrm{d}\,z=0 \quad\Rightarrow$$

$$M\left(1,z^k/x^k\right)\mathrm{d}\,x+k\left(z/x\right)^{k-1}\cdot M\left(1,z^k/x^k\right)\mathrm{d}\,z=0. \qquad \textbf{(12)}$$

Рівняння (12) однорідне, бо воно не змінюється, якщо замінити x і z на tx і tz відповідно. Таким чином, узагальнено однорідне рівняння за допомогою заміни (11) зводиться до однорідного рівняння (12).

Зауважимо, що рівняння (12) можна відразу звести до рівняння з відокремлюваними змінними, якщо зробити заміну

$$u = \left(\frac{z}{x}\right)^k.$$

А враховуючи (11), робимо висновок, що узагальнено однорідне рівняння за допомогою заміни

$$u = \frac{y}{x^k} \text{ (або } y = ux^k\text{)},$$

де $u = u(x)$ – нова функція, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння $4xy\,\mathrm{d}x + (y - x^2)\,\mathrm{d}y = 0$.

Розв'язання. Замінимо x, y, $\mathrm{d}y$ відповідно на tx, $t^k y$, $t^{k-1}\,\mathrm{d}y$. Тоді

$$4tx \cdot t^k y\,\mathrm{d}x + (t^k y - t^2 x^2) \cdot t^{k-1}\,\mathrm{d}y = 0 \;\Rightarrow$$

$$4t^{k+1} xy\,\mathrm{d}x + (t^{2k-1} y - t^{k+1} x^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Щоб це рівняння не змінилося, число k повинно бути таким, щоб $k + 1 = 2k - 1 = k + 1$, звідки $k = 2$. Отже, задане рівняння є узагальнено однорідним, і для зведення його до рівняння з відокремлюваними змінними зробимо заміну $y = zx^2$ (тоді $\mathrm{d}y = x^2\,\mathrm{d}z + 2xz\,\mathrm{d}x$). Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$4x^3 z\,\mathrm{d}x + (zx^2 - x^2)(x^2\,\mathrm{d}z + 2xz\,\mathrm{d}x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{z-1}{2z(z+1)}\,\mathrm{d}z = 0 \;\Rightarrow$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{2}\left(\int \frac{2\,\mathrm{d}z}{z+1} - \int \frac{\mathrm{d}z}{z}\right) + C \;\Rightarrow$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\big(2\ln|z+1| - \ln|z|\big) = \ln|C| \;\Rightarrow\; \ln\left|\frac{x(z+1)}{\sqrt{z}}\right| = \ln|C| \;\Rightarrow$$

$$x^2 (z+1)^2 = Cz.$$

Повертаючись до змінних x, y за формулою $z = y/x^2$, записуємо загальний інтеграл у вигляді

$$(y + x^2)^2 = Cy. \;\blacksquare$$

3. Лінійні рівняння. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{13}$$

називають ***лінійним***. Вважатимемо, що функції $p(x)$, $q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a,b). Тоді з теореми Пікара та зауваження до неї (лекція 2) випливає, що лінійне рівняння (13) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, де $x_0 \in (a,b)$, а y_0 можна вибрати довільно, тобто через довільну точку (x_0, y_0) смуги $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ проходить єдина інтегральна крива рівняння (13). Це випливає з того, що права частина $f(x,y) = q(x) - p(x)y$ і частинна похідна $f'_x(x,y) = -p(x)$ є неперервними функціями в цій області. Отже, лінійне рівняння особливих розв'язків не має.

Якщо в (13) $q(x) \equiv 0$ для всіх $x \in (a,b)$, то воно має вигляд

$$y' + p(x)y = 0 \tag{14}$$

і його називають ***лінійним однорідним***[1)], а якщо $q(x)$ тотожно не дорівнює нулю, то ***лінійним неоднорідним***.

Покажемо, що лінійне неоднорідне рівняння інтегрується у квадратурах. Розглянемо два методи інтегрування лінійних рівнянь (з третім методом ознайомимось на одній з наступних лекцій).

***Метод варіації довільної сталої* (*метод Лагранжа*[2)]).** Зінтегруємо спочатку лінійне однорідне рівняння (14), яке водночас є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{y} + p(x)\,\mathrm{d}\,x = 0 \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \ln|y| + \int p(x)\,\mathrm{d}\,x = \ln|C| \quad \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}, \tag{15}$$

де C – довільна стала. Формула (15) описує всі розв'язки рівняння

[1)] Не потрібно плутати лінійне однорідне рівняння з однорідним рівнянням, яке розглядалося на лекції 3. Термін “однорідне” стосовно лінійного рівняння використовується тому, що вираз $y' + p(x)y$ є однорідною функцією першого виміру відносно y і y'.

[2)] ЛАГРАНЖ Жозеф Луї (1736-1813), французький математик і механік.

(14), бо розв'язок $y=0$, який міг бути втраченим при відокремленні змінних, міститься у формулі загального розв'язку (якщо $C=0$).

Розв'язок рівняння (13) шукатимемо у вигляді (15), замінивши сталу C неперервно диференційовною функцією $C(x)$, тобто як

$$y=C(x)\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \qquad \textbf{(16)}$$

Для знаходження функції $C(x)$ підставимо (16) у (13). Тоді

$$C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x) \quad \Rightarrow$$

$$C'(x)=q(x)\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad C(x)=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C.$$

Підставляючи знайдене значення $C(x)$ у (16), одержуємо формулу для загального розв'язку рівняння (13):

$$y=\left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \qquad \textbf{(17)}$$

Метод підстановки (метод Бернуллі[1]). Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (13) шукаємо у вигляді

$$y=uv, \qquad \textbf{(18)}$$

де $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – поки що довільні функції. Підставляючи (18) у (13), одержуємо:

$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x) \quad \Rightarrow \quad u'v+u\left(v'+p(x)v\right)=q(x). \qquad \textbf{(19)}$$

Користуючись довільністю функції v, виберемо її такою, щоб

$$v'+p(x)v=0,$$

звідки знаходимо, що

$$v=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Знайдену функцію v при $C=1$ підставимо в (19). Тоді

$$u'\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x) \quad \Rightarrow \quad u=\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C.$$

Оскільки $y=uv$, то для загального інтеграла лінійного неоднорідного рівняння (13) вдруге одержуємо формулу (17).

---

[1] БЕРНУЛЛІ Йоганн (1667-1748), швейцарський математик.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння $y'-2\dfrac{y}{x}=x.$

Розв'язання. Метод Лагранжа. Загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння

$$y'-2y/x=0$$

є $y=Cx^2$. Тому розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді $y=C(x)x^2$. Далі маємо:

$$C'(x)x^2+C(x)\cdot 2x-\frac{2}{x}C(x)x^2=x \quad\Rightarrow\quad C'(x)=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow$$

$$C'(x)=\ln|x|+C \quad\Rightarrow\quad y=x^2\cdot\left(\ln|x|+C\right).$$

Метод Бернуллі. Нехай $y=uv$, тоді

$$u'v+uv'-2uv/x=x.$$

Складемо систему

$$\begin{cases} v'-2v/x=0, \\ u'v=x. \end{cases}.$$

З першого рівняння знаходимо $v=Cx^2$. Покладемо $C=1$ і підставимо функцію u у друге рівняння. Тоді

$$u'=1/x \quad\Rightarrow\quad u=\ln|x|+C \quad\Rightarrow\quad y=x^2\left(\ln|x|+C\right). \blacksquare$$

Зауваення. Наведені методи розв'язування лінійних рівнянь можна застосовувати також до рівнянь вигляду

$$\left(p(y)x+q(y)\right)\cdot y'=1,$$

якщо y прийняти за незалежну змінну, а x – за функцію цієї змінної. Наприклад, рівняння $(y^2+2x)\,y'=y$, в якому $y=y(x)$, є нелінійним. Однак, якщо записати його у вигляді

$$y'=\frac{y}{y^2+2x} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x'}=\frac{y}{y^2+2x} \quad\Rightarrow\quad x'-\frac{2}{y}x=y,$$

то маємо лінійне рівняння з прикладу 4 (якщо x – шукана функція змінної y).

Наведемо деякі ***властивості розв'язків лінійного неоднорідного рівняння***.

Властивість 1. *Загальний розв'язок (17) лінійного неоднорідного рівняння (13) є сумою двох доданків:*

$$Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} -$$

загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (14) і

$$e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x -$$

частинного розв'язку неоднорідного рівняння (13) (його одержуємо з загального розв'язку, якщо $C=0$*).*

Властивість 2. *Якщо відомий один частинний розв'язок* $y_1(x)$ *рівняння (13), то загальний розв'язок цього рівняння можна одержати за допомогою однієї квадратури за формулою*

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}. \qquad \textbf{(20)}$$

Справді, оскільки $y_1(x)$ справджує тотожність

$$y_1' + p(x)\,y_1 = q(x),$$

то віднімаючи обидві частини цієї тотожності від відповідних частин рівняння (13), одержуємо:

$$\left(y' - y_1'\right) + p(x)\left(y - y_1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (y - y_1)' + p(x)(y - y_1) = 0.$$

Останнє рівняння – рівняння з відокремлюваними змінними, інтегруючи яке, легко одержуємо формулу (20).

Властивість 3. *Якщо відомі два не пропорційні між собою частинні розв'язки* $y_1(x)$ *та* $y_2(x)$ *рівняння (13), тобто*

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \mathrm{const},$$

то його загальний розв'язок можна одержати без квадратур за формулою

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1). \qquad \textbf{(21)}$$

Формулу (21) вміти довести ***самостійно***.

Лекція 5.
Деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегрованих у квадратурах (частина 2).

План.

1. Найпростіші рівняння, звідні до лінійних рівнянь першого порядку.
2. Рівняння Бернуллі.
3. Рівняння, звідні до рівняння Бернуллі.
4. Рівняння у повних диференціалах.

1. Найпростіші рівняння, звідних до лінійних рівнянь першого порядку. До лінійних рівнянь першого порядку, які вивчались на лекції 4, зводяться декілька типів інших диференціальних рівнянь.

I. Диференціальне рівняння

$$f'(y)\,y' + p(x)\,f(y) = q(x) \qquad \textbf{(1)}$$

після заміни $z = f(y)$ $\left(\text{тоді } z' = f'(y)\,y'\right)$ зводиться до лінійного рівняння

$$z' + p(x)\,z = q(x)$$

відносно функції $z = z(x)$.

II. Рівняння

$$y' + p(x) = q(x)\,e^{ny} \qquad \textbf{(2)}$$

легко зводиться до лінійного, якщо спочатку помножити обидві його частини на ne^{-ny}:

$$ne^{-ny}\,y' + np(x)\,e^{-ny} = nq(x),$$

а потім зробити заміну $z = e^{-ny}$ (тоді $z' = -n\,e^{-ny}\,y'$). У результаті одержуємо лінійне рівняння

$$z' - n\,p(x)z = -n\,q(x).$$

2. Рівняння Бернуллі та звідні до нього. Рівняння вигляду

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^m \quad (m \neq 0,\ \ m \neq 1), \qquad \textbf{(3)}$$

називають ***рівнянням Бернуллі***[1]. Випадки $m=0$ та $m=1$ не розглядаємо, бо для цих значень m рівняння (3) є лінійним. Вважаємо, що функції $p(x)$ і $q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a,b).

Перший метод – *метод варіації довільної сталої.* Зінтегруємо спочатку рівняння

$$y' + p(x)y = 0.$$

Загальним розв'язком цього рівняння, як легко показати, є

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Розв'язок рівняння Бернуллі шукатимемо у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \tag{4}$$

де $C(x)$ – деяка функція. Підставляючи (4) у (3), одержуємо:

$$C'(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} =$$

$$= q(x)C^m(x)e^{-m\int p(x)\,\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow$$

$$C'(x) = q(x)C^m(x)e^{(1-m)\int p(x)\,\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}C}{C^m} = q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \ \ \big(C(x) \neq 0\big) \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{\mathrm{d}C}{C^m} = \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{C^{1-m}(x)}{1-m} = \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$C(x) = \left((1-m)\int q(x)\cdot e^{(1-m)\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у (4), одержуємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left((1-m)\int q(x)\cdot e^{(1-m)\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

---

[1] БЕРНУЛЛІ Якоб (1654-1705) – швейцарський математик.

З'ясуємо можливість появи особливих розв'язків. Якщо $C(x)=0$, то згідно з (4) $y=0$. Функція $y=0$ для $m\le 0$ не є розв'язком рівняння Бернуллі. Якщо $0<m<1$ або $m>1$, то розв'язок $y=0$ не міститься в формулі загального розв'язку, а тому є особливим.

Другий метод – *метод підстановки*. Розв'язок рівняння Бернуллі шукаємо у вигляді

$$y=uv, \tag{5}$$

де $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – довільні функції. Підставимо (5) в (3):

$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x)(uv)^m \quad \Rightarrow \quad u'v+u\big(v'+p(x)v\big)=q(x)\cdot u^m v^m .$$

Виберемо функцію такою, щоб $v'+p(x)v=0$, звідки

$$v=e^{-\int p(x)dx}.$$

Тоді для визначення функції u одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$u'=q(x)u^m e^{-(m-1)\int p(x)dx},$$

яке легко інтегрується.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $y'-2y/x=-xy^3$.

Розв'язання. *Метод варіації довільної сталої.* Зінтегруємо рівняння $y'-2y/x=0$:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{2y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,y}{y}=2\frac{\mathrm{d}\,x}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{\mathrm{d}\,y}{y}=2\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x}+C \quad \Rightarrow$$

$$\ln|\,y\,|=2\ln|\,x\,|+C \quad \Rightarrow \quad y=Cx^2 .$$

Розв'язок заданого рівняння Бернуллі шукаємо у вигляді $y=C(x)x^2$. Підставляючи у задане рівняння, одержуємо:

$$C'(x)x^2+2C(x)x-2C(x)x=-C^3(x)x^7 \quad \Rightarrow \quad C'(x)=-C^3(x)x^5 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\,C(x)}{C^3(x)}=-x^5\,\mathrm{d}\,x \quad \big(C(x)\ne 0\big) \quad \Rightarrow \quad \frac{C^{-2}(x)}{-2}=-\frac{x^6}{6}+C \quad \Rightarrow$$

$$C(x)=\pm\sqrt{\frac{3}{x^6+C}} \quad \Rightarrow \quad y=\pm x^2\cdot\sqrt{\frac{3}{x^6+C}} \quad \Rightarrow \quad y=\pm\frac{\sqrt{3}x^2}{\sqrt{x^6+C}}.$$

Якщо $C(x)=0$, то $y=0$ – особливий розв’язок.

Метод підстановки. Нехай $y=uv$, тоді

$$u'v+uv'-2\frac{uv}{x}=-xu^3v^3 \quad\Rightarrow\quad u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x}\right)=-xu^3v^3 \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} v'-2\dfrac{v}{x}=0, \\ u'v=-xu^3v^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{v}=2\dfrac{\mathrm{d}x}{x} \ \ (v\neq 0), \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{u^3}=-xv^2\,\mathrm{d}x \ \ (u\neq 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=x^2, \\ \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{u^3}=-\int x^5\,\mathrm{d}x+C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v=x^2, \\ \dfrac{u^{-2}}{-2}=-\dfrac{x^6}{6}+C \end{cases} \Rightarrow \quad v=x^2,\ \ u^2=\frac{3}{x^6+C} \quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{\sqrt{3}x^2}{\sqrt{x^6+C}}.$$

Якщо $v=0$ або $u=0$, то $y=0$ – особливий розв’язок. ■

Зауваження. Наведені методи розв’язування рівняння Бернуллі можна застосовувати також до рівнянь вигляду

$$\left(p(y)x+q(y)x^m\right)\cdot y'=1,$$

якщо y прийняти за незалежну змінну, а x – за функцію цієї змінної. Наприклад, якщо рівняння $(2x-y^2x^3)\cdot y'=y$ записати у вигляді

$$y'=\frac{y}{2x-y^2x^3} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x'}=\frac{y}{2x-y^2x^3} \quad\Rightarrow\quad x'-\frac{2}{y}x=-yx^3,$$

то для знаходження $x=x(y)$ маємо рівняння Бернуллі, яке розв’язане у прикладі 1.

3. Рівняння, звідні до рівняння Бернуллі. До рівняння Бернуллі зводиться рівняння вигляду

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y+R(x,y)(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=0, \qquad \textbf{(6)}$$

де $M(x,y)$, $N(x,y)$, $R(x,y)$ – однорідні функції вимірів m, m, n відповідно. Рівняння (6) називають ***рівнянням Мiндiнга-Дарбу***[1]).

Беручи до уваги, що $M(x,y)$, $N(x,y)$, $R(x,y)$ є однорідними

---

[1]) МІНДІНГ Фердінанд Готлібович (1806-1885) – російський математик.
ДАРБУ (Darboux) Жан Гастон (1842-1917) – французький математик.

функціями, після заміни $y = ux$, де u вважаємо незалежною змінною, одержуємо

$$x^m \cdot \big(M(1,u)\,\mathrm{d}x + N(1,u)\cdot(x\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}x) \big) + x^{n+2}R(1,u)\,\mathrm{d}u = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} + \frac{N}{M+uN}x = -\frac{R}{M+uN}x^{n-m+2}.$$

Це є рівняння Бернуллі (якщо $n = m-2$, то лінійне рівняння), способи розв'язування якого викладено вище.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$x^3(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) + (x-y)(\mathrm{d}dy - y\,\mathrm{d}x) = 0.$$

Розв'язання. Виконаємо заміну $y = ux$. Тоді $\mathrm{d}y = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u$,

$$x^3(\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u) + (x-ux)x^2\,\mathrm{d}u = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} + \frac{x}{u+1} = \frac{u-1}{u+1} \qquad (u \neq -1).$$

Розв'язуючи лінійне відносно функції $x = x(u)$ за формулою (17) з лекції (4), одержуємо

$$x = \frac{C}{u+1} + \frac{(u-1)^2}{2(u+1)} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{Cy}{y+x} + \frac{y(y-x)^2}{2x^2(y+x)} \quad \big(y \neq -x,\ x \neq 0\big) \quad \Rightarrow$$

$$y + x - \frac{(y-x)^2}{2x^2} = C.$$

Функції $y = -x$ і $x = 0$ є особливими розв'язками. ■

До рівняння Бернуллі за певних умов зводиться також ***рівняння Ріккаті***[1]. Так називають рівняння вигляду

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \tag{7}$$

де функції $P(x), Q(x), R(x)$ неперервні на деякому інтервалі $a < x < b$. Зауважимо, що рівняння (7) містить у собі як часткові випадки вже розглянуті раніше рівняння: при $P(x) \equiv 0$ одержуємо лінійне рівняння, при $R(x) \equiv 0$ – рівняння Бернуллі.

---

[1] РІККАТІ Джакопо Франческо (1676-1754) – італійський математик, інженер-будівельник.

Розглянемо деякі випадки інтегровності в квадратурах рівняння Ріккаті.

1. Якщо P, Q і R – сталі, то рівняння Ріккаті є рівнянням з відокремлюваними змінними і, отже, його загальний інтеграл знаходиться у квадратурах (навіть виражається через елементарні функції).

2. Рівняння вигляду $y' = \varphi(x)\cdot(ay^2 + by + c)$, де a, b і c – сталі і $a^2 + c^2 \neq 0$, є рівнянням з відокремлюваними змінними і інтегрується через елементарні функції.

3. Рівняння вигляду $y' = a\dfrac{y^2}{x^2} + b\dfrac{y}{x} + c$, $a^2 + c^2 \neq 0$, є однорідним рівнянням інтегрується через елементарні функції.

4. Рівняння $y' = a\dfrac{y^2}{x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{x} + c$, $a^2 + c^2 \neq 0$, зводиться до рівняння з п.2, якщо зробити підстановку $y = \sqrt{z}x$ (***показати це самостійно!***).

5. Рівняння Ріккаті $y' = ay^2 + \dfrac{b}{x}y + \dfrac{c}{x^2}$ інтегрується через елементарні функції, бо є узагальнено однорідним рівнянням $(k = -1)$. Виконуючи підстановку $y = z/x$, прийдемо до рівняння з відокремлюваними змінними $xz' = az^2 + (b+1)z + c$, загальний інтеграл якого виражається через елементарні функції.

Рівняння Ріккаті в загальному випадку не інтегрується квадратурах, але знання одного частинного розв'язку дає можливість знайти його загальний розв'язок. А саме: якщо відомий один частинний розв'язок рівняння Ріккаті, то його можна звести до рівняння Бернуллі.

Справді, нехай y_1 – частинний розв'язок рівняння (7). Зробимо заміну шуканої функції за формулою $y = y_1 + z$, де z – нова функція. Тоді

$$y_1' + z' = P(x)y_1^2 + 2P(x)y_1 z + P(x)z^2 + Q(x)y_1 + Q(x)z + R(x).$$

Враховуючи, що $y_1' \equiv P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$, для знаходження функції z одержуємо рівняння Бернуллі

$$z' - \left(2P(x)y_1 + Q(x)\right)z = P(x)z^2.$$

4. Рівняння у повних диференціалах. Рівняння

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0, \qquad \textbf{(8)}$$

називають ***рівнянням у повних диференціалах***, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто якщо

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}U(x,y). \qquad \textbf{(9)}$$

Теорема. *Нехай функції* $M(x,y)$, $N(x,y)$, $M_y'(x,y)$, $N_x'(x,y)$ *– неперервні в деякій однозв'язній області G, і крім того, в цій області* $M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$. *Для того, щоб (8) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб для всіх* $(x,y) \in G$ *виконувалась рівність*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad \textbf{(10)}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай (8) – рівняння у повних диференціалах, а отже, виконується (9). З іншого боку, за означенням диференціалу маємо, що $\mathrm{d}U(x,y) = U_x'\,\mathrm{d}\,x + U_y'\,\mathrm{d}\,y$, а отже

$$U_x' = M(x,y), \qquad U_y' = N(x,y). \qquad \textbf{(11)}$$

Диференціюючи першу рівність з (11) за змінною y, а другу – за x (ці операції можливі, бо M_y', N_x' – неперервні в G), одержуємо

$$U_{yx}''(x,y) = M_y'(x,y), \qquad U_{xy}''(x,y) = N_x'(x,y).$$

З останніх рівностей, а також з теореми про рівність мішаних похідних випливає умова (10).

Достатність. Припустимо, що виконується умова (10). Побудуємо функцію $U(x,y)$, для якої справджується рівність (9). Для цього розглянемо першу з рівностей (11). Для кожного фіксованого

y вона є звичайним диференціальним рівнянням з загальним інтегралом

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,\mathrm{d}x+\varphi(y),$$

де $\varphi(y)$– довільна диференційовна функція. Виберемо тепер функцію $\varphi(y)$ так, щоб вона задовольняла другу рівність з (11). Маємо:

$$U'_y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,\mathrm{d}x+\varphi(y)\right)=N(x,y)\quad\Rightarrow$$

$$U'_y=\int_{x_0}^{x} M'_y(x,y)\,\mathrm{d}x+\varphi'(y)=N(x,y).$$

Зауважимо, що диференціювання під знаком інтеграла законне, бо похідна M'_y, згідно з припущенням, є неперервною в G. Далі, враховуючи рівність (10), одержуємо

$$\varphi'(y)=N(x,y)-\int_{x_0}^{x} M'_y(x,y)\,\mathrm{d}x=N(x,y)-\int_{x_0}^{x} N'_x(x,y)\,\mathrm{d}x=$$
$$=N(x,y)-N(x,y)+N(x_0,y)=N(x_0,y),$$

а отже,

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,\mathrm{d}y.$$

Таким чином, функція $U(x,y)$ визначається формулою

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,\mathrm{d}y+C, \qquad \textbf{(12)}$$

де (x_0,y_0) – довільна точка з G. Теорему доведено.

Якщо (8) – рівняння у повних диференціалах, то для знаходження його загального інтегралу потрібно побудувати функцію $U(x,y)$ за допомогою методу, використаного для доведення достатності теореми, й прирівняти її до довільної сталої C. Справді, якщо (8) – рівняння у повних диференціалах, то його можна записати у вигляді $\mathrm{d}U(x,y)=0$, а загальним інтегралом цього рівняння є $U(x,y)=C$ або

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,\mathrm{d}y=C. \qquad \textbf{(13)}$$

Якщо, будуючи функцію $U(x,y)$, взяти за вихідну не першу, а другу з рівностей (11), то одержимо такий вираз для загального інтеграла рівняння (8):

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} N(x,y)\,\mathrm{d}y=C. \qquad \textbf{(14)}$$

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$(x+y+\sin x)\,\mathrm{d}x+(x+\cos y)\,\mathrm{d}y=0.$$

Розв'язання. Оскільки $M(x,y)=x+y+\sin x$, $N(x,y)=x+\cos y$, то $M'_y=1$, $N'_x=1$, тобто умова (10) виконується. Для знаходження функції $U(x,y)$ маємо рівності $U'_x=x+y+\sin x$, $U'_y=x+\cos y$. З першої одержуємо

$$U(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy-\cos x+\varphi(y),$$

а підставляючи в другу рівність, знаходимо

$$U'_y=x+\varphi'(y)=x+\cos y \;\Rightarrow\; \varphi'(y)=\cos y \;\Rightarrow\; \varphi(y)=\sin y.$$

Отже,

$$U(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy-\cos x+\sin y,$$

а тому загальним інтегралом є

$$\frac{x^2}{2}+xy-\cos x+\sin y=C.$$

До цього ж результату приходимо, скориставшись формулою (13):

$$\int_{x_0}^{x}(x+y+\sin x)\,\mathrm{d}\,x+\int_{y_0}^{y}(x_0+\cos y)\,\mathrm{d}\,y=C \quad \Rightarrow$$

$$x^2\big/2+xy-\cos x-x_0^2\big/2-x_0y-\cos x_0+yx_0+\sin y-y_0x_0-\sin y_0=C,$$

а оскільки x_0 і y_0 – сталі, то загальний інтеграл після перепозначення сталої має вигляд

$$\frac{x^2}{2}+xy-\cos x+\sin y=C. \blacksquare$$

Лекція 6.
Інтегрувальний множник

План.

1. Методи знаходження інтегрувального множника.

2. Теореми про існування, неєдиність і загальний вигляд інтегрувального множника.

3. Один спосіб знаходження інтегрувального множника.

1. Методи знаходження інтегрувального множника. На попередній лекції було доведено, що рівняння у повних диференціалах завжди інтегрується в квадратурах. Тому природно виникає питання: чи можна рівняння не у повних диференціалах звести до рівняння у повних диференціалах домноженням на деяку функцію? Відповідь на це питання у багатьох випадках ствердна.

Функцію $\mu = \mu(x, y)$ називають ***інтегрувальним множником*** диференціального рівняння

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{1}$$

якщо рівняння

$$\mu M(x, y)\,\mathrm{d}x + \mu N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

є рівнянням у повних диференціалах. Умови на функції $M(x, y)$, $N(x, y)$: вони неперервні разом з похідними $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ у деякій однозв'язній області G і в жодній точці цієї області одночасно не перетворюються в нуль. Від інтегрувального множника вимагатимемо, щоб він не перетворювався в нуль і мав неперервні частинні похідні першого порядку.

Спробуємо знайти інтегрувальний множник рівняння (1). Застосовуючи ознаку рівняння у повних диференціалах до рівняння (2), одержуємо, що в області G для функції μ повинна справджуватись рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N).$$

Звідси маємо:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M+\mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot N+\mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x}\quad\Rightarrow$$

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right). \qquad \textbf{(3)}$$

Отже, для знаходження функції μ одержали рівняння (3), тобто рівняння з частинними похідними першого порядку. У загальному випадку задача інтегрування рівняння (3) є складнішою від вихідної. Однак у деяких випадках рівняння (3) вдається легко розв’язати. Розглянемо ці випадки.

Випадок 1. Інтегрувальний множник рівняння (1) залежить тільки від x, тобто $\mu=\mu(x)$. Тоді $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, а тому з (3) маємо:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

або (у припущенні, що $N(x,y)\neq 0$)

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{1}{N}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathrm{d}x. \qquad \textbf{(4)}$$

Оскільки ліва частина у (4) залежить тільки від *x*, то й права частина повинна бути функцією тільки від *x*. Таким чином, для існування інтегрувального множника вигляду $\mu=\mu(x)$ необхідно, щоб

$$\frac{1}{N}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\equiv\varphi(x).$$

Тоді з (4) маємо $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, а отже

$$\mu(x)=Ce^{\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad \textbf{(5)}$$

де, наприклад, можна покласти $C=1$.

Випадок 2. Інтегрувальний множник рівняння (1) залежить тільки від y, тобто $\mu = \mu(y)$. Тоді $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ і аналогічно, як для випадку 1, можна показати, що за умови

$$\frac{1}{-M} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \equiv \psi(y)$$

інтегрувальний множник задається формулою

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y) \mathrm{d} y}. \qquad \textbf{(6)}$$

Випадок 3. Інтегрувальний множник рівняння (1) є функцією від заданої функції $\omega(x, y)$, тобто $\mu = \mu(\omega(x, y))$. У цьому випадку рівняння (3) можна переписати так:

$$N \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \cdot \mu(\omega) \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N \dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M \dfrac{\partial \omega}{\partial y}} \mathrm{d}\omega,$$

за умови, що $N \dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M \dfrac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$. Якщо позначити

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N \dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M \dfrac{\partial \omega}{\partial y}} \equiv \psi(\omega), \qquad \textbf{(7)}$$

то

$$\mu = e^{\int \psi(\omega) \mathrm{d}\omega} \equiv f(\omega) = f(\omega(x, y)).$$

Очевидно, що інтегрувальні множники $\mu(x)$ та $\mu(y)$ є частковими випадками стосовно випадку 3.

Приклад 1. Знайти інтегрувальний множник та за його допомогою зінтегрувати рівняння $(2xy^2 - y)\mathrm{d}x + (y^2 + x + y)\mathrm{d}y = 0$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4xy-1,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=1 \;\Rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Тоді

$$\frac{-1}{M}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{4xy-1-1}{y-2xy^2}=-\frac{2}{y}\equiv\psi(y).$$

Скориставшись формулою (6), знаходимо інтегрувальний множник:

$$\mu(y)=e^{-2\int\frac{\mathrm{d}y}{y}}=e^{-2\ln|y|}=y^{-2}.$$

Помноживши обидві частини заданого рівняння на $\mu(y)=y^{-2}$, одержуємо рівняння

$$\left(2x-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(1+\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=0,$$

яке є рівнянням у повних диференціалах, бо

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{y^2}.$$

Загальний інтеграл знаходимо за формулою (13) з попередньої лекції:

$$\int_0^x\left(2x-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\int_1^y\left(1+\frac{0}{y}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=C \quad\Rightarrow$$

$$\left.\left(x^2-\frac{x}{y}\right)\right|_0^x+\left.\left(y+\ln|y|\right)\right|_1^y=C \quad\Rightarrow\quad x^2-\frac{x}{y}+y+\ln|y|-1=C \quad\Rightarrow$$

$$x^2-\frac{x}{y}+y+\ln|y|=C.\ \blacksquare$$

Використовуючи формулу (7), можна знайти умову існування інтегрувального множника наперед заданого вигляду. Наприклад, інтегрувальний множник, залежний тільки від добутку xy $(\mu=\mu(xy))$ існує, якщо

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{Ny-Mx}\equiv\psi(xy)\quad(\text{тут } \omega = xy).$$

Знаючи інтегрувальний множник, можна знайти не тільки загальний інтеграл рівняння, але й також усі його особливі розв'язки. Дійсно, нехай $\mu=\mu(x,y)$ – інтегрувальний множник рівняння (1), тобто

$$\mathrm{d}U=\mu\left(M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y\right).$$

Тоді

$$\frac{1}{\mu}\mathrm{d}U=M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y=0 \quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{d}U=0 \text{ або } \frac{1}{\mu}=0.$$

Перше рівняння визначає загальний інтеграл $U=C$, а інше може привести до особливого розв'язку.

Отже, особливим розв'язком рівняння (1) може бути тільки такий розв'язок, вздовж якого інтегрувальний множник перетворюється в нуль (тобто такий розв'язок, при наближенні до якого $\mu\to\infty$).

Звідси одержуємо ***правило знаходження особливих розв'язків***:

1) знайти лінії, вздовж яких μ перетворюється в ∞;

2) перевірити, чи є знайдені лінії інтегральними кривими;

3) перевірити, чи містяться знайдені розв'язки у формулі загального розв'язку.

Ті із знайдених розв'язків, які не містяться в загальному розв'язку, будуть особливими. Якщо з'ясується, що μ не перетворюється в ∞ (або перетворюється в ∞ лише в окремих точках), то рівняння не має особливих розв'язків.

2. Теореми про існування, неєдиність і загальний вигляд інтегрувального множника. У попередньому пункті було з'ясовано роль інтегрувального множника для знаходження загального інтегралу й особливих розв'язків рівняння (1), вказані також деякі прості випадки знаходження інтегрувального множника. Тепер з'ясуємо загальні властивості інтегрувального множника і дамо один загальний метод знаходження інтегрувального множника, який ґрунтується на використанні цих властивостей.

Оскільки функції $M(x,y)$, $N(x,y)$ неперервні разом з своїми першими частинними похідними в деякій однозв'язній області G і в жодній точці цієї області не перетворюються в нуль, а інтегрувальний множник $\mu(x,y)$ не перетворюється в нуль і має неперервні частинні похідні першого порядку, то у кожній точці області G маємо єдиність розв'язку задачі Коші і, крім того, інтеграл $U(x,y)$, який відповідає інтегрувальному множнику $\mu(x,y)$, має неперервні частинні похідні другого порядку. Останнє твердження випливає з того, що якщо

$$\mathrm{d}U = \mu \cdot \left(M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y\right),$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu N,$$

і оскільки праві часини мають неперервні частинні похідні за змінними x і y, то похідні від лівих частин також існують і неперервні.

Доведемо, що за деяких умов, які гарантують існування загального інтегралу, існує також інтегрувальний множник.

Теорема 1. *Якщо рівняння (1) має загальний інтеграл*

$$U(x,y) = C, \tag{8}$$

де $U(x,y)$ – інтеграл рівняння (1), який має неперервні частинні похідні другого порядку, то це рівняння має також інтегрувальний множник.

Доведення. Оскільки $U(x,y)$ – інтеграл рівняння (1), то $\mathrm{d}U \equiv 0$, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}\,x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}\,y\equiv 0,$$

де $\mathrm{d}\,y$ визначається рівнянням (1), тобто $\mathrm{d}\,x$ і $\mathrm{d}\,y$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}\,x+\dfrac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}\,y=0,\\ M\,\mathrm{d}\,x+N\,\mathrm{d}\,y=0.\end{cases}$$

Отримана однорідна лінійна система має ненульовий розв'язок (бо диференціал незалежної змінної $\mathrm{d}\,x$ є довільним). Тому

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y}\\ M & N\end{vmatrix}\equiv 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{M}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial y}\equiv\mu(x,y). \qquad \textbf{(9)}$$

Звідси

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\mu M,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\mu N,$$

а тому

$$\mu(M\,\mathrm{d}\,x+N\,\mathrm{d}\,y)=\mu M\,\mathrm{d}\,x+\mu N\,\mathrm{d}\,y=\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}\,x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}\,y=\mathrm{d}U,$$

тобто ліва частина рівняння (1) є повним диференціалом після множення на функцію μ з формули (9). Отже, μ – інтегрувальний множник рівняння (1). ■

З рівняння для інтегрувального множника μ, а також безпосередньо з самого його означення, зрозуміло, що якщо μ – інтегрувальний множник, то $C\mu$ для довільного C також є інтегрувальним множником цього рівняння. Але існують також інтегрувальні множники, відмінні від $C\mu$. Це випливає з такої теореми.

Теорема 2. *Якщо* μ_0 – інтегрувальний множник *рівняння (1), а* $U_0(x,y)$ *відповідний йому інтеграл, то*

$$\mu = \mu_0 \cdot \varphi(U_0), \qquad \textbf{(10)}$$

де φ *– довільна функція, яка не дорівнює тотожно нулю і має неперервну похідну, також є інтегрувальним множником рівняння (1).*

Доведення. Якщо помножити ліву частину рівняння (1) на (10), то

$$\mu_0\varphi(U_0)\cdot(M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = \varphi(U_0)\cdot\left(\mu_0(M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y)\right) =$$

$$= \varphi(U_0)\cdot \mathrm{d}U_0 = \mathrm{d}\left(\int \varphi(U_0)\,\mathrm{d}U_0\right).$$

Ліва частина є повним диференціалом функції $\int \varphi(U_0)\,\mathrm{d}U_0$, а тому функція μ, визначена формулою (10), є інтегрувальним множником рівняння (1). ■

Формула (10) містить безліч інтегрувальних множників, породжених μ_0 і відповідним йому інтегралом. Виникає питання: чи всі інтегрувальні множники містяться у формулі (10)? Відповідь на це питання дає така теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема 3. *Два довільні інтегрувальні множники* μ_0 *і* μ_1 *рівняння (1) пов'язані співвідношенням (10), тобто*

$$\mu_1 = \mu_0\varphi(U_0).$$

3. Один спосіб знаходження інтегрувального множника. Припустимо, що ліву частину рівняння (1) можна записати у вигляді

$$(M_1\,\mathrm{d}x + N_1\,\mathrm{d}y) + (M_2\,\mathrm{d}x + N_2\,\mathrm{d}y) = 0,$$

причому для кожної групи можна знайти інтегрувальний множник. Нехай μ_1 і μ_2 – ці множники, а U_1 і U_2 – відповідні їм інтеграли. Тоді, згідно з (10), усі інтегрувальні множники першої групи містяться у формулі

$$\mu = \mu_1\varphi(U_1),$$

а всі інтегрувальні множники другої першої групи – у формулі

$$\mu = \mu_2\psi(U_2).$$

Якщо вдасться вибрати довільні функції φ і ψ такими, що

$$\mu_1\varphi(U_1)=\mu_2\psi(U_2) \qquad \textbf{(11)}$$

(причому одну з функцій φ і ψ можна вважати рівною одиниці), то

$$\mu=\mu_1\varphi(U_1)=\mu_2\psi(U_2)$$

буде інтегрувальним множником усього рівняння (1). Зауважимо, що групи, на яку розбиваємо ліву частину рівняння (1), не обов'язково повинні бути повними, тобто містити обидва диференціали $\mathrm{d}x$ і $\mathrm{d}y$.

Приклад 2. Знайти інтегрувальний множник рівняння

$$\left(\frac{y}{x}+3x^2\right)\mathrm{d}x+\left(1+\frac{x^3}{y}\right)\mathrm{d}y=0.$$

Розв'язання. Розіб'ємо ліву частину на дві групи:

$$\left(\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\right)+\left(3x^2\,\mathrm{d}x+\frac{x^3}{y}\mathrm{d}y\right)=0$$

і знайдемо для кожної з них інтегрувальні множники і відповідні їм інтеграли:

$$\mu_1=x,\ \ U_1=xy; \quad \mu_2=y,\ \ U_2=x^3y.$$

З (11) маємо:

$$x\varphi(xy)=y\psi(x^3y).$$

Візьмемо тепер $\varphi(U)=U^2$, $\psi(U)=U$, тоді

$$x(xy)^2=y(x^3y)=x^3y^2.$$

Отже,

$$\mu(x,y)=x^3y^2. \ \blacksquare$$

Лекція 7.
Деякі геометричні аспекти теорії диференціальних рівнянь першого порядку.

План.

1. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку.
2. Метод ізоклін.
3. Ізогональні та ортогональні траєкторії.

1. Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку. Розглянемо рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної:

$$y' = f(x,y), \qquad \textbf{(1)}$$

де f – неперервна функція, задана у кожній точці області G.

Якщо розглядати x, y як декартові координати, то, як відомо, розв'язку $y=\varphi(x)$, $\Phi(x,y)=0$ або $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, рівняння (1) на площині Oxy відповідає деяка крива, яку називають ***інтегральною кривою*** цього рівняння. З'ясуємо геометричний зміст інтегральних кривих. Чим вони відрізняються від усіх інших кривих, які можемо провести на площині?

Зауважимо, що рівняння (1) встановлює відповідність між кожною точкою $M(x,y)\in G$ і кутовим коефіцієнтом y' дотичної до інтегральної кривої у цій точці (рис. 1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f(x,y).$$

Іншими словами, якщо функція $f(x,y)$ визначена і скінченна у кожній точці області G, то кожній точці $M\in G$ відповідає деякий напрям, кутовий коефіцієнт якого дорівнює $f(x,y)$. Таким чином, в області G одержуємо ***поле напрямів (векторне поле)***. Це поле можна зобразити, якщо помістити у відповідних точках області G вектори (наприклад, одиничні), які утворюють з віссю Ox кут

$\operatorname{arctg}(y')$ (додатній напрям вектора можна взяти довільним, бо арктангенс визначає кут лише з точністю до кратного π, рис. 2).

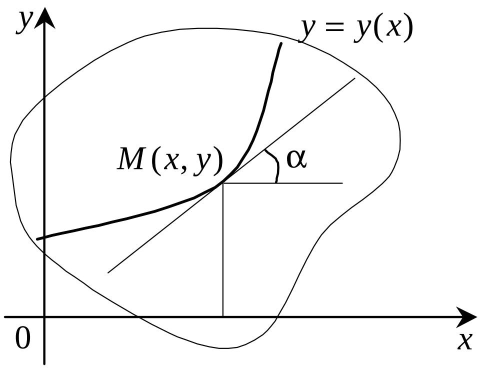

Рис. 1

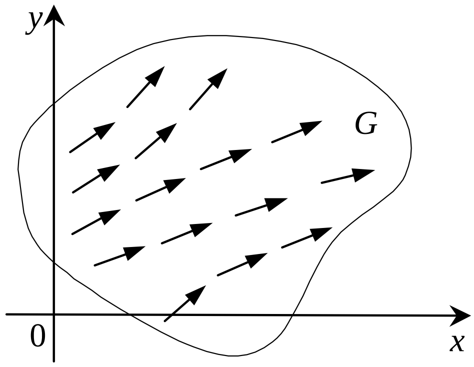

Рис. 2

У такій постановці інтегральні криві рівняння (1) – це криві, для яких згадані напрями є напрямами дотичних. З геометричної точки зору зінтегрувати диференціальне рівняння першого порядку означає знайти криві, напрями дотичних до яких у кожній точці співпадають з напрямом поля у цій точці. Ця властивість і вирізняє інтегральні криві серед усіх інших кривих. Простіше кажучи, потрібно провести криву так, щоб розставлені на полі вектори співпадали у кожній точці з напрямом дотичної до шуканої кривої.

2. Метод ізоклін. Криву, у кожній точці якої нахил векторного поля, що визначає диференціальне рівняння (1), є сталим, називають ***ізокліною*** (з грецької isos – рівний, однаковий, klino – нахиляю). Отже, рівняння ізоклін має вигляд

$$f(x,y)=k, \qquad \textbf{(2)}$$

де k – довільна стала. Змінюючи в (2) значення k, матимемо множину ізоклін на площині Oxy. За допомогою цих ізоклін і сталих кутів $\alpha=\operatorname{arctg} k$ нахилу дотичних до інтегральних кривих, які їх перетинають, можна наближено відтворити картину поля інтегральних кривих рівняння (1). Такий метод дослідження диференціального рівняння називають ***методом ізоклін***.

Для точнішої побудови інтегральних кривих потрібно враховувати області знакосталості похідних y' (монотонність інтегральних кривих) і y'' (опуклість інтегральних кривих). Зокрема, якщо права частина рівняння (2) зберігає додатній (від'ємний) знак, то будь-який розв'язок цього рівняння зростає (спадає) в кожній своїй точці, тому всі інтегральні криві напрямлені вверх (вниз). Лінію, через кожну точку якої проходить інтегральна крива, яка має в цій точці екстремум, називають ***лінією екстремумів*** (це ізокліна з $k=0$).

Якщо похідна y'', тобто функція

$$y'' = f_x'(x,y) + f_y'(x,y)\cdot f(x,y)$$

зберігає додатній (від'ємний) знак, то будь-яка інтегральна крива вгнута догори (донизу). Лінія, у точках якої інтегральні криві мають перегин, називається ***лінією точок перегину*.**

Якщо в деякій точці (x_0, y_0) функція $f(x,y)$ стає нескінченно великою, то напрям поля буде паралельний до осі Oy; тоді замість рівняння (1) потрібно розглянути "перевернуте" рівняння

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(x,y)} = f_1(x,y). \tag{1'}$$

Якщо функція $f(x,y)$ в деякій точці (x_0, y_0) набирає вигляду $0/0$ і ця невизначеність "не розкривається", то і права частина рівняння $(1')$ матиме у цій точці таку ж невизначеність. У цьому випадку будемо говорити, що в точці (x_0, y_0) поле напрямів не визначене і через цю точку не проходить жодна інтегральна крива, однак це не виключає можливості існування інтегральних кривих вигляду $y = y(x)$ або $x = x(y)$, які володіють відповідно властивістю

$$y(x) \to y_0 \text{ при } x \to x_0 \quad \text{або} \quad x(y) \to x_0 \text{ при } y \to y_0.$$

Приклад 1. Використовуючи метод ізоклін, наближено побудувати інтегральні криві рівняння $y' = 2x(1-y)$.

Розв'язання. Згідно з (2) маємо сім'ю ізоклін

$$2x(1-y) = k,$$

де k – дійсний параметр. Це рівняння задає дві прямі: $x=0$ і $y=1$ при $k=0$ та сім'ю гіпербол $y=1-\dfrac{k}{2x}$ при $k\neq 0$.

Пряма $y=1$ – інтегральна крива, оскільки функція $y=1$ є розв'язком диференціального рівняння. Інтегральні криві перетинають вісь ординат (ізокліну при $k=0$) під прямими кутом, тобто дотичні до них паралельні до осі абсцис. Це означає, що точки прямої $x=0$ є точками екстремуму розв'язків.

Для з'ясування характеру екстремальних точок знайдемо другу похідну функції $y=y(x)$:

$$y''=2(1-y)-2xy'=2(1-y)-2x\cdot 2x(1-y)=2(1-y)(1-2x^2).$$

Бачимо, що точки осі ординат, для яких $y>1$, є точками максимуму, а точки осі ординат, для яких $y<1$, – точками мінімуму інтегральних кривих (якщо $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то при $f'(x_0)>0$ точка x_0 – точка мінімуму, а при $f'(x_0)<0$ x_0 – точка максимуму).

З виразу для другої похідної випливає також, що точки прямих $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ є точками перегину інтегральних кривих, бо у них $y''=0$.

Ізокліни $x=0$ і $y=1$ розбиває координатну площину на чотири частини, у кожній з яких похідна y' зберігає знак (рис. 3). Отже, перетинаючи пряму $x=0$, інтегральні криві переходять з області зростання функції $y(x)$ в область спадання, якщо $y>1$, і з області спадання функції $y(x)$ в область зростання, якщо $y<1$.

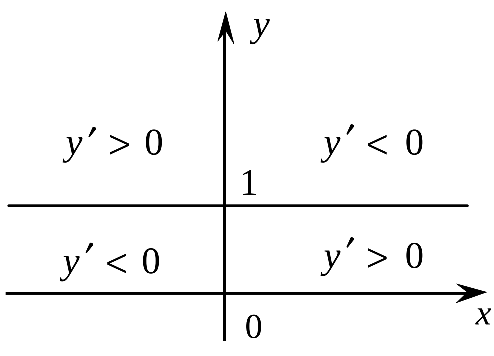

Рис. 3

Розглянемо ще дві ізокліни: $y = 1 - \dfrac{1}{2x}$ при $k = 1$ і $y = 1 + \dfrac{1}{2x}$ при $k = -1$. Дотичні, проведені до інтегральних кривих в точках перетину з цими ізоклінами, утворюють з віссю абсцис кути 45 і 135° відповідно.

Наближено інтегральні криві побудовані на рис. 4.

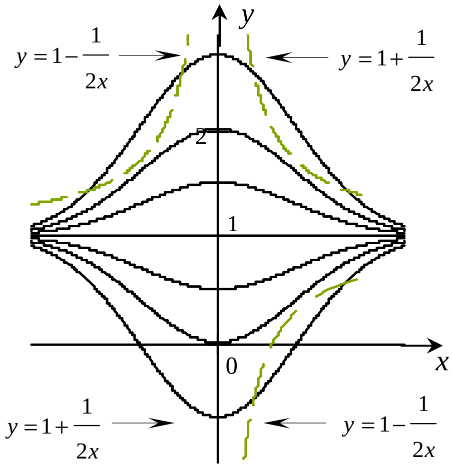

Рис 4.

3. Ізогональні та ортогональні траєкторії. Як ще один приклад одного з багатьох геометричних застосувань диференціальних рівнянь першого порядку, розглянемо так звану ***задачу про траєкторії***.

Нехай на площині Oxy маємо однопараметричну сім'ю кривих

$$\Phi(x, y, C) = 0. \qquad \textbf{(3)}$$

Лінії, які перетинають криві цієї сім'ї під сталим кутом[1] α, називають ***ізогональними траєкторіями*** сім'ї кривих. Якщо $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то ізогональну траєкторію називають ***ортогональною***.

Покажемо, що задача відшукання ізогональних (ортогональних) траєкторій зводиться до інтегрування диференціального рівняння першого порядку.

---

[1] Кутом між двома кривими у точці їх перетину називають кут між дотичними до них у цій точці.

Нехай $M(\xi,\eta)$ – довільна точка шуканої ізогональної траєкторії l_1, а φ і μ – кути, які утворюють з віссю Ox дотичні до деякої кривої l сім'ї (3) в точці M та до ізогональної траєкторії у цій самій точці відповідно (рис. 5).

Очевидно, що

$$\mu=\varphi+\alpha=\mathrm{const}.$$

Припустимо, що $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$ і позначимо $k=\mathrm{tg}\,\varphi$. Враховуючи, що

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\mathrm{tg}\,\mu,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{tg}\,\varphi,$$

одержуємо:

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\mathrm{tg}(\mu-\alpha)=\frac{\mathrm{tg}\,\mu-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\mu}$$

або

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}-k}{1+k\cdot\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}}.\qquad(4)$$

Рівність (4) встановлює зв'язок між напрямом дотичної у довільній точці M траєкторії l_1 і напрямом дотичної до кривої l сім'ї (3), яка проходить через цю точку.

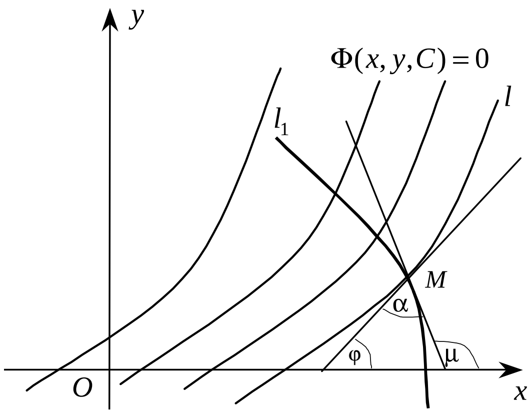

Рис. 5

Складемо тепер диференціальне рівняння сім'ї (3). Для цього, як відомо з лекції 1, потрібно виключити параметр C з системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0, \\ \Phi'_x+\Phi'_y\cdot y'=0. \end{cases}$$

Тоді отримаємо рівність

$$F(x,y,y')=0, \qquad \textbf{(5)}$$

яка виконується для всіх точок області, заповненої кривими сім'ї (3), у тому числі й у точці M. Але у цій точці ми можемо замінити x і y на ξ і η, а y' – на її значення з рівності (2). Одержуємо співвідношення

$$F\left(\xi,\eta,\frac{\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}-k}{1+k\cdot\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}}\right)=0, \qquad \textbf{(6)}$$

яке пов'язує координати довільної точки M траєкторії l_1 з напрямом дотичної до неї у цій точці. Отже, (4) – рівняння сім'ї ізогональних траєкторій.

Якщо $\alpha=\pi/2$, то одержуємо

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\mathrm{tg}\left(\mu-\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)=-\mathrm{ctg}\,\mu=-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\mu},$$

і, отже, замість співвідношення (4) будемо мати:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}}.$$

Замінюючи тепер в (3) x, y і y' відповідно на ξ, η, $-\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-1}$, одержуємо шукане диференціальне рівняння сім'ї ортогональних траєкторій:

$$F\left(\xi,\eta,-\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^{-1}\right)=0. \qquad \textbf{(7)}$$

Отримавши диференціальне рівняння сім'ї ізогональних (ортогональних) траєкторій, ми звичайно можемо переписати його, замінивши ξ і η на x і y. Таким чином, приходимо до наступного ***правила знаходження диференціального рівняння сім'ї ізогональних (ортогональних) траєкторій*:**

1) скласти диференціальне рівняння заданої сім'ї;

2) замінити в отриманому рівнянні y' на:

$$\frac{y'-k}{1+ky'},\ \text{якщо}\ \varphi\neq\frac{\pi}{2}\quad (k=\operatorname{tg}\varphi),$$

або на

$$-\frac{1}{y'},\ \text{якщо}\ \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Приклад 2. Скласти диференціальне рівняння ортогональних траєкторій сім'ї кривих

$$\Phi(x,y,C)\equiv y^2-Cx^3=0.$$

Розв'язання. Складемо диференціальне рівняння цієї сім'ї. Маємо

$$\Phi'_x+\Phi'_y y'\equiv 2yy'-3Cx^2=0.$$

Вилучаючи параметр C, одержуємо диференціальне рівняння

$$2yy'-\frac{3y^2}{x}=0.$$

З формули (7) випливає, що шуканим рівнянням ортогональних траєкторій є

$$-\frac{2}{y'}-\frac{3y}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad 2x\,dx+3y\,dy=0. \ \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти траєкторії, які перетинають концентричні кола $x^2+y^2=R^2$ під кутом α.

Розв'язання. Диференціальним рівнянням сім'ї кіл, як легко переконатись, є

$$x + yy' = 0.$$

Диференціальним рівнянням траєкторій (на підставі формули (6)) є

$$\xi + \eta \cdot \frac{\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} - m}{1 + m\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (m\xi + \eta)\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} + \xi - m\eta = 0 \quad \left(m = \operatorname{tg}\varphi\right).$$

Якщо позначити змінні через $x,\ y$, то рівняння траєкторій запишеться так:

$$(x - my)\,\mathrm{d}x + (mx + y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Отримане рівняння є однорідним. Його загальним інтегралом є

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} + m\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-m\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Останнє рівняння є рівнянням шуканої сім'ї ізогональних траєкторій. Якщо перейти до полярної системи координат ($x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$), то рівняння траєкторій запишеться у вигляді

$$\rho = Ce^{-m\varphi}.$$

Отже, шуканими траєкторіями є логарифмічні спіралі. ■

Лекція 8.

Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної.

Як відомо, основною задачею інтегрування диференціального рівняння є знаходження всіх його розв'язків та вивчення їх властивостей. Якщо вдається виразити всі розв'язки в елементарних функцій, то дослідження властивостей цих розв'язків не складає особливих труднощів, але такі випадки є радше винятком. Значно більше диференціальних рівнянь інтегрується в квадратурах, але й ці рівняння зустрічаються доволі рідко. Наприклад, розв'язок простого на перший погляд рівняння $y' = x^2 + y^2$ не може бути навіть зведений до квадратур. Найбільш відомі типи диференціальних рівнянь, які зводяться до квадратур, були вивчені на попередніх лекціях.

Отже, у загальному випадку диференціальне рівняння не інтегрується в квадратурах. Тому переважно доводиться розв'язувати диференціальні рівняння наближено. Але перш ніж застосовувати який-небудь наближений метод, потрібно знати, чи існує насправді розв'язок. Дуже важливо також заздалегідь знати, чи єдиний він.

На лекції 2 без доведення наводилась теорема Пікара, яка дає відповідь на питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Теорема Пікара[1)]. *Нехай функція* $f(x, y)$ *задовольняє умови:*

1) вона неперервна в замкненій області (прямокутнику)

$$Q = \{(x, y):\ |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\},\quad a > 0,\ b > 0,$$

[1)] У деяких підручниках цю теорему називають теоремою Коші, Пікара-Коші або Коші-Пікара.

а отже, є обмеженою в Q, тобто існує число $M>0$ *таке, що для всіх точок* $(x,y)\in Q \mid f(x,y)|\le M$ *;*

2) задовольняє умову Ліпшіца в прямокутнику Q за змінною y, тобто

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le L\,|\,y_1-y_2\,|,$$

де L – стала Ліпшица, (x,y_1), (x,y_2) *– дві довільні точки з Q. Тоді принаймні на відрізку* $G_1=[x_0-h;x_0+h]$*, де*

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},$$

існує єдиний розв'язок $y=y(x)$ *задачі Коші (1),(2).*

На рис. 1 в площині (x,y) зображений прямокутник Q і прямокутник

$$Q_1=\{(x,y):|\,x-x_0\,|\le h,\ |\,y-y_0\,|\le h\},$$

що йому належить.

Теорема стверджує, що якщо в прямокутнику Q функція $f(x,y)$ задовольняє обидві умови теореми, то через точку (x_0,y_0) проходить єдина інтегральна крива $y=y(x)$, визначена для всіх значень $x\in G_1$.

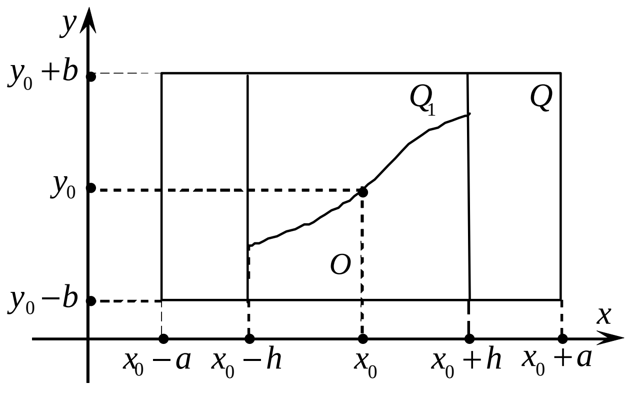

Рис. 1

Вона повністю належить прямокутнику Q_1. Теорема гарантує існування відрізка G_1, на якому існує розв'язок $y=y(x)$ рівняння, який проходить через точку (x_0,y_0).

Доведення теореми розіб'ємо на декілька етапів.

1. Еквівалентність задачі Коші (1), (2) інтегральному рівнянню. Розглянемо інтегральне рівняння (рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком інтеграла)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) \mathrm{d}t. \qquad \textbf{(3)}$$

Покажемо, що якщо рівняння (3) має неперервний розв'язок $y = y(x)$ на відрізку G_1, то цей розв'язок є також розв'язком задачі Коші (1), (2). Справді, підінтегральна функція $f\left(x, y(x)\right)$ як складна функція змінної x неперервна на відрізку G_1, бо функція $f(x, y)$ неперервна відносно всіх своі змінних, а функція $y = y(x)$ згідно з припущенням визначена і неперервна на відрізку G_1 та не виходить при цих значеннях з прямокутника Q. Тому з (3) випливає, що функція $y = y(x)$ неперервно диференційовна в усіх точках G_1, бо визначений інтеграл зі змінною верхньою межею x є неперервно диференційовною функцією верхньої межі. Диференціюючи за змінною x ліву і праву частину тотожності (3), маємо $y' = f\left(x, y(x)\right)$. Отже, функція $y(x)$ є розв'язком рівняння (1). Крім того, як легко бачити, $y(x_0) = y_0$, тобто функція $y = y(x)$ справді є розв'язком задачі Коші (1), (2).

Доведемо обернене твердження: якщо функція $y = y(x)$ на відрізку G_1 є розв'язком задачі Коші (1), (2), то функція $y = y(x)$ на цьому ж відрізку є розв'язком інтегрального рівняння (3). Справді, якщо $y = y(x)$ є розв'язком рівняння (1), то для $x \in G_1$ виконується тотожність $y'(x) \equiv f(x, y(x))$, інтегрування обох частин якої в межах від x_0 до x з врахуванням початкової умови $y(x_0) = y_0$ приводить до тотожності

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad y(t)\Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)\mathrm{d}t,$$

що й треба було довести. Кажуть, що інтегральне рівняння (3) еквівалентне задачі Коші (1), (2). Тому надалі доводитимемо існування і єдиність розв'язку саме інтегрального рівняння (3).

2. Метод послідовних наближень. Доведемо спочатку існування розв'язку рівняння (3). Французький математики Е. Пікар запропонував для цього метод послідовних наближень, ідея якого полягає у тому, що розв'язок рівняння (3) шукається у вигляді границі послідовності функцій $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_k(x), \ldots$, які визначаються рекурентно:

$$y_0(x) \equiv y_0 \quad \text{– нульове наближення,}$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_0(t)\right) \mathrm{d}t \quad \text{– перше наближення,}$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_1(t)\right) \mathrm{d}t \quad \text{– друге наближення, ...}$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) \mathrm{d}t, \ (n\text{-е наближення}), \quad \ldots \qquad \mathbf{(4)}$$

Про функції $y_k(x)$, $k = 0,1,\ldots,$ можна стверджувати, що:

А) вони є неперервними для $x \in G_1$. Справді, оскільки за умовою функція $f\left(x, y(x)\right)$ у прямокутнику Q неперервна, то й інтеграл $\int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt$ як функція верхньої змінної межі є неперервною функцією своєї верхньої межі на цьому відрізку;

Б) кожна з цих функцій при $x \in G_1$ не виходить з прямокутника Q. Справді, з (4), враховуючи нерівність

$$\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \le \left| \int_a^b \left| f(x) \right| \mathrm{d}x \right|,$$

одержуємо:

$$\left|y_1(x)-y_0\right|\le\left|\int_{x_0}^{x} f\left(t,y_0(t)\right)\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(t,y_0(t)\right)\right|\mathrm{d}t\right|\le M\left|x-x_0\right|\le Mh\le b.$$

Отже, функція $y_1(x)$ не виходить за межі прямокутника Q. Далі знаходимо

$$\left|y_2(x)-y_0\right|\le\left|\int_{x_0}^{x} f\left(t,y_1(t)\right)\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(t,y_1(t)\right)\right|\mathrm{d}t\right|\le M\left|x-x_0\right|\le Mh\le b,\ \dots,$$

$$\left|y_n(x)-y_0\right|\le\left|\int_{x_0}^{x} f\left(t,y_{n-1}(t)\right)\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(t,y_{n-1}(t)\right)\right|\mathrm{d}t\right|\le M\left|x-x_0\right|\le Mh\le b,\dots$$

З методу математичної індукції випливає потрібне твердження.

В) кожна з функцій $y_k(x),\ k=0,1,\dots,n,\dots,$ задовольняє початкову умову $y_k(x_0)=y_0$. Це випливає безпосередньо з (4).

3. Збіжність послідовних наближень. Покажемо тепер, що послідовність $y_k(x),\ k=0,1,\dots,n,\dots,$ рівномірно збігається на відрізку G_1 і, отже, гранична функція

$$Y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)$$

неперервна на цьому відрізку. Для доведення існування границі $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)$ досить довести збіжність функціонального ряду

$$y_0+\left(y_1(x)-y_0\right)+\left(y_2(x)-y_1(x)\right)+\dots+\left(y_n(x)-y_{n-1}(x)\right)+\dots, \tag{5}$$

бо n-ою частинною сумою ряду (5) є якраз n-не наближення послідовності функцій (4):

$$S_n(x)=y_0+\left(y_1(x)-y_0\right)+\dots+\left(y_n(x)-y_{n-1}(x)\right)=y_n(x).$$

Тому з рівномірної збіжності ряду (5) випливатиме рівномірна збіжність послідовності (4).

Знайдемо оцінку за модулем кожного члени ряду (5), починаючи з другого:

$$\left|y_1(x)-y_0\right|\le M\left|x-x_0\right|,\ \text{(доведено раніше)}$$

$$\left|y_2(x)-y_1(x)\right|=$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x}\big(f(t,y_1(t))-f(t,y_0)\big)\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\big|f(t,y_1(t))-f(t,y_0)\big|\mathrm{d}t\right|\le$$

$$\le\int_{x_0}^{x}L\left|y_1(t)-y_0\right|\mathrm{d}t\le LM\int_{x_0}^{x}\left|t-x_0\right|\mathrm{d}t=LM\,\frac{\left|x-x_0\right|^2}{2!}.$$

Аналогічно

$$\left|y_3(x)-y_2(x)\right|=$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x}\big(f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t))\big)\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\big|f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t))\big|\mathrm{d}t\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}L\left|y_2(t)-y_1(t)\right|\mathrm{d}t\right|\le L^2M\left|\int_{x_0}^{x}\frac{\left|t-x_0\right|^2}{2!}\mathrm{d}t\right|=\frac{L^2M}{3!}\left|x-x_0\right|^3.$$

Застосовуючи метод математичної індукції, можна довести оцінку:

$$\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right|\le\frac{L^{n-1}M}{n!}\le\left|x-x_0\right|^n,$$

а оскільки $\left|x-x_0\right|<h$, то

$$\left|y_1(x)-y_0\right|\le Mh,\qquad \left|y_2(x)-y_1(x)\right|\le ML\frac{h^2}{2!},$$

$$\left|y_3(x)-y_2(x)\right|\le ML^2\frac{h^3}{3!},\quad \ldots\quad \left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right|\le ML^{n-1}\frac{h^n}{n!},\ \ldots$$

Отже, члени функціонального ряду (5) за модулем менші, ніж відповідні члени додатного числового ряду

$$y_0+Mh+ML\frac{h^2}{2!}+ML^2\frac{h^3}{3!}+\ldots+ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}+\ldots,$$

який є збіжний, бо за ознакою д'Аламбера (перший член ряду y_0 можна відкинути, адже скінченна кількість членів ряду не впливає на його збіжність) маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ML^{n-1}h^n(n-1)!}{ML^{n-2}h^{n-1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{Lh}{n}=0<1.$$

Оскільки отриманий числовий ряд збіжний, то за ознакою Вейєрштраса функціональний ряд (6) рівномірно збігається на відрізку G_1. Позначимо суму ряду (5) або, що те саме, граничну функцію послідовності $y_k(x)$, $k=0,1,\dots,n,\dots$, через $Y(x)$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = Y(x).$$

Оскільки всі члени ряду (5) неперервні на відрізку G_1 і цей ряд збігається рівномірно на G_1, то за теоремою про неперервність суми ряду функція $Y(x)$ також неперервна на цьому відрізку.

4. Граничний перехід. Доведемо, що функція $Y(x)$ не виходить з прямокутника Q, якщо $x \in G_1$. Справді, перейшовши до границі при $n\to\infty$ в нерівності $|y_n(x) - y_0| \le b$, одержуємо

$$|Y(x) - y_0| \le b.$$

Доведемо, що $Y(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння (3). Оскільки послідовність функцій $y_n(x)$ рівномірно збігається до $Y(x)$ на відрізку G_1, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при для $n > N$ і всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ виконуватиметься нерівність

$$|y_n(x) - Y(x)| < \varepsilon.$$

Тому, використовуючи умову Ліпшіца, одержуємо

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,\mathrm{d}t \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(t, y_n(t) - f(t, Y(t)))\right| \mathrm{d}t \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} L |y_n(t) - Y(t)|\,\mathrm{d}t \right| \le L\varepsilon |x - x_0| \le L\varepsilon h \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Отже, для всіх $x \in G_1$ маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Тепер, перейшовши до границі при $n\to\infty$ у співвідношенні

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t,$$

одержуємо, що

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, Y(t)\right) \mathrm{d}t .$$

Цим самим доведено, що функція $y = Y(x)$ на відрізку G_1 є розв'язком інтегрального рівняння (3), а отже, і розв'язком задачі Коші (1), (2).

5. Єдиність розв'язку. Доведення єдиності розв'язку $y = Y(x)$ проведемо, міркуючи від супротивного. Нехай на відрізку G_1, окрім розв'язку $Y(x)$, існує й інший розв'язок $\varphi(x)$. Розглянемо досить малий відрізок $[x_0; x_0 + \eta]$, де $\eta \le h$, на якому $\varphi(x) - Y(x)$ тотожно не дорівнює нулю. Оскільки функція $\left|\varphi(x) - Y(x)\right| \ne 0$ є неперервною на відрізку $[x_0; x_0 + \eta]$, то додатна функція $\left|\varphi(x) - Y(x)\right|$ досягає в деякій точці x_1, $x_0 < x_1 \le x_0 + \eta$, свого найбільшого значення $m > 0$. Тоді

$$m = \left|\varphi(x_1) - Y(x_1)\right| = \left| \int_{x_0}^{x_1} f\left(t, \varphi(t)\right) \mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x_1} f\left(t, Y(t)\right) \mathrm{d}t \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x_1} \left| f\left(t, \varphi(t)\right) - f\left(t, Y(t)\right) \right| \mathrm{d}t \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x_1} L \left|\varphi(t) - Y(t)\right| \mathrm{d}t \right| \le Lm \left| \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}t \right| \le Lm \left|x_1 - x_0\right| \le Lm\eta .$$

Звідси $1 < L\eta$, що не можливо, бо число η може вибраним як завгодно малим, наприклад $\eta < 1/L$. Прийшли до суперечності, тому на відрізку $[x_0; x_0 + \eta]$ $\varphi(x) \equiv Y(x)$. Аналогічно доводиться, що й на відрізку $[x_0 - h; x_0]$ функції $\varphi(x)$, $Y(x)$ тотожно співпадають. ■

Лекція 9.
Неявні диференціальні рівняння першого порядку (частина 1).

План.

1. Основні означення й поняття.
2. Задача Коші. Класифікація розв'язків.
3. Рівняння степеня *n*.
4. Неповні рівняння.

1. Основні означення й поняття. ***Неявним диференціальним рівнянням першого порядку*** (або *рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної*) називають співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

де функція $F(x, y, z)$ неперервна в області $D \subset \mathbf{R}^3$.

Диференціальні рівняння, розв'язані відносно похідної:

$$y' = f(x, y), \qquad \textbf{(2)}$$

які вивчались раніше, є частковим випадком рівняння (1), бо їх, очевидно, можна записати у вигляді

$$F(x, y, y') \equiv y' - f(x, y) = 0.$$

Нагадаємо, що функцію $y = \varphi(x)$, визначену на проміжку (a, b), називають ***розв'язком*** рівняння (1), якщо виконуються такі умови:

1) $\varphi(x)$ диференційовна на (a, b);

2) $\left(x, \varphi(x), \varphi'(x)\right) \in D$ при $x \in (a, b)$;

3) $F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x)\right) = 0$ для всіх $x \in (a, b)$.

Під розв'язком рівняння (1) у неявному вигляді, як і для рівняння (2), розуміють розв'язок $y = y(x)$, заданий співвідношенням $\Phi(x, y) = 0$, яке визначає *y* як неявну функцію від *x*.

Функцію, яка задана параметрично:

$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, $t \in (t_1, t_2)$, називають

розв'язком рівняння (1) на проміжку (t_1, t_2), якщо

$$F\left(\varphi(t),\psi(t),\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\equiv 0,\quad \varphi'(t)\neq 0,\ t\in(t_1,t_2).$$

Таким чином, розв'язок рівняння (2) можна записати в одному з трьох виглядів:

$$y=y(x);\ \Phi(x,y)=0;\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t).$$

Для кожного з них на площині Oxy відповідає деяка крива, яку і надалі називатимемо ***інтегральною***.

Припустимо, що рівняння (1) у кожній точці (x,y) деякої області визначає одне або декілька дійсних значень y'. Побудувавши в кожній точці (x,y) цієї області одиничні вектори, нахил яких до осі Ox визначається значеннями y' в цій точці, одержимо ***поле напрямів*** (див. також лекцію 7, п.1). Задача інтегрування рівняння (1) полягає у тому, щоб знайти всі гладкі криві, у кожній точці яких напрям дотичної співпадає з одним з напрямів поля у цій точці.

2. Задача Коші. Класифікація розв'язків. Так само, як і для рівняння (2), важливою задачею інтегрування рівняння (1) є ***задача Коші***, яка полягає у знаходженні такого розв'язку $y=y(x)$ рівняння (1), який задовольняє ***початкову умову***

$$y(x_0)=y_0. \tag{3}$$

Будемо говорити, що розв'язок задачі Коші (1), (3) єдиний, якщо через точку (x_0,y_0) в досить малому її околі проходить стільки інтегральних кривих, скільки напрямів поля визначає рівняння (1) у цій точці. У іншому випадку задача Коші має не єдиний розв'язок.

Раніше було з'ясовано, що для однозначного визначення розв'язку рівняння (2) достатньо було задати початкову умову (3). Виникає питання: чи умови (3) достатньо для однозначного визначення розв'язку рівняння (1)? Виявляється, що лише цієї умови замало.

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$y'^2 - 4x^2y^2 = 0.$$

Воно еквівалентне сукупності двох рівнянь: $y' = 2xy$, $y' = -2xy$ з загальними розв'язками $y = C_1e^{x^2}$, $y = C_1e^{-x^2}$ відповідно. Маємо дві сім'ї інтегральних кривих. Ці криві, зокрема, відрізняються тим, що вони у кожній точці (x_0, y_0) мають різні дотичні. Легко бачити, що для одно значного визначення розв'язку, крім умови (3), досить задати ще одне значення $y'(x_0) = y'_0$, тобто потрібно задати напрям дотичної до інтегральної кривої у точці (x_0, y_0).

Теорема 1. Нехай функція $F(x, y, y')$ задовольняє такі умови:

1) вона визначена і неперервно диференційовна разом з похідними F'_y, $F'_{y'}$ в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y'_0);

2) $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$;

3) $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$.

Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, визначений і неперервно диференційовний у деякому околі точки $x = x_0$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, і такий, що $y'(x_0) = y'_0$.

Доведення. З теореми про існування неявної функції трьох змінних випливає, що рівняння (1) при зроблених припущеннях визначає y' як однозначну функцію від x, y: $y' = f(x, y)$, яка задана і неперервно диференційовна в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0), причому

$$f(x_0, y_0) = y'_0.$$

Застосовуючи до задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

теорему Пікара (лекція 2), можемо стверджувати, що вона має єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, причому цей розв'язок визначений і неперервно диференційовний в деякому околі точки $x = x_0$. Оскільки при цьому

$$y'(x_0) = f\left(x_0, y(x_0)\right) = f(x_0, y_0) = y_0',$$

тобто $y'(x_0) = y_0'$, то знайдений розв'язок $y = y(x)$ рівняння (1) є шуканим. Теорему доведено.

Припустимо, що рівняння (1) можна розв'язати відносно похідної. Тоді в деякому околі точки (x_0, y_0) для похідної y' в загальному випадку матимемо декілька дійсних значень:

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{4}$$

де $f_k(x, y)$ визначені в деякій області D. При цьому, якщо кожна з функцій $f_k(x, y)$ з (4) задовольняє умови теореми Пікара, то через точку (x_0, y_0) буде проходити m інтегральних кривих рівняння (1). Припустимо, що у кожній точці області D напрями поля, визначені кожним з рівнянь (4), різні, тобто інтегральні криві різних рівнянь (4) не дотикаються одна одної всередині області D.

Розглянемо такі поняття, як загальний, частинний та особливий розв'язки рівняння (1). Для цього припустимо, що рівняння (1) в околі точки (x_0, y_0) можна розв'язати відносно y', тобто воно розпадається на сукупність рівнянь (4). Нехай кожне з цих рівнянь має загальний розв'язок

$$y = \varphi_k(x, C), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

або загальний інтеграл

$$\Phi_k(x, y, C) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

де C – довільна стала. Сукупність загальних розв'язків (5) або сукупність загальних інтегралів (6) називають ***загальним інтегралом*** рівняння (1) (це означення можна використовувати також тоді, коли рівняння (1) відносно y' має нескінченну кількість розв'язків).

Розв'язок рівняння (1), в кожній точці графіка якого виконується умова єдиності розв'язку задачі Коші, називають ***частинним розв'язком*** цього рівняння. ***Особливим розв'язком*** рівняння (1) називають розв'язок, у кожній точці графіка якого порушується властивість єдиності (тобто через кожну точку проходить не менше двох інтегральних кривих, що мають однаковий напрям дотичної).

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $y'^3 - 4x^2 y' = 0.$

Розв'язання. Задане рівняння еквівалентне сукупності трьох диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = 0, \; y' = 2x, \; y' = -2x.$$

Їх загальними розв'язками відповідно є

$$y = C, \quad y = x^2 + C, \quad y = -x^2 + C. \qquad \textbf{(7)}$$

Сукупність загальних розв'язків (7) є шуканим загальним інтегралом, причому розв'язок задачі Коші у кожній точці площини Oxy, що не належить осі Oy, єдиний. Справді, через кожну точку (x_0, y_0), $x_0 \neq 0$, проходять три інтегральні криві, а саме:

$$y = y_0, \quad y = x^2 + y_0 - x_0^2, \quad y = x^2 + y_0 + x_0^2,$$

дотичні до яких у цій точці утворюють з додатним напрямом осі Ox кути 0, $\operatorname{arctg}(2x_0)$, $-\operatorname{arctg}(2x_0)$ відповідно.

Щодо точок осі Oy, то хоча через кожну таку точку проходять три інтегральні криві з сім'ї (7), у цих точках задача Коші має не єдиний розв'язок (через кожну точку проходять три інтегральні криві, що мають однаковий напрям дотичної). ■

2. Рівняння степеня *n*. Важливим частковим випадком рівняння (1) є ***рівняння першого порядку степеня n.*** Так називають рівняння вигляду

$$a_0(x,y)(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0, \qquad \textbf{(8)}$$

де $a_k(x,y)$, $k = 0,1,\ldots,n$, – функції, неперервні у деякій області G площини Oxy, причому $a_0(x,y) \neq 0$. Згідно з основною теоремою алгебри, рівняння (8) визначає рівно n значень для y'. Відкидаючи комплексні значення, матимемо m $(m \le n)$ диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = f_k(x,y), \;\; k = 1,2,\ldots,m. \qquad \textbf{(9)}$$

Нехай в кожній точці $(x, y) \in G$ напрями поля, які визначаються кожним з рівнянь (9), різні, тобто інтегральні криві різних рівнянь (9) не дотикаються одна одної всередині області G.

Сукупність загальних розв’язків

$$y = \varphi_k(x, C),\ k = 1, 2, \dots, m,$$

або загальних інтегралів

$$\Phi_k(x, y, C) = 0,\ k = 1, 2, \dots, m,$$

рівнянь (9) є загальним інтегралом рівняння (9). Його можна записати також у вигляді

$$\left(y - \varphi_1(x, C)\right) \cdot \left(y - \varphi_2(x, C)\right) \cdot \ldots \cdot \left(y - \varphi_m(x, C)\right) = 0$$

або

$$\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \cdot \ldots \cdot \Phi_m(x, y, C) = 0.$$

Нехай існує хоча б одна точка (x_0, y_0), у якій інтегральні криві деяких двох функцій $f_k(x, y)$ співпадають, тобто інтегральні криві відповідних рівнянь дотикаються в точці (x_0, y_0). Внаслідок цього інтегральними кривими рівняння (8), окрім інтегральних кривих рівнянь (9) будуть також криві, складені з інтегральних кривих згаданих рівнянь шляхом “склеювання” в точці (x_0, y_0).

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $y'^2 + (y^2 - 1)y' - y^2 = 0$.

Розв’язання. Це рівняння рівносильне сукупності рівнянь $y' = 1$ та $y' = -y^2$, праві частини яких визначені на всій площині і в жодній точці їх значення не співпадають. Тому поле, визначене заданим рівнянням, утворюється накладанням полів, визначеними рівняннями $y' = 1$ та $y' = -y^2$. Загальні розв’язки цих рівнянь є $y = x + C$, $y = (x + C)^{-1}$ відповідно. Сукупність цих розв’язків визначає загальний інтеграл вихідного рівняння. Його можна записати у вигляді одного співвідношення:

$$(y - x - C) \cdot \left(y - (x + C)^{-1}\right) = 0.$$

Розв’язок задачі Коші для заданого рівняння з початковими даними x_0, y_0 буде єдиним: в точці (x_0, y_0) маємо два напрями поля $y_0' = 1,\ y_0' = -y_0^2$ і через неї проходять рівно дві інтегральні криві:

$$y = x + y_0 - x_0 \ \text{ і } \ y = \frac{1}{x + 1/y_0 - x_0}, \ \text{якщо} \ y_0 \neq 0,$$

або

$$y = x - x_0 \ \text{ і } \ y = 0, \ \text{якщо} \ y_0 = 0.$$

Ці розв’язки є частинними. Особливих розв’язків немає. ■

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння $y'^2 - 2xy' = 0$.

Розв’язання. Розв’язуючи відносно y', знаходимо $y' = 0$, $y' = 2x$. Хоча поля, визначені цими рівняннями, як у прикладі 2, визначені на всій площині, тут не спостерігаємо накладання полів, бо у точках осі Oy $(x = 0)$ напрями цих полів співпадають. Співвідношення

$$(y - C)\cdot(y - x^2 - C) = 0$$

є шуканим загальним інтегралом.

Зауважимо, що вздовж таких ліній можливе так зване “склеювання” розв’язків. Так через кожну точку $(0, y_0)$ осі Oy, крім розв’язків

$$y = y_0, \quad y = y_0 + x^2,$$

проходять також інтегральні криві

$$y = \begin{cases} x^2 + y_0, & x \le 0, \\ y_0, & x \ge 0, \end{cases} \quad \text{і} \quad y = \begin{cases} y_0, & x \le 0, \\ y_0 + x^2, & x \ge 0. \end{cases}$$ ■

4. Неповні рівняння. Розглянемо рівняння вигляду (1), ліва частина яких не містить незалежної змінної або шуканої функції (або і незалежної змінної, і шуканої функції). Такі рівняння називають ***неповними***. Найпростішим з них є ***рівняння, яке містить тільки похідну***, тобто рівняння вигляду

$$F(y') = 0. \qquad \textbf{(10)}$$

Нехай рівняння (10) має деяку (скінченну або нескінченну) кількість дійсних розв’язків

$$y' = k_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, \qquad \textbf{(11)}$$

де k_j – деякі сталі, які не заповнюють повністю деякий інтервал. Інтегруючи (11), знаходимо

$$y = k_j x + C \quad \Rightarrow \quad k_j = \frac{y - C}{x}.$$

Підставляючи k_j у (10), одержуємо шуканий загальний інтеграл:

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \qquad \textbf{(12)}$$

У випадку, коли корені (11) цілком заповнюють деякий інтервал, то рівняння (10) матиме також розв’язки, відмінні від (12). Наприклад, коренями рівняння

$$y' + |\,y'\,| = 0$$

є $y' = k$, де $-\infty < k \le 0$, які повністю заповнюють проміжок $(-\infty, 0]$. Тоді, крім інтегральних кривих $y = kx + c,\ k \le 0$, розв’язком заданого рівняння є також функція $y = -x^n,\ 0 \le x < +\infty$, яка при $n > 1$ не входять до знайденої сім’ї інтегральних кривих.

Розглянемо тепер ***рівняння, яке явно не містить шуканої функції,*** тобто рівняння вигляду

$$F\left(x, y'\right) = 0. \qquad \textbf{(13)}$$

Якщо рівняння (13) можна розв’язати відносно y', тобто

$$y' = f_k(x), \ k = 1, 2, \ldots, \qquad \textbf{(14)}$$

де $f_k(x)$ – неперервні функції, то сукупність загальних розв’язків

$$y = \int f_k(x)\,\mathrm{d}\,x + C, \ \ k = 1, 2, \ldots,$$

є загальним інтегралом рівняння (13).

Якщо рівняння (13) не розв’язується в елементарних функціях відносно y', але можна знайти такі функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$, що $F\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \equiv 0$, то це рівняння можна записати у вигляді

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t). \qquad \textbf{(15)}$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}\,y = y'\,\mathrm{d}\,x$, а також (15), легко знайти загальний розв'язок рівняння (13) у параметричній формі. Оскільки параметричний вираз для x задає формула (15), то залишається знайти вираз для y. Оскільки

$$\mathrm{d}\,y = \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

то

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t + C.$$

Отже, загальним розв'язком у параметричній формі рівняння (13) є

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t + C. \qquad \textbf{(16)}$$

Якщо з (16) вдається виключити параметр t, то одержимо загальний розв'язок (загальний інтеграл) у явному або неявному вигляді.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння $e^{y'} - y' - x = 0$.

Розв'язання. Представимо рівняння у параметричній формі, поклавши $y' = t$:

$$x = e^t - t, \; y' = t.$$

Тоді

$$\mathrm{d}\,y = y'\,\mathrm{d}\,x = t(e^t - t)\,\mathrm{d}\,t,$$

а тому

$$y = \int t(e^t - t)\,\mathrm{d}\,t + C = (t-1)e^t - \frac{t^2}{2} + C.$$

Таким чином, загальним розв'язком у параметричній формі є

$$x = e^t - t, \quad y = (t-1)e^t - \frac{t^2}{2} + C. \blacksquare$$

Розглянемо ***рівняння, яке явно не містить незалежної змінної***. Отже, нехай рівняння (1) має такий загальний вигляд

$$F(y, y') = 0. \qquad \textbf{(17)}$$

Якщо рівняння (17) можна розв'язати відносно y', тобто

$$y' = f_k(y), \quad k = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(18)}$$

і $f_k(y) \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots,$ то сукупність рівностей

$$x = \int \frac{\mathrm{d}\, y}{f_k(y)} = C, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

визначає його загальний розв'язок. Розв'язками рівняння (17) є також $y = b_j,\ j = 1, 2, \ldots,$ де b_j – корені рівняння $f_k(y) = 0$. Ці розв'язки можуть виявитися особливими.

Якщо (17) не розв'язується відносно y', але допускає параметричне представлення $F\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \equiv 0$, то

$$y = \varphi(t), \ \ y' = \psi(t),$$

а тому залишається знайти параметричний вираз для x. Оскільки

$$\mathrm{d}\, x = \frac{\mathrm{d}\, y}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,\mathrm{d}\, t}{\psi(t)},$$

то

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \mathrm{d}\, t + C.$$

Отже, загальним розв'язком у параметричній формі рівняння (17) є

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \mathrm{d}\, t + C, \ \ y = \varphi(t).$$

Приклад 5. Зінтегрувати рівняння $\ln y' + y'^2 - y = 0$.

Розв'язання. Нехай $y' = t$. Тоді $y = t^2 + \ln t$. Далі маємо:

$$\mathrm{d}\, x = \frac{\mathrm{d}\, y}{y'} = \frac{\mathrm{d}(t^2 + \ln t)}{t} = \left(2 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}\, t.$$

Отже, загальним розв'язком у параметричній формі рівняння є

$$x = 2t - \frac{1}{t} + C, \ \ y = t^2 + \ln t. \ \blacksquare$$

Лекція 10.
Неявні диференціальні рівняння першого порядку (частина 2).

План.

1. Узагальнено однорідне рівняння.
2. Загальний метод введення параметру.
3. Рівняння, розв'язане відносно незалежної змінної.
4. Рівняння, розв'язане відносно шуканої функції.
5. Рівняння Лагранжа, Клеро.

1. Узагальнено однорідне рівняння. Розглянемо рівняння

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

у якому ліва частина є однорідною функцією усіх своїх аргументів, якщо x, y, y' вважати величинами першого, k-го, $(k-1)$-го вимірів, тобто

$$F\left(tx, t^k y, t^{k-1} y'\right) = t^m \cdot F\left(x, y, y'\right). \qquad \textbf{(2)}$$

Таке рівняння називають ***узагальнено однорідним***. Узагальнено однорідні рівняння вивчались на лекції 4, але там вони були розв'язаними відносно похідної, а зараз маємо більш загальний випадок.

Зробимо заміну незалежної змінної та шуканої функції за формулами

$$x = e^t, \quad y = z \cdot e^{kt}, \qquad \textbf{(3)}$$

де t – нова незалежна змінна, $z = z(t)$ – нова шукана функція. Тоді

$$y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{(ze^{kt})'_t}{(e^t)'_t} = \frac{z' e^{kt} + kze^{kt}}{e^t} = (z' + kz) \cdot e^{(k-1)t}.$$

Виконуючи в рівнянні (1) підстановку (3), одержуємо:

$$F\left(e^t,\ ze^{kt},\ (z' + kz) \cdot e^{(k-1)t}\right) = 0.$$

Тепер, згідно з (2) (замість t, x, y і y' беремо e^t, 1, z і $z' + kz$ відповідно), маємо:

$$e^{mt} \cdot F\left(1,\ z,\ z' + kz\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F\left(1,\ z,\ z' + kz\right) = 0.$$

Скорочуючи на $e^{mt} \neq 0$, одержуємо неявне диференціальне рівняння без незалежної змінної, яке вивчалось на лекції 9 (формула (17)).

2. Загальний метод введення параметру. Розглянемо тепер рівняння загального вигляду

$$F(x,y,y')=0. \qquad \textbf{(4)}$$

Припустимо, що воно допускає параметричне представлення

$$x=\varphi(u,v), \quad y=\psi(u,v), \quad y'=\omega(u,v), \qquad \textbf{(5)}$$

тобто для всіх значень параметрів u і v маємо тотожність

$$F\big(\varphi(u,v),\psi(u,v),\omega(u,v)\big)\equiv 0.$$

Покажемо, що у цьому випадку завжди можна звести рівняння (4) до рівняння, яке розв'язане відносно похідної. Справді, підставляючи у формулу $\mathrm{d}\,y=y'\mathrm{d}\,x$ співвідношення

$$\mathrm{d}\,x=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}\,u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}\,v, \quad \mathrm{d}\,y=\frac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}\,u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}\,v, \quad y'=\omega(u,v),$$

одержуємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}\,u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}\,v=\omega(u,v)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}\,u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}\,v\right).$$

Якщо прийняти тепер u за незалежну змінну, а v – за шукану функцію цієї змінної, то одержимо рівняння, яке розв'язане відносно похідної:

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,u}=f(u,v). \qquad \textbf{(6)}$$

Якщо знайдений загальний розв'язок

$$v=\sigma(u,C) \qquad \textbf{(7)}$$

рівняння (6), то, підставляючи функцію v з (7) у перші два рівняння з (5), одержимо загальний розв'язок рівняння (4) у параметричній формі:

$$x=\varphi\big(u,\sigma(u,C)\big), \ \ y=\psi\big(u,\sigma(u,C)\big).$$

3. Рівняння, розв'язане відносно незалежної змінної. Практичне застосування загального методу введення параметру ускладнене такими труднощами:

1) знаходженням параметричного представлення (5);

2) інтегруванням рівняння (6).

Перша проблема легко вирішується, якщо рівняння (4) можна розв'язати відносно шуканої функції або незалежної змінної. Розглянемо спочатку той випадок, коли рівняння (4) розв'язане відносно незалежної змінної, тобто

$$x = f(y, y'). \tag{8}$$

Позначимо $y' = p$. Тоді

$$x = f(y, p). \tag{9}$$

Візьмемо диференціал від обох частин співвідношення (9):

$$\mathrm{d}x = f'_y(y,p)\,\mathrm{d}y + f'_p(y,p)\,\mathrm{d}p \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = f'_y(y,p) + f'_p(y,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

якщо $\mathrm{d}y \neq 0$. Оскільки

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} = \frac{1}{p},$$

то

$$\frac{1}{p} = f'_y(y,p) + f'_p(y,p)\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \quad \Rightarrow \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{1/p - f'_y(y,p)}{f'_p(y,p)}. \tag{11}$$

Якщо розглядати p як функцію змінної y, то рівняння (11) розв'язане відносно похідної. Нехай $p = \sigma(y, C)$ – загальний інтеграл цього рівняння, тоді з (9) випливає, що

$$x = f\left(y, \sigma(y, C)\right)$$

є загальним інтегралом рівняння (8).

Якщо $p = \gamma(y)$ – особливий розв'язок рівняння (10), то $x = f\left(y, \gamma(y)\right)$ може бути особливим розв'язком рівняння (8). Особливими можуть бути також розв'язки $y = b$, де $F(x, b, 0) = 0$.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$xy'^2 + yy' - y^4 = 0.$$

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно x:

$$x = \frac{y^4 - yy'}{y'^2}$$

і позначимо $y' = p$. Тоді

$$x = \frac{y^4 - yp}{p^2}. \qquad \textbf{(12)}$$

Здиференціюємо обидві частини (12) та виконаємо перетворення:

$$\mathrm{d}\,x = \frac{4y^3 - p}{p^2}\mathrm{d}\,y + \frac{py - 2y^4}{p^2}\mathrm{d}\,p \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \frac{4y^3 - p}{p^2} + \frac{py - 2y^4}{p^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y} \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{p} = \frac{4y^3}{p^2} - \frac{1}{p} + \left(\frac{y}{p} - 2\frac{y^4}{p^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y} \;\Rightarrow\; \frac{p - 2y^3}{p^2}\left(2\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,p\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$p = 2y^3 \quad \text{або} \quad 2\frac{\mathrm{d}\,y}{y} - \mathrm{d}\,p = 0.$$

Якщо $p = 2y^3$, то підставляючи в (12), одержуємо:

$$x = \frac{y^4 - 2y^4}{4y^6} = -\frac{1}{4y^2} \;\Rightarrow\; 4xy^2 + 1 = 0 \;\text{ – особливий розв'язок.}$$

З рівняння

$$2\frac{\mathrm{d}\,y}{y} - \mathrm{d}\,p = 0,$$

інтегруючи, знаходимо

$$2\ln|y| = p + C \;\Rightarrow\; y^2 = Cp.$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння у параметричній формі є

$$x = \frac{y^4 - yp}{p^2}, \quad y^2 = Cp.$$

Тут параметр p можна виключити:

$$x = \frac{y^4 - y\cdot y^2/C}{\left(y^2/C\right)^2} \;\Rightarrow\; y(x - C^2) = C \;\text{ – загальний розв'язок.} \;\blacksquare$$

4. Рівняння, розв'язане відносно шуканої функції. Припустимо тепер, що рівняння (4) можна розв'язати відносно шуканої функції, тобто

$$y = F(x, y'). \qquad \textbf{(13)}$$

Позначимо $y' = p$. Тоді

$$y = F(x, p). \qquad \textbf{(14)}$$

Візьмемо диференціал від обох частин рівняння (14):

$$\mathrm{d}\, y = F_x'(x, p)\,\mathrm{d}\, x + F_p'(x, p)\,\mathrm{d}\, p \quad \Rightarrow$$

$$p = F_x' + F_p' \cdot \frac{\mathrm{d}\, p}{\mathrm{d}\, x} \quad (\mathrm{d}\, x \neq 0) \quad \Rightarrow \qquad \textbf{(15)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\, p}{\mathrm{d}\, x} = \frac{p - F_x'(x, p)}{F_p'(x, p)}. \qquad \textbf{(16)}$$

Якщо розглядати p як функцію змінної x, то рівняння (16) розв'язане відносно похідної. Якщо $p = \sigma(y, C)$ – загальний інтеграл рівняння (16), то, згідно з (14),

$$y = F\left(x, \sigma(y, C)\right)$$

є загальним інтегралом рівняння (13).

Рівняння (15) може мати особливий розв'язок $p = \gamma(x)$. Тоді розв'язок $y = F\left(x, \gamma(x)\right)$ може бути особливим.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$x^3 y'^2 + x^2 y y' - 1 = 0.$$

Розв'язання. Розв'язавши рівняння відносно y:

$$y = \frac{1 - x^3 y'^2}{x^2 y'}$$

і позначивши $y' = p$, одержуємо

$$y = \frac{1 - x^3 p^2}{x^2 p}. \qquad \textbf{(17)}$$

Здиференціюємо обидві частини рівняння (17) і виконаємо не складні перетворення:

$$\mathrm{d}\,y=\mathrm{d}\left(x^{-2}p^{-1}\right)-\mathrm{d}\left(xp\right)\quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{d}\,y=-2x^{-3}p^{-1}\,\mathrm{d}\,x-x^{-2}p^{-2}\,\mathrm{d}\,p-p\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,p\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=-2x^{-3}p^{-1}-x^{-2}p^{-2}\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}-p-x\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}\quad\left(\mathrm{d}\,x\neq 0\right)\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}=\frac{-2x^{-3}p^{-1}-2p}{x^{-2}p^{-2}+x}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{1}{x^2p}+xp\right)\left(\frac{\mathrm{d}\,p}{p}+\frac{2}{x}\mathrm{d}\,x\right)=0\quad\Rightarrow$$

$$1+x^3p^2=0\quad\text{або}\quad \ln|\,p\,|+2\ln|\,x\,|=C\,.$$

З одержаних рівняння знаходимо

$$x=-\frac{1}{\sqrt[3]{p^2}}\ \text{ і }\ x=\frac{C}{\sqrt{p}}\ \text{відповідно.}$$

Підставляючи їх у (17), одержуємо:

$$y=2\sqrt[3]{p}\ \text{ і }\ y=\frac{1}{C^2}-C\sqrt{p}\,.$$

Отримали всі розв'язки у параметричній формі. Виключаючи параметр p, одержуємо ці самі розв'язки у явному вигляді:

$$y^2+\frac{4}{x}=0\ \text{– особливий розв'язок,}$$

$$y=\frac{1}{C}-\frac{C}{x}\ \text{– загальний розв'язок.}\ \blacksquare$$

5. Рівняння Лагранжа, Клеро. Частковим випадком рівняння (13) є рівняння

$$y=x\cdot\varphi(y')+\psi(y'),\tag{18}$$

де φ і ψ – диференційовані функції змінної y'. Рівняння (18) називають ***рівняння Лагранжа.***

Покажемо, що рівняння Лагранжа, на відміну від рівняння (13) загального вигляду, завжди інтегрується в квадратурах.

Позначимо $y'=p(x)$. Тоді

$$y=x\varphi(p)+\psi(p).\tag{19}$$

Диференціюючи співвідношення (18) за змінною x, одержуємо

$$y' = \varphi(p) + x\varphi'(p)\cdot\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} + \psi'(p)\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} \quad \Rightarrow$$

$$p = \varphi(p) + \left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}. \qquad \mathbf{(20)}$$

Якщо $\varphi(p) - p \neq 0$, то рівняння (20) можна записати у вигляді лінійного рівняння відносно функції $x(p)$:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,p} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\cdot x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Нехай загальним інтегралом останнього рівняння є

$$F(p, x, C) = 0. \qquad \mathbf{(21)}$$

Тоді (19) і (21) утворюють загальний розв'язок рівняння Лагранжа у параметричній формі (параметром є величина p; оскільки $p = y' = \operatorname{tg}\alpha$, то вона може набувати будь-яких значень).

Якщо числа p_k, $k = 1, 2, \ldots$, – корені рівняння $\varphi(p) - p = 0$, то відповідно одержимо розв'язки

$$y = p_k x + \psi(p_k),$$

які можуть бути як частинними, так і особливими (з геометричної точки зору маємо сім'ю прямих).

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння Лагранжа

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = xp^2 + p^2. \qquad \mathbf{(22)}$$

Диференціюючи (22), послідовно одержуємо

$$\mathrm{d}\,y = p^2\,\mathrm{d}\,x + 2xp\,\mathrm{d}\,p + 2p\,\mathrm{d}\,p \quad \Rightarrow \quad p\,\mathrm{d}\,x = p^2\,\mathrm{d}\,x + (2xp + 2p)\,\mathrm{d}\,p \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,p} + \frac{2x}{1-p} = \frac{2}{1-p} \qquad \left(p^2 - p \neq 0\right).$$

Останнє рівняння є лінійним. Його загальним розв'язком, як легко переконатись, є

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1.$$

Тоді з (22) маємо вираз для y:

$$y=\left(\frac{C}{(p-1)^2-1}-1\right)\cdot p^2+p^2=\frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Отже, отримали загальний розв'язок заданого рівняння Лагранжа у параметричній формі:

$$x=\frac{C}{(p-1)^2}-1,\quad y=\frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Виключаючи параметр p, одержуємо загальний розв'язок у явному вигляді:

$$y=\left(\sqrt{x+1}+C\right)^2.$$

Кореням $p_1=0$ та $p_2=1$ рівняння $p^2-p=0$ відповідають розв'язки $y=0$ та $y=x+1$ відповідно. Перший з них є особливим, а другий – частинним. ■

Розглянемо тепер випадок, коли в рівнянні Лагранжа (18) $\varphi(y')\equiv y'$. Тоді матимемо рівняння

$$y=xy'+\psi(y'),\tag{23}$$

яке називають ***рівнянням Клеро***[1]. Вважатимемо, що функція $\psi(y')$ є нелінійною відносно y' (інакше матимемо рівняння з відокремлюваними змінними).

Позначимо $y'=p$. Тоді

$$y=px+\psi(p).\tag{24}$$

Диференціюючи (24), одержуємо

$$\mathrm{d}\,y=p\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,p+\psi'(p)\,\mathrm{d}\,p\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=p+x\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}+\psi'(p)\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}\quad\Rightarrow$$

$$p'\cdot\left(x+\psi'(p)\right)=0\quad\Rightarrow$$

$$p'=0\quad\text{або}\quad x+\psi'(p)=0.$$

[1] КЛЕРО (Clairaut) Алексі Клод (1713-1765) – французький математик.

Розв'язком першого з них є $p = C$, що разом з (23) дає загальний розв'язок рівняння Клеро:

$$y = Cx + \psi(C). \tag{25}$$

Запис загального розв'язку легко запам'ятати: досить у рівнянні Клеро замінити y' на C (порівняйте з (23)). Очевидно, що з геометричної точки зору (25) є сім'єю прямих, яка залежить від одного параметра.

Рівняння $x + \psi'(p) = 0$ разом з (24) також є розв'язком рівняння Клеро, але у параметричному вигляді.

Виключивши з системи

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = px + \psi(p), \end{cases}$$

параметр p, одержимо $F(x, y) = 0$. Це рівняння кривої, яка не належить сім'ї (25), а отже є особливим розв'язком рівняння Клеро.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння Клеро

$$y = xy' - \frac{y'^2}{2}.$$

Розв'язання. Нехай $y' = p$, тоді

$$y = xp - p^2/2.$$

Диференціюючи це співвідношення , одержуємо

$$y' = p + xp' - pp' \quad \Rightarrow \quad p = p + xp' - pp' \quad \Rightarrow$$
$$(x - p)p' = 0.$$

Якщо $p' = 0$, то $p = C$, а тому загальним розв'язком є

$$y = Cx - C^2/2.$$

З рівняння $x - p = 0$ знаходимо розв'язок

$$x = p, \ \ y = px - \frac{p^2}{2}$$

у параметричній формі, який є особливим. Виключаючи p, цей розв'язок можна записати у вигляді $y = \dfrac{x^2}{2}$. ■

Лекція 11.

Особливі точки, особливі розв'язки, обвідна сім'ї кривих

План.

1. Особливі точки.
2. Особливі розв'язки.
3. Обвідна сім'ї кривих.

1. Особливі точки. Припустимо, що диференціальне рівняння

$$F(x,y,y')=0 \qquad \textbf{(1)}$$

в околі деякої точки (x_0,y_0) розв'язане відносно похідної, тобто

$$y'=f(x,y). \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо функція $f(x,y)$ в околі точки (x_0,y_0) задовольняє умови теореми Пікара, то через цю точку проходить тільки одна інтегральна крива рівняння (2). У випадку, коли $f(x,y)$ не задовольняє хоча б одну з умов згаданої теореми, то існування єдиного розв'язку не гарантується. Ті точки площини, в яких порушується хоча б одна з умов теореми Пікара, називають ***особливими точками*** рівняння (2). Так, наприклад, коли в точці (x_0,y_0) розв'язок розривний, не єдиний або не існує, то (x_0,y_0) – особлива точка.

Нехай функція $f(x,y)$ у точці (x_0,y_0) не є неперервною, тобто не виконується перша умова теореми Пікара. Можливі такі випадки:

Випадок 1: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a$, де a – скінченне число. Якщо $f(x,y)$ у точці (x_0,y_0) має границю, то можна скористатись теоремою Пікара. Справді, у цьому випадку $f(x,y)$ можна довизначити до неперервної в (x_0,y_0) (досить покласти $f(x_0,y_0)=a$).

Випадок 2: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\infty$. Розглянемо "перевернуте" рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}=\frac{1}{f(x,y)}. \qquad \textbf{(3)}$$

Функція $\dfrac{1}{f(x,y)}$ прямує до нуля, якщо $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Нехай $f(x_0,y_0)=0$. Тоді з теореми Пікара випливає, що рівняння (3) має єдиний розв'язок $x=\varphi(y)$, дотична до графіка якого в точці (x_0,y_0) є вертикальною (бо $\mathrm{d}\,x/\mathrm{d}\,y=0$).

Випадок 3: $f(x,y)$ не має ні скінченної, ні нескінченної границі в точці (x_0,y_0). Функція $f(x,y)$, а отже, і $\dfrac{1}{f(x,y)}$ в точці (x_0,y_0) не мають границі. Точку (x_0,y_0) у цьому випадку називають ***ізольованою особливою точкою*** рівняння (2).

Приклад 1. $y'=\dfrac{1}{y}$. Тут усі точки площини Oxy неособливі, крім, можливо, точок осі Ox $(y=0)$. У кожній точці цієї осі $f(x,y)=y^{-1}$ перетворюється в нескінченність, а права частина $f(x,y)=y$ "перевернутого" рівняння має скінченне значення (дорівнює нулю) і обмежену частинну похідну $\mathrm{d}\,x/\mathrm{d}\,y$. Отже, всі точки осі Ox також є неособливими. Через кожну точку $(x_0,0)$ осі Ox проходить єдина інтегральна крива $x=\varphi(y)$, яка має дотичну, паралельну до осі Oy. Справді, інтегруючи "перевернуте" рівняння з початковими даними $x=x_0$, $y_0=0$, отримуємо єдину інтегральну криву (параболу) $y^2=2(x-x_0)$, яка проходить через точку $(x_0,0)$ і має в цій точці вертикальну дотичну. Таким чином, рівняння $y'=y^{-1}$ не має особливих розв'язків.

Приклад 2. $y'=\dfrac{y}{x}$. Усі точки площини Oxy, які не лежать на осі Oy, є неособливими. У цих точках розглянемо "перевернуте" рівняння. Тоді всі точки, які не лежать на осі Ox, також є неособливими. У точці $(0,0)$ праві частини обох рівнянь (заданого і "перевернутого") перетворюються у невизначеність вигляду $0/0$, таким чином, вони невизначені і, отже, умови теореми Пікара в жодному околі цієї точки не виконуються для обох рівнянь. Тому $(0,0)$ є особливою точкою, причому ізольованою. Інтегруючи задане рівняння, одержуємо сім'ю півпрямих $y = Cx$ $(x \neq 0)$, $x = 0$ $(y \neq 0)$, які примикають до особливої точки – початку координат. Цей факт виявляє певну особливість поведінки сім'ї інтегральних кривих в околі ізольованої особливої точки вигляду $0/0$.

Приклад 3. $y' = -\dfrac{x}{y}$. Тут, як і у прикладі 2, $(0,0)$ – ізольована особлива точка. Загальний інтеграл $x^2 + y^2 = C^2$ (концентричні кола з центром у початку координат), а тому всі інтегральні криві замкнені і містять особливу точку $(0,0)$ всередині і жодна з інтегральних кривих не примикає до особливої точки.

Приклад 4. $y' = 2\sqrt{y}$. Права частина визначена і неперервна у верхній півплощині $(y \geq 0)$. Усі точки цієї півплощини є неособливими, крім точок, які належать осі Ox. Останні є особливими точками, бо в них порушується умова обмеженості f'_y, адже

$$f'_y = 1\Big/\sqrt{y}\,\Big|_{y=0} = \infty.$$

У цьому випадку особливі точки неізольовані, вони утворюють певну лінію. Таку лінію називають ***особливою лінією*** диференціального рівняння.

2. Особливі розв'язки. Як відомо, диференціальні рівняння першого порядку можуть мати ***особливі розв'язки*** – розв'язки, в кожній точці графіків яких порушується властивість єдиності розв'язку задачі Коші. Важливо відповісти на питання:

1) чи має задане рівняння особливий розв'язок;

2) якщо рівняння має особливий розв'язок, то як його знайти.

Найбільш просто відповісти на ці питання для рівнянь, розв'язаних відносно y'. Справді, припустимо, що у рівнянні (2) функція $f(x,y)$ в деякій області G площини Oxy неперервна. Тоді, якщо $f(x,y)$ в G має обмежену частинну похідну $f'_y(x,y)$, то через кожну точку області G пройде єдина інтегральна крива рівняння (2) і, отже, це рівняння особливих розв'язків немає.

Таким чином, особливі розв'язки рівняння (2) можуть існувати лише в тих точках, в яких не виконуються умови теореми Пікара. Зокрема, якщо $f(x,y)$ в околі точки (x_0, y_0) неперервна, то інтегральні криві, що відповідають особливим розв'язкам, можуть проходити лише через ті точки області G, в яких не виконується умова обмеженості похідної f'_y. Таким чином, особливі розв'язки рівняння (2) можуть існувати лише у тих точках, в околі яких f'_y необмежена.

Криві, вздовж яких похідна $f'_y(x,y)$ необмежена, називають ***кривими, підозрілими на особливий розв'язок***. Знайшовши криву, підозрілу на особливий розв'язок, потрібно:

1) перевірити, чи вона є інтегральною кривою;

2) переконатись, що в кожній її точці порушується єдиність розв'язку. Якщо виконуються обидві умови, то крива, підозріла на особивий розв'язок, дійсно буде особливим розв'язком рівняння (2).

Приклад 5. Знайти особливі розв'язки рівнянь

а) $y' = xe^y$, б) $y' = 2\sqrt{y}$, в) $y' = 2\sqrt{y} + 1$, г) $y' = \dfrac{y \ln y}{x}$.

Розв'язання. а) Функція $f(x,y) = xe^y$ неперервна в будь-якій замкненій області G площини Oxy, а частинна похідна

$$f'_y(x,y) = xe^y$$

обмежена в G, тому особливих розв'язків немає.

б) $f(x,y) = 2\sqrt{y}$ неперервна в будь-якій замкненій області півплощини $y \ge 0$, а $f_y'(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ необмежена при $y \to +0$, тому $y = 0$ може бути особливим розв’язком. Очевидно, що $y = 0$ є розв’язком. Загальний розв’язок:

$$y = (x+C)^2 \big/ 4, \quad x \ge -C .$$

Таким чином, через кожну точку прямої $y = 0$ проходять дві інтегральні криві: пряма $y = 0$ і деяка з парабол з сім’ї $y = \dfrac{(x+C)^2}{4}$, $x \ge -C$ (рис. 1). Отже, $y = 0$ – особливий розв’язок.

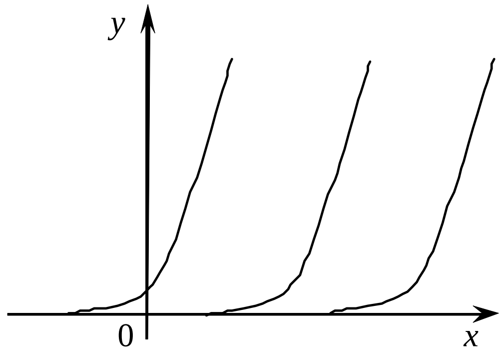

Рис. 1

в) Функція $f_y'(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ необмежена при $y \to +0$. Але $y = 0$ не є розв’язком. Оскільки в інших точках верхньої півплощини *Oxy* права частина

$$f(x,y) = 2\sqrt{y} + 1$$

задовольняє умови теореми Пікара, то рівняння особливих розв’язків немає.

г) $f(x,y) = \dfrac{y \ln y}{x}$ – неперервна в будь-якій замкненій області, де $x \ne 0$, $y \ge 0$ (при $y = 0$ вважаємо, що $f(x,0) = \lim\limits_{y \to 0} y x^{-1} \ln y = 0$). Оскільки

$$f_y'(x,y) = \frac{\ln y + 1}{x},$$

то $\lim\limits_{y \to 0} f_y'(x,y) = -\infty$. Таким чином, $y = 0$ – крива, підозріла на особливий розв’язок. Очевидно, що $y = 0$ – розв’язок. Перевіримо, чи порушується властивість єдиності в кожній точці прямої $y = 0$. Загальний розв’язок: $y = e^{Cx}$. Припустимо, що в точці $(x_0, 0)$ деяка крива з сім'ї $y = e^{Cx}$ дотикається до осі абсцис, тобто $0 = e^{Cx}$. Оскільки така рівність неможлива, то через кожну точку осі Ox проходить єдина інтегральна крива $y = 0$. Тому задане рівняння особливих розв'язків немає. Дослідимо тепер поведінку інтегральних кривих при $x \to 0$. Зауважимо, що у точці $x = 0$ осі Oy права частина рівняння невизначена.

Однак, підставляючи $x = 0$ у загальний розв'язок, отримуємо $y = e^{C\cdot 0} = 1$. Ця рівність справджується для будь-якого C. Отже, всі інтегральні криві, крім кривої $y = 0$ ($x \neq 0$), прилягають до точки (0,1) (рис. 2). ■

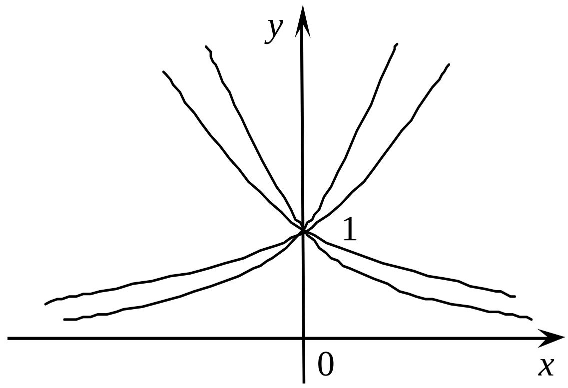

Рис. 2

Розглянемо питання про існування особливих розв'язків для неявних диференціальних рівнянь першого порядку. Припустимо, що рівняння (1) визначає скінченну або нескінченну кількість дійсних значень y':

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, ..., \tag{4}$$

і всі $f_k(x, y)$ неперервні й мають частинні похідні за змінною y. Тоді, застосовуючи до кожного з рівнянь (4) вище наведені міркування, ми можемо знайти криві, підозрілі на особливі розв'язки цих рівнянь. Такими є криві, вздовж яких $\dfrac{\partial f_k}{\partial y}$ перетворюється в нескінченність. Вони будуть підозрілими і на особливий розв'язок рівняння (1).

Однак розв'язувати рівняння (1) відносно похідної немає необхідності, бо частинну похідну $\dfrac{\partial f_k}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial y'}{\partial y}$ можна знайти безпосередньо з рівняння (1). Справді, диференціюючи (1) за змінною y (у припущенні, що існують F'_y і $F'_{y'}$), одержуємо:

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y'}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Похідна $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$ (в припущенні, що $F'_y \neq 0$) буде необмеженою, якщо $F'_{y'}=0$. Цю умову потрібно розглядати спільно з рівнянням (1), адже нас цікавлять не будь-які криві, вздовж яких $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$ необмежена, а лише інтегральні криві рівняння (1). Отже, криві, підозрілі на особливий розв'язок, можуть бути знайдені виключенням y' з системи:

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0. \end{cases} \tag{5}$$

Виключаючи похідну y' з (5), знайдемо, взагалі кажучи, деяку криву, яку називають ***дискримінантною кривою*** рівняння (1). Дискримінантна крива (або її частина) буде особливим розв'язком рівняння (1), якщо вона є розв'язком цього рівняння і у кожній її точці порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

Приклад 6. Знайти особливий розв'язок рівняння Клеро

$$y-xy'+e^{y'}=0. \tag{6}$$

Розв'язання. Складемо систему (5):

$$\begin{cases} y-xp+e^{p}=0, \\ -x+e^{p}=0. \end{cases} \qquad (p=y').$$

Звідси знаходимо дискримінантну криву

$$y=x\ln x-x.$$

Функція $y=x\ln x-x$ – розв'язок рівняння (6). Загальним розв'язком є сім'я прямих $y=Cx-e^{C}$. Покажемо, що в кожній своїй точці крива $y=x\ln x-x$ має дотичну, яка належить сім'ї $y=Cx-e^{C}$.

Справді, якщо деяка пряма із сім'ї $y=Cx-e^C$ є дотичною до кривої $y=x\ln x-x$ в точці (x_0,y_0), то

$$x_0\ln x_0-x_0=Cx_0-e^C \tag{7}$$

і $\ln x_0+1-1=C$, тобто $C=\ln x_0$.

Підставивши знайдене значення C у (7), одержимо тотожність. Таким чином, дотичною до кривої $y=x\ln x-x$ в точці (x_0,y_0) буде пряма із сім'ї $y=Cx-e^C$, для якої $C=\ln x_0$ (рис. 3).

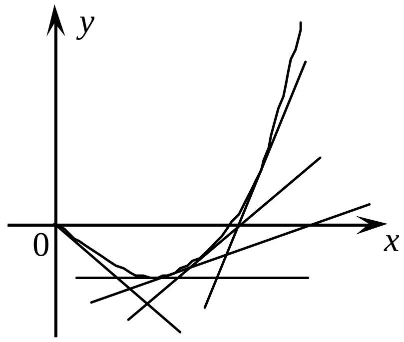

Рис. 3

Тому через кожну точку інтегральної кривої $y=x\ln x-x$ проходять дві інтегральні криві: сама крива $y=x\ln x-x$ і деяка пряма з сім'ї $y=Cx-e^C$. Отже, $y=x\ln x-x$ – особливий розв'язок. ■

3. Обвідна сім'ї кривих. Розглянемо ще один спосіб знаходження особливого розв'язку рівняння (1), який ґрунтується на понятті обвідної сім'ї кривих. Нехай маємо однопараметричну сім'ю кривих

$$\Phi(x,y,C)=0, \tag{8}$$

де C – параметр. Криву l називають ***обвідною сім'ї кривих*** (8), якщо вона у кожній своїй точці дотикається до деякої кривої із сім'ї (8) і ні на якій ділянці не збігається з жодною кривою заданої сім'ї (рис. 4).

Припустимо, що сім'я кривих (8) є загальним інтегралом рівняння (1). Тоді, якщо ця сім'я має обвідну, то вона є особливим розв'язком рівняння.

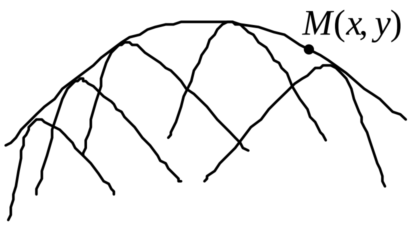

Рис. 4

Справді, візьмемо довільну точку $M(x,y)$ на обвідній. У точці M, яка одночасно лежить і на одній з інтегральних кривих, напрям дотичної до обвідної збігається з напрямом поля, заданого рівнянням (1). Отже, крива l є інтегральною кривою. А оскільки через кожну її точку проходять дві інтегральні криві – крива l і одна з кривих сім'ї (8), то l є особливим розв'язком.

Встановимо тепер, як знаючи сім'ю кривих (8), знайти обвідну цієї сім'ї, якщо, безперечно, відповідна обвідна існує, адже не кожна однопараметрична сім'я кривих має обвідну (наприклад, сім'я прямих $y = Cx$, сім'я концентричних кіл $x^2 + y^2 = C^2$ обвідної не мають; сім'я парабол $y = (x + C)^2$ має обвідну $y = 0$; сім'я синусоїд $y = \sin(x + C)$ має дві обвідні $y = 1$ і $y = -1$).

Виведемо необхідні умови існування обвідної. Нехай сім'я кривих (8) має обвідну, рівняння якої запишемо у параметричній формі

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{9}$$

де $x(t)$, $y(t)$ – диференційовні функції на деякому проміжку (α, β). Оскільки обвідна для різних t дотикається до різних кривих із сім'ї (8), то величину C у (8) можна розглядати як функцію від t, тобто $C = C(t)$. Припустимо, що $C'(t) \neq 0$, $t \in (\alpha, \beta)$, оскільки інакше обвідна в кожній точці буде дотикатися до однієї й тієї самої інтегральної кривої з сім'ї (8), а тому вона збігатиметься з цією кривою. Тоді, підставляючи (9) у (8), маємо тотожність

$$\Phi\big(x(t), y(t), C(t)\big) \equiv 0.$$

Нехай $\Phi(x, y, C)$ має неперервні похідні Φ'_x, Φ'_y. Тоді

$$\Phi'_x \cdot x'_t(t) + \Phi'_y \cdot y'_t(t) + \Phi'_C \cdot C'_t(t) = 0. \tag{10}$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт k дотичної до кривої із сім'ї (8):

$$k = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y} \quad \text{(за умови, що } \Phi'_y \neq 0\text{)}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт k_1 дотичної до обвідної: $k_1 = y'(t)/x'(t)$. Але оскільки $k = k_1$, то

$$\Phi'_x \cdot x'(t) + \Phi'_y \cdot y'(t) = 0.$$

Тоді з (10) матимемо

$$\Phi'_C\left(x(t), y(t), C(t)\right) = 0.$$

Отже, якщо сім'я кривих (8) має обвідну й у кожній точці кривих з цієї сім'ї $\Phi'_y(x, y, C) \neq 0$ або $\Phi'_x(x, y, C) \neq 0$, то координати обвідної одночасно задовольняють систему

$$\begin{cases} \Phi\left(x(t), y(t), C(t)\right) \equiv 0, \\ \Phi'_C\left(x(t), y(t), C(t)\right) = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(11)}$$

Умови (11) є необхідними, щоб крива (9) була обвідною сім'ї (8).

Криву, координати якої задовольняють систему рівнянь (11), називають ***дискримінантною кривою сім'ї кривих*** (8).

Покажемо, що ці умови у випадку, коли у кожній точці кривої (9) $\Phi'_x(x, y, C)$ і $\Phi'_y(x, y, C)$ одночасно не дорівнюють нулю, є також достатніми для того, щоб ця крива була обвідною для сім'ї кривих (8). Справді, нехай $\Phi'_y(x(t), y(t), C(t)) \neq 0$. Тоді, диференціюючи першу тотожність системи (11) за змінною t, одержуємо

$$\Phi'_x \cdot x'_t(t) + \Phi'_y \cdot y'_t(t) + \Phi'_C \cdot C'_t(t) = 0.$$

Звідси, враховуючи друге рівняння, маємо $\Phi'_x \cdot x'_t(t) + \Phi'_y \cdot y'_t(t) = 0$. Отже,

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y},$$

що й доводить потрібне твердження. Таким чином, для знаходження обвідної одно параметричної сім'ї кривих маємо таке правило:

1) із системи (11) за допомогою виключення параметра C знайти дискримінантну криву сім'ї кривих;

2) з отриманої дискримінантною кривої усунути точки, де Φ'_x і Φ'_y одночасно дорівнюють нулю. Решта дискримінантної кривої буде обвідною заданої сім'ї кривих.

Лекція 12.

Диференціальні рівняння вищих порядків

План.

1. Основні поняття й означення. Задача Коші.
2. Класифікація розв'язків.

1. Основні поняття й означення. Задача Коші. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Вважатимемо, що рівняння (1) можна розв'язати (принаймні в сенсі теореми про існування неявної функції) відносно старшої похідної:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad \textbf{(2)}$$

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна n разів на інтервалі (a,b) (числа a і b можуть бути і невласними), називають ***розв'язком*** рівняння (2) на цьому інтервалі, якщо вона для всіх $x \in (a,b)$ перетворює це рівняння в тотожність.

Кожному розв'язку рівняння (2), так само, як і розв'язку диференціального рівняння першого порядку, на площині (x, y) відповідає деяка крива, яку, як і раніше, називатимемо ***інтегральною кривою***.

Подібно до того, як диференціальне рівняння першого порядку задає деяку загальну властивість сім'ї дотичних усіх його інтегральних кривих (лекція 7), кожне рівняння n-го порядку також виражає деяку загальну геометричну властивість усіх його інтегральних кривих.

Наприклад, кожне рівняння другого порядку $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ можемо записати у вигляді

$$F\left(x, y, y', \left(1 + y'^2\right)^{3/2} \cdot \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}\right) = 0$$

або, перепозначивши,

$$F_1\left(x, y, y', \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}\right)=0,$$

звідки видно, що воно виражає в загальному випадку зв'язок між координатами, нахилом дотичної і кривиною в кожній точці інтегральної кривої.

Для рівняння (2) ***задача Коші (початкова задача)*** формулюється так: серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0',\ \ \dots\ ,\quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad \textbf{(3)}$$

де x_0, y_0, $y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ – довільні наперед задані числа, які називають ***початковими даними*** рівняння (2). Число x_0 називають початковим значенням незалежної змінної x, сукупність чисел y_0, $y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ – ***початковими даними розв'язку*** $y = y(x)$, а умови (3) – ***початковими умовами*** цього рівняння.

Зокрема, для диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \qquad \textbf{(4)}$$

задача Коші полягає у знаходженні розв'язку $y = y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'\ . \qquad \textbf{(5)}$$

З геометричної точки зору задача Коші для випадку $n = 2$ полягає у знаходженні такої інтегральної кривої, яка проходить через точку (x_0, y_0) і має у цій точці заданий напрям дотичної y_0', тобто $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$.

Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння n-го порядку (2) не означає, що через точку (x_0, y_0) проходить тільки одна інтегральна крива, як це було для рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної.

Наприклад, єдиність розв'язку задачі Коші (4), (5) потрібно розуміти так, що через кожну точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива рівняння (4), дотична до якої у цій точці утворює з додатним напрямом осі Ox кут α_0, $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$. У той же час разом з цією інтегральною кривою через точку (x_0, y_0) можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної в цій точці.

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Розв'язання. Легко довести, що всі розв'язки рівняння містяться в формулі

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі. Звідси

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Виберемо C_1 і C_2, щоб задовольнити початкові умови. Очевидно, що $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Отже, шуканим розв'язком буде $y = \cos x$. Цей розв'язок єдиний. Однак через точку (0,1), окрім кривої $y = \cos x$, проходить безліч інтегральних кривих, які можна описати формулою $y = \cos x + C_2 \sin x$, де $C_2 \neq 0$ – довільна стала, але жодна з дотичних до них в точці (0,1) не співпадає з дотичною до кривої $y = \cos x$ у цій точці. ■

Розглянемо питання про механічне тлумачення диференціального рівняння другого порядку, його розв'язків та задачі Коші. Нехай матеріальна точка маси m рухається по прямій, яку приймемо за вісь Ox, під дією сили $F\left(t, x, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$, залежної від часу t, положення x і швидкості $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ у момент часу t. Тоді згідно з другим законом Ньютона маємо

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right), \qquad \textbf{(6)}$$

де $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ – прискорення точки в момент часу t.

Запишемо рівняння (6) у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = f\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right). \qquad \textbf{(7)}$$

Кожному розв'язку $x = x(t)$ відповідає певний ***закон руху***. Тому часто розв'язок $x = x(t)$ називають ***рухом,*** який визначений рівнянням (7). Задача інтегрування рівняння (7) полягає у знаходженні усіх рухів, які визначені цим рівнянням, та у вивченні їх властивостей.

Дамо механічне тлумачення задачі Коші для рівняння (7). Ця задача полягає у знаходженні такого руху $x = x(t)$, який задовольняє початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = x_0',$$

тобто в початковий момент часу $t = t_0$ точка повинна займати задане положення x_0 і мати задану швидкість x_0'.

Достатня умова існування розв'язку задачі Коші для рівняння першого порядку, поширюється і на випадок рівняння n-го порядку. А саме: можна довести, що для існування (неперервного разом з похідними до порядку n включно) розв'язку задачі Коші для рівняння (2) досить припустити, щоб права частина цього рівняння була неперервною в околі початкових даних (***теорема Пеано***).

Наведемо без доведення основну теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші (2), (3) у спрощеному формулюванні (без умови Ліпшіца на праву частину рівняння (2)).

Теорема (Пікара). *Нехай функція* $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ *у рівнянні (2) визначена у деякій замкненій обмеженій області*

$$Q: \quad |x-x_0|\le a, \quad |y-y_0|\le b, \quad |y'-y_0'|\le b, \ \ldots, \ |y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}|\le b,$$

де $a>0,\ b>0,$ *і задовольняє у Q такі умови:*

1) *вона неперервна за усіма своїми аргументами, а отже, й обмежена, тобто* $\left|f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)\right|\le M, \ \ M>0;$

2) *вона має обмежені частинні похідні за змінними* $y,y',\ldots,y^{(n-1)}$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (2), (3), який визначений і неперервний разом з похідними до порядку n включно на відрізку $|x-x_0|\le h,$ *де*

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{\max\limits_{Q}\left\{M,|y'|,\ldots,\left|y^{(n-1)}\right|\right\}}\right\}.$$

2. Класифікація розв'язків. ***Загальним розв'язком*** рівняння (2) називають сім'ю розв'язків цього рівняння, залежну від *n* довільних сталих:

$$y=\varphi\left(x,C_1,C_2,\ldots,C_n\right). \tag{8}$$

З геометричної точки зору маємо сім'ю інтегральних кривих на площині (x,y), залежну від *n* параметрів $C_1,C_2,\ldots,C_n$, причому рівняння цієї сім'ї розв'язане відносно *y*.

Надалі будемо розглядати загальний розв'язок лише в області $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$ змінних $x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}$, де у кожній точці задача Коші (2),(3) має єдиний розв'язок.

Функцію (8), яка визначена в деякій області зміни змінних $x,\ C_1,C_2,\ldots,C_n$, будемо називати ***загальним розв'язком*** рівняння (2) в області *D*, якщо:

1) вона має неперервні частинні похідні за змінною *x* до порядку *n* включно;

2) систему

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, ..., C_n), \\ y' = \varphi'(x, C_1, ..., C_n), \\ \quad ... \quad ... \quad ... \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, ..., C_n) \end{cases} \qquad \textbf{(9)}$$

можна розв'язати відносно довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ в області *D*, тобто для довільних значень $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$ із *D* ця система визначає значення $C_1, C_2, ..., C_n$ за формулами

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \\ C_2 = \psi_2\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \\ \quad ... \quad ... \quad ... \\ C_n = \psi_n\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \end{cases} \qquad \textbf{(10)}$$

3) для кожної точки $\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ з області *D* функція (8) є розв'язком рівняння (2) для всіх значень сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, визначених з (10).

Формула загального розв'язку (8) дає можливість за рахунок вибору відповідних значень $C_1, C_2, ..., C_n$ розв'язати будь-яку задачу Коші для рівняння (2) в області *D*, тобто знайти такий розв'язок рівняння (2), який визначений початковими даними $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, причому $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ – будь-яка точка з *D*.

Для знаходження цього розв'язку підставимо в систему (9) замість $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$ початкові дані $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi\left(x_0, C_1, C_2, ..., C_n\right), \\ y_0' = \varphi'\left(x_0, C_1, C_2, ..., C_n\right), \\ \quad ... \quad ... \quad ... \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}\left(x_0, C_1, C_2, ..., C_n\right). \end{cases}$$

З означення загального розв'язку випливає, що цю систему можна розв'язати відносно $C_1, C_2, ..., C_n$, тобто

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) \equiv C_1^{(0)}, \\ C_2 = \psi_2\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) \equiv C_2^{(0)}, \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ C_n = \psi_n\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) \equiv C_n^{(0)}. \end{cases}$$

Підставивши знайдені значення $C_1, C_2, \dots, C_n$ у формулу загального розв’язку (8), одержимо шуканий розв’язок задачі Коші

$$y = \varphi\left(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}\right).$$

Інших розв’язків з початковими даними $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ немає.

Інколи у формулі загального розв’язку замість довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ фігурують початкові значення $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ шуканої функції та її похідних $y', \dots, y^{(n-1)}$ для деякого фіксованого значення $x = x_0$. Формула (8) тоді матиме вигляд

$$y = \varphi\left(x, x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right).$$

Таку форму запису загального розв’язку називають ***загальним розв’язком у формі Коші***.

Загальний розв’язок рівняння (2) у неявному вигляді (у вигляді, не розв’язаному відносно y)

$$\Phi\left(x, y, C_1, \dots, C_n\right) = 0$$

називають ***загальним інтегралом*** цього рівняння.

У деяких випадках знаходження загального розв’язку рівняння (2) у явній чи неявній формі є досить проблематичним. У таких випадках, інтегруючи рівняння (2), шукають сім’ю інтегральних кривих, яка залежить від n довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1, \dots, C_n), \\ y = \psi(p, C_1, \dots, C_n). \end{cases}$$

Таку сім’ю інтегральних кривих називають рівняння (2) ***загальним розв’язком у параметричній формі.*** Якщо вдається виключити параметр p, то матимемо загальний розв'язок в неявному чи навіть у явному вигляді.

Поняття частинних та особливих розв'язків для диференціальних рівнянь вищих порядків вводяться аналогічно, як і для рівняння першого порядку.

Наприклад, розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2) називають ***частинним***, якщо він складається тільки з точок єдиності розв'язку задачі Коші для цього рівняння. Розв'язок, який можна одержати з формули загального розв'язку для довільних числових значень довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, буде, очевидно, частинним.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називають ***особливим***. Такий розв'язок не можна одержати з формули загального розв'язку для жодних значень сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Аналогія спостерігається також у постановці задачі Коші для рівняння (1), не розв'язаного відносно похідної. Зауважимо тільки, що диференціальне рівняння n-го порядку може мати сім'ю особливих розв'язків, залежну від довільних сталих, яких може бути $n-1$.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $y'' = 2\sqrt{y'}$.

Розв'язання. Покладемо $y' = z$, де z – нова шукана функція. Тоді $z' = 2\sqrt{z}$. Звідси

$$z = (x + C_1)^2,\ x > -C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = (x + C_1)^2, x > -C_1 \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2,\ x > -C_1,$$

є шуканим загальним розв'язком. Особливому розв'язку $z = 0$ рівняння $z' = 2\sqrt{z}$ відповідає сім'я особливих розв'язків рівняння $y = C$. Кожен з них є особливим. ■

Лекція 13.
Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку (частина 1).

План.

1. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і старшу похідну.
2. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох її послідовних похідних.
3. Рівняння, яке не містить незалежної змінної.

На цій лекції вивчатимуться деякі класи рівнянь n-го порядку

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

загальний розв'язок (інтеграл) яких можна знайти за допомогою квадратур. Зведення до квадратур виконується або за допомогою спеціальних прийомів, або шляхом попереднього зниження порядку рівняння (якщо отримане при цьому рівняння інтегрується в квадратурах).

1. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і старшу похідну. Найпростішим з (1) є рівняння вигляду

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0. \tag{2}$$

Розглянемо два можливі випадки.

Випадок 1. *Рівняння (2) можна розв'язати відносно* $y^{(n)}$*.* Тоді

$$y^{(n)} = f(x), \tag{3}$$

де $f(x)$ – неперервна функція на інтервалі (a,b). Рівняння (3) легко інтегрується у квадратурах. Справді, інтегруючи (3), знаходимо

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + C_1,$$

де C_1 – довільна стала, а x_0 – довільне фіксоване число з (a,b).

Далі аналогічно:

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x+C_1(x-x_0)+C_2,$$

$$y^{(n-3)}=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x+\frac{C_1}{2}(x-x_0)^2+C_2(x-x_0)+C_3,\quad \ldots$$

$$\begin{aligned} y=\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{n\ \text{разів}} f(x)\underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x\ldots\mathrm{d}x}_{n\ \text{разів}}+\frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\\ +\frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n. \end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

Формула (4) визначає загальний розв’язок рівняння (3). Вона дозволяє знайти розв’язок задачі Коші з будь-якими початковими умовами

$$y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y_0',\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\qquad x_0\in(a,b).$$

Справді, підставляючи у знайдені формули для $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$,..., y', y значення $x=x_0$, маємо: $y_0^{(n-1)}=C_1$, $y_0^{(n-2)}=C_2$, ... , $y_0'=C_{n-1}$, $y_0=C_n$.

Підставимо тепер ці значення $C_1, C_2, \ldots, C_n$ у формулу (4):

$$\begin{aligned} y=\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{n\ \text{разів}} f(x)\underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x\ldots\mathrm{d}x}_{n\ \text{разів}}+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\\ +\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\ldots+y_0'(x-x_0)+y_0. \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

Якщо у (5) вважати $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ довільними сталими, то вона є загальним розв’язком рівняння (3). Тут замість довільних сталих – початкові значення шуканої функції та її похідні до порядку $n-1$ включно. Формулу (5) називають ***загальним розв’язком у формі Коші***.

Позначимо

$$Y_0(x)=\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{n\ \text{разів}} f(x)\underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x\ldots\mathrm{d}x}_{n\ \text{разів}}. \qquad \textbf{(6)}$$

$Y_0(x)$ є частинним розв'язком рівняння (3) (отримується з загального розв'язку (4), якщо $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$). Формула (6) містить n квадратур, однак їх можна замінити лише однією квадратурою, а саме:

$$Y_0(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Цю формулу називають ***формулою Коші*** (***вміти довести самостійно!***)

Загальний розв'язок рівняння (3) можна шукати також послідовним інтегруванням, якщо замість визначених інтегралів зі змінною верхньою межею використовувати невизначені інтеграли. Тоді

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1\equiv f_1(x)+C_1,$$

$$y^{(n-2)}=\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+C_2\equiv f_2(x)+C_1x+C_2, \qquad \ldots$$

$$y=\int f_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x+\frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$$

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $y'''=\ln x$ з початковими даними: $x_0=1,\ y_0, y_0', y_0''$ – довільні числа.

Розв'язання. Використаємо формулу (5) та формулу Коші:

$$y=y_0+\frac{x-1}{1}y_0'+\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}y_0''+Y_0,$$

де

$$Y_0=\frac{1}{2}\int_1^x (x-t)^2\ln t\,\mathrm{d}t.$$

Інтегруючи Y_0 частинами, знаходимо

$$Y_0=\frac{1}{2}\left(-\frac{(x-t)^3}{3}\ln t\right)\Bigg|_{t=1}^{t=x}+\frac{1}{6}\int_1^x\frac{(x-t)^3}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\int_1^x\left(\frac{x^3}{t}-3x^2+3xt-t^2\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{6}\left(x^3\ln x-3x^2(x-1)+\frac{3x}{2}(x^2-1)-\frac{x^3-1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{18}.$$

Отже,

$$y=y_0+\frac{x-1}{1}y_0'+\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}y_0''+\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{18}.$$

Якщо потрібно знайти загальний розв'язок рівняння (з трьома довільними сталими), то враховуючи довільність значень y_0, y_0', y_0'', коефіцієнти біля x^2, x^1, x^0 в останньому виразі можемо вважати так само довільними, а отже, загальним розв'язком є

$$y=\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+C_2x^2+C_1x+C_0.\ \blacksquare$$

Випадок 2. *Рівняння (2) не можна розв'язати в елементарних функціях відносно $y^{(n)}$ або вираз для $y^{(n)}$ є надто складним.* Припустимо, що у цьому випадку рівняння (2) допускає параметричне представлення:

$$x=\varphi(t),\ y^{(n)}=\psi(t)\qquad \left(F\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\equiv 0\right).$$

Виразимо *y* через параметр *t*. Оскільки

$$\mathrm{d}y^{(n-1)}=y^{(n)}\mathrm{d}x=\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

то

$$y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t+C_1\equiv\psi_1(t,C_1).$$

Далі, оскільки

$$\mathrm{d}\,y^{(n-2)}=y^{(n-1)}\,\mathrm{d}\,x=\psi_1(t,C_1)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

то

$$y^{(n-2)}=\int\psi_1(t,C_1)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t+C_2\equiv\psi_2(t,C_1,C_2).$$

Аналогічно міркуючи, врешті-решт знайдемо $y=\psi_n(t,C_1,C_2,...,C_n)$. Загальним розв'язком у параметричній формі рівняння (2) є

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi_n(t,C_1,C_2,...,C_n).$$

Відзначимо два часткові випадки, коли вдається легко отримати параметричне представлення рівняння (2):

Випадок 2.1. *Рівняння (2) розв'язане відносно незалежної змінної, тобто*

$$x=\varphi(y^{(n)}). \tag{7}$$

Тепер замість $y^{(n)}$ можна взяти довільну неперервну функцію $\psi(t)$, а отже, маємо параметричне представлення рівняння (7):

$$x=\varphi(\psi(t)),\ \ y^{(n)}=\psi(t).$$

Зокрема, якщо $\psi(t)=t$, то $x=\varphi(t),\, y^{(n)}=t$. Однак не завжди доцільно приймати за параметр похідну, інколи доцільніше використовувати більш загальне представлення, вдало вибравши функцію $\psi(t)$.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $e^{y''}+y''=x$.

Розв'язання. Покладемо $y''=t$ (в якості параметру беремо y''). Тоді $x=e^t+t$. Отже, рівняння допускає параметричне представлення

$$x=e^t+t,\quad y''=t.$$

Виразимо тепер y через параметр t:

$$\mathrm{d}y'=y''\mathrm{d}x=t(e^t+1)\mathrm{d}t\ \Rightarrow\ y'=\int t(e^t+1)\mathrm{d}t+C_1=(t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+C_1\ \Rightarrow$$

$$y=\int\left((t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+C_1\right)\cdot(e^t+1)\mathrm{d}t+C_2=$$

$$+\left(\frac{t^2}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\frac{t^2}{2}+C_1-1\right)e^t+\frac{t^3}{6}+C_1t+C_2.$$

Отже, загальним розв'язком є

$$x=e^t+t,\qquad y=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\frac{t^2}{2}+C_1-1\right)e^t+\frac{t^3}{6}+C_1t+C_2.\ \blacksquare$$

Випадок 2.2. *Рівняння (2) має вигляд*

$$P\left(x, y^{(n)}\right)+Q\left(x, y^{(n)}\right)=0, \qquad \mathbf{(8)}$$

де P, Q – однорідні функції вимірів k і m відповідно. Для знаходження параметричного представлення покладемо в рівнянні (8)

$$y^{(n)}=tx. \qquad \mathbf{(9)}$$

Розв'язуючи отримане при цьому рівняння відносно x, зможемо виразити x через параметр t, тобто $x=\varphi(t)$. Підставляючи $x=\varphi(t)$ у (9), виразимо $y^{(n)}$ через t, тобто $y^{(n)}=t\varphi(t)$. Таким чином, матимемо параметричне представлення рівняння (8)

$$x=\varphi(t), \; y^{(n)}=t\varphi(t).$$

2. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох її послідовних похідних. Розглянемо рівняння

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0, \quad 1\le k<n. \qquad \mathbf{(10)}$$

Введемо нову невідому функцію z, запровадивши заміну

$$y^{(k)}=z. \qquad \mathbf{(11)}$$

З (10), (11) випливає, що $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right)=0$, тобто отримали рівняння $(n-k)$-го порядку. Таким чином, вдалося знизити порядок рівняння (10) на k. Припустимо, що розв'язуючи отримане рівняння, знайдено загальний розв'язок $z=\omega\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\right)$. Тоді для знаходження y одержуємо рівняння k-го порядку (див. формулу (11))

$$y^{(k)}=\omega\left(x, C_1, \ldots, C_{n-k}\right), \qquad \mathbf{(12)}$$

яке легко інтегрується (це рівняння вигляду (3)). Інтегруючи рівняння (12), одержимо ще k довільних сталих. Отже, матимемо

$$y=\varphi\left(x, C_1, \ldots, C_n\right).$$

Якщо $w\left(x, z, C_1, \ldots, C_{n-k}\right)=0$ – загальний інтеграл рівняння (12), то приходимо до рівняння $w\left(x, y^{(k)}, C_1, \ldots, C_{n-k}\right) = 0$, яке розглядалось у п.1 (порівняйте з (2)). Якщо воно допускає параметричне представлення, то отримаємо його загальний розв'язок у параметричній формі за допомогою k довільних сталих.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння $4y' + y''^2 = 2xy''$.

Розв'язання. Зробимо заміну $y' = z$. Одержуємо рівняння Клеро

$$z = xz' - \frac{z'^2}{2}.$$

Його загальний розв'язок $z = Cx - C^2/2$. Звідси $y' = Cx - C^2/2$, а отже, $y = C_1 x(x - 2C_1) + C_2$, де $C_1 = C/2$, – загальний розв'язок заданого рівняння. Особливому розв'язку $z = x^2/2$ відповідає рівняння $y' = x^2/2$, звідки знаходимо $y = x^3/6 + C$ – сім'я особливих розв'язків (кубічні параболи). ■

Розглянемо деякі часткові випадки рівняння (10).

Випадок 2.3. Нехай маємо рівняння

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0. \tag{13}$$

Припустимо, що рівняння (13) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, тобто $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$. Зробимо заміну $y^{(n-1)} = z$, тоді

$$z' = f(z) \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{f(z)} = \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; z = \omega(x, C_1) \;\Rightarrow\; y^{(n-1)} = \omega(x, C_1),$$

тобто маємо рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$, яке розглядалось у п.1.

Нехай рівняння (13) не розв'язане в елементарних функціях відносно $y^{(n)}$, але допускає параметричне представлення

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \;\; y^{(n)} = \psi(t) \quad \left(F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0\right).$$

Тоді, враховуючи, що $\mathrm{d}y^{(n-1)} = y^{(n)}\,\mathrm{d}x$, маємо

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y^{(n-1)}}{\mathrm{d}y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}{\psi(t)} \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}{\psi(t)} + C_1.$$

Параметричний вираз для y легко знайти з рівності $y^{(n-1)}=\varphi(t)$. Нехай при цьому $y=\psi\left(t,C_2,\dots,C_n\right)$. Отже, x і y виражаються через параметр t і n довільних сталих, тобто одержуємо загальний розв'язок рівняння (13) у параметричній формі:

$$x=\int\frac{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}{\psi(t)}+C_1,\quad y=\psi\left(t,C_2,\dots,C_n\right).$$

Випадок 2.4. Нехай маємо рівняння

$$F\left(y^{(n-2)},y^{(n)}\right)=0. \tag{14}$$

Припустимо, що рівняння (14) можна розв'язати відносно старшої похідної, тобто $y^{(n)}=f\left(y^{(n-2)}\right)$. Нехай $y^{(n-2)}=z$. Тоді

$$z''=f(z)\quad\Rightarrow\quad 2z'z''\,\mathrm{d}x=2f(z)z'\,\mathrm{d}z\quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}\left(z'\right)^2=2f(z)\,\mathrm{d}z\quad\Rightarrow$$

$$\left(z'\right)^2=2\int f(z)\,\mathrm{d}z+C_1\quad\Rightarrow\quad z'=\pm\sqrt{2\int f(z)\,\mathrm{d}z+C_1}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\int f(z)\,\mathrm{d}z+C_1}}=\mathrm{d}x\quad\Rightarrow\quad z=\varphi(x,C_1,C_2)\ -\ \text{загальний розв'язок.}$$

Отже, $y^{(n-2)}=\varphi(x,C_1,C_2)$ і маємо рівняння вигляду $y^{(n)}=f(x)$.

Нехай рівняння (14) не розв'язане відносно $y^{(n)}$, але допускає параметричне представлення

$$y^{(n-2)}=\varphi(t),\ y^{(n)}=\psi(t).$$

Використаємо формули

$$\mathrm{d}y^{(n-1)}=y^{(n)}\,\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}y^{(n-2)}=y^{(n-1)}\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

і помножимо обидві частини першого рівняння з (15) на $y^{(n-1)}$, після чого замінимо справа $y^{(n-1)}\,\mathrm{d}x$ на $\mathrm{d}y^{(n-2)}$:

$$y^{(n-1)}\,\mathrm{d}y^{(n-1)}=y^{(n)}\,\mathrm{d}y^{(n-2)}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right)^2=2\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Отже,

$$y^{(n-1)}=\sqrt{2\int\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t+C_1}\equiv\psi_1(t,C_1).$$

Приєднуючи рівність $y^{(n-2)}=\varphi(t)$, одержуємо формули вигляду

$$y^{(n-1)} = \psi_1(t, C_1), \quad y^{(n-2)} = \varphi(t),$$

які розглядались у випадку 2.3 (коли відомі дві сусідні похідні). Подальше інтегрування приведе до появи ще $(n-1)$-ї нової довільної сталої.

3. Рівняння, яке не містить незалежної змінної. Це рівняння вигляду

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad \textbf{(16)}$$

Введемо нову функцію z за формулою

$$y' = z,$$

вважаючи y новою незалежною змінною, тобто $z = z(y)$. Виразимо похідні $y'', y''', \dots, y^{(n)}$ через функцію z та її похідні за змінною y. Будемо мати:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}\,y'}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y} \cdot \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = z'z,$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}\,y''}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y} z\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y} z\right)\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \left(z''z + (z')^2\right)z, \quad \dots \quad ,$$

$$y^{(n)} = \omega\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right).$$

Після цього рівняння (16) набере вигляду

$$F\left(y, z, z'z, \dots, \omega\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0. \qquad \textbf{(17)}$$

(17) – рівняння $(n-1)$-го порядку. Якщо

$$z = \varphi\left(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right)$$

є його загальним розв’язком, то з

$$y' = \varphi\left(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right)$$

знайдемо загальний інтеграл рівняння (16). При цьому як рівняння (17), так і останнє рівняння можуть мати особливі розв’язки, що може привести до особливих розв’язків рівняння (16). Можливі також особливі розв’язки вигляду $y = b$, де

$$F(b, 0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Лекція 14. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку (частина 2).

План.

1. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних.
2. Узагальнено однорідне рівняння.
3. Рівняння, ліва частина якого є точною похідною.

1. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних. Таку назву мають диференціальні рівняння вигляду

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1)$$

де функція F однорідна відносно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, тобто для кожного t задовольняє тотожність

$$F\left(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}\right) = t^m \cdot F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right). \qquad (2)$$

Введемо нову невідому функцію z за формулою:

$$z = \frac{y'}{y} \quad \Rightarrow \quad y = e^{\int z dx}.$$

Тоді

$$y' = yz,$$

$$y'' = y'z + yz' = (yz)z + yz' = y(z^2 + z'),$$

$$y''' = y(z^3 + 3zz' + z''), \quad \ldots \quad ,$$

$$y^{(n)} = y \cdot \omega\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right),$$

а тому рівняння (1) набере вигляду

$$F\left(x,\ y,\ yz,\ y(z^2 + z'), \ldots, y\omega\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0.$$

Скористаємось тепер однорідністю функції F. З формули (2), де замість t візьмемо y, випливає, що

$$y^m \cdot F\left(x, 1,\ z,\ z^2 + z', \ldots, \omega\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0.$$

Скорочуючи на y^m ($y \neq 0$), одержуємо диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку з шуканою функцією z. Якщо

$$z = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right)$$

є загальним розв’язком цього рівняння, то

$$\frac{y'}{y} = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right).$$

Інтегруючи, знаходимо загальний розв’язок рівняння (1), ліва частина якого задовольняє умову (2):

$$y = C_n \cdot e^{\int \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right) \mathrm{d}x}$$

Розв’язок $y = 0$ одержуємо із загального, якщо $C_n = 0$.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $x^2 yy'' - (y - xy')^2 = 0.$

Розв’язання. Введемо нову функцію $z = z(x)$ за формулою $z = y'/y$. Тоді, як було встановлено, $y' = zy$, $y'' = y(z^2 + z')$. Отже,

$$x^2 y^2 (z' + z^2) - y^2 (1 - xz)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2} \quad \left(y = 0?\right).$$

Останнє рівняння є лінійним. Його загальний розв’язок можна знайдемо допомогою методу варіації довільної сталої:

$$z' + \frac{2}{x} z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{2\,\mathrm{d}x}{x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\ln|z| + 2\ln|x| = \ln|C| \quad \Rightarrow \quad z = \frac{C}{x^2};$$

$$z = \frac{C(x)}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{C'x^2 - 2Cx}{x^4} + \frac{2C}{x^3} = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$C(x) = x + C \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x + C}{x^2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Тому

$$\frac{y'}{y} = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$

$\ln|y| = -C_1/x + \ln|x| + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = C_2 x e^{-C_1/x}$ – загальний розв'язок.

Розв’язок $y = 0$ є, очевидно, частинним.

Відповідь: $y = C_2\, x e^{-C_1/x}$.

2. Узагальнено однорідне рівняння. Розглянемо рівняння

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad \textbf{(3)}$$

де F є однорідною функцією всіх своїх аргументів, якщо вважати $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ величинами першого, k-го, $(k-1)$-го,…, $(k-n)$-го вимірів відповідно, тобто якщо

$$F\left(tx, t^k y, t^{k-1} y', \ldots, t^{k-n} y^{(n)}\right) = t^m \cdot F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right). \qquad \textbf{(4)}$$

Таке рівняння називають ***узагальнено однорідним***. Для його інтегрування замість x і y введемо нову незалежну змінну t і функцію $z = z(t)$ за формулами

$$x = e^t, \qquad y = ze^{kt}. \qquad \textbf{(5)}$$

Виразимо тепер похідні від функції y за незалежною змінною x через похідні від нової шуканої функції z за змінною t. Будемо мати:

$$y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} e^{-t}. \qquad \textbf{(6)}$$

Диференціюючи за змінною t другу з формул (5), знаходимо:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} + kz\right) e^{kt}.$$

Підставляючи в (6), одержуємо

$$y' = \left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} + kz\right) e^{(k-1)t}.$$

Аналогічно:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}\,y'}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y'}{\mathrm{d}\,t} e^{-t} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\,t^2} + (2k-1)\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} + k(k-1)z\right) e^{(k-2)t},$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}\,y''}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y''}{\mathrm{d}\,t} e^{-t} =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}\,t^3} + (3k-3)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\,t^2} + \big(k(k-1) + (k-2)(2k-1)\big)\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} + \right.$$

$$\left. + \ k(k-1)(k-2)z \right) \cdot e^{(k-3)t}$$

і т.д. Нарешті, знайдемо

$$y^{(n)}=\omega\left(z,\frac{dz}{dt},\ldots,\frac{d^n z}{dt^n}\right)\cdot e^{(k-n)\,t}.$$

Підставляючи в (3) знайдені вирази, одержуємо:

$$F\left(e^t, ze^{kt}, \left(\frac{dz}{dt}+kz\right)\cdot e^{(k-1)t}, \ldots, \omega\left(z,\frac{dz}{dt},\ldots,\frac{d^n z}{dt^n}\right)\cdot e^{(k-n)t}\right)=0.$$

Якщо використати умову (4) узагальненої однорідності функції F, то множник e^{kt} можна винести і скоротити на нього. Після цього одержимо диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\left(1, z, \frac{dz}{dt}, \frac{dz}{dt}+kz, \ldots, \omega\left(z,\frac{dz}{dt},\ldots,\frac{d^n z}{dt^n}\right)\right)=0,$$

але яке явно не містить незалежної змінної, а тому допускає зниження порядку на одиницю (див. лекцію 13).

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$x^3y''+2xy'-x^2y'^2-y^2=0.$$

Розв'язання. Вважатимемо x, y, y', y'' величинами відповідно 1-го, k-го, $(k-1)$-го і $(k-2)$-го вимірів. Тоді вирази

$$x^3y'',\ 2xy',\ -x^2y'^2,\ -y^2$$

мають виміри $3+(k-2)$, $1+k+(k-1)$, $2+2(k-1)$, $2k$ відповідно. Прирівнюючи ці виміри, одержуємо умову, яка визначає значення k:

$$1+k=2k=2k=2k \qquad \Rightarrow \qquad k=1.$$

Отже, задане рівняння є узагальнено однорідним, а тому зробимо заміну

$$x=e^t,\ \ y=ze^t.$$

Тоді

$$y'=\frac{dy}{dt}e^{-t}=\frac{dz}{dt}+z,$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}e^{-t}=\left(\frac{d^2 z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\right)\cdot e^{-t},$$

а після підставляння у рівняння одержуємо:

$$e^{3t}(z''+z')e^{-t}+2e^t ze^t(z'+z)-e^{2t}(z'+z)^2-z^2e^{2t}=0 \quad \Rightarrow$$

$$z''+z'-z'^2=0.$$

Це рівняння не містить незалежної змінної t, а тому зробимо заміну $z'=u(z)$ (лекція 13, п. 3). Тоді $z''=u'u$ і маємо рівняння першого порядку (це рівняння з відокремлюваними змінними)

$$u'u+u-u^2=0.$$

Скорочуючи на u, одержуємо:

$$u'+1-u=0 \;\; (u=0?) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=u-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{u-1}=\mathrm{d}z \quad \Rightarrow$$

$$\ln|u-1|=z+C_1 \quad \Rightarrow \quad u=C_1e^z+1 \quad \Rightarrow \quad z'=C_1e^z+1.$$

Інтегруючи останнє рівняння, одержуємо:

$$\frac{\mathrm{d}z}{C_1e^z+1}=\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int\frac{-\mathrm{d}(e^{-z}+C_1)}{(e^{-z}+C_1)}=t+C_2 \quad \Rightarrow$$

$$-\ln|C_1+e^{-z}|=t+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1+e^{-z}=C_2e^{-t} \quad \Rightarrow$$

$$z=-\ln|C_2e^{-t}-C_1|.$$

Повертаючись до змінних x і y, запишемо загальний розв'язок заданого рівняння у вигляді

$$\frac{y}{x}=-\ln\left|C_2e^{-\ln|x|}-C_1\right| \quad \Rightarrow \quad y=-x\ln\left|\frac{C_2}{x}-C_1\right|.$$

Рівність $u=0$ приводить до сім'ї частинних розв'язків $y=Cx$ $(x\neq 0)$. Особливих розв'язків немає.

Відповідь: $y=x\ln\dfrac{C_1x}{1+C_2x}$, $\;y=Cx$.

3. Рівняння, ліва частина якого є точною похідною. Так називають рівняння вигляду

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0, \tag{7}$$

у якому ліва частина є похідною деякої функції, тобто

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

або, що те саме

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)},$$

причому ця рівність виконується тотожно відносно всіх змінних $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Зрозуміло, що при цьому одержуємо диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку

$$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C_1, \qquad \textbf{(8)}$$

і, отже, порядок рівняння (7) зменшили на одиницю.

Рівність (8) називають ***першим інтегралом*** рівняння (7).

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{1+y'^2} = 0.$$

Розв'язання. Легко перевірити, що

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{1+y'^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\ln|y''| - \frac{3}{2}\ln\left(1+y'^2\right)\right),$$

тобто ліва частина є точною похідною. Тому одержуємо перший інтеграл

$$\ln|y''| - \frac{3}{2}\ln\left(1+y'^2\right) = \ln|C_1| \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} - C_1 = 0. \qquad \textbf{(9)}$$

Рівняння (9) можна було б розв'язувати як рівняння без незалежної змінної (лекція 13, п.3) або як рівняння, яке явно не містить шуканої функції (лекція 13, п.2). Однак, ліва частина рівняння (9) також є точною похідною, бо, як легко перевірити,

$$\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}-C_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}-C_1x\right).$$

Отже,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}-C_1x=C_2.$$

Інтегруючи це рівняння, одержуємо загальний інтеграл заданого рівняння у вигляді

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

де

$$a=-\frac{C_2}{C_1},\qquad b=\frac{C_3}{C_1},\qquad R=\frac{1}{C_1}.\ \blacksquare$$

Якщо ліва частина рівняння (7) не є точною похідною, то у деяких випадках вдається знайти таку функцію

$$\mu=\mu\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right),$$

після множення на яку ліва частина стане точною похідною. Цю функцію називають ***інтегрувальним множником*** рівняння (7).

Як і для диференціального рівняння першого порядку, знаючи інтегрувальний множник μ, можна знайти не тільки перший інтеграл, але також і особливі розв’язки: вони є розв’язками рівняння

$$\frac{1}{\mu}=0.$$

Ми не торкатимемося питання про знаходження інтегрувального множника μ у загальному випадку (це надзвичайно складно), а обмежимось розглядом прикладу.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння

$$yy''-y'^2=y'.$$

Розв’язання. Поділимо рівняння на y^2 $(y\neq 0)$. Тоді

$$\frac{yy''-y'^2}{y^2}-\frac{y'}{y^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y'}{y}+\frac{1}{y}\right)'=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y'}{y}+\frac{1}{y}\right)'=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y}+\frac{1}{y}=C_1 \quad \Rightarrow$$

$$y'=C_1y-1. \qquad \textbf{(10)}$$

Розв'яжемо рівняння (10). Якщо $C_1 \neq 0$, то, відокремлюючи змінні, одержуємо:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{C_1y-1}=\mathrm{d}\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_1}\cdot\int\frac{\mathrm{d}(C_1y-1)}{C_1y-1}=x+C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\ln|C_1y-1|=C_1x+C_1C_2 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{C_1}\left(e^{C_1x+C_1C_2}+1\right) \quad \Rightarrow$$

$$y=C_2e^{C_1x}+\frac{1}{C_1} \quad - \quad \text{загальний розв'язок.}$$

Якщо у (9) $C_1=0$, то

$$y'=-1 \quad \Rightarrow \quad y=-x+C.$$

Розв’язок $y=0$ є особливим.

Відповідь: $y=C_2e^{C_1x}+\dfrac{1}{C_1}$, $y=-x+C$, $y=0$.

Лекція 15.

Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку (частина 1).

План.

1. Основні поняття та означення.
2. Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь.
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції.
4. Формула Остроградського-Ліувілля.
5. Фундаментальна система розв'язків. Основна теорема.

1. Основні поняття та означення. ***Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку*** називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \qquad \textbf{(1)}$$

Припустимо, що коефіцієнти $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ і права частина $f(x)$ неперервні на інтервалі (a,b). Тоді згідно з теоремою Пікара рівняння (1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0', \;\; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0 \in (a,b)$, а $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – довільні задані числа (*вміти пояснити це самостійно!*). Цей розв'язок n разів диференційовний на інтервалі (a,b). Особливих розв'язків рівняння (1) не має.

Якщо $f(x) \equiv 0$ на інтервалі (a,b), то рівняння (1) називають ***лінійним однорідним.*** Таке рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо функція $f(x)$ тотожно відмінна від нуля на інтервалі (a,b), то рівняння (1) називають ***лінійним неоднорідним***.

Позначимо через $L(y)$ диференціальний вираз

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \qquad \textbf{(3)}$$

і відзначимо його основні властивості ():

1. $L(ky) = kL(y)$.
2. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

3. $L(C_1 y_1 + \ldots + C_k y_k) = C_1 L(y_1) + \ldots + C_k L(y_k)$.

Тепер лінійне неоднорідне рівняння (2) можна записати у вигляді $L(y) = f(x)$, а лінійне однорідне рівняння – як $L(y) = 0$.

Введемо поняття комплексного розв'язку рівняння (2). Комплексну функцію

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$$

дійсної змінної x називають ***комплексним розв'язком*** рівняння (2) на інтервалі (a,b), якщо її підстановка перетворює це рівняння у тотожність, тобто $L\big(y(x)\big) \equiv 0$ для кожного $x \in (a,b)$.

Покажемо, що *якщо комплексна функція є розв'язком рівняння (2), то її дійсна та уявна частини є дійсними розв'язками цього ж рівняння.* Дійсно, нехай функція $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ є розв'язком рівняння (2). Тоді $L\big(y(x)\big) \equiv 0$. Використовуючи властивості 1, 2 виразу L, одержуємо:

$$L\big(y(x)\big) = L\big(y_1(x) + iy_2(x)\big) = L\big(y_1(x)\big) + iL\big(y_2(x)\big) \equiv 0,$$

звідки випливає, що

$$L\big(y_1(x)\big) \equiv 0,\ L\big(y_2(x)\big) \equiv 0,\ a < x < b.$$

Отже, функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ є розв'язками рівняння (2) на інтервалі $a < x < b$.

Наприклад, рівняння $y'' + y = 0$, як легко переконатись, має комплексний розв'язок $y(x) = e^{ix}$, а оскільки $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, то функції $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ є дійсними розв'язками цього рівняння.

2. Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь. Розв'язки лінійних однорідних рівнянь мають низку цікавих властивостей.

Властивість 1. *Якщо y_1 і y_2 – два частинні розв'язки рівняння (2), то їх сума $y_1 + y_2$ також є розв'язком цього рівняння.*

Доведення. Оскільки $L(y_1)=0$, $L(y_2)=0$, то використовуючи властивість 2 оператора L маємо:

$$L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)=0,$$

а отже, y_1+y_2 – розв'язок рівняння (2).

Властивість 2. *Якщо y_1 – розв'язок рівняння (2), то Cy_1, де C – довільна стала, також є розв'язком цього рівняння.*

Доведення. Оскільки y_1 є розв'язком рівняння (2), то $L(y_1)=0$, а згідно з властивістю 1 виразу L маємо

$$L(Cy_1)=CL(y_1)=0.$$

Властивість 3. *Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ – розв'язки рівняння (2), то їх лінійна комбінація*

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n,$$

де $C_1,C_2,...,C_n$ – довільні сталі, також є розв'язком рівняння (2).

Властивість 3 випливає з властивостей 1, 2 (стор. 2).

Наприклад, розв'язками рівняння

$$y''+y=0$$

є функції $y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$, а отже, його розв'язками є також усі функції вигляду $y=C_1\cos x+C_2\sin x$, у чому легко переконатись підстановкою.

Важливо відповісти на питання: якими повинні бути n частинних розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$, щоб їх лінійна комбінація

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$$

була загальним розв'язком рівняння (2)? Для цього введемо поняття лінійної залежності та лінійної незалежності функцій.

3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції. Функції $y_1, y_2, ..., y_n$ називають ***лінійно незалежними*** на інтервалі (a,b), якщо співвідношення

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ny_n\equiv 0, \qquad \textbf{(4)}$$

виконується тільки тоді, коли всі $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ дорівнюють нулю. Якщо у (4) хоча б одна із сталих $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ відмінна від нуля, то функції $y_1, y_2, ..., y_n$ називають ***лінійно залежними*** на інтервалі (a,b).

Розглянемо ***приклади***.

1. Функції $y_1 = 1, y_2 = x, \ldots, y_n = x^{n-1}$ лінійно незалежні на $(-\infty;+\infty)$ і, взагалі, на кожному інтервалі. Дійсно, співвідношення $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1} = 0$, в якому не всі α_j дорівнюють нулю, не може виконуватись тотожно, бо є рівнянням $(n-1)$-го степеня, яке, як відомо з курсу лінійної алгебри, не може мати більше $n-1$ різних коренів.

2. Функції $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ лінійно незалежні на довільному інтервалі, бо рівняння $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0$, де α_1 і α_2 одночасно не дорівнюють нулю, виконується не більше, ніж в одній точці.

3. Функції $y_1 = \cos x, \ y_2 = \sin x$ лінійно незалежні на будь-якому інтервалі, бо співвідношення $\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0$, де α_1 і α_2 одночасно не дорівнюють нулю, не може виконуватись в на жодному інтервалі (може виконуватись лише в окремих точках).

4. Функції $y_1 = \sin^2 x, \ y_2 = \cos^2 x, \ y_3 = 2$ лінійно залежні на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, бо $1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \equiv 0$.

5. Функції $y_1 = e^x, \ y_2 = \cos^3 x, \ y_3 = 0$ лінійно залежні на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, бо $0 \cdot e^x + 0 \cdot \cos^3 x + C \cdot 0 \equiv 0$, де C – будь-яке, відмінне від нуля число.

Розглянемо довільні функції $y_1, y_2, ..., y_n$, які мають похідні до порядку $n-1$ включно. Позначимо через $W(x)$ визначник

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

який називають ***визначником Вронського***[1] (***вронскіаном***) функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Теорема 1 (необхідна умова лінійної залежності функцій). *Якщо функції* $y_1,\ y_2,\ \dots, y_n$ *лінійно залежні на деякому інтервалі* (a,b)*, то їх вронскіан тотожно дорівнює нулю на цьому інтервалі.*

Доведення. Згідно з умовою теореми для $a<x<b$ маємо рівність

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\dots+\alpha_n y_n\equiv 0,$$

де не всі α_j дорівнюють нулю (нехай, наприклад, $\alpha_n\neq 0$). Тоді

$$y_n=-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1},\quad a<x<b.$$

Продиференціюємо цю тотожність $n-1$ разів і підставимо y_n, а також знайдені значення $y_n',\ y_n'',\ \dots, y_n^{(n-1)}$, в останній стовпець вронскіана:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y_{n-1}' & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1'-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2'-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1^{(n-1)}-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2^{(n-1)}-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Якщо розкласти визначник $W(x)$ на суму визначників, то у кожному з них будемо мати два пропорційні стовпці, а тому всі ці визначники (а отже, і $W(x)$) дорівнюють нулю в усіх точках інтервалу (a,b). ►

[1] ВРОНСЬКИЙ (ГЕНЕ-ВРОНСЬКИЙ) Юзеф Марія (1776-1853) – польський математик.

Зауважимо, що доведена необхідна умова лінійної залежності функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ не є взагалі кажучи, достатньою. Наприклад, вронскіан функцій

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ 0, & x \ge 0, \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$$

дорівнює нулю для всіх *x*, однак y_1 і y_2 лінійно незалежні на $(-\infty;+\infty)$ (***вміти довести самостійно***).

Нехай тепер кожна з функцій $y_1,...,y_n$ є розв'язком рівняння (2).

Теорема 2. *Якщо функції* $y_1, y_2, ..., y_n$ *є лінійно незалежними розв'язками рівняння (2), всі коефіцієнти якого неперервні на інтервалі* (a,b), *то вронскіан цих розв'язків не дорівнює нулю в жодній точці з* (a,b).

Доведення. Нехай $W(x_0)=0$, $a<x_0<b$. Складемо систему:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \qquad \qquad ... \quad ... \quad ... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Визначником цієї системи є $W(x_0)$, а оскільки він за припущенням дорівнює нулю, то система має ненульовий розв'язок $C_1 = C_1^{(0)}, \ ... \ , C_n = C_n^{(0)}$, а тому

$$\left. \begin{array}{l} C_1^{(0)} y_1(x_0) + C_2^{(0)} y_2(x_0) + ... + C_n^{(0)} y_n(x_0) = 0, \\ C_1^{(0)} y_1'(x_0) + C_2^{(0)} y_2'(x_0) + ... + C_n^{(0)} y_n'(x_0) = 0, \\ \qquad \qquad ... \quad ... \quad ... \\ C_1^{(0)} y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2^{(0)} y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n^{(0)} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{array} \right\} \qquad \mathbf{(5)}$$

причому не всі $C_j^{(0)}$ дорівнюють нулю.

Утворимо лінійну комбінацію розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$:

$$y = C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \ ... + C_n^{(0)} y_n . \qquad \mathbf{(6)}$$

Згідно з властивістю 3 пункту 2 лекції, ця комбінація також є розв'язком рівняння (2). Рівності (5) показують, що в точці $x = x_0$ розв'язок (6) перетворюється в нуль разом із своїми похідними до порядку $n-1$ включно. Але ці самі умови задовольняє також розв'язок $y \equiv 0$, а тому згідно з теоремою Пікара обидва розв'язки співпадають, тобто $C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \ldots + C_n^{(0)} y_n \equiv 0$, де не всі $C_j^{(0)}$ дорівнюють нулю, а це означає, що розв'язки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійно залежні в інтервалі (a,b), що суперечить умові теореми. ►

З теорем 1, 2 випливає: *для того, щоб n розв'язків рівняння (2) були лінійно незалежними на інтервалі* (a,b), ***необхідно і достатньо***, *щоб їх вронскіан не перетворювався в нуль в жодній точці цього інтервалу.*

4. Формула Остроградського[1)]-Ліувілля[2)]. Вронскіан розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$ рівняння (2) можна з точністю до сталого множника виразити через коефіцієнт біля похідної $y^{(n-1)}$, а саме справджується ***формула Остроградського-Ліувілля***:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}, \qquad \textbf{(7)}$$

де $x = x_0$ – довільна точка з інтервалу (a,b).

Доведемо формулу (7). Для цього здиференціюємо вронсікан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

застосовуючи ***правило диференціювання***: похідна від визначника n-го порядку дорівнює сумі n визначників, які отримуємо з нього почерговою заміною елементів першого, другого, …, n-го рядка їх

1) ОСТРОГРАДСЬКИЙ Михайло Васильович (1801-1862) – видатний український математик. Академік Петербурзької Академії наук. Учень Коші, Лапласа, Фур'є.

2) ЛІУВІЛЛЬ Жозеф (1809-1882) – французький математик.

похідними. Усі ці визначники, крім останнього, дорівнюють нулю (вони мають пропорційні рядки), а тому

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Якщо помножити елементи перших $n-1$ рядків останнього визначника відповідно на $p_n(x)$, $p_{n-1}(x),\dots,p_2(x)$, і додати до елементів останнього рядка, то одержимо:

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1(x)\cdot y_1^{(n)} & -p_1(x)\cdot y_2^{(n)} & \dots & -p_1(x)\cdot y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=-p_1(x)\cdot W(x),$$

звідки легко отримати формулу (7) (*вміти довести* ***самостійно!***).

З формули Остроградського-Ліувілля випливають такі ***властивості вронскіана*** розв’язків однорідного лінійного рівняння (2):

1. *Якщо вронскіан n розв’язків* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *дорівнює нулю в одній точці* $x=x_0$ *з інтервалу* (a,b), *в якому всі коефіцієнти рівняння (2) неперервні, то він дорівнює нулю в усіх точках цього інтервалу.*

2. *Якщо вронскіан n розв’язків рівняння (2) відмінний від нуля хоч в одній точці* $x=x_0$ *інтервалу* (a,b), *то він відмінний від нуля в усіх точках цього інтервалу.*

Таким чином: *для лінійної незалежності n розв’язків рівняння (2) на інтервалі* (a,b) ***необхідно і достатньо****, щоб їх вронскіан був відмінний від нуля хоча б в одній точці цього інтервалу.*

5. Фундаментальна система розв’язків. Основна теорема. Сукупність n розв’язків лінійного однорідного рівняння (2), визначених і лінійно незалежних на інтервалі (a,b), називають ***фундаментальною системою розв’язків (ФСР)*** на цьому інтервалі.

З попереднього випливає: *для того, щоб система n розв’язків рівняння (2) була фундаментальною, необхідно і достатньо, щоб вронскіан цих розв’язків був відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів рівняння (2).*

Наприклад, функції $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ утворюють ФСР рівняння $y'' + y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, бо вони є розв’язками цього рівняння і лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$. Рівняння $y'' + y = 0$ має й інші ФСР. Наприклад, кожна пара функцій вигляду $y_1 = k\cos x$, $y_2 = k\sin x$, де k – довільна стала, відмінна від нуля, також буде ФСР. Як видно з цього прикладу, однорідне лінійне рівняння може мати безліч ФСР.

Знання n лінійно незалежних розв’язків, тобто ФСР, дає можливість побудувати розв’язок рівняння (2), який містить n довільних сталих, причому цей розв’язок буде загальним.

Теорема 3 (Основна теорема). *Якщо* $y_1, y_2, ..., y_n$ *– фундаментальна система розв’язків рівняння (2), то формула*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{8}$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ *– довільні числа, визначає загальний розв’язок в усій області задання рівняння (2).*

Доведення. За означенням, розв’язок, який містить n довільних сталих, є загальним, якщо з нього при певних числових значеннях цих сталих можна одержати довільний частинний розв’язок. А згідно з теоремою Пікара довільний частинний розв’язок однозначно визначається початковими умовами: при $x = x_0$

$$y = y_0,\ \ y' = y_0',\ ...\ ,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \tag{9}$$

де y_0, y_0',..., $y_0^{(n-1)}$ – довільні числа, $a < x_0 < b$. Таким чином, ми доведемо, що розв'язок (8) є загальним, якщо покажемо, що у формулі (8) можна визначити сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ так, щоб задовольнити умови (9). Для визначення $C_1, C_2, ..., C_n$ маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \qquad \qquad ... \quad ... \quad ... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{10}$$

Визначником системи (10) є $W(x_0)$, який відмінний від нуля, бо $y_1, y_2, ..., y_n$ – ФСР рівняння (2) (теорема 2). Отже, система (10) має єдиний розв'язок $C_1, C_2, ..., C_n$. Функція (8) є розв'язком рівняння (2) як лінійна комбінація розв'язків однорідного лінійного рівняння (властивість 3 з пункту 1). Вираз (8), в якому C_i набувають отримані таким чином значення, очевидно, задовольняє початкові умови (9). ►

Теорема 3 дає відповідь на питання про те, якими повинні бути розв'язки $y_1, y_2, ..., y_n$, щоб формула (8) визначала загальний розв'язок рівняння (2): ці розв'язки повинні бути лінійно незалежними, тобто утворювати фундаментальну систему розв'язків.

Лекція 16.
Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку (частина 2).

План.

1. Існування ФСР лінійного однорідного рівняння.
2. Кількість лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння.
3. Побудова лінійного однорідного рівняння, яке має задану ФСР.
4. Зниження порядку лінійного однорідного рівняння за допомогою лінійно незалежних частинних розв'язків.
5. Використання формули Остроградського-Ліувілля для знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння другого порядку.

1. Існування ФСР однорідного лінійного рівняння. На лекції 15 наводився приклад, з якого випливає, що лінійне однорідне рівняння може мати безліч ФСР. Відповідь на питання про існування ФСР рівняння загального вигляду, тобто рівняння

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad \textbf{(1)}$$

дає така теорема.

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти рівняння (1) неперервні на інтервалі* (a,b), *то існує ФСР, визначених на цьому інтервалі.*

Доведення. Згідно з теоремою Пікара початкові умови

$$y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0,\ \ldots\ ,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0$$

визначають єдиний розв'язок $y_1(x)$, $x\in(a,b)$, рівняння (1). За тією ж теоремою існують єдині розв'язки $y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)$ рівняння (1), які визначаються відповідно умовами

$$\begin{cases} y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1,\ y_2'(x_0)=0,\ \ldots\ ,\ y_2^{(n-1)}(x_0)=0, \\ y_3(x_0)=0,\ y_3'(x_0)=0,\ y_3''(x_0)=1,\ \ldots\ ,\ y_3^{(n-1)}(x_0)=0, \\ \qquad\qquad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0,\ y_n''(x_0)=0,\ \ldots\ ,\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1. \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Вронскіаном побудованих таким чином розв’язків $y_1(x),...,y_n(x)$ у точці $x = x_0$ є

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Оскільки $W(x_0) \neq 0$, то згідно з зауваженням після теореми 2 (лекція 15), функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно незалежні на інтервалі (a,b), тобто утворюють ФСР лінійного однорідного рівняння (1). ►

З самого методу доведення цієї теореми видно, що існує безліч ФСР. Справді, в умовах (2) можемо замість 1 і 0 взяти довільні n^2 чисел, визначник яких відмінний від нуля. Тоді $W(x_0) \neq 0$, і, отже, знову одержуємо ФСР.

ФСР з початковими умовами (2) називають ***нормованою*** у точці $x = x_0$. Для будь-якого лінійного однорідного рівняння (1) з неперервними коефіцієнтами існує єдина ФСР, нормована у довільній заданій точці інтервалу неперервності коефіцієнтів рівняння.

2. Кількість лінійно незалежних розв’язків лінійного однорідного рівняння.

Теорема 2. *Лінійне однорідне рівняння n-го порядку (1) не може мати більше, ніж n лінійно незалежних частинних розв’язків.*

Доведення. Припустимо, що маємо $n+1$ частинних розв’язків $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ цього рівняння. Розглянемо перші n з них, тобто розв’язки $y_1, y_2, ..., y_n$. Можливі два варіанти.

Варіант 1: $y_1, y_2, ..., y_n$ – лінійно залежні. Тоді усі $n+1$ розв’язків також лінійно залежні, що випливає із співвідношення

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n + 0 \cdot y_{n+1} \equiv 0, \quad a < x < b,$$

де не всі числа α_j, $j = 1,...,n$, дорівнюють нулю.

Варіант 2: $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно незалежні. Тоді згідно з основною теоремою (лекція 15) кожний розв'язок, у тому числі і y_{n+1}, лінійно виражається через $y_1, y_2, ..., y_n$, тобто

$$y_{n+1} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

звідки випливає, що розв'язки $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ лінійно залежні. ►

3. Побудова однорідного лінійного рівняння, яке має задану ФСР. З теорем 1, 2 випливає, що рівняння (1), коефіцієнти якого неперервні на інтервалі (a,b), має рівно n лінійно незалежних на цьому інтервалі розв'язків. Покажемо, що справджується й обернене твердження, а саме: *кожній сукупності n разів неперервно диференційовних і лінійно незалежних на інтервалі* (a,b) *функцій* $y_1, y_2, ..., y_n$, *вронскіан яких не дорівнює нулю у жодній точці цього інтервалу, відповідає єдине лінійне однорідне рівняння n-го порядку вигляду (1), для якого функції* $y_1, y_2, ..., y_n$ *будуть ФСР на згаданому інтервалі.*

Справді, коефіцієнти $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ шуканого рівняння повинні задовольняти систему

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0, \\ y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + p_2(x)y_2^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0, \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + p_2(x)y_n^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

Визначником системи (3) є $\pm W(x)$. Оскільки $W(x) \neq 0$, то коефіцієнти $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ з системи (3) можна визначити однозначно.

Шукане рівняння можна отримати й іншим способом. Для цього зауважимо, для сумісності рівняння (1) і системи (3) для всіх $a < x < b$ повинна виконуватись рівність

$$\begin{vmatrix} y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n' & y_n \\ y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots & y' & y \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \quad a < x < b. \qquad \textbf{(4)}$$

Якщо розкласти визначник (4) за елементами останнього стовпця і поділити всі члени отриманого рівняння на $W(x)$, то одержимо шукане рівняння. Справді, з рівності (4) бачимо, що функції $y_1, y_2, ..., y_n$ є розв'язками цього рівняння (замінюючи y відповідно на $y_1, y_2, ..., y_n$, завжди отримуватимемо визначник з двома однаковими стовпцями), а оскільки цими розв'язками рівняння (1) визначається однозначно, то рівняння (4) є шуканим.

Приклад 1. Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння якомога меншого порядку, яке має частинні розв'язки $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$.

Розв'язання. Легко показати, що функції y_1, y_2 лінійно незалежні, а тому згідно з формулою (4) маємо

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & y \\ 0 & -\sin x & y' \\ 0 & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' \sin x - y' \cos x = 0. \ \blacksquare$$

Отже, коефіцієнти рівняння (1) єдиним чином виражаються через його ФСР. Виразимо, зокрема, коефіцієнти лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

через його ФСР y_1, y_2. У цьому випадку система (3) має такий вигляд:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0, \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему за формулами Крамера, знаходимо:

$$p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}, \quad p_2(x) = -\frac{y_1''}{y_1} + \frac{y_1'}{y_1}\frac{W'(x)}{W(x)}.$$

Отже, ФСР y_1, y_2 відповідає диференціальному рівнянню

$$y'' - \frac{W'(x)}{W(x)}y' + \left(\frac{y_1'}{y_1}\frac{W'(x)}{W(x)} - \frac{y_1''}{y_1}\right)y = 0.$$

4. Зниження порядку однорідного лінійного рівняння за допомогою лінійно незалежних частинних розв'язків. Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) неперервні на інтервалі (a,b). Покажемо, що знаючи один ненульовий частинний розв'язок рівняння (1), можна зменшити порядок цього рівняння на одиницю.

Для цього зробимо заміну

$$y = y_1 \int u \, \mathrm{d}x, \qquad \textbf{(6)}$$

де y_1 – частинний розв'язок рівняння (1), $u = u(x)$ – нова функція.

Послідовно диференціюючи (6), знаходимо:

$$y' = y_1' \int u \, \mathrm{d}x + y_1 u, \qquad y'' = y_1'' \int u \, \mathrm{d}x + 2y'u + y_1 u',$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u \, \mathrm{d}x + n y_1^{(n-1)} u + \frac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} u' + \dots + y_1 u^{(n-1)}.$$

Підставляючи знайдені похідні у (1), одержуємо рівняння

$$L(y_1)\int u \, \mathrm{d}x + b_{n-1}(x)u + b_{n-2}(x)u' + \dots + y_1 u^{(n-1)} = 0.$$

Але оскільки $L(y_1) \equiv 0$, то для знаходження функції u маємо лінійне однорідне рівняння $(n-1)$-го порядку:

$$u^{(n-1)} + \tilde{b}_1(x)u^{(n-2)} + \dots + \tilde{b}_{n-2}(x)u' + \tilde{b}_{n-1}(x)u = 0. \qquad \textbf{(7)}$$

Покажемо, що якщо $u_2, \dots, u_n$ є ФСР рівняння (7), то функції

$$y_1,\quad y_1\int u_2\,\mathrm{d}x,\ \ldots,\ y_1\int u_n\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(8)}$$

утворюють ФСР рівняння (1). З попереднього зрозуміло, що всі функції (8) є розв'язками рівняння (1). Припустимо, що вони лінійно залежні. Тоді

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_1\int u_2\,\mathrm{d}x+\ldots+\alpha_n y_1\int u_n\,\mathrm{d}x\equiv 0,$$

причому не всі $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ дорівнюють нулю, бо інакше $\alpha_1=0$, оскільки $y_1\neq 0$. Скорочуючи останню рівність на y_1 і диференціюючи, одержуємо, що $\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_n u_n=0$, тобто функції $u_2,\ldots,u_n$ лінійно залежні, що суперечить припущенню.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=0,$$

знаючи його частинний розв'язок $y_1=x$.

Розв'язання. Згідно з (6) зробимо заміну $y=x\int u\,\mathrm{d}x$, де u – нова функція. Тоді для знаходження функції u одержуємо рівняння $xu''=0$ або $u''=0$. Для останнього рівняння легко знайти два лінійно незалежні частинні розв'язки: $u_1=1,\ u_2=x$. Тому лінійно незалежними частинними розв'язками заданого рівняння будуть

$$y_1=x,\qquad y_2=x\int 1\,\mathrm{d}x=x^2,\qquad y_3=x\int x\,\mathrm{d}x=x^3/2.$$

Згідно з основною теоремою (теорема 15) загальний розв'язок заданого рівняння записуємо у вигляді $y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3$. ■

Якщо відомо k лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (1) $y_1,y_2,\ldots,y_k$, то порядок цього рівняння можна знизити відразу на k одиниць, причому отримане рівняння $(n-k)$-го порядку залишиться лінійним однорідним.

Дійсно, виконуючи підстановку (6), для відшукання функції u одержуємо рівняння (7), порядок якого $(n-1)$. Для рівняння (7) маємо $k-1$ розв'язків, які отримуються з формули (6) почерговою заміною y на $y_2, y_3, ..., y_k$:

$$u_2 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \quad u_3 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \ \ldots, \ u_k = \left(\frac{y_k}{y_1}\right)'.$$

Покажемо, що розв'язки $u_2, u_3, ..., u_k$ лінійно незалежні. Справді, у протилежному випадку отримуємо тотожність

$$\alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k = 0,$$

де не всі числа $\alpha_2, ..., \alpha_k$ дорівнюють нулю. Зінтегруємо останню тотожність:

$$C_1 + \alpha_2 \int u_2 \,\mathrm{d}\, x + ... + \alpha_k \int u_k \,\mathrm{d}\, x = 0.$$

Звідси

$$C_1 + \alpha_2 \frac{y_2}{y_1} + ... + \alpha_k \frac{y_k}{y_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_k y_k = 0,$$

що неможливо, бо функції $y_1, y_2, ..., y_k$ лінійно незалежні.

Введемо тепер нову функцію v за формулою

$$u = u_2 \int v \,\mathrm{d}\, x.$$

Тоді для знаходження функції v аналогічно до попереднього одержуємо рівняння $(n-2)$-го порядку, для якого нам відомі $(k-2)$ лінійно незалежних розв'язків, а саме:

$$v_3 = \left(\frac{u_3}{u_2}\right)', \ \ldots, \ u_k = \left(\frac{u_k}{u_2}\right)'.$$

Продовжуючи цей процес далі, одержимо лінійне однорідне рівняння $(n-k)$-го порядку. Зокрема, якщо відомі $n-1$ лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (1), то наведеним способом прийдемо до лінійного однорідного рівняння першого порядку. Таким чином, знаючи $n-1$ лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (1), можна зінтегрувати це рівняння у квадратурах.

5. Використання формули Остроградського-Ліувілля для знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння другого порядку. Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку (5) і нехай $y_1(x) \neq 0$ – його частинний розв'язок.

Згідно з основною теоремою (лекція 15) для того, щоб знайти загальний розв'язок рівняння (5), потрібно знати ФСР цього рівняння. Нехай $y_2(x)$ – такий розв'язок рівняння (5), що функції $y_1(x),\ y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Використовуючи формулу Остроградського-Ліувілля (формула 7 з лекції 15)):

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,\mathrm{d}x},$$

де $x = x_0$ – довільна точка з інтервалу (a,b) неперервності коефіцієнтів $p_1(x),\ p_2(x)$, одержуємо:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x} \ (\text{якщо } C = 1) \quad \Rightarrow \tag{9}$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{10}$$

Отже, для знаходження невідомої функції $y_2(x)$ одержали лінійне рівняння першого порядку (10). Розв'яжемо його. Для цього поділимо обидві частини рівняння (10) на y_1^2:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1^2} \mathrm{d}x.$$

Оскільки функції $y_1(x), y_2(x)$ за побудовою утворюють ФСР рівняння (1), то загальним розв'язком є

$$y(x) = y_1(x)\left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1^2} \mathrm{d}x\right). \ ■$$

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Легко перевірити, що $y_1(x) = x$ є частинними розв'язком заданого рівняння. Оскільки $p_1(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$, то, використовуючи формулу (9), знаходимо

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{\int \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad y_1 y_2' - y_1' y_2 = x^2+1 \quad \Rightarrow$$

$$\left(y_2/y_1\right)' = \frac{x^2+1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y_2 = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2-1.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння є

$$y = C_1 x + C_2(x^2-1). \ \blacksquare$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Підручники, посібники

[1]. ***Матвеев Н.М.*** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Выш. шк., 1974.

[2]. ***Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф.*** Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981.

[3]. ***Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф.*** Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003.

[4]. ***Степанов В.В.*** Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958.

[5]. ***Лавренюк С.П.*** Курс диференціальних рівнянь. – Львів: Вид-во наук.-техн. літератури, 1997.

[6]. ***Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О***. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994.

[7]. ***Егоров А.И.*** Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[8]. ***Шкіль М.І., Сотніченко М.А.*** Звичайні диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1992.

[9]. ***Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В.*** Звичайні диференціальні рівняння. Част. 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються у квадратурах. – Івано-Франківськ: ЛІК, 2005.

Збірники задач і вправ

[9]. ***Филиппов А.Ф.*** Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985.

[10]. ***Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.*** Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994.

[11]. ***Боярчук А.К., Головач Г.П.*** Справочное пособие по высшей математике. Т.5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.

[12]. ***Матвеев Н.М.*** Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – СПб.: Лань, 2002.