Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Василишин Б.В., Гой Т.П., Копач М.І., Шарин С.В.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1.
Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Видання друге, доповнене та перероблене

Івано-Франківськ
Дизайнерсько-видавничий відділ
Центру інформаційних технологій Прикарпатського
національного університету ім. Василя Стефаника
2008

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11я73
В19

Рекомендовано Вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів (протокол № 7 від 22 лютого 2005 р.).

Рецензенти:

Каленюк П.І. доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет "Львівська політехніка")

Благун І.С. доктор економічних наук, професор (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

В19 Василишин Б.В., Гой Т.П., Копач М.І., Шарин С.В. Вища математика (Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія): Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей. Видання друге, доповнене та перероблене. – Івано-Франківськ: Дизайнерсько-видавничий відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського національного університету ім. Василя Стефаника, 2008. – 169 с.
ISBN 966-640-117-7

У навчальному посібнику викладено питання з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, передбачені програмою з вищої математики для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Теоретичний матеріал супроводжується розв'язуванням типових прикладів та задач, розкриваються можливості застосування апарату лінійної алгебри та аналітичної геометрії в економічній теорії. Особливістю посібника є практикум, який містить 16 індивідуальних завдань по 30 варіантів у кожному, у тому числі 4 завдання із задачами економічного змісту, який може використаний для контрольної перевірки знань та для самостійної роботи студентів.

Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 966-640-117-7

ВСТУП

Математика має велике світоглядне значення, але для спеціалістів з економіки, менеджменту вона є в першу чергу інструментом аналізу, організації та управління. Курс вищої математики є фундаментальним у циклі математичної підготовки студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Його метою є оволодіння базовими математичними знаннями, що будуть потрібними для подальшого засвоєння економічно зорієнтованих дисциплін. Саме з цього виходили автори при написанні посібника, використовуючи, зокрема, і свій досвід викладання вищої математики в державних і недержавних навчальних закладах для студентів денної та заочної форм навчання.

Оскільки новий навчальний матеріал засвоюється студентами значно легше, якщо він супроводжується великою кількістю прикладів, які його ілюструють, то автори прагнули якомога тісніше поєднати теоретичний матеріал з методичними рекомендаціями та розв'язанням багатьох типових задач, особливо економічного змісту. Окрім цього, у посібник включені різнопланові індивідуальні завдання, які можна використати як для самостійної роботи студентів, так і для поточного, модульного та підсумкового контролю.

Ця книга є першою частиною посібника "Вища математика" і охоплює матеріал з лінійної алгебри та аналітичної геометрії та їх застосування при вивченні економіки.

Оскільки посібник призначений для студентів першого курсу, то математичний апарат використовується тільки для аналізу найпростіших економічних понять та схем, а глибокі економічні проблеми у ньому не висвітлюються.

Автори сподіваються одержати від студентів та фахівців зауваження, побажання, рекомендації, які будуть враховані при подальшій роботі над посібником, за адресою

76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57,
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
кафедра математичного аналізу та прикладної математики.

ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО ВИДАННЯ

Працюючи над другим виданням посібника, автори ставили перед собою за мету сприяти підвищенню рівня фундаментальної математичної підготовки студентів економічних спеціальностей, підсиливши при цьому саме прикладний аспект вищої математики. У зв'язку зазнав деяких змін виклад теоретичного матеріалу. Також додано нові параграфи (§§ 1.3, 1.14, 2.17, 2.18), присвячені використанню апарату лінійної алгебри та аналітичної геометрії в економічних науках.

Додатково розроблені 4 індивідуальні завдання економічного змісту (задачі 13-16), кожне з яких містить по 30 варіантів.

РОЗДІЛ І.
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

§ 1.1. Матриці. Види матриць

Матрицею порядку $m \times n$ будемо називати прямокутну таблицю чисел, складену з m рядків і n стовпців. Числа, з яких складається матриця, називають ***елементами*** матриці. Елементами матриці можуть бути й інші математичні об'єкти, наприклад, змінні, алгебричні та тригонометричні вирази, функції тощо.

Для позначення матриць, як правило, використовують великі букви латинського алфавіту, а для позначення елементів матриці – малі букви з двома індексами, перший з яких вказує на номер рядка, а другий – на номер стовпця, на перетині яких елемент знаходиться. Наприклад, a_{ij} – елемент, який розміщений у i-му рядку та j-му стовпці матриці.

Таким чином, матрицю порядку $m \times n$ можна записати у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(1.1)}$$

або скорочено:

$$A = \left(a_{ij}\right), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Для позначення матриць можуть використовуватись й інші позначення, наприклад, $A = [a_{ij}]$, $A = \| a_{ij} \|$.

Матрицю, яка складається з одного рядка (стовпця), називають ***матрицею-рядком*** (***матрицею-стовпцем***). Наприклад,

$$A = \left(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}\right) \text{ – матриця-рядок,} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \text{ – матриця-стовпець.}$$

Матриці-рядки і матриці-стовпці інакше будемо називати ***векторами***.

Якщо у матриці (1.1) кількість рядків дорівнює кількості стовпців і дорівнює n, то її називають ***квадратною*** матрицею n-го порядку. Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ є квадратною матрицею другого порядку.

Елементи квадратної матриці, у яких номер рядка дорівнює номеру стовпця, називають ***діагональними***. Вони утворюють ***головну діагональ***. У квадратній матриці n-го порядку головну діагональ, очевидно, утворюють елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$. Діагональ, яка містить елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1}$, називають ***побічною***.

Квадратну матрицю називають ***діагональною***, якщо всі її елементи, крім діагональних, дорівнюють нулю. Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є діагональними матрицями другого та третього порядків відповідно.

Діагональну матрицю, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, називають ***одиничною*** і позначають буквою E. Наприклад, одиничну матрицю третього порядку записуватимемо у вигляді

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо всі елементи матриці довільного порядку дорівнюють нулю, то її називають ***нульовою матрицею*** (або ***нуль-матрицею***) і позначають символом $\mathbf{O}$. Наприклад, такий вигляд має нульова матриця порядку 3×4:

$$\mathbf{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ однакового порядку $m\times n$ називають ***рівними*** (пишуть $A=B$), якщо рівні всі їх відповідні елементи, тобто якщо

$$a_{ij}=b_{ij}, \quad i=1,2,...,m, \quad j=1,2,...,n.$$

За допомогою матриць зручно записувати різноманітні економічні залежності. Наприклад, у вигляді таблиці (матриці порядку 4×3)

	Виріб I *шт.*	Виріб II *кг*	Виріб III *м*
Сировина I типу, *кг*	2	3	6
Сировина II типу, *кг*	1	0,9	0,8
Сировина III типу, *кг*	4	2	1,7
Сировина IV типу, *кг*	1,2	2	1,5

можна задати норми витрат ресурсів на одиницю продукції. Елементи цієї матриці мають простий економічний зміст. Так, наприклад, елемент $a_{21} = 1$ матриці вказує, що на виготовлення одиниці виробу I витрачається 1 кг сировини II типу, а елемент $a_{12} = 3$ – що на виготовлення 1 кг виробу II витрачається 3 кг сировини I типу і т.д.

§ 1.2. Дії над матрицями

Розглянемо основні операції, які можна виконувати над матрицями.

1. Множення матриці на число. ***Добутком*** *матриці* $A = \left(a_{ij}\right)$ *на число* k *називають матрицю* kA, *кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елементу матриці A на число k, тобто*

$$kA = k\left(a_{ij}\right) = \left(ka_{ij}\right), \quad i = 1,2,\ldots,m, \;\; j = 1,2,\ldots,n.$$

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, то

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}.$$

З цього означення випливає, що *спільний множник усіх елементів матриці можна виносити за знак матриці*. Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 16 & 8 & -24 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Додавання матриць. ***Сумою*** *двох матриць* $A = \left(a_{ij}\right)$ *і* $B = \left(b_{ij}\right)$ *однакового порядку* $m \times n$ *називають матрицю* $C = A + B$ *того ж порядку, кожний елемент* c_{ij} *якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B, тобто*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m; \;\; j = 1,2,\ldots,n.$$

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -6\end{pmatrix}$, то

$$A+B=\begin{pmatrix}1+1 & 2+(-2) & 3+1\\ 4+2 & 5+3 & 6+(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 6 & 8 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Віднімання матриць. ***Різницею*** *матриць* $A=(a_{ij})$ *і* $B=(b_{ij})$ *однакового порядку називають матрицю*

$$A-B=A+(-1)\cdot B.$$

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & -5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 5\end{pmatrix}$, то

$$A-B=\begin{pmatrix}1-0 & 3-2 & 4-3\\ 0-1 & -5-5 & 6-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -10 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Множення матриць. ***Добутком*** *матриці* $A=(a_{ij})$ *порядку* $m\times k$ *на матрицю* $B=(b_{ij})$ *порядку* $k\times n$ *називають матрицю* $C=AB$ *порядку* $m\times n$, *кожний елемент* c_{ij} *якої дорівнює сумі добутків елементів і-го рядка матриці А на відповідні елементи j-го стовпця матриці В, тобто*

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\ldots,m,\ \ j=1,2,\ldots,n, \qquad \textbf{(1.2)}$$

або скорочено:

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj},\quad i=1,2,\ldots,m,\ \ j=1,2,\ldots,n.$$

З цього означення випливає, що добуток двох матриць не завжди визначений: потрібно, щоб кількість стовпців першої матриці дорівнювала кількості рядків другої. Матриця-добуток при цьому матиме стільки рядків, скільки рядків у першій матриці, й стільки стовпців, скільки їх у другій матриці.

Задача 1.1. Знайти добуток матриць

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Добуток AB визначений, бо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Матриця-добуток є порядок 2×3, а її елементи знаходимо за формулами (1.2):

$$AB=\begin{pmatrix}2&0&3\\4&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&1&2\\1&-2&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+0\cdot2+3\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot1+3\cdot(-2) & 2\cdot1+0\cdot2+3\cdot0\\4\cdot(-1)+1\cdot2+2\cdot1 & 4\cdot0+1\cdot1+2\cdot(-2) & 4\cdot1+1\cdot2+2\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-6&2\\0&-3&6\end{pmatrix}.\ \blacksquare$$

Наведемо ***властивості дій над матрицями***, які випливають безпосередньо з означення відповідних дій над матрицями (вважаємо, що всі дії в одній з частин кожної рівності мають зміст, тоді й дії у іншій частині відповідної рівності також матимуть зміст):

1. $A+B=B+A$,
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$,
3. $A+\mathbf{O}=A$,
4. $1\cdot A=A$,
5. $0\cdot A=\mathbf{O}$,
6. $k\mathbf{O}=\mathbf{O}$,
7. $k(A+B)=kA+kB$,
8. $(k+l)A=kA+lA$,
9. $k(lA)=(kl)A=l(kA)$,
10. $A(B+C)=AB+AC$,
11. $(A+B)C=AC+BC$,
12. $k(AB)=(kA)B=A(kB)$,
13. $A(BC)=(AB)C$,
14. $AE=EA=A$.

Відзначимо деякі ***специфічні властивості операції множення матриць***:

1. Якщо добуток AB існує, то добуток BA може не існувати. У задачі 1.1 знайдено добуток AB, тоді як добуток BA не існує, бо кількість стовпців матриці B не дорівнює кількості рядків матриці A.

2. Якщо обидва добутки AB і BA існують, то вони можуть бути матрицями різного порядку, а тому непорівнянними. Наприклад, для матриць A і B порядків 2×3 і 3×2 відповідно можна знайти добутки AB і BA, але вони будуть матрицями різних порядків (AB – другого, BA – третього).

3. Якщо обидва добутки AB і BA існують і є матрицями однакового порядку, то може бути, що

$$AB\neq BA,$$

тобто переставний закон множення матриць, взагалі кажучи, не виконується. Наприклад, для матриць $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\0&4\end{pmatrix}$ маємо:

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 3+0\cdot 4\\ 3\cdot 2+6\cdot 0 & 3\cdot 3+6\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 33\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2\cdot 1+3\cdot 3 & 2\cdot 0+3\cdot 6\\ 0\cdot 1+4\cdot 3 & 0\cdot 0+4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 18\\ 12 & 24\end{pmatrix}.$$

4. Якщо добуток двох матриць дорівнює нуль-матриці, то не обов'язково хоч одна з них є нуль-матрицею, тобто з рівності $AB=\mathbf{O}$, взагалі кажучи, не випливає, що $A=\mathbf{O}$ або $B=\mathbf{O}$. Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\neq\mathbf{O},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\neq\mathbf{O},$$

але

$$AB=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2\\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{O}.$$

5. Піднесення до степеня. Цілим додатним ***степенем*** A^m квадратної матриці A називають добуток m матриць, кожна з яких дорівнює A, тобто

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\text{ разів}}.$$

За означенням приймають, що $A^0=E,\ A^1=A$.

Неважко показати, що

$$A^mA^k=A^{m+k},\ (A^m)^k=A^{mk}.$$

Зауважимо, що з рівності $A^m=\mathbf{O}$, взагалі кажучи, не випливає, що $A=\mathbf{O}$. Наприклад, квадрат ненульової матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ є нуль-матрицею:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)\\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{O}.$$

6. Транспонування матриці. Якщо у матриці

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

замінити рядки на стовпці так, щоб перший рядок став першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем і т.д., то одержану матрицю називають ***транспонованою*** до A і позначають A^T.

Таким чином, транспонованою до матриці A є матриця

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Перехід від матриці A до матриці A^T називають ***транспонуванням*** матриці A. З означення випливає, що матриця, транспонована до матриці порядку $m \times n$, має порядок $n \times m$.

Операція транспонування має такі ***властивості***, які пропонуємо довести читачам самостійно:

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(kA)^T = kA^T$,
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

§ 1.3. Використання матриць в економіці

Використання матриць є одним з основних методів розв'язування багатьох економічних задач. Це питання є особливо актуальним при розробленні та використанні баз даних, адже при роботі з ними майже вся інформація зберігається і опрацьовується у матричній формі.

Розглянуті у § 1.2 дії над матрицями дозволяють спростити розв'язання, наприклад, таких економічних задач, як розрахунок норм витрат вихідного матеріалу для випуску кінцевої продукції, розрахунок завантаженості технологічного обладнання, транспортна задача тощо.

Уперше на можливість застосування таблиць чисел (матриць) для аналізу економічних задач вказав Ф. Кене [1)] у своїх "Економічних таблицях", де запропонував кількісну модель державної економіки.

Задача 1.2. На виробництво трьох видів продукції P_1, P_2, P_3 підприємство витрачає комплектуючі чотирьох типів K_1, K_2, K_3, K_4, які воно закуповує у суміжників. Норми витрат комплектуючих задано матрицею $A = \left(a_{ij}\right)$:

[1)] **КЕНЕ** Франсуа (1696-1774) , французький економіст.

$$\begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

де кожний елемент a_{ij}, $i=1,2,3,4,$ $j=1,2,3,$ вказує на те, скільки комплектуючих i-го типу витрачається на виробництво j-го виду продукції. План випуску видів продукції заданий матрицею-стовпцем $P=(100,80,40)^T$, а вартість одиниці кожного типу комплектуючого – матрицею-рядком $K=(30,50,20,25)$.

Визначити потребу в комплектуючих, необхідних для планового випуску продукції, та їх загальну вартість.

Розв'язання. Потреба в комплектуючих типів K_1, K_2, K_3, K_4 становить відповідно

$$1\cdot 100+2\cdot 80+1\cdot 40=300 \text{ (од.)}, \quad 2\cdot 100+1\cdot 80+2\cdot 40=360 \text{ (од.)},$$

$$3\cdot 100+4\cdot 80+1\cdot 40=660 \text{ (од.)}, \quad 4\cdot 100+0\cdot 80+1\cdot 40=440 \text{ (од.)}.$$

Загальну потребу в комплектуючих можна записати як добуток матриць A і P:

$$AP=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 300 \\ 360 \\ 660 \\ 440 \end{pmatrix}.$$

Тоді загальна вартість комплектуючих, що закуповуються підприємством, становитиме

$$30\cdot 300+50\cdot 360+20\cdot 660+25\cdot 440=51200 \text{ (грош. од.)},$$

яку можна подати також як добуток

$$K\cdot(AP)=(30,\ 50,\ 20,\ 25)\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 360 \\ 660 \\ 440 \end{pmatrix}=(51200) \text{ (грош. од.)}. \blacksquare$$

Задача 1.3. У таблиці 1 наведено дані про денну продуктивність п'яти підприємств холдингу, які випускають чотири види продукції зі споживанням трьох видів сировини, а також тривалість роботи кожного підприємства протягом року та ціни кожного виду сировини.

Вид продукції	Продуктивність підприємств (виробів у день)					Витрати видів сировини (одиниць маси на виріб)		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
	Кількість робочих днів на рік					Ціна видів сировини (грошових одиниць за одиницю маси)		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**
	200	150	170	120	140	40	50	60

Табл.1.

Визначити:

– річну продуктивність кожного підприємства для кожного виду виробів,

– річну потребу у сировині кожного підприємства для кожного виду виробів,

– річну суму фінансування кожного підприємства для закупівлі сировини, яка необхідна для випуску продукції вказаних видів та запланованої кількості.

Розв'язання. Укладемо матриці, які характеризують економічний спектр виробництва. Продуктивність підприємств за усіма видами продукції визначає матриця

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

де кожен елемент a_{ij}, $i = 1,\ldots,4$, $j = 1,\ldots,5$, показує, скільки виробів i-го виду випускає за день j-те підприємство, а кожен j-ий стовпець матриці відповідає денній продуктивності j-го підприємства для кожного виду продукції. Тому річну продуктивність j-го підприємства для кожного виду продукції одержуємо множенням j-го стовпця матриці A на кількість робочих днів у році j-го підприємства. Таким чином, річна продуктивність кожного підприємства для кожного виду виробів описується матрицею

$$B=\begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}.$$

Витрати сировини на одиницю виробу (ці показники за умовою задачі є однаковими для усіх підприємств) визначає матриця

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

де кожен елемент c_{mi}, $m=1,...,3$, $i=1,...,4$, вказує на те, скільки одиниць маси сировини m-го виду витрачається на кожен i-ий виріб.

Щоденні витрати сировини визначаються як добуток матриць C і A:

$$D=CA,$$

тобто

$$D=\begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix},$$

де кожен елемент d_{mj}, $m=1,...,3$, $j=1,...,5$, показує, скільки одиниць маси сировини m-го виду витрачає j-те підприємство холдингу щоденно.

Річну потребу j-го підприємства знаходимо за допомогою множення j-го стовпця матриці D на кількість робочих днів у році підприємства:

$$F=\begin{pmatrix} 11000 & 18900 & 9019 & 7440 & 8120 \\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780 \\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480 \end{pmatrix}.$$

Матриця-рядок

$$P=(40,50,60)$$

визначає ціну у грошових одиницях за одиницю маси кожного виду сировини, а добуток

$$PF=\left(2008000,3496500,1878500,1494000,1552600\right)$$

визначає вартість загального річного запасу сировини для кожного підприємства. ■

§ 1.4. Визначники

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Кожній такій матриці можна поставити у відповідність число, яке обчислюється за певним правилом і називається ***визначником*** (або ***детермінантом***) матриці.

Визначник матриці A позначають $|A|$ або $\det A$.

Визначником матриці першого порядку $A=(a_{11})$ (або ***визначником першого порядку***), називають елемент a_{11}, тобто

$$|A|=a_{11}.$$

Визначником матриці другого порядку $A=(a_{ij})$, $i=1,2$, $j=1,2$, (або ***визначником другого порядку***) називають число, яке знаходять за формулою

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad \textbf{(1.4)}$$

Іншими словами, *визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей*.

Наприклад, визначник матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ обчислюють так:

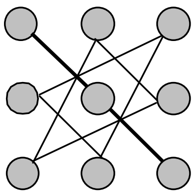
$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-2\cdot 4=7.$$

Визначником матриці третього порядку $A=(a_{ij})$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$, (або ***визначником третього порядку***) називають число, яке знаходять за формулою

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad \textbf{(1.5)}$$

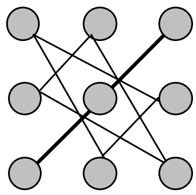
Зауважимо, що кожний доданок у правій частині формули (1.5) містить по одному елементу з кожного рядка та кожного стовпця матриці A. Три перші доданки є добутками елементів, розміщених на головній діагоналі ($a_{11}a_{22}a_{33}$), й елементів, розміщених у вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні до головної діагоналі ($a_{12}a_{23}a_{31}$ і $a_{13}a_{21}a_{32}$) (рис. 1.1). Три інші доданки зі знаком "мінус" є добутками елементів побічної діагоналі ($a_{13}a_{22}a_{31}$) й елементів, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні до побічної діагоналі ($a_{12}a_{21}a_{33}$ і $a_{11}a_{23}a_{32}$) (рис. 1.2).



(+)

Рис.1.1

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$



(–)

Рис. 1.2

Таку схему обчислення визначника третього порядку називають ***правилом трикутників***.

Задача 1.4. Обчислити визначник третього порядку

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Використовуючи правило трикутників, знаходимо:

$$|A| = 2\cdot 4\cdot 0 + (-3)\cdot 1\cdot(-5) + 1\cdot 5\cdot 0 - (-5)\cdot 4\cdot 0 - 1\cdot(-3)\cdot 0 - 5\cdot 1\cdot 2 = 5. \ ■$$

Для того, щоб означити визначник довільного порядку, введемо деякі допоміжні поняття.

Розглянемо квадратну матрицю (1.3). Із загального числа її елементів (усіх елементів є n^2) виберемо набір, що містить n елементів, щоб у нього входило по одному елементу з кожного рядка та кожного стовпця матриці A. Будь-який такий набір можна впорядкувати, якщо записати спочатку елемент з першого рядка, потім з другого і т.д., тобто записати у вигляді

$$(a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}).$$

Номери стовпців $(j_1, j_2, ..., j_n)$ утворюють при цьому ***перестановку*** з чисел $1, 2, ..., n$. Усього з n чисел можна отримати $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ ($n!$ читають "ен-факторіал") різних перестановок. Наприклад, (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1) – усі можливі перестановки з чисел {1, 2, 3}.

Кажуть, що два числа у перестановці утворюють ***інверсію***, якщо більше число передує меншому.

Наведемо спосіб підрахунку кількості інверсій у перестановці: для цього читаємо числа перестановки у порядку їх запису (зліва направо) і для кожного з них підраховуємо, скільки чисел, менших за це число, стоять праворуч від нього. Додаючи отримані результати, визначаємо кількість інверсій заданої перестановки.

Знайдемо, наприклад, кількість інверсій у перестановці (4, 3, 5, 1, 2). Праворуч числа 4 стоять три числа, менші за нього: 3,1,2 – маємо три інверсії. Для числа 3 інверсій дві, оскільки праворуч від нього є два числа, менші, ніж 3, – це числа 1 і 2. Аналогічно знаходимо дві інверсії для числа 5 і жодної інверсії для числа 1. Отже, задана перестановка має $3+2+2+0=7$ інверсій.

Визначником матриці n-го порядку $A = \left(a_{ij}\right)$, $i, j = 1, ..., n$, (або ***визначником n-го порядку***) називають число, яке дорівнює алгебричній сумі $n!$ доданків, кожний з яких є добутком n елементів матриці, взятих по одному з кожного рядка й кожного стовпця, причому знак кожного доданка визначається множником $(-1)^t$, де t – кількість інверсій у перестановці з номерів стовпців матриці, якщо номери рядків записати у порядку зростання, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}, \qquad \textbf{(1.6)}$$

де підсумовування здійснюється за усіма перестановками $(j_1, j_2, ..., j_n)$.

Проте для обчислення визначників високих порядків формула (1.6) є непрактичною, бо із зростанням порядку n матриці A швидко зростає кількість доданків у правій частині (1.6). Наприклад, для $n = 5$ формула (1.6) містить 120 доданків по 5 множників у кожному з них.

Як правило, для обчислення визначників високих порядків використовують теорему Лапласа. Для її формулювання введемо поняття мінору та алгебричного доповнення елемента матриці.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці A порядку n називають визначник порядку $n-1$, який утворений з матриці A вилученням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A порядку n називають його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad \textbf{(1.7)}$$

Задача 1.5. Знайти алгебричні доповнення елементів a_{21} та a_{33} матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу (1.7), знаходимо:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}.$$

Мінори M_{21} та M_{33} обчислюємо за означенням:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 1\cdot(-1) = 13, \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3\cdot 1 = 5.$$

Остаточно одержуємо, що $A_{21} = -13$, $A_{33} = 5$. ■

Теорема Лапласа [1]. *Визначник* Δ *матриці n-го порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебричні доповнення, тобто*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}, \quad i = 1,\ldots,n, \qquad \textbf{(1.8)}$$

або

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}, \quad j = 1,\ldots,n. \qquad \textbf{(1.9)}$$

Формулу (1.8) називають ***розкладом визначника*** Δ ***за елементами i-го рядка***, а формулу (1.9) – ***розкладом визначника за елементами j-го стовпця***.

[1] **ЛАПЛАС** П'єр Сімон (1749-1827), французький астроном, математик, фізик.

Важливість теореми Лапласа полягає у тому, що обчислення визначника Δ за формулами (1.8) або (1.9) зводиться до обчислення визначників, порядок яких на одиницю менший, ніж порядок визначника Δ. Застосовуючи до кожного з цих визначників теорему Лапласа, через скінченне число кроків прийдемо до обчислення визначників третього або другого порядків.

Задача 1.6. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладати цей визначника будемо за елементами другого рядка, бо серед його елементів є два нулі. Отже, використовуючи формулу (1.8), одержуємо:

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} + 5 \cdot A_{22} + 4 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24} =$$

$$= 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 12 - 4 \cdot 9 = 24. \ \blacksquare$$

Задача 1.7. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладаючи визначник за елементами першого стовпця, одержуємо:

$$\Delta = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 2 \cdot 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 = 20. \ \blacksquare$$

Із задачі 1.7 випливає важливий висновок: *визначник діагональної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.*

§ 1.5. Властивості визначників

Для ефективного обчислення визначників шляхом розкладання за елементами деякого рядка або стовпця необхідно вміти виконувати еквівалентні перетворення, що дає можливість одержувати нулі у потрібному рядку чи стовпці визначника. Виконання таких перетворень здійснюється з використанням властивостей, якими володіє довільний визначник n-го порядку. Наведемо основні з цих властивостей.

1. *Якщо транспонувати матрицю, то її визначник не зміниться, тобто* $|A^T|=|A|$.

2. *Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то він змінить знак на протилежний.*

Доведення. Припустимо, що у визначнику $|A|$ ми поміняли місцями два сусідні рядки з номерами i та $i+1$. У результаті цього отримаємо новий визначник, який позначимо $|A'|$. Якщо розкласти визначник $|A|$ за елементами i-го рядка, а визначник $|A'|$ – за елементами $(i+1)$-го рядка, то ці визначники відрізнятимуться тільки знаком, оскільки у формулі (1.8) для $|A'|$ кожне алгебричне доповнення матиме протилежний знак (множники $(-1)^{i+j}$ зміняться на множники $(-1)^{i+1+j}$).

Перестановку місцями несусідніх i-го та $(i+k)$-го рядків можна подати як послідовне зміщення i-го рядка на k рядків вниз (при цьому знак визначника $|A|$ зміниться k разів), а $(i+k)$-го рядка – на $k-1$ рядків вверх, що також приведе до зміни знака $k-1$ разів. У результаті цього знак зміниться $k+k-1=2k-1$, тобто непарну кількість є число разів, а отже $|A'|=-|A|$. ►

3. Якщо усі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на довільне число k, то визначник також помножиться на число k.

Іншими словами, *спільний множник усіх елементів деякого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника*.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Доведення цієї властивості випливає з того, що згідно з формулою (1.6) визначник є алгебричною сумою, кожний член якої містить як множник один елемент з кожного рядка та з кожного стовпця. ►

4. *Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.*

Ця властивість випливає з властивості 3 (якщо $k = 0$).

5. *Якщо кожен елемент і-го рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то цей визначник можна розкласти на суму двох визначників, у одного з яких і-ий рядок (стовпець) складається з перших доданків, а у іншого – з других, інші елементи усіх трьох визначників однакові.*

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6. *Якщо визначник матриці має два однакові рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.*

Доведення. Якщо поміняти місцями два однакові рядки (стовпці), то, з одного боку, визначник не зміниться, а з іншого, згідно з властивістю 2, змінить знак на протилежний. Отже,

$$|A| = -|A|,$$

звідки й випливає, що $|A| = 0$.►

7. Якщо елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то він дорівнює нулю.

Доведення. Якщо винести коефіцієнт пропорційності за знак визначника (згідно з властивістю 3), то одержимо визначник з двома однаковими рядками (стовпцями), який за властивістю 6 дорівнює нулю. ►

8. *Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого його рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й теж число.*

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доведення. Отриманий у результаті такого додавання визначник згідно з властивістю 5 можна розкласти на суму двох визначників, перший з яких співпадає з заданим, а інший має два пропорційні рядки (стовпці), а тому дорівнює нулю (властивість 7). ►

Використовуючи властивість 8, можна зробити так, щоб у деякому рядку (стовпці) визначника тільки один елемент був відмінним від нуля. Тоді розклад визначника за елементами цього рядка (стовпця) міститиме тільки один доданок, а тому обчислення визначника n-го порядку зведеться до обчислення визначника $(n-1)$-го порядку (мінора, що міститься у вказаному доданку).

Задача 1.8. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Перетворимо визначник так, щоб у першому його стовпці, серед елементів якого вже є один нуль, зробити ще два нулі. Використовуючи властивість 8, елементи першого рядка помножимо спочатку на 3 й додамо до відповідних елементів третього рядка, а потім помножимо на –5 і додамо до відповідних елементів четвертого рядка.

У результаті цього одержимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -8 & 10 \\ 0 & -9 & 14 & -8 \end{vmatrix},$$

який, використовуючи теорему Лапласа (формула 1.9), доцільно розкласти за елементами першого стовпця. Будемо мати

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \\ -9 & 14 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= 64 - 180 + 336 - 216 - 140 + 128 = -8. \ ■$$

§ 1.6. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця. Матрицю A^{-1} називають ***оберненою*** до матриці A, якщо виконуються умови

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

З цього означення випливає, що A^{-1} є квадратною матрицею того ж порядку, що і матриця A.

Квадратну матрицю A називають ***виродженою***, якщо $|A| = 0$, і ***невиродженою***, якщо $|A| \neq 0$.

Не кожна квадратна матриця має обернену матрицю. Необхідну і достатню умову існування оберненої матриці виражає наступна теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема. *Матриця A має обернену матрицю, причому єдину, тоді і тільки тоді, коли вона невироджена.*

Обернену матриця можна побудувати різними способами. Розглянемо спочатку спосіб її побудови за допомогою ***приєднаної*** матриці A^*, тобто матриці, елементами якої є алгебричні доповнення елементів матриці A^T, транспонованої до A.

Для цього потрібно виконати такі дії:

1) обчислити визначник матриці A. Якщо $|A| = 0$, то матриця A є виродженою й оберненої матриці A^{-1} не існує;

2) обчислити всі алгебричні доповнення A_{ij} елементів матриці A;

3) записати приєднану матрицю A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

4) знайти обернену матрицю за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \quad |A| \neq 0. \tag{1.10}$$

5) перевірити правильність знаходження оберненої матриці, виходячи з її означення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (цей пункт виконувати не обов'язково).

Задача 1.9. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для побудови матриці A^{-1} скористаємося наведеним алгоритмом.

1. Обчислюємо визначник матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

отже, матриця A невироджена й обернена матриця існує.

2. Знаходимо алгебричні доповнення всіх елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

3. Для матриці A записуємо приєднану матрицю A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. За формулою (1.10) будуємо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Обернену матрицю можна побудувати також за ***методом Жордана-Гауса***[1)], використовуючи ***елементарні перетворення матриці***, до яких належать:

1) множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля;

2) зміна порядку рядків (стовпців);

3) додавання до кожного елемента деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на будь-яке число.

Будуючи обернену матрицю за допомогою методу Жордана-Гауса, потрібно:

1) справа від заданої невиродженої матриці дописати через відокремлювальну риску одиничну матрицю того ж порядку;

2) за допомогою елементарних перетворень рядків матрицю зліва перетворити в одиничну, виконуючи аналогічні перетворення рядків матриці справа.

Матриця справа, яку одержимо після виконання наведених перетворень, буде оберненою до заданої.

Задача 1.10. Методом Жордана-Гауса знайти матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця A невироджена, бо, як легко переконатись, $|A|\neq 0$. Виконаємо описані вище елементарні перетворення рядків матриці A, позначаючи символом "~" перехід від однієї матриці до іншої, отриманої за допомогою елементарних перетворень:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}:2\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{ll}\times(-2) & \times(-1)\\ + & \\ & +\end{array}\sim$$

[1)] **ГАУС** Карл Фрідріх (1797-1855), німецький математик.
ЖОРДАН Каміль (1838-1922), французький математик.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right):(-3)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)\times(-1)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right):1/2\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)\times(-1/6)\times(-1/3)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Таким чином, оберненою до матриці A буде матриця

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Невироджені матриці володіють такими ***властивостями***, довести які пропонуємо читачам самостійно:

1. $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$,
2. $(A^{-1})^{-1}=A$,
3. $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$,
4. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,
5. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

§ 1.7. Ранг матриці

Нехай $A=\left(a_{ij}\right),\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n,$ – прямокутна матриця порядку $m\times n$. Виділимо у ній довільні k рядків і k стовпців, де $k\le\min\{m,n\}$.

Визначник k-го порядку, утворений з елементів, розташованих на перетині виділених рядків і стовпців, називають ***мінором k-го порядку*** матриці A (при цьому як рядки, так і стовпці цього визначника мають бути один відносно одного у тому ж порядку, що й у матриці A). Наприклад, з матриці порядку 3×4 можна утворити мінори першого, другого та третього порядків.

Ціле число $r > 0$ називають ***рангом*** матриці A, якщо серед її мінорів r-го порядку є принаймні один, відмінний від нуля, а всі мінори, порядок яких більший ніж r, дорівнюють нулю.

Ранг нульової матриці за означенням дорівнює нулю.

Ранг матриці A позначатимемо $r(A)$.

З означення рангу матриці випливають такі ***властивості***:

1) ранг матриці A порядку $m \times n$ не перевищує меншого з її розмірів, тобто

$$r(A) \le \min\{m, n\};$$

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = \mathbf{O}$;

3) ранг квадратної матриці A n-го порядку дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця A невироджена;

4) ранг матриці не змінюється при її транспонуванні;

5) ранг матриці не змінюється при вилученні нульового рядка (стовпця).

Задача 1.11. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки матриця A має порядок 3×4, то

$$r(A) \le \min\{3, 4\} = 3.$$

Обчислимо мінори третього порядку:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad M_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Як бачимо, усі мінори третього порядку дорівнюють нулю, а оскільки є відмінний від нуля мінор другого порядку, а саме $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \ne 0$, то $r(A) = 2$. ■

Обчислення рангу матриці у наведений спосіб є доволі громіздким. Більш зручним є метод, який ґрунтується на тому, що ранг матриці не зміниться, якщо над нею виконати елементарні перетворення.

Використовуючи елементарні перетворення матриці та властивості 4 і 5 рангу матриці, довільну ненульову матрицю завжди можна звести до східчастого вигляду, тобто до матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1k} \\ \dots & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{ss} & \dots & a_{sk} \end{pmatrix}, \qquad (1.11)$$

де $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \dots, s,\ \ s \leq k$ (умова $s \leq k$ завжди досягається транспонуванням матриці).

Очевидно, що ранг східчастої матриці (1.11) дорівнює s, оскільки $r(A) \leq s$ й існує мінор s-го порядку, відмінний від нуля, а саме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{ss} \neq 0.$$

Алгоритм обчислення рангу матриці, що базується на елементарних перетвореннях матриці та використанні властивостей рангу, може бути таким:

1) якщо у матриці $A = \left(a_{ij}\right),\ i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n$, на початку або у результаті наступних перетворень усі елементи деякого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то цей рядок (стовпець) вилучаємо;

2) якщо $a_{11} = 0$, то помінявши місцями перший рядок (стовпець) з деяким іншим, у якому перший елемент відмінний від нуля, досягаємо того, що $a_{11} \neq 0$;

3) якщо $a_{11} \neq 0$, то до кожного з елементів $a_{2j},\ j = 1, \dots, n$, другого рядка додаємо відповідний елемент a_{1j} першого рядка, попередньо помножений на число $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$. Аналогічно вчиняємо з кожним наступним рядком, тобто до кожного з елементів $a_{ij},\ i = 3, \dots, m$, додаємо відповідний елемент a_{1j}, попередньо

помножений на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i=3,\ldots,m$. Якщо при цьому деякий елемент першого стовпця, який розміщений нижче a_{11}, вже дорівнює нулю, то рядок, у якому він знаходиться, залишаємо без змін. У результаті цього досягаємо того, що всі елементи першого стовпця, розміщені нижче a_{11}, дорівнюватимуть нулю;

4) якщо в матриці $A=\left(a_{ij}^{(1)}\right)$, $i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$, яка є результатом виконання пунктів 1-3 цього алгоритму, елемент $a_{22}^{(1)}=0$, то поміняємо другий рядок (стовпець) з будь-яким з наступних, у якому другий елемент відмінний від нуля. Якщо ж $a_{22}^{(1)}\neq 0$, то до кожного з елементів третього, четвертого, ... , m-го рядків додаємо відповідні елементи другого рядка, помножені відповідно на $-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, $i=3,\ldots,m$. При цьому досягаємо того, що всі елементи першого стовпця, розміщені нижче $a_{22}^{(1)}$, дорівнюватимуть нулю;

5) дії, описані в пункті 4 для елемента $a_{22}^{(1)}$, повторюємо для кожного елемента $a_{kk}^{(k-1)}$, $k\geq 3$, новоутворених матриць, доки не зведемо матрицю до східчастого вигляду (1.11).

Задача 1.12. Обчислити ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Символом "~" позначимо знак рівності рангів матриць. Використовуючи елементарні перетворення рядків матриці A, будемо мати:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \quad \times(-2) \\ + \\ \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -9 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ + \quad + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримали матрицю східчастого вигляду, яка має відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Отже, $r(A) = 2$. ■

Для рангів матриць виконуються такі ***співвідношення***:

$$1.\ |r(A) - r(B)| \leq r(A+B) \leq r(A) + r(B);$$

$$2.\ r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\},$$

де n – кількість стовпців матриці A або рядків матриці B;

$$3.\ r(AB) = r(A),$$

якщо B – невироджена квадратна матриця;

$$4.\ r(A^T A) = r(A).$$

Поняття рангу матриці тісно пов'язане з поняттям лінійної залежності (незалежності) її рядків або стовпців.

Введемо такі позначення для рядків матриці

$$A = \left(a_{ij}\right),\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n:$$

$$e_1 = \left(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\right),\quad e_2 = \left(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\right),\ \ldots,\ e_m = \left(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}\right).$$

Два рядки матриці називають ***рівними***, якщо рівні їх відповідні елементи, тобто $e_k = e_s$, якщо $a_{kj} = a_{sj}$, $j = 1,\ldots,n$.

Сумою двох рядків e_k і e_s називають рядок

$$\left(a_{k1} + a_{s1},\ a_{k2} + a_{s2},\ \ldots,\ a_{kn} + a_{sn}\right),$$

а добутком рядка e_k на число λ – рядок $\left(\lambda a_{k1}, \lambda a_{k2}, \ldots, \lambda a_{kn}\right)$.

Рядок e називають ***лінійною комбінацією*** рядків $e_1, e_2, \ldots, e_m$ матриці, якщо він дорівнює сумі добутків цих рядків на довільні дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, тобто якщо

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m.$$

Рядки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ матриці називають ***лінійно залежними***, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, які одночасно не дорівнюють нулю, що лінійна комбінація рядків дорівнює нульовому рядку, тобто

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{0} = (\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{m}).$$

Якщо рядки матриці лінійно залежні, то хоча б один з них є лінійною комбінацією решти рядків. Справді, якщо в останній рівності, наприклад, $\lambda_m \neq 0$, то

$$e_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} e_2 - \ldots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} e_{m-1},$$

тобто рядок e_m є лінійною комбінацією інших рядків матриці.

Рядки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ матриці називають ***лінійно незалежними***, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нульовому рядку тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Теорема (про ранг матриці). *Ранг матриці дорівнює максимальній кількості її лінійно незалежних рядків (стовпців), через які лінійно виражаються всі інші її рядки (стовпці).*

Доведення. Нехай матриця порядку $m \times n$ має ранг r (очевидно, що $r \leq \min\{m, n\}$). Тоді існує відмінний від нуля мінор r-го порядку. Будь-який ненульовий мінор r-го порядку називатимемо ***базисним мінором***. Без втрати загальності вважатимемо, що цим мінором є

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажемо, що рядки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ матриці $A = \left(a_{ij}\right)$, $i, j = 1, \ldots, r$, лінійно незалежні. Справді, якщо припустити протилежне, то один з рядків, наприклад e_r, є лінійною комбінацією інших, тобто $e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{r-1} e_{r-1}$.

Віднімемо тепер від елементів r-го рядку по черзі елементи першого, другого, ... , $(r-1)$-го рядка, помножені відповідно на λ_1, λ_2, ... , λ_{r-1}. Як випливає з властивості 8 § 1.5, після такого перетворення визначник матриці A не зміниться, але оскільки тепер r-ий рядок міститиме лише нулі (а отже, $\Delta = 0$), то ми прийшли до суперечності. Таким чином, рядки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ матриці A лінійно незалежні. Теорему доведено. ►

Рядки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ називають ***базисними***.

Можна показати, що довільні $r+1$ рядків матриці лінійно залежні, тобто довільний рядок лінійно виражається через базисні.

§ 1.8. Системи лінійних алгебричних рівнянь

У шкільному курсі математики розглядаються системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими і трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. У математиці, фізиці, економіці та інших науках часто доводиться розглядати системи лінійних алгебричних рівнянь з довільним числом невідомих.

Лінійним рівнянням з n невідомими називається рівняння вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – задані дійсні числа, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі, які в це рівняння входять лінійно, тобто у першому степені.

Часто виникає потреба знайти спільні розв'язки декількох лінійних рівнянь, тобто розв'язати ***систему лінійних рівнянь***.

У загальному випадку система m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.12)$$

де $a_{ij}, i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n,$ – ***коефіцієнти системи*** (коефіцієнти біля невідомих), $b_i, i = 1,2,\ldots,m,$ – ***вільні члени***. Кожний коефіцієнт a_{ij} системи (1.12) має два індекси, перший з яких вказує на порядковий номер рівняння, а другий – на номер невідомого, біля якого стоїть цей коефіцієнт.

Розв'язком системи (1.12) будемо називати впорядковану множину чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, яка при підставлянні в (1.12) замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перетворює всі рівняння системи у числові тотожності.

Розв'язати систему – означає знайти всі її розв'язки або довести, що жодного розв'язку немає.

Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має принаймні один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона розв'язків не має.

Сумісна система рівнянь називається ***визначеною*,** якщо вона має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

Дві системи рівнянь називають ***еквівалентними*** (або ***рівносильними***), якщо вони мають однакову множину розв'язків. Будь-які несумісні системи рівнянь з однаковою кількістю невідомих вважають еквівалентними.

Матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

укладену з коефіцієнтів системи (1.12), називають ***основною матрицею*** цієї системи.

Матрицю

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

укладену з коефіцієнтів системи a_{ij} і вільних членів b_i, називають ***розширеною матрицею*** системи (1.12).

Виявляється, що сумісність або несумісність системи лінійних алгебричних рівнянь залежить виключно від співвідношення між рангами матриць A і $\tilde{A}$. Це випливає з наступного твердження.

Теорема 1 (Кронекера-Капеллі [1]). *Для того, щоб система (1.12) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранги її основної та розширеної матриці були рівні.*

Спільне значення рангів матриць A і $\tilde{A}$ називають ***рангом*** системи (1.12). Очевидно, що ранг системи рівнянь не перевищує кількості рівнянь, а також кількості невідомих системи.

Отже, використовуючи теорему Кронекера-Капеллі, можна визначити сумісність або несумісність системи лінійних рівнянь тільки за рангами основної та розширеної матриць, тобто без розв'язування системи.

Якщо система сумісна, то за допомогою наступного твердження можна з'ясувати, визначена вона, чи ні.

[1] **КРОНЕКЕР** Леопольд (1823-1891), німецький математик.
КАПЕЛЛІ Альфред (1855-1910), італійський математик.

Теорема 2 (критерій визначеності). *Якщо система лінійних рівнянь з* n *невідомими сумісна і ранг її основної матриці дорівнює r, то при* $r = n$ *ця система визначена, а при* $r < n$ *– невизначена.*

§ 1.9. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь (1.12). Використовуючи правило множення двох матриць, цю систему можна записати у вигляді матричного рівняння

$$AX = B, \tag{1.13}$$

де A – основна матриця системи (1.12), $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – матриця-стовпець невідомих, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ – матриця-стовпець вільних членів (T – символ транспонування).

Зображення лінійної системи (1.12) у вигляді матричного рівняння (1.13) називають ***матричною формою*** системи (1.12).

Розв'язком матричного рівняння (1.13) є такий вектор-стовпець X, який перетворює всі рівняння системи (1.12) у тотожності.

Якщо основна матриця системи (1.12) квадратна і невироджена, то її розв'язок можна знайти у матричній формі, або, як кажуть, ***матричним методом***.

Для цього помножимо зліва обидві частини матричного рівняння (1.13) на матрицю A^{-1}, обернену до матриці A: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Оскільки

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X,$$

то

$$X = A^{-1}B, \tag{1.14}$$

тобто розв'язок системи (1.12) можна отримати як добуток матриць A^{-1} і B.

Задача 1.13. Розв'язати матричним методом систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо

$$A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5\\ 7\\ -4\end{pmatrix}.$$

Оскільки, як легко перевірити, $|A|\neq 0$, то матриця A невироджена, а тому існує обернена матриця A^{-1}. Матрицю A^{-1} знайдемо, використовуючи метод Жордана-Гауса (див. § 1.6). Будемо мати

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) :4 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{c}\times(-2)\quad \times(-3)\\ +\\ +\end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -13/4 & -3/4 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{c}+\\ :(-3)\quad \times(-1)\\ +\end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 7/12 & 1/12 & 1/3 & 0\\ 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & -37/12 & -7/12 & -1/3 & 1\end{array}\right) :\left(-37/12\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 7/12 & 1/12 & 1/3 & 0\\ 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 7/37 & 4/37 & -12/37\end{array}\right) \begin{array}{c}+\\ +\\ \times\left(-1/6\right)\quad \times(-7/12)\end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1/37 & 10/37 & 7/37\\ 0 & 1 & 0 & 5/37 & -13/37 & 2/37\\ 0 & 0 & 1 & 7/37 & 4/37 & -12/37\end{array}\right).$$

Таким чином, обернена матриця A^{-1} має вигляд

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/37 & 10/37 & 7/37\\ 5/37 & -13/37 & 2/37\\ 7/37 & 4/37 & -12/37\end{pmatrix}.$$

Тепер за формулою (1.14) знаходимо:

$$X=\frac{1}{37}\begin{pmatrix}-1 & 10 & 7\\ 5 & -13 & 2\\ 7 & 4 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 7\\ -4\end{pmatrix}=\frac{1}{37}\begin{pmatrix}-1\cdot5+10\cdot7+7\cdot(-4)\\ 5\cdot5-13\cdot7+2\cdot(-4)\\ 7\cdot5+4\cdot7-12\cdot(-4)\end{pmatrix}=\frac{1}{37}\begin{pmatrix}37\\ -74\\ 111\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=3.$ ■

§ 1.10. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Якщо основна матриця A системи (1.12) невироджена, тобто $|A|\neq 0$, то розв'язок цієї системи можна знайти також за допомогою ***методу Крамера*** [1)], який виражає наступна теорема.

Теорема (Крамера). *Нехай Δ – визначник основної матриці A системи n лінійних алгебричних рівнянь з n невідомими, а Δ_j – визначник, який одержуємо заміною елементів j-го стовпця матриці A стовпцем вільних членів. Якщо $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається формулами*

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},\qquad j=1,2,\ldots,n. \tag{1.15}$$

Доведення. Підставимо обернену матрицю A^{-1}, знайдену за формулою (1.10), у (1.14). Будемо мати:

$$X=\frac{1}{|A|}A^{*}\cdot B=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

Виконуючи множення матриць у правій частині цієї рівності, одержуємо:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}\\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\ldots+b_nA_{n2}\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\ldots+b_nA_{nn}\end{pmatrix}.$$

З означення рівності двох матриць (§ 1.1) випливає, що

$$x_j=\frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}\right),\quad j=1,2,\ldots,n,$$

---

1) **КРАМЕР** Габріель (1704-1752), швейцарський математик.

де вираз у дужках згідно з теоремою Лапласа є не чим іншим, як визначником Δ_j, який одержується визначника матриці A заміною в ньому j-го стовпця стовпцем з вільних членів. Теорему доведено. ►

Формули (1.15) називають ще ***формулами Крамера***.

Задача 1.14. Розв'язати методом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $\Delta = 10 \neq 0$, то ця система має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3, замінивши в основній матриці системи відповідно перший, другий та третій стовпець стовпцем з вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 10, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 20, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тепер, використовуючи формули (1.15), знаходимо, що

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0. \ ■$$

§ 1.11. Методи Гауса та Жордана-Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь

Суттєвим недоліком розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими матричним методом або методом Крамера є їх велика трудомісткість, пов'язана із знаходженням оберненої матриці й обчисленням визначників. Тому ці методи мають радше теоретичний інтерес і на практиці не можуть бути використані для розв'язування реальних економічних задач, які часто зводяться до систем з великою кількістю рівнянь та змінних.

Одним з найбільш ефективних методів розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь є ***метод Гауса*** (***метод послідовного виключення невідомих***). Схема обчислення за методом Гауса досить проста. Важливим є також і те, що у процесі обчислень встановлюються такі важливі властивості системи, як її сумісність і визначеність.

Ґрунтується метод Гауса на ***елементарних перетвореннях*** системи лінійних алгебричних рівнянь, до яких належать:

1) переставляння двох рівнянь місцями;

2) множення обох частин деякого рівняння на одне й те саме число, відмінне від нуля;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) вилучення із системи рівняння, яке є тотожністю.

Загальна ідея методу Гауса розв'язування системи лінійних рівнянь полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система (1.12) зводиться до еквівалентної їй системи східчастого або трикутного вигляду, з якої послідовно, починаючи з останнього за номером невідомого, можна знайти всі інші невідомі.

Будемо вважати, що у системі (1.12) немає рівнянь вигляду

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_k, \quad b_k \neq 0,$$

та

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0.$$

У першому випадку k-те рівняння не має розв'язку, а тому система несумісна. У другому випадку отримуємо систему з меншою кількістю рівнянь. Отже, у кожному рівнянні системи (1.12) хоч один з коефіцієнтів відмінний від нуля.

Алгоритм методу Гауса може бути таким.

1. Нехай $a_{11} \neq 0$. Якщо це не так, то на перше місце потрібно поставити рівняння з відмінним від нуля коефіцієнтом біля x_1 і перепозначити коефіцієнти. Таке рівняння завжди знайдеться, бо інакше кількість невідомих буде меншою, ніж n. Перетворимо систему (1.12), виключаючи невідоме x_1 з усіх рівнянь, окрім першого. Для цього помножимо перше рівняння послідовно на

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}},\ -\frac{a_{31}}{a_{11}},\ \ldots,\ -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$$

і додамо одержані рівняння відповідно до другого, третього, … , m-го рівняння.

Після скорочень та зведення подібних доданків одержуємо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^1 x_2 + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1, \\ \qquad a_{32}^1 x_2 + \ldots + a_{3n}^1 x_n = b_3^1, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad a_{m2}^1 x_2 + \ldots + a_{mn}^1 x_n = b_m^1, \end{cases} \tag{1.16}$$

де через a_{jk}^1 і b_j^1 позначені нові коефіцієнти та нові вільні члени системи:

$$a_{jk}^1 = a_{jk} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1k},$$

$$b_j^1 = b_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}} b_1, \quad j = 2,3,\ldots,m, \quad k = 2,3,\ldots,n.$$

2. Якщо $a_{22}^1 = 0$, то поміняємо місцями друге рівняння з будь-яким іншим, у якому коефіцієнт біля x_2 відмінний від нуля. Якщо таких рівнянь не виявиться, то у другому рівнянні знаходимо перше з невідомих, коефіцієнт біля якого відмінний від нуля, і весь стовпець доданків у системі з цим невідомим ставимо на місце доданків з невідомим x_2. Якщо ж такого невідомого не знайдеться, то друге рівняння матиме вигляд

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_2^1.$$

Якщо $b_2^1 = 0$, то це рівняння є тотожністю, а якщо $b_2^1 \neq 0$, то рівняння, а отже, і система (1.16) розв'язку немає .

Припустимо, що $a_{22}^1 \neq 0$. Якщо помножити друге рівняння системи (1.16) послідовно на

$$-\frac{a_{32}^1}{a_{22}^1}, \; -\frac{a_{42}^1}{a_{22}^1}, \; \ldots \; , \; -\frac{a_{m2}^1}{a_{22}^1}$$

і додати одержані рівняння відповідно до третього, четвертого, … , m-го рівняння, то вдасться вилучити змінну x_2 з третього та всіх наступних рівнянь.

3. Продовжуючи описаний процес, послідовно виключаємо невідомі $x_3, x_4, \ldots, x_{s-1}$ і після (s–1)-го кроку приходимо до системи, яка еквівалентна системі (1.12):

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + a_{1,s+1}x_{s+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}^1 x_2 + \ldots + a_{2s}^1 x_s + a_{2,s+1}^1 x_{s+1} + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1, \\
\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\qquad\qquad a_{ss}^{s-1}x_s + a_{s,s+1}^{s-1}x_{s+1} + \ldots + a_{sn}^{s-1}x_n = b_s^{s-1}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{s+1}^{s-1}, \\
\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{s-1},
\end{cases} \tag{1.17}
$$

де $a_{11} \neq 0,\ \ a_{jj}^{j-1} \neq 0,\ \ j = 2,\ldots,s,\ \ s \leq n,$ а через

$$0 = b_j^{s-1},\ j = s+1,\ldots,m,$$

позначено рівняння, в яких коефіцієнти біля всіх невідомих дорівнюють нулю.

Проведемо дослідження системи (1.17) на сумісність та визначеність.

1. Якщо хоча б одне з чисел $b_{s+1}^{s-1}, \ldots,\ b_m^{s-1}$ відмінне від нуля, то відповідне рівняння не має розв'язку, а тому система (1.17) несумісна.

2. Якщо всі числа $b_{s+1}^{s-1}, \ldots,\ b_m^{s-1}$ дорівнюють нулю, то останні $m-s$ рівнянь системи (1.17) будуть тотожностями, а тому їх можна вилучити. Тоді ця система буде сумісною й матиме вигляд

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + a_{1,s+1}x_{s+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}^1 x_2 + \ldots + a_{2s}^1 x_s + a_{2,s+1}^1 x_{s+1} + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1, \\
\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\qquad\qquad a_{ss}^{s-1}x_s + a_{s,s+1}^{s-1}x_{s+1} + \ldots + a_{sn}^{s-1}x_n = b_s^{s-1}.
\end{cases} \tag{1.18}
$$

Якщо кількість рівнянь у системі (1.18) дорівнює кількості невідомих, тобто $s = n$, то ця система має трикутний вигляд і є визначеною. З останнього рівняння знаходимо x_n і, рухаючись угору, знаходимо усі інші невідомі.

Якщо ж рівнянь у системі (1.18) менше, ніж невідомих, тобто $s < n$, то ця система матиме східчастий вигляд, а тому буде невизначеною. Її розв'язки шукаємо так. Перші s невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_s$, які називатимемо ***базисними***, виражаємо через інші невідомі $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$, які називатимемо ***вільними***:

$$
\begin{cases}
x_1 = \alpha_{1,s+1}x_{s+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\
\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_s = \alpha_{s,s+1}x_{s+1} + \ldots + \alpha_{sn}x_n + \beta_s.
\end{cases} \tag{1.19}
$$

Розв’язок (1.19) називають ***загальним розв’язком*** системи (1.12). Якщо в (1.19) замість $x_{s+1}, x_{s+2},..., x_n$ підставити конкретні числові значення, то отримаємо ***частинний розв’язок*** системи (1.12). Зокрема, якщо $x_{s+1}=0$, $x_{s+2}=0$, ... , $x_n=0$, то одержуємо розв’язок

$$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s,0,...,0),$$

який називають ***базисним***.

На практиці зручніше зводити до східчастого (трикутного) вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю системи, з’єднуючи послідовно отримувані матриці знаком еквівалентності "~".

Задача 1.15. Розв’язати методом Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4, \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4=-3, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6. \end{cases}$$

Розв’язання. Виконаємо перетворення розширеної матриці системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{lll} \times(-1) & \times(-2) & \times(-2) \\ + & & \\ & + & \\ & & + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \\ \times(-5) & \times(-1) \\ + & \\ & + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \times(-3) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right).$$

Останній розширеній матриці відповідає система

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4, \\ \quad -x_2-x_3+4x_4=5, \\ \qquad -2x_3-20x_4=-20, \\ \qquad\qquad 57x_4=57, \end{cases}$$

починаючи з останнього рівняння якої, послідовно знаходимо всі невідомі:

$$x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=0,\ x_4=1. \blacksquare$$

Задача 1.16. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворимо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 8 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-3) \\ + \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \times(-4) \\ \\ + \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \times(-2) \\ \\ \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Ранги основної і розширеної матриці дорівнюють 2 і є меншими, ніж кількість невідомих. За базисні невідомі можна взяти x_1 і x_2, оскільки мінор з коефіцієнтів біля цих невідомих відмінний від нуля.

Останній розширеній матриці відповідає система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases}$$

тому загальним розв'язком вихідної системи є

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4, \\ x_2 = 3, \end{cases}$$

а базисним – $(0,3,0,0)$. ■

Метод Гауса недостатньо зручний тим, що у східчастій системі рівнянь (1.17) значення x_s, знайдене з s-го рівняння, потрібно підставляти в (s–1)-те рівняння для знаходження невідомого x_{s-1}, потім значення x_s та x_{s-1} – у (s–2)-те рівняння для знаходження x_{s-2} і так далі.

Зручнішим з цього погляду є ***метод Жордана-Гауса*** (***метод повного виключення невідомих***), де невідомі виключаються не лише з наступних, а й з попередніх рівнянь системи. Проілюструємо метод Жордана-Гауса на прикладі.

Задача 1.17. Методом Жордана-Гауса розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Розв’язання. Виконаємо елементарні перетворення розширеної матриці системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-2) \quad \times(-1) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \times(-1) \quad \times(-1) \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ :3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ + \\ \times(-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Отже, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$ ■

§ 1.12. Однорідні системи рівнянь. Фундаментальна система розв’язків

Якщо у системі (1.12) усі вільні члени b_j, $j = 1,\dots,m$, дорівнюють нулю, то її називають ***однорідною***, а якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля, то ***неоднорідною***.

Отже, однорідна система m лінійних алгебричних рівнянь з n невідомими має такий загальний вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(1.20)}$$

Однорідна система рівнянь (1.20) завжди сумісна, бо вона, як легко переконатись, має нульовий (тривіальний) розв’язок $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots,\ x_n = 0$.

Ненульові розв’язки (якщо вони існують) системи (1.20) можна знайти, наприклад, методом Гауса або Жордана-Гауса.

Якщо у системі (1.20) $m=n$, а її визначник відмінний від нуля, то з теореми Крамера випливає, що така система має лише нульовий розв'язок.

Оскільки ранг основної матриці системи (1.20) завжди дорівнює рангу розширеної матриці, то за теоремою Кронекера-Капеллі однорідна система може мати ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли ранг її основної матриці A менший, ніж кількість невідомих, тобто коли $r(A)<n$.

Якщо позначити довільний розв'язок $x_1=t_1,\ x_2=t_2,\dots,\ x_n=t_n$ системи (1.20) у вигляді рядка $e=(t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_n)$, то матимуть зміст такі поняття, як сума двох розв'язків, добуток розв'язку на число, лінійна комбінація розв'язків.

Безпосередньою підстановкою розв'язків однорідної системи рівнянь легко переконатись у правильності таких ***властивостей***:

1) якщо рядок $e=(t_1,t_2,\dots,t_n)$ є розв'язком однорідної системи рівнянь, то рядок

$$ke=(kt_1,kt_2,\dots,kt_n)$$

для довільного числа k також є розв'язком цієї системи;

2) якщо рядки $e_1=(t_1,t_2,\dots,t_n)$ і $e_2=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ є розв'язками однорідної системи рівнянь, то їх сума

$$e_1+e_2=(t_1+p_1,\ t_2+p_2,\ \dots,\ t_n+p_n)$$

також є розв'язком цієї системи.

Із наведених властивостей випливає, що якщо однорідна система рівнянь має хоча б один нетривіальний розв'язок, то вона має безліч нетривіальних розв'язків.

Цікавими є такі розв'язки системи (1.20), через які лінійно виражаються усі її інші розв'язки.

Сукупність лінійно незалежних розв'язків $e_1,e_2,\dots,e_k$ системи рівнянь (1.20) називають ***фундаментальною системою розв'язків***, якщо кожний розв'язок системи (1.20) є лінійною комбінацією цих розв'язків.

Якщо ранг r системи (1.20) дорівнює кількості невідомих, то ця система не буде мати фундаментальної системи розв'язків, бо єдиним її розв'язком буде нульовий розв'язок, який складає лінійно залежну систему.

Якщо $r < n$, то система (1.20) має безліч фундаментальних систем розв'язків, причому кожна з них складається з $n - r$ розв'язків і будь-які $n - r$ лінійно незалежних розв'язків складають фундаментальну систему. У цьому випадку загальний розв'язок системи (1.20) має такий вигляд

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k ,$$

де $e_1, e_2, \ldots, e_k$ – будь-яка фундаментальна система розв'язків, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – довільні дійсні числа, $k = n - r$.

Можна довести, що загальний розв'язок неоднорідної системи m лінійних рівнянь з n невідомими (1.12) можна подати у вигляді суми загального розв'язку відповідної їй системи однорідних лінійних рівнянь (1.20) та будь-якого її частинного розв'язку.

§ 1.13. Модель міжгалузевої економіки

Ефективне ведення народного господарства передбачає наявність балансу між окремими його галузями. Для наочного висвітлення взаємного зв'язку між ними користуються так званими таблицями міжгалузевого балансу. Ідея таких таблиць була сформульована в роботах економістів СРСР, а перша таблиця опублікована Центральним статистичним управлінням СРСР у 1926 році.

Однак повністю математично обґрунтована ***модель міжгалузевого балансу***, що допускає широкі можливості для аналізу, з'явилась лише у 1936 році у працях американського економіста В. Леонтьєва [1)].

Розглянемо побудову моделі Леонтьєва, яку часто ще називають ***балансовим аналізом***. Мета балансового аналізу – дати відповідь на питання, яке виникає у макроекономіці й пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким повинен бути об'єм виробництва кожної з n галузей, щоб задовольнити усі потреби у продукції кожної з цих галузей? При цьому кожна галузь, з одного боку, є виробником деякої продукції, а з іншого – споживачем продукції (як своєї, так і виробленої іншими галузями).

[1)] **ЛЕОНТЬЄВ** (Leontief) Василь (1906-1999), американський економіст. Народився в Росії, з 1931 року проживав у США. У 1973 році нагороджений Нобелівською премією з економіки.

Отже, нехай маємо n галузей промисловості, кожна з яких виробляє певну продукцію. Частина продукції йде на внутрішні виробничі потреби даної галузі й інших галузей, а інша частина використовується у сфері особистого і суспільного споживання, тобто поза сферою матеріального виробництва.

Розглянемо процес виробництва за певний проміжок часу (наприклад, за один рік). Введемо такі позначення:

x_i – валовий об'єм продукції i-ої галузі, $i = 1,2,...,n$;

x_{ij} – об'єм продукції i-ої галузі, що використовується у процесі виробництва j-ою галуззю, $i, j = 1,2,...,n$;

y_i – об'єм кінцевого продукту i-ої галузі для невиробничого використання, $i = 1,2,...,n$.

Валовий об'єм продукції будь-якої галузі дорівнює сумарному об'єму продукції, який споживається галузями, і кінцевого продукту для невиробничого споживання, тобто

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1,2,...,n. \qquad \textbf{(1.21)}$$

Рівняння (1.21) називають ***співвідношенням балансу***.

Розглянемо вартісний міжгалузевий баланс, коли усі величини у формулі (1.21) мають вартісне вираження.

Коефіцієнтами прямих витрат назвемо числа

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1,2,...,n, \qquad \textbf{(1.22)}$$

які характеризують витрати продукції i-ої галузі на виробництво одиниці продукції j-ої галузі.

Вважатимемо, що на проміжку часу, який ми розглядаємо, коефіцієнти a_{ij} є сталими й залежать виключно від технології виробництва. Це означає лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску, тобто

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \quad i, j = 1,2,...,n. \qquad \textbf{(1.23)}$$

Саме тому побудована на цій основі модель міжгалузевого балансу отримала назву ***лінійної***.

Враховуючи формули (1.23), співвідношення балансу (1.21) тепер можемо записати у вигляді

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad \textbf{(1.24)}$$

Позначимо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де X – вектор валового випуску, Y – вектор кінцевого продукту невиробничого споживання, A – матриця прямих витрат, яку ще називають ***технологічною*** (або ***структурною***) матрицею. Тоді систему (1.24) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$X = AX + Y. \qquad \textbf{(1.25)}$$

Таким чином, основною задачею міжгалузевого балансу є відшукання такого вектора валового випуску X, який при відомій матриці A прямих витрат забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Рівняння (1.25) запишемо інакше:

$$(E - A)X = Y,$$

де E – одинична матриця. Якщо матриця $(E - A)$ – невироджена, то останнє рівняння можна розв'язати матричним методом за формулою

$$X = (E - A)^{-1} Y. \qquad \textbf{(1.26)}$$

Матрицю

$$S = (E - A)^{-1}$$

називають ***матрицею повних витрат***.

З'ясуємо економічний зміст елементів матриці $S = (s_{ij})$. Задамо одиничні вектори кінцевого продукту:

$$Y_1 = (1,0,\dots,0)^T,\ Y_2 = (0,1,\dots,0)^T, \dots, Y_n = (0,0,\dots,1)^T,$$

де T – символ транспонування.

З формули (1.26) одержуємо:

$X_1 = \left(s_{11}, s_{21}, \ldots, s_{n1}\right)^T$, $X_2 = \left(s_{12}, s_{22}, \ldots, s_{n2}\right)^T$, … , $X_n = \left(s_{1n}, s_{2n}, \ldots, s_{nn}\right)^T$.

Отже, кожний елемент s_{ij} матриці S є величиною валового продукту i-ої галузі, необхідного для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-ої галузі:

$$y_j = 1,\ j = 1,2,\ldots,n.$$

З економічного змісту задачі випливає, що значення x_i повинні бути невід'ємними для невід'ємних значень y_i і a_{ij}, $i, j = 1,2,\ldots,n.$

Звідси виникає таке питання: за яких умов, накладених на коефіцієнти a_{ij} і y_i системи (1.24), існує невід'ємний розв'язок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ цієї системи?

З економічної точки зору існування такого розв'язку системи рівнянь (1.24) означає, що модель Леонтьєва "працює".

Матрицю A, усі елементи якої невід'ємні, називають ***продуктивною***, якщо для будь-якої матриці-стовпця Y з невід'ємними компонентами існує розв'язок рівняння (1.25) – матриця-стовпець X, усі елементи якої невід'ємні. У такому випадку модель Леонтьєва називається ***продуктивною***.

Існує декілька критеріїв продуктивності матриці A. Наведемо деякі з них.

1. Матриця A продуктивна тоді і тільки тоді, коли матриця $\left(E - A\right)^{-1}$ існує й усі її елементи невід'ємні.

2. Матриця A з невід'ємними елементами продуктивна, якщо сума елементів у будь-якому її стовпці (рядку) не перевищує одиниці, тобто

$$\max_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1 \quad \text{або} \quad \max_{i=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le 1.$$

причому хоч для одного стовпця (рядка) сума менша одиниці.

Задача 1.18. У таблиці 2 наведено дані про баланс за деякий період часу між п'ятьма галузями промисловості. Знайти вектори кінцевого споживання та валового випуску, а також матрицю коефіцієнтів прямих витрат, і визначити, чи є вона продуктивною.

№ з/п	Галузь	Споживання					Кінцевий продукт	Валовий випуск (грош. од.)
		1	2	3	4	5		
1	Верстатобудування	15	12	24	23	16	10	100
2	Енергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машинобудування	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобільна промисловість	10	5	10	5	5	15	50
5	Видобування та переробка вуглеводнів	7	15	15	3	3	50	100

Табл. 2.

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти прямих витрат за формулами (1.22):

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 0,48 & 0,46 & 0,16 \\ 0,10 & 0,03 & 0,70 & 0,30 & 0,07 \\ 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,20 & 0,10 \\ 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,10 & 0,05 \\ 0,07 & 0,15 & 0,30 & 0,20 & 0,03 \end{pmatrix}.$$

Усі елементи матриці A додатні, однак легко бачити, що суми елементів у третьому і четвертому стовпцях більші за одиницю. Отже, умови другого критерію продуктивності не витримані, а тому матриця A не є продуктивною. Економічна причина цієї непродуктивності полягає у тому, що внутрішнє споживання у машинобудуванні та автомобільній промисловості надто велике у порівнянні з їх валовим випуском. ■

Задача 1.19. У таблиці 3 наведено дані про виконання балансу за звітний період в умовних грошових одиницях. Обчислити необхідний обсяг валового випуску у кожній галузі, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі збільшиться вдвічі, а кінцеве споживання машинобудування залишиться на попередньому рівні.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Кінцевий продукт</td><td rowspan="2">Валовий продукт</td></tr>
<tr><td>Енергетика</td><td>Машино-будування</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Енергетика</td><td>7</td><td>21</td><td>72</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Машино-будування</td><td>12</td><td>15</td><td>73</td><td>100</td></tr>
</table>

Табл. 3.

Розв'язання. З умови задачі одержуємо, що

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 100, \quad x_{11} = 7, \quad x_{12} = 21, \quad x_{21} = 12, \quad x_{22} = 15, \quad y_1 = 72, \quad y_2 = 73.$$

Із формул (1.22) знаходимо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11} = 0{,}07,\ a_{12} = 0{,}21,\ a_{21} = 0{,}12,\ a_{22} = 0{,}15.$$

Отже, матрицею прямих витрат є

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}15 \end{pmatrix}.$$

Усі елементи матриці A невід'ємні, а вона задовольняє другий критерій продуктивності, бо $\max\{0{,}07 + 0{,}12; 0{,}21 + 0{,}15\} = 0{,}36 < 1$. Тому для будь-якого вектора кінцевого продукту Y за формулою (1.26) можна знайти необхідний обсяг валового продукту X.

Знайдемо для цього матрицю повних витрат $S = (E - A)^{-1}$. Оскільки

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}93 & -0{,}21 \\ -0{,}12 & 0{,}85 \end{pmatrix},$$

а $|E - A| = 0{,}7653 \neq 0$, то обернена матриця $(E - A)^{-1}$ існує і має вигляд

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}7653} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}.$$

За умовою задачі вектор кінцевого продукту $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 73 \end{pmatrix}$. Тепер знаходимо вектор валового продукту X:

$$X = \frac{1}{0{,}7653} \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 144 \\ 73 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}7653} \begin{pmatrix} 137{,}73 \\ 85{,}17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179{,}97 \\ 111{,}29 \end{pmatrix}.$$

Отже, валовий випуск у енергетичній галузі треба збільшити до 179,97, а в машинобудуванні – до 111,29 умовних грошових одиниць. ■

Нехай A – продуктивна матриця. ***Запасом продуктивності*** матриці A назвемо таке число $\alpha > 0$, що усі матриці λA, де $\lambda < 1+\alpha$, продуктивні, а матриця $(1+\alpha)A$ – непродуктивна.

Задача 1.20. Встановити запас продуктивності матриці A із задачі 1.19.

Розв'язання. Скористаємось першим критерієм продуктивності матриці.

Оскільки

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}15 \end{pmatrix},$$

то

$$E - \lambda A = \begin{pmatrix} 1-0{,}07\lambda & -0{,}21\lambda \\ -0{,}12\lambda & 1-0{,}15\lambda \end{pmatrix}.$$

Обчислимо тепер визначник

$$\Delta \equiv |E-\lambda A| = \begin{vmatrix} 1-0{,}07\lambda & -0{,}21\lambda \\ -0{,}12\lambda & 1-0{,}15\lambda \end{vmatrix} = -0{,}0327\lambda^2 - 0{,}22\lambda + 1$$

і обернену матрицю

$$(E-\lambda A)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-0{,}15\lambda}{\Delta} & \dfrac{0{,}12\lambda}{\Delta} \\ \dfrac{0{,}21\lambda}{\Delta} & \dfrac{1-0{,}07\lambda}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Для продуктивності матриці λA необхідно, щоб всі елементи оберненої матриці були невід'ємними. Це можливо лише у випадку, коли

$$\Delta > 0, \quad 1-0{,}15\lambda \geq 0, \quad 1-0{,}07\lambda \geq 0.$$

Оскільки коренями квадратного рівняння $\Delta = 0$ є $\lambda_1 \approx -9{,}8$, $\lambda_2 \approx 3{,}0$, то розв'язком нерівності $\Delta > 0$ є інтервал

$$-9{,}8 < \lambda < 3{,}0.$$

Для таких λ інші нерівності також справджуються. Отже, запас продуктивності матриці A близький до двох. ■

Зазвичай матриця A міжгалузевого балансу має великий запас. Зростання виробничих витрат (зокрема, витрат, пов'язаних з усуненням негативних наслідків виробництва на оточуюче середовище) викликає збільшення елементів матриці A і, як наслідок, зменшення її запасу продуктивності.

§ 1.14. Модель зрівноважених цін

Розглянемо ще одну модель міжгалузевого балансу, яка отримала назву моделі зрівноважених цін.

Нехай, як і раніше, A – матриця прямих витрат, $X=(x_1,...,x_n)^T$ – вектор валового випуску. Позначимо через $P=(p_1,...,p_n)$ вектор цін, i-та координата $(i=1,...,n)$ якого дорівнює ціні одиниці продукції i-ї галузі. Тоді i-та галузь за реалізацію своєї продукції одержить прибуток $p_i\,x_i$. Частину цього прибутку вона витратить на закупівлю продукції інших галузей. Нехай для випуску одиниці продукції їй необхідна продукція першої галузі у кількості a_{1i}, другої галузі – у кількості a_{2i}, ... , n-ї галузі – у кількості a_{ni}. Кількість продукції a_{ii} означає, що i-та галузь частину своєї продукції використовує для власного виробництва, а тому її можна трактувати як закупівлю цієї кількості продукції у себе.

Отже, для закупівлі продукції в інших галузях, необхідної для випуску одиниці власної продукції, і-та галузь витратить суму, яка дорівнює

$$a_{1i}p_1+a_{2i}p_2+...+a_{ni}p_n.$$

Тоді для випуску продукції у кількості x_i їй необхідно витратити суму

$$x_i(a_{1i}p_1+a_{2i}p_2+...+a_{ni}p_n).$$

Частину прибутку, що залишилась (її називають доданою вартістю), позначимо через v_i. Вона йде на виплату заробітної плати, податків, підприємницький прибуток та інвестиції. Таким чином, маємо рівності

$$x_i p_i = x_i(a_{1i}p_1+a_{2i}p_2+...+a_{ni}p_n)+v_i, \qquad i=1,...,n,$$

з яких після ділення на x_i, одержуємо

$$p_i=(a_{1i}p_1+a_{2i}p_2+...+a_{ni}p_n)+w_i, \quad i=1,...,n, \qquad \textbf{(1.27)}$$

де $w_i=v_i/x_i$ – величина доданої вартості на одиницю продукції, що випускається (її називають ***нормою доданої вартості***).

Рівності (1.27) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$P=A^TP+W, \qquad \textbf{(1.28)}$$

де $W=(w_1,...,w_n)^T$ – вектор норм доданої вартості.

Одержане рівняння за структурою аналогічне до рівняння (1.25) міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва). Тут вектор X замінено на вектор P, вектор Y – на вектор W, матрицю A – на матрицю A^T.

Модель зрівноважених цін дозволяє, знаючи величину норм доданої вартості, прогнозувати ціни на продукцію галузей, а також зміну цін та інфляцію, що є наслідком зміни ціни в одній з галузей.

Задача 1.20. Нехай економічна система складається з трьох галузей: паливно-енергетичного комплексу, промисловості та сільського господарства. Задано транспоновану матрицю прямих витрат

$$A^T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

і вектор норм доданої вартості $W = (4, 10, 4)$. Знайти зрівноважені ціни та з'ясувати, як зміняться ціни в інших галузях при зростанні норми доданої вартості на 1,11 у паливо-енергетичному комплексі.

Розв'язання. Розв'язуючи матричне рівняння (1.28), будемо мати

$$P = \left(E - A^T\right)^{-1} W, \tag{1.29}$$

де $\left(E - A^T\right)^{-1} = C^T$ – транспонована матриця повних витрат.

Виконуючи необхідні обчислення, знаходимо, що

$$C^T = \frac{1}{0{,}444}\begin{pmatrix} 0{,}58 & 0{,}14 & 0{,}18 \\ 0{,}28 & 0{,}68 & 0{,}24 \\ 0{,}25 & 0{,}29 & 0{,}69 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи у (1.29), отримуємо вектор цін

$$P = (10,\ 20,\ 15)^T.$$

При зростанні норми доданої вартості у паливно-енергетичному комплексі вектор норм матиме вигляд $W = (5{,}11,\ 10,\ 4)$. Підставляючи у рівняння (1.29), одержуємо вектор цін

$$P = (11{,}45,\ 20{,}70,\ 15{,}63)^T.$$

Таким чином, продукція першої галузі подорожчає на 14,5%, другої – на 3,5%, третьої – на 4,17%. Знаючи об'єми випуску, можна обчислити інфляцію, викликану підвищенням цін. ■

§ 1.15. *n*-вимірний векторний простір. Евклідів простір

n-вимірним вектором називають упорядковану сукупність *n* дійсних чисел, яка записується у вигляді $\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$.

Числа $a_1,a_2,...,a_n$ називають ***координатами*** вектора $\vec{a}$.

Упорядкованість сукупності чисел $a_1,a_2,...,a_n$ означає, що компоненти вектора не можна поміняти місцями, не змінюючи самого вектора. Іншими словами, два *n*-вимірні вектори $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ ***рівні*** тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні компоненти, тобто якщо

$$a_i=b_i,\ i=1,2,...,n.$$

Поняття *n*-вимірного вектора широко використовується у економічних задачах. Наприклад, деякий набір товарів можна охарактеризувати вектором $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$, а відповідні ціни одиниці товару – вектором $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$.

Для довільних *n*-вимірних векторів введемо лінійні операції.

Сумою *n*-вимірних векторів $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ називають n-вимірний вектор $\vec{a}+\vec{b}$, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонент, тобто

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \dots,a_n+b_n\right).$$

Добутком *n*-вимірного вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ на дійсне число *k* називають *n*-вимірний вектор $\overrightarrow{ka}$, компоненти якого дорівнюють добутку числа *k* на відповідні компоненти вектора $\vec{a}$, тобто

$$k\vec{a}=\left(ka_1,\ ka_2,\ \dots,ka_n\right).$$

Введені операції над довільними векторами володіють мають такі ***властивості*** ($\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – довільні вектори, *k*, *l* – довільні дійсні числа):

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

3) існує нуль-вектор $\vec{0}=(0,0,\dots,0)$ такий, що $\vec{a}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{a}$;

4) існує протилежний вектор $-\vec{a}$ такий, що $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{\mathbf{0}}$.

5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;

6) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$;

7) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$;

8) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Доведення властивостей 1-8 ґрунтується на відповідних властивостях чисел, бо операції додавання векторів і множення вектора на число зводяться до тих самих операцій над числами – координатами векторів.

Існування для кожного вектора $\vec{a}$ протилежного йому вектора $-\vec{a}$ дає змогу ввести операцію віднімання векторів.

Різницею векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ називають вектор $\vec{b}+(-\vec{a})$, який позначатимемо $\vec{b}-\vec{a}$.

Множину векторів з дійсними координатами, в якій введені операції додавання векторів і множення вектора на число, що задовольняють наведені вище властивості 1-8, називають ***векторним простором*** і позначають V.

Якщо під символами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ розуміти не тільки вектори, а елементи довільної природи, то відповідну множину елементів називають ***лінійним простором***.

Введемо у просторі V операцію скалярного множення векторів. ***Скалярним добутком*** (позначають $(\vec{a},\vec{b})$) двох n-вимірних векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ називають число

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Скалярний добуток має простий економічний зміст. Якщо $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – вектор об’ємів різних товарів, а $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – вектор їх цін, то скалярний добуток $(\vec{a},\vec{b})$ виражає сумарну вартість цих товарів.

Скалярний добуток володіє деякими ***властивостями***, доведення яких випливають безпосередньо з його означення:

1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$;

2) $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})$;

3) $(k\vec{a},\vec{b})=k(\vec{a},\vec{b})$ для будь-якого дійсного числа k;

4) $(\vec{a},\vec{a})\geq 0$, причому $(\vec{a},\vec{a})=0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}=\vec{\mathbf{0}}$.

Векторний простір, в якому означений скалярний добуток векторів, що задовольняє наведені властивості 1-4, називають ***евклідовим простором*** і позначають E.

Використовуючи поняття скалярного добутку векторів, в евклідовому просторі E можна ввести поняття довжини вектора та кута між векторами.

Довжиною (нормою) вектора $\vec{a}$ (позначають $|\vec{a}|$) називають невід'ємне значення квадратного кореня з його скалярного квадрату $(\vec{a},\vec{a})$, тобто

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}.$$

Розглянемо деякі ***властивості довжини вектора***:

1) $|\vec{a}|=0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}=\vec{\mathbf{0}}$;

2) $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$ для будь-якого дійсного числа k;

3) для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового простору

$$|(\vec{a},\vec{b})|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \quad \text{(нерівність Коші-Буняковського [1])};$$

4) для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового простору

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}| \quad \text{(нерівність трикутника)}.$$

Кутом між ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового простору E називають число $\varphi, 0\leq\varphi\leq\pi,$ яке визначається рівністю

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+\ldots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}}.$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ простору E називають ***ортогональними*** (позначають $\vec{a}\perp\vec{b}$), якщо кут між ними дорівнює $\frac{\pi}{2}$, тобто якщо $(\vec{a},\vec{b})=0$.

---

[1] **КОШІ** Огюстен Луї (1789-1857), французький математик.
БУНЯКОВСЬКИЙ Віктор Якович (1804-1889), російський математик. Народився у м. Бар на Вінниччині.

§ 1.16. Вимірність і базис векторного простору. Зв'язок між базисами

Нехай $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},..., \overrightarrow{a_n}$ – n-вимірні вектори простору V, $k_1, k_2,..., k_n$ – деякі дійсні числа. Вектор

$$\vec{b} = k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_n\overrightarrow{a_n}$$

називають ***лінійною комбінацією*** векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},..., \overrightarrow{a_n}$. При цьому кажуть, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},..., \overrightarrow{a_n}$.

Наприклад, вектор $\vec{a} = (-2, 2, 1)$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1} = (1, 5, -3)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2, -3, 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (-2, -1, -7)$ з коефіцієнтами 2, 3, –1, бо, як легко переконатись, $\vec{a} = 2\overrightarrow{a_1} + 3\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3}$.

З поняттям лінійної комбінації тісно пов'язане поняття лінійної залежності векторів. Вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},..., \overrightarrow{a_n}$ векторного простору V називають ***лінійно залежними***, якщо існують такі дійсні числа $k_1, k_2,..., k_n$, одночасно не рівні нулю, що

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_n\overrightarrow{a_n} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Якщо ця рівність справджується тільки тоді, коли $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$, то вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},..., \overrightarrow{a_n}$ називають ***лінійно незалежними***.

Теорема 1. *Вектори* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},..., \overrightarrow{a_n}$ *лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з цих векторів є лінійною комбінацією інших.*

Лінійний простір V називають ***n-вимірним***, якщо у ньому є n лінійно незалежних векторів, а будь-які $n+1$ векторів лінійно залежні. Іншими словами, ***вимірність простору*** – це максимальна кількість лінійно незалежних векторів, що містяться у ньому.

Будь-яку сукупність n лінійно незалежних векторів n-вимірного лінійного простору V називають його ***базисом***.

Теорема 2. *Будь-який вектор* $\vec{x}$ *лінійного простору* V *єдиним способом може бути зображений у вигляді лінійної комбінації векторів базису.*

Доведення. Нехай $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ – довільний базис лінійного простору *V*. Тоді існують такі числа $k_1, k_2, ..., k_n, k$, одночасно не рівні нулю, що для довільного вектора $\vec{x}$

$$k_1\overrightarrow{e_1} + k_2\overrightarrow{e_2} + ... + k_n\overrightarrow{e_n} + k\vec{x} = \vec{\mathbf{0}}. \qquad \textbf{(1.30)}$$

При цьому $k \neq 0$, бо інакше

$$k_1\overrightarrow{e_1} + k_2\overrightarrow{e_2} + ... + k_n\overrightarrow{e_n} = \vec{\mathbf{0}}$$

і, враховуючи, що хоч одне з чисел k_i відмінне від нуля, вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ були б лінійно залежні.

Із (1.30) знаходимо, що

$$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + ... + x_n\overrightarrow{e_n}, \qquad \textbf{(1.31)}$$

де

$$x_i = -\frac{k_i}{k}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Припустимо тепер, що вектор $\vec{x}$ можна виразити через вектори базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ інакше, а саме

$$\vec{x} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + ... + y_n\overrightarrow{e_n}. \qquad \textbf{(1.32)}$$

Тоді, віднімаючи почленно від (1.32) рівність (1.31), одержуємо, що

$$(y_1 - x_1)\overrightarrow{e_1} + (y_2 - x_2)\overrightarrow{e_2} + ... + (y_n - x_n)\overrightarrow{e_n} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ лінійно незалежні, то

$$y_1 - x_1 = 0, \ y_2 - x_2 = 0, ..., \ y_n - x_n = 0,$$

тобто $y_1 = x_1, \ y_2 = x_2, \ ..., y_n = x_n$. Теорему доведено. ►

Рівність (1.31) називають ***розкладом вектора*** $\vec{x}$ ***за базисом*** $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – ***координатами вектора*** $\vec{x}$ у цьому базисі.

Задача 1.21. Записати розклад вектора $\vec{x} = (2, 5, 0)$ у базисі

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 2, -1), \ \ \overrightarrow{e_2} = (3, 6, 1), \ \ \overrightarrow{e_3} = (3, 9, 3).$$

Розв'язання. Якщо підставити координати базисних векторів у рівність (1.32), то одержимо матричне рівняння

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\9\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix},$$

яке рівносильне системі

$$\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3=2,\\2x_1+6x_2+9x_3=5,\\-x_1+x_2+3x_3=0.\end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x_1=1,\ \ x_2=0,\ \ x_3=\frac{1}{3}$. Таким чином, розклад вектора $\vec{x}$ у базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ має вигляд:

$$\vec{x}=\vec{e_1}+\frac{1}{3}\vec{e_3}.\ \blacksquare$$

Важливе значення має наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо $\vec{e_1}, \vec{e_2},..., \vec{e_n}$ – лінійно незалежні вектори простору V і будь-який вектор $\vec{a}$ цього простору єдиним способом лінійно виражається через ці вектори, то простір V є n-вимірним, а сукупність векторів $\vec{e_1}, \vec{e_2},..., \vec{e_n}$ – його базисом.*

Доведення. Візьмемо m довільних векторів $\vec{a_1}, \vec{a_2},..., \vec{a_m}$ простору *V*, де $m>n$. За умовою кожний з них можна лінійно виразити через вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2},..., \vec{e_n}$, тобто

$$\begin{cases}\vec{a_1}=\alpha_{11}\vec{e_1}+\alpha_{12}\vec{e_2}+...+\alpha_{1n}\vec{e_n},\\\vec{a_2}=\alpha_{21}\vec{e_1}+\alpha_{22}\vec{e_2}+...+\alpha_{2n}\vec{e_n},\\\quad ...\quad ...\quad ...\quad ...\quad ...\\\vec{a_m}=\alpha_{m1}\vec{e_1}+\alpha_{m2}\vec{e_2}+...+\alpha_{mn}\vec{e_n}.\end{cases}$$

Розглянемо тепер матрицю $A=\left(\alpha_{ij}\right),\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n$. Ранг матриці *A* не перевищує *n*:

$$r(A)<\min\{m,n\}=n,$$

а тому серед її рядків не більше *n* лінійно незалежних. Оскільки $m>n$, то *m* рядків матриці *A*, а отже, і *m* векторів $\vec{a_1}, \vec{a_2},..., \vec{a_m}$ лінійно залежні. Таким чином, простір *V* є *n*-вимірним, а $\vec{e_1}, \vec{e_2},..., \vec{e_n}$ – його базис. Теорему доведено. ►

Вище зазначалось, що у n-вимірному просторі V кожен базис складається з n векторів. Цілком природно виникає питання: скільки різних базисів можна знайти у просторі V і як ці базиси пов'язані між собою? З'ясуємо це.

Нехай у просторі V маємо два базиси: старий $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ і новий $\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, ..., \overrightarrow{e_n^*}$. Кожний вектор нового базису, як і будь-який вектор простору V, однозначно виражається через вектори старого базису:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1^*} &= \alpha_{11}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{12}\overrightarrow{e_2} + ... + \alpha_{1n}\overrightarrow{e_n}, \\ \overrightarrow{e_2^*} &= \alpha_{21}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{22}\overrightarrow{e_2} + ... + \alpha_{2n}\overrightarrow{e_n}, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \overrightarrow{e_n^*} &= \alpha_{n1}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{n2}\overrightarrow{e_2} + ... + \alpha_{nn}\overrightarrow{e_n}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

стовпцями якої є коефіцієнти розкладу нових базисних векторів за старим базисом, називають ***матрицею переходу*** від старого базису до нового.

Матриця A невироджена, бо інакше її стовпці, а отже, і базисні вектори, були б лінійно залежні. Зворотній перехід від нового базису до старого базису здійснюється за допомогою оберненої матриці A^{-1}.

З'ясуємо тепер, як пов'язані між собою координати одного й того ж вектора простору V у двох різних базисах.

Нехай довільний вектор $\vec{x}$ у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ має координати $x_1, x_2, ..., x_n$, а у базисі $\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, ..., \overrightarrow{e_n^*}$ – координати $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$, тобто

$$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + ... + x_n\overrightarrow{e_n},$$

$$\vec{x} = x_1^*\overrightarrow{e_1^*} + x_2^*\overrightarrow{e_2^*} + ... + x_n^*\overrightarrow{e_n^*}.$$

Підставляючи у другу з цих рівностей замість векторів $\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, ..., \overrightarrow{e_n^*}$ їх вирази через $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ із співвідношень (1.33), одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1^* + \alpha_{21}x_2^* + \ldots + \alpha_{n1}x_n^*, \\ x_2 = \alpha_{12}x_1^* + \alpha_{22}x_2^* + \ldots + \alpha_{n2}x_n^*, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = \alpha_{1n}x_1^* + \alpha_{2n}x_2^* + \ldots + \alpha_{nn}x_n^*. \end{cases}$$

Ці рівності є шуканими формулами перетворення координат вектора при переході від одного базису до іншого. Їх, очевидно, можна записати у вигляді матричної рівності

$$X = A^T X^*,$$

де $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$, з якої випливає, що

$$X^* = (A^T)^{-1} X. \qquad \textbf{(1.34)}$$

Задача 1.22. Вектор $\vec{b} = (2,-1,3)$, заданий у базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, розкласти за базисом $\vec{a_1} = (1,1,-1)$, $\vec{a_2} = (1,-1,0)$, $\vec{a_3} = (-1,0,0)$.

Розв'язання. Встановимо зв'язок між двома базисами:

$$\begin{cases} \vec{a_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}, \\ \vec{a_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2}, \\ \vec{a_3} = -\vec{e_1}. \end{cases}$$

Матрицею переходу від базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ до базису $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ є

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки, як легко перевірити, оберненою до A є матриця

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

то з (1.34) знаходимо:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\vec{b} = -3\vec{a_1} - 2\vec{a_2} - 7\vec{a_3}. \ \blacksquare$$

§ 1.17. Лінійні оператори

Нехай V_n і V_m – лінійні простори вимірностей n і m відповідно. Якщо задане правило, за яким кожному вектору $\vec{x}$ простору V_n ставиться у відповідність єдиний вектор $\vec{y}$ простору V_m, то кажуть, що задано ***оператор*** **A**, який діє з V_n у V_m, і позначають $\vec{y} = \mathbf{A}(\vec{x})$. При цьому вектор $\vec{y}$ називають ***образом*** вектора $\vec{x}$, а $\vec{x}$ – ***прообразом*** вектора $\vec{y}$.

Оператор **A**, що діє з V_n у V_m, називають ***лінійним***, якщо для довільних векторів $\vec{x}$, $\vec{y}$ простору V_n та довільного дійсного числа k виконуються співвідношення:

$$1)\ \ \mathbf{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathbf{A}(\vec{x}) + \mathbf{A}(\vec{y}); \qquad 2)\ \ \mathbf{A}(k\vec{x}) = k\mathbf{A}(\vec{x}).$$

Якщо простори V_n і V_m співпадають (позначимо їх через V), то кажуть, оператор **A** відображає простір V у себе. Надалі розглядатимемо саме такі відображення.

Нехай у просторі V маємо деякий базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$. Тоді згідно з теоремою 2 §1.16 довільний вектор $\vec{x}$ простору V можна однозначно розкласти за цим базисом у вигляді

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + ... + x_n\vec{e_n}.$$

Якщо оператор **A** лінійний, то

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = x_1\mathbf{A}(\vec{e_1}) + x_2\mathbf{A}(\vec{e_2}) + ... + x_n\mathbf{A}(\vec{e_n}). \qquad \mathbf{(1.35)}$$

Кожен з векторів $\mathbf{A}(\vec{e_i})$, $i = 1,...,n$, належить простору V, а тому їх також можна розкласти за базисом $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$. Нехай

$$\mathbf{A}(\vec{e_i}) = a_{1i}\vec{e_1} + a_{2i}\vec{e_2} + ... + a_{ni}\vec{e_n}, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad \mathbf{(1.36)}$$

Якщо підставити (1.36) у (1.35), то будемо мати:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = x_1(a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + ... + a_{n1}\vec{e_n}) + x_2(a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2} + ... + a_{n2}\vec{e_n}) + ... +$$
$$+ x_n(a_{1n}\vec{e_1} + a_{2n}\vec{e_2} + ... + a_{nn}\vec{e_n}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)\vec{e_1} +$$
$$+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)\vec{e_2} + ... + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)\vec{e_n}. \qquad \mathbf{(1.37)}$$

З іншого боку, вектор $\vec{y} = \mathbf{A}(\vec{x})$ можна розкласти за тим самим базисом $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$, а саме

$$\vec{y} = \mathbf{A}(\vec{x}) = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + ... + y_n\vec{e_n}. \qquad \mathbf{(1.38)}$$

Оскільки розклад вектора за цим базисом єдиний, то із (1.37) і (1.38) одержуємо систему

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n. \end{cases} \qquad \mathbf{(1.39)}$$

Таким чином, кожний лінійний оператор при фіксованому базисі породжує співвідношення (1.39), які встановлюють зв'язок між координатами образу і прообразу.

Матрицю $A = \left(a_{ij}\right)$, $i, j = 1, 2, ..., n$, складену з коефіцієнтів цієї системи, називають ***матрицею оператора*** $\mathbf{A}$ у базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$, а ранг цієї матриці – ***рангом оператора*** $\mathbf{A}$. Таким чином, кожному лінійному оператору відповідає матриця у даному базисі і, навпаки, кожній матриці n-го порядку відповідає лінійний оператор n-вимірного простору.

Векторну рівність $\vec{y} = \mathbf{A}(\vec{x})$ можна записати у вигляді матричного рівняння

$$Y = AX,$$

де A – матриця лінійного оператора, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ – матриці-стовпці, складені з координат векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ відповідно.

Означимо тепер дії над лінійними операторами.

Сумою лінійних операторів $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називають оператор $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, який визначається рівністю

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\vec{x}) = \mathbf{A}(\vec{x}) + \mathbf{B}(\vec{x}).$$

Добутком лінійного оператора $\mathbf{A}$ на число k називають оператор $k\mathbf{A}$, який визначається рівністю

$$(k\mathbf{A})(\vec{x}) = k\mathbf{A}(\vec{x}).$$

Нульовим оператором називають оператор, який переводить усі вектори простору V у нуль-вектор і позначається символом $\mathbf{O}$, тобто

$$\mathbf{O}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Тотожний оператор $\mathbf{E}$ означимо як такий, що

$$\mathbf{E}(\vec{x}) = \vec{x},$$

де $\vec{x}$ – довільний вектор простору V.

Для кожного оператора $\mathbf{A}$ означимо ***протилежний*** оператор $-\mathbf{A}$ за допомогою співвідношення

$$-\mathbf{A} = (-1)\cdot \mathbf{A}.$$

Добутком лінійних операторів **A** і **B** називають оператор **AB**, який діє за правилом

$$(\mathbf{AB})(\vec{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\vec{x})).$$

Можна довести, що оператори **A**+**B**, k**A** і **AB** є лінійними, якщо лінійними є оператори **A** і **B**.

Залежність між матрицями одного і того ж оператора у двох різних базисах виражає наступне твердження, яке наведемо без доведення.

Теорема. *Матриці A і A^* лінійного оператора* **A** *у базисах $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ і $\vec{e_1^*}, \vec{e_2^*}, \ldots, \vec{e_n^*}$ пов'язані співвідношенням*

$$A^* = C^{-1}AC, \tag{1.40}$$

де C – матриця переходу від першого базису до другого.

Задача 1.23. У базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ оператор **A** заданий матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю A^* оператора **A** у базисі

$$\vec{e_1^*} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2}, \quad \vec{e_2^*} = \vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 3\vec{e_3}, \quad \vec{e_3^*} = \vec{e_1} + \vec{e_3}.$$

Розв'язання. Матрицею переходу від базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ до базису $\vec{e_1^*}, \vec{e_2^*}, \vec{e_3^*}$ є матриця

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

то з формули (1.40) одержуємо

$$A^{*}=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 17 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виконавши множення матриць, знаходимо матрицю A^{*}

$$A^{*}=\begin{pmatrix} -13 & -45 & -27 \\ -12 & -25 & -18 \\ 42 & 105 & 68 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

§ 1.18. Власні вектори та власні значення лінійного оператора

Нехай лінійний оператор **A** діє у просторі V. Це означає, що кожному вектору $\vec{x}\in V$ ставиться у відповідність деякий вектор $\vec{y}=\mathbf{A}(\vec{x})$ з цього ж простору.

Вектор $\vec{x}\neq\vec{0}$ називають ***власним вектором*** лінійного оператора **A**, якщо існує таке число λ, що

$$\mathbf{A}(\vec{x})=\lambda\vec{x}. \qquad \mathbf{(1.41)}$$

Число λ називають ***власним значенням*** оператора **A**, що відповідає власному вектору $\vec{x}$.

З означення власного вектора випливає, що він під дією оператора **A** переходить у колінеарний йому вектор, тобто просто множиться на деяке число, тоді як у загальному випадку перетворення є складнішими.

Рівність (1.41) можна записати у матричній формі

$$AX=\lambda X,$$

де X – матриця-стовпець з координат вектора $\vec{x}$, або у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Ця система зводиться до однорідної системи

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0, \end{cases} \tag{1.42}$$

яку запишемо у матричній формі

$$(A - \lambda E)X = \mathbf{0}.$$

Однорідна система (1.42) завжди має нульовий розв'язок. Власний вектор за означенням відмінний від нуля, тому шукатимемо ненульові розв'язки системи (1.42). Для існування ненульового розв'язку необхідно і достатньо, щоб визначник основної матриці системи (1.42) дорівнював нулю, тобто щоб

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Визначник $|A - \lambda E|$ є многочленом n-го степеня відносно λ. Його називають ***характеристичним многочленом*** оператора **A**, а рівняння

$$|A - \lambda E| = 0$$

називають ***характеристичним рівнянням*** оператора **A**.

Найбільш простого вигляду набуває матриця лінійного оператора **A**, який має n лінійно незалежних власних векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ з власними значеннями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ відповідно. Якщо власні вектори взяти за базисні, то з одного боку

$$\mathbf{A}(\overrightarrow{e_i}) = a_{1i}\overrightarrow{e_1} + a_{2i}\overrightarrow{e_2} + \ldots + a_{ni}\overrightarrow{e_n},$$

а з іншого:

$$\mathbf{A}(\overrightarrow{e_i}) = \lambda_i \overrightarrow{e_i}.$$

Звідси випливає, що $a_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$, та $a_{ij} = \lambda_i$, якщо $i = j$. Таким чином, матриця оператора **A** у базисі, що складена з його власних векторів, є діагональною і має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Справджується й обернене твердження: *якщо матриця* **A** *лінійного оператора є діагональною, то усі вектори цього базису є власними векторами оператора* **A**.

Задача 1.24. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора **A**, заданого матрицею

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння оператора **A**:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -2\\ 1 & -\lambda & 3\\ 1 & 3 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

і розв'яжемо його:

$$(1-\lambda)\lambda^2+6-6-2\lambda+2\lambda-9(1-\lambda)=0,$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-9)=0.$$

Отже, власними значеннями оператора **A** є

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-3.$$

Для відшукання власних векторів оператора **A** отримуємо систему

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=0,\\ x_1-\lambda x_2+3x_3=0,\\ x_1+3x_2-\lambda x_3=0.\end{cases}$$

Знайдемо тепер власний вектор $\vec{x}^{(1)}$, який відповідає власному значенню λ_1. Для цього підставимо в цю систему $\lambda=1$:

$$\begin{cases}2x_2-2x_3=0,\\ x_1-x_2+3x_3=0,\\ x_1+3x_2-x_3=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=x_3,\\ x_1+2x_2=0.\end{cases}$$

Якщо, наприклад, $x_3=c_1\neq 0$, то $x_2=c_1$, $x_1=-2c_1$. Уся сукупність власних векторів, що відповідають власному значенню λ_1, має вигляд

$$\vec{x}^{(1)}=(-2c_1,c_1,c_1),\ \text{де}\ c_1\neq 0.$$

Аналогічно переконуємося, що власним вектором оператора **A** з власним значенням λ_2 є вектор $\vec{x}^{(2)}=(0,c_2,c_2)$, $c_2\neq 0$, а $\vec{x}^{(3)}=\left(\frac{6}{5}c_3,-\frac{7}{5}c_3,c_3\right)$, $c_3\neq 0$, *є власним вектором оператора **A***, який відповідає власному значенню λ_3. ■

§ 1.19. Квадратичні форми

Квадратичною формою $L(x_1,x_2,...,x_n)$ від n змінних $x_1,x_2,...,x_n$ називають суму, кожен доданок якої є або квадратом однієї із змінних, або добутком двох різних змінних, взятих з деяким коефіцієнтом, тобто

$$L(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j. \qquad \textbf{(1.43)}$$

Вважатимемо, що коефіцієнтами квадратичної форми (1.43) є дійсні числа, причому $a_{ij}=a_{ji}$.

Матрицю A, складену з коефіцієнтів a_{ij}, $i,j=1,2,...,n$, називають ***матрицею квадратичної форми***. Матриця квадратичної форми є симетричною відносно головної діагоналі.

Квадратичну форму (1.43) можна записати у матричному вигляді

$$L=X^TAX, \qquad \textbf{(1.44)}$$

де $X=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)^T$ – матриця-стовпець змінних. Дійсно,

$$L=X^TAX=(x_1,x_2,...,x_n)\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_n)\cdot\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \dots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_jx_1+\sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_jx_2+\dots+\sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_jx_n=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

Таким чином, еквівалентність формул (1.43) і (1.44) доведено.

З'ясуємо тепер, як зміниться квадратична форма при невиродженому лінійному перетворенні змінних.

Нехай матриці-стовпці змінних $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ і $Y=(y_1,y_2,...,y_n)^T$ пов'язані лінійним співвідношенням

$$X=CY,$$

де $C=\left(c_{ij}\right),\ i,j=1,2,...,n,$ – невироджена матриця порядку n. Тоді

$$L=X^TAX=(CY)^TA(CY)=Y^TC^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y,$$

тобто при невиродженому лінійному перетворенні $X=CY$ матриця квадратичної форми набуває вигляду

$$A^*=C^TAC. \qquad \textbf{(1.45)}$$

Задача 1.25. Задано квадратичну форму

$$L(x_1,x_2)=2x_1^2+6x_1x_2-3x_2^2.$$

Знайти квадратичну форму, отриману з $L(x_1,x_2)$ за допомогою лінійного перетворення

$$x_1=2y_1+3y_2,\ \ x_2=y_1-y_2.$$

Розв'язання. Матрицею квадратичної форми $L(x_1,x_2)$ є

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix},$$

а матрицею лінійного перетворення –

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Отже, за формулою (1.45) знаходимо

$$A^*=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}17 & 18\\ 18 & -3\end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Квадратичну форму називають ***канонічною***, якщо вона не містить попарних добутків змінних, тобто має вигляд

$$L_1(x_1,x_2,...,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+...+a_{nn}x_n^2. \qquad \textbf{(1.46)}$$

Деякі з коефіцієнтів a_{ii} у формулі (1.46) можуть дорівнювати нулю. Якщо квадратичні форми (1.43) і (1.46) еквівалентні, тобто одну з них можна отримати з іншої за допомогою невиродженого лінійного перетворення змінних, то форму (1.46) називають ***канонічним виглядом*** квадратичної форми (1.43). Очевидно, що матриця канонічної квадратичної форми є діагональною.

Теорема 1. *Будь-яку квадратичну форму за допомогою невиродженого лінійного перетворення змінних можна звести до канонічного вигляду.*

Задача 1.26. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$L = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3 .$$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат біля змінної x_1:

$$L = (x_1 - x_2)^2 + x_3^2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3 .$$

Тепер виділимо повний квадрат біля змінної x_3:

$$L = (x_1 - x_2)^2 + x_3^2 + 2x_3\left(\frac{3x_1 + 4x_2}{2}\right) + \left(\frac{3x_1 + 4x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3x_1 + 4x_2}{2}\right)^2 =$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + \left(x_3 + \frac{3}{2}x_1 + 2x_2\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x_1 + 2x_2\right)^2 .$$

Отже, невироджене лінійне перетворення змінних

$$y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_3 + \frac{3}{2}x_1 + 2x_2, \quad y_3 = \frac{3}{2}x_1 + 2x_2$$

зводить задану квадратичну форму до канонічного вигляду

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2. \ \blacksquare$$

До канонічного вигляду квадратичну форму можна зводити різними способами, тому її канонічні вигляди можуть бути різними, проте вони мають низку спільних властивостей, одну з яких виражає наступне твердження.

Теорема 2 (закон інерції квадратичних форм). *Кількість доданків з додатними (від'ємними) коефіцієнтами квадратичної форми не залежить від способу зведення її до канонічного вигляду.*

Квадратичну форму $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають ***додатно означеною*** (***від'ємно означеною***), якщо для всіх значень змінних, з яких хоча б одне відмінне від нуля, виконується нерівність

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0 \quad \left(L(x_1, x_2, ..., x_n) < 0\right).$$

Наприклад, квадратична форма $L_1 = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2$ є додатно означена, а квадратична форма $L_2 = -x_1^2 + x_1x_2 - 5x_2^2$ – від'ємно означена.

Теорема 3. *Квадратична форма*

$$L = X^T AX$$

додатно означена (від'ємно означена) тоді і тільки тоді, коли всі власні значення матриці A додатні (від'ємні).

Для встановлення знаковизначеності квадратичних форм користуються наступною теоремою.

Теорема 4 (критерій Сильвестра [1]). *Квадратична форма додатно означена тоді і тільки тоді, коли всі головні мінори матриці A цієї форми додатні, тобто якщо*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ \dots \ , \ \Delta_n > 0,$$

де

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \dots \ ,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратична форма від'ємно означена тоді і тільки тоді, коли знаки головних мінорів чергуються, починаючи зі знаку "мінус" для головного мінора Δ_1.

Задача 1.27. Встановити знаковизначеність квадратичної форми

$$L = 5x_1^2 - 6\,x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Розв'язання. *I спосіб.* Матрицею заданої квадратичної форми є

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи характеристичне рівняння матриці A

[1] **СИЛЬВЕСТР** Джеймс Джозеф (1814-1897), англійський математик.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

знаходимо, що $\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 2.$ Оскільки обидва корені характеристичного рівняння додатні, то згідно з теоремою 3 квадратична форма L додатно означена.

II спосіб. Оскільки головні мінори матриці A

$$\Delta_1 = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 16$$

додатні, то згідно з теоремою 4 квадратична форма L додатно означена. ■

§ 1.20. Лінійна модель обміну

Як приклад математичної моделі економічного процесу, що приводить до понять власного вектора і власного значення матриці, розглянемо ***лінійну модель обміну*** (***модель міжнародної торгівлі***).

Нехай маємо n країн $S_1, S_2, ..., S_n$, національний дохід кожної з яких дорівнює $x_1, x_2, ..., x_n$ відповідно. Позначимо через a_{ij} частку національного доходу, яку країна S_j витрачає на закупівлю товарів у країни S_i.

Вважатимемо, що весь національний дохід витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, ..., n. \qquad \textbf{(1.47)}$$

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку називають ***структурною матрицею торгівлі***. З (1.47) випливає, що сума елементів будь-якого стовпця матриці A дорівнює 1.

Для кожної країни $S_i, i = 1, 2, ..., n$, виторг p_i від внутрішньої та зовнішньої торгівлі складає

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n.$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної країни S_i, тобто виторг від торгівлі кожної країни повинен бути не менший, ніж її національний дохід, тобто

$$p_i \ge x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(1.48)}$$

Якщо вважати, що

$$p_i > x_i, \quad i = 1,2,\ldots, n,$$

то одержуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge x_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \ge x_n. \end{cases}$$

Додавши всі нерівності цієї системи, будемо мати:

$$x_1(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}) + \ldots +$$

$$+ x_n(a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}) > x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Враховуючи тепер (1.47), одержуємо

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

що неможливо.

Отже, для кожного $i = 1,2,\ldots, n$ нерівність $p_i > x_i$ неможлива, а тому умова (1.48) набуває вигляду

$$p_i = x_i, \ \ i = 1,2,\ldots, n.$$

Отриманий результат має зрозуміле економічне обґрунтування, адже всі країни не можуть одночасно мати прибуток.

Якщо ввести у розгляд вектор

$$\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)^T$$

національних прибутків країн, то одержимо векторне рівняння

$$A\vec{x} = \vec{x},$$

тобто задача звелася до відшукання власного вектора матриці A, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Задача 1.28. Задано структурну матрицю торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти національні прибутки країн для збалансованої торгівлі між ними.

Розв'язання. Знайдемо власний вектор $\vec{x}$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Для цього потрібно розв'язати матричне рівняння

$$(A - E)\vec{x} = \vec{0},$$

тобто рівняння

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Його розв'язком, як легко переконатись, є

$$x_1 = \frac{3c}{2}, \quad x_2 = 2c, \quad x_3 = c.$$

Отже, збалансована торгівля трьох країн досягається, якщо вектор національних прибутків має вигляд

$$\vec{x} = \left(\frac{3c}{2}, 2c, c \right),$$

тобто якщо національні прибутки країн відносяться як $3:4:2$. ■

РОЗДІЛ ІІ.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Аналітична геометрія – розділ математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, фігур тощо) вивчаються з використанням алгебричних методів.

Основоположником аналітичної геометрії вважають французького вченого Р. Декарта [1)], який розробив метод координат – основний апарат аналітичної геометрії. В основі цього методу лежить поняття системи координат.

§ 2.1. Прямокутні системи координат на площині та у просторі

Числовою або ***координатною віссю*** називають пряму, на якій зафіксовано дві різні точки: точка O, яку називають ***початком координат***, і точка E, яку називають ***одиничною точкою*** (рис. 2.1). Додатним напрямом осі координат вважається напрям променя, що виходить з точки O і містить точку E. Протилежний напрям вважається від'ємним напрямом осі координат. Відрізок OE називають ***одиничним відрізком***.

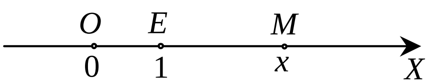


Рис. 2.1

Нехай M – довільна точка числової осі. Поставимо їй у відповідність число x, яке визначається наступним чином:

1) $|x|$ – довжина відрізка OM, виміряного за допомогою одиничного відрізка OE;

2) $x > 0$, якщо точки M і E належать одному променю, $x < 0$, якщо точки M і E належать різним променям числової осі відносно точки O і $x = 0$, якщо точка M збігається з точкою O.

Число x називають ***координатою*** точки M і записують так: $M(x)$.

[1)] **ДЕКАРТ** Рене (1596-1650), французький філософ, математик, фізик.

Відстань між точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ (позначають $d(M_1, M_2)$) обчислюють за формулою

$$d(M_1, M_2) = |x_1 - x_2|.$$

Прямокутною декартовою системою координат на площині (або просто ***прямокутною системою координат***) називають впорядковану пару двох взаємно перпендикулярних координатних осей OX і OY, причому початком координат кожної з осей є їх спільна точка *O*, яку називають ***початком координат*** прямокутної декартової системи координат (рис. 2.2).

Осі OX і OY впорядковані наступним чином: якщо вісь OX повернути навколо точки O на кут 90° проти руху годинникової стрілки, то вона співпаде з віссю OY. При цьому одиничні відрізки OE_1 і OE_2 координатних осей OX і OY зазвичай вибирають так, щоб їх довжини були рівними: $|OE_1| = |OE_2|$. Тоді при описаному повороті точки E_1 і E_2 збігатимуться.

Вісь OX називають ***віссю абсцис***, а вісь OY – ***віссю ординат***. Площину з побудованою системою координат називають ***координатною площиною***.

При такому способі впорядкування координатних осей систему координат називають ***правою прямокутною системою координат*** на відміну від ***лівої прямокутної системи координат***, у якій осі впорядковані інакше: вісь OX суміщається з віссю OY поворотом навколо точки *O* на кут 90° за рухом годинникової стрілки. Надалі розглядатимемо тільки праві прямокутні системи координат на площині, а вісь OX розміщуватимемо горизонтально.

Тепер довільній точці M площини можна поставити у відповідність два числа x і y – координати її проекцій на осі абсцис і ординат відповідно (рис. 2.2).

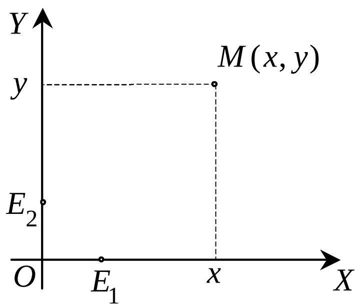


Рис. 2.2

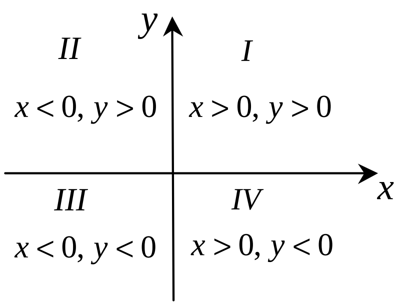


Рис. 2.3

Упорядкована пара чисел (x, y) однозначно визначає положення точки M на площині. Ці числа називають ***координатами*** точки M, при цьому число x називають ***абсцисою***, а число y – ***ординатою*** точки M (пишуть $M(x, y)$). Початок координат має координати (0,0).

Осі координат розбивають площину на чотири частини, які називають ***координатними чвертями*** (або ***квадрантами***). На рис. 2.3 вказані знаки координат точок залежно від їх розташування у тій чи іншій координатній чверті (вони позначені цифрами I, II, III, IV).

Прямокутною декартовою системою координат у просторі (або просто ***прямокутною системою координат*** у просторі) називають впорядковану трійку взаємно перпендикулярних координатних осей OX, OY, OZ.

Прямокутну систему координат $OXYZ$ називають ***правою*** (рис. 2.4), якщо OXY – права прямокутна система координат, а вісь OY суміщається з віссю OZ поворотом навколо точки O на кут 90° проти руху годинникової стрілки. Прямокутну систему координат $OXYZ$ називають ***лівою***, якщо система координат OXY ліва або якщо OXY – права система координат, а вісь OY суміщається з віссю OZ поворотом навколо точки O на кут 90° за рухом годинникової стрілки. Надалі розглядатимемо тільки праві прямокутні системи координат у просторі.

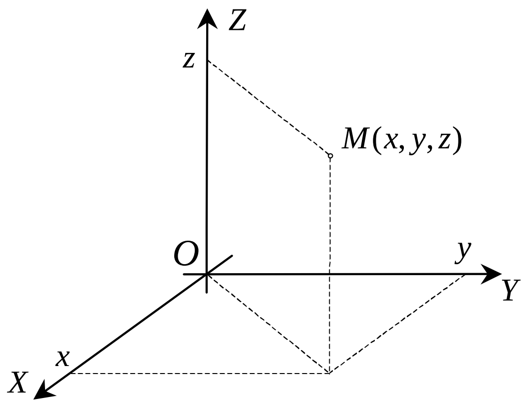


Рис. 2.4

Вісь OX називають ***віссю абсцис***, вісь OY – ***віссю ординат***, вісь OZ – ***віссю аплікат***. Площини, які проходять через кожні дві координатні осі, називають ***координатними площинами***, простір, у якому вибрана система координат – ***координатним простором***. Координатні площини ділять простір на вісім частин, які називають ***октантами***.

Упорядкована трійка чисел (x, y, z), які є координатами проекцій точки M на осі абсцис, ординат та аплікат відповідно, однозначно визначають положення точки M у просторі. Ці числа називають ***координатами*** точки M, при цьому числа x, y та z називають відповідно ***абсцисою***, ***ординатою*** та ***аплікатою*** точки M (записують $M(x, y, z)$).

Таким чином, введення прямокутної системи координат на площині (у просторі) дозволяє встановити однозначну відповідність між множиною всіх точок площини (простору) та множиною впорядкованих пар (трійок) чисел, що дає можливість при розв'язуванні різноманітних геометричних задач широко застосовувати алгебричні методи.

§ 2.2. Перетворення прямокутних координат на площині

Як ми вже знаємо, положення точки на площині визначається двома координатами відносно деякої системи координат. Очевидно, координати точки зміняться, якщо вибрати іншу систему координат. Задача перетворення координат полягає в тому, щоб знаючи координати точки в одній системі координат, вміти знаходити її координати в іншій системі координат. Розв'язати цю задачу дозволяють формули перетворення координат.

Розглянемо такі ***перетворення прямокутної системи координат на площині***:

1) ***паралельне перенесення*** (коли змінюється положення початку координат, а напрями осей залишаються незмінними);
2) ***поворот*** (коли обидві осі повертаються на деякий кут, а початок координат не змінюється);
3) ***поворот і паралельне перенесення***.

1. Паралельне перенесення осей координат. Нехай точка M у старій системі координат OXY має координати (x, y), а у новій системі координат $O'X'Y'$ – координати (x', y') (рис. 2.5).

Тоді

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \qquad \textbf{(2.1)}$$

де (a, b) – координати точки O' у системі координат OXY.

Формули (2.1) називають ***формулами перетворення координат при паралельному перенесенні осей***. Вони виражають координати точок у системі координат OXY через координати точок у системі координат $O'X'Y'$.

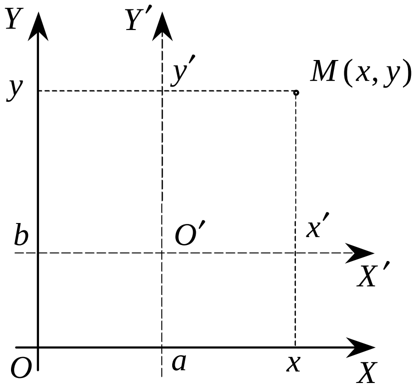


Рис. 2.5

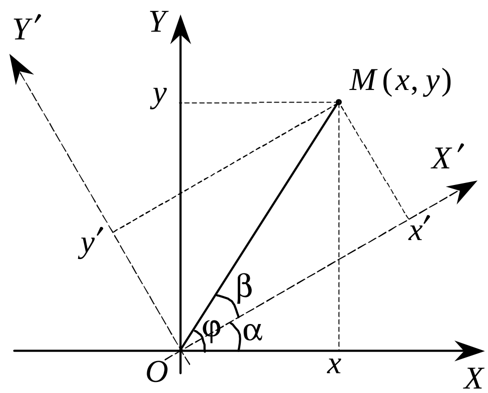


Рис 2.6

Розв'язуючи (2.1) відносно x', y', одержуємо

$$x' = x - a\,,\ \ y' = y - b\,. \tag{2.2}$$

2. Поворот осей координат. Якщо повернути систему координат OXY відносно точки O на кут α проти руху годинникової стрілки, то одержимо нову систему координат $OX'Y'$ (рис. 2.6). З рис. 2.6 знаходимо:

$$x = OM\cos\varphi\,,\quad y = OM\sin\varphi\,,$$

$$x' = OM\cos\beta\,,\quad y' = OM\sin\beta\,.$$

Оскільки

$$\varphi = \alpha + \beta\,,$$

то

$$x = OM\cos(\alpha+\beta) = OM\cos\alpha\cos\beta - OM\sin\alpha\sin\beta = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\,.$$

Аналогічно одержуємо, що

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Отже,

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{2.3}$$

Формули (2.3) називають ***формулами перетворення координат при повороті осей***.

Виражаючи з (2.3) x' і y' через x і y, одержуємо, що

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Задача 2.1. У системі координат OXY точка M має координати (2,4). Знайти її координати в системі координат $OX'Y'$, яка утворена з системи OXY поворотом на кут 90°.

Розв'язання. З формул (2.4) знаходимо:

$$x' = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} = 4,$$

$$y' = -2\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos\frac{\pi}{2} = -2.$$

Такий самий результат можна отримати геометрично, побудувавши точку M і системи координат OXY, $OX'Y'$. ■

3. Поворот і паралельне перенесення осей координат. При послідовному виконанні паралельного перенесення і повороту (рис. 2.7), використовуючи формули (2.1) та (2.3), приходимо до співвідношень

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Формули (2.5) як частинний випадок містять формули (2.1) (якщо $\alpha = 0$) та (2.3) (якщо $a = b = 0$).

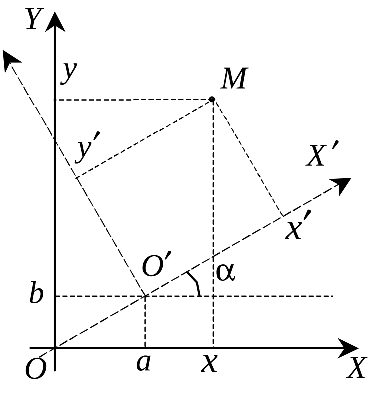


Рис. 2.7

Виражаючи з (2.5) x' і y' через *x* і *y*, остаточно одержуємо

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{cases}$$

§ 2.3. Полярна система координат

Для визначення положення точки на площині, крім розглянутої прямокутної системи координат, часто застосовують ***полярну систему координат***.

Виберемо на площині деяку фіксовану точку О, яку назвемо ***полюсом***. Фіксований промінь ОР з вибраним на ньому одиничним відрізком, який задає одиницю масштабу, називають ***полярною віссю***.

Нехай задана полярна система координат і *M* – довільна точки площини (рис. 2.8). Позначимо через ρ відстань від точки *M* до точки *O*, а через φ – кут, на який потрібно повернути полярну вісь до її суміщення з променем *OM*. Зауважимо, що кут вважається додатним, якщо напрям обертання від полярної осі до променя *OM* береться проти руху годинникової стрілки.

Числа ρ і φ називають ***полярними координатами*** точки *M*. При цьому число ρ вважають першою координатою і називають ***полярним радіусом***, а число φ – другою координатою і називають ***полярним кутом***.

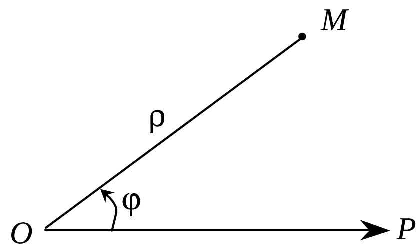


Рис. 2.8

Точку *M* з полярними координатами ρ і φ позначатимемо $M(\rho,\varphi)$. Очевидно, що полярний радіус може набувати довільних невід'ємних значень, тобто

$$0 \le \rho \le +\infty.$$

Зазвичай вважають, що полярний кут вимірюється у межах: $0 \le \varphi < 2\pi$. Однак у деяких випадках розглядають кути, більші, ніж 2π, а також від'ємні кути, тобто кути, які відлічують від полярної осі за рухом годинникової стрілки.

Тепер, очевидно, кожній точці *M* площини відповідає єдина пара чисел ρ і φ (за винятком полюсу, для якого $\rho = 0$, а кут φ довільний). І навпаки, кожній парі чисел ρ і φ ($\rho > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$) відповідає єдина точка площини, для якої ρ є полярним радіусом, а φ – полярним кутом.

Встановимо зв'язок між прямокутними і полярними координатами однієї й тієї ж точки.

Нехай на площині маємо прямокутну систему координат, причому полюс полярної системи координат співпадає з початком прямокутної системи координат, а напрям полярної осі – з додатним напрямом осі абсцис. Припустимо, що точка M у прямокутній системі координат має координати (x, y), а у полярній системі координат – координати (ρ, φ) (рис. 2.9).

З прямокутного трикутника OMN знаходимо:

$$x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Формули (2.6) дозволяють знайти прямокутні координати точки, якщо відомі її полярні координати.

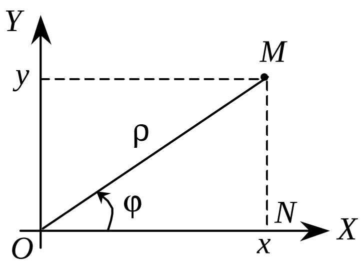


Рис .2.9.

Виражаючи полярні координати точки через прямокутні, з (2.6) знаходимо, що полярний радіус та полярний кут визначаються з рівностей:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} \quad (0 \le \varphi < 2\pi). \qquad \textbf{(2.7)}$$

Формули (2.6) називають ***формулами переходу від полярних координат до прямокутних***, а формули (2.7) – ***формулами переходу від прямокутних координат до полярних***.

Задача 2.2. Знайти полярні координати точки *M*, яка у прямокутній системі координат має координати $M(2,2)$.

Розв'язання. З формул (2.7) отримуємо:

$$\rho = 2\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Враховуючи, що $0 \le \varphi < 2\pi$, знаходимо, що обидві тригонометричні рівності задовольняє єдине значення $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Отже, точка M має такі полярні координати: $M\left(2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$. ■

§ 2.4. Вектори та лінійні операції над ними

Величини, з якими доводиться зустрічатися в повсякденному житті, бувають двох видів. Такі з них, як-от температура, час, маса, ціна, площа тощо повністю визначаються своїм числовим значенням. З іншого боку, такі величини, як швидкість, сила, прискорення, є визначеними тільки тоді, коли крім числових значень відомий їх напрям на площині або у просторі. Величини першого виду називають ***скалярними***, а величини другого виду – ***векторними***.

Таким чином, кожну векторну величину геометрично можна зобразити у вигляді відрізка певної довжини і певного напряму, якщо довжину цього відрізка при вибраній одиниці масштабу вважатимемо рівною числовому значенню векторної величини, а напрям відрізка таким, що співпадає з її напрямом.

Нехай A і B – дві різні точки площини. Відрізок AB, в якого точку A вважають початком, а точку B – кінцем, називають ***вектором*** і позначають $\overrightarrow{AB}$.

Часто вектор позначатимемо однією буквою, наприклад, $\vec{a}$. Напрям вектора на рисунку позначають стрілкою (рис. 2.10).

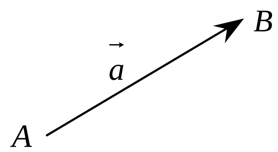


Рис. 2.10

Довжину відрізка AB називають ***довжиною*** (***модулем***) вектора $\overrightarrow{AB}$ і позначають $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають ***нульовим*** вектором (або ***нуль-вектором***) і позначають $\vec{0}$. Його довжина дорівнює нулю. Поняття напряму для нульового вектора не вводиться.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***колінеарними*** (пишуть $\vec{a} \| \vec{b}$), якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Ненульові колінеарні вектори або однаково напрямлені, або протилежно напрямлені.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***рівними*** (пишуть $\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково напрямлені та мають однакові довжини (рис. 2.11).

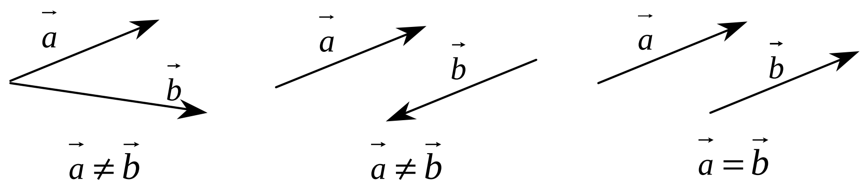


Рис. 2.11

З означення рівності векторів випливає, що після паралельного перенесення заданого вектора одержимо вектор, рівний початковому.

Три ненульові вектори називають ***компланарними,*** якщо вони лежать в одній площині або у паралельних площинах. Зокрема, вектори будуть компланарними, якщо два або три з них будуть колінеарні. Три вектори вважають компланарними також у тому випадку, коли хоча б один з них є нульовим.

Розглянемо ***лінійні операції над векторами***. До них належать множення вектора на число, додавання й віднімання векторів.

1. Множення вектора на число. ***Добутком вектора*** $\vec{a} \neq \vec{0}$ ***на число*** $k \neq 0$ називають вектор $k\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|k||\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $k > 0$, та протилежний йому, якщо $k < 0$ (рис. 2.12).

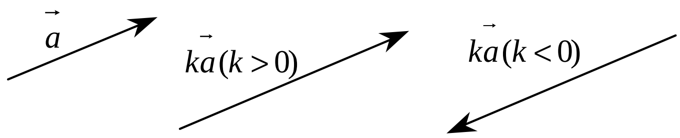


Рис. 2.12

З цього означення випливає ***геометричний зміст операції множення вектора на число***: множення вектора $\vec{a}$ на число k приводить до розтягу вектора $\vec{a}$ у $|k|$ разів, якщо $|k|>1$, і до стиску, якщо $|k|<1$. Якщо $k>0$, то напрям вектора $k\vec{a}$ збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, а при $k<0$ вектори $k\vec{a}$ і $\vec{a}$ –протилежно напрямлені. На рис. 2.12 зображений випадок, коли $|k|>1$.

З означення множення вектора на число випливає: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні і $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує єдине число k таке, що $\vec{b} = k\vec{a}$, і навпаки, якщо $\vec{b} = k\vec{a}$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Якщо $k=0$ або $\vec{a}=0$, то вважають, що $k\vec{a}=\vec{0}$. При множенні вектора $\vec{a}$ на (–1) одержуємо ***протилежний*** вектор $-\vec{a}$, який має таку ж довжину, що й вектор $\vec{a}$, але протилежний напрям.

2. Додавання векторів. ***Сумою*** $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ співпадає з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 2.13).

Це правило додавання векторів називається ***правилом трикутника***.

Якщо ж вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виходять з однієї точки, то їх сумою буде вектор, що виходить з цієї ж точки і збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах (***правило паралелограма***, рис. 2.14).

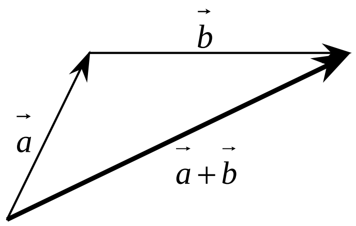


Рис. 2. 13

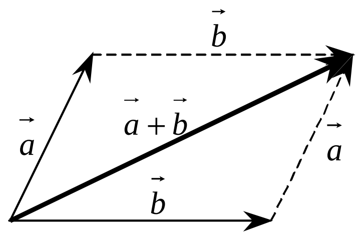


Рис. 2. 14

Для побудови суми будь-якої скінченної кількості векторів потрібно початок другого вектора помістити в кінець першого, початок третього – в кінець другого і т.д. Тоді вектор, що сполучає початок першого і кінець останнього вектора, буде сумою цих векторів (рис. 2.15).

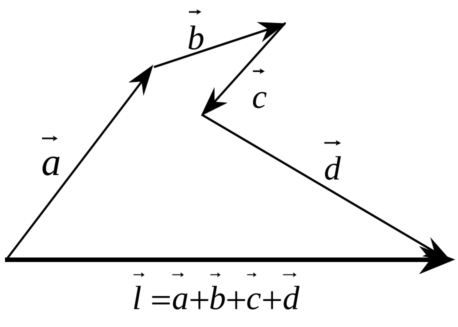


Рис. 2.15

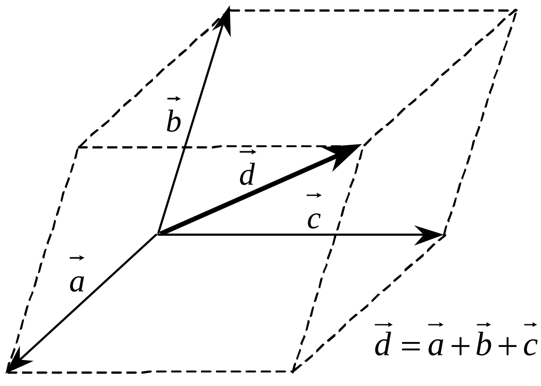


Рис. 2.16

Легко переконатися, що якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарні і виходять з однієї точки, то їх сумою буде вектор, який виходить з тієї ж точки і збігається з діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ як на ребрах (рис. 2.16).

3. Віднімання векторів. ***Різницею*** $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають суму $\vec{a}+(-\vec{b})$. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають спільний початок, то різницею $\vec{a}-\vec{b}$ буде вектор, початком якого є кінець вектора $\vec{b}$, а кінцем – кінець вектора $\vec{a}$ (рис. 2.17).

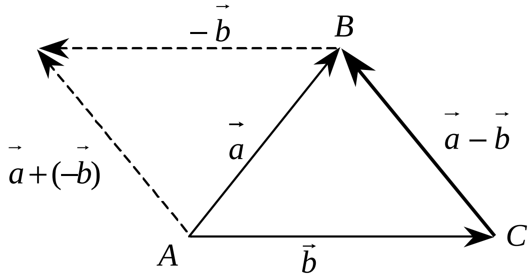


Рис. 2.17

Лінійні операції над векторами мають такі ***властивості*** ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – довільні вектори, k, m – дійсні числа):

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,
3. $k(m\vec{a})=(km)\vec{a}$,
4. $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$,
5. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

Наведені властивості мають важливе значення, бо дають можливість виконувати над векторами звичайні алгебричні дії (векторні доданки можна переставляти місцями і сполучати їх у групи, виносити за дужки як скалярні, так і векторні спільні множники).

§ 2.5. Координати вектора. Дії над векторами, які задані своїми координатами

Для того, щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглянемо вектори у прямокутній системі координат. Побудуємо у системі координат OXY довільний вектор $\vec{a}$ і вектор $\overrightarrow{OP}=\vec{a}$ (рис. 2.18). Тоді одержимо взаємно однозначну відповідність між точками площини і векторами.

Координатами вектора $\vec{a}$ називають координати тієї точки P, для якої $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$. На площині координатами вектора $\vec{a}$ будуть два числа x і y (рис. 2.18), у просторі – три числа x, y і z (рис. 2.19). Пишуть $\vec{a} = (x, y)$ та $\vec{a} = (x, y, z)$ відповідно.

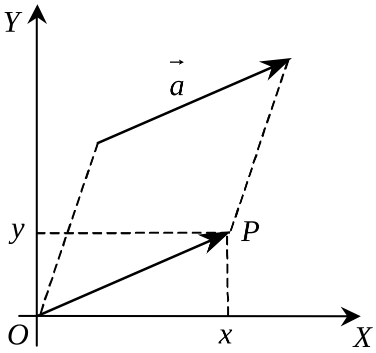


Рис. 2.18

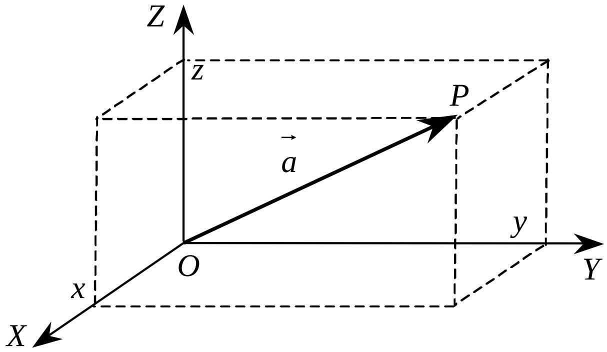


Рис. 2.19

Якщо вектори задані своїми координатами у прямокутній системі координат, то

1) *при додаванні двох векторів їх однойменні координати додаються, тобто якщо* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *і* $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, *то*

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2); \qquad \textbf{(2.8)}$$

2) *при відніманні двох векторів їх однойменні координати віднімаються, тобто якщо* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *і* $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, *то*

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2); \qquad \textbf{(2.9)}$$

3) *при множенні вектора на число кожна координата вектора множиться на це число, тобто якщо* $\vec{a} = (x, y, z)$, *то*

$$k\vec{a} = (kx, ky, kz). \qquad \textbf{(2.10)}$$

Сформулюємо ще одне твердження, в якому виражена необхідна і достатня ознака колінеарності двох векторів, заданих своїми координатами.

4) *два вектори* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *і* $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *будуть колінеарними тоді і тільки тоді, якщо їх координати пропорційні, тобто якщо*

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Доведення. Якщо один з векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ нульовий, то доведення є очевидним. Розглянемо випадок, коли $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$. З означення добутку вектора на число випливає, що якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує єдине число k таке, що $\vec{b} = k\vec{a}$. Тоді згідно з властивістю 3 $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$, $b_3 = ka_3$, тобто координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пропорційні. І навпаки, нехай координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пропорційні, тобто $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$, $b_3 = ka_3$. Тоді $\vec{b} = k\vec{a}$, звідки випливає, що $\vec{a} \parallel \vec{b}$. ►

З рис 2.19 легко отримати формулу для обчислення довжини вектора $\vec{a} = (x, y, z)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{2.11}$$

тобто *довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.*

Довжину вектора $\vec{a} = (x, y)$ на площині можна обчислити за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Розглянемо тепер дві задачі, результати яких будуть використовуватися у подальшому викладі.

Задача 2.3. Нехай $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ – дві точки простору. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ (рис. 2.20).

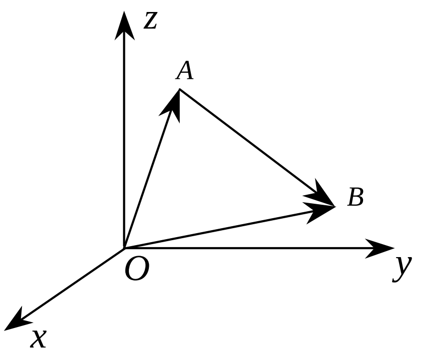


Рис. 2.20

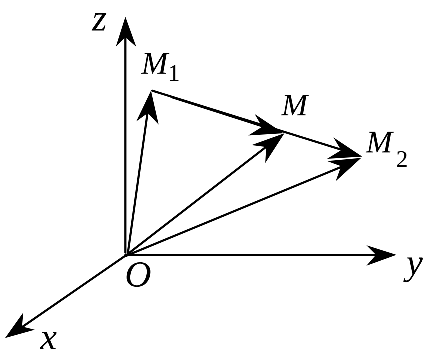


Рис. 2.21

Оскільки $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ як різниця векторів $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OA}$ має такі координати: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. ■

Із задачі 2.3 випливає, що *кожна координати вектора дорівнює різниці відповідних координат його кінця і початку*.

Використовуючи формулу (2.11) і результат задачі 2.3, можемо тепер знайти довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad \textbf{(2.12)}$$

Цю формулу можна використовувати також для знаходження відстані між точками A і B.

Задача 2.4. Нехай $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ – дві точки простору, λ – деяке дійсне число ($\lambda\neq-1$). Знайти координати точки $M(x,y,z)$, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}.$$

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM}$ (рис. 2.21). Тоді

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1},\quad \overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}. \qquad \textbf{(2.13)}$$

З умови задачі випливає, що

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2},$$

тому, використовуючи (2.13), будемо мати:

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\lambda\left(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}\right),$$

звідки отримуємо:

$$(1+\lambda)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2},\qquad \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda}.$$

Оскільки $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)$, то з означення рівності векторів одержуємо остаточні формули:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad \textbf{(2.14)}$$

Зокрема, якщо точка M – середина відрізка M_1M_2 (тоді $\lambda=1$), то її координати знаходимо за формулами

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \blacksquare \qquad \textbf{(2.15)}$$

Зауваження. Якщо точка M лежить між точками M_1 і M_2, то $\lambda > 0$. У цьому випадку кажуть, що точка M ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ внутрішнім чином. Якщо ж точка M лежить на продовженні відрізка M_1M_2, то $\lambda < 0$. У цьому випадку точка M ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ зовнішнім чином.

Позначимо через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вектори, напрями яких співпадають з напрямами осей Ox, Oy, Oz відповідно, а довжини рівні одиниці:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Такі вектори називають ***одиничними*** або ***ортами***. Вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ є лінійно незалежними і утворюють ***базис*** (див. § 1.16). Якщо вектор $\vec{a}$ заданий своїми координатами: $\vec{a} = (x, y, z)$, то

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{2.16}$$

Формулу (2.16) називають ***розкладом вектора*** $\vec{a}$ ***за базисом*** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

§ 2.6. Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два ненульові вектори. Відкладемо від довільної точки O вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ і розглянемо промені OA і OB (рис. 2.22).

Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається найменший з двох кутів між променями OA і OB, якщо ці промені не співпадають. Якщо ж промені OA і OB співпадають, то кут між ними вважається рівним нулю.

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначатимемо через φ.

Оскільки два кути, сторони яких співнапрямлені, рівні між собою (рис. 2.23), то кут між цими векторами не залежить від вибору точки O.

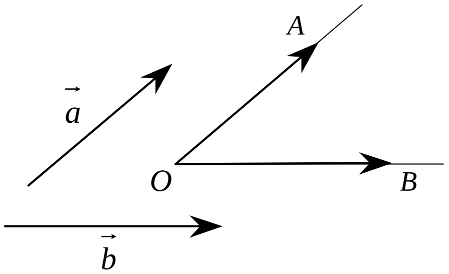


Рис. 2.22

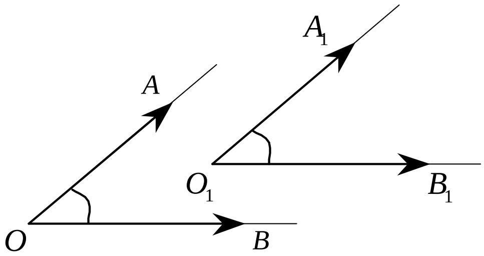


Рис. 2.23

Два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***перпендикулярними*** (позначають $\vec{a}\perp\vec{b}$), якщо $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Якщо хоч один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то вважають, що $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Отже, для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маємо: $0\le\varphi\le\pi$.

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають через $(\vec{a},\vec{b})$. Отже, за означенням,

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \qquad \mathbf{(2.17)}$$

Якщо хоч один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ є нульовим, то за означенням $(\vec{a},\vec{b})=0$.

Сформулюємо ***властивості скалярного добутку*** та доведемо деякі з них.

1. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$.

2. $(k\vec{a},\vec{b})=k(\vec{a},\vec{b})$, k – *число.*

3. $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$.

4. *Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, тобто*

$$(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2. \qquad \mathbf{(2.18)}$$

Доведення. За означенням скалярного добутку $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$, якщо $|\vec{a}|\neq 0$, тобто $\vec{a}\neq\vec{0}$. Якщо ж $\vec{a}=\vec{0}$, то також за означенням, $(\vec{a},\vec{a})=0$. Але у цьому випадку $|\vec{a}|=0$ і, значить, рівність (2.18) виконується. ►

5. *Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.*

Доведення. За означенням скалярного добутку $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Якщо $\varphi=\frac{\pi}{2}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то $\cos\varphi=0$. Звідси $(\vec{a},\vec{b})=0$. І навпаки, якщо $(\vec{a},\vec{b})=0$ і $|\vec{a}||\vec{b}|\neq 0$, то $\cos\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, тобто $\vec{a}\perp\vec{b}$. ►

Доведемо теорему, яка дозволяє знаходити скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами.

Теорема. *Скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами* $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ *виражається формулою*

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 . \qquad \textbf{(2.19)}$$

Доведення. Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ нульовий, то правильність формули (2.19) очевидна, тому розглянемо випадок, коли $\vec{a}\neq\vec{0}$ і $\vec{b}\neq\vec{0}$. Від будь-якої точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ та розглянемо трикутник OAB (рис. 2.24).

За теоремою косинусів

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$, а

оскільки

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},\quad \overrightarrow{OA}=\vec{a},\quad \overrightarrow{OB}=\vec{b},$$

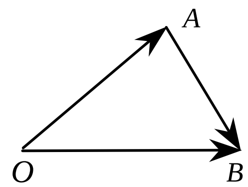


Рис. 2.24

то цю рівність після нескладних перетворень можна записати у вигляді

$$(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2\right). \qquad \textbf{(2.20)}$$

Враховуючи, що

$$\vec{b}-\vec{a}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$

з формули (2.18) знаходимо

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 .$$

Згідно з цією ж формулою

$$|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\quad |\vec{b}|^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2 .$$

Підставляючи знайдені вирази для $|\vec{a}|^2$, $|\vec{b}|^2$, $|\vec{b}-\vec{a}|^2$ у формулу (2.20), будемо мати:

$$(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2\right)$$

або

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 . \ \blacksquare$$

Таким чином, *скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.*

З формули (2.19) випливають два важливі наслідки.

Наслідок 1. *Два вектори* $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ *і* $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ *перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли*

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

Це твердження безпосередньо випливає із властивості 5 цього параграфа й формули (2.19).

Наслідок 2. *Косинус кута* φ *між ненульовими векторами* $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ *і* $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ *визначається формулою*

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (2.21)$$

Ця формула є наслідком формул (2.17), (2.11) і (2.19).

Задача 2.5. Дано вектори $\vec{a}=(2,-1,3)$ і $\vec{b}=(-2,-4,1)$. Знайти: а) вектори $\vec{c}=3\vec{a}$, $\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}$; б) довжини векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$; в) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. а) Згідно з формулою (2.10)

$$\vec{c}=3\vec{a}=\left(3\cdot 2,\ 3\cdot(-1),\ 3\cdot 3\right)=\left(6,-3,9\right),$$

а згідно з формулою (2.9)

$$\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}=\left(-2-2,-4-(-1),1-3\right)=\left(-4,-3,-2\right);$$

б) використовуючи формулу (2.11), знаходимо:

$$|\vec{c}|=\sqrt{6^2+(-3)^2+9^2}=\sqrt{126}, \qquad |\vec{d}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{29};$$

в) згідно з формулою (2.19)

$$(\vec{a},\vec{b})=2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+3\cdot 1=3.$$

Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходимо за формулою (2.21):

$$\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}}=\frac{3}{7\sqrt{6}}\approx 0{,}17496.$$

Отже,

$$\varphi=\arccos\frac{3}{7\sqrt{6}}\approx 80^0. \ \blacksquare$$

§ 2.7. Векторний добуток векторів

Векторним добутком двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який визначається такими трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (тобто до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$);

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що якщо дивитись з його кінця на площину, у якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ на найменший кут відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.25).

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають через $\vec{a}\times\vec{b}$.

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ нульовий або ці вектори колінеарні, то їх векторний добуток вважається рівним нулю.

Розглянемо основні ***властивості векторного добутку***:

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

2. $(k\vec{a}\times\vec{b}) = k(\vec{a}\times\vec{b})$.

3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$.

4. *Модуль векторного добутку неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах* (рис. 2.25).

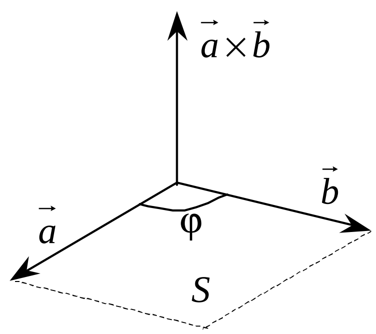


Рис. 2.25

Доведення. Як відомо, площа паралелограма дорівнює добутку його суміжних сторін на синус кута між ними. Звідси $S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, тобто $|\vec{a}\times\vec{b}| = S$. ►

Властивість 4 виражає геометричний зміст векторного добутку. Властивість 3 дає можливість при векторному множенні векторних многочленів виконувати дії “почленно”, а властивість 2 – об’єднувати числові коефіцієнти векторних співмножників.

Наприклад,

$$(2\vec{a}+3\vec{b})\times(4\vec{c}+3\vec{d})=(2\vec{a}+3\vec{b})\times 4\vec{c}+(2\vec{a}+3\vec{b})\times 3\vec{d}=$$

$$=2\vec{a}\times 4\vec{c}+3\vec{b}\times 4\vec{c}+2\vec{a}\times 3\vec{d}+3\vec{b}\times 3\vec{d}=8(\vec{a}\times\vec{c})+12(\vec{b}\times\vec{c})+6(\vec{a}\times\vec{d})+9(\vec{b}\times\vec{d}).$$

Однак порядок співмножників у векторному добутку є суттєвим, а тому при переставлянні співмножників знак векторного добутку потрібно змінити на протилежний (властивість 1).

Для одиничних векторів (ортів) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ згідно з означенням векторного добутку і властивістю 2 одержуємо такі рівності:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}, & \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}, \\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}, & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, \\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, & \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}. \end{array} \tag{2.22}$$

Теорема. *Якщо вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *задані своїми координатами:*

$$\vec{a}=(x_1, y_1, z_1),\quad \vec{b}=(x_2, y_2, z_2),$$

то їх векторний добуток визначається формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

або

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(y_1z_2-y_2z_1,\; z_1x_2-z_2x_1,\; x_1y_2-x_2y_1\right). \tag{2.23}$$

Доведення. Розкладемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (див. (2.16)):

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}.$$

Використовуючи тепер властивості 2, 3 векторного добутку, одержуємо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=x_1x_2(\vec{i}\times\vec{i})+x_1y_2(\vec{i}\times\vec{j})+x_1z_2(\vec{i}\times\vec{k})+y_1x_2(\vec{j}\times\vec{i})+y_1y_2(\vec{j}\times\vec{j})+$$

$$+y_1z_2(\vec{j}\times\vec{k})+z_1x_2(\vec{k}\times\vec{i})+z_1y_2(\vec{k}\times\vec{j})+z_1z_2(\vec{k}\times\vec{k}).$$

Звідси, використовуючи (2.22), знаходимо, що

$$\vec{a}\times\vec{b}=(y_1z_2-y_2z_1)\,\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\,\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\,\vec{k}.$$

Отримали розклад вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Коефіцієнти цього розкладу є координатами вектора $\vec{a}\times\vec{b}$. ►

Задача 2.6. Знайти площу трикутника, який заданий координатами своїх вершин $A(1,2,0)$, $B(3,6,7)$, $C(2,4,-3)$.

Розв'язання. Оскільки $\overrightarrow{AB}=(2,4,7)$, $\overrightarrow{AC}=(1,2,-3)$, то за формулою (2.23) знаходимо:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\alpha,\beta,\gamma),$$

де

$$\alpha=\begin{vmatrix}4 & 7\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-26,\quad \beta=\begin{vmatrix}7 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix}=13,\quad \gamma=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Використовуючи тепер властивість 4 векторного добутку, одержуємо

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-26)^2+13^2}=\frac{13}{2}\sqrt{5}.\ \blacksquare$$

§ 2.8. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})$.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то вважають, що їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Наведемо основні ***властивості мішаного добутку***:

1. $(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{b}\times\vec{c},\vec{a})$

2. $(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})=-(\vec{a},\vec{c}\times\vec{b})$.

3. $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=(\vec{b}\times\vec{c},\vec{a})=(\vec{c}\times\vec{a},\vec{b})$.

4. *Модуль мішаного добутку трьох некомпланарних векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, віднесених до спільного початку.*

Доведення. Візьмемо три некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Позначимо через V об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, через S – площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{b}$ і $\vec{c}$, а через h – висоту даного паралелепіпеда (рис. 2.26). Тоді $V=Sh$.

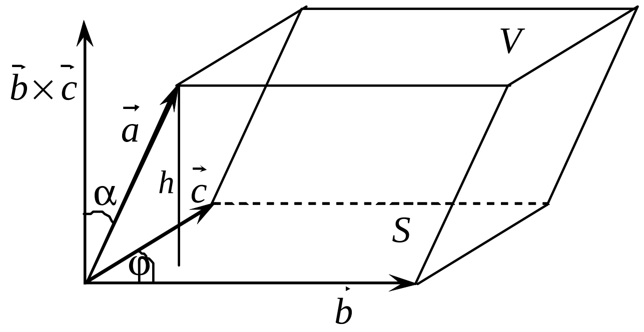


Рис. 2.26

Оскільки $S = |\vec{b}||\vec{c}|\sin\varphi = |\vec{b}\times\vec{c}|$, $h = |\vec{a}||\cos\varphi|$ (беремо $|\cos\varphi|$, бо кут між напрямом векторного добутку $|\vec{b}\times\vec{c}|$ і вектором $\vec{a}$ може бути й тупим), то

$$V = |\vec{b}\times\vec{c}||\vec{a}||\cos\varphi| = |(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})|. \ ►$$

Властивість 4 виражає геометричний зміст мішаного добутку.

5. *Вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.*

Як знайти мішаний добуток трьох векторів, заданих своїми координатами? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема. *Якщо вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *задані своїми координатами:*

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),\ \vec{c} = (x_3, y_3, z_3),$$

то мішаний добуток $(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})$ *визначається формулою*

$$(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}) = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.24)$$

Доведення. Згідно з формулою (2.23)

$$\vec{b}\times\vec{c} = \left(y_2z_3 - y_3z_2,\ z_2x_3 - z_3x_2,\ x_2y_3 - x_3y_2\right).$$

Помноживши тепер скалярно вектор $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}\times\vec{c}$ (використовуючи при цьому формулу (2.19)), одержуємо (2.24). ■

Формулу (2.24) можна записати також у вигляді

$$(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad (2.25)$$

тобто *мішаний добуток трьох некомпланарних векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, *заданих своїми координатами, дорівнює визначнику третього порядку, перший рядок якого складається з координат вектора* $\vec{a}$, *другий – з координат вектора* $\vec{b}$, *а третій – з координат вектора* $\vec{c}$.

Використовуючи формулу (2.25) та властивість 5 мішаного добутку векторів, ***умову компланарності трьох векторів***

$$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2),\ \vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$$

можна записати тепер у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Задача 2.7. Знайти об’єм тетраедра, який заданий координатами своїх вершин:

$$A(2,-1,0),\ B(4,4,2),\ C(3,2,-2),\ D(4,0,2).$$

Розв’язання. Як відомо, об’єм тетраедра $ABCD$, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, дорівнює шостій частині об’єма паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Отже, за властивістю 4 мішаного добутку векторів маємо

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

Оскільки

$$\overrightarrow{AB}=(2,5,2),\ \overrightarrow{AC}=(1,3,-2),\ \overrightarrow{AD}=(2,1,2),$$

то, використовуючи формулу (2.25), одержуємо:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-24,$$

і остаточно

$$V=\frac{1}{6}|-24|=4.\ \blacksquare$$

§ 2.9. Рівняння лінії на площині

Розглянемо співвідношення вигляду

$$F(x, y) = 0, \qquad (2.26)$$

яке пов'язує змінні величини x і y. Рівність (2.26) будемо називати ***рівнянням з двома змінними*** x, y, якщо ця рівність виконується не для всіх допустимих пар чисел x і y. Наведемо приклади таких рівнянь:

$$4x + 5y = 0, \quad x^2 + y^2 - 20 = 0, \quad \cos x + \sin 2y = 1.$$

Якщо рівність (2.26) виконується для всіх допустимих пар чисел x і y, то вона називається ***тотожністю***. Наприклад, тотожностями є співвідношення

$$(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0,$$

$$\sin^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \cos^2 x.$$

Лінією, яка задана рівнянням (2.26) відносно певної системи координат, називатимемо множину всіх тих точок площини, координати яких задовольняють це рівняння.

Нехай на площині задана прямокутна система координат і деяка лінія L (рис. 2.27). Рівняння (2.26) називають ***рівнянням лінії*** L (у заданій системі координат на площині), якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії L і не задовольняють координати жодної точки, яка цій лінії не належить.

Коли рівняння (2.26) є рівнянням лінії L, то кажуть, що це рівняння визначає (або задає) лінію L. Отже, якщо деяка лінія задана рівнянням, то про кожну точку площини можна сказати, належить вона цій лінії, чи ні (якщо координати точки задовольняють рівняння лінії, то точка належить лінії, якщо не задовольняють, то не належить).

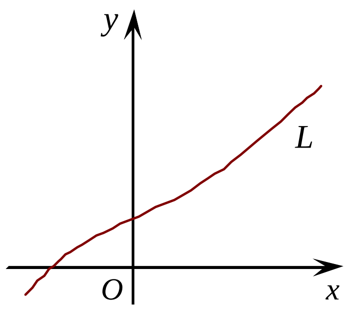


Рис. 2.27

Поняття рівняння лінії дає можливість розв'язувати різноманітні геометричні задачі за допомогою алгебричних методів. Наприклад, задача знаходження точки перетину ліній, які задані рівняннями $x+2y=0$ і $x^2+y^2-2x=1$, зводиться до розв'язання системи цих рівнянь.

Розглянемо приклади деяких рівнянь ліній.

1) $x-y=0$. Записавши це рівняння у вигляді $y=x$, робимо висновок, що множиною точок, координати яких задовольняють це рівняння, є пряма, яка містить бісектриси I і III координатних кутів. Це і є лінія, визначена рівнянням $x-y=0$ (рис. 2.28).

2) $x^2-y^2=0$. Представимо це рівняння у вигляді $(y-x)(y+x)=0$. Тоді множиною точок, координати яких задовольняють це рівняння, є дві прямі, які містять бісектриси чотирьох координатних кутів (рис. 2.29).

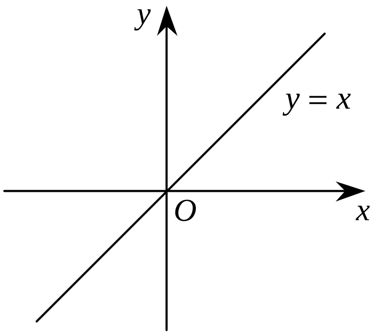


Рис. 2.28

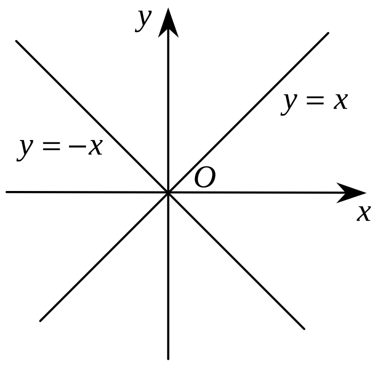


Рис. 2.29

3) $(x^2-1)^2+(y^2-4)^2=0$. Оскільки ліва частина рівняння невід'ємна, то множина точок, координати яких задовольняють рівняння, складається тільки з чотирьох точок: (1,2), $(-1{,}2)$, (1,2), $(-1,-2)$.

4) $x^2+y^2+3=0$. Оскільки для будь-яких значень x і y виконується нерівність $x^2+y^2+3>0$, то немає жодної точки на площині, координати якої задовольняють це рівняння, тобто жодного геометричного образу на площині рівняння не визначає.

Лінію L на площині можна задати також за допомогою рівняння вигляду

$$F(\rho,\varphi)=0,$$

де (ρ,φ) – полярні координати точки.

Розглянемо приклад знаходження рівняння лінії в полярних координатах.

Нехай потрібно знайти рівняння кола, центр C якого лежить на полярній осі, радіус дорівнює a, і яке проходить через полюс. З'єднаємо відрізками прямої довільну точку M кола з полюсом і з кінцевою точкою D діаметра, що проходить через полюс (рис. 2.30).

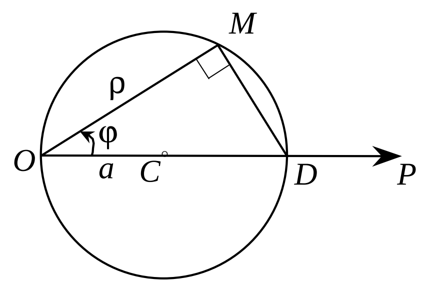


Рис. 2.30

Координатами точки M будуть кут φ і довжина ρ відрізка OM. Тепер пригадаємо, що коло можна розглядати як геометричне місце вершин прямих кутів, які спираються на його діаметр. Отже, трикутник AMD – прямокутний. Таким чином, одержуємо шукане рівняння кола у полярних координатах:

$$\rho = 2a\cos\varphi .$$

Розглянемо інші приклади рівнянь ліній, заданих у полярних координатах:

1) спіраль Архімеда

$$\rho = a\varphi, \quad a > 0 .$$

Позначимо через M точку з полярними координатами (ρ,φ). Якщо $\varphi = 0$, то $\rho = 0$. Якщо φ зростає, починаючи від нуля, то ρ зростає пропорційно до φ. Таким чином, точка $M(\rho,\varphi)$, виходячи з полюса, рухається навколо нього зі збільшенням φ, одночасно віддаляючись від нього. Для побудови цієї кривої складемо таблицю відповідних пар (ρ,φ):

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	0	$\frac{a\pi}{6}$	$\frac{a\pi}{3}$	$\frac{a\pi}{2}$	$a\pi$	$\frac{3a\pi}{2}$	$2a\pi$

Відкладаючи значення ρ на відповідних променях, що утворюють кут φ з полярною віссю, знайдемо точки шуканої кривої. Якщо з'єднати ці точки плавною лінією, то одержимо спіраль Архімеда (рис. 2.31).

2) трипелюсткова троянда

$$\rho = a\sin 3\varphi,\ a > 0.$$

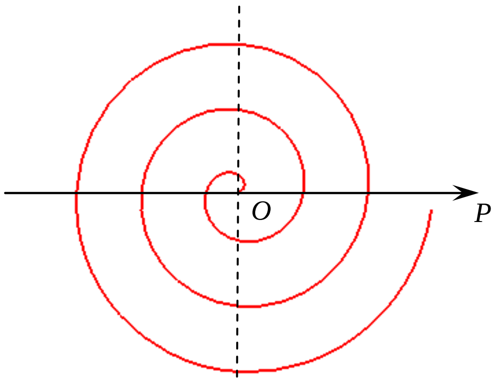


Рис 2.31

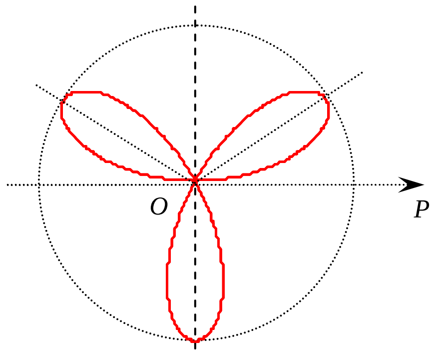


Рис. 2.32

Побудувати цю криву можна по точках, де φ набуває значень від 0 до 2π (рис. 2.32). Пунктиром проведено коло радіуса *a*.

У деяких випадках при складанні рівняння лінії координати не пов'язують одним рівнянням, а кожну координату виражають як функцію нової змінної, наприклад *t*. Одержують рівняння вигляду

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \qquad (2.27)$$

Ці рівняння складають так, що значення *x* і *y*, які відповідають одному й тому ж значенню *t*, є координатами точки, яка належить лінії.

Якщо параметр *t* змінюється, то точка на площині, взагалі кажучи, переміщується, описуючи деяку лінію *l*. Такий спосіб задання лінії називають ***параметричним***, а рівняння (2.27) – ***параметричними рівняннями лінії***.

§ 2.10. Рівняння прямої на площині

Найпростішою лінією на площині є пряма. У прямокутній декартовій системі координат їй відповідає найпростіше рівняння – рівняння першого степеня. Для того, щоб скласти рівняння прямої на площині, потрібно певним чином задати умови, які визначають її положення відносно координатних осей. Розглянемо кожен з таких можливих способів.

1. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку і має заданий вектор нормалі. ***Вектором нормалі*** прямої l називають будь-який ненульовий вектор, перпендикулярний до цієї прямої.

Нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n} = (A, B)$ (рис. 2.33). Очевидно, що точка M_0 і вектор $\vec{n}$ однозначно визначають положення прямої l на площині.

Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x, y)$. Вектори

$$\vec{n} = (A, B), \quad \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$$

перпендикулярні, а тому згідно з наслідком 1 § 2.6 будемо мати:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad \textbf{(2.28)}$$

Рівняння (2.28) називають ***рівнянням прямої, яка проходить через задану точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***і має вектор нормалі*** $\vec{n} = (A, B)$.

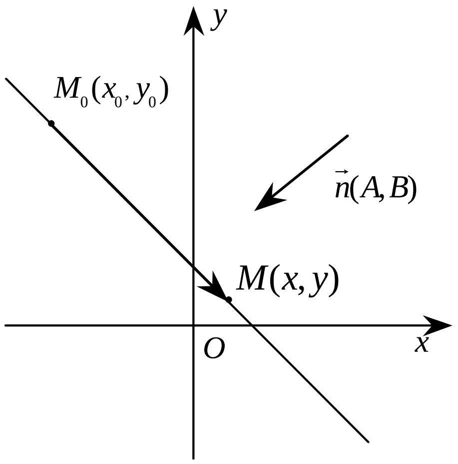


Рис. 2.33

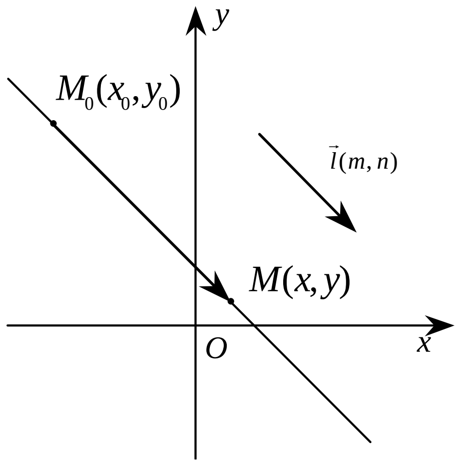


Рис.2.34

Задача 2.8. Написати рівняння висоти AD трикутника з вершинами у точках $A(-5,3)$, $B(3,7)$, $C(4,-1)$.

Розв'язання. Пряма, яка містить висоту AD, проходить через вершину A і має вектор нормалі $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (1,-8)$. Згідно з формулою (2.28) рівняння висоти AD матиме вигляд

$$1 \cdot (x - (-5)) - 8 \cdot (y - 3) = 0$$

або

$$x - 8y + 29 = 0. \ \blacksquare$$

2. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку і має заданий напрямний вектор. ***Напрямним вектором*** прямої l називають будь-який ненульовий вектор, який паралельний до цієї прямої.

Нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має напрямний вектор $\vec{l} = (m, n)$, причому $mn \neq 0$ (рис. 2.34). Очевидно, що точка M_0 і вектор $\vec{l}$ однозначно визначають положення прямої l.

Обравши, як і в попередньому випадку "біжучу" точку $M(x, y)$, що належить прямій, з умови колінеарності векторів

$$\vec{l} = (m, n) \text{ і } \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$$

отримуємо:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad \textbf{(2.29)}$$

Рівняння (2.29) називають ***рівнянням прямої, яка проходить через задану точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***і має заданий напрямний вектор*** $\vec{l} = (m, n)$**.**

Якщо $m = 0$, то вектор $\vec{l}$ перпендикулярний до осі Ox, а отже, і шукана пряма так само буде перпендикулярною до осі Ox, а її рівнянням буде $x = x_0$. Аналогічно при $n = 0$ одержуємо $y = y_0$ – рівняння прямої, яка перпендикулярна до осі Oy.

Задача 2.9. Написати рівняння середньої лінії трапеції, заданої вершинами $A(2,1)$, $B(1,4)$, $C(3,6)$, $D(6,5)$.

Розв'язання. Пряма l, яка містить середню лінію трапеції $ABCD$, проходить через точку M – середину сторони AB і має напрямний вектор $\vec{l} = \overrightarrow{AD} = (4, 4)$. Координати точки M знайдемо з формул (2.15): $M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Тепер за формулою (2.29) знаходимо рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{4} = \frac{y - \frac{5}{2}}{4}$$

або

$$x - y + 1 = 0. \ \blacksquare$$

3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Якщо за напрямний вектор взяти одиничний вектор, що утворює кути α і β з додатними напрямами координатних осей, тобто $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, причому $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, то рівняння (2.29) матиме вигляд

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta}.$$

Звідси, враховуючи, що $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, якщо кути α і β гострі, або $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$, якщо один з них тупий, одержуємо

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad \textbf{(2.30)}$$

де $k = \operatorname{tg}\alpha$. Рівняння (2.30) називають ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка проходить через задану точку*** $M_0(x_0, y_0)$.

Якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то пряма перпендикулярна до осі Ox і її рівнянням буде $x = x_0$.

4. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки. Нехай маємо дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, причому $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$ (рис. 2.35). Через ці точки проходить єдина пряма *l*. Виберемо на прямій *l* довільну точку $M(x, y)$.

З умови колінеарності векторів

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1) \text{ і } \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

одержуємо співвідношення

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad \textbf{(2.31)}$$

Рівняння (2.31) називають ***рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки*** $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

Якщо точки M_1 і M_2 лежать на прямій, яка паралельна до осі Ox ($y_2 = y_1 = y_0$) або до осі Oy ($x_2 = x_1 = x_0$), то рівняння прямої *l* буде мати вигляд $y = y_0$ і $x = x_0$ відповідно.

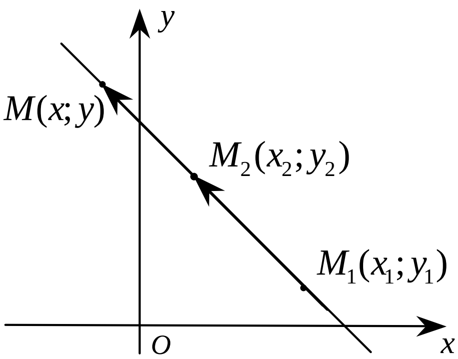


Рис. 2.35

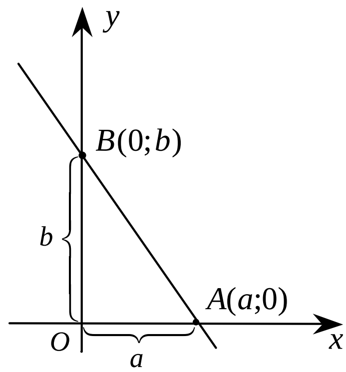


Рис 2.36

Задача 2.10. Написати рівняння медіани AM трикутника ABC, заданого координатами своїх вершин $A(7,0),\ B(3,6),\ C(-1,1)$.

Розв'язання. Точка M – середина сторони BC. Її координати знаходимо за формулами (2.15): $M\left(1,\ \dfrac{7}{2}\right)$. Тепер згідно з формулою (2.31) рівняння прямої, що містить медіану AM, має вигляд

$$\frac{x-7}{1-7}=\frac{y-0}{\frac{7}{2}-0},$$

або

$$7x+12y-49=0.\ \blacksquare$$

5. Рівняння прямої у відрізках на осях. Нехай пряма l перетинає координатні осі Ox і Oy у точках $A(a,0)$ і $B(0,b)$ відповідно, причому $a\neq 0$, $b\neq 0$. Тоді вона відтинає від осей відрізки з кінцями у початку координат та у точках A і B довжин $|a|$ і $|b|$ відповідно (рис. 2.36).

Складемо рівняння прямої l, яка проходить через ці дві точки. Згідно з формулою (2.31) одержуємо

$$\frac{x-0}{a-0}=\frac{y-b}{0-b}$$

або

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad \textbf{(2.32)}$$

Рівняння (2.32) називають ***рівнянням прямої у відрізках на осях***.

6. Загальне рівняння прямої. Покажемо, що будь-яке лінійне рівняння з двома змінними *x* і *y*

$$Ax + By + C = 0, \qquad \textbf{(2.33)}$$

де коефіцієнти A і B одночасно не дорівнюють нулю, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$, є рівнянням прямої.

Якщо $A^2 + B^2 \neq 0$, то рівняння (2.33) має безліч розв'язків. Нехай (x_0, y_0) – один з цих розв'язків, а тому

$$Ax_0 + By_0 + C \equiv 0. \qquad \textbf{(2.34)}$$

Віднімаючи почленно (2.33) і (2.34), одержуємо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

еквівалентне (2.33), тобто рівняння, яке характеризує одну й ту ж лінію. Але (2.33) – це рівняння прямої, що проходить через точку (x_0, y_0) і має вектор нормалі $\vec{n} = (A, B)$ (див. (2.28)). Отже, (2.33) є рівнянням прямої.

Рівняння (2.33) називають ***загальним рівнянням прямої***. З нього можна одержати частинні випадки прямих, які розглядались вище. Наприклад, якщо $A = 0$ (тоді $B \neq 0$), то рівняння (2.33) набере вигляду $By + C = 0$ або $y = -\dfrac{C}{B}$. Отримали рівняння вигляду $y = y_0$ – рівняння прямої, яка паралельна до осі Ox. Якщо ж $B = 0$ (тоді $A \neq 0$), то $Ax + C = 0$ або $x = -\dfrac{C}{A}$. Отримали $x = x_0$ – рівняння прямої, паралельної до осі Oy (рис. 2.37).

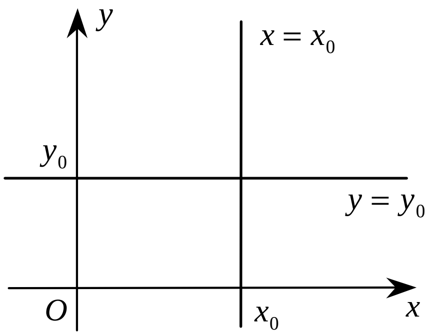


Рис. 2.37

Пропонуємо читачам самостійно довести, що якщо пряма задана рівнянням (2.33), то вектор $\vec{l} = (-B, A)$ є її напрямним вектором.

§ 2.11. Кут між двома прямими. Дослідження взаємного розташування прямих

Виведемо формулу для знаходження кута між двома прямими. Розглянемо два випадки.

1. Нехай прямі l_1 і l_2 задані своїми загальними рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad (2.35)$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0. \qquad (2.36)$$

Тоді $\vec{n_1}=(A_1,B_1)$ і $\vec{n_2}=(A_2,B_2)$ – вектори нормалі прямих l_1 і l_2 відповідно.

Кутом φ ***між прямими*** l_1 і l_2 називають кут α між векторами $\vec{n_1}$ і $\vec{n_2}$, якщо $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, і кут $\pi-\alpha$ в іншому випадку. Тоді з (2.21) випливає, що

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (2.37)$$

2. Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$y=k_1x+b_1, \qquad (2.38)$$

$$y=k_2x+b_2, \qquad (2.39)$$

де $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2$, причому $\alpha_1\ne\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2\ne\frac{\pi}{2}$ (рис. 2.38).

Кут між прямими l_1, l_2 і далі позначатимемо через φ. З геометричних міркувань легко встановлюємо залежність між кутами α_1, α_2, φ, а саме $\varphi=|\alpha_1-\alpha_2|$.

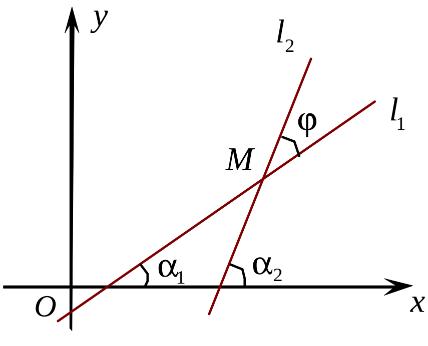


Рис.2.38

Якщо $|\alpha_1-\alpha_2|\ne\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi=|\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)|=\left|\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_1}\right|$$

або

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|. \qquad (2.40)$$

Задача 2.11. Знайти кут між прямими, які задані рівняннями

$$y = 2x + 3, \quad y = -3x + 2.$$

Розв'язання. Маємо $k_1 = 2$, $k_2 = -3$ – кутові коефіцієнти цих прямих. Тепер за формулою (2.40) знаходимо

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2}\right| = 1,$$

а отже,

$$\varphi = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}. \ ■$$

Встановимо тепер умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані у вигляді (2.35) і (2.36). Якщо вони паралельні, то вектори нормалі $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2)$ колінеарні. Умовою колінеарності векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ є рівність

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Прямі l_1 і l_2, зокрема, можуть збігатись. Отже, нехай рівняння (2.35) і (2.36) є рівняннями однієї й тієї ж прямої. Тоді вектори нормалі $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2)$ будуть колінеарними, а отже,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda, \quad A_1 = \lambda A_2, \ B_1 = \lambda B_2.$$

Помножимо тепер ліву частину рівняння (2.36) на λ й віднімемо отриманий результат від лівої частини рівняння (2.35). Будемо мати:

$$C_1 - \lambda C_2 = 0.$$

Таким чином, одержуємо, що

$$A_1 = \lambda A_2, \ B_1 = \lambda B_2, \ C_1 = \lambda C_2. \tag{2.41}$$

І навпаки, якщо виконуються умови (2.41), то рівняння (2.35) можна записати у вигляді

$$\lambda(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0,$$

а отже, його задовольняють координати довільної точки прямої (2.36).

Отже, для того, щоб *(2.35) і (2.36) були рівняннями однієї й тієї ж прямої, необхідно і достатньо, щоб їх відповідні коефіцієнти та вільні члени були пропорційні.*

Якщо прямі, задані рівняннями (2.35), (2.36), перпендикулярні, то їх вектори нормалі $\vec{n_1}$ і $\vec{n_2}$ ортогональні. Тоді $(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = 0$, а отже,

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Умову паралельності двох прямих з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 легко отримати безпосередньо з формули (2.40):

$$k_1 = k_2.$$

Якщо прямі, задані рівняннями (2.38), (2.39), перпендикулярні, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то записавши формулу (2.40) у вигляді

$$\operatorname{ctg}\varphi = \left|\frac{1 + k_2k_1}{k_2 - k_1}\right|,$$

знаходимо, що

$$k_2k_1 + 1 = 0.$$

Отже, *дві прямі, задані рівняннями (2.35), (2.36) або (2.38), (2.39), паралельні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти біля однойменних невідомих пропорційні* $\left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}\right)$ *або коли кутові коефіцієнти прямих рівні між собою* $(k_1 = k_2)$.

Дві прямі, задані рівняннями (2.35), (2.36) або (2.38), (2.39), перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти біля однойменних невідомих задовольняють рівність $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ або коли кутові коефіцієнти прямих обернені за величиною й протилежні за знаком $\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$.

Пропонуємо читачам самостійно переконатись, що:

1) пари рівнянь $6x + 10y + 3 = 0$, $3x + 5y - 53 = 0$ та $y = 2x + 3$, $y = 2x - 7$ задають паралельні прямі;

2) пари рівнянь $2x+3y-7=0$, $3x-2y=0$ та $y=2x+8$, $y=-0{,}5x+17$ задають перпендикулярні прямі;

3) прямі $3x+y-2=0$ і $6x+2y-4=0$ збігаються.

Якщо прямі l_1 і l_2, задані рівняннями (2.35), (2.36), перетинаються, тобто мають одну спільну точку, то координати цієї точки повинні задовольняти обидва рівняння. Іншими словами, координати точки перетину можна знайти як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1, \\ A_2x+B_2y=-C_2. \end{cases}$$

Оскільки прямі l_1 і l_2 не паралельні, тобто

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2},$$

то розв'язок цієї системи буде єдиним, бо

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=A_1B_2-A_2B_1\neq 0\,.$$

Розв'язуючи цю систему (наприклад, за формулами Крамера), знаходимо:

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\quad y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}. \qquad \textbf{(2.42)}$$

Формули (2.42) дають змогу знайти координати x, y точки перетину прямих l_1 і l_2, заданих рівняннями (2.35), (2.36).

Для інших способів задання прямих координати точки їх перетину також шукаємо як розв'язок відповідної систем рівнянь.

§ 2.12. Відстань від точки до прямої

Нехай пряма l задана рівнянням

$$Ax+By+C=0$$

і $M_0(x_0,y_0)$ – деяка точка поза нею.

Нагадаємо, що довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 до прямої l, називають ***відстанню від точки M_0 до прямої*** l (рис. 2.39).

Позначимо цю відстань через $\rho(M_0, l)$. Якщо $M_0 \in l$, то будемо вважати, що $\rho(M_0, l) = 0$. Очевидно, що для довільної точки $M \in l$ $\rho(M_0, l) \le M_0 M$.

Виведемо формулу для знаходження відстані від точки M_0 до прямої *l*. Нехай $M_0 M_1$ – перпендикуляр, опущений з точки M_0 на пряму *l* (рис. 2.40). Тоді $\rho(M_0, l) = |\overrightarrow{M_1 M_0}|$.

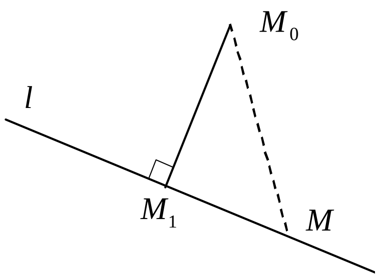


Рис. 2.39

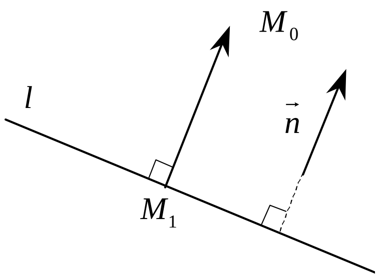


Рис. 2.40

Пряма l має вектор нормалі $\vec{n} = (A, B)$, який буде колінеарним до вектора $\overrightarrow{M_1 M_0}$.

З означення скалярного добутку векторів випливає, що

$$(\overrightarrow{M_1 M_0}, \vec{n}) = |\overrightarrow{M_1 M_0}|\,|\vec{n}| \cos\varphi = \rho(M_0, l)\ |\vec{n}| \cos 0 = \rho(M_0, l)\,|\vec{n}|.$$

Таким чином,

$$\rho(M_0, l) = \frac{|(\overrightarrow{M_1 M_0}, \vec{n})|}{|\vec{n}|}. \qquad \textbf{(2.43)}$$

Обчислимо $(\overrightarrow{M_1 M_0}, \vec{n})$. Нехай (x_1, y_1) – координати точки M_1, тоді $\overrightarrow{M_1 M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ і

$$(\overrightarrow{M_1 M_0}, \vec{n}) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1).$$

Але оскільки $M_1 \in l$, то

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Таким чином,

$$(\overrightarrow{M_1 M_0}, \vec{n}) = Ax_0 + By_0 + C.$$

Враховуючи, що $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, з формули (2.43) остаточно знаходимо:

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad \textbf{(2.44)}$$

Задача 2.12. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих, заданих рівняннями $3x-4y+1=0$ і $6x-8y+22=0$.

Розв'язання. Оскільки прямі паралельні, то довжину b сторони квадрата можна знайти як відстань від довільної точки однієї прямої до іншої. Легко перевірити, що точка $M_0(1,1)$ належить першій прямій. За формулою (2.44) знаходимо відстань від точки M_0 до іншої прямої:

$$b=\frac{|6\cdot 1-8\cdot 1+22|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{20}{10}=2.$$

Отже, площа квадрата $S=b^2=4$. ■

2.13. Криві другого порядку

Кривими другого порядку називають лінії, координати точок яких в прямокутній декартовій системі координат задовольняють рівняння другого степеня з двома змінними. Таке рівняння має загальний вигляд

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

У цьому рівнянні коефіцієнти можуть набувати довільних дійсних значень за умови, що коефіцієнти A, B і C одночасно не дорівнюють нулю (інакше це рівняння не буде рівнянням другого степеня).

Розглянемо деякі криві другого порядку.

1. Коло та його рівняння. ***Колом*** називають множину усіх точок площини, рівновіддалених від деякої заданої точки (центра кола).

Виведемо рівняння кола. Нехай центром кола є точка $M_0(x_0,y_0)$, а відстань від неї до довільної точки $M(x,y)$ кола дорівнює R (рис. 2.41). Тоді $|\overrightarrow{M_0M}|=R$. Але оскільки $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,\ y-y_0)$, то

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R. \tag{2.45}$$

Рівняння (2.45) і є шуканим рівнянням кола. Але зручніше користуватись рівнянням, яке одержимо після піднесення обох частин рівняння (2.45) до квадрату:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \tag{2.46}$$

Рівність (2.46) задовольняють координати довільної точки $M(x,y)$, що належить колу і не задовольняють координати жодної точки, яка не належить йому.

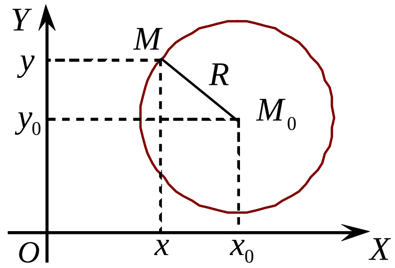


Рис. 2.41

Якщо центром кола є точка $O(0,0)$, то рівняння (2.46) набуде вигляду

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Рівняння (2.46) називають ***канонічним рівнянням кола*** з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ і радіусом R. Якщо в (2.46) розкрити дужки, то одержимо ***загальне рівняння кола***

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

де $A = -2x_0$, $B = -2y_0$, $C = x_0^2 + y_0^2 - R^2$.

Отже, коло – крива другого порядку.

Задача 2.13. Знати центр та радіус кола

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0.$$

Розв'язання. Виділимо у рівнянні повні квадрати, тобто зведемо дане рівняння до канонічного вигляду (2.46). Будемо мати:

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = 3,\ (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 3 + 9 + 4,$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16.$$

З останнього рівняння випливає, що центром заданого кола є точка $O(-3,2)$, а його радіус дорівнює 4. Побудувати це коло пропонуємо читачам самостійно. ■

2. Еліпс та його рівняння. ***Еліпсом*** називають множину усіх точок площини, сума відстаней яких від двох заданих точок площини, які називають ***фокусами***, є величина стала і більша від відстані між фокусами.

Щоб вивести рівняння еліпса, візьмемо на площині дві точки F_1 і F_2 (фокуси еліпса) і розмістимо прямокутну систему координат так, щоб вони належали осі абсцис, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 2.42).

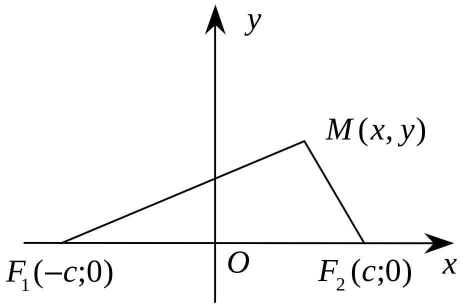


Рис. 2.42

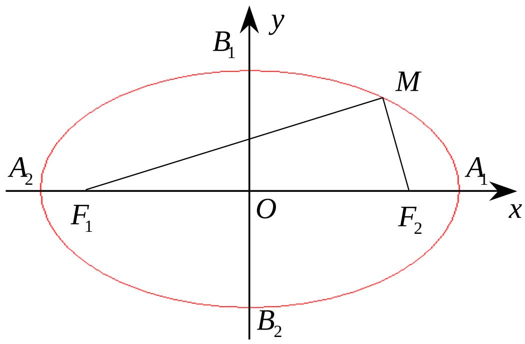


Рис. 2.43

Позначимо відстань між фокусами через $2c$ ($F_1F_2 = 2c$), а суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів – через $2a$. Тоді фокуси мають такі координати: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. За означенням, $2a > 2c$, тобто $a > c$.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпса. З означення еліпса одержуємо, що

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Але оскільки

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \ ,$$

то

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перенесемо другий корінь в праву частину рівняння, а потім двічі піднесемо обидві частини рівняння до квадрату. Після нескладних перетворень одержимо, що

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поділивши обидві частини на $(a^2 - c^2)a^2 \neq 0$, будемо мати

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Оскільки $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$, а тому можна позначити

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad \textbf{(2.47)}$$

Таким чином, одержуємо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \textbf{(2.48)}$$

Рівняння (2.48) називають ***канонічним рівнянням еліпса***. Отже, еліпс є кривою другого порядку.

Встановимо деякі ***властивості еліпса*** та дослідимо його форму.

Рівняння (2.48) містить тільки члени з парними степенями координат x, y, а тому, якщо точка (x, y) належить еліпсу, то йому належать також точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$. Іншими словами, еліпс симетричний відносно осей Ox і Oy, а також відносно початку координат. Отже, для дослідження форми еліпса достатньо побудувати ту його частину, яка розташована у першій чверті.

Оскільки у першій чверті $x \geq 0$, $y \geq 0$, то з (2.48) одержуємо

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \tag{2.50}$$

звідки випливає, що точки $A_1(a, 0)$ і $B_1(0, b)$ належать еліпсу, причому, якщо x збільшується від 0 до a, то y зменшується від b до 0. Окрім того, не існує точок еліпса, для яких $x > a$, бо вираз $\sqrt{a^2 - x^2}$ має зміст лише тоді, коли $x \leq a$. Таким чином, розміщена в першій чверті частина еліпсу має форму дуги (рис. 2.43). Якщо відобразити цю дугу симетрично відносно осей Ox та Oy, то одержимо весь еліпс. Він уміщується у прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$. Сторони цього прямокутника дотикаються до еліпса в точках перетину його з осями Ox і Oy.

Еліпс перетинає осі координат у точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, які називають ***вершинами*** еліпса.

Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, які з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їх довжини $2a$ і $2b$, називають відповідно ***великою*** і ***малою віссю*** еліпса. Довжини a і b називають відповідно ***великою*** і ***малою піввіссю*** еліпса.

Якщо $a = b$, то рівняння (2.48) набуває вигляду

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

тобто маємо рівняння кола. Отже, коло є окремим випадком еліпса (його можна розглядати як еліпс, фокуси якого збігаються з центром).

Введемо величину, яка характеризує відхилення еліпса від кола. ***Ексцентриситетом*** еліпса називають відношення $\frac{c}{a}$, де c – половина відстані між фокусами, a – довжина великої півосі еліпса. Ексцентриситет позначають буквою ε. Отже,

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad (2.50)$$

причому $0 \le \varepsilon < 1$, бо $0 \le c < a$.

З формул (2.47) і (2.50) знаходимо

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Якщо ε наближається до одиниці, то відношення $\frac{b}{a}$ зменшується, тобто еліпс усе більше розтягується вздовж осі Ox. Якщо ж ε наближається до нуля, то відношення $\frac{b}{a}$ збільшується, тобто еліпс має більш округлу форму. Зокрема, якщо $\varepsilon = 0$, то $a = b$, тобто еліпс перетворюється в коло.

Задача 2.14. Побудувати еліпс, фокуси якого розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами 16, а ексцентриситет дорівнює 0,8.

Розв'язання. Оскільки $2c = 16$, то $c = 8$. З формул (2.50) і (2.47) знаходимо, що $a = 10$, $b = 6$. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Побудувати цей еліпс пропонуємо читачам самостійно. ■

3. Гіпербола та її рівняння. ***Гіперболою*** називають геометричне місце усіх точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох заданих точок, які називають ***фокусами***, є величина стала і менша, ніж відстань між фокусами.

Позначимо через F_1 і F_2 фокуси гіперболи, відстань між ними – через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів – через $2a$. За означенням, $a < c$.

Щоб вивести рівняння гіперболи, розмістимо прямокутну систему координат так, щоб фокуси гіперболи належали осі абсцис, а початок координат поділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 2.42). Тоді фокуси мають координати: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Точка $M(x;y)$ належить гіперболі тоді і тільки тоді, коли

$$|MF_1 - MF_2| = 2a,$$

звідки отримуємо

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Виконавши аналогічні перетворення, що й при виведенні рівняння еліпса, одержимо ***канонічне рівняння гіперболи***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \textbf{(2.51)}$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad \textbf{(2.52)}$$

Отже, гіпербола є лінією другого порядку.

Встановимо деякі ***властивості гіперболи*** та дослідимо її форму.

З (2.51) випливає, що гіпербола симетрична відносно осей координат та початку координат. Для частини гіперболи, яка лежить у першій чверті, з (2.51) знаходимо:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

а тому, очевидно, $x \ge a$.

Точка $A_1(a,0)$ належить гіперболі та є точкою перетину гіперболи з віссю Ox. Гіпербола не перетинає вісь Oy. Якщо $x > a$, то $y > 0$, причому якщо x збільшується, то y збільшується також .

Можна показати, що віддаляючись у нескінченність, довільна точка $M(x,y)$ гіперболи необмежено наближається до прямої

$$y = \frac{b}{a}x,$$

яку називають ***асимптотою*** гіперболи.

Таким чином, частина гіперболи, розміщена у першій чверті, має вигляд дуги, яка показана на рис. 2.44. Відобразивши її симетрично відносно координатних осей, отримаємо вигляд усієї гіперболи (рис. 2.45).

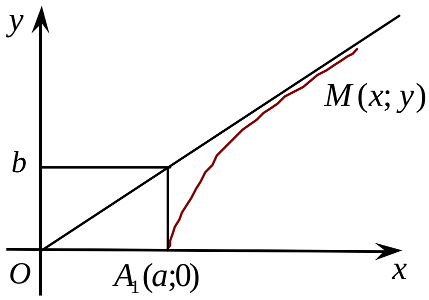


Рис. 2.44

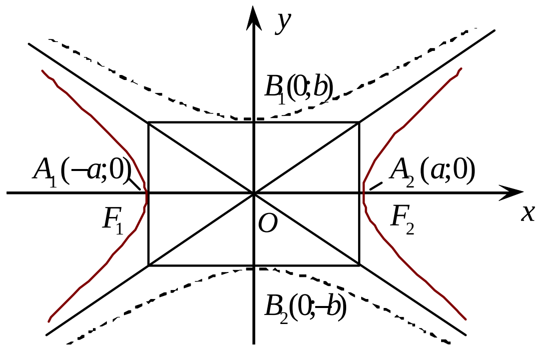


Рис. 2.45

Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) та має дві асимптоти:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Осі симетрії називають ***осями*** гіперболи, а точку перетину осей – її ***центром***. Вісь Ox перетинає гіперболу у двох точках $A_1(a,0)$ і $A_1(-a,0)$, які називають ***вершинами*** гіперболи. Цю вісь називають ***дійсною віссю*** гіперболи, а вісь, яка не має спільних точок з гіперболою, – ***уявною віссю***. Дійсною віссю називають також відрізок A_1A_2, який сполучає вершини гіперболи, та його довжину $A_1A_2 = 2a$. Відрізок B_1B_2, який сполучає точки $B_1(0,b)$ і $B_2(0,-b)$, а також його довжину, називають ***уявною віссю***. Величини a і b називають ***дійсною*** та ***уявною півосями*** гіперболи відповідно. Прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$, розміщений симетрично відносно осей гіперболи, називають ***основним прямокутником*** гіперболи.

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad \textbf{(2.53)}$$

також визначає гіперболу, яка називається ***спряженою*** до гіперболи (2.51).

Будуючи гіперболу, доцільно спочатку побудувати її основний прямокутник (рис. 2.45), провести прямі, які проходять через його протилежні вершини – асимптоти гіперболи, і визначити вершини A_1 і A_2 гіперболи. Гіпербола (2.53) зображена на рис. 2.45 штриховою лінією.

Гіпербола з рівними півосями ($a = b$) називається ***рівносторонньою***, а її канонічне рівняння має вигляд

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Ексцентриситетом гіперболи називають відношення c/a, де c – половина відстані між фокусами, a – довжина її дійсної півосі. Отже,

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad \textbf{(2.54)}$$

причому $\varepsilon > 1$, бо $c > a$.

Окрім того, з формул (2.52) і (2.54) випливає, що

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отже, ексцентриситет гіперболи характеризує її форму: чим більший ексцентриситет, тим більше відношення b/a, тобто тим більше основний прямокутник розтягується вздовж осі Oy, а гіпербола відхиляється від осі Ox; чим ближче ексцентриситет гіперболи до одиниці, тим більше основний прямокутник розтягується вздовж осі Ox, а гіпербола наближається до цієї осі.

Задача 2.15. Довести, що рівняння

$$6x^2 - 9y^2 - 36x - 72y - 141 = 0$$

визначає гіперболу. Знайти її центр, півосі та ексцентриситет.

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати відносно x та y, отримуємо:

$$6(x^2 - 6x) - 9(y^2 + 8y) - 141 = 0, \quad 6(x-3)^2 - 54 - 9(y+4)^2 + 144 - 141 = 0,$$

$$6(x-3)^2 - 9(y+4)^2 = 51, \quad \frac{(x-3)^2}{\frac{51}{6}} - \frac{(y+4)^2}{\frac{51}{9}} = 1, \quad \frac{(x-3)^2}{\frac{17}{2}} - \frac{(y+4)^2}{\frac{17}{3}} = 1.$$

Враховуючи формули паралельного перенесення, можна зробити висновок, що задане рівняння визначає гіперболу з центром у точці $O_1(3,-4)$ і півосями $a = \sqrt{\frac{17}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{17}{3}}$. З формули (2.52) знаходимо, що $c = \sqrt{\frac{85}{6}}$, а тому з (2.54) одержуємо ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{3}}$. ■

4. Парабола та її рівняння. ***Параболою*** називається геометричне місце усіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від заданої точки, яка називається ***фокусом,*** і від даної прямої, яка називається ***директрисою,*** і не проходить через фокус.

Виведемо рівняння параболи. Нехай на площині задані фокус F і директриса, причому відстань від фокуса до директриси дорівнює p. Побудуємо прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокус, перпендикулярно до директриси, а вісь Oy поділила відстань між фокусом F і директрисою навпіл (рис. 2.46). Тоді фокус має координати $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, а рівнянням директриси є

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Довільна точка $M(x,y)$ площини буде належати параболі, якщо

$$MA=MF,$$

де MA і MF – відстані від точки M до директриси і фокуса відповідно, тобто якщо

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Після піднесення обох частин цієї рівності до квадрата та зведення подібних доданків одержуємо:

$$y^2=2px. \tag{2.55}$$

Рівняння (2.55) називають ***канонічним рівнянням параболи***. Отже, парабола є лінією другого порядку.

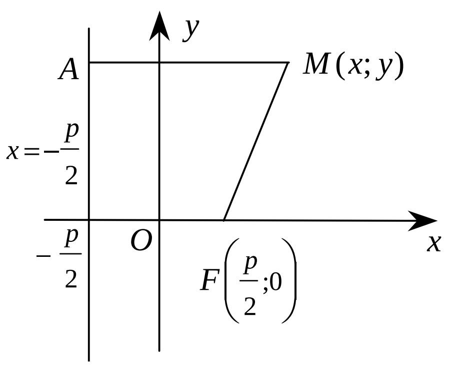


Рис. 2.46

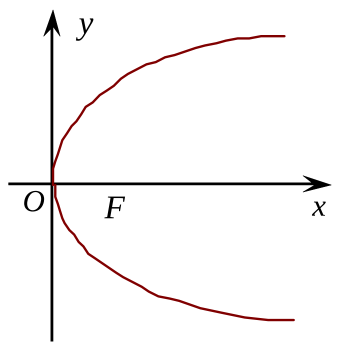


Рис. 2.47

Дослідимо форму параболи. Оскільки рівняння (2.55) містить змінну y у парному степені, то парабола симетрична відносно осі Ox. Тому розглянемо лише ту частину параболи, яка лежить у верхній півплощині ($y \geq 0$). Для цієї частини параболи маємо

$$y = \sqrt{2px}. \qquad \textbf{(2.56)}$$

З (2.56) випливає, що парабола розміщена справа від осі Oy, бо при $x < 0$ вираз $\sqrt{2px}$ не має змісту. Очевидно також, що парабола проходить через початок координат. Із зростанням x значення y також зростає. Отже, довільна точка $M(x, y)$ параболи, виходячи з початку координат, із зростанням x рухається по ній вправо і вверх.

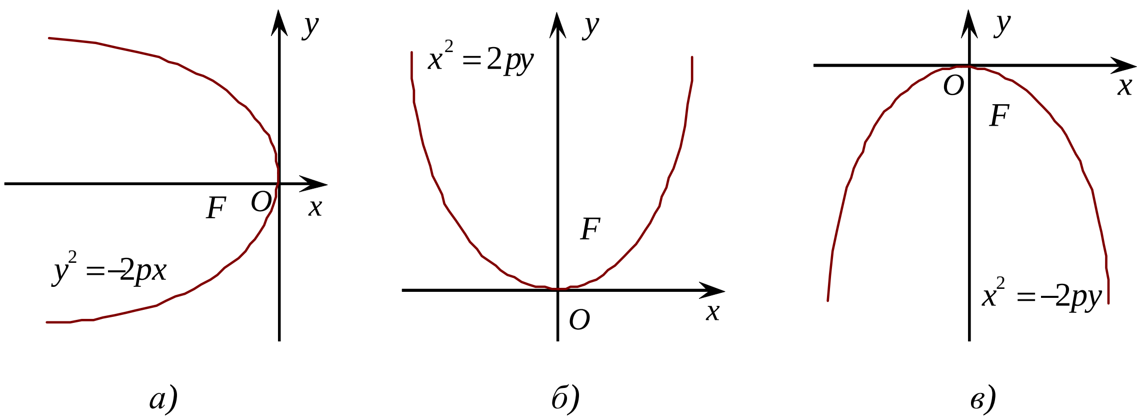
Виконуючи симетрію цієї частини параболи відносно осі Ox, отримуємо графік всієї параболи (рис. 2.47).

Вісь симетрії параболи називається її ***віссю***, а точка перетину осі з параболою – ***вершиною*** параболи. Віссю параболи, заданої рівнянням (2.55), є координатна вісь Ox, а вершиною – точка $O(0,0)$.

Рівняння

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = 2py, \quad x^2 = -2py,$$

де $p > 0$, визначають параболи, графіки яких зображені на рис. 2.48 а), б), в) відповідно.



а) *б)* *в)*

Рис. 2.48

§ 2.14. Рівняння поверхні та лінії у просторі

Співвідношення

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (2.57)$$

називають ***рівнянням з трьома змінними*** *x*, *y*, *z*, якщо воно виконується не для всіх допустимих трійок *x*, *y*, *z*, і ***тотожністю***, якщо воно справджується для будь-яких допустимих значень *x*, *y* і *z*.

Припустимо, що за допомогою пари значень $x = x_0$ і $y = y_0$ з рівняння (2.57) визначається єдине значення $z = z_0$. Упорядкована трійка чисел x_0, y_0, z_0 у заданій прямокутній системі координат *Oxyz* визначає точку $M(x_0, y_0, z_0)$.

Сукупність усіх розв'язків *z* рівняння (2.57), які відповідають певним значенням *x* та *y*, визначає у просторі деяке геометричне місце точок, яке називають ***поверхнею*** (рис. 2.49). Рівняння (2.57) при цьому називають ***рівнянням поверхні***.

Отже, рівняння (2.57) є рівнянням поверхні у заданій системі координат, якщо це рівняння задовольняють координати *x*, *y*, *z* будь-якої точки поверхні і не задовольняють координати жодної точки, яка не належить цій поверхні.

Поверхню у просторі за аналогією з лінією на площині також можна задати геометрично й аналітично. Якщо поверхня задана геометрично, то виникає задача про складання рівняння цієї поверхні, і навпаки, якщо поверхня задана рівнянням, то виникає задача про її геометричні властивості.

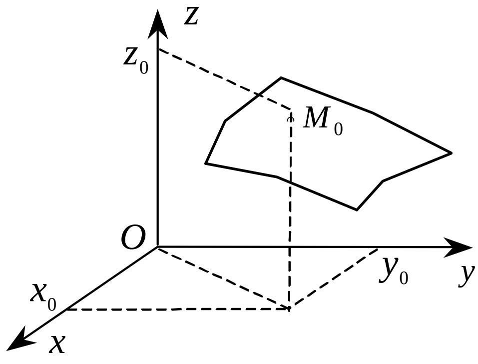


Рис. 2.49

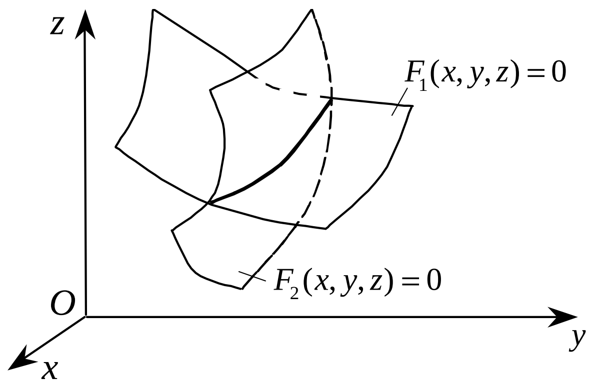


Рис. 2.50

Розглянемо приклад складання рівняння заданої поверхні.

Задача 2.16. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $A(1,2,3)$ і $B(2,-1,4)$.

Розв'язання. Візьмемо довільну точку $M(x,y,z)$ на шуканій поверхні. Оскільки за умовою $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{BM}|$, то, використовуючи формулу (2.11) відстані між двома точками, будемо мати:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

звідки після спрощень одержуємо шукане рівняння $2x-6y+2z-7=0$. ■

Задача 2.17. Скласти рівняння сфери, центром якої є точка $O(a,b,c)$, а радіус дорівнює R.

Розв'язання. Позначаючи через x, y і z координати довільної точки M сфери, виразимо властивість, притаманну усім точкам сфери. З означення сфери випливає, що відстань від точки M до центра O є величиною сталою, яка дорівнює R, тобто $MO=R$. Використовуючи формулу (2.11), знаходимо:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R.$$

Після піднесення обох частин останнього рівняння до квадрату, одержуємо шукане рівняння сфери:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{2.58}$$

Зокрема, якщо центр сфери знаходиться в початку координат, тобто $a=b=c=0$, то рівняння сфери матиме більш простий вигляд:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \text{ ■}$$

Лінію у просторі можна розглядати також як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, що знаходяться одночасно на двох поверхнях, які перетинаються. Отже, якщо $F_1(x,y,z)=0$ і $F_2(x,y,z)=0$ – рівняння двох поверхонь, які визначають лінію (рис. 2.50), то координати точок цієї лінії задовольняють систему двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи сумісно визначають лінію і називаються ***рівняннями лінії у просторі***.

§ 2.15. Рівняння площини

Нехай у прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину σ за допомогою точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma$ і вектора $\vec{n} = (A, B, C)$, який перпендикулярний до σ (рис. 2.51). Візьмемо на площині σ довільну точку $M(x, y, z)$ та знайдемо вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Очевидно, що вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні, а тому їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad \textbf{(2.59)}$$

Рівняння (2.59) є шуканим рівнянням площини σ, бо його задовольняють координати *x*, *y*, *z* будь-якої точки *M*, яка належить σ, і не задовольняють координати жодної точки, яка цій площині не належить.

Розкриваючи дужки, можемо звести рівняння (2.59) до вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \textbf{(2.60)}$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Рівняння (2.59) називається ***рівнянням площини, яка проходить через точку*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$***, перпендикулярно до вектора*** $\vec{n} = (A, B, C)$, а рівняння (2.60) – ***загальним рівнянням площини***.

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярний до площини, називають ***вектором нормалі*** цієї площини. Кожна площина має безліч векторів нормалі. Усі вони колінеарні, а їх відповідні координати пропорційні.

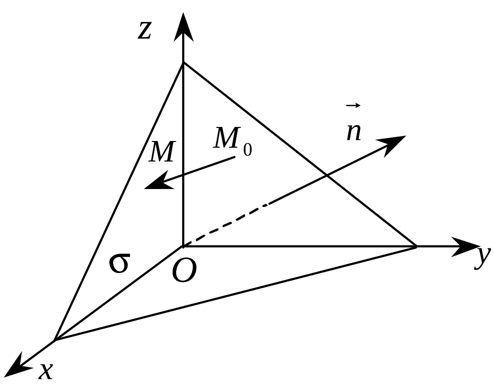


Рис. 2.51

Отже, будь-яка площина є поверхнею першого порядку, бо визначається рівнянням першого степеня. Правильним є й обернене твердження: кожне рівняння першого степеня вигляду (2.60) визначає в прямокутній системі координат $Oxyz$ площину.

Проведемо дослідження загального рівняння площини.

1. Якщо у рівнянні (2.60) $D=0$, то $Ax+By+Cz=0$. Легко показати, що це рівняння задовольняє точка $O(0,0,0)$. Отже, якщо у загальному рівнянні площини відсутній вільний член, то вона проходить через початок координат.

2. Нехай у рівнянні (2.60) $D\neq 0$. Якщо $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, то рівняння (2.60) набуває вигляду $By+Cz+D=0$ і визначає площину, вектор нормалі якої $\vec{n}=(0,B,C)$ перпендикулярний до осі Ox. Тому у цьому випадку одержуємо площину, яка паралельна до осі Ox.

Якщо $B=0$, $C\neq 0$, $A\neq 0$, то рівняння $Ax+Cz+D=0$ визначає площину, яка паралельна до осі Oy, а якщо $C=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$, то рівняння $Ax+By+D=0$ визначає площину, яка паралельна до осі Oz.

3. Якщо $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$, то рівняння (2.60) набуває вигляду $Cz+D=0$ або $z=-\dfrac{D}{C}$. З випадку 2 випливає, що отримане рівняння визначає площину, паралельну до осей Ox та Oy, тобто площину, яка паралельна до площини Oxy.

Аналогічно, якщо $A=0$, $C=0$, $B\neq 0$, $D\neq 0$, то отримуємо площину $By+D=0$, яка паралельна до площини Oxz, а якщо $B=0$, $C=0$, $A\neq 0$, $D\neq 0$, то маємо площину $Ax+D=0$, яка паралельна до площини Oyz.

4. Якщо у рівнянні (2.60) $A=D=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, то площина $By+Cz=0$ проходить через вісь Ox. Справді, згідно з попереднім, якщо $D=0$, то площина проходить через початок координат, а при $A=0$ – паралельно до осі Ox, а отже, проходить через вісь Ox.

Аналогічно площина $Ax+Cz=0$, де $A\neq 0$, $C\neq 0$, проходить через вісь Oy, а площина $Ax+By=0$, де $A\neq 0$, $B\neq 0$, – через вісь Oz.

5. Якщо $A=B=D=0$, $C\neq 0$, то площина $Cz=0$ або $z=0$ збігається з площиною Oxy. Аналогічно площина $x=0$ збігається з площиною Oyz, а площина $y=0$ – з площиною Oxz.

Задача 2.18. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1,2,1)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(2,2,5)$.

Розв'язання. Шукане рівняння знаходимо за формулою (2.59):

$$2(x-1)+2(y-2)+5(z-1)=0$$

або

$$2x+2y+5z-11=0. \ \blacksquare$$

Нехай на площині σ маємо три точки

$$M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2),\ M_3(x_3,y_3,z_3),$$

які не лежать на одній прямій. Ці точки однозначно визначають площину σ. Знайдемо її рівняння. Для цього візьмемо на σ довільну точку $M(x,y,z)$ і знайдемо вектори

$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1),\quad \overrightarrow{MM_1}=(x_1-x,y_1-y,z_1-z),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

Оскільки ці три вектора належать одній площині, то вони компланарні, а тому, як відомо (див. § 2.8), їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad \textbf{(2.61)}$$

Рівняння (2.61) називають ***рівнянням площини, яка проходить через три задані точки.***

Зокрема, якщо площина проходить через точки

$$A(a,0,0),\ B(0,b,0),\ C(0,0,c),$$

тобто відтинає на координатних осях Ox, Oy, Oz відрізки довжин $|a|\neq 0$, $|b|\neq 0$, $|c|\neq 0$ з кінцями у початку координат та у точках A, B, C відповідно, то з (2.61) після знаходження визначника та нескладних спрощень одержуємо її рівняння у вигляді

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad \textbf{(2.62)}$$

Рівняння (2.62) називається ***рівнянням площини у відрізках на осях***. Ним зручно користуватись при побудові площини.

Задача 2.19. Побудувати площину

$$2x-3y+4z-12=0.$$

Розв'язання. Рівняння площини запишемо у відрізках на осях. Для запишемо його у вигляді (2.62):

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{3}=1,$$

звідки знаходимо $a=6$, $b=-4$, $c=3$.

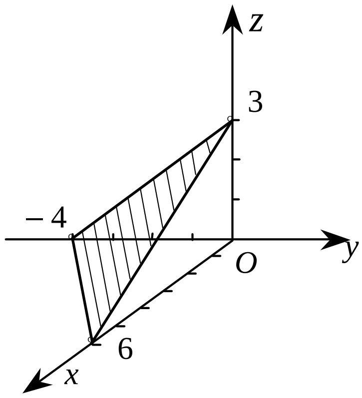


Рис. 2.52

Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину (рис. 2.52). ■

Виведемо формулу для знаходження кута між двома площинами. Нехай площини σ_1, σ_2 задані відповідно рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{і} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad \textbf{(2.63)}$$

Двогранний кут φ між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту α між векторами нормалей $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ цих площин, якщо $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, і куту $\pi-\alpha$ в іншому випадку (рис. 2.53).

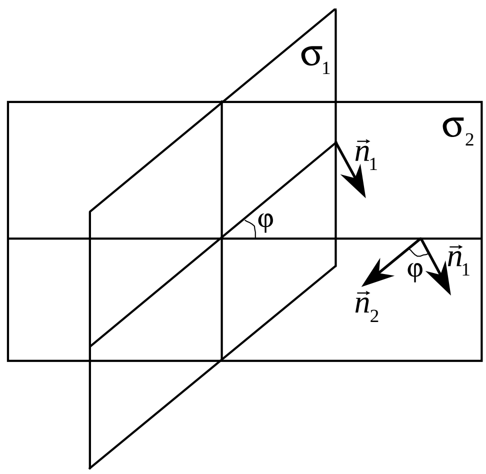


Рис. 2.53

Із (2.21) отримуємо шукану формулу

$$\cos\varphi=\frac{\left|(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох площин (2.63) є рівність

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

а ***необхідною і достатньою умовою паралельності двох площин*** є

$$A_1 = \lambda A_2,\ \ B_1 = \lambda B_2,\ \ C_1 = \lambda C_2,$$

причому $D_1 \neq \lambda D_2$, бо в іншому випадку площини співпадатимуть.

Доведення цих тверджень пропонуємо провести читачу самостійно.

Якщо деяка площина σ задана рівнянням (2.60) і $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, яка не належить цій площині, то відстань *d* від точки M_0 до σ обчислюється за формулою

$$d = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \textbf{(2.64)}$$

доведення якої проводиться аналогічно до доведення формули (2.44).

Задача 2.20. Знайти довжину висоту *AH* піраміди, яка задана координатами своїх вершин:

$$A(-1,2,-1),\ B(1,0,2),\ C(0,1,-1),\ D(2,0,-1).$$

Розв'язання. Висоту *AH* можемо знайти як відстань від точки *A* до площини *BCD*.

Рівняння площини *BCD* знаходимо за формулою (2.61):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$3x + 6y + z - 5 = 0.$$

Для знаходження довжини висоти *AH* скористаємось формулою (2.64). Будемо мати

$$AH = \frac{|3\cdot(-1) + 6\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 5|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{46}}. \ \blacksquare$$

§ 2.16. Рівняння прямої у просторі

Як зазначалось у § 2.14, лінію у просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, що знаходяться одночасно на двох поверхнях. Зокрема, кожну пряму у просторі можна розглядати як перетин двох площин і відповідно до цього визначати її заданням двох рівнянь першого степеня (рівнянь цих площин).

Нехай у прямокутній системі координат $Oxyz$ задано довільну пряму l. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій. Отже, система рівнянь двох площин σ_1 і σ_2

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad \textbf{(2.65)}$$

вектори нормалей яких $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ неколінеарні, визначає у просторі пряму лінію.

Рівняння (2.65) називають ***загальними рівняннями прямої*** у просторі.

Для розв'язування задач рівняння (2.65) не завжди зручні, тому часто використовують спеціальний вигляд рівняння прямої.

Нехай задано деяку пряму l та ненульовий вектор $\vec{s}$, який колінеарний цій прямій. Вектор $\vec{s}$ називається ***напрямним вектором*** прямої l.

Виведемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, p)$. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка прямої l. Тоді вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

колінеарний вектору $\vec{s}$, а отже, координати вектора $\overrightarrow{M_0M}$ пропорційні відповідним координатам вектора $\vec{s}$, тобто

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad \textbf{(2.66)}$$

Рівняння (2.66) є шуканими і називаються ***канонічними рівняннями прямої*** у просторі.

Для того, щоб утворити канонічні рівняння (2.66) прямої l, яка задана рівняннями (2.65), потрібно знайти будь-яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ та напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, p)$. Для знаходження точки M_0 одну з її координат, наприклад $x = x_0$, беруть довільною, а дві інші визначають з системи

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 z = -D_1 - A_1 x_0, \\ B_2 y + C_2 z = -D_2 - A_2 x_0. \end{cases}$$

Ця система матиме єдиний розв'язок, якщо

$$\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Якщо ж $\dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то довільне значення в системі (2.65) надають змінній y або змінній z.

Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ пригадаємо, що вектори нормалей $\vec{n_1}$ і $\vec{n_2}$ площин σ_1 і σ_2 перпендикулярні до прямої l (рис. 2.54), а тому за напрямний вектор $\vec{s}$ можна взяти векторний добуток $\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$, який визначається за допомогою формули

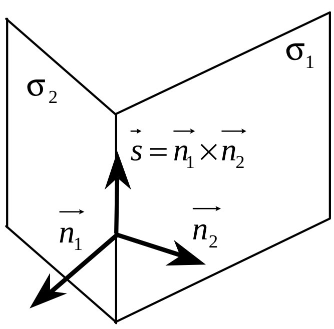


Рис. 2. 54

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \tag{2.67}$$

Задача 2.21. Знайти канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0, \\ 3x + 2y + 4z - 11 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо яку-небудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на цій прямій. Для цього в обох рівняннях покладемо, наприклад, $x_0 = 1$. Отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} y_0 - 3z_0 = -1, \\ 2y_0 + 4z_0 = 8, \end{cases}$$

розв'язком якої є $y_0 = 2$, $z_0 = 1$. Таким чином, точка $M_0(1, 2, 1)$ належить прямій.

Напрямний вектор $\vec{s}$ знаходимо за формулою (2.67):

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (2,1,-3) \times (3,2,4) = (10,-17,1).$$

Отже, $m = 10$, $n = -17$, $p = 1$. Підставляючи значення x_0, y_0, z_0, m, n, p у формулу (2.66), одержуємо канонічні рівняння заданої прямої:

$$\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}. \ \blacksquare$$

Інколи пряму зручно задавати не у вигляді канонічних рівнянь (2.66), а у інакшому вигляді. Нехай пряма *l* задана рівняннями (2.66). Позначимо через *t* кожне з рівних відношень. Тоді

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t,$$

звідки знаходимо

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt. \qquad \textbf{(2.68)}$$

Рівності (2.68) називають ***параметричними рівняннями прямої*** *l*, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, p)$. У рівняннях (2.68) *t* розглядаємо як довільний параметр $(-\infty < t < +\infty)$, а *x*, *y*, *z* – як функції від цього параметра. Якщо змінюється параметр *t*, то величини *x*, *y*, *z* змінюються також, так що точка $M(x, y, z)$ "рухається" по прямій *l*.

Параметричні рівняння прямої зручно використовувати тоді, коли потрібно знайти точку перетину прямої з площиною. Справді, нехай маємо непаралельні між собою пряму *l* і площину σ, які відповідно задані рівняннями

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt,$$

і

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для знаходження точки перетину прямої і площини, підставимо вирази для *x*, *y*, *z* з рівняння прямої *l* у рівняння площини σ. Після нескладних перетворень одержимо

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Підставляючи тепер знайдене значення *t* у рівняння прямої, знаходимо шукану точку $M(x, y, z)$ перетину прямої *l* і площини σ.

Аналогічно до того, як було отримано формулу (2.31), можна одержати ***рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві задані точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{2.69}$$

У рівняннях (2.68) і (2.69) одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю (випадки $m = n = p = 0$ або $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = z_2 - z_1 = 0$ неможливі, бо за означенням напрямний вектор ненульовий). Якщо $m = 0, n \neq 0, p \neq 0$, то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

визначає пряму, перпендикулярну до осі абсцис. Аналогічно, рівняння, в яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до осей Oy та Oz відповідно. Якщо ж $m = n = 0,\ p \neq 0$, або $m = p = 0,\ n \neq 0$, або $n = p = 0,\ m \neq 0$, то рівняння (2.68) визначають прямі, паралельні до осей Oz, Oy, Ox відповідно, або збігаються з цими осями.

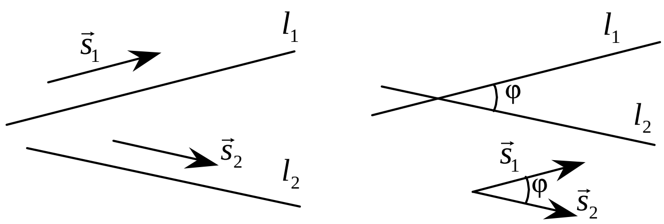


Рис. 2.55

Виведемо формулу для знаходження кута між двома прямими у просторі. Нехай прямі l_1 і l_2 задані відповідно рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Кутом φ ***між прямими*** l_1 і l_2 називають кут α між їх напрямними векторами $\vec{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$, якщо $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, і кут $\pi - \alpha$ в іншому випадку (рис. 2.55).

Аналогічно, як у § 2.11, можна отримати:

1) ***формулу для знаходження кута між прямими*** l_1 ***і*** l_2:

$$\cos\varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}};$$

2) ***умови паралельності прямих*** l_1 *і* l_2:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1};$$

3) ***умову перпендикулярності прямих*** l_1 *і* l_2:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Задача 2.22. Знайти кут між прямими

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ 2x - y + 3z + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3t - 3. \end{cases}$$

Розв'язання. З формул (2.67) і (2.68) знаходимо напрямні вектори цих прямих: $\vec{s}_1 = (2, -8, -4)$ і $\vec{s}_2 = (2, -1, 3)$. Оскільки, як легко перевірити,

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0,$$

то $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, тобто прямі перпендикулярні. ■

Виведемо тепер формули для знаходження кута між прямою і площиною та встановимо умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

Кут між прямою l ***і площиною*** σ визначається гострим кутом між прямою l та її проекцією на σ. Нехай площина σ і пряма l задані відповідно рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Позначимо через φ кут між прямою l та її проекцією l_1 на площину σ, а через δ – кут між вектором нормалі $\vec{n} = (A, B, C)$ площини σ і напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, p)$ прямої l (рис. 2.56).

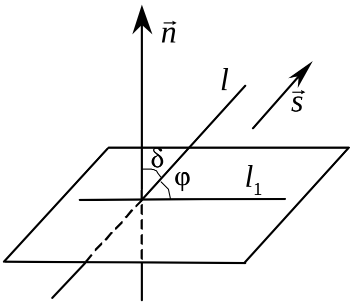


Рис. 2.56

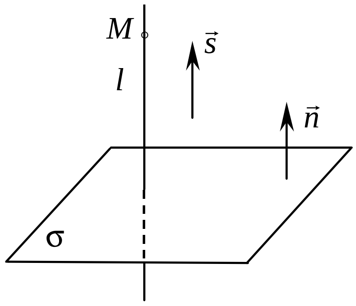


Рис. 2.57

Якщо $\delta \le 90^\circ$, то $\varphi = 90^\circ - \delta$, тому за формулами зведення одержуємо рівність $\sin\varphi = \cos\delta$. Якщо ж $\delta > 90^\circ$, то $\varphi = \delta - 90^\circ$ і $\sin\varphi = -\cos\delta$. Обидва випадки можна описати однією формулою

$$\sin\varphi = |\cos\delta|.$$

Але оскільки

$$\cos\delta = \frac{(\vec{n}, \vec{s})}{|\vec{n}||\vec{s}|},$$

то кут між прямою і площиною може бути обчислений за формулою

$$\sin\varphi = \frac{|(\vec{n}, \vec{s})|}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Якщо пряма l паралельна до площини σ, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тому

$$(\vec{n}, \vec{s}) = 0,$$

тобто ***умовою паралельності прямої та площини*** є рівність

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Якщо пряма l перпендикулярна до площини σ, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ колінеарні, тому співвідношення

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

є ***умовами перпендикулярності прямої та площини.***

Задача 2.23. Знайти рівняння прямої *l*, яка проходить через точку $M_0(1, -2, 3)$ і перпендикулярна до площини

$$2x + 3y - z + 8 = 0.$$

Розв'язання. Оскільки пряма l перпендикулярна до площини σ, то за напрямний вектор цієї прямої можна взяти вектор нормалі площини σ (рис.2.57), тобто

$$\vec{s} = \vec{n} = (2,1,-1).$$

Тепер за формулою (2.66) одержуємо рівняння прямої l:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}. \blacksquare$$

§ 2.17. Криві попиту і пропозиції. Точка рівноваги

Розглянемо залежність попиту D і пропозиції S від ціни товару P. Якщо платоспроможність населення є сталою, то чим нижча ціна на певний товар, тим вищий попит на нього. Залежність D від P має вигляд графіка спадної функції, а у найпростіших випадках – вигляд прямої

$$D = -aP + c, \quad a > 0, \ c > 0. \qquad \textbf{(2.70)}$$

У свою чергу пропозиція зростає разом із збільшенням ціни на товар і тому залежність S від P має вигляд графіка зростаючої функції, яка у найпростішому випадку також може бути лінійною, тобто

$$S = bP + d, \quad b > 0, \ d > 0. \qquad \textbf{(2.71)}$$

Величини a, b, c, d у формулах (2.70), (2.71) називають *екзогенними*. Вони залежать від низки інших причин (наприклад, від благополуччя суспільства, політичної ситуації тощо). Відзначимо, що змінні P, S, D, які входять у співвідношення (2.70), (2.71) набувають тільки додатних значень, тому графіки цих функцій розглядатимемо лише у першій чверті.

Для економіки важливою є ***умова рівноваги***, тобто умова рівності попиту і пропозиції. Ця умова задається рівністю

$$D(p) = S(p) \qquad \textbf{(2.72)}$$

і відповідає точці M перетину кривих D і S. Точку M називають ***точкою рівноваги*** (рис. 2.58).

Ціну P_0, при якій виконується умова рівноваги, називають ***рівноважною ціною***.

При покращенні благополуччя населення, що відповідає росту величини c у рівності (2.70), точка рівноваги M зміщується вправо, оскільки крива D піднімається вверх. Якщо крива пропозиції S залишається незмінною, то ціна товару зростає.

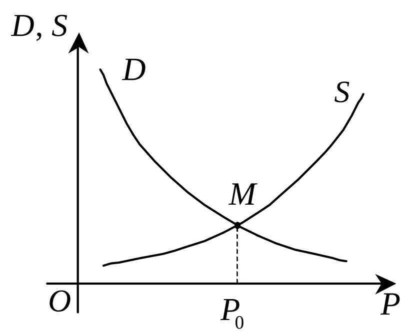


Рис. 2.58

§ 2.18. Павутиноподібна модель ринку

Однією із основних проблем ринку, що визначає процес торгування між продавцем і покупцем, є пошук рівноважної ціни.

Розглянемо найпростіший варіант цієї задачі, коли залежність попиту D і пропозиції S від ціни P є лінійною, тобто

$$D = -aP + c, \quad S = bP + d, \qquad a > 0,\ b > 0\ ,\ c > 0,\ d > 0\,.$$

Нехай спочатку за ціною P_1 виробник (у найпростішому випадку він виступає і як продавець) пропонує певну кількість товару. Ціна P_1 завжди є вищою від рівноважної, що цілком зрозуміло, адже кожний виробник прагне одержати максимальний прибуток. Покупець при цьому оцінює попит D_1 за ціною P_1 і пропонує свою ціну P_2, для якої попит D_1 дорівнює пропозиції. Ціна P_2, як правило, є нижчою від рівноважної, адже кожен покупець прагне купити товар якомога дешевше. У свою чергу виробник оцінює попит D_2, що відповідає ціні P_2, і визначає свою ціну P_3, для якої попит дорівнює пропозиції. Ця ціна є вищою від рівноважної.

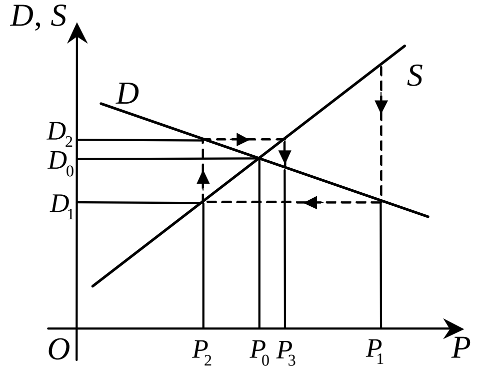


Рис. 2.59

Процес торгування продовжується і при певних умовах через деякий проміжок часу приходить до стійкого наближення до рівноважної ціни. Якщо розглянути послідовність чисел, що складається із цін, які називаються в процесі торгування, то вона прямує до рівноважної ціни P_0 (рис. 2.59).

Зауважимо, що у цій схемі спіраль торгування "скручується", якщо $b > a$. В іншому випадку відбувається або рух по замкненому циклу ($b = a$, рис. 2.60), або "розкручування" спіралі і віддалення від рівноважної ціни ($b < a$, рис. 2.61).

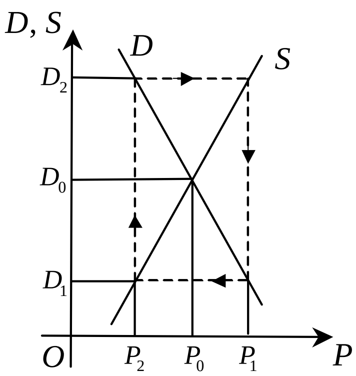


Рис. 2.60

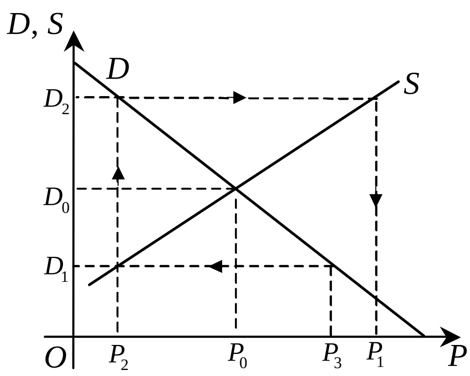


Рис. 2.61

Задача 2.24. Попит і пропозиція на деякий товар описується лінійними залежностями

$$D(P) = -aP + c, \quad S(P) = bP + d$$

відповідно. Знайти рівноважну ціну і встановити, чи є модель павутиноподібного ринку такою, що "скручується", якщо $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$, $c = 8$, $d = 1$. Дати графічне зображення.

Розв'язання. Рівноважну ціну знайдемо як абсцису точки перетину ліній

$$D(P) = -P + 8, \quad S(P) = \frac{3}{4}P + 1.$$

Отже, $D(P) = S(P)$ або

$$-P + 8 = \frac{3}{4}P + 1,$$

звідки знаходимо, що $P = 4$.

Візьмемо ціну $P_1 = 6$ – їй відповідатиме пропозиція $D_1 = 2$. Покупець визначить ціну $P_2 = \frac{4}{3}$, при якій попит і пропозиція дорівнюють 2.

Виробник оцінює попит $D_2 = \dfrac{20}{3}$, що відповідає ціні P_2, і назначає свою ціну $P_3 = \dfrac{68}{9}$, яка є вищою за початкову ціну P_1.

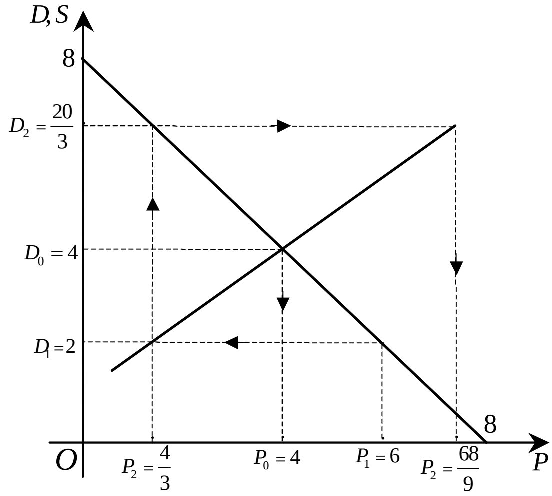


Рис. 2.62

Отже, рівноважною ціною є 4, модель павутиноподібного ринку не "скручується" (рис. 2.62). ■

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Задача 1. Задано матриці A і B. Знайти матриці:

1) $2A-3B$; 2) AB; 3) $\left(A^T+B\right)^2$.

1.1. $A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & -1\\ 6 & -2 & -3\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 2\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

1.2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -2 & 0\\ 5 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 5 & 1 & 3\\ 6 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

1.3. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 1 & 5 & 3\\ -5 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

1.4. $A=\begin{pmatrix}7 & 5 & -2\\ 0 & 1 & 8\\ -6 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ -3 & 0 & -1\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

1.5. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ 4 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ -4 & 0 & 3\\ 3 & -3 & 8\end{pmatrix}$.

1.6. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 6 & 2 & -2\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -8\\ 3 & 2 & 7\end{pmatrix}$.

1.7. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 8 & -3\\ 0 & 9 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 5 & 6 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

1.8. $A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 9\\ 0 & -5 & 3\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 4 & 2 & -6\\ 8 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

1.9. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ -1 & 5 & 3\\ 0 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

1.10. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -3\\ 5 & 4 & 1\\ -6 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 5\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

1.11. $A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\ 7 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -4 & 3\\ -3 & 0 & 2\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

1.12. $A=\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 6 & -1 & 0\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

1.13. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & -5 & 2\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -3\\ -1 & -7 & 0\\ -3 & 6 & -2\end{pmatrix}$.

1.14. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

1.15 $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -1\\ 4 & -7 & 0\\ 6 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 5 & 1 & -9\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

1.16. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, 1.17. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 1.18. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.19. $A=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 1.20. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, 1.21. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.22. $A=\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 8 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 1.23. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, 1.24. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.25. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & -1 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, 1.26. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 1.27. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 3 & -9 & 4 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

1.28. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, 1.29. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 1.30. $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Обчислити визначник матриці, мінори M_{12}, M_{42} та алгебричні доповнення A_{33}, A_{14}.

2.1. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.   2.2. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.   2.3. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

2.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & -2 \\ 4 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.   2.5. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.   2.6. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

2.7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.   2.8. $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & -2 \\ 5 & 4 & -3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.   2.9. $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{pmatrix}$.

2.10. $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.   2.11. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.   2.12. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.   2.14. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.   2.15. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2.16. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.   2.17. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.   2.18. $\begin{pmatrix} 7 & 9 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.19. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.   2.20. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 8 & 1 \\ -8 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.   2.21. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.22. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 3 \\ -5 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.   2.23. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.   2.24. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -6 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

2.25. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. 2.26. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. 2.27. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -6 \\ 5 & -1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.28. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 9 & 6 \\ 5 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 2.29. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 2.30. $\begin{pmatrix} 7 & -9 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Знайти матрицю, обернену до заданої.

3.1. $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. 3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. 3.3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.4. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. 3.5. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 3.6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

3.7. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 3.8. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 3.9. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

3.10. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 3.11. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. 3.12. $\begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3.13. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. 3.14. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 3.15. $\begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 4 & -7 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.16. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 3.17. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 3.18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3.19. $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. 3.20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 3.21. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.22. $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. 3.23. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 3.24. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

3.25. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3.26. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 3.27. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.28. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$. 3.29. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3.30. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Знайти ранг матриці.

4.1. $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 & 0 & 3 \\ 6 & 11 & 8 & 2 & 5 \\ -12 & -17 & -14 & -8 & -11 \end{pmatrix}$. 4.2. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 6 \\ -4 & -12 & 0 & -4 & -17 \end{pmatrix}$.

4.3. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -7 & -4 \\ -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ -1 & -6 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 4.4. $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

4.5. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. 4.6. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & -7 & -4 \\ 6 & 1 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

4.7. $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & -4 & -1 \\ 9 & 4 & 7 & 13 & 10 \end{pmatrix}$. 4.8. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -5 & -2 \\ 7 & 2 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$.

4.9. $\begin{pmatrix} 7 & 12 & 9 & 3 & 6 \\ 6 & 11 & 8 & 2 & 5 \\ -3 & -8 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 4.10. $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

4.11. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 2 \\ -1 & 16 & 13 & 16 & 10 \end{pmatrix}$. 4.12. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ -9 & 8 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

4.13. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ -8 & 9 & 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$. 4.14. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 18 & 15 & 2 & 12 \end{pmatrix}$.

4.15. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & -8 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & 25 & 22 & 9 & 19 \end{pmatrix}$.

4.16. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & -8 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ -8 & 5 & -10 & 9 & -25 \end{pmatrix}$.

4.17. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & -8 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ -12 & -5 & -20 & 6 & -35 \end{pmatrix}$.

4.18. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 6 & 13 & -2 & 24 & -17 \end{pmatrix}$.

4.19. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 9 & -2 \\ -12 & -7 & -10 & -9 & -13 \\ -9 & -2 & -17 & 9 & -32 \end{pmatrix}$.

4.20. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & -4 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ 5 & 12 & -3 & 23 & -18 \end{pmatrix}$.

4.21. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 4 & -7 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 11 & -4 & 22 & -19 \end{pmatrix}$.

4.22. $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -7 & 1 & -10 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & -15 & 11 & -30 \end{pmatrix}$.

4.23. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 6 & 13 & -2 & 24 & -17 \end{pmatrix}$.

4.24. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ -13 & 3 & -3 & -8 & -9 \end{pmatrix}$.

4.25. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 9 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ -11 & 5 & -1 & -6 & -7 \end{pmatrix}$.

4.26. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & -4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & 10 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4.27. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 12 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.28. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 16 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4.29. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 6 & -5 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ -11 & 5 & -1 & -6 & -7 \end{pmatrix}$.

4.30. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ -10 & 6 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Розв’язати систему лінійних алгебричних рівнянь, використовуючи:

а) метод Крамера, б) матричний метод.

Виконати перевірку правильності знайденого розв’язку.

5.1. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -7. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 10, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Задача 6. Розв’язати систему лінійних алгебричних рівнянь, використовуючи:

а) метод Гауса, б) метод Жордана-Гауса.

Виконати перевірку.

6.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -9, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -7, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 17, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -2. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = -7. \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1, \\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -5. \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 3x_4 = -4, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -1, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 = -12. \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -5. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -4, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -9, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -4. \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

6.21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -8, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 = -9. \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

6.24. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 17, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$

6.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = -9. \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

6.27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -8, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -10. \end{cases}$

6.28. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

6.29. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$

6.30. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

Задача 7. Дослідити сумісність системи. У випадку сумісності системи знайти її загальний та базовий розв’язки.

7.1. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

7.6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -10, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -6. \end{cases}$

7.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

7.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

7.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -8, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -10. \end{cases}$

7.11. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

7.12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

7.13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

7.14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$

7.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$

7.16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

7.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$

7.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 9. \end{cases}$

7.19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

7.20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

7.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 - 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

7.22. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

7.23. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1, \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3, \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3, \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3. \end{cases}$

7.24. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-x_4=2, \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3-3x_4=2. \end{cases}$

7.25. $\begin{cases} x_1+2x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2+6x_3-3x_4=3, \\ 4x_1-x_2+8x_3-4x_4=-3, \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=3. \end{cases}$

7.26. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2, \\ 4x_1+x_3-7x_4=3, \\ 2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3. \end{cases}$

7.27. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=-2, \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1, \\ x_1+2x_2+2x_3-6x_4=-10. \end{cases}$

7.28. $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-7, \\ 3x_1-7x_2+x_3-5x_4=-8, \\ x_2-x_3-x_4=-1. \end{cases}$

7.29. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_4=-4, \\ 5x_1+4x_2+x_3+3x_4=-5, \\ 2x_1+x_2+x_3+4x_4=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-3. \end{cases}$

7.30. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-x_4=7. \end{cases}$

Задача 8. Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, який заданий матрицею A.

8.1. $A=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

8.2. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

8.3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

8.6. $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

8.7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.8. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

8.9. $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

8.10. $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.11. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.12. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.13. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 8.14. $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. 8.15. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

8.16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 8.17. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 8.18. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

8.19. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. 8.20. $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 8.21. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.22. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 8.23. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 8.24. $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

8.25. $A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 8.26. $A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 8.27. $A=\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

8.28. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 8.29. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. 8.30. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Точки *A, B, C* задані своїми координатами. Знайти:

1) $\vec{d} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 0{,}5\overrightarrow{AC}$; 2) $|\vec{d}|$; 3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$;

4) $(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})^2$; 5) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$;

6) число α, щоб $\vec{p} \perp \overrightarrow{BC}$, де $\vec{p} = (2, \alpha, -4)$.

9.1. $A(2,0,-5)$, $B(1,-3,4)$, $C(2,-5,5)$. 9.2. $A(4,2,-7)$, $B(5,0,3)$, $C(-3,6,-2)$.

9.3. $A(-1,3,4)$, $B(2,-1,0)$, $C(6,-2,-3)$. 9.4. $A(5,0,8)$, $B(-3,1,7)$, $C(3,-4,-9)$.

9.5. $A(2,-1,6)$, $B(-1,3,8)$, $C(5,-2,2)$. 9.6. $A(4,2,9)$, $B(0,-1,3)$, $C(4,-3,4)$.

9.7. $A(-9,5,3)$, $B(7,1,-2)$, $C(2,3,5)$. 9.8. $A(5,-1,-2)$, $B(6,0,7)$, $C(3,-2,4)$.

9.9. $A(2,-1,4)$, $B(3,-7,-6)$, $C(2,-3,3)$. 9.10. $A(3,7,0)$, $B(4,6,-1)$, $C(3,2,-7)$.

9.11. $A(1,-2,4)$, $B(7,3,5)$, $C(6,-3,-2)$. 9.12. $A(3,-1,6)$, $B(5,7,10)$, $C(4,2,-2)$.

9.13. $A(8,3,-1)$, $B(4,1,3)$, $C(2,2,-4)$.
9.14. $A(5,0,2)$, $B(6,4,3)$, $C(5,3,6)$.
9.15. $A(1,2,-1)$, $B(2,-7,1)$, $C(6,-2,3)$.
9.16. $A(7,9,-2)$, $B(5,4,3)$, $C(4,4,-1)$.
9.17. $A(3,7,0)$, $B(1,-3,4)$, $C(4,-2,-2)$.
9.18. $A(-2,7,-1)$, $B(-3,5,2)$, $C(2,3,3)$.
9.19. $A(0,3,2)$, $B(1,-2,1)$, $C(5,-2,3)$.
9.20. $A(5,0,-1)$, $B(7,2,3)$, $C(2,-1,3)$.
9.21. $A(-1,4,2)$, $B(3,-2,6)$, $C(2,3,-6)$.
9.22. $A(-2,-3,-2)$, $B(1,0,5)$, $C(3,9,1)$.
9.23. $A(3,4,-1)$, $B(2,-1,1)$, $C(6,-3,5)$.
9.24. $A(-2,2,5)$, $B(1,0,2)$, $C(1,-5,-2)$.
9.25. $A(-3,3,-1)$, $B(1,1,2)$, $C(7,-3,3)$.
9.26. $A(4,7,4)$, $B(0,-5,2)$, $C(-2,-3,5)$.
9.27. $A(0,3,2)$, $B(3,5,-2)$, $C(-2,3,-3)$.
9.28. $A(6,6,-1)$, $B(-3,5,6)$, $C(-2,0,3)$.
9.29. $A(3,-7,5)$, $B(0,5,2)$, $C(2,0,3)$.
9.30. $A(4,7,-4)$, $B(-4,5,0)$, $C(2,6,3)$.

Задача 10. Піраміда *ABCD* задана координатами своїх вершин. Використовуючи властивості векторного та мішаного добутків, знайти:

1) площу грані *ABC*;
2) об’єм піраміди *ABCD*.

10.1. $A(5,0,2)$, $B(6,4,3)$, $C(5,3,6)$, $D(1,4,1)$.
10.2. $A(4,2,-7)$, $B(5,0,3)$, $C(-3,6,-2)$, $D(1,3,4)$.
10.3. $A(-1,3,4)$, $B(2,-1,0)$, $C(6,-2,3)$, $D(0,2,2)$.
10.4. $A(5,0,8)$, $B(-3,1,7)$, $C(3,-4,-9)$, $D(0,1,6)$.
10.5. $A(2,-1,6)$, $B(-1,3,8)$, $C(5,-2,2)$, $D(1,4,4)$.
10.6. $A(4,2,9)$, $B(0,-1,3)$, $C(4,-3,4)$, $D(3,4,-2)$.
10.7. $A(-9,5,3)$, $B(7,1,-2)$, $C(2,3,5)$, $D(0,4,-4)$.
10.8. $A(5,-1,2)$, $B(6,0,7)$, $C(3,-2,4)$, $D(5,2,0)$.
10.9. $A(2,-1,4)$, $B(3,7,-6)$, $C(2,3,3)$, $D(4,2,0)$.
10.10. $A(3,7,0)$, $B(4,6,-1)$, $C(3,2,-7)$, $D(1,4,5)$.
10.11. $A(1,-2,4)$, $B(7,3,5)$, $C(6,-3,2)$, $D(0,2,0)$.
10.12. $A(3,-1,6)$, $B(5,7,8)$, $C(4,-2,2)$, $D(1,1,0)$.
10.13. $A(8,3,-1)$, $B(4,1,3)$, $C(2,2,-4)$, $D(1,2,4)$.
10.14. $A(2,0,-5)$, $B(1,3,4)$, $C(2,-5,5)$, $D(3,4,1)$.
10.15. $A(-1,2,1)$, $B(2,-1,1)$, $C(6,-2,3)$, $D(2,1,4)$.

10.16. $A(7,9,-2),\ B(5,4,3),\ C(4,4,-1), D(0,2,0)$.

10.17. $A(3,7,0),\ B(1,-3,4),\ C(4,2,2),\ D(0,1,-4)$.

10.18. $A(-2,7,-1),\ B(-3,5,2),\ C(2,3,3),\ D(1,1,1)$.

10.19. $A(0,3,2),\ B(1,-2,1),\ C(5,-2,3),\ D(4,3,6)$.

10.20. $A(5,0,-1),\ B(1,2,3),\ C(2,-1,3),\ D(0,1,2)$.

10.21. $A(1,4,2),\ B(3,-2,6),\ C(2,3,-6),\ D(0,0,2)$.

10.22. $A(-2,-3,2),\ B(-1,0,5),\ C(3,9,1),\ D(0,0,1)$.

10.23. $A(3,4,-1),\ B(2,-1,1),\ C(6,-3,5),\ D(1,0,1)$.

10.24. $A(-2,2,5),\ B(1,0,2),\ C(1,-5,-2),\ D(8,0,1)$.

10.25. $A(-3,3,1),\ B(1,1,2),\ C(7,-3,3),\ D(6,6,1)$.

10.26. $A(4,7,4),\ B(0,-5,2),\ C(-2,3,5),\ D(0,1,7)$.

10.27. $A(0,3,2),\ B(3,-1,-2),\ C(2,3,3),\ D(0,0,7)$.

10.28. $A(6,6,-1),\ B(-3,5,6),\ C(-2,0,3),\ D(1,0,1)$.

10.29. $A(3,7,5),\ B(0,5,2),\ C(2,0,3),\ D(-3,-2,2)$.

10.30. $A(4,7,-1),\ B(4,5,0),\ C(2,6,3),\ D(0,-4,2)$.

Задача 11. Трикутник *ABC* заданий координатами своїх вершин. Знайти:

1) рівняння прямих, що містять усі сторони трикутника;
2) рівняння прямих *AK* і *AN*, де *K* і *N* – точки, що ділять сторону *BC* на три рівні частини;
3) рівняння прямої, що проходить через точку *C*, паралельно до прямої *AB*;
4) рівняння висоти *BH* та її довжину;
5) рівняння медіани *CM* та її довжину;
6) точку перетину висоти *BH* та медіани *CM*;
7) найбільший внутрішній кут трикутника;
8) периметр трикутника;
9) площу трикутника;
10) рівняння бісектриси *AP*.

11.1. $A(6,6,-1),\ B(-3,5,6),\ C(-2,0,3)$.

11.2. $A(4,2,-7),\ B(5,0,3),\ C(-3,6,-2)$.

11.3. $A(-1,3,4),\ B(2,-1,0),\ C(6,-2,-3)$.

11.4. $A(5,0,8),\ B(-3,1,7),\ C(3,-4,-9)$.

11.5. $A(2,-1,6),\ B(-1,3,8),\ C(5,-2,2)$.

11.6. $A(4,2,9),\ B(0,-1,3),\ C(4,-3,4)$.

11.7. $A(-9,5,3),\ B(7,1,-2),\ C(2,3,5)$.

11.8. $A(5,-1,-2),\ B(6,0,7),\ C(3,-2,4)$.

11.9. $A(2,-1,4),\ B(3,-7,-6),\ C(2,-3,3)$.

11.10. $A(3,7,0),\ B(4,6,-1),\ C(3,2,-7)$.

11.11. $A(1,-2,4),\ B(7,3,5),\ C(6,-3,-2)$.

11.12. $A(3,-1,6),\ B(5,7,10),\ C(4,-2,2)$.

11.13. $A(8,3,-1),\ B(4,1,3),\ C(2,2,-4)$.

11.14. $A(5,0,2),\ B(6,4,3),\ C(5,3,6)$.

11.15. $A(-1,2,1),\ B(2,-7,1),\ C(6,2,-3)$.

11.16. $A(7,9,-2),\ B(5,4,3),\ C(4,4,-1)$.

11.17. $A(3,7,0),\ B(1,-3,4),\ C(4,-2,-2)$.

11.18. $A(-2,7,-1),\ B(-3,5,2),\ C(2,3,3)$.

11.19. $A(0,3,2),\ B(1,-2,1),\ C(5,-2,3)$.

11.20. $A(5,0,-1),\ B(7,2,3),\ C(2,-1,3)$.

11.21. $A(4,7,-4),\ B(-4,5,0),\ C(2,6,3)$.

11.22. $A(-2,-3,-2),\ B(1,0,5),\ C(3,9,1)$.

11.23. $A(3,4,-1),\ B(2,-1,1),\ C(6,-3,5)$.

11.24. $A(-2,2,5),\ B(1,0,2),\ C(1,-5,-2)$.

11.25. $A(-3,3,-1),\ B(1,1,2),\ C(7,-3,3)$.

11.26. $A(4,7,4),\ B(0,-5,2),\ C(2,-3,5)$.

11.27. $A(0,3,2),\ B(3,-5,-2),\ C(-2,3,3)$.

11.28. $A(2,0,-5),\ B(1,-3,4),\ C(2,-5,5)$.

11.29. $A(3,7,5),\ B(0,5,2),\ C(2,0,3)$.

11.30. $A(-1,4,2),\ B(3,-2,6),\ C(2,3,-6)$.

Задача 12. Відомі координати вершин піраміди *ABCD*. Знайти:

1) рівняння прямої *AB*;
2) рівняння площини, що містить грань *ABC*;
3) рівняння висоти, опущеної з точки *D* на площину *ABC*;
4) рівняння прямої *CL*, паралельної до ребра *AD* ;
5) точку *M*, яка симетрична точці *D* відносно грані *ABC*;
6) рівняння площини, яка проходить через точку *D* і перпендикулярна до прямої *AD*;
7) рівняння прямої *AH*, перпендикулярної до площини *ABC*;
8) кут між прямою *AD* і площиною *ABC*;
9) відстань між прямими *AB* і *CD* .

12.1. $A(0,7,1)$, $B(2,–1,5)$, $C(1,6,3)$, $D(3,–9,8)$.

12.2. $A(9,5,5)$, $B(–3,7,1)$, $C(5,7,8)$, $D(6,9,2)$.

12.3. $A(2,3,4)$, $B(1,1,5)$, $C(4,9,3)$, $D(3,6,7)$.

12.4. $A(3,5,4)$, $B(5,8,3)$, $C(1,2,–2)$, $D(–1,0,2)$.

12.5. $A(3,–1,2)$, $B(–1,0,1)$, $C(1,7,3)$, $D(8,5,8)$.

12.6. $A(3,1,4)$, $B(–1,6,1)$, $C(–1,1,6)$, $D(0,4,–1)$.

12.7. $A(0,4,5)$, $B(3,–2,1)$, $C(4,5,6)$, $D(3,3,2)$.

12.8. $A(2,–1,7)$, $B(6,3,1)$, $C(3,2,8)$, $D(2,–3,7)$.

12.9. $A(2,1,7)$, $B(3,3,6)$, $C(2,–3,9)$, $D(1,2,5)$.

12.10. $A(6,6,5)$, $B(4,9,5)$, $C(4,6,11)$, $D(6,9,3)$.

12.11. $A(7,2,2)$, $B(–5,7,–7)$, $C(5,–3,1)$, $D(2,3,7)$.

12.12. $A(8,–6,4)$, $B(10,5,–5)$, $C(5,6,–8)$, $D(8,10,7)$.

12.13. $A(1,–1,3)$, $B(6,5,8)$, $C(3,5,8)$, $D(8,4,1)$.

12.14. $A(1,–2,7)$, $B(4,2,10)$, $C(2,3,5)$, $D(5,3,7)$.

12.15. $A(4,2,10)$, $B(1,2,0)$, $C(3,5,7)$, $D(2,–3,5)$.

12.16. $A(2,3,5)$, $B(5,3,–7)$, $C(1,2,7)$, $D(4,2,0)$.

12.17. $A(5,3,7)$, $B(–2,3,5)$, $C(4,2,10)$, $D(1,2,7)$.

12.18. $A(4,3,5)$, $B(1,9,7)$, $C(0,2,0)$, $D(5,3,10)$.

12.19. $A(3,2,5)$, $B(4,0,6)$, $C(2,6,5)$, $D(6,4,–1)$.

12.20. $A(2,1,6)$, $B(1,4,9)$, $C(2,–5,8)$, $D(5,4,2)$.

12.21. $A(1,8,2)$, $B(5,2,6)$, $C(5,7,4)$, $D(4,10,9)$.

12.22. $A(10,9,6)$, $B(2,8,2)$, $C(–2,9,–3)$, $D(7,10,3)$.

12.23. $A(3,5,4)$, $B(8,7,4)$, $C(5,10,4)$, $D(4,7,8)$.

12.24. $A(4,6,5)$, $B(6,9,4)$, $C(2,10,10)$, $D(7,5,9)$.

12.25. $A(4,4,10)$, $B(7,10,2)$, $C(2,8,4)$, $D(9,6,9)$.

12.26. $A(4,2,5)$, $B(0,7,1)$, $C(0,2,7)$, $D(1,5,0)$.

12.27. $A(6,8,2)$, $B(5,4,7)$, $C(2,4,5)$, $D(7,3,7)$.

12.28. $A(7,5,3)$, $B(9,4,4)$, $C(4,5,7)$, $D(7,9,6)$.

12.29. $A(6,1,1)$, $B(4,6,6)$, $C(4,2,0)$, $D(1,2,6)$.

12.30. $A(5,5,4)$, $B(1,–1,4)$, $C(3,5,1)$, $D(5,8,–1)$.

Задача 13. За допомогою таблиці заданий міжгалузевий баланс тригалузевої моделі господарства.

Галузь виробництва	Галузь споживання			Кінцевий продукт Y	Валовий випуск X	Новий кінцевий продукт $\overline{Y}$
	1	2	3			
I	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1	$\overline{y_1}$
II	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2	$\overline{y_2}$
III	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_3	$\overline{y_3}$

Визначити такі економічні показники:

1. коефіцієнти прямих витрат (матрицю прямих витрат A);
2. коефіцієнти повних витрат (матрицю повних витрат S);
3. валовий випуск $\overline{X} = \left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\right)$ галузей що забезпечує новий кінцевий продукт $\overline{Y} = \left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}\right)$.

№	Галузь виробництва	Галузь споживання			Кінцевий продукт Y	Валовий випуск X	Новий кінцевий продукт $\overline{Y}$
		1	2	3			
13.1	I	40	10	5	50	100	100
	II	30	30	0	60	120	90
	III	0	20	40	100	160	90
13.2	I	20	20	10	50	100	80
	II	40	30	30	100	200	120
	III	40	40	50	170	300	100
13.3	I	50	20	30	20	120	50
	II	10	10	50	30	100	50
	III	20	50	80	50	200	40
13.4	I	10	40	20	30	100	50
	II	50	20	10	120	200	100
	III	20	10	20	50	100	80

13.5	I II III	30 50 20	40 40 10	10 50 10	120 160 60	200 300 100	100 120 100
13.6	I II III	10 50 20	50 10 40	50 10 80	190 30 60	300 100 200	100 80 70
13.7	I II III	80 20 40	50 60 10	80 10 10	50 60 40	200 150 100	80 100 80
13.8	I II III	80 20 60	10 40 50	40 10 10	170 80 20	300 150 150	100 100 50
13.9	I II III	60 20 10	40 20 20	10 20 30	90 40 90	200 100 150	100 50 100
13.10	I II III	10 20 30	10 30 20	20 30 30	30 10 20	70 90 100	20 40 30
13.11	I II III	50 100 100	100 50 60	100 50 10	150 100 30	400 300 200	100 80 60
13.12	I II III	60 50 50	0 100 30	10 50 150	30 100 170	200 300 400	60 100 100
13.13	I II III	100 50 50	400 50 100	50 50 100	110 50 150	300 200 400	100 100 100
13.14	I II III	10 20 30	60 100 100	10 50 30	20 130 40	100 300 200	100 100 80

13.15	I	10	20	20	50	100	100
	II	50	100	100	150	400	120
	III	50	100	100	50	300	100
13.16	I	50	20	20	110	200	100
	II	50	10	20	20	100	50
	III	50	10	10	30	100	60
13.17	I	20	10	20	50	100	80
	II	20	100	20	60	200	100
	III	30	20	40	60	150	60
13.18	I	30	70	10	40	150	100
	II	40	60	50	50	200	100
	III	30	10	30	30	100	40
13.19	I	50	100	40	60	250	100
	II	40	20	30	110	200	100
	III	40	30	10	20	100	40
13.20	I	50	80	10	60	250	100
	II	50	50	40	110	200	60
	III	20	40	10	20	100	50
13.21	I	20	0	10	60	200	40
	II	10	10	10	110	250	50
	III	0	30	20	30	100	60
13.22	I	10	30	20	20	50	40
	II	20	10	20	60	100	50
	III	10	40	10	40	800	60
13.23	I	30	20	10	30	90	60
	II	30	50	20	20	120	60
	III	10	20	30	20	80	40
13.24	I	40	30	10	20	100	60
	II	40	30	30	30	130	40
	III	20	30	20	20	90	80

13.25	I II III	30 30 10	20 40 10	10 20 30	60 10 30	120 100 80	30 40 50
13.26	I II III	10 50 20	30 10 30	20 20 40	20 30 50	80 110 140	60 50 50
13.27	I II III	20 10 30	10 40 20	50 30 40	10 30 40	90 120 100	40 60 50
13.28	I II III	10 10 30	10 50 20	40 30 10	30 30 40	90 120 100	60 90 50
13.29	I II III	50 40 10	0 60 30	10 50 10	90 150 50	200 300 100	80 100 100
13.30	I II III	60 20 80	10 30 20	100 20 10	130 30 90	300 100 200	100 60 180

Задача 14. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – частка національного доходу, яку країна S_j витрачає на закупівлю товарів у країни S_i, при цьому

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 1, \qquad j = 1,2,3.$$

Знайти співвідношення національних доходів країн для збалансованої торгівлі між ними.

14.1. $A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$.

14.2. $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,5 \\ 0 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$.

14.3. $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,5 \\ 0 & 0,1 & 05 \end{pmatrix}$.

14.4. $A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0 \\ 0,6 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$.

14.5. $A=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

14.6. $A=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

14.7. $A=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

14.8. $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$.

14.9. $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}$.

14.10. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$.

14.11. $A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$.

14.12. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$.

14.13. $A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$.

14.14. $A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$.

14.15. $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$.

14.16. $A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$.

14.17. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$.

14.18. $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}$.

14.19. $A=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

14.20. $A=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$,

14.21. $A=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$.

14.22. $A=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$.

14.23. $A=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$.

14.24. $A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

14.25. $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$.

14.26. $A=\begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}$.

14.27. $A=\begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}$.

14.28. $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$.

14,29. $A=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$.

14.30. $A=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Задача 15. З пункту A в пункт B необхідно перевезти обладнання трьох типів. Для перевезення обладнання завод може замовити три види транспорту. Кількість одиниць обладнання кожного типу, що вміщується на певний вид транспорту, наведена у таблиці.

Тип обладнання	Кількість обладнання (од.)	Вид транспорту		
		T_1	T_2	T_3
I	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
II	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
III	B_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Записати у математичній формі умови перевезення обладнання з пункту A в пункт B. Встановити, скільки одиниць транспорту кожного виду потрібно замовити для перевезення обладнання.

№ варіанту	Тип обладнання	Кількість обладнання (од.)	Вид транспорту		
			T_1	T_2	T_3
15.1	I	260	1	6	2
	II	200	3	2	1
	III	290	4	1	5

15.2	I	200	3	2	2
	II	220	4	2	1
	III	170	3	2	1
15.3	I	29	2	3	1
	II	38	4	2	2
	III	38	3	1	3
15.4	I	240	2	4	5
	II	150	3	2	1
	III	220	4	3	2
15.5	I	140	3	2	2
	II	160	4	3	1
	III	220	5	3	3
15.6	I	100	3	2	1
	II	180	4	3	4
	III	130	3	4	3
15.7	I	135	3	3	1
	II	175	4	3	2
	III	210	6	1	3
15.8	I	170	4	3	3
	II	115	2	1	4
	III	105	3	2	2
15.9	I	170	3	4	3
	II	105	1	2	4
	III	95	2	1	3
15.10	I	165	4	3	3
	II	170	5	1	4
	III	175	3	2	5
15.11	I	200	3	4	4
	II	135	4	1	2
	III	210	5	6	1

15.12	I	110	3	4	4
	II	80	4	1	2
	III	70	2	5	7
15.13	I	38	2	3	3
	II	27	4	1	2
	III	44	3	3	5
15.14	I	69	3	3	5
	II	56	4	3	2
	III	105	7	8	1
15.15	I	73	3	2	4
	II	184	7	9	7
	III	130	9	5	3
15.16	I	200	3	4	1
	II	270	2	3	5
	III	420	4	3	8
15.17	I	395	7	8	9
	II	250	5	4	6
	III	135	3	2	3
15.18	I	240	4	5	3
	II	320	7	8	1
	III	220	4	2	5
15.19	I	164	10	4	8
	II	146	5	11	6
	III	190	9	10	8
15.20	I	335	11	15	14
	II	274	12	10	11
	III	295	10	4	9
15.21	I	204	8	9	10
	II	146	12	9	11
	III	300	10	10	10

15.22	I	103	4	9	8
	II	159	12	10	7
	III	125	10	4	9
15.23	I	140	12	4	8
	II	93	11	5	3
	III	213	1	10	15
15.24	I	119	2	1	8
	II	96	3	2	5
	III	133	4	3	4
15.25	I	70	3	2	1
	II	115	4	3	3
	III	130	5	4	2
15.26	I	120	2	8	1
	II	140	4	5	3
	III	95	3	2	3
15.27	I	110	3	4	3
	II	110	4	3	3
	III	132	3	4	4
15.28	I	74	4	2	4
	II	183	6	9	7
	III	120	8	5	3
15.29	I	210	3	4	1
	II	260	2	3	5
	III	400	4	3	6
15.30	I	385	7	6	7
	II	245	5	4	6
	III	130	3	2	4

Задача 16. Підприємство випускає вироби двох видів *A* і *B*, використовуючи при цьому сировину трьох типів. Запаси сировини, витрати сировини кожного типу, на один виріб, ціна готового продукту кожного виду та мінімальна сума *S* від реалізації готової продукції задані таблицею.

Тип сировини	Норма витрат		Запас (ум. од.)	Ціна (ум. од.)		Сума (ум. од.)
	Виріб *A*	Виріб *B*		Вид *A*	Вид *B*	
I	a_{11}	a_{12}	b_1	P_1	P_2	S
II	a_{21}	a_{22}	b_2			
III	a_{31}	a_{32}	b_3			

Яким умовам повинен задовольняти план випуску виробів, щоб витрати сировини не перевищували наявного запасу, а грошова сума від реалізації була не меншою від мінімальної *S*? У площині *OXY* зобразити область допустимих планів випуску виробів.

№	Тип сировини	Норма витрат		Запас (ум. од.)	Ціна (ум. од.)		Сума (ум. од.)
		Виріб A	Виріб B		Вид A	Вид B	
16.1	I	5	9	4500	300	400	120000
	II	6	7	4200			
	III	2	0	700			
16.2	I	0	3	900	200	400	80000
	II	5	4	2000			
	III	4	5	2000			
16.3	I	4	9	3600	200	500	100000
	II	2	0	8000			
	III	6	5	3000			
16.4	I	0	8	6400	700	200	140000
	II	9	10	9000			
	III	7	14	9800			
16.5	I	5	13	6500	300	1000	300000
	II	10	12	12000			

	III	9	0	8100			
16.6	I	1	0	200	100	100	10000
	II	0	1	200			
	III	3	3	900			
16.7	I	8	10	8000	500	500	250000
	II	7	14	9800			
	III	6	0	3600			
16.8	I	7	5	3500	600	200	12000
	II	4	8	3200			
	III	7	0	4900			
16.9	I	2	0	900	300	200	6000
	II	8	7	5600			
	III	6	10	6000			
16.10	I	3	2	1500	1000	300	300000
	II	0	8	2400			
	III	4	11	4400			
16.11	I	0	2	400	200	400	80000
	II	0	8	6400			
	III	5	12	6000			
16.12	I	2	9	1800	300	700	210000
	II	8	9	7200			
	III	0	8	2400			
16.13	I	5	7	3500	200	500	100000
	II	3	10	3000			
	III	0	2	500			
16.14	I	5	8	4000	600	200	120000
	II	8	5	4000			
	III	4	0	1600			
16.15	I	7	11	7700	800	300	240000
	II	8	8	6400			

	III	0	4	2400			
16.16	I	6	9	5400	800	300	240000
	II	0	4	1200			
	III	7	9	6300			
16.17	I	0	2	900	400	700	280000
	II	8	9	7200			
	III	11	5	5500			
16.18	I	6	7	4200	500	300	160000
	II	7	5	3500			
	III	4	0	1600			
16.19	I	5	7	3500	300	400	120000
	II	7	5	3500			
	III	0	2	800			
16.20	I	6	7	4200	300	400	120000
	II	7	6	4200			
	III	2	0	1000			
16.21	I	4	8	3200	400	400	160000
	II	8	4	3200			
	III	3	0	900			
16.22	I	5	6	3000	300	500	150000
	II	6	5	3000			
	III	0	2	800			
16.23	I	6	6	3600	300	600	180000
	II	5	7	3500			
	III	3	0	1200			
16.24	I	5	7	3500	300	600	180000
	II	7	5	3500			
	III	0	3	1200			
16.25	I	4	4	1600	300	500	150000
	II	4	0	2800			

	III	4	4	3600			
16.26	I	5	7	3500	300	500	150000
	II	0	2	800			
	III	4	3	1200			
16.27	I	8	7	5600	400	600	240000
	II	5	8	4000			
	III	0	2	300			
16.28	I	8	7	5600	300	600	180000
	II	0	4	2400			
	III	9	6	5400			
16.29	I	2	3	1800	200	700	140000
	II	9	6	5400			
	III	0	3	1500			
16.30	I	8	6	4800	500	600	300000
	II	0	5	3500			
	III	11	5	55			

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. **Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.** Высшая математика для экономистов. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
2. **Барковський В.В., Барковська Н.В.** Математика для економістів. Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1999. – 399 с.
3. **Бугір М. К.** Математика для економістів. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 192 с.
4. **Васильченко І.П.** Вища математика для економістів. – К.: Знання-Прес, 2002. – 454 с.
5. **Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.** Высшая математика в примерах и задачах. В 2 ч.: Ч.1. – М.: Высшая школа, 1980. – 320 с., ч.2. – М.: Высшая школа, 1980. - 365 с.
6. **Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И.** Курс высшей математики для экономических вузов. Ч.1. – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.
7. **Колесников А.Н.** Краткий курс математики для экономистов. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 208 с.
8. **Красс М.Н.** Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.
9. **Малыхин В.И.** Математика в экономике. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 352 с.
10. **Берман Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1969. – 440 с.
11. **Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й.** Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Ч. 1. – К.: Либідь, 1992. – 228 с.
12. **Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Щандра И.Г.** Математика в экономике. В 2-х ч. Ч. 1. М.: Финансы и статистика, 2000. – 224 с.; Ч. 2. М.: Финансы и статистика, 1999. – 376 с.
13. **Тевяшев А.Д., Литвин О.Г.** Вища математика. Загальний курс. Збірник задач та вправ. – Харків: Рубікон, 1999. – 320 с.

ЗМІСТ